Thomas Viken

Den pythagoreiske læresetning i fire norske lærebøker fra 1935 til 2015

Masteroppgave i LMM55005 Vitenskapsteori og metode, matematikkdidaktikk (5-10)
Trondheim, mai 2018

Norges teknisk-natutvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på etterutdanningen min i matematikkdidaktikk.

Det er flere personer som har vært med og hjulpet meg i prosessen med å ferdigstille denne oppgaven og jeg ønsker derfor å takke disse.

Først ønsker jeg å rette en stor takk til min veileder Svein Arne Sikko ved NTNU som har gitt tydelig og konkrete tilbakemeldinger og som ikke minst har vært rask med å gi tilbakemelding. Hjelpen fra han har vært svært profesjonell og nyttig for meg.

I løpet av skriveprosessen har jeg stadig hatt behov for mer litteratur. Noen av bøkene og tekstene har vært gamle og utfordrende og fått tak i. I den forbindelse må jeg få rette en takk til veiledere på Dragvoll Universitetsbibliotek, Lysholmbiblioteket, Nasjonalbiblioteket og Stortinget for god assistanse med letingen. Takk til Kopinor som var behjelpelig å diskutere noen etiske problemstillinger rundt referering av kilder. Jeg ønsker også å rette en takk til Aschehoug som gav meg tilgang på læreverket Nummers digitale nettressurser.

Hovedinspirasjonen min for å gjennomføre denne oppgaven har uten tvil vært familien min. Jeg har en samboer og tre barn som har betydd mye for meg gjennom masterløpet. Det å være trebarnspappa og student er definitivt ikke det samme som å være kun student og tidslukene for skriving er dyrebare. Jeg er stolt over å ha gjennomført dette prosjektet med tanke på alt annet som har opptatt tiden min i løpet av dette toårige masterløpet. Og jeg er ikke minst stolt over at jeg har greid å prioritere det som tross alt er aller viktigst, nemlig familien. Ungene og samboeren min Nina har greid og dratt meg ut av masterbobla, noe jeg er utrolig takknemlig for.

Trondheim, mai 2018

Thomas Viken

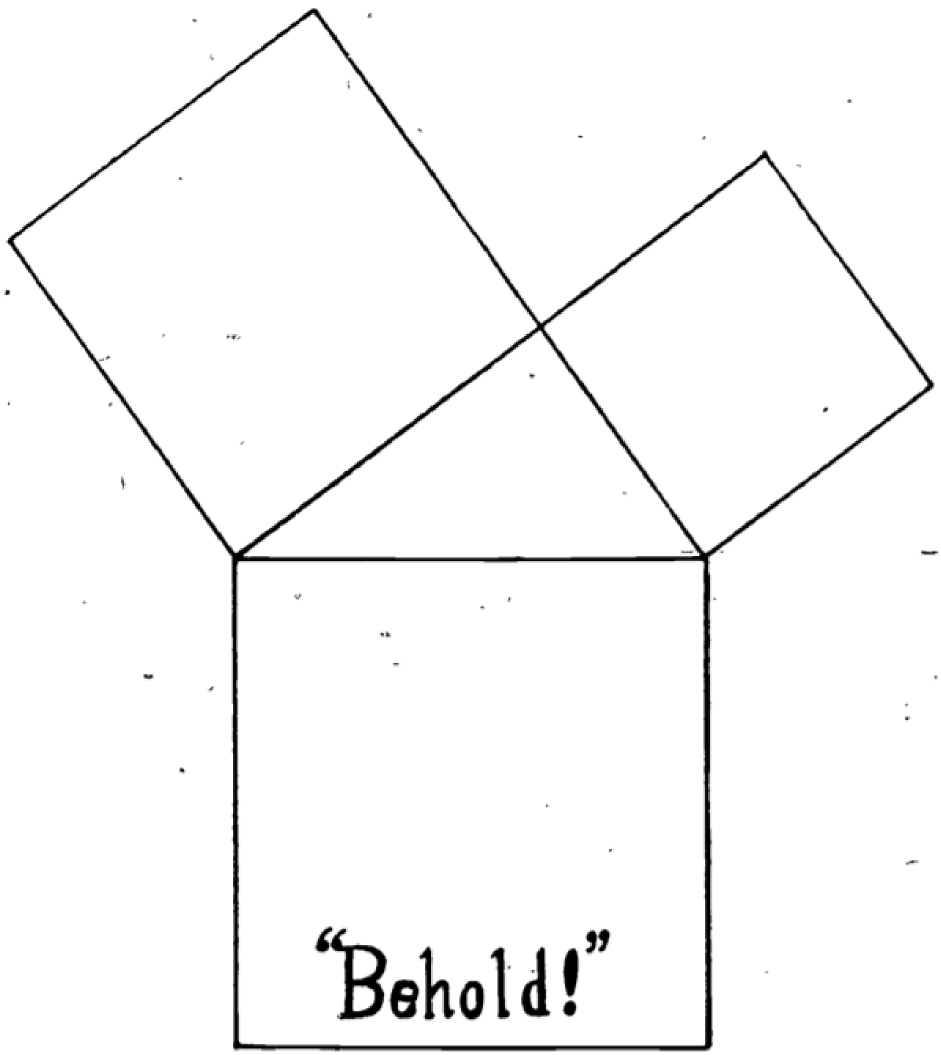
Innholdsfortegnelse

1 Innledning 5
1.1 Bakgrunn 5
1.2 Forskningsspørsmål 7
1.3 Oppbygning av oppgaven 8
2 Historien om den pythagoreiske læresetning 9
2.1 Introduksjon til oldtidsbevis for den pythagoreiske læresetning 9
2.1.1 Oldtidsbevis 10
2.1.2 Den pythagoreiske læresetningen 10
2.2 Pythagoras 11
2.3 Den pythagoreiske læresetning i det gamle Babylon og Egypt. 13
2.4 Gresk matematikk 16
2.4.1 Beviset til Pythagoras? 16
2.4.2 Euklid 17
2.5 Pythagoras i det gamle Kina - Det kinesiske beviset. 20
2. 6 Baskharabeviset 22
2.7 Thâbit ibn Qorra 24
3 Metode 25
3.1 Innledning til metodekapitlet 25
3.2 Bakgrunn for valg av metode og metodekritikk 25
3.3 Analysestrategi 33
3.4 Gyldighet og pålitelighet 33
3.4.1 Valg av litteratur /Kildekritikk 34
3.4.2 Valg av læreverk 36
3.5 Etiske problemstillinger 37
4 Skolehistorie 38
4.1 Utdanningsløpets historie i den norske skolen 39
4.2 Læreplanene 44
4.3 Læreverkene 45
4.3.1 Læreverkenes rolle 45
4.3.2 Godkjenningsordningen for lærebøker 47
5 Analyse 48
5.1 Analysestruktur 48

5.2 Innledning til analyse av læreboken Plangeometri for middelskolen ... 48
5.2.1 Læreplanen for den treårige middelskole ... 48
5.2.2 Læreboken Plangeometri for middelskolen ... 50
5.3 Innledning til analyse av læreboken Bonnevie og Eliassens lærebok i Plangeometri ... 54
5.3.1 Undervisningsplaner for den høgre almenskolen etter lov av 1935 ... 55
5.3.2 Bonnevie og Eliassens lærebok i plangeometri ... 58
5.4 Innledning til analyse av læreverket Cappelens matematikkverk ... 61
5.4.1 Mønsterplanen 1974 ... 61
5.4.2 Cappelens læreverk - Lærerveiledning ... 64
5.4.3 Cappelens læreverk - Lærebok ... 65
5.5 Innledning til analyse av læreverket Nummer ... 70
5.5.1 Revidert versjon av Kunnskapsløftet ... 70
5.5.2 Nummer 9 - Lærerens bok ... 71
6 Oppsummerende drøfting ... 78
6.1 Oppsummering ... 78
6.1.1 Innføringen av den pythagoreiske læresetning ... 78
6.1.2 Funn av oldtidsbevis og historiske referanser ... 81
6.1.3 Bevisbegrepet i læreplaner og læreverk ... 82
7 Avslutning ... 82
7.1 Didaktiske implikasjoner ... 82
7.2 Videre forskning ... 84
8 Referanseliste ... 85

Come and take choice of all my Library.

—*Titus Andronicus.*



Viam Inveniam aut Faciam.

Illustrasjon og sitater presentert av Elisha Scott Loomis i introduksjonen til en samling av ulike bevis for den pythagoreiske læresetningen i boken «The pythagorean proposition» (Loomis, 1940/1968, s. 14)

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Lærebøker har vært og er et redskap og en kilde til læring. Utgavene har vært mange og innholdet forskjellige i form, oppbygging, språk og design. Selv om lærebøker har eksistert i mange år og det har blitt laget mange like og ulike versjoner, så har de en ting til felles, de er laget med den hensikten at de som leser og bruker den skal lære noe. Det er ingen tvil om at læreboka har blitt ansett som viktig innen læring og i skolen. Dette kommer tydelig fram i stortingsmelding 35 "Om Lærebøkene i skoleverket" (1957): "I all vår undervisning støtter læreren seg på hjelpemidler av forskjellig slag. De varierer etter undervisningens art. Viktigst er imidlertid læreboka, i alle fall i almenutdannende skoler." (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1957, s. 3). Pepin & Haggarty (2001) skriver også om lærebøker som en av de viktigste kildene til det pensumet som blir gjennom gått i de ulike skolefagene. De formulerer dette slik: "(…) textbooks are an important way to connect knowledge domains to school subjects. Moreover, it is commonly assumed that textbooks (with accompanying teacher guides) are one of the main sources for the content covered and the pedagogical styles used in classrooms" (s.159).

Etterhvert som tiden og lærebøkene har utviklet seg har forskningsmiljøet sett behovet for å gå nærmere inn på analyse av lærebøker. Etter andre verdenskrig stod UNESCO i bresjen for flere forskningsprosjekter rettet mot lærebøker (Nicholls, 2003). George Eckert instituttet, som jobber spesifikt med forskning på lærebøker, ble opprettet i 1974. Dette instituttet i samarbeid med United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO, publiserte i 1999, som senere har kommet i en revidert versjon, en guidebok for forskning på tekstbøker (Pingel, 2009).

For meg har lærebøker også vært viktig i min til nå over 10-årige karriere som lærer. Jeg har nok endret min holdning til bøkene med tiden og, mener selv, at jeg har et mye mer kritisk blikk på lærebøkenes innhold i dag enn tidligere. Bøkene, som er nært knyttet opp mot metoder og valg som gjøres i undervisningen, setter en standard for nivå, forventninger til elevene og hvilke metoder og tenkemåter som skal aktiviseres. I forbindelse med den nye reviderte læreplanen som er i emning, er dybdelæring kommet mer i fokus. Jeg jobber på en skole som har brukt læreverket Grunntall (Bakke og Bakke, 2006) i matematikkundervisningen siden læreverket kom ut i 2006. Læreverket fikk vi ganske nøyaktig i den tiden jeg startet som lærer på skolen som er min nåværende arbeidsgiver. Læreverket bygger tydelig opp under en instrumentell forståelse (Skemp, 1976) for matematikken og går sjelden i dybden på forståelsen ved innføringen av nytt lærestoff. Bakgrunnen for at jeg ønsker å se nærmere på andre læreverk, er et ønske om å utvide horisonten og få et innblikk i hvordan andre forfattere og pedagoger har presentert matematiske prinsipper. Jeg er ikke nødvendigvis ute etter å finne den optimale oppskriften for hvordan ei lærebok skal innføre nytt lærestoff i matematikk, men jeg ser etter hva annet som er gjort for å kunne danne meg et bredere kunnskapsgrunnlag for min undervisning.

Jeg var ferdigutdannet som lærer i 2006 og har jobbet siden dette, men bestemte meg for å videreutdanne meg og ta en master i matematikkdidaktikk som jeg startet på høsten 2016. I løpet av dette studiet har vi vært innom matematikkhistorie. Det har fått meg til å reflektere rundt dette med læreboka og hva den gir av historiske innspill. Et historisk tema som jeg helt siden jeg startet som lærer synes har vært utfordrende å undervise i er den pythagoreiske læresetning. Læreverket Grunntall legger opp til en høyst instrumentell forståelse for temaet og går ikke i dybden på argumentasjon og bevis eller historien knyttet til læresetningens opprinnelse. Det er ingen tvil om at selve læresetningen er veldig sentralt innen geometriundervisningen, men også innen matematikken generelt. Dette kan understrekes med at den pythagoreiske læresetningen er den eneste læresetningen som blir nevnt med navn i læreplanene som er laget. Flere forskere innen matematikkhistorie beskriver også læresetningen som sentral. Howard Eves beskriver det på følgende måte:

> *One of the most attractive, and certainly one of the most famous and most useful, theorems of elementary geometry is the so-called Pythagorean theorem… If there is a theorem whose birth merits inclusion as a Great moment in mathematics, the Pytagorean theorem is probably the prime candidate, for it is perhaps the first truly great theorem in mathematics.* (Eves, 1983, s.26)

En slik viktig oppdagelse som den pythagoreiske læresetning er, den kanskje aller første og viktige i følge Eves, bør vel omhandles på en slik måte i lærebøker at det gjenspeiler teoremets historiske verdi?

1.2 Forskningsspørsmål

I mitt forskningsarbeid ønsker jeg å gå nærmere inn på den pythagoreiske læresetning i norske lærebøker. For å få et helhetlig bilde av hva som er tenkt og finne ut hva som er grunnlaget for hva som blir presentert i lærebøkene, har jeg valgt å se nærmere på lærebøker, læreplaner, skolehistorie og oldtidsmatematikk og de ulike bevisene for læresetningen. Med denne bakgrunnen har jeg valgt å stille følgende forskningsspørsmål:

> *Hvordan innføres den pythagoreiske læresetning i 4 utvalgte læreverk med bakgrunn i ulike læreplaner fra mellomkrigstiden og frem til nyere tid?*
>
> *Hvilke historiske spor og oldtidsbevis for den pythagoreiske læresetningen finner vi læreverkene?*

Jeg har valgt å se på en lærebok før loven om høyere skoler som kom i 1935 og en etter. Disse lærebøkene heter henholdsvis Plangeometri for middelskolen (Alfsen, 1935) og Bonnevie og Eliassen Lærebok i plangeometri (Alexander, 1939). Videre har jeg plukket ut et læreverk fra Mønsterplanen av 74 som heter Cappelens matematikkverk (Berntsen, Bue, Rosseland og Bue, 1977). Det siste læreverket jeg analyserer heter Nummer (Hole, Jensen, Tellefsen og Wallace, 2015) og det er laget med tanke på den reviderte versjonen av Kunnskapsløftet fra 2013. Bakgrunnen for akkurat de valgene jeg har gjort er at jeg for det første ønsker å se på hva som faktisk er gjort og se på utviklingen, om det er noen. Kan jeg fange opp noen tendenser som kan være med på å belyse diskusjonen rundt dette med historiske temaer i lærebøker og hvordan de innføres? Læreverket Grunntall er det læreverket som er kjøpt inn på min skole for bruk i undervisningen og det er naturlig nok dette læreverket jeg også hovedsakelig har brukt i min undervisning. For meg så er det mest interessant å se på hva annet som er gjort i andre lærebøker. For å danne meg et mer helhetlig bilde av hva som er gjort i andre lærebøker ønsker jeg også å se på læreverk fra ulike tidsepoker. Læreplanen av 1997 (L 97) formulerer tydlig mål knyttet til matematikkhistorie og formulerer dette e under faglige mål i opplæringen: “at elevene utvikler innsikt i matematikkens historie og fagets rolle i kultur og vitenskap” (Kirke, utdannings- og forskningsdepartementet, 1997, s.158). L 97 er den planen som så tydeligst knytter matematikkhistorie til et faglig mål og jeg har valgt å ta med dette målet som et utgangspunkt for analysen av andre læreplaner. Hva sier andre læreplaner om matematikkhistorie og den pythagoreiske læresetning? Gjenspeiles læreplanen i lærebøkene og lærerveiledningene? I følge forskning som Bjørn Smestad (2002) har gjort, er det svært lite matematikkhistorie i lærebøker laget etter læreplanen av 97. Smestad fant ut at det var kun 1,2 % av lærebøkenes innhold som omhandlet matematikkhistorie. Dette var en kvantitativ undersøkelse som så på mengde matematikkhistorie i lærebøker. Jeg har valgt å gå i dybden med en kvalitativ undersøkelse på hva lærebøker har av historisk rettet innhold og fremstilling knyttet til den pythagoreiske læresetningen.

1.3 Oppbygning av oppgaven

Vinklingen på denne masteroppgaven, hvor jeg ser på lærebøker over et relativt stort tidsrom og i tillegg trekker inn oldtidsmatematikk som spenner over et enda større tidsrom, gjør at selve oppgavens struktur og oppbygning blir noe annerledes enn en typisk empirisk oppgave bygd på klasseromsundersøkelser. Dette gjenspeiler seg i oppbyggingen av teori og metodekapitlene, blant annet ved at jeg spiller på tekst- og dokumentanalyse. Således beveger jeg meg inn i et forskningsparadigme som er vel så mye innen humaniora som innen samfunnsvitenskap. Jeg vil nå redegjøre for masteroppgavens oppbygning og begrunne noen valg jeg har gjort.

I kapittel 1 har jeg en innledning hvor jeg skriver om bakgrunnen for det jeg skriver om og videre presenterer jeg forskningsspørsmålene og tilslutt redegjør jeg for masteroppgavens innhold og oppbygning. I kapittel 2 skriver jeg om den pythagoreiske læresetningen og historien bak den velkjente læresetningen. Jeg beskriver noen sentrale oldtidsbevis fra ulike kulturer og tidsepoker. Dette historiske kapitlet danner grunnlaget for hva jeg ser etter i analysen. I kapittel 3, som jeg har kalt metode, skriver jeg om dokumentanalyse, lærebok- og læreplananalyse og om hvordan jeg har gått frem i arbeidet med forskningsarbeidet mitt. Kapitlet inneholder også metodekritikk, etiske problemstillinger og reliabilitets- og validitetsdiskusjon rettet mot min oppgave. I kapittel 4 setter jeg oppgaven min inn i en kontekst hvor jeg først sier noe om skolehistorien i det tidsrommet de utvalgte læreverkene mine dekker. Jeg skriver også om læreplaner og presenterer den kronologiske utviklingen i disse planene. I kapittel 5 analyserer jeg de ulike læreverkene. Her presenterer jeg funn jeg har gjort i de ulike læreverkene sett i sammenheng med læreplanene og med forskningsspørsmålene som utgangspunkt. I kapittel 6 oppsummerer jeg analysen og prøver å samle trådene i oppgaven. I det siste og avsluttende kapitlet, kapittel 7, beskriver jeg noen didaktiske implikasjoner og kommenterer hvilke mulige veier man kunne gått videre med forskningen jeg har jobbet med i denne oppgaven.

2 Historien om den pythagoreiske læresetning

2.1 Introduksjon til oldtidsbevis for den pythagoreiske læresetning

Den pythagoreiske læresetning, Pythagoras' læresetning og Pythagoras' teorem og Pythagoras' sats, er ulike navn som alle sikter til den velkjente læresetningen oppkalt etter grekeren Pythagoras. Ja, for det var ikke han som oppdaget denne mye brukte læresetningen. Vi må mye lenger tilbake i tid enn som så. Lærebokforfattere ser ut til å vite at det er nettopp dette som er tilfellet, da dette ofte blir understreket i innføringen av læresetningen i bøkene. Det finnes imidlertid også tilfeller hvor læresetningens opphav er utydelig. I læreboka Grunntall kan f.eks. leseren kunne komme til å tro at det var nettopp Pythagoras som oppdaget læresetningen: "Pytagoras var en gresk filosof og matematiker som levde ca. 500 år f.Kr. For tilhengerne til Pytagoras var matematikk en del av religionen. Noe av det Pytagoras var opptatt av, var rettvinklete trekanter" (Bakke og Bakke, 2006, s.154). Andre lærebøker er litt mer tvilende til om det er Pythagoras som oppdaget setningen, men understreker viktigheten av den. Et eksempel på denne historiske innfallsvinkelen kommer frem i et undervisningshefte Individuell matematikkundervisning (IMU):

> *Denne setningen er veldig viktig. Du kommer til å bruke den mange ganger i tiden fremover. Pytagoras var en gresk matematiker som levde for omtrent 2500 år siden. Vi tror at han var den første som oppdaget denne setningen, og derfor har den fått navn etter han.* (Håstad, Svensson og Öreberg, 1971, s.47)

I læreverket Nummers bok for 9. trinn er de enda mer presis i sine antakelser om hvorfor Pythagoras har fått navnet på setningen og knytter dette opp mot bevisføring: "Den greske matematikeren Pytagoras levde ca. 500 år før vår tidsberegning og har fått navn knyttet til den matematiske setningen du skal arbeide med i dette delkapitlet. Vi tror han var den første som kunne bevise den» (Hole et al., 2015, s.186).

Bevis for læresetningen står veldig sentralt i denne masteroppgaven og bevis og argumentasjon for læresetningen er direkte knyttet opp mot forskningsspørsmålet. I dette kapitlet skal jeg sammenfatte og gjøre rede for læresetningens historiske opphav og gjøre avklaringer rundt Pythagoras' rolle knyttet til læresetningen. Før jeg ser på historien til læresetningen, vil jeg i kapittel 2.1.1- 2.1.2 si noe om rammen for utvelgelsen av de ulike oldtidsbevisene og gi en kort introduksjon til den pythagoreiske læresetningen. Fra og med kapittel 2.2 ser jeg på historien knyttet til læresetningen. Jeg går først inn og ser på den tiden hvor Pythagoras levde siden navnet på læresetningen stammer fra denne tiden. Videre ser jeg bakover i tid til det gamle Egypt og deretter gjør jeg rede for noen av de viktigste bevisene for og kjennskapen til læresetningen i de ulike oldtidskulturene som oppstod med tidens løp.

2.1.1 Oldtidsbevis

For å klargjøre rammene for hvilke historiske bevis jeg velger ut, mener jeg det viktig å komme med en avklaring på begrepet oldtidsbevis. Oldtid kan defineres som ”tidsepoken i menneskenes historie fra de tidligste sivilisasjonene og frem til middelalderen” (Andersen, 2018). Jeg har tatt utgangspunkt i denne definisjonen når jeg har valgt ut hvilke bevis jeg presenterer i dette kapitlet. Jeg har allikevel tatt med to bevis som har senere opphav, henholdsvis et bevis fra 800-tallet og et fra 1100-tallet. Det er litt ulike grunner til at jeg også har med disse bevisene, men felles for de er at begge knyttes sammen med tidligere oldtidsbevis og oldtidskulturer. I tillegg er disse to bevisene også visuelt gode bevis som jeg mener fint kan knyttes til undervising og de opptrer også i de utvalgte læreverkene som jeg analyserer.

2.1.2 Den pythagoreiske læresetningen

Matematikk er et av de eldste intellektuelle instrumentene vi har (Burton, 2011) og etterhvert som historien har skredet fram har mange matematiske oppdagelser vært brukt til å utvikle vårt samfunn. I innledningen skrev jeg at mange mener den pythagoreiske læresetningen er en av de viktigste læresetningene og kanskje den aller viktigste grunnleggende læresetningen som er oppdaget. Mange forfattere understreker viktigheten av læresetningen og opphøyer dette til noe vakkert som f.eks. Bruce Ratner (2009) gjør der han skriver: “The Pythagorean Theorem is arguably the most famous statement in mathematics, and the fourth most beautiful equation" (Ratner, 2009, s.230). Hva er det som er så fantastiske og vakkert med denne læresetningen? Selve læresetningen gir oss muligheten til å regne ut en av sidene i en rettvinklet trekant om man har opplysninger om de andre sidene i trekanten. Vi kan også bruke læresetningen til å finne ut om vi har en rett vinkel basert på lengden av sidene i trekanten.

I matematikkhistoriske verk (Burton, 2011; Holme, 2001 m.fl.), ser vi at den pythagoreiske læresetningen knyttes nært opp mot byggekunsten og blant annet de egyptiske pyramidene som eksempel. Læresetningen har vært brukt av håndverkere for å regne ut om vinkler er rette. I dag har vi nøyaktige måleinstrument som vinkelhaker, vater og lasermålere som hjelper tømrere og snekkere til å finne nøyaktige vinkler. Men at kunnskapen om lengdene i en rettvinklet trekant hentet fra den pythagoreiske læresetningen har vært viktig i fortidens byggevirksomhet, er det ingen tvil om.

2.2 Pythagoras

Det kommer frem i de ulike læreverkene som behandler den pythagoreiske læresetning en uvisshet om hva som er den sanne historien. Var det han som oppdaget læresetningen? Var det han som var det første som kunne bevise setningen? Har Pythagoras urettmessig fått æren for denne viktige matematiske læresetningen? Jeg har undersøkt i en del litteratur som omhandler Pythagoras og hans arbeid. Det som er en gjennomgående trend er at det er en del usikkerhetsmoment når man skal se på Pythagoras' liv og virke (Eves, 1983; Holme, 2001; Maor, 2007; Burton, 2011). Eli Maor går så langt som å si at vi ikke vet sannheten om Pythagoras og beskriver dette på følgende måte:

> *But who was this revered person? The truth is, we don't know. Pythagoras is one of the most mysterious figures in history; the little we do know about him may be more fiction than fact, written by historians who lived hundreds of years later*" (Maor, 2007, s.17).

Med dette som grunnlag betyr det at vi er nødt til å ta det meste som er skrevet om Pythagoras med en klype salt.

Flere forfattere som skildrer historien om Pythagoras skriver at han ble født på den greske øya Samos, som ligger ved kysten av dagens Tyrkia, ca. 570 år f.Kr. Etterhvert skal Pythagoras ha gått i lære hos den kjente filosofen Thales. Thales er blant annet er kjent for Thales setning hvor han beviste at en trekant innskrevet i en halvsirkel med diameteren som den lengste siden i trekanten, alltid vil bestå av en rett vinkel med de to katetenes toppunkt på sirkelbuen (Burton, 2011). Etterhvert reiste Pythagoras ut i verden, til blant annet Persia og Egypt, hvor han fordypet seg i litteratur og lærte om deres matematiske oppdagelser (Maor, 2007). I følge Eves (1983) reiste han helt til India også. Det betyr jo at han på disse reisene kunne ha oppdaget hvordan disse oldtidskulturene har beskrevet den pythagoreiske læresetningen. Audun Holme understreker sannsynligheten for at Pythagoras har lært matematikk av andre sivilisasjoner på følgende måte: "At Pytagoras selv hadde lært det han visste om matematikk i Egypt og fremfor alt Babylon, kan neppe betviles" (Holme, 2001, s.191). Det har vært gjort funn som tyder på at læresetningen har vært oppdaget lenge før Pythagoras sin levetid. Blant annet så hadde babylonerne kunnskap om læresetningen over tusen år før Pythagoras. I beste fall kan kanskje Pythagoras gis æren for å ha vært den første som ga et matematisk logisk bevis for setningen (Eves, 1983). Pythagoras og hans kolleger, kalt pytagoreerne, drev en slags religiøs dyrkelse av matematikken, men også seriøs matematisk forskning (Holme, 2001). Videre skriver Holme at Euklids bøker kalt "Elementer" ikke ville ha eksistert uten pytagoreernes innsats.

Når jeg nå fra og med kapittel 2.3 skal presentere læresetningens historiske opphav og presentere noen sentrale bevis vil jeg først si noe kort om hvilke ulike bevis som finnes. Mange bevis har blitt utledet i løpet av den rundt 4000 år gamle historien til læresetningen. I 1927 skrev Elisha Loomis (1940/1968) en bok hvor han samlet de til da kjente bevisene, og jeg har funnet en revidert utgave av denne boken utgitt av National Council of Mathematics Teachers (NCTM). I boken presenterer Loomis 371 ulike bevis for læresetningen. Han deler bevisene inn i 4 kategorier; geometriske, algebraiske, kvaternioniske og dynamiske bevis. Det finnes også nettsider, f.eks. Cut-The-Knot.org (Bogomolny, 2017), som gir en oversikt av noen av de mange ulike bevisene. Jeg kan umulig presentere alle disse, men velger å vise noen. Jeg ønsker å knytte de utvalgte bevisene og eksemplene for kjennskap til læresetningen opp mot oldtidssivilisasjonene Babylon, Egypt, India og Kina i og med at jeg i forskningsspørsmålet ser etter oldtidsbevis i lærebøker.

2.3 Den pythagoreiske læresetning i det gamle Babylon og Egypt.

I Mesopotamia, et landområde som strekker seg fra Eufrat og Tigris-elevene i øst helt til Libanon i vest, levde babylonerne. Arkeologer har funnet flere spor etter denne sivilisasjonen i blant annet form av leirtavler. En av leirtavlene som ble er funnet stammer fra rundt 1800-1600 f.Kr. (Maor, 2007, s.4). På figur 1 kan vi se at det er formet et kvadrat med det som ser ut som en inntegnet diagonal.

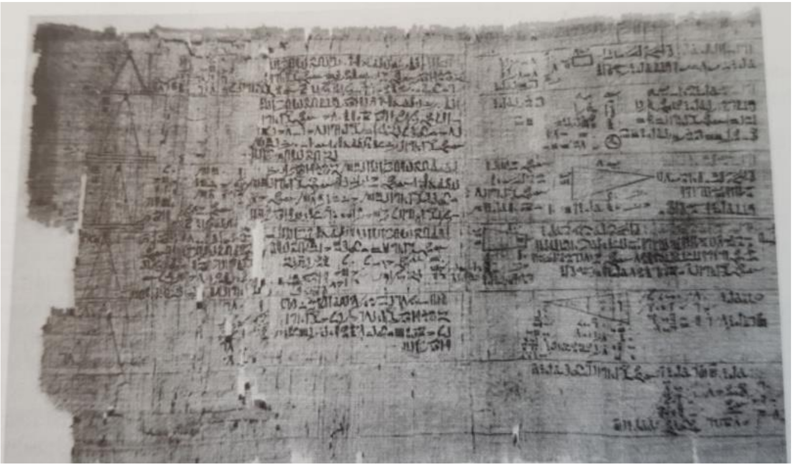
Figur 1 - Fra leirtavlen YBC 7289
(Maor, 2007, s.5)

I tillegg er det markert, langs diagonalen og kvadratets side, noen babylonske tegn med kileskrift. Tegnene på diagonalen er oversatt til 1;24,51,10 som er den moderne notasjonen for det babylonske 60-tallssystemet. Dette tallet kan igjen skrives som $1+24/60^1 + 51/60^2 +10/60^3$. Om man regner ut dette vil man få tallet 1,414213. Dette tallet er veldig nære kvadratrota av 2. Om man ganger det med 30, som er kvadratets kortside skrevet med babylonske tegn, vil man få det andre tallet som er skrevet inn på den andre linjen på diagonalen. Svaret som er 42,426389 er diagonalens lengde med en nøyaktighet på hele 6 desimaler. Dette betyr at babylonerne visste om forholdet mellom lengden og diagonalen i et kvadrat, noe som igjen betyr at de var kjent med den pythagoreiske læresetning (Maor, 2007). Om de hadde viten om læresetningen utover det ene eksemplet med diagonalen i et kvadrat kan man ikke si noe om ut fra denne leirtavlen. Steinen inneholder ikke et bevis for læresetningen, men viser at babylonerne hadde kjennskap til en del prinsipper som ligger til grunn for den. Et annet eksempel på babylonernes kunnskap om læresetningen kommer frem av leirtavlen Plimpton 322 som vises i figur 2.

Figur 2 - Leirtavlen Plimpton 322
(Maor, 2007, s.8)

Tavlen viser en liste over pythagoreiske tripler. Dette er tripler av hele tall som viser lengden på sidene i rettvinklede trekanter. Eksempler på slike tripler er (3,4,5) og (5,12,13). Spørsmålet er; hvordan fant de disse triplene? Den aller største triplen de fant var (4601, 4800, 6649). I følge Maor må de ha hatt en kunnskap om fremgangsmåten for å finne disse triplene og han beskriver det på følgende måte: "there is only one plausible explanation: they must have known the algorithm which, 1500 years later would be formalized in Euclid's Elements" (Maor, 2007, s.11). Babylonerne, over 1000 år før den greske sivilisasjonen, hadde altså kunnskap om den pythagoreiske læresetningen.

Joy Hakim (2004) hevder at også den egyptiske sivilisasjonen kjente til læresetningen. Hakim skriver dette på følgende måte: "The Egyptians must have used this formula [a2+b2=c2] or they couldn't have built their pyramids, but they have never expressed it as a useful theory" (Hakim, 2004, s. 78). Han skriver forøvrig at babylonerne også muligens kjente til læresetningen, men han understreker at det er forskjell på en matematisk ide og det å forstå denne ideen og han beskriver dette slik: "... it takes a leap of mind, and mathematical proof, to go from an idea that helps you build a structure to an understanding that it is an unchanging formula that works no matter where or how it is applied" (Hakim, 2004, s.79-80). Akkurat hvem som var først ute med kunnskapen om å bruke den pythagoreiske læresetning er det vel ingen som kan si med sikkerhet, men at både egypterne og babylonerne hadde kunnskap om dette er det ingen tvil om. Det mest kjente dokumentet fra den egyptiske sivilisasjonen er Rhindpapyrusen (se figur 3).



Figur 3 - En del av Rhindpapyrusen.
(Burton, 2011, s.51)

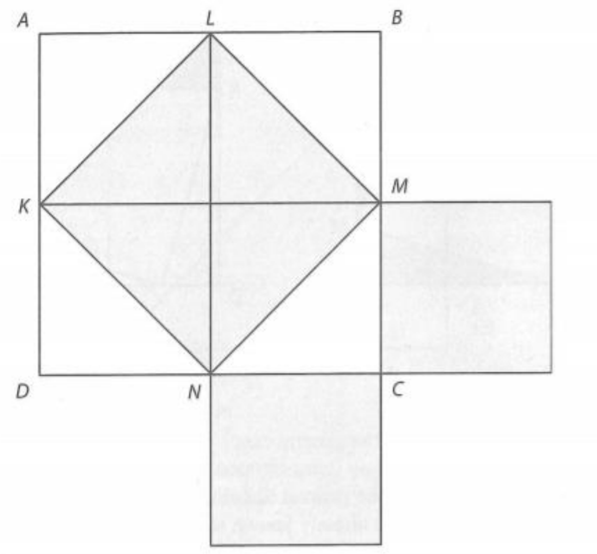
Papyrusrullen beskriver 84 problem som blir løst, der fem av disse omhandler pyramider. Ingen av disse problemene har direkte referanser eller implikasjoner som knyttes til den pythagoreiske læresetningen (Maor, 2007). Forskerne er uenige om egypterne visste om læresetningen. Så mange som 90 % av bøkene som er skrevet om matematikkhistorie konkluderer med at egypterne hadde kjennskap til den rette trekanten med sidene 3,4,5 og at de brukte denne kunnskapen til byggeformål gjennom såkalte taustrekkere (Maor, 2007, s.15). Taustrekkerne skulle visstnok kunne bruke denne pythagoreiske triplen og målte metriske lengder på 3, 4 og 5 og kunne ved hjelp av dette finne rette vinkler i byggverk. Til nå er det ikke funnet noen papyrusruller eller andre tekster fra det gamle Egypt som eksplisitt handler om rettvinklede trekanter, så vi kan ikke vite sikkert om egypterne kjente til sammenhengen mellom sidene og hypotenusen i en rettvinklet trekant.

Som Hakim (2004) beskriver det, så trenger man et bevis for en matematisk ide for å forstå den. Det er enda ikke blitt oppdaget nedskrevne bevis i den egyptiske og babylonske oldtidssivilisasjonen, men alt tyder på at de forsto matematikken de brukte. Vi må lenger frem i tid og til andre sivilisasjoner for å finne ulike bevis for setningen som er formulert, illustrert og utledet.

2.4 Gresk matematikk

2.4.1 Beviset til Pythagoras?

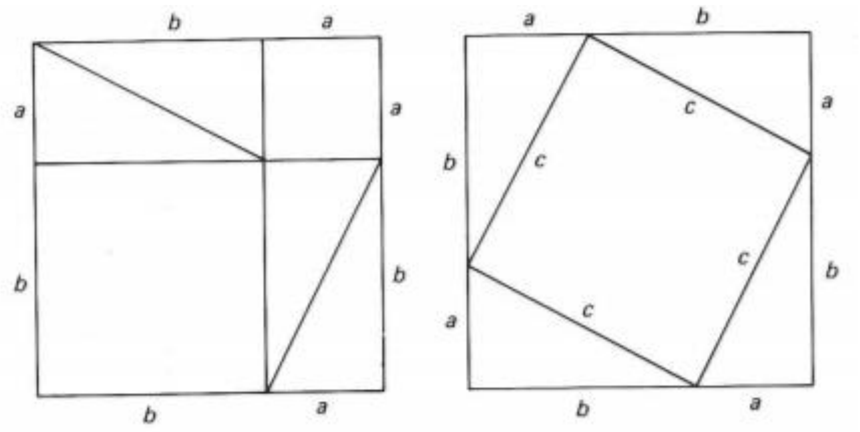
Historien om Pythagoras er det knyttet en del usikkerhet rundt og også til hvorvidt det er riktig at han kan krediteres æren for å ha produsert det første beviset for læresetningen. I kapittel 2.4.2 vil jeg redegjøre for Euklid og hans deduktive tilnærming i de bevisene han la frem i verket Elementene. Det er mulig at Pythagoras først beviste det spesielle tilfellet av en rettvinklet likebent trekant, en 45-45-90-graders trekant (se figur 4).



Figur 4 - Den pythagoreiske læresetning og en rettvinklet likebeint trekant
(Maor, 2007, s.25)

Dette beviset var allerede kjent for kineserne (Maor, 2007) og Pythagoras kunne ha hørt om dette på sine reiser. Beviset i seg selv er ganske enkelt og visuelt forståelig. Det baserer seg på kvadratet ABCD som er videre delt inn i mindre trekanter og i midten ser vi at kvadratet KLMN er inndelt i 4 kongruente 45-45-90-trekanter. Arealet til dette kvadratet er like stort som arealene til kvadratene bygd på linjene MC og NC. Spørsmålet er om Pythagoras kunne vise en generell utledning for beviset? Dette har vi ingen direkte bevis for (Maor, 2007).

Det finnes ulike antakelser om hvilket bevis Pythagoras selv la frem og i følge Eves (1983) er det generelt sett på som sannsynlig at beviset han presenterte var et geometrisk bevis med inndeling av mindre geometriske figurer som presentert i figur 5.



Figur 5 - Geometrisk bevis for den pythagoreiske læresetningen mulig gitt av Pythagoras
(Eves, 1990, s. 81)

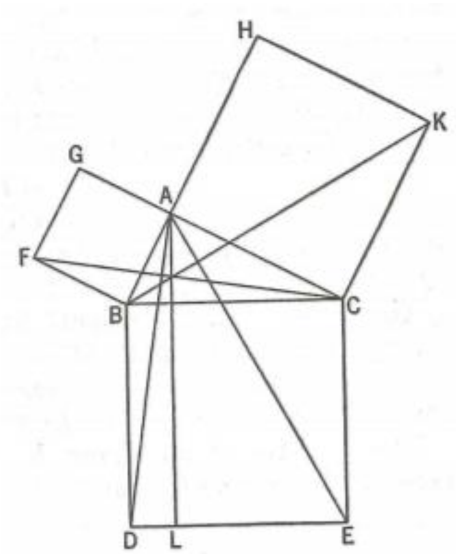
Burton (2011) nevner også dette beviset som et bevis som kunne vært gitt av Pythagoras. Loomis (1940/1968) refererer til flere ulike kilder som har ulike opphav til dette beviset. Vi kan altså ikke slå fast med sikkerhet hvilket opphav dette beviset har.

2.4.2 Euklid

I følge historien døde Pythagoras når han var rundt 80 år gammel (Maor, 2007). Men arven etter han levde videre. Flere kriger utspant seg og ulike sivilisasjoner vokste frem. I 332 f.Kr. grunnla Alexander den store byen Alexandria og dette ble den kommersielle og intellektuelle hovedstad. I 306 f.Kr. falt Egypt for Ptolemy-dynastiet. Ptolemy I, som regjerte, valgte Alexandria som hovedstad og her grunnla han en skole og etterhvert et universitet som ble kronjuvelen i oldtidsverdenen (Maor, 2007, s.33). Euklid ble sjef for matematikk på universitetet. Han skrev mange bøker, men den aller mest kjente og innflytelsesrike bokserien het Elementene. Verket består av 13 bøker som inneholder 465 teoremer innen geometri, tallteori og algebra. Det er ikke kjent hvorvidt noen av læresetningene ble oppdaget av Euklid selv, men han var sjef og ansvarlig for å skrive bøkene.

Oppbyggingen av bøkene er strengt aksiomatisk og deduktiv. Definisjonene, aksiomene og de ulike proposisjonene, som vi på norsk kan kalle læresetningene, er grunnlaget for nye læresetninger som kommer senere i boken. Med definisjonene og aksiomene som grunnlag beviser Euklid ved logisk riktig deduksjon nye utsagn og læresetninger eller teoremer (Holme, 2001). I Bok I innleder Euklid med å presentere 23 definisjoner. De to første tar for seg hva et punkt og ei linje er; "Et punkt er det som ikke har noen del" og "En linje er en lengde uten bredde" (Heath, 1990, s. 1). Videre presenterer Euklid 10 aksiomer som han deler inn i 5 postulater av geometrisk natur og 5 allmenne slutningsregler (Heath, 1990, s.2). I følge Maor, anså Euklid disse aksiomene som selvinnlysende og for åpenbare til at det var behov for å bevise dem (Maor, 2007, s. 34). Euklid visste at hvis han skulle unngå sirkularitet og skaffe seg et utgangspunkt, måtte han forutsette sikre fakta om emnets natur uten å kunne fremlegge bevis for disse (Burton, 2011, s. 145), og det er nettopp disse forutsetningene han legger frem i form av de 10 aksiomene.

Euklid har i sine bøker utledet flere læresetninger og bevis som tar for seg den pythagoreiske læresetningen. Den første læresetningen kommer i proposisjon 47 i Bok I. Euklid innleder med et utsagn eller læresetningen om du vil og er beskrevet på følgende måte i Elements: "In right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle" (Heath, 1990, s.28). Som en hjelp til å følge resonnementet la han ved en figur som viser en rettvinklet trekant med kvadrater på trekantens sider (se figur 6). I tillegg er det tegnet inn noen hjelpelinjer som han bruker i beviset læresetningen.



Figur 6 - Hjelpetegning til I 47
(Heath, 1990, s.28)

Bevisføringen bygger på noen av de grunnleggende prinsippene og tidligere beviste læresetninger. Under har jeg listet opp hva Euklids bevis for den pythagoreiske læresetningen har som grunnlag:

Definisjon: 22
Postulat: 1 og 4
Common notion: 2
Læresetning: 4, 14, 31, 41 og 44

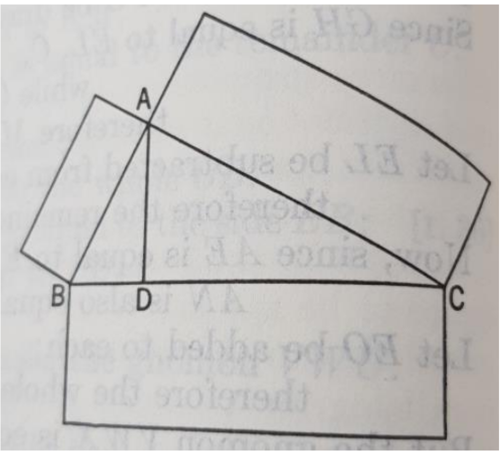
For å beskrive mer kortfattet hvordan beviset føres har jeg valgt å vise til Holme (2001) sin moderne fremstilling av det geometriske innholdet. Under har jeg gjengitt Holmes fremstilling:

> *Forlengelsen av normalen fra B til hypotenusen AC deler kvadratet AC i de to rektanglene med grunnlinjer DL og LE og høyder lik DA. Det vil være nok å vise at*
>
> 1. *det første nevnte rektanglet har areal lik kvadratet på AB, og*
> 2. *det siste nevnte rektanglet har areal lik kvadratet på BC.*
>
> *Trekanten ACF er kongruent med trekanten ADB fordi sidene er parvis like store. ACF er en trekant med grunnlinje AF og høyde AB, den har derfor areal lik halvparten av kvadratet på AB. ADB har grunnlinje AD og høyde DL, den har derfor areal lik halvparten av rektanglet med grunnlinje DL og høyde DA. 1) er derfor bevist. 2) følger analogt.* (Holme, 2001, s.276-277)

Et annet bevis gitt av Euklid, som også er verdt å nevne, er proposisjon 48 i bok I. Her beskriver han den omvendte versjonen av den pythagoreiske læresetningen. Påstanden er formulert slik: Hvis det i en trekant er et kvadrat på trekantens ene side som er like stort som kvadratene på trekantens gjenværende sider, så er vinkelen mellom de to gjenværende sidene av trekanten rett.

Et annet bevis for den pythagoreiske læresetningen finner vi i bok II. Innholdet i bok II er geometrisk algebra (Holme, 2001). Bevisføringene i setningene 12 og 13 i bok II er ekvivalente med cosinussetningen. Jeg har valgt ikke å gå nærmere inn på dette beviset siden jeg ikke har oppdaget i noen læreverk i aldersgruppen jeg analyserer som tar for seg læresetningen på dette nivået. Beviset fra Bok I er et av de vanskeligste bevisene som det er trolig at en elev på begynnernivå innen geometri vil møte, men det er dette beviset generasjoner etter generasjoner av skoleelever har strevd med (Maor, 2007).

Til slutt ønsker jeg å trekke frem et mer generelt bevis for læresetningen. I proposisjon 31 bok VI (se figur 7) ser han på sammenhengen mellom formlike figurer på den rettvinklede trekantens sider. Dette er en generalisering av proposisjon 47 hvor kvadratene er erstattet med formlike rektangulære figurer. Påstanden som blir lagt frem og senere bevist er følgende: I en rettvinklede trekanter vil figuren på motsatt side av den rette vinkelen være lik summen av de formlike figurene på sidene til den rette vinkelen.

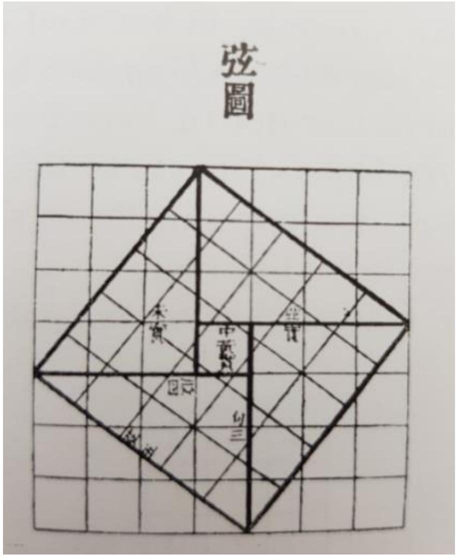


Figur 7 - Proposisjon 31 i bok VI
(Heath, 1990, s. 124)

2.5 Pythagoras i det gamle Kina - Det kinesiske beviset.

Vi har nå sett hvordan Euklid utledet sitt bevis, et bevis som er bygd opp av en rekke definisjoner, aksiomer og tidligere læresetninger. De greske matematikerne utviklet et fag som et abstrakt deduktivt system. Kinesernes behandlet en del geometriske spørsmål, men svarene på spørsmålene ble i motsetning til hos grekerne alltid presentert empirisk og non-demonstrativt (Burton, 2011). Kinesiske matematikkbøker tok for seg praktiske problemer knyttet til dagliglivet. Kinesisk matematikk var hovedsakelig algebraisk og geometriske figurer fungerte bare som en overføring av tallinformasjon til algebraisk form (Burton, 2011, s.251). Det tidligste verket med matematisk innhold, som oversatt til engelsk har tittelen Arithmetic Classic of the Gnomon and the Circular Paths of Heaven, ble skrevet rundt 300 f.Kr. I følge Burton mener noen at teksten var basert på kunnskap som gikk helt tilbake til

1000 f.Kr. Boken tar blant annet for seg egenskapene til rettvinklede trekanter. Kineserne hadde også kunnskap om forholdet mellom katetene og hypotenusen i rettvinklede trekanter og dette lenge før Pythagoras sin tid. Det at kineserne hadde denne kunnskapen baserer forskerne på et diagram (se figur 8) som var tegnet inn ved siden av teksten i verket. Dette blir i flere sammenhenger kalt for Det kinesiske beviset.



Figur 8 - Det kinesiske beviset
(Maor, 2007, s.63)

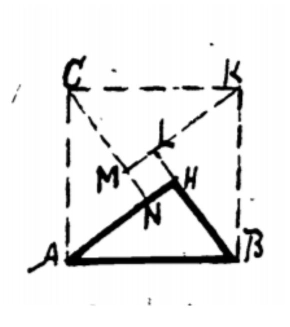
Forklaringen til diagrammet er oversatt til engelsk:

> *Thus, let us cut a rectangle (diagonally), and make the width (kou) 3 (units) wide, and the length (ku) 4 (units) long. The diagonal (ching) between the (two) corners will then be 5 (units) long. Now after drawing a square on this diagonal, circumscribe it by half rectangles like that which has been left outside, so as to form a (square) plate. Thus the (four outer half-rectangles of width 3, length 4 and diagonal 5, together make (te chheng) two rectangles (of area 24); then (when this is subtracted from the square plate of area 49) the remainder (chang) is of area 25. This (process) is called "piling up the rectangles" (chi chu).* (Maor, 2007, s.63)

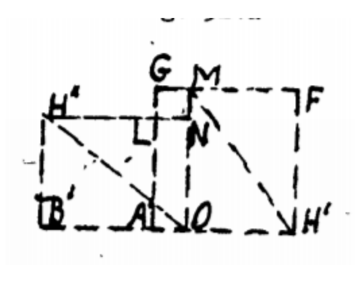
"Rectangles", som det refereres til her er de fire rektanglene med sidene 3 og 4. "half-rectangles" er trekantene med sidene 3, 4 og 5."To circumscribe it by half rectangles" betyr å bygge inn den skråstilte kvadratet med trekanter med side 3, 4, og 5. Denne innbyggingen av det skråstilte kvadratet fører til at vi får et større kvadrat på 7 multiplisert med 7. Om man subtraherer det skråstilte kvadratet fra det store kvadratet, får vi 49-24=25, som er arealet av det skråstilte kvadratet. Dette vil ikke være å anse som et ordentlig bevis om man skal argumentere på den greske deduktive måten. Dette eksemplet kan allikevel overføres og generaliseres på algebraisk form på følgende måte: $c^2 = (a+b)^2 - 4ab/2 = a^2 + b^2$, der a og b er lengden på sidene i rektanglene og som igjen er sidene på katetene i den rettvinklede trekanten.

2. 6 Baskharabeviset

Et annet viktig geometrisk bevis som er verdt å nevne og som er inspirert av figuren til det "kinesiske beviset" stammer fra India. Baskharabeviset, som originalt var et rent visuelt bevis, relateres til hindumatematikeren som bar navnet Baskhara og var født i år 1114 e.kr. Han skulle ha skrevet et eneste ord, "Se" i tillegg til å ha lagt fram to figurer for beviset uten mer forklaring (Burton, 2011). I følge historien skal geometrikyndige fra Hindustan ha visst om sannheten og beviset for denne læresetningen flere hundre år før Pythagoras sin tid. Loomis (1940/1968), i likhet med Maor (2007), stiller et spørsmål til denne historien der han antyder at Pythagoras kunne ha lært om læresetningen ved å studere indisk lærdom; "(...) may he not have learned about it while studying Indian lore at Babylon?" (Loomis, 1940/1968, s.227). Loomis referer til en rekke personer som angivelig skal ha klart å lage bevis ut fra figurene til Baskhara. Det står også følgelig at de hadde greid å utlede beviset uten kunnskap om tidligere bevisføringer. Loomis (1968) presenterer beviset med figurene (figur 9 og 10) gjengitt under.

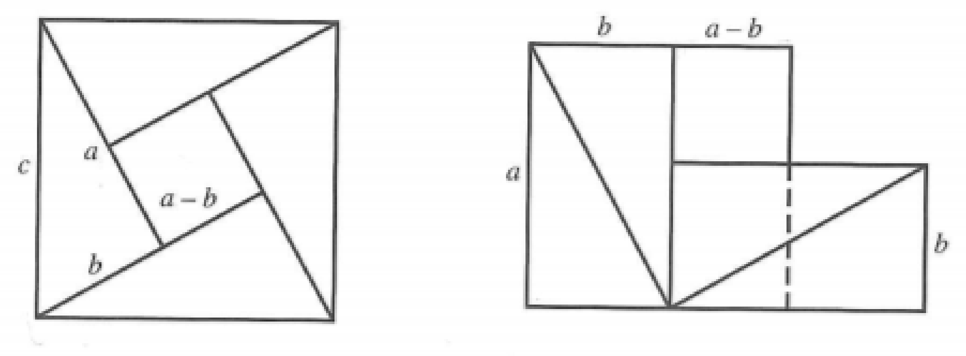


Figur 9 - Baskharabeviset bilde 1
(Loomis, 1940/1968, s.227)



Figur 10 - Baskharabeviset bilde 2
(Loomis, 1940/1968, s.227)

For å gjøre beviset mer oversiktlig og med færre notasjoner velger jeg å kommentere beviset basert på figurene i Burton (2011). I figur 11 ser vi til venstre et kvadrat c^2 som er inndelt i 4 rettvinklede trekanter ab/2 i tillegg til et indre kvadrat, $(a-b)^2$, som ligger i midten. Til høyre deles det store kvadratet og de ulike figurene fra venstre settes sammen til en ny figur hvor det tydelig fremkommer at $c^2 = a^2 + b^2$.



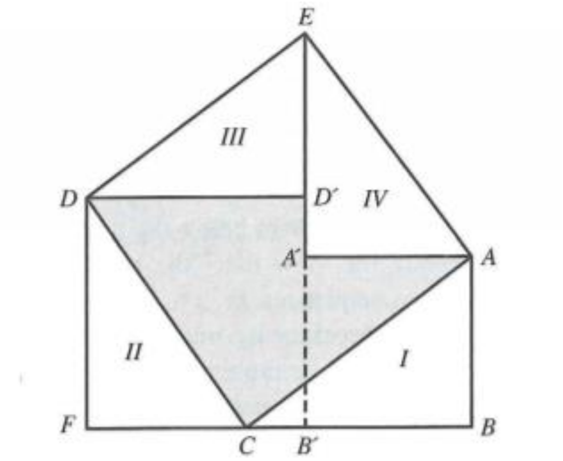
Figur 11 - Baskharabeviset presentert av Burton
(Burton, 2011, s.107)

Man kan med algebraiske utregninger også vise at de ulike delene av kvadratet til høyre viser at $c^2=a^2+b^2$. Kvadratet c^2 består av 4 trekanter som kan uttrykkes som 1/2ab og i tillegg har du det lille kvadratet i midten som har sidene a-b og arealet blir derfor $(a-b)^2$. de fire trekantene kan uttrykkes som 2ab og ved hjelp av 2. kvadratsetning finner vi at arealet av det lille kvadratet kan uttrykkes som a^2+b^2-2ab. Summerer man dette vil det fremkomme at summen av arealene er a^2+b^2 og dette er det samme som c^2 og vi ender da opp med den pythagoreiske læresetning.

Beviset ble, som tidligere nevnt, fremstilt av Baskhara i 1114. Dette er da et bevis som ligger helt i grenseland til å kalles et oldtidsbevis om jeg skal være tro mot min egen definisjon. Jeg har allikevel valgt å ta det med i dette kapitlet hvor jeg beskriver historien om den pythagoreiske læresetning i oldtiden og baserer begrunnelsen på noen sentrale argument. For det første er det et elegant geometrisk bevis som jeg har funnet eksempler på i noen av lærebøkene jeg har sett på. Baskhara er fra et område, Indusdalen, som representerer en av de tre store dalene som var tilholdssted for de kjente oldtidssivilisasjonene før vår tid. De fleste verkene som beskriver matematikkhistorie og Pythagoras nevner dette beviset og det knyttes ofte opp mot “det kinesiske beviset” (Se blant annet Maor, 2007, s.64).

2.7 Thâbit ibn Qorra

På 600-tallet var araberne og islam på full fremmarsj og sivilisasjonen spredde seg raskt over hele den arabiske halvøya og videre opp landene rundt Middelhavet. Den greske intellektuelle arven var den viktigste skatten araberne fant i de erobrede landene og denne visdommen ble etter hvert hovedoppgaven til arabiske lærde å lære seg (Burton, 2011, s. 238). Thâbit ibn Qorra, som levde fra 836-901, var en kjent matematiker i begynnelsen av den arabiske matematikkhistorien (Burton, 2011, s. 244). Thâbit presenterte flere geometriske bevis med ulike inndelinger og sammensetninger. Et av disse bevisene er presentert i figur 12.



Figur 12 - Thâbit ibn Qorras geometriske bevis for den pythagoreiske læresetningen (Burton, 2011, s. 245)

Forklaringen til figuren er som følger:

Start med en rettvinklet trekant ABC, kvadratene AA´B´B og DFB´D´ blir laget basert på trekantens vinkelbein; og ACDE er kvadratet på hypotenusen. De to første kvadratene AA´B´B og DFB´D´ får vi om vi legger til trekant I og II til det skraverte området S slik figuren viser. Kvadratet ACDE blir til ved at trekant III og IV legges til det nevnte skraverte området. Alle de fire trekantene er kongruente med hverandre og derfor så må summen av de to første kvadratene være lik summen av det tredje.

AA´B´B + DFB´D´ = I + II + S = III + IV + S = ACDE.

3 Metode

3.1 Innledning til metodekapitlet

Det å forske på noe krever en gjennomtenkt plan, en metode som gjør at man på en strukturert måte greier å gjøre funn i sitt datamateriale. I dette metodekapitlet prøver jeg å gjøre rede for hvilke tanker jeg har gjort meg i forbindelse av metodevalg og hvilken strategi og plan jeg har for analysedelen. I 3.2 skriver jeg litt om bakgrunnen min som forsker og utgangspunktet mitt for valg av metode. Jeg har i dette forskningsprosjektet landet på dokumentanalyse som metode og jeg argumenterer derfor for hvorfor dette egner seg som metode i mitt prosjekt. Her inngår også metodekritikk. I 3.3 ser jeg nærmere på hvilken strategi jeg bruker for å analysere de utvalgte dokumentene. I 3.4 og 3.5 tar jeg for meg henholdsvis oppgavens validitet og reliabilitet og noen etiske problemstillinger jeg har hatt i forbindelse med skrivingen.

3.2 Bakgrunn for valg av metode og metodekritikk

Som masterstudent har jeg selv vært igjennom et metodekurs og lest litteratur som tar for seg dette temaet. Jeg har jobbet som lærer i over 10 år og vet at det å være lærer er en meget kompleks og sammensatt jobb. Det å forske på utdanning er også kompleks og innebærer at man må ta mange valg og vurderinger, og denne kompleksiteten kommer frem i metodekurset som er lagt inn i masterløpet.

Før jeg startet på masterstudiet var jeg nok mer opptatt av at om jeg skulle forske på noe, så måtte jeg finne ut noe, et svar som er udiskutabelt riktig. Jeg ønsket meg et svar som kunne støtte seg på analysen av empiri og statistikk og ikke basere seg på en personlig tolkning. Etter å ha jobbet i skolen og gradvis gjennomført masterløpet, har det blitt mer og mer klart for meg at det er vanskelig å finne eksakte svar. Utdanning og undervisning er mye mer komplisert. Det jeg skriver om her er vel noe av bakgrunnen for at jeg har endt opp på en kvalitativ dokumentanalyse i min masteroppgave. Her har jeg allerede nevnt en metode innen forskning, men hva er nå en metode? Vilhelm Aubert har gitt følgende formulering av hva en metode er: ”En metode er en fremgangsmåte, et middel til å løse problemer og komme frem til ny kunnskap. Et hvilket som helst middel som tjener formålet, hører med i arsenalet av metoder" (Aubert & Alstad, 1985, s.196). I følge Dalland (2012) er Aubert blitt sitert i mange sammenhenger. Dalland skriver videre at begrunnelsen for å velge en bestemt metode er at vi mener den vil gi oss gode data og belyse spørsmålet vårt på en faglig interessant måte (Dalland, 2012, s. 111). Det er akkurat dette jeg har jobbet mot i mitt masterprosjekt, det å kunne bruke en metode til å finne noe og prøve å finne noen svar på de spørsmålene jeg stiller meg.

Som en slags overordnet paraply innen metodevalg ligger valget mellom kvantitativ og kvalitativ metode. Kvantitativ metode gir data i form av målbare enheter, mens kvalitativ metode tar sikte på å fange opp mening og opplevelse som ikke lar seg tallfeste eller måle (Dalland, 2012, s.112). Jeg synes det er viktig å anerkjenne at det er en forskjell mellom disse to overordnede metodene og at begge har sine fordeler og begrensninger og at det finnes ulike syn på de forskjellige metodene. Barry Troyna skriver om kontrasten mellom kvantitativ og kvalitativ forskning:

> *There is a view which is already entreched and circulating widely in the populist circles… that qualitative research is subjective, value-laden and, therefore, unscientific and invalid, in contrast to quantitative research, which meets the criteria of being objective, value-free, scientific and therefore valid.* (McCulloch og Richardson, 2000, s. x).

Her beskriver Troyna en populistisk oppfatning, en slags myte, om hva kvalitativ forskning er. Det at folk kan se på en slik type forskning som subjektiv og på den måten ikke som valid forskning er et syn som også delvis jeg delte før jeg startet opp på dette masterløpet. Jeg hadde en forventning om at forskning måtte være objektiv for at den skulle være valid slik Troyna beskriver at en populistisk holdning til kvantitativ forskning kan være. Jeg anså nok ikke kvalitativ forskning som verdiløs, men som en mindre troverdig forskning. Etter å ha lest en god del forskning, både kvalitativ og kvantitativ, har jeg mer og mer forlatt denne tankegangen om at en type forskning er mer korrekt enn en annen. Jeg ser viktigheten av begge og at vi trenger begge for å få et mer helhetlig bilde av det området det forskes på. I 1999 ble det skrevet en guidebok for forskning på tekstbøker kalt Unescos Guidebook on textbook research and textbook revision (Pingel, 1999). Dette er en metodisk guidebok der forfatteren understreker ulike vurderinger som tekstbokanalytikere må ta før og under arbeidet med forskningsprosjekter (Nicholls, 2003). Nicholls, som jeg referer til her, har skrevet en artikkel hvor han prøver å gi en oppsummering av hva slags metoder som kan brukes innen forskning på tekstbøker. I artikkelen referer han til Unescos Guidebook og hevder at denne håndboken er sentral innen feltet som tar for seg generiske metoder for tekstbokanalyse. Forfatteren av håndboken, Falk Pingel, påpeker den komplementære naturen av både kvalitative og kvantitative teknikker (Nicholls, 2003, s.3). Også Yin (2003) påpeker denne viktige sammenhengen mellom kvantitativ og kvalitativ forskning: "...regardless of whether one favors qualitative or quantitative research, there is a strong and essential common ground between the two" (Yin, 2003, s.15). Utsagnene fra både Pingel og Yin støtter opp under min tankegang om at både kvantitativ og kvalitativ forskning trengs for å få et så godt bilde som mulig av forskningsfeltet det forskes på.

Det å bestemme seg for hva man ønsker å forske på, hvilket fagfelt og hvordan man innsnevrer sitt fokusområde er en del av vurderingene som må tas. Et annet valg man må gjøre er å bestemme seg for hvordan man ønsker å undersøke det. Man må ta stilling til hvilken forskningsmetode man skal bruke. Før jeg tok det endelige valget om å bruke dokumentanalyse som metode ønsket jeg først å finne argumenter for at metoden egnet seg til mitt forskningsarbeid. I den forbindelse kom jeg over en artikkel skrevet av Glenn A. Bowen (2009). I abstraktet skriver forfatteren at denne forskningsartikkelen er ment for nybegynnere innen forskning og dokumentanalyse, noe som gjorde sitt til at den ble enda interessant for meg å gå nærmere inn på. For å kunne knytte tekstbokanalyse som metode opp mot det jeg skulle undersøker i mitt masterprosjekt valgt jeg å se nærmere på deler av forfatterens artikkel hvor han sammenligner andre kvalitative metoder med dokumentanalyse og beskriver fordeler og begrensinger ved bruk av dokumentanalyse som metode (Bowen, 2009, s.31-32). Under redegjør jeg for de ulike fordelene og begrensningene som Bowen beskriver og jeg kommenterer disse sett i sammenheng med mitt eget masterprosjekt.

Først beskriver Bowen, fordelt over sju underpunkter, fordeler ved bruk av dokumentanalyse som metode. Bowen hevder for det første at dokumentanalyse er en metode som krever mindre tid med tanke på innhenting av materialet. Metoden krever et datautvalg istedenfor datainnsamling. Det at forfatteren her beskriver det som mindre tidkrevende, vil jeg bemerke, ikke er ensbetydende med at det ikke er tidkrevende å gjøre et utvalg av tekster i forbindelse med min masteroppgave og lignende oppgaver. De som benytter seg av kvantitativ forskningsmetode i arbeidet med dokumenter kan dog påberegne seg mer tid enn de som bruker kvalitativ analyse av dokumenter. Bjørn Smestad (2002) uttalte seg i sitt forord i sin forskningsrapport om arbeidsmengde i en kvantitativ undersøkelse av lærebøker: "Dette ble nok et noe større arbeid enn jeg opprinnelig forestilte meg, og jeg må få takke min arbeidsgiver, Høgskolen i Finnmark, for tid til dette" (Smestad, 2002, s.5). Smestad gjorde en kvantitativ undersøkelse hvor han så på hvor mye matematikkhistorie nye lærebøker etter Læreplanen fra 1997 (L97) inneholdte. Jeg må innrømme at jeg virkelig kunne ha ønsket å ha gjort noe lignende som Smestad, hvor jeg har sett på en større mengde bøker og gjort en kvantitativ tilnærming til mitt utvalgte fagområde, men begrensningene ved å skrive en masteroppgave gjør sitt til at det ville ha vært en problematisk oppgave å få gjennomført. Det å velge en metode har store konsekvenser for arbeidet med prosjektet og med liten erfaring er det lett å legge opp til noe som er for vanskelig eller for omfattende til å kunne gjennomføre på den tiden en har til rådighet (Dalland, 2012, s.42). Etter å ha lest en del litteratur, gjennom erfaringer i masterløpet og gjennom samtale med veileder styrte jeg mot en kvalitativ metode fordi jeg så det som hensiktsmessig med tanke på blant annet tid og omfang. Som punkt nummer to skriver Bowen at mange dokumenter er lett tilgjengelige, spesielt med tanke på digitalisering av bøker på internett. Dette gjør at dokumentanalyse er attraktivt for de som jobber med kvalitativ forskning. Jeg har oppdaget selv gjennom mitt søk etter dokumenter at veldig mye er tilgjengelig. Forskningsartikler finnes i store mengder på internett og ulike gamle læreplaner og lærebøker m.m. finnes på blant annet Nasjonalbibliotekets og stortingets internettsider. Det har vært svært nyttig for meg i prosessen med å skille ut de eldre lærebøkene jeg ønsket å bruke i prosjektet mitt. Her var det mange å velge blant og jeg fikk et nyttig innblikk i flere andre læreverks innhold. Videre påpeker Bowen at dokumentanalyse er kostnadseffektivt, et aspekt jeg ikke går nærmere inn på da det i mitt masterprosjekt ikke er et økonomisk spørsmål rundt gjennomføringen. I et annet punkt hevder Bowen at dokumentanalyse som metode har færre forstyrrende og reaktive elementer enn andre metoder. Dokumenter er upåvirket av forskningen som blir gjort. Dokumenter speiler virkeligheten eller eventuelt det som mangler i virkeligheten, mens i andre kvalitative undersøkelser, som i et intervju eller observasjoner i et klasserom, kan selve forskningsprosessen være med på å påvirke hva som skjer og dermed blir det ikke nødvendigvis en ren refleksjon av virkeligheten. Bowen ser også på dokumenter som stabile. Han gjør en logisk slutning om at dokumenter er stabile fordi de ikke er reaktive. Dokumentene egner seg for å bli forsket på flere ganger uten at de på noen måte blir endret på. Her har han et godt poeng synes jeg. Ta for eksempel et forskningsprosjekt hvor forskeren skal inn å gjøre lydopptak og videoopptak og kanskje til og med intervjue noen av informantene det være seg en elev, lærer eller andre involverte. Forskeren er i disse tilfellene deltakende i en eller annen form og måten forskeren opptrer på er helt avgjørende for at datainnsamlingen skal være med på speile virkeligheten i så stor grad som mulig. Å komme inn som en ukjent forsker og unngå at du som en ekstern person ikke skal ha noen innvirkning på klasseromssituasjonen er nok vanskelig og man vil på en eller annen måte være med på å styre elevenes atferd til en viss grad. Jeg skriver ikke dette fordi jeg mener at slik forskning ikke har en verdi eller at forskningen kan speile virkeligheten i veldig stor grad. Jeg skriver dette fordi jeg vil understreke det Bowen sier om at dokumenter ikke er reaktive slik individer er og dermed vil det være et usikkerhetsmoment mindre i forskningen. Jeg synes det har vært betryggende å ha med seg inn i forskningsprosjektet mitt at jeg har kunnet vite med sikkerhet at det jeg har sett og lest ikke er påvirket av noe annet enn mine egne tolkninger etter tekstens utgivelsesdato. Det sjette punktet som Bowen beskriver som en fordel er det at tekstbokanalyse er en nøyaktig metode og dokumenter er fordelaktige å bruke i forskning fordi de inneholder eksakte navn, referanser og detaljer fra hendelser. Det siste punktet Bowen beskriver er at dokumentanalyse har en høy dekningsgrad. Dokumenter gir oss tilgang på mye informasjon; de dekker et stort tidsrom, mange hendelser og situasjoner. Nettopp dette med muligheten til å kunne undersøke noe over en lang tidsperiode har jeg benyttet meg av i mitt masterprosjekt hvor jeg har sett på lærebøker fra 1930-tallet og helt frem til læreverk av nyere dato. Det å se på tekstbøker med et slikt tidshopp, har gitt meg noen utfordringer som jeg vil komme tilbake til.

Bowen beskriver også begrensninger ved dokumentanalyse som metode og har i den sammenheng listet opp tre punkter som beskriver noen begrensninger ved bruk av denne forskningsmetoden. Det første punktet er at tekstbøker kan ha mangelfulle detaljer. Dokumenter er laget for et annet formål enn forskning; de er laget uavhengig av forskningsagendaen. De mangler som regel utfyllende nok detaljer for at forskningsspørsmålene skal kunne bli besvart. Denne problemstillingen har jeg kjent meg litt igjen i. Jeg har flere ganger, når jeg har søkt og lest i ulike lærebøker, lurt på hva forfatteren har tenkt her. Hva er bakgrunnen for at ting formuleres som det gjør og for hvilket utvalg av eksempler, forklaringer, illustrasjoner osv. som er gjort? For å bøte litt på denne begrensingen har jeg også sett i læreplanene til de utvalgte lærebøkene og eventuelle tilleggsdokumenter som sier noe om eller kan belyse disse valgene som er gjort av forfatterne. Den andre begrensingen som Bowen ser, handler om søkbarhet. Bowen referer til Yin (1994) som beskriver at i noen tilfeller kan dokumenter være vanskelig å finne, de kan i verste fall være fjernet og blokkert for forskeren. Dette er et utsagn fra forfatteren Yin i 1994. Etter at denne forskeren skrev om dette har det skjedd mye på digitaliseringsfronten og bøker og tekster er mer tilgjengelig på internett nå enn i 1994. Når det er sagt har jeg opplevd noen problemer hvor jeg har brukt lang tid på å finne det jeg har lett etter. Sånn sett er jo innhenting av data fra klasserommet, intervju og lignende en sikrere kilde. Man er jo selvfølgelig klar over utfordringene knyttet til innhenting av data, men når man leter etter lærebøker kan man i verste fall risikere ikke å finne noen av lærebøkene, læreplanene og andre dokumenter som er laget. McCulloch belyser også dette med muligheten for at man kanskje ikke finner all litteratur som er skrevet og at man er prisgitt de kildene som er tatt vare på og er tilgjengelig. I mange tilfeller kan det være et problem at man ikke finner det man leter etter på grunn av at kildene er destruert eller ikke er tilgjengelig for allmenheten (Cohen, Manion og Morrison, 2011, s.252). At jeg ikke har tilgang på alt som er skrevet i forbindelse med læreverk siden 1930-tallet er det vel liten tvil om, men jeg har tilgang på relativt mye takket være det gode digitaliseringsarbeidet som blant annet Nasjonalbiblioteket har gjort. Den siste begrensingen som Bowen belyser i sin artikkel er at dokumenter kan være forutinntatte og det kan være gjort partisk utvalg. I noen sammenhenger kan noen av dokumentene i en samling være utelatt. Grunnene til dette kan være ulike føringer, retningslinjer og prosedyrer som er satt ut fra en organisasjon sine prinsipper. I noen tilfeller kan dokumenter være forfalsket eller at det er tvil om hvem som er forfatteren (Cohen et al., 2011, s.253). Problematikken som beskrives her, tror jeg at jeg neppe vil lide under, da jeg skal undersøke norske tekstbøker og jeg må anta at det ikke ligger noen form for politisk agenda hvor det er hemmelighold eller forfalskninger gjort for å påvirke hva slags syn man skal ha på disse dokumentene. Derimot vil det jo uten tvil være politiske føringer om hva slags innhold de ulike læreverkene og læreplanene har.

Slik jeg så det var det mange flere fordeler enn begrensninger og det at begrensningene ved dokumentanalyse ikke nødvendigvis ville inntreffe i noen særlig grad i min forskning gjorde at jeg valgte dokumentanalyse som metode i mitt forskningsarbeid. Tilgjengeligheten, ved hjelp av den omfattende digitaliseringen som er gjort, var også noe som jeg så som en stor fordel i det arbeidet jeg har gjort i min masterstudie.

Det å tolke og analysere tekstbøker kan være krevende på flere plan. Det å sette premissene for hva jeg skulle lete etter i min analyse av lærebøkene jeg har valgt ut og hvordan jeg går frem for å gjøre funn var viktig. Dokumenter som er lokalisert og utforsket snakker ikke for seg selv, men krever møysommelig analyse og tolkninger (Cohen et al., 2011, s.253). Tidligere er det nevnt noen mulige begrensninger som ligger til grunn når man benytter dokumentanalyse som metode og nå vil jeg se litt nærmere på noen flere utfordringer tekstbokanalyse har gitt meg i mitt masterprosjekt. Det å analysere lærebøker er krevende, noe jeg selv har merket. Jeg har vært igjennom en prosess hvor jeg har plukket ut 4 ulike læreverk som de primære kildene til datainnsamlingen min. I prosessen med å velge ut bøkene har jeg sett på flere andre lærebøker, læreverk og andre tilleggsdokumenter. Dokumentanalyse er en gjentakende prosess hvor man først overflatisk ser igjennom dokumenter og videre leser man mer nøye for til slutt å tolke det man leser (Bowen, 2009).

Jeg har sett på matematikkbøker som er laget for bruk i skolen helt tilbake på 1930-tallet og helt frem til i dag. Det er vel ingen hemmelighet at samfunnet vårt har endret seg og skolen er ikke slik den var på 1930-tallet. Det er ulike samfunnsmessige påvirkninger på den litteraturen som er skrevet. Ta for eksempel spørsmålet; Hvem er tekstbøkene skrevet for? De elevene som gikk på Middelskolen på starten av 1900-tallet kan sammenlignes med dagens ungdomsskoleelever i alder. Spørsmålet er om lærebøkene er skrevet for samme målgruppe. Hvilke politiske føringer ligger bak? Jeg har blant annet valgt ut læreverket Cappelens matematikkverk (Berntsen et al., 1978), et læreverk som kom i etterdønningene av Sputniksjokket. Innholdet i disse lærebøkene er preget av en tydelig politisk agenda og mønsterplanen fra 1974 (M74) er faglig detaljert i mye større grad enn i f.eks. Kunnskapsløftet (LK06). For å kunne forstå de ulike læreverkene og tilleggslitteraturen bedre har jeg valgt i kapittel 4 å se på skolehistorien i Norge. Her belyser jeg hvilke samfunnsmessige endringer som har skjedd og hvordan læreplanene har endret seg. Dette mener jeg er viktig å se nærmere på for å kunne ha et bredere grunnlag når jeg skal analysere bøker fra de ulike tidsepokene.

Det å analysere bøker som er laget på 1930-tallet har gitt meg enda en utfordring som går på det språklige. Måten tekstene ble skrevet på den tiden er annerledes enn det er i dag. I Plangeometri for middelskolen (Alfsen, 1935) finner man ord og setninger som ikke brukes i dag. Eksempel på et matematisk begrep som vanligvis ikke brukes i dag er “perpendikulæren” (Alfsen, 1935, s.115). Og følgende setning inneholder også et ord som kan få alle og enhver til å spekulere: “Snekkeren anvender denne setning når han ved hjelp av et “strikmåt” risser en parallell” (Alfsen, 1935, s.51). I følge Store Norske Leksikon er Strekmåt et snekkerredskap for oppmerking av streker parallelt med kanter på arbeidsstykket (Rosvold, 2017) og perpendikulær er et gammelt ord for vinkelrett eller normal (Vatne, 2017). I analysearbeidet av de to eldste bøkene har jeg vært bevisst på at språket ikke skal være med på å trekke meg i retning av misoppfatninger og misforståelser. Jeg har for eksempel prøvd å unngått å la meg lede til å tro at matematikken i bøkene er av en mer komplisert art fordi språket er annerledes i struktur og inneholder andre navn på matematiske begreper.

Avslutningsvis ønsker jeg å si noe om å begrense seg i en masteroppgave. Jeg bestemte meg tidlig i prosessen for å utforme et design for masterprosjektet mitt for temaet om den pythagoreiske læresetningen i norske lærebøker. Jeg har ikke funnet noen undersøkelser som undersøker det jeg skal gjøre i mitt prosjekt og har samme vinkling som meg. Det at det finnes lite liknende forskning har gjort det ekstra utfordrende med tanke på hvordan jeg skal bygge opp et teorigrunnlag. Flere forskere, blant annet Nicholls (2003) og Fan (2013), påpeker at forskning på tekstbøker som forskningsfelt er i et tidlig stadium sammenlignet med andre forskningsfelt innen matematikkdidaktikk. Fan (2013) påpeker også at skolebøker har vekket en økt interesse i det internasjonale forskningsmiljøet innen matematikkdidaktikk. Temaer som omhandler utvikling og forskning på matematikkbøker og forskning på endring av naturen og rollen til lærebøker i matematikk ved at de endrer form, bruksområde og tilgjengelighet, er temaer som vekker interesse hos forskere. Jo mer jeg har lest om dette jo flere ideer har jeg fått i forbindelse med mitt masterprosjekt. Det finnes mange muligheter, så det har vært en utfordring å ta metodiske valg og begrense meg. Jeg har prøvd å være tro mot den historiske vinklingen jeg har ønsket å hatt i prosjektet. Det å velge metode handler ofte om overveielser mellom det en anser som den ideelle fremgangsmåten, og det som er praktisk gjennomførbart (Dalland, 2012, s.114). Akkurat dette har vært kjerneproblematikken i mine overveielser og metodevalg. Jeg har hatt lyst til å se det hele og fullstendige bildet og sett at mange metoder ville kunne ha belyst temaet i mitt forskningsprosjekt, men har etterhvert innsett at mitt prosjekt bare kan bidra til en veldig liten del innen forskningsfeltet.

3.3 Analysestrategi

For å få et så riktig bilde som mulig av de utvalgte læreverkene har jeg valgt å dele analysen inn i to kapitler. I kapittel 4 setter jeg læreverkene inn i en kontekst ved å se på utviklingen av skolen og lærebøkene og hvilken rolle de har hatt fra 1900-tallet og frem til i dag. Dette kapitlet er ment for å gi et bedre grunnlag for å forstå de ulike læreverkene bedre. Det ville ikke gitt et riktig bilde bare å se på det faktiske innholdet uten å se på forholdene i lærebøkenes samtid. Det norske samfunnet har vært igjennom en enorm utvikling i løpet av de siste drøye 100 år og da er det også naturlig at lærebøkene har blitt påvirket av dette. I kapittel 5 vil jeg analysere de fire utvalgte læreverkene og deres tilhørende læreplaner. Jeg tar for meg læreverkene i kronologisk rekkefølge hvor jeg først ser på læreverkets tilhørende læreplan og videre ser jeg på lærerveiledning, om den eksisterer, og tilslutt læreboka. Jeg har valgt å lage meg noen spørsmål knyttet opp mot forskningsspørsmålene som skal være til hjelp for meg når jeg analyserer. Som utgangspunkt for analysen av læreplanene og lærerveiledningene har jeg følgende spørsmål som støtte:

- Hvordan beskriver dokumentene den pythagoreiske læresetnings historiske opphav?
- Hva sier dokumentene om innføringen av læresetningen?
- Hva sier dokumentene om bevis for læresetningen og er det noen direkte henvisninger til oldtidsbevis?

Liknende spørsmål som jeg har formulert og skal være utgangspunkt for analysen av lærebøkene er følgende:

- Hvordan settes læresetningen i en historisk kontekst?
- Finnes det spor av oldtidsmatematikk og oldtidsbevis?
- Hvordan innføres læresetningen?

3.4 Gyldighet og pålitelighet

Det er viktig at forskning er gyldig og hvis en del av forskningen ikke er gyldig vil den være ubrukelig (Cohen et al., 2011, s.179). Det er allikevel ikke slik at forskningen er gyldig eller ugyldig, men det finnes grader av gyldighet og det er umulig at forskning er 100 % gyldig

(Cohen et al., 2011, s.179). Målet er å gjennomføre en forskning som er så nære som mulig til det gyldige. En kvalitativ forskning som jeg gjennomfører her er påvirket av hvilke valg jeg tar underveis og det er derfor viktig at jeg begrunner disse valgene,

Jeg har valgt å se på fire læreverk fra henholdsvis, 1935, 1939, 1974 og 2015. Disse har alle blitt brukt i den norske skolen og er laget for elever i samme aldersgruppe. I kapittel 4 ser jeg nærmere på skolehistorien og her vil det fremkomme en del endringer som har skjedd i samfunnet og i skolen som påvirker lærebokas og elevens rolle. Dette er viktige momenter som jeg mener er viktig å skrive om siden jeg skal se på bøker med et slikt stort tidsmessig gap. Et slikt kapittel som redegjør for skolens, elevens og lærebokas rolle og som setter de ulike læreverkene inn i en kontekst, mener jeg, styrker oppgavens troverdighet.

For å begrunne oppgavens pålitelighet ønsker jeg også å si noe om hvordan læreverkene jeg har valgt ut har blitt godkjent og publisert. Læreverkene fra 1935, 1939 og 1974 har blitt godkjent gjennom godkjenningsordningen av 1889. Dette var en ordning som sørget for at lærebøkene måtte godkjennes av staten. Lærebøkene er derfor relevante og pålitelige kilder og videre vil disse tre læreverkene gjøre at analysen av disse spesifikke læreverkene vil være relevante til min analyse. Når det gjelder Læreverket Nummer (Hole et al., 2015), så stiller det seg litt annerledes. Her er det ikke et statlig styrt godkjenningsorgan som leser gjennom og godkjenner det som er skrevet, men forlagene har en egen internkontroll. Jeg har derfor valgt å se nærmere på godkjenningsordningen og historien til den i kapittel 4. Her beskriver jeg bakgrunnen for at ordningen ble endret og hvilke konsekvenser dette har fått for lærebokforfattere.

Jeg lest meg opp på teori knyttet til dokument- og lærebokanalyse og beskrevet dette i metodekapitlet og for å styrke oppgavens troverdighet ytterligere har jeg i 3.4.1 og 3.4.2 skrevet om valg jeg har gjort med tanke på litteratur.

3.4.1 Valg av litteratur /Kildekritikk

I en masteroppgave vil det være behov for relativt mange kilder og ulike type kilder innenfor de ulike kapitlene. Dalland beskriver begrepet kilde på en metaforisk måte:

> *En kilde er et sted hvor grunnvann kommer frem i dagen. Kildevannet er da renset gjennom lag med grus og sand, og er derfor renere enn vanlig overflatevann… Når kilden er funnet, må den vurderes både i forhold til kvalitet og hvorvidt den er relevant for ditt arbeid* (Dalland, 2012, s.63).

Jeg har valgt å skrive om begrunnelser og bakgrunn for valg av litteratur her for å forsøke å vise en større grad av pålitelighet til undersøkelsen og at den ulike litteraturen ikke er tilfeldig og har en tydelig relevans til mitt forskningsspørsmål.

I kapittel 2 har jeg undersøkt historien om den pythagoreiske læresetningen og er derfor avhengig av pålitelige kilder som har samlet inn informasjon som går nesten 4000 år tilbake i tid. Det er skrevet en hel del verk om den generelle matematikkhistorien, men også bøker og artikler som tar for seg deler av historien og enkelte matematiske fagfelt. I faget "Historiske og filosofiske aspekter ved matematikk", som har vært et fag i mitt masterløp, var David Burton sin bok "The history of mathematics - an introduction" (Burton, 2011) på pensumlisten. Denne boka tar for seg matematikkhistoriens utvikling de siste 5000 årene. I innledningen begrunner Burton at det var et behov for en slik bok som er skrevet for andre enn rene fagmatematikere eller historikere, da tidligere historiske verk var skrevet på en meget teknisk måte der leseren måtte ha mye matematisk kunnskap for å kunne forstå innholdet. Siden jeg jobbet med boka i løpet av studiet og jeg hadde en del kjennskap til denne på forhånd og fordi boka er av nyere dato, har nettopp denne vært utgangspunkt for meg i arbeidet med det historiske kapitlet. Burton nevnte også en annen forfatter som han mente var et unntak og som også hadde skrevet bøker for andre enn rene fagmatematikere eller historikere (Burton, 2011, s. x). Howard Eves har skrevet boken "An Introduction to the History of mathematics" (Eves, 1990). I tillegg til denne boken, har jeg også sett på en annen bok av samme forfatter, "Great moments in mathematics before 1650" (Eves, 1983). I og med at disse to bøkene skrevet av Eves er fra henholdsvis 1983 og 1990 og at de ikke går i dybden i noen vesentlig grad på den pythagoreiske læresetningen, ønsket jeg å finne mer litteratur som konsentrerte seg spesifikt om den pythagoreiske læresetningen fra nyere datoer. Jeg kom over Eli Maor sin bok kalt "The pythagorean theorem" (Maor, 2007), som går grundig til verks på den historiske utviklingen av læresetningen og denne boken har jeg støttet meg mye til i arbeidet med det historiske kapitlet om læresetningen. For å øke påliteligheten til det historiske kapitlet har jeg valgt å bruke flere forfattere som belyser historikken til læresetningen. Jeg har blant annet vært innom forfatteren Audun Holme sin bok kalt "Matematikkens historie" (Holme, 2008) som tar for seg mange av de samme historiske elementene som Burton (2011) gjør. I tillegg til de nevnte bøkene har jeg også referert til en del annen litteratur som beskriver temaet rundt den pythagoreiske læresetningen. Jeg mener selv at jeg har et bredt litteraturgrunnlag i dette historiekapitlet og at det er bra at jeg har ulike kilder å støtte meg på. Forfatterne gjør seg opp egne meninger og trekker noen konklusjoner, og i noen tilfeller er de rent spekulative, som kan avvike noe mellom de ulike forfatterne. Spesielt historien rundt egypternes kunnskap om den pythagoreiske læresetningen og uklarheter rundt historien om personen Pythagoras har vært områder der de ulike forfatterne har vært noe forskjellige i sin fremstilling. Denne uklarheten rundt disse områdene finner vi også igjen i de ulike læreverkene som jeg presenterer og de som jeg har vært innom i utvelgelsen av læreverk. Jeg har gjennom dette arbeidet da prøvd, for å bruke metaforen til Dalland (2012), å finne det reneste kildevannet av informasjon ved å bruke et bredt grunnlag av litteratur.

3.4.2 Valg av læreverk

I utvelgelsen av litteratur har jeg flere innfallsvinkler; en personlig, en skolehistorisk og en faglig. Først vil jeg si noe om det personlige utgangspunktet for utvelgelsen. Jeg har som nevnt i innledningen at jeg har jobbet som lærer i over 10 år og brukt læreverket Grunntall (Bakke og Bakke, 2006) skrevet etter LK06. Jeg hadde gjennom masterstudiet fått øynene opp for den pythagoreiske læresetning og de ulike bevisene for denne setningen. I Grunntall er det ingen henvisninger til bevis eller bevisføring. Med dette som utgangspunkt ønsket jeg å se hvordan andre læreverk hadde behandlet dette temaet. Siden Grunntall har blitt skrevet etter LK06 var det naturlig for meg å se til andre læreverk skrevet etter andre læreplaner for å kunne se hvordan de behandlet temaet og om hvordan utviklingen hadde vært på området.

Jeg har en historisk vinkling på denne masteroppgaven og jeg ønsker å se etter oldtidsmatematikk i de ulike læreverkene og læreplanene. Med dette som utgangspunkt hadde jeg et faglig blikk i forbindelse med utvelgelsen av læreverk. Jeg begynte med å se etter spor av oldtidsbevis for den pythagoreiske læresetningen og om hvordan de fremstilte historien om Pythagoras og setningen. Jeg så fort at det fantes mye forskjellig i læreverk fra alle de ulike læreplanene. I 1930-årene så jeg tydelige euklidske fremstillingsmetoder for den pythagoreiske læresetningen i bøkene, mens i nyere læreverk var det andre bevis og bevisføringer som ble fremstilt. Jeg mener det er viktig å få frem denne faglige forskjellen i læreverkene i analysen.

For at ikke kun det matematikkfaglige blikket skulle styre utvelgelsen av bøkene mine valgte jeg å ta utgangspunkt i de ulike læreplanene og det skolehistoriske perspektivet. Jeg ønsket å avgrense meg noe på tidsspennet og bestemte meg tidlig for ikke å gå lengre tilbake i tid enn mellomkrigstiden. Jeg synes det var interessant å ha med seg denne dimensjonen av lærebøker for de hadde en vesentlig annerledes fremstilling av fagstoffet enn det vi har i dag. Jeg har valgt ut en lærebok før og en etter Normalplanen fra 1939. Dette valget gjorde jeg fordi Normalplanen var en innovativ læreplan på den tiden som markerer et tydelig skille i skolehistorisk sammenheng. Normalplanen er også den planen som har eksistert lengst i tidsutstrekning og er derfor meget sentral og innflytelsesrik for skoleutviklingen. Videre har jeg valgt ut et læreverk, Cappelens matematikkverk (Berntsen et al., 1977), skrevet etter M74. En læreplan som også markerer en stor endring i læreplanhistorien med tydelig preg av etterdønningene av Sputniksjokket og den kalde krigen. Tilslutt har jeg valgt å gjøre et ganske stort tidsmessig hopp og valgt ut et læreverk av nyere tid som heter Nummer (Hole et al., 2015), da jeg synes det er viktig å se hvordan situasjon er nå og gjøre analysen dagsaktuell. Jeg har gjennom dette utvalget plukket ut læreverk som representerer sentrale læreplaner og endringer i utviklingen av skolen.

3.5 Etiske problemstillinger

For at masteroppgaven skal ha en troverdighet er det også viktig å ha klart for seg hvilke eventuelle forskningsetiske problemstillinger som kan være knyttet opp mot min masteroppgave. Forskningsetikk har med planlegging, gjennomføring og rapportering av forskning å gjøre. Det handler om å ivareta personvernet og sikre troverdigheten av forskningsresultatene (Dalland, 2012, s.96). I forbindelse med min analyse og i mitt historiske grunnlag om den pythagoreiske læresetnings opphav bruker jeg både sitater fra litteratur og en god del utklipp og bilder fra de ulike tekstene. I starten hadde jeg ingen umiddelbare etiske problemstillinger med tanke på kilder, og jeg refererte til de ulike bøkene og artiklene på den standardiserte APA-stilen. Åndsverkloven § 22 sier følgende om sitering: «Det er tillatt å sitere fra et offentliggjort verk i samsvar med god skikk og i den utstrekning formålet betinger.» (Åndsverkloven, 1961). Så langt mener jeg at jeg er innenfor de etiske retningslinjene. Det er allikevel en kilde til tolkning og usikkerhet rundt bruken av utklipp fra litteratur. I § 23 i Åndsverksloven står det følgende: “Offentliggjort kunstverk og offentliggjort fotografisk verk kan gjengis i tilslutning til teksten i kritisk eller vitenskapelig fremstilling som ikke er av allmennopplysende karakter, når det skjer i samsvar med god skikk og i den utstrekning formålet betinger” (Åndsverksloven, 1961). Jeg bruker en del utklipp av illustrasjoner og figurer i forbindelse med analysen av lærebøker og læreplaner og der har jeg et dilemma om hvorvidt disse illustrasjonene og figurene faller innenfor § 22 eller § 23. Jeg undersøkte saken med en overordnet i Kopinor. Hun mente at det var et tvilstilfelle hvor det måtte tolkes ut fra bruken i de enkelte skrevne tekster. Det er rimelig å tro at man er innenfor de etiske retningslinjene om man bruker illustrasjonene i teksten på en kritisk og vitenskapelig måte, noe jeg selv mener å ha gjort. Jeg har ikke ved noen omstendigheter brukt disse utklippene i form av en allmennopplysende karakter. I de tilfellene hvor jeg refererer til gamle lærebøker og annen litteratur hvor forfatterne er døde kan jeg uavhengig av § 22 og § 23 si at opphavsretten frafaller og jeg kan fritt sitere uten noen videre godkjenning fra forlag eller forfatter, så sant forfatterne har avgått ved døden for over 70 år siden. §40 sier følgende om opphavsrettenes vernetid: “Opphavsretten varer i opphavsmannens levetid og 70 år etter utløpet av hans dødsår” (Åndsverksloven, 1961). Jeg referer blant annet til forfatteren Magnus Alfsen, som døde i 1943, og av den grunn bortfaller opphavsretten og jeg kan derfor trygt sitere forfatteren uten videre godkjenning. Videre i samtalen med Kopinor kom vi sammen til en slutning om at for å være på den sikre siden så det er lurt å kontakte forlagene for den litteraturen jeg henter utklipp fra og legge frem saken og spørre om godkjenning.

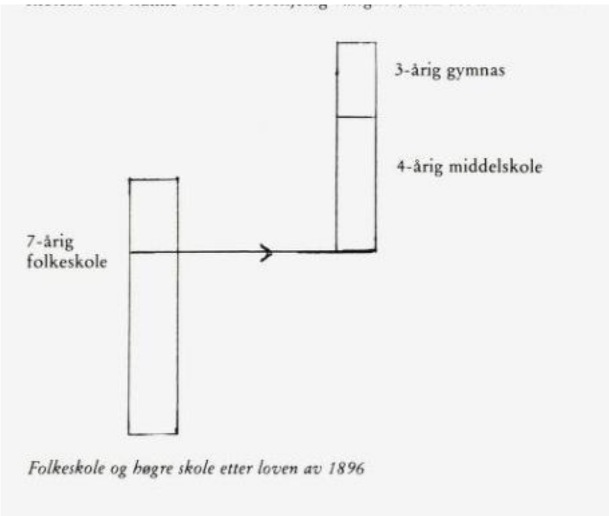
4 Skolehistorie

I dagens Norge har alle barn et privilegium, en rett og en plikt til å gjennomføre en 10-årig grunnskole. Utdanning er en menneskerettighet (FN, 1948). I verdenserklæringen for menneskerettigheter artikkel 26 står denne rettigheten beskrevet slik: “Enhver har rett til undervisning. Undervisningen skal være gratis, i det minste på de elementære og grunnleggende trinn. Elementær-undervisning skal være obligatorisk” (FN, 1948). Rettigheten til skolegang, lengden og navnene på de ulike nivåene skoleløpet, lovene tilknyttet skolen, læreplanene og lærebøkene er alle elementer ved skolen som har endret seg ved tidens løp. Knut Ingar Hansen (1967) beskriver disse endringene på følgende måte: “Et lands skolevesen er i stadig utvikling: Skoletid, undervisningsplikt og undervisningsfag forandres, tilknytningen mellom de forskjellige skoleslag forrykkes, gamle skoletyper forsvinner og nye tar deres plass" (Hansen, 1967, s. 3).

I kapittel 4 forsøker jeg å danne et bilde av utviklingen av skolen i Norge og har i den sammenheng delt opp dette i 4 kapitler. I 4.1 ser jeg på skolens historie og da spesielt det som har med organisering av skoleløpet å gjøre. Videre i 4.2 skriver jeg litt om den generelle utviklingen og av læreplaner, men uten å gå i dybden, da jeg i kapittel 5 går i dybden på det som er knyttet til den pythagoreiske læresetningen. I 4.3 skriver jeg om læreverkenes rolle i en historisk sammenheng og om hva slags rolle den har i dag. Om lærebøker skriver jeg også om i 4.4, der jeg går nærmere inn på godkjenningsordningen for lærebøker. Dette mener jeg er viktig for å kunne ha et bredere grunnlag for å kunne forstå de ulike læreverkenes fremstilling av fagstoffet jeg analyserer.

4.1 Utdanningsløpets historie i den norske skolen

Skolen i Norge har historie helt tilbake til middelalderen (Tjeldvoll, 2018). I 1739 ble det innført allmueskole, et navn som er forløperen til dagens grunnskole. Dette var en omgangsskole på landet, med et skoleår som varte 12 uker. Lærerne, som måtte godkjennes av presten, var ofte dårlig utdannet (Skjelbred et al., 2017, s.14). Skolene var ikke statens, men lokalsamfunnenes ansvar. Kirkesognet sørget for lærernes lønninger og skolelokale (Helsvig, 2014, s.12). Ca. 70-80 % av elevene søkte seg inn i allmueskolen (Telhaug, 1989, s.85). I tillegg til allmueskolen som var lovpålagt var det to andre parallelle alternativer. Et av de private alternativene til allmueskolen oppstod på slutten av 1700-tallet var borgerskolen, som var beregnet på barn fra alderen 6-7 år og opp til 13-16 år (Telhaug, 1989, s.87). Dette var skoler myntet på de barn som kom fra et høyere samfunnslag og det kostet penger å få barnet inn på en slik skole. I tillegg til borgerskolen fantes det et tredje alternativ som het Den lærde skole, en skole som også kostet penger. Dette var rene fagskoler, med blant annet fag som latin og gresk, som skulle forberede elevene til universitetet. Dette strengt differensierte skolesystemet reflekterte tidens store klasseforskjeller, bl.a. de store forskjeller som fantes i barns muligheter for å arbeide med skoleoppgavene og i utdanningsambisjoner (Telhaug, 1989, s.89). I følge Telhaug var det stor misnøye med ordningen med tre skoler. Tanken om å slå de tre skoleslagene sammen til en felles skole nedenfra og i det minste et stykke oppover i aldersklassene fikk økende oppslutning (Telhaug, 1989, s.89). Dette var opptakten til Folkeskoleloven som kom i 1889. Med Folkeskoleloven begynte fagkretsen i skolen å ligne den vi kjenner i dag (Skjelbred et al., 2017, s.14). Nå ble det offentlige skoleløpet i en 5-7-årig folkeskole og man fikk valget om å gå videre på en 1-3-årig påbygging i form av fortsettelsesskole (senere kalt framhaldsskole) eller en 2-4-årig middelskole. Framhaldsskolen var en mer praktisk rettet skole, mens middelskolen var teoretisk rettet og grunnlaget for den videregående skolen. I 1896 var tida inne for å gjøre et endelig vedtak om hvordan enhetsskolen skulle arte seg. Her het det at middelskolens kurs kunne være av forskjellig varighet, men kunne ikke være mer enn 4 år (Telhaug, 1989, s.91-92). Figur 13 viser denne inndelingen.



Figur 13 - Folkeskole og høyere skole etter loven av 1896
(Telhaug, 1989, s. 91)

I praksis ble den såkalte 5+ 4 ordningen (5-årig folkeskole og 4-årig middelskole) den vanligste i årene etter 1896 (Høigård, Ruge, & Hansen, 1971, s. 142-157). Sammensmeltingen av de tre parallelle skolene var starten på tankegangen om enhetsskolen slik vi kjenner den i dag. Høigård og Ruge beskriver denne endringen slik: "Enhver skole som hittil hadde fulgt sine egne veier, måtte derfor i støpeskjeen og smeltes om i den felles form" (Høigård et al., 1971, s.155).

Ordningen om 5-årig folkeskole og 4-årig middelskole møtte motstand. Allerede samme år som loven om høyere allmennskoler i 1896 ble vedtatt engasjerte lærere fra folkeskolen seg i spørsmålet knyttet til folkeskolens oppbygging. I følge Høigård og Ruge (1971) uttalte lærer

Hoversholm at ordningen ikke var av interesse for folkeskolen i et foredrag for Norske lærerforenings landsmøte. Målet måtte være et 2-årig kurs som bygde på avsluttet folkeskole (Høigård et al., 1971, s.183). Den statlige Enhetsskolekomiteen gjorde oppmerksom på at den viktigste forutsetning for å bygge den høyere skole på avsluttet folkeskole var at folkeskolen måtte gjøres bedre enn den var (Høigård et al., 1971, s.185). Tiltakene som ble foreslått var å avslutte ordningen om ettermiddagsundervisning, utvide undervisningstiden, innføre avgangseksamen og begrense elevtallene i klassene. I 1920 vedtok stortinget en ny fast inndeling for folkeskolen og middelskolen. Nå skulle folkeskolen være 7-årig og avløses av en 3-årig middelskole. I 1935 kom loven om høyere allmennskoler. Høigård og Ruge (1971) beskriver den nye loven som uoversiktlig og med mange versjoner. Det endelige resultatet som ble en realitet var imidlertid enklere enn loven (Høigård et al., 1971, s.234). De store hovedlinjene etter en 7-årig folkeskole ble et 5-årig gymnas, hvor de tre første årene er en realskole som kan sammenlignes med den gamle middelskolen. I forbindelse med den pågående debatten om høyere allmennskoler i 1935 ble det innstilt en plankomite som skulle behandle organiseringen mellom folkeskolen og den høyere allmenne skole. Leder for denne komiteen ble Magnus Alfsen (Høigård og Ruge, s. 240), som forøvrig er forfatteren av læreverket Plangeometri for Middelskolen (Alfsen, 1935), som er et av læreverkene jeg skal analysere. Plankomiteen, som ble ledet av Alfsen, kom med forslag til timefordeling og ulike økonomiske ordninger for skoler både på landet og i byene. De foreslo blant annet igangsettelse av 2-årige bygderealskoler på steder i landet der det var vanskelig å komme seg til en ordinær skole (Høigård og Ruge, s. 242). Dette skulle være en skole hvor de beste elevene fra folkeskolen skulle samles gjennom en omfattende opptaksprøve. Komiteen tok avstand fra alle andre kommunale og private 2-årige realskoler, de burde omdannes til 3-årige. Her var det altså rom for unntak fra den 3-årige realskolen. Loven om den høyere skole blir gjort gjeldende fra nederste trinn først fra sommeren 1939 (Heli, 1939, s.107), noe også understrekes i Stortingsmelding 40 fra 1939: "Departementet har i budsjettproposisjonene for det høgre skolevesen både for 1938 og 1939 uttalt som sin forutsetning at den nye ordning av de høgre skoler blir gjennomført fra høsten 1939…" (Kirke-, og undervisningsdepartementet, 1939). Dette betyr at boken Plangeometri for Middelskolen skrevet i 1935, fortsatt gikk under loven som kom i 1920. Derimot så er boken om Bonnevie og Eliassens plangeometri, som er omskrevet av A. Alexander i 1939, utarbeidet etter loven om høyere allmennskoler fra 1935.

I årene 1935-1940 fikk vi en rekke nye skolelover. Og i 1945 ble det klart at det var behov for bedre samordning av skoleverket (Høigård et al., 1971, s. 249). I forbindelse med dette behovet ble Samordningsnemda for skoleverket oppnevnt i 1947. Denne nemnda hadde blant annet mandat til å se på utbygging av de enkelte skoleslag og revisjon av skolelover med tanke på samordning og forenkling (Høigård og Ruge, 1971, s. 249). I forkant av denne oppnevningen ble loven om framhaldsskoler vedtatt i 1946 hvor skolen ble ansett som selvstendig. Flertallet i samordningsnemda mente at framhaldsskolen skulle bli obligatorisk i alle kommuner (Høigård og Ruge s. 256). Og i skoleåret 1955/56 var det framhaldsskoler i 82 % av landets kommuner (Høigård og Ruge, s. 257). I 1955 ble nok en lovendring vedtatt hvor maksimal lesetid ble økt til samme timetall som i realskolen og dermed ble det lagt et grunnlag for samordning av disse to skoleslagene (Høigård og Ruge, s. 256). Samordningsnemnda kom frem til at ved å samordne lovene for de skoleslag som overtok etter 7-årig folkeskole, kunne man skape grunnlaget for en felles linjedelt ungdomsskole for all norsk ungdom (Høigård et al., 1971, s. 258). I 1954 ble forsøksrådet oppnevnt. Forsøksrådet skulle planlegge forsøk med en linjedelt 9-årig ungdomsskole (Lein, 1989). I Lov om folkeskolen av 1959 ble framtidsmønsteret i realiteten fastlagt til 9-årig obligatorisk enhetsskole. Et 10. år kunne være frivillig. Hovedmønsteret ble fastlagt til 6-årig barneskole og 3-årig ungdomstrinn (Lein, 1989, s. 217). 1960-årene betegnet avslutningen på en viktig epoke for folkeskolens vedkommende. Det nye resultatet var blitt en 9-årig enhetsskole eller grunnskole for alle (Høigård et al., 1971, s. 285). Og forsøket, som ble startet opp i 1959, endte opp med et endelig vedtak i 1969 om obligatorisk 9-årig grunnskole for alle (Lein, 1989, s.219). Videre ble det i 1997 vedtatt at skoletiden skulle utvides ved at 6-åringene kom inn i skolen (Skjelbred et al., 2017, s. 15). Resultatet av denne nye loven er en 10-årig obligatorisk skole slik vi kjenner den i dag.

I tabell 1 har jeg forsøkt å gi en oversikt over navnene på de ulike skolenivåene og skoleslagene gjennom historien som følger av lovendringer. Det finnes unntak for når elevene starter på skolen, men at barnenes alder jeg opererer med i tabellen er det tenkte utgangspunktet for elevenes alder det året de begynner på skolen. Det fremgår av den litteraturen jeg har lest at praksisen i de ulike skolene og skoleslagene i Allmueskolen og folkeskolen frem til 1936 når det gjelder alder på barna har variert. Tabellen har jeg laget for at leseren lettere kan kunne skaffe seg en oversikt over de mange navnene som har delt opp grunnskolen slik vi kjenner den i dag.

<table>
<tr><th>Elevalder</th><th rowspan="2">6</th><th rowspan="2">7</th><th rowspan="2">8</th><th rowspan="2">9</th><th rowspan="2">10</th><th rowspan="2">11</th><th rowspan="2">12</th><th rowspan="2">13</th><th rowspan="2">14</th><th rowspan="2">15</th><th rowspan="2">16</th><th rowspan="2">17</th></tr>
<tr><th>Årstall</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1739</td><td></td><td colspan="7">Allmueskolen
(7-årig) – Omgangsskole 12 uker pr år</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="11">Borgerskolen (Barn i 6-7 års alder og opp til 13-16 år)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="12">Den Lærde skole (Ukjent tidsspenn)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">1860</td><td colspan="3" rowspan="2">Allmueskole
også kalt for
forberedelsesskole</td><td colspan="3" rowspan="2">Middelskolen Fellesklasser</td><td colspan="2">Middelskole Latinlinje</td><td colspan="3">Gymnas
(Latinlinje)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Middelskole Engelsklinje</td><td colspan="3">Gymnas
(Reallinje)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">1896</td><td colspan="5" rowspan="2">Folkeskolen
(5-årig)</td><td colspan="3">Fortsettelsesskole/ Framhaldsskolen
(1-3-årig)</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Middelskolen
(4-årig)</td><td colspan="2">Gymnas
(3-årig)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">1920</td><td colspan="7" rowspan="2">Folkeskolen
(7-årig)</td><td colspan="2">Framhald-skolen
(1-3-årig)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Middel-skolen
(3-årig)</td><td colspan="2">Gymnas
(3-årig)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">1939</td><td colspan="7" rowspan="2">Folkeskolen
(7-årig)</td><td colspan="2">Framhald-skolen
(1-3-årig)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Høyere allmennskoler Realskole og Gymnas
(5-årig)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1959
(Forsøk)
1969</td><td colspan="8">Grunnskolen
(9-årig)</td><td colspan="3">Gymnas
(3-årig)</td></tr>
<tr><td>1997</td><td colspan="9">Grunnskolen
(10-årig)</td><td colspan="3">VGS
(3-årig)</td></tr>
</table>

Tabell 1 - Endringer i skoleslag og skolestruktur fra 1739-1997

4.2 Læreplanene

I tillegg til lovene og de organisatoriske endringene, som har skjedd i løpet av skolehistorien, har det også kommet ut en rekke lese-, lære- og undervisningsplaner. Den første kom ut i 1739 og den foreløpig siste kom i 2013 (Skjelbred et al., 2017). Den første av de fire bøkene jeg skal analysere ble utgitt i 1935 og jeg velger derfor å fokusere på den generelle utviklingen av læreplanene rundt denne tiden og frem til i dag.

I forbindelse med loven om fast inndeling mellom folkeskolen og middelskolen som kom i 1920, ble det utarbeidet en undervisningsplan for den 3-årige middelskole, som kom ut i 1921 og det er denne læreplanen jeg velger å se på i sammenheng med Alfsens bok fra 1935. Planens innhold vil jeg gå nærmere inn på i forbindelse med analysen av læreverkene, men det som kan sies foreløpig er at denne planen ikke er spesielt omfattende med sine 7 sider og et vedlegg på en side. Det er viktig å påpeke at det finnes en nyere utgave av denne undervisningsplanen, men at den ikke har vært mulig å skaffe da eneste eksemplar som eksisterer på nasjonalbiblioteket er i skrivende stund sendt til digitalisering. Videre har jeg heller ikke greid å spore opp noen ny plan for realskolen etter loven om den høyere skole ble vedtatt i 1935 som har kommet ut før 1939. Plankomiteen som skulle jobbe med gjennomføringen av den organisatoriske forbindelsen mellom folkeskolen og den høyere skole, skulle også jobbe med grunnlaget for undervisningsplaner. Plankomiteen har kommet med flere innstillinger. Jeg har valgt å forholde meg til disse, samt Stortingsmelding 40 fra 1939 og Undervisningsplaner for realskolen som kom ut i 1950 som grunnlag for analysen.

Den neste læreplanen som kom ut var Læreplan for forsøk med 9-årig skole i 1960. Denne læreplanen kom i tiden rundt sputniksjokket. Sovjetunionen hadde overraskende for den vestlige verden kommet veldig langt i den teknologiske utviklingen, og dette førte til økt satsing på realfag i vesten. I USA gjorde man et forsøk med mer "moderne matematikk", som blant annet bygde på mengdelære. Differensieringsspørsmålet stod i fokus hele forsøksperioden (Lein, 1989, s. 217). Innholdet i arbeidet skulle være individuelt tilpasset for den enkelte elev på det nivået de var til enhver tid. Denne type pedagogikk ble prøvd ut i form av læreplanen som kom 1960. Læreplanen var særegen ved at det på ungdomsskolen var egne kursplaner i norsk, engelsk, matematikk og tysk. I tillegg måtte ungdommene velge mellom en yrkesforberedende eller en gymnasforberedende linje. Etter fagplanjusteringen i 1964 ble linjedelingen opphevet, med kursplandelingen ble beholdt i de skriftlige fag på 8. og 9. trinn.

Elevene fikk tilbud om 3 kursplaner i norsk, engelsk og matematikk og 2 kursplaner i tysk (Lein, 1989, s. 217). Egne kurshefter ble lagd med bakgrunn i denne læreplanen.

I 1974 kom det en ny mønsterplan for grunnskolen (M74), som ble skrevet i forbindelse med loven om obligatorisk 9-årig grunnskole. I motsetning til forsøksplanen, var dette en felles læreplan for alle elever (Skjelbred et al., s.15). Forsøksplanen, men også M74, var veldig detaljerte når det gjelder beskrivelse av hvordan undervisningen skulle foregå. I 1987 kom en ny revidert læreplan (M87) ut. Og i 1997 ble den obligatoriske skolen utvidet og 6-åringene ble innlemmet i den nye læreplanen (L97). Videre fikk vi nok en ny læreplan i 2006, Kunnskapsløftet (LK06), ogden til nå siste reviderte versjonen av læreplanen kom ut i 2013. Et generelt utviklingstrekk ved læreplanene er at de har gått fra å være innholdsorienterte til at det i Kunnskapsløftet ble en endring ved at det var målene for forventet læring som ble det sentrale (NOU 2014:7, kap. 7.1.1). Alle reformene og læreplanene har vært i stadig endring med både politisk og forskningsfaglig påvirkning. Kaci Kullmann Fives leserinnlegg i Aftenposten i forbindelse med Reform 1994 er et tydelig bilde på den politiske påvirkningen de ulike reformene har hatt. Five protesterte, som mor og partileder, på at hennes sønn i matematikktimene lærte om matematikkhistorie i stedet for matematikk (Gundem, 1997, s. 37-38). I hvor stor grad disse protestene ble hensyntatt vites ikke, men fokus på matematikkhistorie ble likefullt poengtert som et mål i den påfølgende læreplanen (L97) under felles mål for matematikkfaget: “Opplæringen i faget har som mål at elevene utvikler innsikt i matematikkens historie og fagets rolle i kultur og vitenskap” (Kirke- utdannings- og forskningsdepartementet, 1996, s. 169).

4.3 Læreverkene

4.3.1 Læreverkenes rolle

Lærebøkene og lærebøkenes rolle har endret seg gjennom tiden. I boken “Norsk lærebokhistorie - Almueskole-folkeskolen-grunnskolen 1739-2013” (Skjelbred et al., 2017) blir lærebøkenes historie i den obligatoriske skolen fremstilt. Forfatterne innleder kapittel 1 i boken med å sitere ei skolejentes utsagn om sin skoletid på 1930-tallet: “Selve leseboka var veldig dyr, og det var bare ett eksemplar av den, som ble oppbevart i skapet på skolen. Den ble lagt fram på kateteret når det var lesetime, og hver og en måtte fram og lese direkte fra boka, noe som ikke alltid var like vellykket.” (Skjelbred et al., 2017, s.9). Utsagnet gjelder ikke en bok i regning eller matematikk, men det er grunn til å tro at kostnadsspørsmålet og antall bøker per elev også var gjeldende innenfor andre fag og også matematikk og regning. Om man sammenligner lærebokas rolle i det gjengitte eksemplet over med dagens situasjon, så ser vi en stor forskjell. I dag får alle elevene utdelt bøker i alle fag og det finnes også tilleggsmateriell i form av andre bøker eller digitalisert litteratur og verktøy. Gratisskoleprinsippet som sier at elevene har rett på gratis skolemateriell er understreket i opplæringsloven (1998, § 2-15). Lærebokas tilgjengelighet for elever, sett i sammenheng med eksemplet som ble nevnt tidligere om jentas skildring om den ene læreboka i klasserommet på 1930-tallet, er radikalt forandret siden mellomkrigstiden. Allerede på 1920-tallet ble det fremmet et forslag om gratis lærebøker for elevene. Skolekommisjonen, som ble nedsatt i 1920 som skulle jobbe med sammenbyggingen av det som vi i dag kaller grunnskolen, foreslo gratis skolemateriell (Høigård et al., 1971, s. 216). Forslaget om gratis skolebøker og andre forslag som ble lagt frem av kommisjonen ble ikke gjennomført grunnet økonomiske forhold etter 1. verdenskrig (Høigård et al., 1971, s. 217).

I dette masterprosjektet har jeg lest tekster som spenner seg over en tidsperiode på over 100 år og all litteraturen og forskningsartiklene jeg har kommet over beskriver læreboka som viktig i undervisningen. I stortingsmelding nr. 35 "Om lærebøkene i skoleverket" fra 1957 understrekes viktigheten av læreboka som ressurs: "I all vår undervisning støtter læreren seg på hjelpemidler av forskjellig slag. De varierer etter undervisningens art. Viktigst er imidlertid læreboka, i alle fall i allmenndannende skoler" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1957, s.3). I forbindelse med revisjonen av læreplanen som kom i 2013 ble det aktuelt å diskutere spørsmålet om lærebøkenes rolle i undervisningen og deres framtid som et viktig læremiddel (Liebich, 2012). Lektor Harald Liebich referer i sin kronikk i Forskning.no til Nordlandsforskning. I følge Liebich så er en av konklusjonene på lærebokas rolle følgende: "Når lærerne planlegger undervisningen, framstår læreplanen og læreboka som de viktigste ressursene. Dette bekrefter lærebokas sterke stilling i norsk skole" (Liebich, 2012). Denne konklusjonen stemmer også godt overens med funn som ble gjort i et annet forskningsprosjekt fra Nordlandsforskning kalt "På vei fra læreplan til klasserom" (Hodgson, Skogvold, Rønning & Tomlinson, 2010). I denne forskningsrapporten sier de følgende om læreres bruk av læreboka som ressurs i planarbeid med LK06 som læreplangrunnlag: "Når lærerne planlegger undervisningen, framstår læreplanen og læreboka som de viktigste ressursene. Dette bekrefter lærebokas sterke stilling i norsk skole" (Hodgson et al., 2010, s.77).

4.3.2 Godkjenningsordningen for lærebøker

For å kvalitetssikre lærebøkene ble det i 1889 innført en godkjenningsordning for lærebøker. I starten gjaldt denne ordningen for lærebøker i kristendomskunnskap, og i Lov om folkeskolen paa landet heter det at “Som lærebøger i kristendomskundskab maa kun bruges de af kongen godkjendte“ (Lov om folkeskolen paa landet, 1889, § 72). Med godkjenningsordningen for lærebøker opprettholdt staten de politiske og pedagogiske styringsinstrumentene etter den nye folkeskoleloven. Ordningen gjaldt også for de høyere skoler der ordningen ble hjemlet i skoleloven av 1896 (Bratholm, 2001). I 1908 ble loven endret til å gjelde alle bøker i Folkeskolen (NOU 1978:26, s.212). Begrunnelsen for denne utvidelsen av loven var bl.a. at utvalget av lærebøker var for stort, og at flere bøker ikke oppfylte krav til faglig standard for lærebøker (Bratholm, 2001). Bratholm skriver videre at debatten om godkjenningsordningen i St.meld. nr.35 “Om lærebøker i skoleverket” førte til nytt regelverk for godkjenning av lærebøker i 1962. Det ble et politisk og forvaltningsmessig samarbeid om ordningen og forlag og forfattere fikk en underordnet rolle. Det har vært skiftende syn på godkjenningsordningen for lærebøker på politisk nivå. Regelverket fra 1962 ble gjeldende frem til 1984.

I de ulike politiske debattene om ordningen ble det blant annet påpekt som en uheldig konsekvens av hele ordningen at lærernes evne til å vurdere læremidler ble underkjent. Lærermiddelutvalget som ble oppnevnt i 1973 fikk i sitt mandat i oppgave å drøfte godkjenningsordningen. Utvalget argumenterte for at lærerne fritt måtte kunne velge lærestoff og andre læremidler til bruk i klasserommet, og at lærerne selv skulle vurdere lærebøkenes kvalitet (Bratholm, 2001). I følge Bratholm var det ingen entydig konklusjon fra utvalget om hvordan lærebokgodkjenningen skulle praktiseres. I 1984 ble godkjenningsordningen utvidet til å gjelde "alle trykte læremidler". Dette innebar at godkjenningsordningen fra å gjelde bare lærebøker, ble utvidet til også å omfatte andre læremidler**.** Nyordningen var for så vidt stikk i strid med Læremiddelutvalgets forslag der flertallet i utvalget ønsket å lempe på kravene om godkjenning, fordi lærerne selv kunne vurdere kvaliteten på lærebøkene (Bratholm, 2001). I de videre årene ble ordningen skrevet om endret flere ganger og var gjenstand for mange politiske og faglige diskusjoner.

I forbindelse med Opplæringsloven som kom i 1998 ble det i 1999 foreslått av Kristelig Folkeparti å oppheve hele godkjenningsordningen (Bratholm, 2001). Forslaget ble begrunnet med at det var ønskelig at elever og foreldre skulle få større innflytelse på valg og bruk av lærebøker og i tillegg ble det lagt vekt på at læreplanen skulle være det viktigste politiske styringsverktøyet. I en pressemelding fra Kirke-, og undervisningsdepartementet fremgår det at lærebøkenes innhold og språklige fremstilling skulle sikres gjennom et samarbeid mellom forlag og forfattere (Bratholm, 2001). Godkjenningsordningen for lærebøker ble opphevet i 2000, noe som markerte slutten på en over 100 år gammel tradisjon.

5 Analyse

5.1 Analysestruktur

Analysen av de fire lærebøkene kommer i kronologisk rekkefølge. For hvert læreverk har jeg et innledende avsnitt hvor jeg presenterer læreverket, videre ser jeg på lære/undervisningsplanen for det gjeldende læreverket. Til slutt ser jeg på lærerveiledningen, om det finnes noen, og deretter analyserer jeg læreboken.

5.2 Innledning til analyse av læreboken Plangeometri for middelskolen

Magnus Alfsens lærebok Plangeometri for middelskolen (Alfsen, 1935) har ingen andre parallellbøker eller veiledninger som hører til denne boka. På grunn av dette blir begrepet læreverk noe misvisende akkurat i dette tilfellet og jeg kommer til å bruke begrepet lærebok videre. Alfsen har gitt ut flere utgaver av denne boken, og den første kom ut allerede i 1899. Læreboka er skrevet etter at den nye ordningen med 7-årig folkeskole med påfølgende 3-årig middelskole trådde i kraft i forbindelse med ny lov i 1920. Boka er skrevet etter undervisningsplanen fra 1925 og det er også denne læreplanen som er utgangspunkt for analysen av læreboken.

5.2.1 Læreplanen for den treårige middelskole

En ny revidert læreplan, De høiere almenskoler - Undervisningsplan for middelskolen (1925), ble laget i forbindelse med lovendringen som kom i 1920. Undervisningsplanen forholder seg til loven om høyere allmennskoler fra 1896, men den tilpasser seg etter ny ordning med 7-årig folkeskole og 3-årig middelskole. Den gamle ordningen var som vi har påpekt tidligere en 5-årig folkeskole og en 4-årig middelskole.

Undervisningsplanen som kom ut i 1925 starter med en timefordelingstabell for de ulike fagene i Middelskolen. Tabellen viser at faget Regning og matematikk (5 timer i uka i alle tre klasser) har relativt høy prioritet om man sammenligner timeantall med de andre fagene. Bare faget tysk (6-5-6 timer på de tre årene) har et større totalt timeantall i den treårige middelskolen. Videre i undervisningsplanen er det viet en bolk til hvert fag. Under hvert fag er det henvisninger til loven av 1896 og det formuleres mål spesifikt for undervisningen i fagene. I faget matematikk og regning er det beskrevet tre mål fra loven. Det tredje målet omhandler det geometriske kurset i middelskolen og lyder slik: “Et kortfattet geometrisk kursus der innbefatter setningene om trianglers likedannethet. Praktiske øvelser i konstruksjon og beregning, herunder lettere oppgaver i polygon- og cirkelberegning” (Kirke- og utdanningsdepartementet, 1925, s. 62). Ingen av disse generelle målene omtaler den pythagoreiske læresetning direkte.

Etter lovbeskrivelsen blir de ulike emnene regning, aritmetikk og algebra og geometri beskrevet mer inngående. Den pythagoreiske læresetning faller innenfor det geometriske emnet som var regnet som en del av matematikken. Undervisningsplanen omtaler grundig hva slags rolle bevis skal ha i undervisningen, men den pythagoreiske læresetningen blir ikke direkte omtalt. Planen påpeker at det er viktig at elevene får knytte erfaringsgrunnlaget til den teoretiske matematikkundervisningen. Det kommer tydelig frem at undervisningen skal være oppbygd av bevisførsel og at elevenes begrunnelser skal komme av tidligere gjennomgåtte bevis. Dette beskrives slik; “(...) begrunnelsen formidles gjennem tidligere beviste setninger (...)” (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1925, s. 68). Videre står det at “ Elevene må lære å forstå betydningen av klare definisjoner, og forstå disse sammen med setningenes betingelser er de egentlige kilder til bevisgrunnene (...)” (s. 68). Disse to utklippene fra undervisningsplanen er bare en liten del av en omfattende beskrivelse av bruk av bevis i undervisningen. Det er et stort fokus på bevis og bevisføring. Det påpekes også at eleven skal ha en viss frihet til hvordan beviset legges frem: “Læreren bør ikke tvinge fremstillingen av bevisene inn i noen unødig bestemt form, men la eleven heri ha størst mulig frihet” (s. 69). Strukturen i undervisningen tenderer tydelig mot den euklidske oppbyggingen og bevisførsel. Dette blir beskrevet i forbindelse med hvordan planen mener innføringen i nytt geometrisk innhold bør foregå, noe som fremgår av følgende: “Efter hvert som undervisningen skrider frem, bør de bringes til å se hvorledes stoffet bygges op på grunnlag av klare definisjoner og tidligere erkjente setninger” (s. 73).

5.2.2 Læreboken Plangeometri for middelskolen

Læreboken Plangeometri for middelskolen som kom ut i 1935 er den 6. utgaven. Den første boken (Alfsen, 1899) kom ut i 1899 og ble skrevet i forbindelse med loven om høyere allmennskoler fra 1896. I den 6. utgaven som jeg skal analysere gis det ikke noen spesifikke opplysninger fra forfatteren om bokens bruk. Det gjøres derimot i bokens første utgave hvor Alfsen påpeker lærerens rolle i innledningen i boken:

> *Indledningen maa naturligvis udfyldes af lærerens mundtlige forklaring, særlig trænger «definitionerne» af den rette linje og planet at anskueliggjøres. I det hele gjælder det, at alle bevægelser maa udføres med modeller (f. eks. papirstykker), indtil eleverne forbinder sikre forestillinger med de bevægelser hvorom der er tale* (Alfsen, 1899, Forordet).

Den sjette utgaven har samme oppbygging av innhold som i første utgave. Boka har et innledende kapittel (Alfsen, 1935, s. 5-22) som er viet til å forklare og beskrive definisjoner. Oppbyggingen av boka ligner på den som er brukt i Elementene. Alfsen starter, i likhet med Euklid, med definisjoner. På disse innledende sidene forklarer Alfsen følgende begreper: legemer, flater, linjer og punkter, den rette linje, planet, kongruens, likestorhet og måling. Dette innledende kapitlet er mer omfattende i den sjette utgaven enn i bokens første utgave. Et eksempel på en definisjon er når forfatteren definerer et punkt:

> *Grensen mellem to deler av en linje kaller vi et punkt. Fra punktet strekker linjen sig ut til to sider, men punktet selv har ikke nogen utstrekning til disse to sider; punktet har ikke lengde og utgjør ikke nogen del av linjen* (Alfsen, 1935, s. 7).

Her er ordlyden i definisjonen lik den første definisjonen til Euklid, men av mer utfyllende art. Euklid beskriver kort og enkelt at et punkt er det som ikke har noen del.

Boka er videre delt inn i to hoveddeler. Den første delen, som har fått tittelen Kongruens og likestorhet, omhandler de viktigste planfigurene og vinklene og deres egenskaper. Videre i den andre delen, som er kalt Forhold og likedannethet, blir de matematiske begrepene forhold og formlikhet behandlet. Avslutningsvis er det et kapittel som har fått navnet Tillegg. Her tar boka for seg om hvordan man skal regne ut legemers overflate og volum. Boken er bygd opp slik at når noen nye begreper og læresetninger blir introdusert, så følges dette opp av oppgaver tilknyttet temaet.

Boka tar for seg den pythagoreiske læresetningen i den første delen. Før boka kommer så langt som til selve setningen, bygger boka opp den geometriske forståelsen og grunnlaget steg for steg. Det er tydelig at forfatteren ønsker å videreformidle noe av den Euklidske oppbyggingen. Alfsen har en direkte referanse til Euklid ved at han presenterer Euklids femte postulat:

71 (70). *Euklids postulat.*

Vi så i nr. 70 hvorledes vi gjennem et opgitt punkt kunde trekke en parallell med en opgitt rett linje. Vi antar — uten at vi kan bevise det — at det ikke kan trekkes mere enn den ene; enhver annen rett linje vil når den forlenges langt nok, skjære den opgitte linje.

Vi former vår antagelse i følgende setning:

Gjennem et opgitt punkt utenfor en rett linje går ikke mere enn én linje som er parallell med den,

og *når to rette linjer danner ulike store ensdreide vinkler med en overskjæringslinje, skjærer de to linjene hverandre.*

Denne setning kalles *Euklids postulat* efter den berømte greske matematiker Euklid (ca. 300 f. Kr.).

Figur 14 - Plangeometri for middelskolen - Euklids femte postulat

(Alfsen, 1935, s. 46)

Alfsen følger opp med et eksempel hvor han beskriver hvorfor denne antagelsen stemmer. Videre utover i kapitlet finner vi også igjen flere av Euklids proposisjoner. Flere av disse er gjengitt ganske likt som det Euklid gjorde i sin bok. Et eksempel på denne likheten er Proposisjon 35 som blir presentert i Alfsen sin bok på følgende måte:

181. *Når to parallellogrammer har en side og den tilhørende høide parvis like store, er parallellogrammene like store.*

Fig. 117 (116).

Vi flytter de to parallellogrammer (*ABCD* og *KLMN*) således at de like store sidene (*AB* og *KL*) faller sammen, og at parallellogrammene begge faller opover. Da må *DC* og *NM* falle i samme rette linje (80).

Figur 15 - Euklids proposisjon 35 i Plangeometri for middelskolen

(Alfsen, 1935, s. 110)

Kapittel 1 avsluttes med den pythagoreiske læresetningen. Boka er gjennomsyret av den euklidske aksiomatisk deduktive tilnærmingen, hvor et nytt matematisk prinsipp bygger på tidligere omtalte prinsipper. Det er en systematisk oppbygging hvor antagelser eller hypoteser blir fremlagt og disse blir videre behandlet. Dette gjelder også den pythagoreiske læresetningen:

192. *Den pytagoreiske læresetning: I en rettvinklet trekant er kvadratet over hypotenusen lik summen av kvadratene over katetene.*

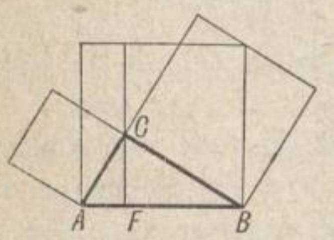


Fig. 127 (126).

Når vi trekker perpendikulæren på hypotenusen (*AB*) gjennem den rette vinkels toppunkt (*C*), blir kvadratet over hypotenusen delt i to rektangler. Ifølge foregående setning er rektanglet til venstre lik kvadratet over *AC*, og rektanglet til høire lik kvadratet over *BC*. Altså er kvadratet over hypotenusen lik summen av disse kvadrater.

Denne setning bærer navn efter den greske matematiker *Pytagoras* (ca. 500 f. Kr.).

Figur 16 - Plangeometri for middelskolen - Den pythagoreiske læresetning

(Alfsen, 1935, s. 115-116)

Alfsen starter med å titulere denne antagelsen som den pythagoreiske læresetning og videre gjengir han Euklids proposisjon 47. Figuren som blir presentert i læreboka skiller seg fra den

Euklid brukte i sin bok. Alfsen har i sin figur for det først valgt å bruke færre notasjoner på de ulike hjørnene i figuren. Han har også valgt å legge det største kvadratet på oversiden av hypotenusen i flukt med de to katetenes kvadrater. Det største kvadratet over hypotenusen blir i likhet med Euklids eksempel delt inn i to rektangler. For å bevise at den pythagoreiske læresetningen stemmer, må man bevise at de to rektanglene er like store som katetenes tilhørende kvadrater. I de to foregående avsnittene 190 og 191 (se figur 17) prøver forfatteren å bygge opp forståelsen til elevene ved å forklare sammenhengen mellom katetenes kvadrater som omdefineres til rektangler i det påfølgende beviset for den pythagoreiske læresetningen.

190. *I en rettvinklet trekant er kvadratet over en katet lik et rektangel som har én side lik hypotenusen og en annen side lik katetens projeksjon på hypotenusen.*

ABC er en rettvinklet trekant (fig. 125). Over kateten AC tegner vi kvadratet $ACDE$ og forlenger ED. Gjennem A og C trekker vi perpendikulærer på hypotenusen AB; disse skjærer den forlengede ED i F og G. Vi trekker $FH \ddagger AB$.

Vi har da

$\square ACDE = \square ACGF$ (181, AC er felles)

$= \square AIHF$ (181, AF er felles).

Kvadratet $ACDE$ er altså lik rektanglet $AIHF$. Dette rektangels ene side (AI) er

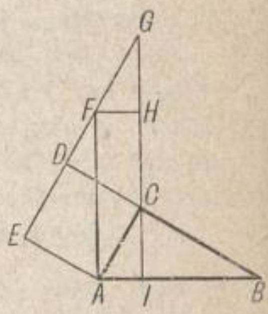


Fig. 125 (124).

katetens projeksjon på hypotenusen. Det står derfor bare tilbake å bevise at den andre siden, AF, er lik hypotenusen. For å bevise dette sammenligner vi $\triangle AFE$ og $\triangle ABC$. Vi har at $\angle AEF = \angle ACB$ (fordi begge er rette), at $AE = AC$ (som sider i samme kvadrat) og at $\angle EAF = \angle CAB$ (fordi deres ensbenevnte ben står loddrette på hverandre). Altså er $\triangle AFE \cong \triangle ABC$, og følgelig er $AF = AB$. Det vil si: den andre siden i rektanglet er lik hypotenusen.

Figur 17 - Deler av beviset for den pythagoreiske læresetningen i Plangeometri for middelskolen

(Alfsen, 1935, s. 114-115)

Videre prøver forfatteren å utvide forståelsen til elevene ved at han i avsnitt 191 beskriver hvordan man kan konstruere kvadratet på en katet ved å ha et rektangel som utgangspunkt (se figur 18).

191. *Opgave: Et rektangel (R) er gitt. Konstruer et like stort kvadrat.*

Vi slår en halvcirkel med diameter AB lik rektanglets største side. På AB avsetter vi fra A et stykke, AC, lik rektanglets minste side, og i C opreiser vi en perpendikulær på AB; den skjærer halvcirkelen i et punkt D. Vi trekker AD og får da siden i det søkte kvadrat, som vi så kan konstruere. At $K = R$, følger av foregående setning, da vi får en rettvinklet trekant når vi trekker DB.

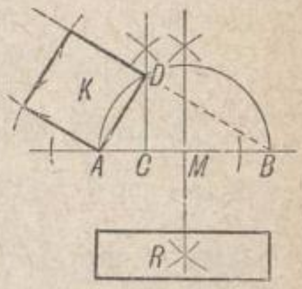


Fig. 126 (125).

Figur 18 - Konstruering av et kvadrat med samme areal som et rektangel i Plangeometri for middelskolen

(Alfsen, 1935, s. 115)

Her nøyer altså ikke Alfsen seg med bare å vise bevisføringen for sammenhengen mellom kvadrat og rektangel som grunnlag for forståelsen av beviset for det pythagoreiske læresetningen. Han legger opp til at elevene skal gjøre en øvelse som skal være med på å styrke forståelsen utover den formelle Euklidske deduktive bevisføringen.

Alfsen beskriver ikke noe utvidet om læresetningens opphav. Han nevner personen Pythagoras med en setning og beskriver det slik: "Denne setningen bærer navn etter den greske matematikeren Pytagoras (ca. 500 f. Kr.)" (Alfsen, 1935, s. 116). Her verken bekrefter han eller avkrefter han hvorvidt det er Pythagoras alene som oppdaget beviset for læresetningen. Her blir det altså opp til læreren å utdype mer om det historiske opphavet.

5.3 Innledning til analyse av læreboken Bonnevie og Eliassens lærebok i Plangeometri

I likhet med Alfsens lærebok, er det ikke knyttet andre bøker sammen med Bonnevie og Eliassen Lærebok i Plangeometri (Alexander, 1939) og derfor er begrepet læreverk litt misvisende også her. Dette er en lærebok som baserer seg på to lærebøker skrevet av to andre forfattere. Boken er skrevet etter loven om den høyere allmennskolen fra 1935. I forbindelse med lovendringen ble det også her utarbeidet undervisningsplan som jeg skriver om i analysen av denne læreboken.

5.3.1 Undervisningsplaner for den høgre almenskolen etter lov av 1935

I forbindelse med loven om den høyere skole som kom i 1935 ble det som nevnt tidligere utnevnt en plankomite som skulle utarbeide innstillinger til den nye skoleordningen. I stortingsmelding 40 (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1939) beskrives dette arbeidet fra Plankomiteen. I meldingen beskriver de plankomiteens tredje hovedpunkt i sitt mandat som er "opptrekning av grunnlinjene for arbeidsformer og metoder for undervisningen i de forskjellige fag" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1939, s. 1). Videre står det i Stortingsmelding 40 at "på grunnlag av komiteens framstilling har Undervisningsrådet utarbeidd leseplaner for de to første klasser av den nye skole, og delvis for 3. klasse av realskolen" (s.1). Som vedlegg til St.meld. 40 ligger Komiteens innstilling II og "Foreløbig melding om leseplaner og pensa i de nederste klasser av den høgre skolen etter loven av 19. mai 1935". Det er disse to dokumentene jeg bruker som grunnlag i min analyse, samt st. meld. 40.

I innstilling II behandler Plankomiteen grunnlinjene for arbeidsformer og metoder for undervisningen i de forskjellige fag. I kapittel I beskriver komiteen Plan og timefordelingen for den nye ordningen. De forklarer i innledningen at det er viktig å beskrive hvilken plass de enkelte fagene får i den nye skolen før de kan gå inn på behandlingen av de ulike fagene (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s.3). I innledningen til timefordelingen for den høyere skole påpeker komiteen at dette er et spesielt vanskelig arbeid i et land som Norge.

> *Å foreslå en fagfordeling som vinner alles tilslutning, er i og for sig en uløselig opgave. Og opgaven byr i vårt land dessuten på en rekke særlige vanskeligheter, som man ikke møter annetsteds. I de land som har et verdenssprog, og der hvor det bare er ett offisielt skriftsprog, er opgaven betydelig lettere.* (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s. 5)

Time- og fagfordelingen i den nye skoleordningen ser ut til å være gjenstand for omfattende diskusjoner om man ser på drøftingene i denne innstillingen. Regning og matematikk blir oppført med 5 timer i uka det første og det andre året på realskolen. Her påpekes det at elevene i de påfølgende tre årene i høyere utdanning i den nye ordningen betyr et svakere grunnlag enn ved ordningen med en treårig middelskole (Kirke og undervisningsdepartementet, 1938, s.16). Elevene gikk i praksis et helt år mer med 5 timer matematikk og regning i uka i middelskolen. Selv om det etter lovendringen i 1935 fører til endring i stoff og behandlingsmåte både i folkeskolen og realskolen med tanke på å gjøre undervisningen mer effektiv, påpeker komiteen denne endringen i grunnlag for det avsluttende 3-årige gymnaset. Videre drøftes det hvor stort omfang den videre undervisningen i faget skal ha i de tre siste årene med bakgrunn i dette grunnlaget. Jeg går ikke nærmere inn på dette, da det er aldersgruppen i realskolens to første år som er av hovedinteresse for meg i denne analysen.

I kapittel III tar Plankomiteen for seg undervisningen. De beskriver blant annet Arbeidsskoleprinsippet som er sentralt i Normalplanene for folkeskolene fra 1939. Dette pedagogiske prinsippet blir omtalt av plankomiteen som elevaktivitetens prinsipp. Elevaktivitet skal være skapende og produktiv og ikke bare reproduserende (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s. 31). I forbindelse med arbeidsskoleprinsippet blir også tidsaspektet påpekt. Plankomiteen innleder dette på følgende måte: “En stor vanskelighet byr tidens knapphet” (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s. 37). Her påpekes det at arbeidsskoleundervisning krever jevnt rolig arbeid og god tid og at det er umulig å behandle det eksamenspensumet som har eksistert før omleggingen av skolen. Videre skriver komiteen at det må foretas radikale nedskjæringer i pensum. Det virker likevel å være et noe mer moderat kutt i det geometriske pensumet om man skal tolke ordlyden, der komiteen foreslår litt avkortning (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s. 59). Etter en mer generell innledning om undervisningen, tar komiteen for seg undervisningen i de enkelte fag. Om fagene matematikk og regning antyder plankomiteen at arbeidsskoleprinsippet har blitt brukt til en viss grad i hele fagets historie og formulerer dette slik: “Undervisningen i regning og matematikk har vel til alle tider, også på en tid da dogmatisk undervisning ellers var herskende, hatt et visst preg av arbeidsskole fordi den nødvendigvis har lagt beslag på elevenes selvstendige tilegnelse og aktive arbeide” (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s. 57).

Plankomiteen mener at lærebøkenes fremstilling kan være "syntetisk opbygget med sats og bevis bygget ovenpå sats med bevis, men opbygningen må være slik at den ikke hindrer en naturlig analytisk behandling ved undervisningen" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s. 57). "En sats kan defineres som et matematisk resultat som er blitt bevist å være riktig" (Briseid, 2017). Slik jeg tolker dette mener de at lærebøkene kan legges opp til en aksiomatisk deduktiv metode, hvor en påstand innenfor det gjeldende tema videre kan etterfølges av et bevis og hvor igjen en ny påstand med bevis bygger på det foregående beviset og matematiske resultat. Det at fremstillingen ikke må hindre en naturlig analytisk behandling i undervisningen kan være påpekt for å sikre at elevene må være aktive i innlæringen i tråd med arbeidsskoleprinsippet. Videre mener plankomiteen at lærebøkene bør unngå for avanserte bevis og at boken bør bruke naturlige og generelle metoder. (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s.57). Plankomiteen refererer til skolekommisjonens uttalelse om at geometri egner seg for innføring i matematikkens formell-logiske, deduktive metode. Skolekommisjonen skrev følgende om geometriske beviser:

> *I så henseende har geometriens beviser fordeler, enkelslutningene fremtrer der klarere som en følge av to premisser, og det formelle bevis blir lettere å gjennemskue. Det er også lettere å få begynnere til å innse nødvendigheten av bevisførsel, likesom innholdet for deres bevissthet har en mere konkret karakter.* (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1938, s. 61)

Her mener skolekommisjonen og plankomiteen at det å jobbe med bevis og bevisføring vil føre til at innholdet får en mer konkret karakter og at elevene etterhvert vil innse nødvendigheten av slik bevisføring.

Rundskrivet, kalt for "Foreløpig melding om leseplaner og pensa i de boklige fag i de nederste klasser av den høgre skolen etter loven av 10 mai 1935" (Kirke-, og undervisningsdepartementet, 1939), kan man se på som en foreløpig læreplan. I dette dokumentets innledning blir de grunnleggende prinsipper om hvordan undervisningen skal foregå og fag og timefordelingen beskrevet. Videre tar planen for seg de ulike fagene. I faget regning og matematikk for Realskolens klasse I og II presenteres tre mål. Det er det tredje målet som knytter seg mest opp mot mitt fokus om den pythagoreiske læresetningen. Her står det at elevene skal ha "Kjennskap til grunnleggende plangeometriske setninger med bevis, og øvelse i å bruke dem til å løse enkle konstruksjonsoppgaver og utføre lette geometriske beregninger" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1939, s. 13). Videre går leseplanen mer i dybden innenfor de tre målene. Om plangeometriske bevis beskrives følgende: "Som i middelskolen skal undervisningen i geometri i realskolen ha karakteren av et systematisk kurs med bevisføring, selvsagt uten gjennomført aksiomatisk oppbygging" (s. 15). Her understrekes det at det skal undervises systematisk med bruk av bevisføring, men det påpekes at det ikke må være fullt ut aksiomatisk oppbygd slik f.eks. Euklid gjorde i Elementene. Videre står det beskrevet at den pythagoreiske læresetningen skal "bevises rent geometrisk» (s.16). Det påpekes at leseplanen ikke har til hensikt å binde lærebokforfatteren til en bestemt plan, men at det er viktig at elevene får brukt en geometrisk forestillingsevne og fantasi. Man kan tolke dette som at lærebøkene må legge opp til at elevene skal være mest mulig aktive i innlæringen av bevisene. Videre er leseplanen tydelig på at lærebokforfatterne står fritt til å velge hvordan boken bygges opp: "Lærestoffet vil kunne ordnes, og læreboka bygges opp på forskjellige måter, og en vil ikke binde lærebokforfatteren til en bestemt plan" (s.16).

Leseplanen sier ingenting om hvordan og på hvilken måte matematikkhistorie bør behandles og heller ingen henvisninger til hvilke eventuelle oldtidsbevis som skal brukes.

5.3.2 Bonnevie og Eliassens lærebok i plangeometri

I Bonnevie og Eliassen lærebok i plangeometri (Alexander, 1939), har lærebokforfatter Alexander sammenfattet og omarbeidet Bonnevies og Eliassens lærebøker i plangeometri slik at den kan brukes i de to første klassene i realskolen. Alexander begrunner i sitt forord hvorfor han har valgt ut nettopp disse lærebøkene:

> *Bonnevies lærebok med dens faste og klare, men noe skjelettmessige oppbygning, har hevdet seg i skolen gjennom mer enn et halvt århundre. Eliassens lærebok var imidlertid et skritt i retning av å legge stoffet bedre til rette for begynnertrinnet. Det har derfor nå vært naturlig å slå disse to lærebøkene sammen når en hel omarbeiding likevel var nødvendig av hensyn til den nye undervisningsplan.* (Alexander, 1939, s.3)

Alexander understreker at han har måttet legge om og innskrenke undervisningsstoffet både av pedagogiske årsaker, men også med tanke på den nye undervisningsplanen. Han påpeker en didaktisk svakhet ved de tidligere bøkene ved at bevisene har vært gitt i fullt ferdig utforming og at det derfor ble stilt lite krav til elevenes initiativ (Alexander, 1939, s.3). Han skriver videre at han håper fremstillingen i boken vil være til hjelp for læreren og at han bare har gitt gangen i bevisene og overlatt utformingen til undervisningen. Jeg synes det er viktig å ha med seg denne tankegangen når jeg skal inn å se på hvilken fremstilling forfatteren har av den pythagoreiske læresetningen.

På de innledende kapitlene tar forfatteren for seg grunnleggende begreper som blir brukt senere i boken. Han tar for seg blant annet begrepene plangeometri, den rette linje og punkt. Her kan man se flere likheter med Alfsens fremstilling og introduksjon.

I løpet av de ulike matematiske prinsippene som blir presentert er det tydelig at forfatteren ønsker at elevene skal ta initiativ i læringen og han er bevisst på at elevene selv må fullføre bevisene. Dette kommer tydelig frem når det i læreboka blir forelagt Euklids proposisjon nr. 35 fra bok I (Se figur 19).

197. *To parallellogrammer er like store når de har like store grunnlinjer og like store høyder.*

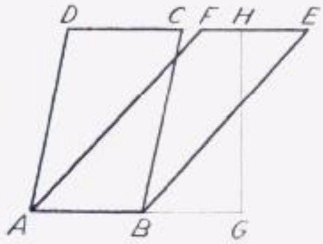


Fig. 100.

For å bevise setningen har vi stilt de to parallellogrammene ABCD og ABEF (fig. 100) på samme grunnlinje AB. Da de har samme høyde, GH, må grunnlinjens motstående sider DC og FE falle i samme rette linje DE. Hvorfor det? Hele figuren ABED er et trapes. Trekker vi △ ADF fra dette trapes, får vi ▱ ABEF tilbake. Trekker vi △ BCE fra trapeset, får vi ▱ ABCD. Hvis vi kan bevise at de to trekantene er like store, så er satsen riktig. Hvorfor det? Trekantene ser ut til å være kongruente. Bevis at de er det. Før derpå det fullstendige bevis for setningen.

Figur 19 - Euklids proposisjon 35 i Bonnevie og Eliassens lærebok i plangeometri
(Alexander, 1939, s. 94)

Her stiller forfatteren spørsmål knyttet til påstander underveis i bevisføringen og han unnlater bevisst å føre det fullstendige beviset. Han avslutter med å gi elevene oppgaven med å føre det fullstendige beviset. Om vi sammenligner denne presentasjonen med Alfsen sin, så ser vi tydelig at Alexander prøver i større grad å få elevene i aktivitet ved hjelp av de spørsmålene han stiller underveis. Dette beviset kommer sammen med flere andre påstander og bevis under delkapitlet “Like store plane flater” (Alexander, 1939, s. 94-98). Det siste beviset som blir presentert i dette delkapitlet er den pythagoreiske læresetning (se figur 20).

204. *Den pytagoreiske læresetning* handler om de tre kvadratene som kan konstrueres på sidene i en rettvinklet trekant. Den kan uttales slik:

I enhver rettvinklet trekant er kvadratet på hypotenusen lik summen av kvadratene på katetene.

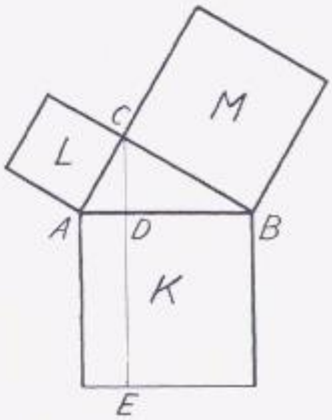


Fig. 106.

I $\triangle ABC$ er $\angle C = 90°$. K, L og M er kvadrater. Satsen er da:

$$K = L + M$$

Vi trekker $CE \perp AB$. Kvadratet K blir da delt i to rektangler AE og BE. Ifølge foregående setning er da:

$$\square AE = L$$
$$\square BE = M$$

Herav får vi satsen ved addisjon. Vis det på figuren.

Setningen er oppkalt etter den berømte greske statsmann og filosof *Pytagoras*, som man har trodd oppdaget den. Han levde 500 år f. Kr.

205. *Konstruksjonsoppgaver til øvelse.*

1. Tegn to kvadrater K og k. Konstruer et kvadrat = K + k og et kvadrat = K — k.
2. Konstruer et kvadrat som er dobbelt så stort som K, og et kvadrat som er tre ganger så stort som k.
3. Konstruer et kvadrat som er halv så stort som K.
4. Gitt en trekant. Konstruer et like stort kvadrat.

Figur 20 - Den pythagoreiske læresetning i Bonnevie og Eliassen lærebok i plangeometri (Alexander, 1939, s. 98).

Her bruker forfatteren en figur som ligner den Euklid brukte i sin proposisjon 47. Figuren i denne læreboka ligner betydelig mer enn figuren i Alfsens Plangeometri for middelskolen. I likhet med Alfsen bruker Alexander færre notasjoner og linjer i sin figur enn det Euklid brukte. Av figuren og dens tilhørende tekst ser vi at kvadratet på hypotenusen blir delt i to rektangler. Videre henvises det til det foregående beviset som tar for seg bevisføringen for hvorfor det minste kvadratet er like stort som det minste rektangelet i kvadratet over hypotenusen. Selv om formuleringene i Alfsens, Alexanders og Euklids bok er forskjellige er prinsippet og beviset det samme.

I innføringen av den pythagoreiske læresetningen ser vi også historiske referanser og det står følgende om læresetningens opphav: “Setningen er oppkalt etter den berømte greske statsmann og filosof Pytagoras, som man har trodd oppdaget den. Han levde 500 år f.Kr.” (Alexander, 1939, s. 98). Her er det fortsatt lite som blir sagt om det historiske opphavet til setningen, men Alexander påpeker usikkerheten om det virkelig var Pythagoras som oppdaget den, i større grad enn det Alfsen gjorde.

5.4 Innledning til analyse av læreverket Cappelens matematikkverk

Cappelens matematikkverk (Berntsen et al., 1977) består av lærebøker for alle trinn i den 9-årige grunnskolen. I tillegg til lærebøkene følger det med en lærerveiledning og en bok med ekstra oppgaver. Jeg har valgt å se på læreverkets bok for 8. skoleår og noe fra 9. skoleår. Læreverket er skrevet etter Mønsterplanen av 1974.

5.4.1 Mønsterplanen 1974

Mønsterplanen for grunnskolen (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974) av 1974, avløste Normalplanene for folkeskolene og “Undervisningsplaner for den høgre almenskolen etter lov av 10 mai 1935” som kom på slutten av 30-tallet og “Læreplanen for forsøk med 9-årig grunnskole”. Mønsterplanen av 74 (fra nå av M74) var den første lære- og undervisningsplan som omhandlet både barneskolen (Tidligere kalt Folkeskolen) og ungdomsskolen (tidligere en del av det som ble kalt realskolen) i en og samme plan. “Læreplanen for forsøk med 9-årig grunnskole” var et forsøksprosjekt og mye av innholdet i den ble revidert og det endelige produktet ble altså M74. M74 ble presentert som en ”retningsgivende rammeplan” (Baune, 2007, s.149). Planen anga retningslinjer og mål, og ga skolen og lærer mer frihet til å velge innhold og arbeidsmåter. I motsetning til Normalplanen av 1939, så var ikke M74 bindende, men en veiledende plan.

I M74 er det et kapittel som heter Arbeidsmåter og her er lærebokas rolle omtalt. Her står det at “lærebøkene har en sentral plass i skolen, og elevene må lære seg til å gjøre full bruk av dem" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s.33). Kapitlet kalt for Timefordeling gir en oversikt over de enkelte fags bundne timer. Matematikk er oppført med 4 timer på 7. og 8. trinn og i det 9. året var matematikk regnet som et valgfag på inntil 3 timer (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s. 81), men i 1975 ble matematikk gjort obligatorisk også på i 9. skoleår (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1980, s. 6). Om man sammenligner med timeantallet matematikk utgjorde i den foregående planen, ser vi her en reduksjon i timeantall i for samme årskull. Realskolens 1. og 2. år hadde 5-5 timer og tilsvarende har 8. og 9. trinn 4-3 timer.

Det som spesifikt omhandler matematikkfaget kommer i kapitlet kalt for obligatoriske fag. Planen understreker at det i de enkelte fagene til en viss grad bør være fellesstoff for alle elevene i klassen, men det gis ingen bestemmelser om hva (Baune, 2007, s.151). Selv om planen er på et veiledende nivå, så er det relativt detaljert. I matematikkfaget blir innledningsvis presentert tre mål og med en forklaring på hvordan elevene skal nå disse målene:

MÅL

Matematikkundervisningen har som mål å gi elevene

- *innsikt i grunnleggende emner og metoder i matematikk i samsvar med den enkeltes forutsetninger,*
- *tallforståelse og ferdighet i tallbehandling,*
- *øvelse i å anvende matematikk på problemer fra det daglige liv og fra andre fag,*
- *en faglig bakgrunn som er egnet med tanke på så vel videregående utdanning som overgang til yrkeslivet.*

For å nå disse mål bør det legges vekt på at elevene kan finne glede i arbeidet med faget, og at de så langt råd er, får oppgaver de kan lykkes med. Det er også vesentlig at elevene venner seg til å arbeide selvstendig, prøve forskjellige løsninger og utnytte det de før har lært når de møter nye problemer og nytt stoff. Elevene må også få øving i å samarbeide med hverandre.

Figur 21 - Mål for matematikkundervisningen i M74

(Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s. 132)

Dette er svært lite detaljerte mål, i hvert fall om man sammenligner med andre planer, da kanskje spesielt Læreplanen som kom i 1997 (L97) som hadde mål av mer detaljert og konkret art. M74 angir når de ulike emnene skal behandles på de ulike trinnene ved at de skiller mellom tre stadier på behandlingen av emnene. I figur 22 ser vi at det på det første stadiet er forberedende øvinger eller en enkel innføring, videre kommer hovedinnføringen og tilslutt på det siste stadiet omtaler de som videre øving og bruk.

LÆRESTOFF

For å angi på hvilke trinn de forskjellige emnene behandles, brukes følgende markering:

+ forberedende øvinger eller enkel innføring.
+ + + hovedinnføring.
+ + videre øving og bruk.

Figur 22 - Oppdeling av stadier med tanke på behandling av ulike emner i M74
(Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s. 132)

Et av disse emnene faller spesielt innenfor det jeg ser på i denne analysen; "Egenskaper ved plan- og romfigurer, viktige geometriske setninger" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s. 133). Jeg går da ut ifra at i denne sammenheng er den pythagoreiske læresetningen viktig. Hovedinnføringen for dette emnet er blitt lagt til 7.-8. trinn. Dette spesifiseres nærmere ved at de deler inn emneinnføringen enda mer konkret under hvert trinn. Under 8. trinn står "den pytagoreiske setning" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s. 138) listet opp som eget punkt. Den siste delen av kapitlet om matematikkfaget er kommentarer til de ulike emnene. Emnet geometri innledes med å bli satt inn i en samfunnsmessig og historisk kontekst; "Geometrien står på flere måter i en særstilling. Faget har en over tusenårig tradisjon i den europeiske kulturkrets, og dens systematiske oppbygging har siden Euklids dager tjent som mønster på logisk tenkning" (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s. 138). Her blir geometriens historie helt tilbake til det antikke Hellas nevnt og planen navngir Euklid som sentral. Allikevel blir det satt spørsmålstegn ved Euklids systematiske teoretiske geometri i skolesammenheng; "(...) hensiktsmessigheten i å beholde den teoretiske geometri i grunnskolen i den form Euklid gav den, er i dag blitt trukket i tvil" (s.138). Videre påpekes det at skolegeometrien har fått en ny side ved at emnet nå introduseres på et eksperimentelt nivå på et tidligere stadium i skolegangen. I planen heter det at den eksperimentelle tilnærmingen gjør at elevene får erfare "de geometriske lovmessigheter (...) uten spesiell sans for teoretisk matematikk" (s. 138). Hvorvidt dette gjelder spesifikt også for innføringen av den pythagoreiske læresetningen vet jeg ikke, men her vil man bort fra den Euklidske deduktive bevisføringen ved innføring av setningen. Det påpekes at på ungdomstrinnet må elevene "få en viss innsikt i fagets systematiske oppbygging", men at "en strengt aksiomatisk oppbygging er utelukket" (s.141). Disse beskrivelsene setter tydelig kursen for hva lærebøkene bør ha med og unngå å ha med. Tilslutt mener jeg det er viktig å ta med avsnittet hvor det i planen står beskrevet hvordan lærebøkene bør ta for seg bevis:

> *Lærebøkene bør føre fullstendige bevis for en del setninger. Verdien av disse bevis ligger ikke så mye i det saklige innhold som i de eksempler de gir på korrekt tankegang og framstilling. Det bør gis en del oppgaver i bevisføring, men man kan ikke regne med at slike oppgaver vil bli tilfredsstillende løst av alle. Reproduksjon av lærebøkenes bevis er av mindre verdi.* (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1974, s. 171)

Her settes det klare rammer for hvordan læresetninger med bevis bør bli behandlet i lærebøkene. Det påpekes at det bør føres fullstendige bevis for en del setninger, noe som er en motsetning til hva Alexander skrev i sin innledning til Bonnevie og Eliassen lærebok i plangeometri. Her påpekte han at det var en svakhet ved tidligere lærebøker at bevisene var gitt i fullt ferdig utforming (Alexander, 1939, s.3).

5.4.2 Cappelens læreverk - Lærerveiledning

Lærerveiledningen inneholder orientering om stoffet i læreboka for 8. skoleår, metodiske tips til de forskjellige emnene og orientering om arbeidsmåten og tankene bak oppbyggingen av læreboka.

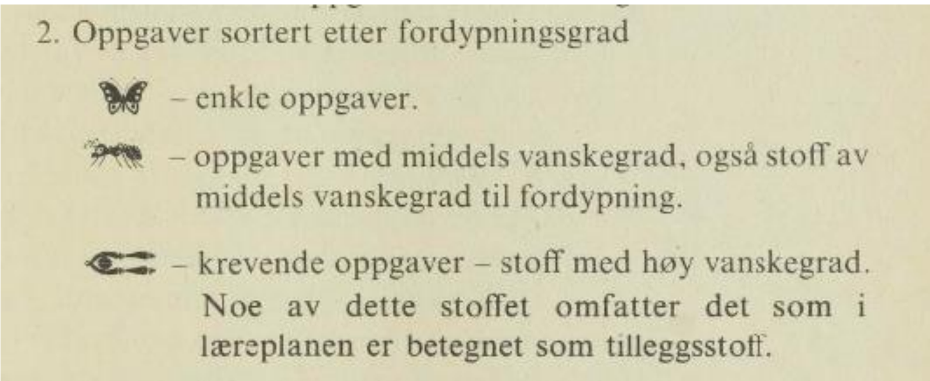
Veiledningen beskriver hvordan læreboka er bygget opp med tanke på hvordan elevene skal jobbe med et emne. Her beskrives det 4 faser (Berntsen et al., 1977, s.3-4). Den første fasen er repetisjonsfase, der det begrunnes med at elever som har glemt eller ikke fått tak på stoffet kan få en sjanse til å starte på linje med de andre elevene når stoffet utvikles videre. Fase to er øvinger som kan være likt for alle eller differensierte. Fase tre er en videre innføring i stoffet som kan være i form av en direkte utvidelse av den kjennskap elevene har fra før. En slik utvidelse blir forklart med at det er "en litt mer komplisert (evt. sammensatt) bruk av tidligere regler" (s. 3). Den videre innføringen av lærestoffet kan også være en utdyping og i "8. skoleår vil en slik utdyping være noe mer konsis enn tidligere, og vil ofte inneholde enkle bevis" (s. 3). Den fjerde og siste fasen er øvinger knyttet til den videre innføringen av lærestoffet. Disse øvingene er delt inn i tre differensierte nivåer. I forbindelse med denne differensieringen blir bevisets rolle i læreboka beskrevet i et eget avsnitt:

> *Læreboka inneholder noen enkle bevis. Hensikten med dette er å gi elevene øving i både å tenke logisk, og å gi skriftlig eller muntlig uttrykk for sine resonnementer. Det har liten hensikt å "drille" elevene i kopiering av lærebokas bevis. Disse er ment å være modeller til samtaler, studier og vurderinger. De skal også vise at man, på grunnlag av det man har lært, ofte kan trekke nye slutninger rent logisk, og de skal på den måten være en oppfordring til logisk tenkning* (Berntsen et al., 1977, s. 4).

I kapittel 5 i veiledningen (Berntsen et al., 1977, s. 7-20) blir de ulike kapitlene og avsnittene i læreboka kommentert. Temaet om den pythagoreiske læresetningen og innføringen av denne kommer i kapittel 6 i læreboka og denne innføringen blir beskrevet i veiledningen. For å forberede elevene på arbeidet med den pythagoreiske læresetningen blir det kommentert i veiledningen at læreboka tar for seg "sider og vinkler i rettvinklet trekant, kvadrering og kvadratrot, samt tabeller" (s. 13). Videre beskriver veiledningen at innføringen av den pythagoreiske læresetning blir induktivt lagt opp i læreboka: " Innføringen av Pythagoras' setning er lagt opp induktivt. Etter en enkelt måling følger setningen, og denne blir verifisert ved måling og klipping" (s. 14). Foruten denne kommentaren, så blir det også påpekt at det geometriske beviset, Baskharabeviset, blir ført. Dette er i tråd med det som står i læreplanen om at lærebøkene bør føre fullstendige bevis for noen setninger.

5.4.3 Cappelens læreverk - Lærebok

I læreboka er det viet tre kapitler til geometri, henholdsvis Geometri 1, 2 og 3. Det er kapittel 6, kalt Geometri 2, som omhandler den pythagoreiske læresetningen. Fra tidligere har jeg beskrevet hvordan læreboka omhandler lærestoffet i 4 faser og at det i fase 4 blir gitt øvinger i forbindelse med videre innføring av lærestoff. Her blir det gitt oppgaver med ulike fordypningsgrad (se figur 23).



2. Oppgaver sortert etter fordypningsgrad

– enkle oppgaver.

– oppgaver med middels vanskegrad, også stoff av middels vanskegrad til fordypning.

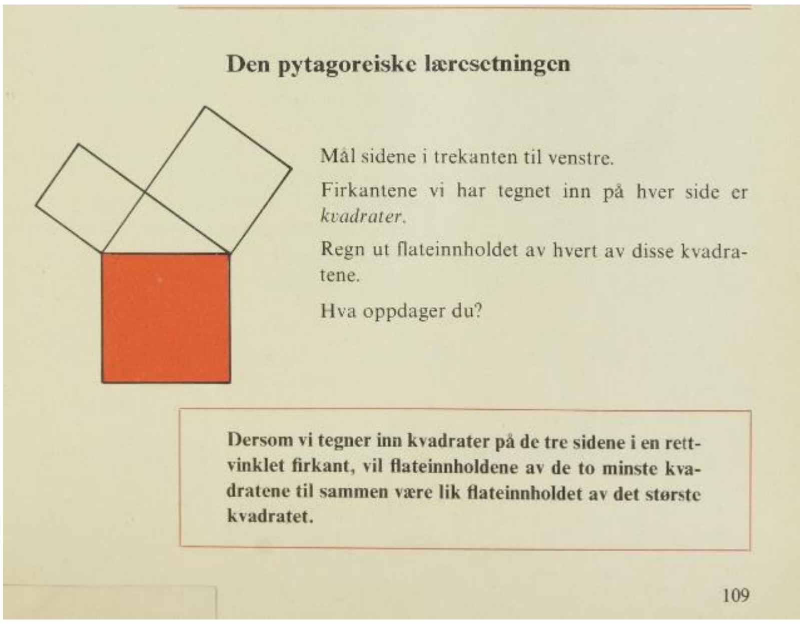
– krevende oppgaver – stoff med høy vanskegrad. Noe av dette stoffet omfatter det som i læreplanen er betegnet som tilleggsstoff.

Figur 23 - Cappelens matematikkverk om inndeling av øvingsoppgaver

(Berntsen et al., 1977, s. 7)

I kapittel 6 innleder forfatterne med å ta for seg begrepene rettvinklet trekant og kvadrering. Dette skjer ved at det blir gitt en kort introduserende innføring i hva en rett vinkel er og hva det vil si å kvadrere et tall og finne kvadratroten. Disse korte innføringene følges opp med oppgaver knyttet til disse temaene.

Etter en kort introduksjon til de nevnte matematiske begrepene kommer innføringen av den pythagoreiske læresetningen, en innføring som i følge veiledningen var induktiv. Først blir elevene møtt med et bilde (Se figur 24) av en rettvinklet trekant med kvadrater på sidene.



Den pytagoreiske læresetningen

Mål sidene i trekanten til venstre.

Firkantene vi har tegnet inn på hver side er *kvadrater*.

Regn ut flateinnholdet av hvert av disse kvadratene.

Hva oppdager du?

Dersom vi tegner inn kvadrater på de tre sidene i en rettvinklet firkant, vil flateinnholdene av de to minste kvadratene til sammen være lik flateinnholdet av det største kvadratet.

109

Figur 24 - Induktiv innføring av læresetningen i Cappelens matematikkverk

(Berntsen et al., 1977, s. 109)

Her blir elevene bedt om å gjøre målinger og utregninger og ut fra dette svare på et spørsmål om hva de oppdager ved å gjøre dette. Under tegningen beskrives det resultatet som elevene vil kunne komme fram til om de har utført måle- og regneoppdraget.

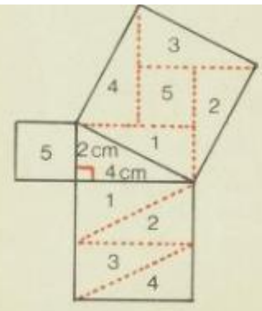
På neste side kommer det historiske referanser og det blir sagt noe om opphavet til læresetningen og i tillegg så blir læresetningen formulert med ord:

Dette resultatet ble funnet av kinesiske matematikere for flere tusen år siden. Det har fått navn etter en gresk matematiker som hette Pytagoras, og setningen heter *den pytagoreiske læresetningen*:

I en rettvinklet trekant er kvadratet på hypotenusen like stort som kvadratene på katetene til sammen.

Figur 25 - Cappelens matematikkverk om det historiske opphavet til læresetningen
(Berntsen et al., 1977, s. 110)

Spesielt interessant er det at forfatterne påpeker at kineserne fant dette resultatet for flere tusen år siden. I de tidligere lærebøkene vi har sett på er ikke kineserne nevnt. Videre påpekes det at setningen har fått navn etter Pythagoras. Her blir ikke bevis nevnt som en del av den historiske rammen som settes. Videre i innføringen får elevene to oppgaver som går på å tegne to ulike rettvinklede trekanter med de tilhørende kvadratene, for så å få i oppgave å klippe opp kvadratene på katetene for deretter å legge delene oppå kvadratet på hypotenusen. På figur 26 ser vi den andre av disse oppgavene hvor elevene skal tegne en rettvinklet trekant med sidene 2 cm og 4 cm.

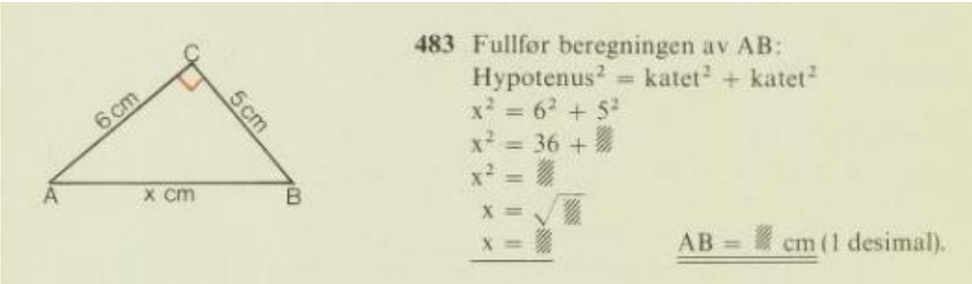


dratet på hypotenusen.

478 a) Tegn på rutepapir en rettvinklet trekant der katetene er 2 cm og 4 cm.
b) Tegn opp kvadratene på katetene og hypotenusen.
c) Klipp ut kvadratene på katetene og legg delene oppå kvadratet på hypotenusen. Hva ser du?

Figur 26 - Den andre tegne- og klippeoppgaven knyttet til innføringen av den pythagoreiske læresetning i Cappelens matematikkverk
(Berntsen et al., 1977, s. 110)

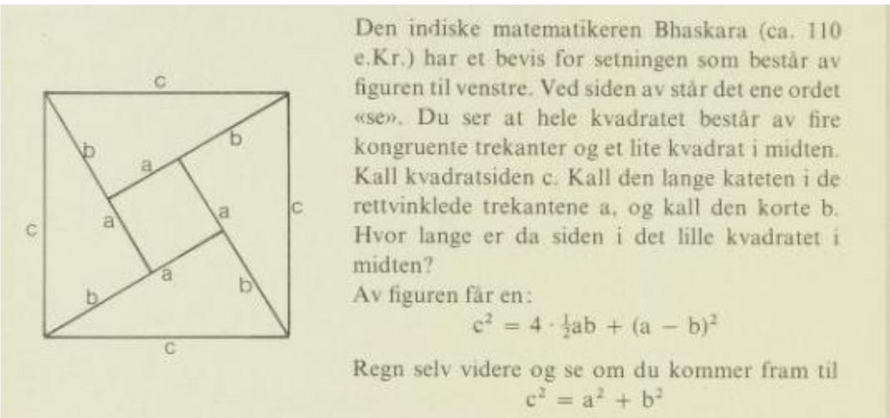
Etter denne induktive innføringen til læresetningen blir elevene videre innført i hvordan læresetningen kan brukes til å regne ut sider i en rettvinklet trekant om man vet to av sidene. Eksempler blir gitt med påfølgende oppgaver hvor det er ment at elevene skal bruke fremgangsmåten i eksemplene. Etter dette kommer vi over i fase fire som er de differensierte øvingsoppgavene. På det enkleste nivået blir elevene gitt oppgaver der de må beregne sidene i en rettvinklet trekant der de i de første oppgavene fyller inn tall i en delvis fullført utregning ferdig oppsatt i læreboka (se figur 27)



Figur 27 - Beregninger ved hjelp av den pythagoreiske læresetningen på det laveste oppgavenivået i Cappelens matematikkverk

(Berntsen et al., 1977, s. 112)

I tillegg til disse utregningene blir de gitt enkle tegne- og konstruksjonsoppgaver. På de to andre oppgavenivåene blir det også gitt konstruerings- og regneoppgaver av lignende art, men med økende vanskelighetsnivå. Disse oppgavene blir gitt uten å være delvis fullført slik i eksemplet fra de enkleste oppgavene. På det vanskeligste nivået blir Baskharabeviset (figur 28) ført, før elevene blir gitt oppgaver.

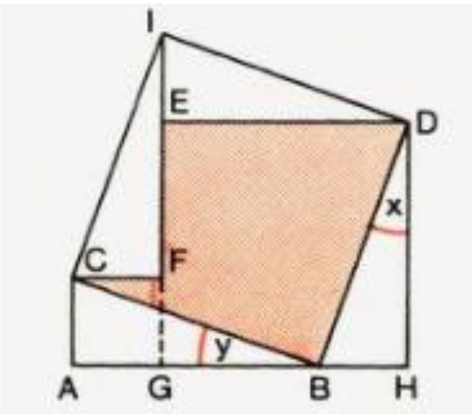


Figur 28 – Baskharabeviset i Cappelens matematikkverk

(Berntsen et al., 1977, s. 114)

Her er den første gangen begrepet bevis blir nevnt i forbindelse med den pythagoreiske læresetningen. Baskharabeviset, som i sin opprinnelighet kun bestod av to illustrasjoner og ordet “se” ved siden av, er her fremlagt på en annen måte enn den opprinnelige versjonen. Forfatterne har her lagt på algebraiske notasjoner og sammenligner arealet av det store kvadratet med arealet av de små bestanddelene av det store kvadratet. De legger opp til at elevene må gjøre regnearbeidet for å komme frem til at dette beviser den pythagoreiske læresetningen. Forfatterne bruker det geometriske beviset til Baskhara og beviser dette med algebraiske notasjoner. I og med at dette er det første og eneste beviset som blir ført er det opp til læreren å påpeke at dette ikke var det aller første beviset for læresetningen ei heller det eneste.

I matematikkverkets bok for 9. skoleår (Berntsen, Bue, Rosseland og Bue, 1977) blir et nytt bevis for den pythagoreiske læresetningen presentert. Denne gangen er det et geometrisk bevis (Se figur 29) for læresetningen som blir presentert for elevene. Boka poengterer også at dette er et geometrisk bevis og at de i 8. klasse ble presentert for et algebraisk bevis.



Figur 29 – Geometrisk bevis for den pythagoreiske læresetningen i Cappelens matematikk verk 9. skoleår
(Berntsen et al., 1977, s. 49)

Dette bevisets illustrasjon og forklaring i etterkant er lik den Thâbit ibn Qorra gav.

5.5 Innledning til analyse av læreverket Nummer

Læreverket Nummer (Hole et al., 2015) er skrevet etter den reviderte versjonen av kunnskapsløftet ble publisert. Nummer er et omfattende læreverk sett i sammenheng med de andre læreverkene jeg har analysert. Dette læreverket består av en lærebok per trinn, en parallellbok per trinn, YouTube-kanal, gratis elevnettsted og et lærernettsted. Elev- og lærernettstedet inneholder mye forskjellig lærematериell som filmer, undervisningsvideoer, interaktive diagrammer etc. I tillegg hører også en egen bok for læreren kalt Lærerens bok. Denne boken kan man kategorisere som en lærerveiledning. Jeg har valgt å fokusere på læreplanen, lærerveiledningen og læreboka siden det er disse elementene jeg har fokusert på i de andre læreverkene.

5.5.1 Revidert versjon av Kunnskapsløftet

Kunnskapsløftet er en læreplan som gjelder hele den 10-årige grunnskolen, men også den videregående skolen. Den reviderte versjonen av Kunnskapsløftet ble gjeldende fra 1.8.2013. Revisjonen gjaldt fagene norsk, engelsk, matematikk, naturfag og samfunnsfag. Målet med revisjonen var “å tydeliggjøre de grunnleggende ferdighetene i læreplanen. I tillegg ble det utarbeidet veiledende kjennetegn på måloppnåelse til støtte for underveis- og standpunktvurdering på 10. trinn” (Utdanningsdirektoratet, 2014). Utdanningsdirektoratet påpeker at i faget matematikk ble det gjort mindre endringer og at de største endringene skjedde innen emnet algebra.

Kunnskapsløftet består av en fag- og timefordelingsoversikt, en generell del, prinsipper for opplæringen og læreplaner for de ulike fagene.

Læreplan i matematikk fellesfag er delt inn i 5 hovedområder; Formål med faget, hovedområder, timetall, grunnleggende ferdigheter og kompetansemål (Utdanningsdirektoratet, 2013). Geometri er et av hovedområdene for 8.-10.trinn. Den pythagoreiske læresetning faller innenfor dette hovedområdet og dette formuleres slik: “Geometri i skolen handler blant annet om å analysere egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer og gjøre konstruksjoner og beregninger” (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2). I de spesifikke kompetansemålene innen emnet geometri er den pythagoreiske læresetningen nevnt: “Mål for opplæringen er at eleven skal kunne bruke og begrunne bruken av formlikhet og Pytagoras’ setning i beregning av ukjente størrelser” (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 9). Et annet mål som også kan knyttes til den pythagoreiske læresetningen er følgende mål: Mål for opplæringen er at eleven skal utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnementer ved hjelp av geometriske ideer, og gjøre rede for geometriske forhold som er av særlig betydning i teknologi, kunst og arkitektur” (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 9). Basert på litteraturen jeg har lest i forbindelse med dette masterprosjektet mener jeg det er riktig at den pythagoreiske læresetningen faller innenfor kategorien for geometriske forhold som er av særlig betydning i teknologi, kunst og arkitektur. Læresetningen byr også på rikelige muligheter for at elevene kan øve seg på å formulere logiske resonnementer ved hjelp av geometriske ideer. Kunnskapsløftet går ikke i dybden og detalj på hvordan den pythagoreiske læresetning skal omhandles i verken undervisning eller lærebøker slik vi har sett i de andre læreplanene. Begrepet bevis blir ikke brukt, men bevisets innhold mener jeg faller innenfor det å kunne formulere logiske resonnementer.

5.5.2 Nummer 9 - Lærerens bok

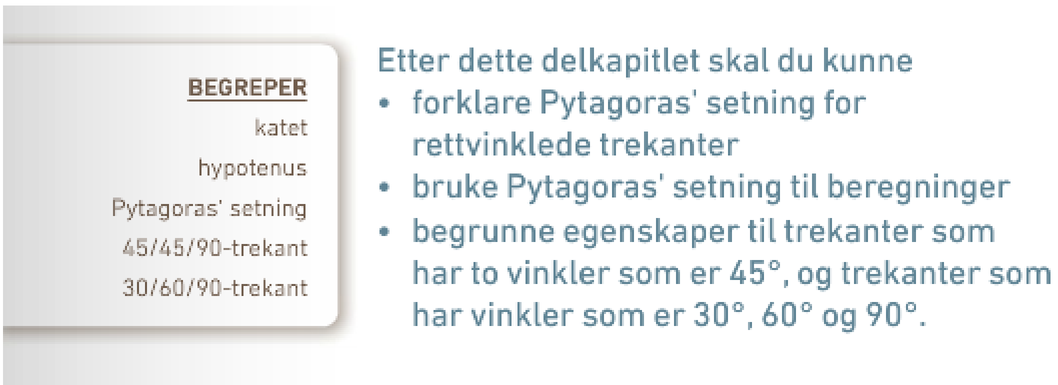
“Formålet med dette verket er å lære elevene å snakke matematikk og instruere hverandre. Læreverket legger opp til å snakke og lese matematikk for at elevene skal få økt forståelse”, (Aschehoug, 2018). Slik introduseres læreverket Nummer på Aschehougs nettsider. Lesing, skriving, uttrykke seg muntlig, regning og digitale ferdigheter er de grunnleggende ferdighetene som er beskrevet i Kunnskapsløftet. I så måte er introduksjonen til læreverket og læreverkets intensjon helt i tråd med læreplanen. Lærerveiledningen, Lærerens bok (Hole et al., 2015), inneholder en forminsket side av læreboka på hver side. I tillegg til kopien av lærebokas sider er det en metodisk veiledning som gir didaktiske tips til arbeid med stoffet i klasserommet for hver side. Denne kombinasjonen av lærerveiledning og lærebok i en og samme bok gjør at jeg tar for meg både veiledningen og boka samtidig i analysen av dette læreverket.

Læreboka inneholder et forord og en symbol- og ordforklaring og videre kommer 4 kapitler med ulike emner. Disse kapitlene består av emnene Algebra (Kap. 1), Geometri og måling (Kap. 2), Funksjoner (Kap. 3) og Kombinatorikk og sannsynlighet (Kap. 4). I tillegg til disse hovedemnene inneholder også boka et eget kapittel viet til den dynamiske programvaren

GeoGebra. Denne boken har gått delvis bort fra spiralprinsippet mange tidligere lærebøker har brukt. Dette er et prinsipp hvor de samme emnene gjentar seg for hvert år, med repetisjon av tidligere lært stoff og en videre utvidelse basert på tidligere gjennomgått lærestoff. Nummer 9 har f.eks. ikke et eget kapittel med tall og tallforståelse slik Nummer 8 har.

I kapittel 3 (Hole et al., 2015, s. 105-204) som handler om geometri og måling blir den pythagoreiske læresetning innført. På kapitlets første to sider blir det formulert noen mål til emnet. Et av målene dreier seg spesifikt om den pythagoreiske læresetningen: "Du skal kunne begrunne Pytagoras' setning og bruke den i beregninger av ukjente størrelser" (Hole et al., 2015, s. 105). I veiledningen står det noen generelle betraktninger fra forfatterne om de ulike emnene i dette kapitlet. Om delkapittel 2D kalt Pytagoras' setning, skriver de at "Dette er nytt stoff for elevene, og en fin mulighet for å trekke inn matematikkens historie" (s.105). Her mener altså forfatterne at historien om setningen kan brukes i undervisningen. Forfatteren beskriver videre at de har erfaring med at mange elever opplever at å arbeide med den pythagoreiske læresetningen er viktig når de blir introdusert for den.

Som tidligere nevnt er det viet et eget kapittel til den pythagoreiske læresetningen. Setningen blir her grundig behandlet og introduksjonen formuleres tre punkter over hva forfatterne mener elevene skal kunne etter delkapitlet:



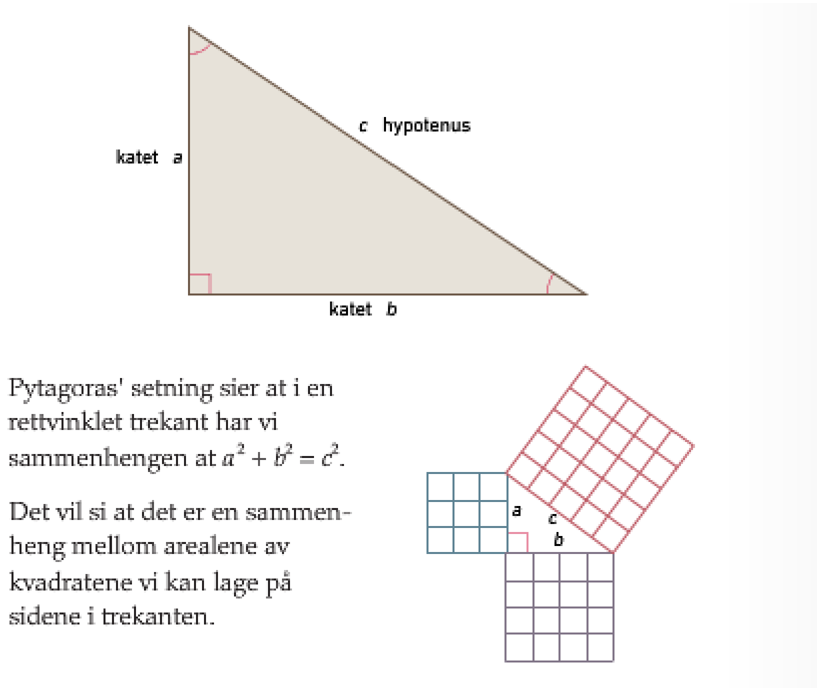
Figur 30 - Begrep og mål knyttet til delkapittel om det pythagoreiske læresetningen i læreboka Nummer

(Hole et al., 2014, s. 185)

Her står det at elevene skal forklare den pythagoreiske læresetningen og ikke nødvendigvis ha kjennskap til bevis for læresetningen. I lærerveiledningen forklarer de at "målet er at elevene skal kunne forstå hva setningen sier, kunne bruke den og vite når de kan bruke den" (Hole et al., 2015, s. 185). Arbeid med forståelse for hvorfor setningen stemmer, som kan sees i sammenheng med bevis for setningen, blir også nevnt i veiledningen: "Og det er fint om de også kan forstå og forklare hvorfor det er slik at kvadratet på hypotenusen er summen av kvadratet til hver av katetene i en rettvinklet trekant" (s. 185). Avslutningsvis nevner de at de finnes mange bevis for læresetningen: "Det fins en rekke bevis for Pytagoras' setning: Det sies at det fins minst 370 bevis med ulik opprinnelse - indiske, kinesiske, arabiske og greske" (s.185). Her blir læreren gjort oppmerksom på at det finnes mange ulike bevis og at de har opprinnelse fra ulike oldtidskulturer.

Innføringen av læresetningen i læreboka er variert og har flere innfallsvinkler. Boka inneholder mye tekst og informasjon og mange ulike oppgaver. Det er samarbeidsoppgaver, differensierte oppgaver, digitale oppgaver, tidligere gitte eksamensoppgaver og det de kaller for rike oppgaver der elevene gis muligheten til å bruke kreative løsningsmetoder. Innføringen av læresetningen starter med at forfatterne setter setningen inn i en historisk kontekst og blir innledet slik: "Den greske matematikeren Pytagoras levde ca. 500 år før vår tidsberegning og har fått sitt navn knyttet til den matematiske setningen du skal arbeide med i dette delkapitlet. Vi tror han var den første som kunne bevise den" (Hole et al., 2015, s. 186).

Videre blir setningen presentert slik:



Figur 31 - Presentasjon av den pythagoreiske læresetningen i Nummer 9
(Hole et al., 2015, s. 186)

Her blir en rettvinklet trekant med sidene 3, 4 og 5 brukt for å illustrere at kvadratet over hypotenusen er like stort som kvadratene over katetene. I lærerveiledningen står det at elevene skal lese denne siden og forklare til hverandre hva den sier. Veiledningen påpeker også at det finnes en omvendt utgave av læresetningen hvor man kan konstatere at en trekant har en rett vinkel om kvadratet på hypotenusen er like stor som kvadratene på katetene. I læreboka blir det gitt oppgaver knyttet til det innledende eksempelet og her blir de bedt om blant annet å telle rutene i de ulike kvadratene. Lærerveiledningen sier at elevene kan gjerne tegne “flere rettvinklede trekanter og tegn kvadratene som dannes på hver side. Regn ut arealene” (Hole et al., 2015, s. 187). Videre oppfordres det til å la elevene oppdage at det alltid er slik at arealene av kvadratene på katetene er like store tilsammen som arealet på hypotenusen. Etter dette kommer et eksempel på hvordan man ved å finne kvadratrot av et kvadrat kan finne siden av trekanten. Læreboka kommer videre med flere ulike oppgaver der elevene skal anvende læresetningen. Dette er oppgaver med ulik vanskelighetsgrad og noen oppgaver må også elevene anvende algebraisk kunnskap for å kunne løse oppgaven. I flere av oppgavene blir elevene utfordret på å kunne forklare sammenhenger og ikke bare gjøre utregninger. I figur 32 ser vi et eksempel på dette hvor elevene blir bedt å forklare hvorfor den omvendte versjonen av den pythagoreiske læresetning kan brukes til å verifisere at en vinkel er rett.

Oppgave **2.141** UTFORDRING U

Du har lært hvordan Pytagoras' setning kan brukes til å sjekke om en trekant er rettvinklet. Forklar hvorfor denne metoden virker. Bruk gjerne et eksempel.

Figur 32 - Oppgave knyttet til bruk av den pythagoreiske læresetningen i Nummer 9
(Hole et al., 2015, s. 194)

Senere i kapitlet blir elevene også gjort kjent med pythagoreiske tripler. De blir oppfordret til å finne flere og det blir også gitt en oppgave som er hentet fra en tidligere eksamen.

På figur 33 ser vi oppgaven fra Nummer 9 som var gitt ved eksamen i 2012. Her er det en direkte referanse til oldtidssivilisasjonen Babylon. Leirtavlen Plimton blir her gjengitt i en skissert utgave. Om leirtavlen blir det sagt at den er fra ca. 1800 år f.Kr. og at den inneholder pythagoreiske tripler. Det blir ikke gått nærmere inn på hva selve tegnene betyr og at det her faktisk er beskrevet et forholdstall.

! Oppgave **2.143** FRA EKSAMEN 2012

På en leirtavle fra Mesopotamia (ca. 1800 f.Kr.) finner vi «pytagoreiske talltripler».

De tre tallene (3, 4, 5) er et pytagoreisk talltrippel fordi $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Avgjør om tallene (5, 12, 13) er et pytagoreisk talltrippel.

Figur 33 - Oppgave om pythagoreiske tripler med oldtidsreferanse - Nummer 9
(Hole et al., 2015, s. 195)

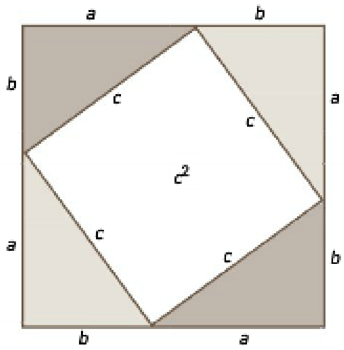
I lærerveiledningen beskriver forfatterne hvordan flere pythagoreiske tripler kan bli funnet ved hjelp av regneark.

På slutten av kapitlet kommer det en oppgave (Se figur 34) som inneholder bevis for læresetningen.

Oppgave 2.154 UTFORDRING

Det fins mange bevis for Pytagoras' setning. I denne oppgaven skal dere arbeide med et slikt bevis.

a Lag et kvadrat med sidelengder 10 cm. Se figuren. Dere bør bruke et tykt papir med ruter.



b Del alle de fire sidelengdene i to deler og kall dem a og b. Dere må dele på samme måte på alle de fire sidekantene.

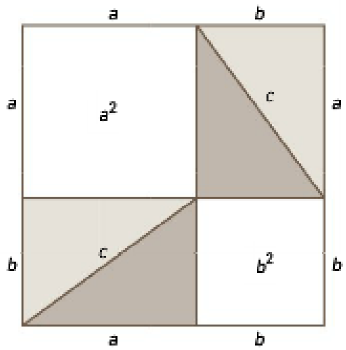
c Trekk linjer som figuren viser, slik at dere får fire like rettvinklede trekanter. Hypotenusene i trekantene kaller dere c. Fargelegg trekantene slik som på figuren.

d Klipp ut de fire rettvinklede trekantene.

Figuren dere har igjen etter at trekantene er klippet ut, har form som et kvadrat. Kvadratet har sidelengde c og areal c^2.

e Tegn et nytt kvadrat med sidelengder 10 cm og plasser trekantene du har klippet ut slik som på figuren nedenfor.

Arealet i de to kvadratene som ikke er dekket av trekantene, er til sammen like store som kvadratet dere har fra den første figuren.



Da har vi
$a^2 + b^2 = c^2$

Dermed har vi bevist Pytagoras' setning.

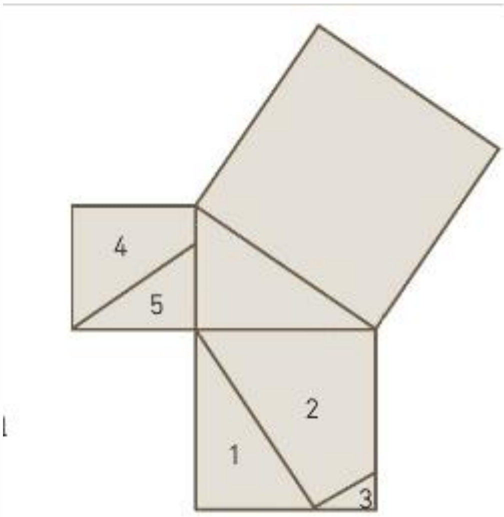
Figur 34 - Et geometrisk klipp-og flytt-bevis for den pytagoreiske læresetningen i Nummer 9

(Hole et al., 2015, s. 201)

I dette beviset skal elevene tegne og klippe og flytte på figurer og ved hjelp av dette bevise at de to minste kvadratene har samme areal som det største kvadratet. Dette er et geometrisk bevis for den pythagoreiske læresetningen. Bevisets opphav har som beskrevet i historiekapitlet et ukjent opphav, men flere matematikkhistorikere hevder at Pythagoras selv kunne ha presentert dette beviset, men selvfølgelig uten de algebraiske notasjonene.

I lærerveiledningen påpeker forfatterne at “for elever som mestrer algebra godt, kan dette være en utfordring”. Her kan de som mestrer algebra få en utfordring ved å bruke den 1. kvadratsetningen for å bevise læresetningen. Selv om 1. kvadratsetning ikke kommer før i Nummer 10, så beskrives dette som en mulig oppgave å gi elever som trenger en utfordring. Dette eksemplet er primært ment å være et geometrisk bevis og at eleven skal få klippe, lime og pusle sammen biter for å se en sammenheng.

I lærerveiledningen legges det også frem en annen figur (Se figur 35) som de mener kan være enda enklere å starte med for noen elever.



Figur 35 - Figur som kan klippes ut for å bevise den pythagoreiske læresetningen i Nummer 9 Lærerens bok
(Hole et al., 2015, s. 201)

Her er det meningen at eleven skal klippe ut de 5 nummererte bitene og deretter legge bitene som et puslespill slik at de dekker det store kvadratet. Dette er også et geometrisk bevis for den pythagoreiske læresetningen.

6 Oppsummerende drøfting

6.1 Oppsummering

I kapittel 2, 4 og 5 har jeg vært innom oldtidsmatematikk, norsk skolehistorie og gjort en analyse av fire læreverk. Her har jeg kommet med mye informasjon og jeg mener derfor at det er behov for en oppsummering hvor jeg samler trådene fra det jeg har funnet. I oppsummeringen vil jeg trekke frem tre hovedmomenter i delkapitlene 6.1.1-6.1.3. De to første momentene er direkte knyttet opp mot de to problemstillingene. Jeg oppsummerer hvordan innføringen av læresetningen har vært i de ulike læreverkene og om hvilke endringer og utviklingstendenser man kan finne. Videre ser jeg på hvilke spor av oldtidsbevis og historiske referanser knyttet opp mot den pythagoreiske læresetningen jeg kan finne i lærebøkene. Tilslutt har jeg valgt å vie et eget avsnitt i denne oppsummeringen til hvordan jeg mener behandlingen av bevisbegrepet har endret seg. I tillegg til de oppsummerende avsnittene har jeg også skrevet noen didaktiske implikasjoner knyttet til temaet jeg har undersøkt og jeg kommenterer også noen mulige veier dette forskningsarbeidet potensielt kan ta videre.

6.1.1 Innføringen av den pythagoreiske læresetning

I analysen har jeg sett på fire forskjellige læreverk fra forskjellige tidsepoker med ulike undervisningsplaner som utgangspunkt. Med tanke på den tidsmessige forskjellen på når lærebøkene og undervisningsplanene ble skrevet, så har det naturlig nok utpekt seg en del forskjeller mellom disse. De to første lærebøkene er skrevet i en tid der Norge var i en vesentlig annerledes økonomisk og utviklingsmessig posisjon enn i dag. Læremidlene var begrenset når det gjelder omfang, illustrasjoner og framstår layoutmessig som mindre innbydende for en moderne leser. Bøkene fra 1935 og 1939 er relativt like i uttrykk og illustrasjonene og variasjoner er få. Med hoppet til læreverket som ble skrevet mot slutten av 1970-tallet ser vi en radikal endring, der læreboken for det første tar for seg flere matematiske emner en kun plangeometri. Læreboken bærer også et mye tydeligere preg av differensiering og er ikke lenger preget av den tydelige formelle oppbyggingen som de to første læreverkene. Cappelens matematikkverk presenterer to bevis for den pythagoreiske læresetningen, i 8.skoleår et algebraisk bevis og deretter i 9. skoleår et geometrisk bevis. Dette er tydelig annerledes enn i bøkene fra 1930-tallet hvor det var fokus på de geometriske bevisene og her var det ingen bruk av algebra i innføringen av læresetningen. Tilslutt analyserte jeg læreverket Nummer fra 2015, som trekker omfanget og illustrasjoner enda et steg videre. De trekker frem et bevis som kan forklares geometrisk og algebraisk.

I undervisningsplanen fra 1925 ble det påpekt at det var viktig at elevene tok med seg egne erfaringer inn i undervisningen og at de skulle få knytte disse opp mot den teoretiske matematikken. Det kommer tydelig fram at bevis er et viktig moment i geometriundervisningen. Slik jeg tolker det er det en tydelig tendens mot at undervisningsplanen ønsker å få elevene i retning av en euklidsk bevisoppbygning hvor elevene skal være bevisste på hvilken systematikk som ligger til grunn for de nye matematiske setningene som skal læres. Læreplanen er på den andre siden tydelig på at det er viktig at elevene får frihet til å legge frem bevisene på sin måte uten at læreren bestemmer hvilken form det skal være på. Læreboken, Plangeometri for middelskolen, gjenspeiler prinsippene som læreplanen legger til grunn og starter med å gi grundige definisjoner, for så å gå videre med setninger som bygger på tidligere setninger og definisjoner på en systematisk måte. Innføringen av den pythagoreiske læresetningen baserer seg på en versjon av Euklids geometriske bevis for læresetningen og det henvises her tydelig til tidligere lærte setninger.

I undervisningsplanen som kom i forbindelse med ny lov om høyere skoler i 1935 ble det klart slått fast at elever som startet på realskolen hadde et svakere grunnlag for de høyere skoler enn ved den gamle ordningen med middelskole. Det ble også påpekt at undervisningen måtte gjøres mer effektiv. Med denne planen ble arbeidsskoleprinsippet innført og det var fokus på at elevene skulle være mer aktive i innlæringen. Også under denne læreplanen fremheves bevis og bevisførsel som viktig. Det påpekes blant annet at en systematisk oppbygging med sats og slutninger fører til at elevene lettere innser nødvendigheten av bevisføring. Det påpekes også at innføringen av geometriske bevis ikke skal ha en gjennomført aksiomatisk oppbygging. Den pythagoreiske læresetningen skal bevises geometrisk. I læreboka Bonnevies og Eliassens Lærebok i Plangeometri er forfatter Alexander tydelig på at bevisene i læreboka ikke skulle bli gitt i fullstendig form, men at det var viktig at elevenes initiativ ble ivaretatt i tråd med arbeidsskoleprinsippet. Også denne boka bærer preg av en systematisk oppbygging ikke ulik Alfsens Plangeometri for middelskolen. Alexander gjennomgår ikke bevisene fullt ut i læreboka og i tillegg stiller han elevene spørsmål underveis i innføringen av nye læresetninger. Både Alfsen og Alexander sine bøker bruker en egen versjon av Euklids geometriske bevis for læresetningen i sin innføring.

Mønsterplanen fra 1974 er en veiledende plan og har kun tre generelle mål i forbindelse med faget matematikk. Selve veiledningen er på et relativt detaljert nivå. Planen sår tvil om den euklidske teoretiske oppbyggingen som har vært brukt i innføringen av geometri i tidligere lærebøker og undervisning. I veiledningen anmodes det å bruke en eksperimentell tilnærming til lærestoffet. Det påpekes at elevene må få et visst innblikk i fagets systematiske oppbygging, men at en strengt aksiomatisk oppbygging er utelukket. Planen i sin helhet beveger seg bort fra den Euklidske tilnærmingen til lærestoffet. Læreplanen sier også at noen bevis bør føres fullstendig for å kunne gi elevene eksempler på korrekt fremstilling og tankegang. Cappelens matematikkverks lærerveiledning beskriver hvordan læreboka innfører nytt lærestoff og at det er en tydelig oppbygging med repetisjon, differensierte repetisjonsoppgaver, innføring og presentasjon av nytt lærestoff og tilslutt differensierte oppgaver knyttet til det nye lærestoffet. Lærerveiledningen sier at innføringen av nytt lærestoff inneholder noen enkle bevis. Bevisene skal ifølge veiledningen fungere som modeller for elevene i den hensikt å gi de øving i både å tenke logisk, og å gi skriftlig eller muntlig uttrykk for sine resonnementer. Det påpekes også at det har liten hensikt å drille elevene i disse bevisene. Innføringen av den pythagoreiske læresetningen starter med en induktiv eksperimentell tilnærming ved at elevene måler og klipper for å se sammenheng mellom kvadratene på katetene og hypotenusen. Det er også et sett med differensierte oppgaver hvor anvendelse av læresetningen er i fokus. På det mest utfordrende oppgavenivået blir Baskharabeviset lagt frem. Det i utgangspunkt rent visuelle beviset blir presentert med illustrasjon, forklaringen og argumentasjonen ført med algebraiske notasjoner. I boken for 9. skoleår blir ytterligere et bevis for læresetningen lagt fram og denne gangen et geometrisk bevis. Bokas induktive tilnærming er annerledes enn i bøkene fra 30-tallet. Det er også nytt at et algebraisk bevis blir gitt før det geometriske beviset. Bøkene fra 1935 og 1939 fokuserte på plangeometri uten å knytte det i vesentlig grad mot andre emner i matematikken. Her skiller de to første læreverkene seg fra de to siste.

Kunnskapsløftets reviderte utgave er den siste læreplanen som jeg har sett på. I et av målene for matematikkfaget blir den pythagoreiske læresetningen navngitt. Læreplanen nevner ikke begrepet bevis, men slik jeg tolker det faller bevisbegrepet innenfor det læreplanens mål sier om at elevene skal kunne formulere logiske resonnementer. Språkdrakten er betydelig endret fra planene før 2. verdenskrig og bruken av bevis og bevisførsel er begrep som er tydelig tonet ned. Læreverket Nummer har som formål at eleven skal kunne snakke matematikk og instruere hverandre. Læreboka går i dybden på den pythagoreiske læresetningen og inneholder mange differensierte oppgaver, både samarbeids- og individuelle oppgaver og oppgaver som legger opp til kreative løsninger og i tillegg så er det lagt inn tidligere eksamensoppgaver. Lærerveiledningen påpeker at det er en fin mulighet til å trekke inn historie ved innføringen av den pythagoreiske læresetningen. Veiledningen sier at målet er at elevene skal kunne forstå hva den pythagoreiske læresetningen sier, kunne bruke den og vite når de kan bruke den. Ingen spesifikke mål omtaler bevis. Læreboka har også et eksempel på et bevis som i utgangspunktet er et bevis som kan løses geometrisk ved at figurer klippes ut og omplasseres. Det påpekes i lærerveiledningen at figurene også kan brukes til å føre beviset algebraisk. I lærerveiledningen legges det også ved en ekstra figur, som de mener er på et enda enklere nivå, som også beviser den pythagoreiske læresetningen ved klipping og omplassering av figurer.

En klar tendens når det gjelder innføringen av læresetningen er at variasjonen og omfanget knyttet til innføringen av den pythagoreiske læresetningen øker i kronologisk rekkefølge på de fire læreverkene jeg har undersøkt. De to første læreverkene er tydelige av en mer formell og deduktiv karakter enn de to siste. Bevisbegrepet er mindre i fokus i de to siste læreverkene enn i de to første, mens her er det mer variasjon og bredde innen matematiske emner.

6.1.2 Funn av oldtidsbevis og historiske referanser

I alle de 4 læreverkene som er analysert har jeg funnet historiske referanser og også spesifikt ved innføringen av den pythagoreiske læresetningen. Navnet på læresetningen i seg selv er en historisk referanse. Alle lærebøkene nevner opphavet til setningen på noe ulikt vis. Ingen er bastante og konkluderer ikke med at det var Pythagoras som var den første til å beskrive et bevis for læresetningen.

I de to første læreverkene skrevet på 30-tallet var det tydelige referanser til den aksiomatisk deduktive bevisoppbyggingen til Euklid som baserte seg på tydelige definisjoner og aksiomer. Det var også direkte henvisninger til navnet hans i begge bøkene. Cappelens matematikkverk bruker Baskharabeviset som et ledd i sin innføring av setningen, men da som en differensiert oppgave myntet på de aller flinkeste elevene i temaet. Beviset blir forklart og ført med algebraiske notasjoner. Videre i Cappelens matematikkverks bok for 9. skoleår presenterer de Thâbit ibn Qorras geometriske bevis. Cappelens matematikkverk beskriver også kinesernes kjennskap til den pythagoreiske læresetningen og de påpekte også at de visste om læresetningen for flere tusen år siden.

Nummer bruker et geometrisk klippe-flytte-bevis som også kan vises rent algebraisk. Dette er et bevis som jeg tidligere har beskrevet at har et uklart opphav. Noen hevder at dette kunne være Pythagoras originale bevis. Jeg velger derfor å påpeke dette som et funn i og med at det i noen historiske dokumenter hevdes at beviset har røtter i oldtiden. Nummer har også med en eksamensoppgave som referer til den gamle babylonske leirtavlen, YBC 7289, som beskriver de pythagoreiske triplene. I lærerveiledningen blir det også gitt tydelige referanser til oldtidsbevis ved at de påpeker at det finnes mange bevis for setningen og henviser til ulike opphav fra forskjellige geografiske oldtidskulturer.

6.1.3 Bevisbegrepet i læreplaner og læreverk

Bevisbegrepet står veldig sentralt i de to første lærebøkene og læreplanene jeg analyserer. I læreplanene står det ganske mye om bevis og hvordan dette skal behandles i undervisningen. I lærebøkene blir også bevis brukt i innføringen. Det sentrale er bevis, mens anvendelsen kommer i annen rekke. Læreplanen som kom i 1974 markerer et relativt tydelig skille, hvor det understrekes at man går bort fra den aksiomatiske bevisføringen som har vært trenden i tidligere lærebøker. Det er også verdt å merke seg at begrepet bevis og bevisføring blir lite brukt i lærebøkene fra 1977 og 2015.

7 Avslutning

7.1 Didaktiske implikasjoner

Et spørsmål jeg har stilt meg mange ganger underveis i arbeidet med denne masteroppgaven er; Hvordan kan jeg bruke det jeg skriver om i min egen undervisning? Som jeg beskrev i metodekapitlet har jeg tidlig i studentperioden vært av den oppfatning at forskning må være korrekt og tydelig uten noen form for synsing. Jeg har valgt i dette prosjektet en kvalitativ metode og dermed har jeg åpnet opp for subjektive tolkninger. Mason (1998) beskriver at forskning på undervisning åpner opp for en slik subjektivitet i og med at undervisning og utdanning handler om sensitivitet mot og overføring til andre. I kvalitativ forskning er det subjektive elementet viktig og Mason beskriver det slik; “The only certain place to stand is in the most unlikely place: ourselves” (Mason, 1998, s.360). Jeg gikk inn i denne oppgaven med bakgrunn i mine egne erfaringer fra lærerjobben og med læreverket Grunntall som den tydeligste lærebokreferansen jeg hadde. Jeg vil trekke det så langt som at boka bortimot neglisjerer forståelsen bak matematiske begrep og læresetninger og bevis for disse er helt fraværende. Jeg har nå undersøkt 4 læreverk fra 4 ulike tidsepoker og ser at alle disse tar for seg nye matematiske begrep og emner med fokus på forståelse og bevis for disse. Lærebøkene har forskjellige innfallsvinkler og kan ikke sies å være like i verken utforming eller pedagogikk. Men allikevel vil jeg si at de har et fellestrekk ved at de går i dybden ved innføringen av nye matematiske begreper og læresetninger. De pirker ikke bare i overflaten. Jeg har lært å bli mer kritisk til hva lærebøkene sier etter å ha jobbet med flere ulike læreverk og har nok kommet til den erkjennelse at jeg bør og vil i fremtiden prøve å legge opp til mer dybdelæring. I forbindelse med arbeidet med fornying av Kunnskapsløftet er begrepet dybdelæring i fokus. I Stortingsmelding 28 (2016) blir dybdelæring beskrevet som viktig for at elevene skal utvikle en god og varig forståelse og at de greier å bruke det de har lært (Kunnskapsdepartementet, 2016, kap. 4). Det er nettopp dette jeg har erfart at mangler i min matematikkundervisning. Jeg har kjent på et tidspress for å komme igjennom pensum og derfor ofte bare brukt læresetninger og begreper uten å gå i dybden på forståelse og bevisargumentasjon for disse. Undervisningen har hovedsakelig fokusert på anvendelsen av begreper og læresetninger. Jeg har nok blitt farget av lærebokas oppbygging og innhold mer enn jeg tidligere har klart å erkjenne. I Stortingsmelding 28 er overflatelæring fremstilt som undervisningsform som ikke setter eleven i fokus. I meldingen står det at “Overflatelæring knyttes til et syn på undervisning som kunnskapsoverføring der den aktive eleven ikke står i sentrum for læringen“ (Kunnskapsdepartementet, 2016, kap. 4). Jeg vil ikke hevde at jeg ikke driver med dybdelæring eller at jeg mener at overflatelæring er fånyttes. Overflatelæring, repetisjon og faktakunnskap er en del av helhetsbildet. Vi trenger begge deler mener Schjelde (2017) som skriver om nettopp dette med overflate- og dybdelæring i forbindelse med debatten om fornying av Kunnskapsløftet. Han sier at “overflatelæring er bare det første steget i læringen mot å utvikle elevens kompetanse” (Schjelde, 2017). Å jobbe med bevis og bevisføring krever logisk tankevirksomhet, noe som er sentralt for å forstå noe i matematikk.

Det å trene på logikk ligger innenfor det som kan kalles dybdelæring og slik øving og kunnskap kan overføres til andre områder innen matematikkfaget og til andre fag.

I tillegg til at jeg ønsker å fremheve forståelsen for matematiske begrep og læresetninger i min fremtidige undervisning, ser jeg det også som nyttig å trekke inn historiske elementer i større grad. Gjennom arbeidet med den pythagoreiske læresetningen har jeg fått et lite innblikk i det havet av spennende historiske elementer som finnes. Jeg har til stadighet tenkt i løpet av lesingen at det er historier rundt opphavet til den pythagoreiske læresetningen som absolutt kan være nyttig å bringe inn i undervisningen. Bruk av historie i undervisningen kan føre til både økt interesse for temaet, men også som et utgangspunkt for at elevene skal kunne jobbe med forståelsen av den pythagoreiske læresetningen og andre matematiske læresetninger og begreper. Det kinesiske beviset, Baskharabeviset, Thâbit ibn Qorras bevis er noen oldtidsbeviser som jeg mener godt kan egne seg som et utgangspunkt for gode diskusjoner rundt temaet.

7.2 Videre forskning

Underveis i dette masterprosjektet har det vært fristende å gå i flere retninger og jeg har hatt lyst til å kunne se på mye mer enn det jeg har endt opp med. Jeg har sett på elementer fra oldtidens matematikk, skolehistorie, lærebøker og den pythagoreiske læresetningen. Jeg har kun valgt ut fire læreverk fra forskjellige tidsepoker og læreplaner. En utvidelse av prosjektets omfang ved en analyse av flere lærebøker fra flere læreplaner hadde vært interessant, for å få et enda mer helhetlig bilde av utviklingen.

Samtidig som jeg har sett på lærebøker fra fire forskjellige tidsepoker, har jeg også stilt meg spørsmålet om det læreverket jeg har plukket ut er representativt for de lærebøkene som er skrevet i samme tidsperiode. Dette er noe som ikke kommer frem i dette prosjektet og som kunne vært interessant å undersøke nærmere. Det kunne for eksempel vært gjort en analyse og sammenligning av læreverk skrevet etter Kunnskapsløftet. I og med at godkjenningsordningen for lærebøker har blitt opphevet og friheten til lærebokforfatterne har blitt større, ville det vært interessant å se på hva som er trendene ved innføring av den pythagoreiske læresetningen i disse læreverkene. Studier knyttet til bruk av læreverk som støtte ved innføringen av den pythagoreiske læresetningen og andre matematiske lærsetninger og begreper i undervisningen ville også vært en interessant vei videre med forskningsarbeidet.

8 Referanseliste

Alfsen, M. (1935). *Plangeometri for middelskolen* (6. utg.). Oslo: Aschehoug.

Alexander, A. (1939). *Bonnevie og Eliassen Lærebok i plangeometri*. Oslo: Aschehoug.

Andersen, Ø. (2018). Oldtiden. Store Norske Leksikon. Hentet fra https://snl.no/oldtiden

Aschehoug. (2018). *Nummer 8-10 – læreverket so gir stigning i faget*. Hentet fra https://www.aschehoug.no/Undervisning/Verk/Nummer-8-10

Aubert, V. & Alstad, B. (1985). *Det skjulte samfunn* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Baune, T. (2007) *Den skal tidlig krøkes... skolen i historisk perspektiv*. Oslo: Cappelen Akademiske Forlag.

Berntsen, A. J., Bue O., Rosseland, K. og Bue T. (1977). *Cappelens matematikkverk B-utgave - Lærerveiledning for 8. skoleår*. Oslo: J. W. Cappelens forlag.

Berntsen, A. J., Bue O., Rosseland, K. og Bue T. (1977). *Cappelens matematikkverk B-utgave - 8. skoleår*. Oslo: J. W. Cappelens forlag.

Berntsen, A. J., Bue O., Rosseland, K. og Bue T. (1977). *Cappelens matematikkverk B-utgave - 9. skoleår*. Oslo: J. W. Cappelens forlag.

Bogomolny, A. (2017). Pythagorean theorem. Cut-The-Knot.org. Hentet fra https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, *9*(2), 27–40.

Bratholm, B. (2001). Godkjenningsordningen for lærebøker 1889-2001, en historisk gjennomgang. *Fokus på pedagogiske tekster 5/2001*, 10-24. Hentet fra http://www-bib.hive.no/tekster/hveskrift/notat/2001-05/source/not5-2001fulltekst-ver2.doc

Briseid, E. M. (2017). Sats - matematikk. Store Norske Leksikon. Hentet fra https://snl.no/sats_-_matematikk

Burton, D. M. (2011). *The history of mathematics : an introduction* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.

Cohen, L., Manion, L. og Morrison K. (2011). *Research methods in education* (7th ed.). London: Routledge.

Dalland, O. (2012). *Metode og oppgaveskriving* (5. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Heath, T. L. (1990). Euclid's Elements. I. M. J. Adler (red.), *Great Books of the Western World 10* (2. utg.). (s. 1-396). Chicago: Encyclopædia Britannica.

Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H.K. og Wallace, A. K. (2015). *Nummer 9 - Lærerens bok*. Oslo: Aschehoug.

Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H.K. og Wallace, A. K. (2015). *Nummer 9 - Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Aschehoug.

Eves, H. (1983). *Dolciani Mathematical Expositions: Great Moments in Mathematics (Before 1650)*. Washington: Washington, US: Mathematical Association of America.

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics* (6th ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM, 45*(5), 765-777. doi:10.1007/s11858-013-0530-6

Gundem, B. B. (1997). *Læreplanhistorie - historien om skolens innhold - som forskningsfelt : en innføring og noen eksempler* (Vol. nr 4, 1997). Oslo: Universitetet i Oslo, Pedagogisk forskningsinstitutt.

Hakim, J. (2004). *The story of science: Aristotle leads the way*. Washington: Smithsonian Books.

Hansen, K. I. (1967). *Skolehistorisk oversikt* (2. utg.). Oslo: Cappelens.

Helsvig K. G. (2014). *1814-2014 Kunnskapsdepartementets historie*. Kunnskapsdepartementet. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/db68539527bd4b7ba604813ce29eefe8/kd-200-ar.pdf

Hodgson, J., Rønning, W., Skogvold, A. S. & Tomlinson, P. (2010). På vei fra læreplan til klasserom. Om læreres fortolkning, planlegging og syn på LK06. NF- rapport, (3). Bodø: Nordlandsforskning.

Holme, A. (2008). *Matematikkens historie : 1 : Fra Babylon til mordet på Hypatia*. Bergen: Fagbokforlaget.

Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H.K. og Wallace, A.K. (2015) *Nummer - Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Aschehoug.

Høigård, E., Ruge, H., & Hansen, K. I. (1971). *Den norske skoles historie : en oversikt* (3. utg.). Oslo: Cappelen.

Håstad, M., Svensson, L. & Öreberg, C. (1971). *IMU - Individuell matematikkundervisning: Del 7 hefte C4*. Oslo: Dreyers Forlag.

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1925). *De høiere almenskoler - Undervisningsplan for middelskolen*. Oslo: A.W. Brøggers boktrykkeris forlag.

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1938). *Innstilling II fra Plankomiteen for den nye skoleordning*. Oslo: Det Mallingske boktrykkeri. Hentet fra https://www.stortinget.no/no/Saker-og-publikasjoner/Stortingsforhandlinger/Lesevisning/?p=1939&paid=2&wid=a&psid=DIVL2803

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1939). *Den nye ordning av de høgre almenskoler*. (Meld. St. 40 1939). Hentet fra https://www.stortinget.no/no/Saker-og-publikasjoner/Stortingsforhandlinger/Lesevisning/?p=1939&paid=2&wid=a&psid=DIVL2803

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1939). *Foreløpig melding om leseplaner og pensa i de boklige fag i de nederste klasser av den høgre skolen etter loven av 10 mai 1935*. Hentet fra https://www.stortinget.no/no/Saker-og-publikasjoner/Stortingsforhandlinger/Lesevisning/?p=1939&paid=2&wid=a&psid=DIVL2803

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1957). *Om lærebøkene i skoleverket*. (Meld. St. 35 1957). Hentet fra https://www.stortinget.no/no/Saker-og-publikasjoner/Stortingsforhandlinger/Lesevisning/?p=1957&paid=2&wid=b&psid=DIVL1526&pgid=b_1213

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1974). *Mønsterplan for grunnskolen*. Oslo: Aschehoug. Hentet fra https://www.nb.no/items/27717cffb91e04bca5ed6b5f90ec1034?page=1&searchText=m%C3%B8nsterplan%201974

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1980). *Mønsterplan for grunnskolen* (3. utg.). Oslo: Aschehoug. Hentet fra https://www.nb.no/items/091f87282aa5f1b1cb11a9bc46a9a375?page=5&searchText=m%C3%B8nsterplan%2074

Kirke- utdannings- og forskningsdepartementet. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter. Hentet fra https://www.nb.no/nbsok/nb/f4ce6bf9eadeb389172d939275c038bb?index=29#0

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Fag – Fordypning – Forståelse — En fornyelse av Kunnskapsløftet*. (Meld. St. 28 2015-2016). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Lein, E. (1989). En skole for alle gjennom forsøk og reform. I Jordheim K. (Red.), *Skolen 1739-1989: en skolehistorisk antologi med 31 nyskrevne bidrag i anledning av norsk grunnskoles 250-årsjubileum*. (s.215-222). Oslo: Selskapet for norsk skolehistorie / NKS-Forlaget.

Liebich, H. (2012). Læreboka er under press. Forskning.no. Hentet fra https://forskning.no/meninger/kronikk/2012/06/laereboka-er-under-press

Loomis, E. S. (1940/1968). *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the FoUr Kinds. of "Proofs" (2nd ed.).* Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics. Hentet fra https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf

Lov om folkeskolen paa landet. (1889). Lov om folkeskolen paa landet m.v. av 26 Juni 1889. Hentet fra https://www.nb.no/items/5c0969c3e7f4df54c95266b9f70a6777?page=1&searchText=Lov%20om%20Folkeskolen%201889

Maor, E. (2007). *The Pythagorean theorem: a 4,000-year history*. Princeton, N.J: Princeton University Press.

McCulloch, G. & Richardson, W. (2000). *Historical research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Neraal, A. (2018). Aschehoug. Det Store Norske Leksikon. Hentet fra https://snl.no/Aschehoug_forlag

Nicholls, J. (2003). Methods in school textbook research. *International Journal of Historical Learning, Teaching and Research, 3*(2), 1-17.

NOU 1978:26. (1978). *Læremidler i skole og voksenopplæring*. Hentet fra https://www.nb.no/items/URN:NBN:no-nb_digibok_2008052900066

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole— Et kunnskapsgrunnlag*. Hentet fra **https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/sec8**

Opplæringsloven. (2003). Lov om grunnskolen og den vidaregående opplæringa (opplæringslova) m.v. av 31 januar 2003 nr. 10. Hentet fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_2#§2-15

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001), Mathematics textbooks and their use in English, French an German classrooms. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33(5), 158. Hentet fra https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF02656616.pdf

Ratner, B. (2009). Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him. *Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing, 17*(3), 229. doi:10.1057/jt.2009.16

Rosvold, K. A. (2017). Strekmåt. Store Norske Leksikon. Hentet fra https://snl.no/strekm%C3%A5t

Schjelde, T. J. (2017). «Ja takk, begge deler: både overflatelæring og dybdelæring». Utdanningsnytt.no. Hentet fra https://www.utdanningsnytt.no/bedre-skole/debatt/2017/ja-takk-begge-deler-bade-overflatelaring-og-dybdelaring/

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26. Hentet fra http://mrchadburn.co.uk/wp-content/uploads/2017/10/Skemp-Relational-and-Instrumental-Understanding.pdf

Skjelbred, D., Askeland, N., Maagerø, E., & Aamotsbakken, B. (2017). *Norsk lærebokhistorie: allmueskolen, folkeskolen, grunnskolen: 1739-2013*. Oslo: Universitetsforlaget.

Smestad, B. (2002). *Matematikkhistorie i grunnskolens lærebøker: en kritisk vurdering*. Alta: Høgskolen i Finnmark, Avdeling for nærings- og sosialfag.

Telhaug, A. O. (1989). Fra parallelle skoler til enhetsskole - en hovedlinje i norsk skoleutvikling. I Jordheim K. (Red.), *Skolen 1739-1989: en skolehistorisk antologi med 31 nyskrevne bidrag i anledning av norsk grunnskoles 250-årsjubileum*. (s.85-93). Oslo: Selskapet for norsk skolehistorie / NKS-Forlaget.

Tjeldvoll, A. (2018). Skolen. Store Norske Leksikon. Hentet fra https://snl.no/skole

Utdanningsdirektoratet. (2014). Erfaringer og vurderinger av eksamen 2013. Utdanningsdirektoratet. Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/Erfaringer-og-vurderinger-av-eksamen-2013/

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04?lplang=http://data.udir.no/kl06/nob

Vatne, J. E. (2017). Perpendikulær. Store Norske Leksikon. Hentet fra https://snl.no/perpendikul%C3%A6r

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research: Design and Methods* (2nd ed.). Thousand Oaks, California: SAGE Publications LTD.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, California: SAGE Publications LTD.

Åndsverksloven. (1961). Åndsverksloven. (1961). Lov om opphavsrett til åndsverk m.v. Hentet fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1961-05-12-2#KAPITTEL_4