Masteroppgave

Økt tallforståelse gjennom fokus på strukturerte mengder?

Et kvasi-eksperiment med tre elever i tredje klasse.

Forfatter:
Elisa Ljøkjell Ervik

Veileder:
Per Frostad

Trondheim, Februar 2014

Forord

Denne avhandlingen markerer avslutningen av min mastergrad i spesialpedagogikk ved Pedagogisk Institutt, Fakultet for Samfunnsvitenskap og Teknologiledelse, NTNU. Oppgaven og studiene som er beskrevet her er utført i løpet av høsten 2013 og januar/februar 2014. Jeg ble interessert i temaet matematikkvansker i løpet av det første året av mastergraden da jeg tok faget "Matematikkproblemer". Jeg ble oppmerksom på hvor lite kunnskap lærere og pedagoger har om dette temaet, samtidig med at matematikkvansker er utbredt i norsk skole. I min jobb som spesialpedagog ønsker jeg å vite noe om hvilke pedagogiske verktøy som kan hjelpe elever som sliter i matematikkfaget. Dette ble utgangspunktet for mitt prosjekt.

Jeg vil gjerne takke veilederen min Per Frostad for gode råd og tilbakemelding gjennom hele prosessen. Jeg vil også takke rektor og lærere ved den skolen de elevene som beskrives går på. De var positive og behjelpelige med en gang, og la alt til rette slik at prosjektet kunne gjennomføres på best mulig måte. Sist, men ikke minst, takk til min ektemann Åsmund for hjelp med TEXniske detaljer og oppmuntring og til min datter Aurora for at hun er en liten solstråle i hverdagen.

Innhold

Side

Introduksjon

Matematikkfaget i den norske skolen har vært et stort politisk og samfunnsmessig fokus i den siste tiden (VG: PISA 2012, 2013; Wold, 2013). Resultatene av PISA- undersøkelsen fra 2012 indikerer at norske elever har dårligere ferdigheter i matematikk sammenlignet med tidligere år (Kjærnsli & Olsen, 2013; PISA, 2012). Det rapporteres ikke om en signifikant nedgang i prestasjoner, men en negativ tendens. *"Fortsatt en vei å gå"* er tittelen på rapporten, som sier noe om at den norske matematikkopplæringen trenger et kvalitetsløft.

En utviklet tallforståelse blir av forskere omtalt som den avgjørende faktoren for å kunne utvikle grunnleggende matematiske ferdigheter og forståelse (Anghileri, 2006; Lunde, 2010). Å ha en utviklet tallforståelse vil si å ha en fleksibel tankegang rundt tall. Dette innebærer å vite hva tallene betyr (en begrepsmessig forståelse) og å utføre hoderegningsoppgaver (f. eks. addisjon og subtraksjon) ved bruk av mentale strategier (Lunde, 2010).

Vansker med matematikk er en viktig spesialpedagogisk utfordring i dagens skole. På tross av at matematikk utgjør en stor del av kompetansen barn skal opparbeide seg har man ingen definitiv teori som forklarer hvorfor noen barn utvikler matematikkvansker. Tidlige teorier fra begynnelsen av 1900- tallet forsøkte å forklare tallvansker med skader på deler i hjernen. I dag er det bred enighet om at matematikkvansker er sammensatt, og at det er en kombinasjon av individuelle og sosiale faktorer (Lunde, 2010). Selv om gruppen av elever som sliter med matematikk ofte blir beskrevet som svært heterogen, er det viktig å påpeke at det finnes flere fellestrekk man kan se etter. Snorre A. Ostad presenterer en strategidiagnostisk tilnærming til elever med matematikkvansker i sin bok "Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring". Gjennom sin forskning på 1990-tallet har han funnet at elever som fortsetter å bruker enkle og få tellestrategier, ved for eksempel enkle pluss- og- minusoppgaver, sannsynligvis har matematikkvansker (Ostad, 2008).

Å kunne regne er en av fem grunnleggende ferdigheter som står uttrykt i Kunnskapsløftet fra 2006, i tillegg til å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig, å kunne lese og å kunne bruke digitale verktøy. De grunnleggende ferdighetene er integrert i kompetansemålene for de ulike fagene. Det å kunne regne er altså også et kompetansemål i andre fag enn matematikk, i tillegg til at de andre fire grunnleggende ferdighetene inngår i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, u.d.). Som spesialpedagoger er det vårt ansvar å hjelpe elever med matematikkvansker til å få innsikt og redskaper som muliggjør en tilfredsstillende matematikkmestring. En strategidiagnostisk tilnærming til en elev med manglende tallforståelse vil kunne gi svar på hvordan eleven tenker når matematikkoppgaver løses, noe spesialpedagogen er avhengig av for å kunne sette inn riktig type tiltak.

Matematikkfaget har en hierarkisk oppbygning hvor talloppfatning utgjør grunnmuren

(Tall, 2013). Manglende talloppfatning vil dermed ha stor innvirkning på hvor godt en elev mestrer matematikk senere. St.meld. nr. 16 (2006-2007) *"... og ingen stod igjen. Tidlig innsats for livslang læring"* vektlegger hvor viktig begynneropplæringen er. Med dette som utgangspunkt ønsket jeg å finne gode pedagogiske verktøy for å utvikle tallforståelsen hos tre elever i tredje klasse som av lærere ble beskrevet som svake i matematikk. Innholdet av elevenes tallforståelse ble kartlagt gjennom å undersøke hvilke strategier elevene brukte da de skulle løse pluss- og minusoppgaver innen tallområdet 0-20. På grunnlag av dette utarbeidet jeg et gruppebasert pedagogisk opplegg med en varighet på ti timer over en periode på fem uker. Effekten av dette opplegget ble undersøkt gjennom en posttest hvor elevene fikk de samme oppgavene som ble gitt under strategikartleggingen.

Med dette som utgangspunkt vil jeg presentere teori som beskriver hva grunnleggende matematiske ferdigheter er, og deretter hvordan tallforståelse kan utvikles.

Teori

Jeg vil her presentere teori som danner grunnlaget for å gjennomføre et pedagogisk opplegg med den hensikt å forbedre tallforståelsen hos noen elever i tredje klasse. Dette kapitlet har fire deler. I første del vil jeg gi en beskrivelse av hva det vil si å ha grunnleggende matematiske ferdigheter. Dette danner grunnlaget for å si noe om hvordan slik kunnskap kan oppnås. Det finnes ulike teorier om hvordan elever kan oppnå grunnleggende matematiske ferdigheter, og i andre del vil jeg skildre to ulike veier til tallforståelse. Tredje del gir en beskrivelse av kjennetegn ved elever med matematikkvansker. Til slutt presenterer jeg verktøy/materiale som er gode hjelpemidler for å utvikle tallforståelsen.

Grunnleggende matematiske ferdigheter

For å utvikle tilfredsstillende grunnleggende ferdigheter forutsettes det en balanse mellom prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap. Konseptuell matematisk kunnskap handler om forståelse av matematiske begreper og karakteriseres ved å ha mange koblinger mellom kunnskapsenheter (f. eks. koblinger mellom addisjon og subtraksjon; at eleven forstår at det er en sammenheng). Disse koblingene er like tydelige for eleven som enkeltenhetene (Frostad, 2005; Hiebert & Lefevre, 1986). Konseptuell kunnskap kan ikke observeres direkte siden dette er lagrede mentale kunnskapsenheter. Å utvikle denne kunnskapen gjøres enten ved å koble en ny kunnskapsenhet til allerede lært kunnskap, eller å koble to nye kunnskapsenheter sammen. Jo flere koblinger en elev har mellom ulike begrep, desto dypere forståelse har eleven (Hiebert & Lefevre, 1986). Å kunne oppfatte antallet i ulike mengder og forstå strukturen i disse (f. eks. at mengden 5 er en helhet, samtidig som at det består av delmengdene 2 og 3 samt 5 enkeltdeler), er den konseptuelle kunnskapen som er mest grunnleggende i begynneropplæringen (Frostad, 2005).

Prosedyrekunnskap handler om oppgavespesifikke løsningsmetoder, og består av to ulike deler. *Den ene delen* er det formelle språket og matematikkens formspråk (symbolsystemet). Denne inkluderer kjennskap til symbolene som blir brukt til å representere matematiske ideer, og en bevissthet om de syntaktiske reglene for å skrive symbolene. *Den andre delen* består av algoritmer (regler) eller prosedyrer for å løse matematiske oppgaver. Et kjennetegn ved prosedyrene er at de blir utført i en forutbestemt lineær rekkefølge. Man skiller mellom to typer prosedyrer basert på objektet de blir utført med. Den ene typen objekter er standard skrevne symboler (4, +, -) som krever kunnskap om de individuelle symbolene satt inn i et system. Den andre typen prosedyrer brukes på objekter som ikke er symbolske (konkrete objekter) (Hiebert & Lefevre, 1986). Et fundament for å utføre prosedyrer riktig er å kunne telle riktig. Gelman og Gallistel (1978) sier at det er fem prinsipper som må berherskes. *1. En-til-en- prinsippet* er å knytte ett objekt til et unikt tallord; alle objektene som skal telles skal ha hvert sitt telleord. *2. Stabilrekkefølge-prisippet* er at telleordene har en fast bestemt rekkefølge. *3. Kardinalitetsprisippet* er at det siste telleordet som knyttes til det siste objektet som skal telles, representerer antallet til hele mengden. *4. Vilkårligrekkefølge-prinsippet* vil si at det har ingen betydning hvilken rekkefølge objektene telles i så lenge de kun telles en gang hver. *5. Abstraksjonsprinsippet* handler om at det er mulig å telle ulike objekter samtidig; svarte og røde kuler kan telles samtidig dersom man skal finne antallet kuler til sammen (Gelman & Gallistel, 1978).

Å koble konseptuell kunnskap til prosedyrekunnskap gjør at symbolene som brukes i prosedyrene får mening og at prosedyrene kan huskes bedre og brukes mer effektivt. Prosedyrekunnskap bidrar til et formelt språk og handlingssekvenser som hever nivået og anvendbarheten av konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Kardinalitets-oppfatning (antallsoppfatning) er konseptuell kunnskap som elever skal mestre tidlig på skolen. Dette innebærer å oppfatte at en mengde består av enkle element, og at disse elementene igjen utgjør en helhet. En elev med kardinalitetsoppfatning klarer å reflektere over at en mengde har en struktur som består av en helhet og enkeltdeler. Formålet med å bruke konkreter i begynneropplæringen er å utvikle den matematiske kunnskapen fra det konkrete til det abstrakte. Det er ikke gitt at dette skjer da den matematiske ideen ikke er en egenskap ved materialet. Den matematiske ideen må konstrueres hos hver enkelt elev, for eksempel kardinalitetsoppfatningen (Frostad, 2005).

Gray og Tall (1994) bruker begrepet proseptuell tenkning når en elev klarer å koble meningsfulle prosesser (f. eks. addisjon og subtraksjon) til konseptuell kunnskap. Det er en slik forståelse som er forutsetningen for å «knekke koden» og mestre matematikken, og karakteriseres ved å tolke symboler som tvetydige, slik at de representerer prosesser og begreper samtidig. En flink elev klarer å tolke tvetydigheten ved symbolene på en fleksibel måte. 5+4 kan fremkalle både addisjonsprosessen av de to tallene og den strukturerte mengden 9. Det er naturlig å tenke seg at når eleven akkurat har tilegnet seg en proseptuell forståelse av symboler som 5+4, vil eleven aktivt kunne bytte mellom prosessen eller konseptet (Gray & Tall, 1994). For å utvikle tallforståelse forutsettes det å kunne skape om en prosess til et begrep (innkapsling).

Utvikling av tallforståelsen

David Tall og kolleger (Tall, 2013; Tall et al., 2001) argumenterer for at tallforståelse utvikles gjennom gjentatt telling. Vi vil kalle dette for den *første veien til tallforståelse.* For å utvikle tallforståelse forutsettes det å kunne skape om en prosess til et begrep (innkapsling)(Gray & Tall, 1994). Eksempler på at dette skjer er gjennom at gjentatt telling blir til addisjon og gjentatt addisjon blir til multiplikasjon, der man styrker forståelsen av det enkleste begrepet ved å se hvordan det inngår som en del i det mer avanserte. Det er slik man utvikler en mer fleksibel og rasjonell forståelse innen matematikk; at man ser et meningsfullt forhold mellom begrep på samme nivå. Matematikksterke innkapsler matematiske ideer og gjør dem dermed enklere (Gray & Tall, 1994).

David Tall (Tall, 2013) bruker begrepene *"set-before"* og *"met- before"* for å beskrive hvordan matematisk tenkning bygger på mentale strukturer som mennesker blir født med og fortolkninger vi gjør av erfaringer i livet. *"Set-befores"* er medfødte mentale strukturer, og Tall sier at det er tre strukturer som er avgjørende for å kunne utvikle matematisk tenkning. *Den første strukturen* gir evnen til å gjenkjenne mønster og til å se likheter og forskjeller som kan uttrykkes gjennom et språk. Det er derfor små barn klarer å sette ulike typer katter eller hunder i riktig kategori; barnet gjenkjenner en ball selv om den har ny størrelse og farge. *Den andre mentale strukturen* gir oss nytte av repetisjon. Det er dette som er grunnlaget for prosedyretenkning, ved at vi gjennom repetisjon kan lære ulike prosedyrer for å løse matematiske oppgaver. *Den tredje mentale strukturen* legger grunnlaget for å utvikle språk. Språket gir oss mulighet til å gi ulike fenomen/konsepter (f. eks. addisjon) et navn, slik at vi kan diskutere og utvikle dets innhold. Det er gjennom å prate om konseptet at vi kan utvikle kognitive strukturer som kan kobles til andre eksisterende kunnskapsstrukturer. Språket gjør det også mulig å snakke om prosedyrer som gjentas slik at disse etterhvert utvikler seg til å bli matematiske konsepter (Tall, 2013).

Den matematiske tenkningen vil utvikle seg ulikt hos individer, avhengig av hvilke erfaringer som påvirker de medfødte mentale strukturene. En *"met-before"* er en mental struktur et menneske utvikler på grunnlag av erfaringer. Matematikkfaget er bygget opp ved at ny kunnskap bygger på allerede lært kunnskap (*"met-before"*). Elevene lærer først å telle, så enkel tallfakta (for eksempel hvilke to tall som tilsammen blir ti) som grunnlag for f. eks. addisjonsoppgaver med et høyere tallområde (elevene har lært at 5+5 er 10, og kan dermed utnytte dette for å finne svaret på 5+6) (Tall, 2013). Mennesket har en begrenset evne til huske enkeltenheter (f. eks. å få opplest ti siffer etter hverandre i raskt tempo for så å gjenta i samme rekkefølge). Dette gjelder også i matematikken; det er begrenset hvor mange "tellesteg" vi kan gjøre før vi glemmer hva utganspunktet for tellingen var. En utvikling av matematisk forståelse er avhengig av at eleven klarer å komprimere kunnskap for å kunne frigjøre kapasitet til andre oppgaver. Elever som i tredje klasse løser oppgaven 17-15 ved å telle en og en kloss til de har 17 og deretter tar bort 15 klosser en og en for å finne svaret, vil ha store problemer med oppgaver med et større tallområde (f. eks. tilsvarende strategi ved oppgaven 1000-996) (Tall, 2013).

Rémi Brissiaud argumenterer for en *annen vei til tallforståelse*. Gjennom forskning på sin sønn fra toårsalderen ønsket Brissiaud å vise en annen måte å lære barn å oppfatte antallet i mengder (Brissiaud, 1992). Brissiaud bruker betegnelsen "fingersymbol" for å beskrive hvordan barn kan representere et antall kun ved å vise samme antall med fingrene. Denne metoden går ut på å unngå å lære barna tallord til å begynne med, og heller bruke fingrene til å representere antall. Brissiaud betegner fingrene som analoge representasjoner av antall. Tallordene skal læres i etterkant, og være "merkelapper" på fingersymbolene. Denne metoden krever at barnet mestrer en-til-en korrespondanse: barnet forstår at en finger representerer et objekt, og at alle objektene som skal telles trenger en finger hver.

Brissiaud konkluderer med at en mengdeforståelse krever at barnet oppfatter to aspekter ved mengden samtidig: enkeltelementene (krever evnen til en-til-en-korrespondanse) og enkeltelementene som en samlet enhet (Brissiaud, 1992).

Jean Piaget snakker i hovedsak om to typer kunnskap som er avgjørende for at barn skal lære å tenke matematisk. *Fysisk (empirisk) kunnskap* ligger i objekter (eksternt), f. eks. farge og vekt, og innhentes gjennom observasjon. Den andre kategorien er *logisk-matematisk kunnskap (ikke-empirisk).* Eksempler på dette er å identifisere likheter og forskjeller mellom objekter. *Logisk-matematisk kunnskap* må skapes mentalt (internt) hos hver enkelt ved å danne mentale forbindelser mellom kunnskapsenheter. Likheter og forskjeller mellom en rød og en hvit terning er ikke noe som ligger intrinsikt i disse objektene for eksempel. For at et individ skal kunne se likheter og ulikheter mellom terningene må de settes i et forhold til hverandre mentalt. Å se de to terningene som begrepet "to" krever også et slikt forhold. Logisk-matematisk kunnskap er en abstraksjon basert på fysisk kunnskap (Piaget 1967/1971, 1945/1951 i Kamii 2000; Kamii, Lewis og Kirkland 2001).

Piaget sier at en matematisk forståelse må skapes i hvert barn gjennom at barnet abstraherer kunnskap på to plan (Kamii, 2000). Ved *empirisk (enkel) abstraksjon* fokuserer individet kun på en eller flere egenskaper som ligger i objektet, og ignorerer andre egenskaper. Dette kan for eksempel være å bare se at en rød terning er rød, og ikke at den har en viss vekt, fasong eller at den er laget av et visst materiale. Det andre nivået kalles *konstruktiv (reflektiv) abstraksjon* og handler om å lage mentale relasjoner mellom og i objekter. Eksempel på slike relasjoner er å kunne nevne likhetene og forskjellene mellom en rød og en hvit terning. Disse abstraksjonsnivåene må eksistere samtidig for at unge barn skal kunne utvikle en matematisk forståelse. Piaget sier at barn må ha erfaring med konkreter (fysisk kunnskap som fører til empirisk abstraksjon) for å kunne abstrahere på et reflektivt plan. (Kamii et al., 2001). Dersom konkrete objekter som skal telles hadde oppført seg på samme måte som to vanndråper, som smelter sammen når de kommer i kontakt, ville det vært umulig for små barn å konstruere begrepet to.

Det er ifølge Piaget denne logisk- matematiske kunnskapen som kreves for å kunne oppfatte mengdene som ligger i ulike tall. Å oppfatte flere objekter sammen (for eksempel to terninger) som mengden to krever at individet skaper et forhold mellom disse mentalt. Den logisk- matematiske kunnskapen utvides ved å sammenligne nye kunnskapsenheter med eksisterende kunnskap. Hvis barnet ser mange terninger med forskjellig form kan det utvide sin liste over forskjeller og ulikheter til å omfatte størrelse, vekt, form, osv. Kamii et al. (2001) sier at hos små barn er den logisk-matematiske kunnskapen uskillelig fra den empiriske kunnskapen, siden små barn trenger konkreter for å bruke tall. Utviklingen av tallforståelsen krever at den logisk-matematiske kunnskapen får stå på egne ben, slik at barnet forstår tall som noe abstrakt (Kamii, 2000; Kamii et al., 2001).

Kjennetegn og strategier hos elever med matematikkvansker

Strategibruken (prosedyrene) til eleven sier noe om kvaliteten på tankegangen. Utviklingen av strategibruken over tid er en indikator på den konseptuelle kunnskapen (Frostad, 2005). Snorre A. Ostad (Ostad, 2008) snakker om to hovedtyper av oppgavespesifikke strategier som benyttes når matematikkoppgaver løses: backupstrategier og retrievalstrategier. Retrievalstrategier er å hente fram svaret fra hukommelseslageret, enten å med en gang vite svaret, eller ved å vite svare på for eksempel addisjonskombinasjoner som brukes for å finne svaret. Backupstrategier er alle andre metoder som brukes for å komme frem til svaret, f. eks. å telle alt ved hjelp av klosser eller å telle ved hjelp av fingre. Ostad fant gjennom sin longitudinelle studie på 1990- tallet at elever med matematikkvansker løser så å si alle addisjons- og subtraksjonsoppgaver ved hjelp av backupstrategier gjennom hele barneskolen. Hvor elever uten vansker etterhvert erstatter primitive backupstrategier med mer avanserte, og etterhvert retrievalstrategier, benytter elever med matematikkvansker de samme primitive strategiene år etter år (Ostad, 2008).

Carpenter og Moser (Carpenter og Moser, 1982 i Frostad, 2005) deler strategier elever bruker ved addisjons- og subtraksjonsoppgaver inn i tre nivåer. Disse har en hierarkisk oppbygning med de mest primitive først. *På det første nivået* (tellestrategier med konkreter) er elevene avhengig av å bruke konkreter (f. eks. klosser eller fingre) for å komme frem til riktig svar. Konkretene må brukes i alle ledd av prosedyren. 4+5 regnes ut ved å telle fire klosser en og en først, for så å telle fem klosser en og en. Til slutt teller eleven alle ni klossene en og en. *På det andre nivået* (tellestrategier) teller elevene trinn i tellesekvensen i stedet for konkreter. Her er det hovedsaklig tre strategier som brukes.

1. Telle alle. Oppgaven 4+5 regnes ut ved å først telle fra en til fire, enten høyt eller i hodet. Deretter må eleven bruke konkreter for å telle de fem neste tallene videre fra fire. Dersom oppgaven hadde vært å kun telle to eller tre tellesteg videre hadde ikke eleven trengt konkreter for å holde styr på antall tellesteg.

2. Telle videre fra første. Her vet eleven hvor i tallrekken det første tallet i oppgaven er (f. eks. 4 i 4+5). Eleven vil telle ett og ett tall videre fra fire til hun har telt fem steg. Ved minusoppgaver vil eleven telle ned ett og ett tall (f. eks. 8-3, vil eleven telle nedover tre tall fra 8).

3. Telle videre fra største. Denne strategien er ganske lik "å telle videre fra første", bortsett fra at eleven tar utgangspunkt i det største tallet. Eleven har forstått at telleprosedyren vil bli kortere ved å bruke denne strategien.

Elever som har kommet til d*et tredje nivået* benytter tallfaktastrategier. Tallfaktastrategier er todelte. Utledet svar går ut på å at eleven benytter sin kunnskap om kombinasjoner av mengder til å løse oppgaver som inneholder disse. Ved oppgaven 8+4 kan eleven benytte sin kunnskap om at $8 + 2 = 10$, og at $10 + 2 = 12$. Den andre delen av tallfaktastrategier er kjente tallfakta. Her vet eleven svaret automatisk uten å bruke noen strategier.

Gray og Tall (1994) fant at 8- årige matematikksvake elever i all hovedsak brukte prosedyrestrategier (tellestrategier, jfr. backupstrategier), og så å si aldri utledet svar (jfr. retrievalstrategier) ved enkle addisjonsoppgaver. Matematikksterke brukte utledet svar på nesten alle oppgaver hvor de ikke kunne svaret automatisk. Unge barn som mestrer matematikken bruker de kombinasjonene de allerede kan for å skape flere kombinasjoner. Matematikksvake derimot fortsetter å bruke telleprosedyrer, og jobber for å mestre disse godt. Utviklingen deres er kvalitativt annerledes. Godt lærte tellestrategier fungerer på lave tall, men de blir vanskelige ved større tall da det er stor fare for å telle feil i tillegg til at det tar lang tid (Gray & Tall, 1994). Et relatert problem er at matematikksvake opplever et press mot å bruke mer avanserte strategier, selv om de ikke mestrer disse, noe som gjør at de feiler i større grad. Elever som fortsatt bruker tellestrategier når resten av klassen bruker mer avanserte strategier forsøker ofte å skjule disse ved å f. eks. gjemme fingrene under bordet (Gray & Tall, 1994).

Gjennom å intervjue 60 elever fra 1. til 6. klasse i 1981, fant Neuman (1993) ulike kjennetegn ved elever med og uten matematikkvansker. Halvparten av de som ble intervjuet fikk spesialundervisning i matematikk. Elevene uten matematikkvansker hadde mange metoder de kunne velge mellom da de skulle løse matematikkoppgaver. Innen tallområdet 1-10 benyttet de ofte en av disse to metodene: 1: De benyttet sin retrievalkunnskap om det dobbelte av et tall (de vet med en gang at 5+5 er 10 for eksempel) og legger til eller tar bort et tall i forhold til det. De kan også flytte en eller flere enheter mellom dobblenes to enheter (siden de vet at 5+5 er 10, så vet de også at 4+6 er 10; de flytter mengden en fra den ene femmermengden til den andre). 2: De fylte ut eller tok bort fra tiermengden. Dersom de for eksempel fikk oppgaven 8+4, benyttes denne metoden ved at de vet at 8+2 er 10, og at 2+10 er 12 (Neuman, 1993).

Elevene som fikk spesialundervisning kunne også benytte seg av kunnskap om det dobbelte av tall, men de benyttet den kun ved addisjon. Ved subtraksjon måtte elevene i all hovedsak telle et og et tall bakover og evnet ikke å se sammenhengen til addisjon. Metoden å fylle eller ta bort fra tiermengden går alltid an å bruke siden den hører sammen med desimaltallets struktur. Metoden krever imidlertid at man behersker mengder opp til 10 uten å måtte "dobbeltregne" (å bruke fingre samtidig som eleven sier tallordene) eller anslå. Dette gjorde ingen av elevene med spesialundervisning. Dermed kunne de ikke bruke utledet svar slik de matematikksterke gjør. De matematikksvakes angripen på oppgaven var at man måtte "regne" ut svaret ved hjelp av dobbeltregning.

Å kunne regne enkle pluss- og minusoppgaver er fundamentalt for å kunne mestre matematikk, og det er nettopp vansker med dette som kjennetegner elever med matematikkvansker. Matematikksvake har ikke automatisert denne kunnskapen på lik linje med elever som mestrer matematikk på et tilfredsstillende nivå (Fleischner og Garnett, i

Bråten 1996). Elever som ikke opparbeider seg en grunnleggende matematisk kunnskap innen tallforståelse vil få store vansker med å forstå mer avansert matematikk. Dette er på grunn av matematikkens systematiske og hierarkiske oppbygning og natur. Begrensninger når det gjelder oppmerksomhetskapasiteten hos mennesker påvirker sannsynligvis de kognitive prosessene. På grunnlag av dette er flere forskere enige i at automatisering, eller å prosessere informasjon raskt, frigjør oppmerksomhetskapasitet som kan brukes ved mer abstrakte og komplekse oppgaver/situasjoner (Zawaiza og Gerber, 1993 i Bråten 1996). Dette kan forklare hvorfor matematikksvake stagnerer etterhvert som matematikken blir mer abstrakt; all oppmerksomhetskapasitet brukes opp på det grunnleggende (for eksempel å regne enkle pluss- og minusoppgaver ved hjelp av tellestrategier) noe som gjør det umulig for eleven å rette oppmerksomhet mot mer avanserte oppgaver (Gagne, 1983 i Bråten 1996).

Det som etterhvert skiller sterke og svake elever innen matematikk er den proseptuelle kløften, som er et uttrykk for den kvalitative forskjellen mellom elevene. Matematikksvake har ofte et rent prosessfokus som karakteriseres ved et ensidig fokus på å gjennomføre riktig telleprosedyre; f. eks. å telle oppover ved addisjon og nedover ved subtraksjon. Disse blir veldig gode på telleprosedyrer og evner blant annet ikke å se strukturen og helheten i mengder (meningsfulle tallfakta, jfr. kardinalitetsoppfatning) som kreves for å bruke utledet svar. Det store fokuset på å telle riktig gjør at forholdet mellom input (f. eks. oppgaven 5+4) og output (svaret: 9) blir uklart. Jo flinkere du blir til å bruke telleprosedyrer, jo mindre sannsynlig er det at du utvikler proseptuell tenkning. Den proseptuelle kløften vil dermed øke etterhvert. Matematikksterke karakteriseres ved å kunne dekomponere og rekomponere symboler på fleksible måter. Dette er avgjørende for å kunne bruke utledet svar, f. eks. tallet 6 lagret som 3+3, 4+2, 2×3 og 12/2. Når proseptet komprimeres ved videre læring, blir det mye enklere å benytte: for en som har mestret multiplikasjon er addisjon noe som gjøres nesten underbevisst. En elev som har en proseptuell forståelse av telling, og som i tillegg bruker en mer avansert strategi, vil raskt se sammenhengen mellom telling og addisjon (Gray & Tall, 1994)).

Verktøy og metoder for å øke tallforståelsen

Her presenteres verktøy og undervisningsprogram som skal hjelpe elever med å utvikle tallforståelsen. Numicon og RightStart Mathematics oppmuntrer til å bruke konkreter slik at strukturen i mengder blir synlige. På denne måten representerer de begge "veiene" til tallforståelse. Dagmar Neuman representerer *den andre veien til talloppfatning* ved at hun er opptatt av visualisering av mengder og å unngå telling.

Numicon. Numicon er et læreverktøy som består av forskjellig materiale og oppgaver (*Numicon. Building a secure future in mathematics for every child*, 2013). Vi vil her ta utgangspunkt i materialet fra "sett 1" og lærerveiledningen som følger med (Atkinson, Tacon & Wing, 2005). Hensikten med materialet er å gi barn en forståelse for tall og mengder. Hensikten med konkretiseringsmaterialet som følger med (se beskrivelser og bilder nedenfor) er å "make the numbers real" gjennom å visualisere tallene som strukturerte mengder. Barn har fra tidlig alder av en fasinasjon for mønster og et behov for å finne mønster. Numicon er laget for å utnytte barns iboende sterke sider og på denne måten hjelpe dem til å utvikle en god forståelse for tall og mengdene. Numicon fokuserer på:

- å lære gjennom handlig
- å lære gjennom å se
- barns sterke evne til å lære mønster. Dette henger sammen med å kunne lære av

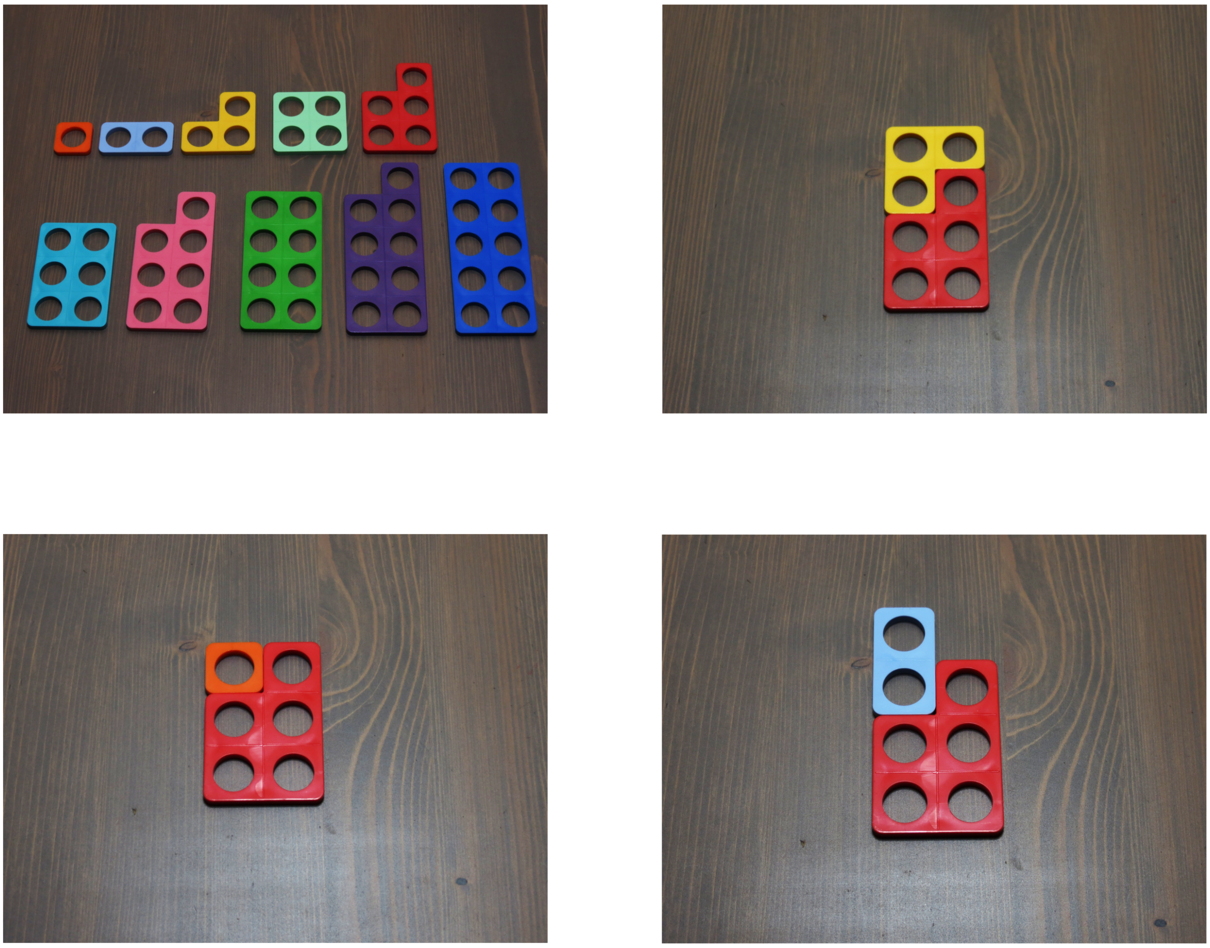
erfaring, og er helt avgjørende for å kunne lære noe i det hele tatt. All matematisk forståelse er avhengig av evnen til å se sammenhenger, og ikke minst det mønsteret og sammenhengen som tall har.
Numicon legger til rette for å prøve ut, legge merke til og utforske mønster. Det er viktig at barna forstår at tall ikke er noe tilfeldig, men at de sammen lager et høyt organisert system fylt av mange slags mønster. Barns første møte med tall er å telle fra en og oppover, og Numicon oppfordrer til å telle så mye som mulig slik at barn erfarer tallenes hierarkiske oppbygning og rekkefølge. Materialet er laget slik at barna skal komme seg videre fra telling og se tall som en helhet (en mengde). Barna skal altså få en begrepsforståelse for de ulike mengdene. Målet er å utvikle et variert begrepsbilde for tall hos barn ved å inkludere de visuelle mønsterene i Numiconmateriellet i deres begrepsbilder (Atkinson et al., 2005).

Numiconmaterialet består av flere sett og flere oppgavekort. Det er 12 oppgavekort med flere oppgaver på hvert kort. Det er enten addisjon- eller subtraksjonsoppgaver. I tillegg er oppgavene inndelt i ulike kategorier som henspeiler bruk av ulike sanser. Disse kategoriene er:

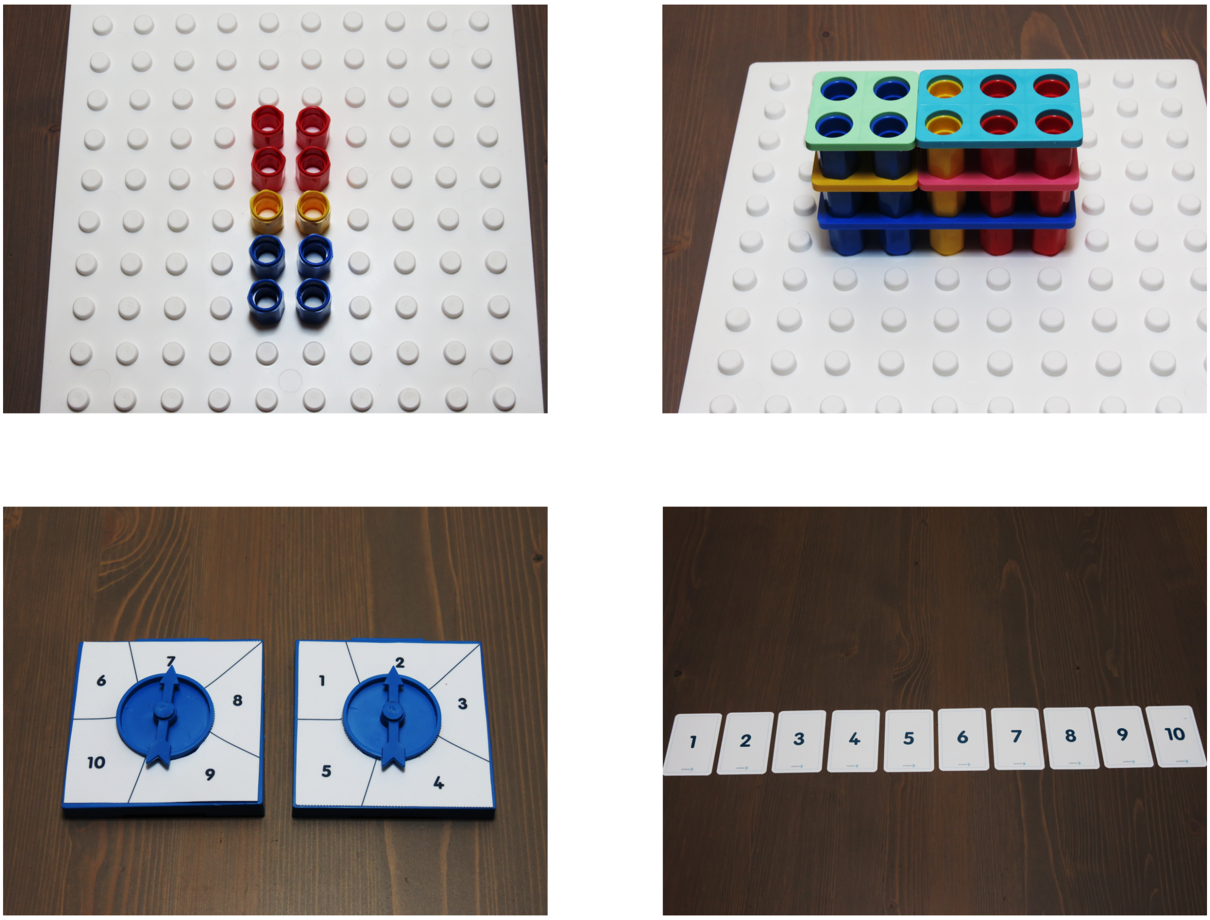
- mønster og tallformer. Her er målet å bli kjent med numiconbrikkene (blir beskrevet nedenfor) og se hvilket mønster de danner. Dette mønsteret skal også overføres til tall.
- kjenne igjen tallformer og tallkort. Barna skal danne begrepsbilder av tallformene og dermed automatisk vite hvilke tall (mengder) de ulike tallformene representerer.
- addisjon. Barna skal bruke numiconbrikkene for å løse addisjonsoppgaver. Dette skal utvikle elevenes begrepsforståelse når det gjelder addisjon.
- subtraksjon. Det samme som beskrevet under addisjon.

Hovedmaterialet er såkalte numiconbrikker, som vi fra nå av kaller tallbrikker (se Figur 1). Disse tallbrikkene viser mengdene 1-10 i ulike sterke farger. Det følger også med to grunnbrett som tallbrikkene kan festes på. I tillegg er det en pose med plugger i ulike farger som passer inn i hullene på tallbrikkene og som kan settes på grunnbrettet (se

Figur 2). Annet materiale som følger med er blant annet: to spinnere, overlegg til spinnerne med tallene 1-5 og 6-10, tallkort med tallene 0-100 (som en kortstokk) og en “følepose” (se Figur 2).



Figur 1. Fra Numicon-materialet: tallbrikkene fra 1-10 og kombinasjoner av disse.



Figur 2. Fra Numicon-materialet: brett med plugger; brett med plugger og tallbrikker; spinnere; tallkort.

RightStart Mathematics. RightStart Mathematics er et undervisningsprogram utviklet av Joan A. Cotter (Cotter, 2011a). Bakgrunnen for programmet var at hun studerte hvordan asiatiske elever allerede i første klasse er kommet lenger i sin matematikkforståelse sammenlignet med amerikanske førsteklassinger. Dette gapet viser seg å bli større og større. Utgangspunktet for programmet er observasjoner av den japanske undervisningsmodellen og hvordan matematikk undervises i første klasse. Japan er kjent for å utvikle kompetente elever innen matematikk (Cotter, 2001). I PISA-undersøkelsen fra 2006 fikk Japan det sjuende beste resultatet (PISA, 2006)

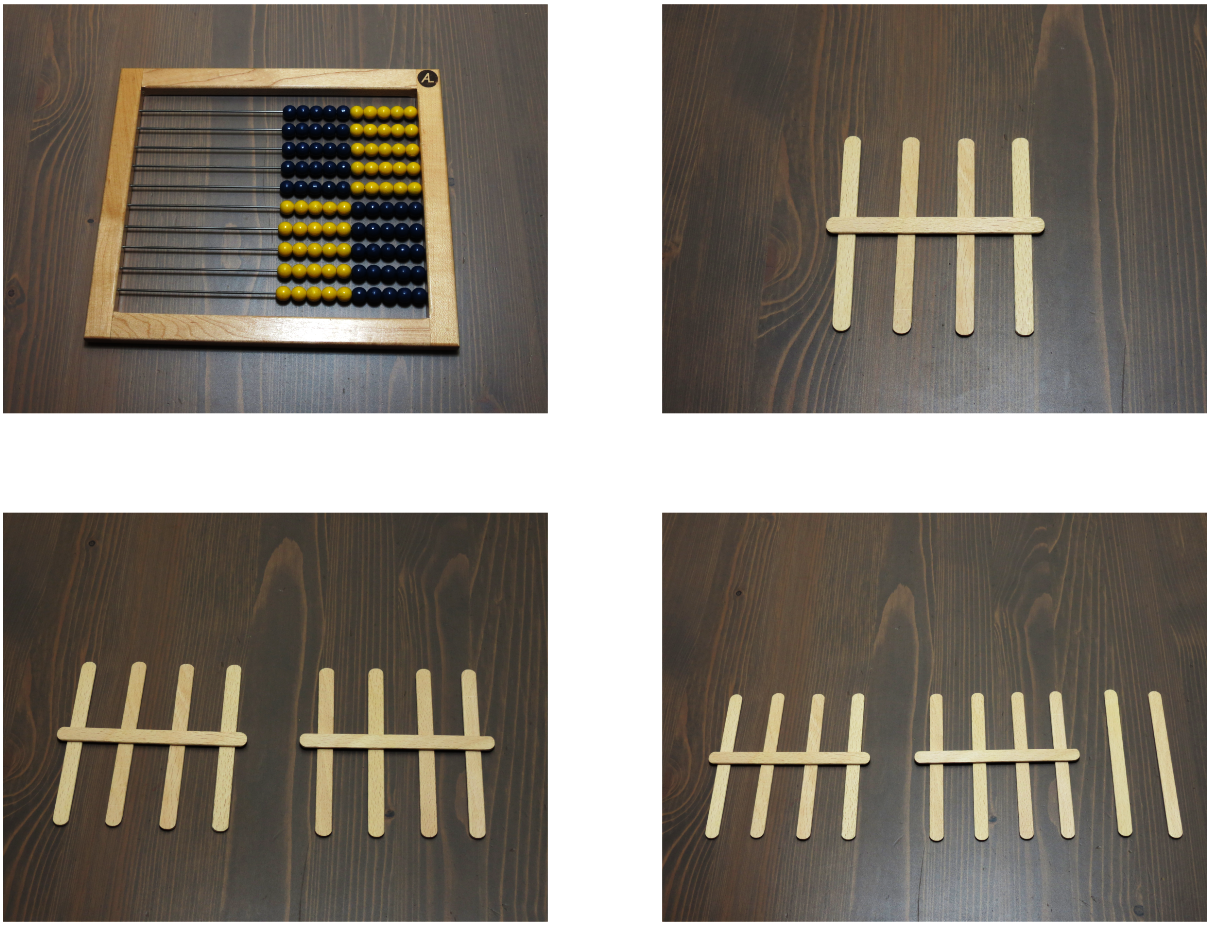
Cotter fant ulike kjennetegn ved den japanske undervisningsmodellen som kan forklare den store forskjellen. For det første kan tallnavnene fra ti og oppover ha en betydning, da de heter ti-en (elleve), ti-to (tolv), ti-tre (tretten), ..., to-ti-en (tjueen), to-ti-to (tjueto) osv (direkte oversatt). Disse begrepene inneholder i seg selv en beskrivelse av tallene som strukturerte mengder; 12 består av ti og to. Et annet funn var at japanske elever blir oppmuntret til å ikke bruke tellestrategier, og heller prøve å se mengdene i grupper på fem og ti. En japansk elev som får oppgaven 8+4 vil sannsynligvis løse denne ved å ta to fra firermengden og flytte den til åttermengden. Eleven har dermed fått oppgaven 10+2 som enkelt kan løses (Cotter, 2001).

På bakgrunn av observasjonene gjort i Japan utviklet Cotter en kuleramme som heter Al Abacus (se Figur 3) (Cotter, 2001, 2011b). Denne har ti kuler på hver streng og har ti strenger. På hver streng er fem kuler blå og fem er hvite. På denne måten er mengdene fem og fem godt synlige i tiermengden. Hver streng er dobbelt så lang som når alle ti kulene er plassert tett inntil hverandre. Når denne kulerammen skal brukes skal alle kulene være flyttet helt til høyre, og kulene skal flyttes fra høyre mot venstre ved bruk. Al Abacus er laget slik at mengdene er lett gjenkjennelige visuelt, og elevene skal aktivt flytte mengder uten å telle en og en kule (Cotter, 2001, 2011b).

"RightStart Mathematics Kindergarten Lessons" (Cotter, 2001) er en del av et undervisningsprogram som består av mange leksjoner med aktiviteter. Det er flere kjennetegn og prinsipper ved dette programmet:

- bruk fingre for å vise mengder opp til ti. Mengder over fem skal vises som 5+ noe.
- unngå bruk av tellestrategier. Telling er kun et språk (oppramsing av ord) og hindrer forståelse av plassverdisystemet. Mengder bør forstås i femmergrupper og tiergrupper, ved hjelp av fingre, ispinner, Al Abacus, andre objekter eller bilder. Disse konkretene skal brukes slik at mengdene blir visuelle. Ispinnene skal brukes ved å gjøre femmermengdene tydelige. Dette gjøres ved å legge fire ispinner ved siden av hverandre, og legge den siste horisontalt midt på de fire ispinnene (se Figur 3). Fingrene skal også brukes for å vise mengder, og ikke ett og ett tall.
- oppmuntre elevene til å bruke forestillingsevnen. Visualisering er viktig for å utvikle en matematisk forståelse.

Hovedtankegangen bak dette programmet er altså å visualisere mengder på en slik måte at de kan oppfattes ved ett blikk, uten å måtte telle. Dette skal føre til at barna danner visuelle bilder av mengder mentalt, uten å ha det i form av konkreter foran seg. Gjennom å jobbe aktivt med konkretene beskrevet ovenfor, skal elevene overføre disse bildene til rene mentale bilder; fra det konrete til det abstrakte. Målet er at elevene skal utvikle visuelle strategier for å lære matematiske fakta. Programmet legger mest vekt på forståelse og problemløsning (Cotter, 2011c).



Figur 3. Fra RightStart-materialet: kulerammen Al abacus og ispinner brukt for å illusterere forskjellige mengder.

Fingertall: talloppfatning uten å telle. Gjennom sitt arbeid som spesialpedagog oppdaget Dagmar Neuman hvordan hun og elevene snakket ulike språk når de snakket om matematikk. De brukte samme regneord og gjorde det samme da de regnet oppgaver, men det ble tydelig at forståelsen bak var forskjellig. Iløpet av sine mange år som speisallærer fikk Neuman innsikt i hvor viktig mengder opp til ti er som byggestener i desimaltallsystemet. En forutsetning for å løse pluss- og minusoppgaver i tallområdet 1-10 uten å "dobbeltregne" er å inneha en fleksibel tankegang ved subtraksjonsoppgaver. En fleksibel tankegang vil si å enten tenke fremover eller å tenke bakover, avhengig av hva som er mest hensiktsmessig (Neuman, 1993). Neuman sier at dersom en elev lærer seg alle del-del-helhetsrelasjonene innen tallområdet 1-10, så er det uproblematisk å lære henne addisjon og subtraksjon over tallområdet ti, og å videre lære dem multiplisering og dividering. Hovedutfordringen for elever med matematikkvansker er nettopp å se hvordan mengdene opp til ti består av to mengder og variasjonene av disse. Elever som har en funksjonell mengdeforståelse for mengder opp til ti, og umiddelbart kan forestille seg de ti første tallenes 25 kombinasjoner (kombinasjonene for mengden 7 er 6+1, 5+2, 4+3), har den kunnskapen som trengs for å fylle ut eller ta bort fra tiermengden. Denne funksjonelle tallforståelsen for tallområdet 1-10 gjør elevene beredt når de møter oppgaver med et større tallområde (Neuman, 1993).

Til å begynne med bruker barn som regler fingrene for å regne addisjons- og subtraksjonsoppgaver ureflektert og spontant. Neuman beskriver i sin bok "Räknefärdighetens rötter" (Neuman, 1993) hvordan fingrene kan brukes slik at mengdene blir representert. Hun sier at barn må oppleve fingrene på samme måte som romertall. Mengden sju skrives med romertall V ll. Fingrene skal representere mengden sju på samme måte: en hel venstre hand (mengden fem) og to fingre på høyre hand (mengden to). Neuman kaller mengden fem representert ved en hel hand, den "udelte handen". Det er viktig å skape en idé om denne udelte handen hos barna fordi dette gjør det mulig å se hvordan mengden fem inngår i større mengder. Å bruke fingertall har flere fordeler og overlegent andre "tallbilder". I tillegg til at hendene kan ses umiddelbart (og dermed enkelt kan visualisere mengdene enkelt) så kjenner man også fingrene fysisk. Neuman sier at telling generelt skal unngås (Neuman, 1993).

Problemstilling med grunnlag i teorien

Som nevnt ønsker jeg å finne metoder som kan øke tallforstålsen hos noen elever i tredje klasse. Jeg har presentert teori om to ulike "veier" til tallforståelse (Brissiaud, 1992; Tall, 2013) og deretter verktøy som er utformet slik at de støtter disse. Med dette som grunnlag vil jeg se på følgende problemstilling:

> *Kan et fokus på strukturerte mengder, over en periode på ti timer i løpet av fem uker, øke tallforståelsen hos elever med matematikkvansker i tredje klasse?*

Denne problemstillingen danner grunnlaget for det metodiske aspektet som blir presentert i neste kapittel.

Metode

I dette kapittelet vil det metodiske aspektet ved denne studien bli presentert. Metodene danner rammene for hvordan studien blir utført. De metodiske valgene ble tatt på grunnlag av problemstillingen. Dette tilsier at en kvalitativ tilnærming vil være mest naturlig. For å kunne si noe om hvorvidt det har skjedd en endring med tanke på å øke tallforståelsen velger jeg å bruke et kvasi-eksperimentelt design, med en pretest, intervensjon og posttest. En endring vil kunne vise seg ved å sammenligne pre- og posttesten. Jeg vil først beskrive innholdet i prosjektet. Deretter vil jeg gjøre rede for de metodiske valgene som ble tatt. Jeg vil også reflektere over etiske betraktninger jeg som forsker må være bevisst.

Beskrivelse av prosjektet

Rektor ved en barneskole i Midt-Norge ble kontaktet for å få tillatelse til å ta ut noen elever til denne studien. De tre elevene ble valgt ut av de to klasseforstanderne for tredje klasse på grunnlag av gitte kriterier. Disse var at elevene bruker enkle og få tellestrategier når de løser pluss- og minusoppgaver, bruker lang tid på å løse oppgavene og henger etter de andre i klassen. Det var også et krav at de ikke har adferdsvansker som påvirker mulighetene for å få til en god gruppedynamikk, og at deres tallforståelse var ganske lik. På grunnlag av disse kriteriene valgte de to lærerne ut tre aktuelle elever. Det ble sendt ut et skriv til elevenes foresatte (se Vedlegg A), slik at de kunne samtykke til at deres barn deltok i studien. Jeg ønsket å filme alle møtene med elevene, og dette spesielt måtte de foresatte gi tillatelse til. Alle de tre utvalgte elevenes foresatte ga sitt informerte samtykke.

For å sikre at elevenes identiteter forblir anonyme har de i denne oppgaven fått fiktive navn. "Ida" har pensum for andre klasse i matematikk, og lærer mente hun passet i forhold til kriteriene. De to andre jentene har pensumbøker for tredje klasse, men de bruker lang tid på å løse oppgavene og bruker enkle tellestrategier. Disse to velger vi å kalle "Mia" og "Malin". Tredje klasse ved denne skolen er delt i to grupper med hver sin klasseforstander. Ida og Malin går i en gruppe, og Mia går i den andre. De har likevel noen fag sammen, og alle tre kjente hverandre fra før.

Prosjektet er tredelt:

1. Pretest (kartleggingssamtale).
2. Ti gruppemøter.
3. Posttest.

1. Pretest (kartleggingssamtaler og strategikartlegging). Prosjektet begynte med et intervju/samtale med de tre elvene hver for seg. Samtalene hadde en varighet på 20-30 minutter. Disse møtene ble filmet i tillegg til notater som jeg gjorde underveis. Før vi begynte forklarte jeg hvorfor det stod et kamera der, og jeg presiserte at det kun var jeg som skulle se på opptakene slik at jeg ikke skulle glemme noe. Dette ga alle elevene uttrykk for at var greit. Etter et par minutter virket det som at de hadde glemt at kameraet var der. Møtene kan hovedsaklig beskrives som semi-strukturerte intervju. Dette var første gang jeg traff elevene. Det var derfor viktig å stille spørsmål som gjorde elevene trygge i situasjonen, samt at jeg fikk god innsikt i deres talloppfatning. Før jeg begynte å stille elevene spørsmål forklarte jeg kort hva prosjektet går ut på og hvem jeg er. Jeg presiserte at jeg var mest interessert i å høre hvordan de tenker når de løser ulike matematikkoppgaver, og at de ikke må være redd for å svare galt. Elevene ble også forklart at de skulle være med i en gruppe om kort tid hvor jeg skal hjelpe dem med å forstå matematikk bedre. Jeg oppmuntret elevene til å være glade for å få være med i en slik gruppe, da jeg har stor tro på at de vil få et bedre forhold til matematikkfaget etter dette.

Før kartleggingen av elevenes talloppfatning stilte jeg noen spørsmål hvor hensikten var å fange elevenes affektive forhold til matematikkfaget. Følgende spørsmål ble stilt:

- Hvordan syns du det er å ha matematikk på skolen?
- Er det noe du syns er vanskelig? Hva syns du er lett eller gøy å jobbe med?
- Bruker du å samarbeide med andre når du løser matteoppgaver, eller jobber du mest alene?
- Er det greit å snakke med foreldrene dine om det som er vanskelig i matematikken? Får du hjelp til å gjøre leksene?
- Tror du at du vil like matematikk bedre hvis det var lettere å finne ut hva svaret er på ulike oppgaver?
- Til elev med 2. klassepensum: Hvordan syns du det er å ha andre bøker enn de andre i matematikktimene? Vil du helst jobbe med det samme som de andre eller er det greit?

Etter dette affektive fokuset på matematikken gikk samtalen over til kartlegging av tallforståelsen. Med grunnlag i Ostad sin bok om strategier og strategibruk hos elever med matematikkvansker gikk kartleggingen ut på å løse pluss- og minusoppgaver. Dette skjedde ved at jeg holdt opp kort hvor det stod ulike regnestykker. Det ble tatt utgangspunkt i elleve oppgaver med økende tallområde. Det ble tatt utgangspunkt i følgende oppgaver:

- Tallområde 0-10: 3+2, 5-2, 4+5, 8+2, 9-5, 10-3
- Tallområde 10-15: 8+4, 7+6, 11-8, 14-5
- Tallområde 15-20: 8+9, 16-9.

Med et par unntak fikk alle de samme oppgavene. Eleven ble spurt om å “tenke høyt”, og jeg observerte hvilke strategier hun brukte for å komme frem til et svar. Det var viktig å få tak i nøyaktig hvordan eleven tenkte og hvilke eventuelle konkreter eller hjelpemidler hun måtte bruke. Det lå klart blyant, papir og klosser som eleven kunne bruke som hjelpemiddel.

2. Ti gruppemøter (intervensjon). På grunnlag av kartleggingssamtalene ble det utarbeidet et gruppebasert pedagogisk opplegg hvor målet var å forbedre tallforståelsen hos de tre elevene. Det ble gjennomført ti gruppemøter som varte mellom 45 og 60 minutter hver gang. Over en periode på fem uker møttes gruppen to ganger i uken, og møtene begynte kl.08.45 hver gang. Første møte var 16.10.2013 og det siste var 13.11.2013. Lærerne reserverte et grupperom på skolen som ble brukt alle gangene. Dette var et rolig rom med få forstyrrelser. Gruppen satt rundt et bord slik at alle kunne se og høre hverandre godt. Alle møtene ble filmet.

Gruppemøtene hadde opplæringsmål som var bestemt på forhånd. Oppgavene tok hovedsaklig utgangspunkt i pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-20, hvor ulikt materiale ble brukt for å hjelpe elevene til å få innsikt i strukturene i mengdene innen dette tallområdet. Nedenfor presenterer jeg innholdet i gruppemøtene i tre deler. Begrunnelsen for denne tredelingen er hvilket tallområde de omfatter. Dette opplegget tok utgangspunkt i teorier beskrevet ovenfor (Atkinson et al., 2005; Cotter, 2001; Neuman, 1993). De fleste oppgavene er hentet fra oppgavekortene som fulgte med sett 1 fra Numicon (Atkinson et al., 2005). Disse oppgavene vil bli merket med "Numicon" under. Oppgavene som er hentet fra "RightStart Mathematics- Kindergarten lessons" (Cotter, 2001) vil bli merket med "RightStart". På samme måte vil oppgaver og idéer hentet fra Dagmar Neuman sin bok (Neuman, 1993) bli merktet med "Neuman". Noen av oppgavene er videreføringer som jeg selv har utviklet basert på teoriene jeg har beskrevet. Disse merkes med "videreføring av...".

Gruppemøte 1. Det første gruppemøtet tok utgangspunkt i følgende opplæringsmål:

> *Elevene skal kunne dele opp mengder opp til fem i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier.*

Følgende materiale ble brukt: tallbrikkene 1-5, kulerammen Al Abacus, ispinner, spinner med tallene 1-5, plugger, Numicon grunnbrett og en "følepose". Til å begynne med jobbet vi med forskjellige sanser for å oppleve antall mellom 1 og 5; for eksempel å prikke en til fem ganger på ryggen (eleven skal si hvor mange prikk det var), å klappe 1-5 ganger i raskt tempo, å føle seg frem til riktig tallbrikke uten å se, og å se 1-5 fingre i to sekunder for deretter å gjengi antallet med ulike konkreter (videreføring av Numicon). I tillegg ble disse oppgavene gitt:

- Elevene brukte en spinner med tallene 1-5 for å få et tall. Elevene skulle finne to forskjellige tallbrikker som tilsammen ble det tallet de fikk (videreføring av Numicon).
- Gruppa valgte en tallbrikke fra 2-5 og fylte hullene med plugger. En og en elev

valgte minst to andre tallbrikker (1-5) for å dekke hele grunnbrikken. Tallbrikkene 5 og 4 blir valgt, og elevene lager ett lag hver per tallbrikke (Numicon).

- Jeg la kort med tallene 1-5 på en rekke. En elev la så den tilhørende tallbrikken over hvert tall, og elevene fylte tallbrikkene med plugger i alle hullene. Elevene fikk deretter i oppgave å ta bort en av pluggene på en tallbrikke, og si hvor mange som var igjen (Numicon).
- Jeg la tallbrikkene 2-5 i posen. En elev ristet posen, en annen trakk en tilfeldig brikke fra posen med øynene igjen. Eleven tok brikken bak ryggen og kjente etter hvilken tallbrikke det var. Jeg spurte eleven hva tallbrikken minus en, to eller tre var (Videreføring av Numicon og RightStart).
- Mot slutten skulle elevene kun bruke hodet for å finne hvilke to delmengder mengder opp til fem bestod i.

Gruppemøte 2-6. Jeg velger å presentere gruppemøtene to til seks samlet fordi de hadde de samme opplæringsmålene. Disse var:

1. *Elevene skal kunne dele mengder opp til ti i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier.*
2. *Elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier (det tredje strateginivået hos Carpenter og Moser) for å løse pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-10.*

Ved disse gruppemøtene ble følgende materiale brukt: tallbrikkene 1-10, Al Abacus, ispinner, to spinnere med tallene 1-10, plugger, Numicon grunnbrett og en "følepose".

Elevene fortsatte å jobbe med ulike sanser for å oppfatte antall. Forskjellen var at oppgavene nå omfattet tallområde 0-10. I tillegg ble det satt fokus på å gjenkjenne mengden fem og bygge videre på den (RightStart). Ved prikke- og klappeoppgaven med et større antall enn fem (elevene skulle gjenkjenne antall klapp eller prikk gjort i raskt tempo), ble det lagt inn en liten pause etter fem klapp eller fem prikk (videreføring av RightStart). En vektlegging på mengden fem ble også gjort ved bruk av ispinner, slik det ble forklart under RightStart Mathematics i teoridelen. For at elevene skulle nå opplæringsmålene ble følgende oppgaver gitt i løpet av gruppemøte 2-6:

- Tallbrikkene 6-10 ble gjemt under bordet. Elevene fikk se en av tallbrikkene i noen sekunder, og fikk beskjed om å lage mønsteret på grunnplata med pluggene. Pluggene skulle passe med hullene i tallbrikken (Numicon).
- Mønsteret av tallbrikkene 5-9 med plugger ble laget på grunnplata. Elevene forklarte hva de så. En og en elev så vekk imens jeg tok vekk en av pluggene på ett av tallmønstrene. Eleven skulle deretter finne ut hvilket tallmønster som manglet en brikke (Numicon).

- Tallbrikkene 1-10, med unntak av en, lå i rekkefølge. Elevene fikk i oppgave å se hvilken tallbrikke som manglet (Numicon).
- Elevene fikk forskjellige konkreter (kuleramme, tallbrikker eller ispinner). Jeg klappet et antall, og elevene skulle finne tilsvarende konkret(er). Det ble poengtert at elevene skulle flytte antallet som en helhet med kulerammen (videreføring av RightStart).
- Elevene fikk en innføring i fingertall, slik det ble beskrevet i teoridelen, i det tredje gruppemøtet. Elevene fikk se ulike tallbrikker og skulle vise tilsvarende antall med fingertall. Kulerammen og klapping ble også brukt for å øve på fingertall (videreføring av Neuman, RightStart og Numicon).
- Elevene fikk utdelt hver sine konkreter (kulerammen, tallfingre eller ispinner). Elevene fikk addisjonsoppgaver som de skulle regne ut ved å bruke konkretene. Konkretene gikk på rundgang slik at alle fikk prøve alt (videreføring av Neuman og RightStart).
- Tallbrikkene 3-10 (en tallbrikke om gangen) ble fylt med plugger og festet på grunnplaten. En og en elev valgte to tallbrikker som ble denne tilsammen og festet disse på (Numicon). Elevene viste så addisjonsoppgaven de to tallbrikkene utgjorde med fingertall (utvidelse av Neuman).
- Elevene la tallbrikkene 1-10 i riktig rekkefølge med tilsvarende tallkort under. Begge spinnerne (med tallene 1-5 og 6-10) ble lagt frem og elevene snurret begge en gang hver. De tok deretter tallbrikkene som tilsvarte de to tallene de snurret, og la den minste oppå den største. Elevene skulle finne ut hva forskjellen mellom de to var (Numicon).
- Elevene regnet ulike pluss- og minusoppgaver ved å bruke fingertall, ispinner og kulerammen (utvidelse av Neuman og RightStart).
- To forskjellige tallbrikker ble gjemt under bordet. Elevene fikk beskjed om hva summen av tallbrikkene var (innen tallområde 0-10). Elevene kom deretter med forslag til hvilke tallbrikker det kunne være. Det ble oppfordret til å bruke fingertall som hjelpemiddel (utvidelse av Neuman og Numicon).
- Jeg flyttet et antall kuler på øverste rad på kulerammen fra høyre mot venstre, og skjulte disse med handen. Elevene fikk kun se kulene som var igjen på høyre side, og skulle utifra det finne ut hvor mange kuler jeg skjulte (utvidelse av Neuman og RightStart).
- Elevene fikk pluss- og minusoppgaver innen tallområdet 0-10 som de skulle løse uten bruk av konkreter.

Gruppemøter 7-10. De fire siste gruppemøtene hadde følgende to opplæringsmål:

1. *Elevene skal kunne dele opp mengder opp til tjue i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier.*

2. *Elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier (det tredje strateginivået hos Carpenter og Moser) for å løse pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-20.*

Elevene jobbet med følgende oppgaver gjennom disse gruppemøtene:

- Fem tierbrikker ble lagt på en rekke, med tallbrikkene 1-5 over slik at de dannet mengdene 11-15. Elevene fikk i oppgave å beskrive disse mengdene (utvidelse av Numicon).
- Elevene viste mengdene 11-20 med ispinner (hvor femmermengdene var tydeliggjort slik beskrevet tidligere), kulerammen og ulike tallbrikker. Gruppen beskrev innholdet i mengdene som ble tydeliggjort gjennom konkretene (f. eks. at mengden 12 består av to femmere og en toer eller en tier og en toer) (utvidelse av RightStart og Numicon).
- Prikkeleken og klappeleken (som beskrevet tidligere) ble gjennomført med tallområdet over 10. Det ble lagt inn en pause etter fem, ti og femten prikk/klapp (utvidelse av RightStart og Numicon).
- Jeg flyttet et antall kuler på øverste rad på kulerammen fra høyre mot venstre, og skjulte disse med handen. Elevene fikk kun se kulene som var igjen på høyre side, og skulle utifra det finne ut hvor mange kuler jeg skjulte (utvidelse av Neuman og RightStart).
- Elevene brukte kulerammen for å løse addisjonsoppgaver i tallområdet over ti. Her var fokuset på å "fylle tieren" (RightStart).
- Jeg la tallbrikkene 2-10 i "føleposen". Elevene trakk en tilfeldig tallbrikke, og skulle deretter finne ut hvilken tallbrikke som manglet slik at de tilsammen ble 12 (utvidelse av Numicon).
- Elevene valgte tilfeldige tall mellom 10 og 20. Jeg la to tallbrikker som tilsammen ble det tallet de hadde valgt, i hver sin pose. Elevene skulle deretter komme med forslag til hvilke tallbrikker det kunne være. Denne oppgaven dekket også o*pplæringsmål tre* fordi elevene også løste denne uten å bruke konkreter (utvidelse av Neuman og Numicon).
- Elevene ble oppfordret til å ta utgangspunkt i mengden ti når de skulle løse pluss- og minusoppgaver med tallområdet over ti. I gruppemøte åtte fikk elevene i tillegg oppgaven å si hva avstanden fra ulike tall (mellom en og ti) var til fem. Dette skulle de gjøre ved å kun bruke mentale strategier (utvidelse av RightStart).

3. Post-test (strategikartlegging). Tre uker etter siste gruppemøte møtte jeg elevene en og en for å gjennomføre en post-test (04.12.2013). Dette var for å se om elevene viste en utvikling sammenlignet med pre-testen (kartleggingssamtalen). De samme pluss- og minusoppgavene ble gitt på lik måte (3+2, 5-2, 4+5, 8+2, 9-5, 10-3, 8+4, 7+6, 11-8, 8+9, 14-5, 16-9). Elevene ble oppfordret til å si svaret med en gang dersom de automatisk visste det. Hvis de måtte bruke tid på å tenke, eller bruke andre hjelpemidler for å finne svaret, skulle de forsøke å forklare høyt hva de gjorde eller hvordan de tenkte. Til slutt snakket vi om hvordan elevene hadde opplevd hele prosessen.

Kvalitativ forskningsmetode

Denne studien tar utgangspunkt i kvalitativ forskningsmetode, hvor både intervju og gjensidig samtale/dialog blir brukt. Kvalitativ forskning vil si å prøve å lage et helhetlig og komplekst bilde av en gruppe mennesker som inngår i et definert forskningsfokus. Det er viktig å få tak i perspektivene til individene som det forskes på (Postholm, 2010).

Målet med denne studien er at elevene skal utvikle sin tallforståelse. Jeg har valgt et kvasi-eksperimentelt design hvor elevenes tallforståelse blir testet før det pedagogiske opplegget blir gjennomført. Forskningsprosessen avsluttes ved at tallforståelsen blir testet på nytt i etterkant av det pedagogiske opplegget.

Kvasi- eksperimentelt design

Kristen Ringdal (2009) skiller mellom ekte eksperiment og kvasi- eksperiment. Et ekte eksperiment har en eksperimentgruppe og en kontrollgruppe. Utvalget (f. eks. noen tredjeklassinger) trekkes tilfeldig fra populasjonen (alle tredjeklassinger i Norge); alle tredjeklassinger har like stor sjanse for å bli trukket ut. Utvalget blir deretter tilfeldig fordelt i en eksperimentgruppe og en kontrollgruppe. Eksperimentgruppen blir utsatt for en intervensjon (f. eks. et pedagogisk opplegg for å utvikle tallforståelsen), og kontrollgruppen fortsetter som før (f. eks. følger ordinær matematikkundervisning). Effekten av intervensjonen blir deretter testet ved at begge gruppene blir sammenlignet ved en felles posttest (f. eks. hvordan de tenker når de løser pluss- og minusoppgaver). Et ekte eksperiment kan også innebære en pretest (de samme oppgavene som blir gitt i posttesten) (Ringdal, 2009).

Studien presentert i denne masteroppgaven er et kvasi-eksperiment. I motsetning til et ekte eksperiment er utvalget i et kvasi-eksperiment ikke tilfeldig valgt (Ringdal, 2009). Min studie har i tillegg kun en eksperimentgruppe, og ingen kontrollgruppe slik et ekte eksperiment skal ha. Siden det kun er en eksperimentgruppe, vil det være nødvendig å foreta en pretest og en posttest i tillegg til intervensjonen. Pretesten er grunnlaget for å dra slutninger om hvilken effekt intervensjonen har hatt. For å kunne si noe om endringer må vi vite noe om utgangspunktet. Hvilke muligheter og begrensninger jeg som forsker har for å dra slutninger vil jeg beskrive nedenfor. Kritisk realisme danner den filosofiske grunnmuren for moderne kvalitativ forskning, og legger føringer for muligheter og begrensninger.

Kritisk realisme. Det finnes ulike syn på kunnskap. Når det gjelder samfunnsforskningen i dag har mange et syn på kunnskap som er basert på kritisk realisme. Dette er en filosofi som sier at det ikke er mulig for forskeren å oppdage eksakt og fullt ut reell kunnskap om det fenomenet som studeres. Den kunnskapet som forskeren sitter igjen med vil være en kombinasjon av erfaringer forskeren tar med seg i møte med det nye fenomenet og det objektivt reelle som eksisterer dersom forskerens tilstedeværelse elimineres. Som forskere med kritisk realisme som et ideologisk fundament kan vi studere ulike fenomen så lenge vi er bevisste det usikkerhetsmomentet som ligger i oss selv. Ved å ta høyde for alle usikkerhetsmomenter som truer en ekte tolkning av fenomenet kan forskeren slik styrke gyldigheten av slutningene som tas (Lund & Haugen, 2006).

Kausalitet. Studien presentert her er som nevnt et kvasi-eksperiment. Dette innebærer å se på hvilken effekt intervensjonen (et pedagogisk opplegg med fokus på mengdeforståelse) har på utvalget. Å finne årsaken til variasjoner ved et fenomen (f. eks. tallforståelse) er helt essensielt innen samfunnsforskningen. Begrepet kausalitet innebærer å finne varibelen(e) som endrer eller påvirker det fenomenet vi studerer. Kausale relasjoner (årsaksforhold) vil si at en variabel (årsak) skaper en endring i et gitt fenomen (effekt). En slik kunnskap om kausale relasjoner vil gi mer og dypere forståelse enn dersom fenomentet studeres uten øye for årsakssammenhenger. Tilnærmet sikker kunnskap om kausalitet har også den fordelen at forskeren har mulighet til å påvirke fenomenet i ønsket retning ved å manipulere den aktuelle variabelen. Grunnet kritisk realisme som fundament for slik forskning kan ikke årsaksforholdet observeres direkte. Det er kun en sammenheng i tid og rom mellom årsak og effekt vi kan registrere (Lund & Haugen, 2006). Shadish, Cook og Campbell i (Kleven, 2008) beskriver kausalitet som observeres i eksperimentelle design for "molar causation". Dette handler om at beskrivelsen av hvilken effekt en intervensjon har på en gruppe individer må beskrives som en helhetlig "pakke". Det er ikke mulig å gi en detaljert beskrivelse av hvilken del i intervensjonen som er årsaken til en konkret endring. Vi kan kun observere den helhetlige endringen hvor det er flere mulige forklaringer. I kvasi-eksperimentet beskrevet i dette prosjektet må man se både på den mulige effekten av det pedagogiske opplegget og at de tre elevene er satt sammen i en gruppe som gjensidig påvirker hverandre. Ulike typer slutninger blir beskrevet nedenfor. Forskning med fokuset beskrevet her kalles kausal forskning, som er en motsetning til beskrivende eller ikke-kausal forskning (Lund & Haugen, 2006).

Dataanalyse

I dette avsnittet vil jeg gi en beskrivelse av prosessen med å komme frem til resultatene som blir presentert i neste kapittel. Jeg valgte å filme alle møtene jeg hadde med elevene. Dette resulterte i omtrent 12 timer med film (inkludert pre- og posttestene). Filmklippene ble sett og transkribert samme dag som de ble filmet. Når det gjelder pre- og posttestene var hovedpoenget å få frem hvilke strategier elevene brukte for å løse oppgavene, og det var viktig at elevene beskrev hvordan de tenkte. Dette fokuset på hvilke strategier de brukte var hovedfokus for transkriberingen. Jeg skrev ned nøyaktig hva elevene gjorde (hvilke fingre de brukte, andre bevegelser o.l) og hva de sa. Utifra dette kunne jeg kategorisere strategibruken i henhold til Carpenter og Moser sin hierarkiske inndeling (i Frostad, 2005). For å enkelt kunne sammenligne hvilke strategier elevene brukte på de samme oppgavene ved pre- og posttesten har jeg valgt å presentere transkriberingen av pre- og posttesten i form av tabeller som viser hvilke strategier som ble brukt.

De ti gruppemøtene tok utgangspunkt i opplæringsmål som var bestemt på forhånd. Transkriberingen ble gjort med dette som bakteppe, og jeg hadde hovedfokus på uttalelser fra elevene om hvordan de tenkte for å løse ulike oppgaver de fikk som var koblet opp mot opplæringsmålene. Til hvert gruppemøte hadde jeg nøye planlagt hvilke oppgaver/aktiviteter vi skulle gjøre i hvilken rekkefølge, og hvilket materiell vi skulle bruke. Transkriberingen hadde form av at oppgavene dannet "overskrifter", og uttalelsene og handlingene til hver enkelt elev ble underpunktene (se Vedlegg B). Jeg skrev ned nøyaktig hva elevene sa og gjorde for å dokumentere hvordan hver enkelt elev tenkte. Etter at alle gruppetimene var ferdig transkribert valgte jeg å fokusere på hva hver enkelt elev hadde gjort og uttalt, slik at de ble sett på som tre "case". For å komme frem til hvilke resultater som skulle trekkes ut tok jeg utgangspunkt i opplæringsmålene og plukket ut uttalelser og aktiviteter som hver enkelt elev gjorde som jeg vurderte som indikatorer på disse opplæringsmålene. Begrunnelsen for en slik tredeling i ulike case er at jeg ønsker å se på om det pedagogiske opplegget har en effekt på elevene. Dermed mener jeg at det mest naturlige er å fokusere på hver enkelt elevs utvikling over denne perioden.

Kvalitetskrav til forskningen. Det har vært viktig å sikre at forskningsprosjektet er kvalitetssikret på best mulig måte. Forskning som oppfattes som en gjenspeiling av virkeligheten kjennetegnes ved å ha høy kvalitet. I denne sammenheng tilsvarer høy kvalitet stor grad av sikkerhet rundt årsakssammenhenger; validiteten (sikkerheten) om slike slutninger (konklusjoner). For å sikre høy kvalitetsgrad i mitt forskningsprosjekt har jeg tatt utgangspunkt i Campbell med medarbeidere (Cook og Campbell 1979; Shadish, Cook og Campbell 2002, i Kleven 2008; Lund og Haugen 2006) sitt system som skal være med på å sikre kvaliteten i forskningen. Dette systemet er basert på kritisk realisme, og består av fire ulike validiteter med tilsvarende slutninger. De ulike validitetene innebærer trusler (feilkilder) som truer deres sikkerhet, og dermed generaliserbarheten. Det vil ikke alltid være relevant å bruke alle validitetene uansett studie, det kommer an på forskningsspørsmålet/problemstillingen og hvilket formål forskningen har. Studier av en kausal eller ikke-kausal art vil kreve ulike slutningstyper og validitetskrav. Praktisk rettede studier (anvendt forskning) og studier rettet mot å utvikle ny teori (grunnforskning) vil også ha ulike kvalitetskrav. De ulike validitetstypene er statistisk validitet, begrepsvaliditet, indre validitet og ytre validitet (Kleven, 2008; Lund & Haugen, 2006). Jeg vil nå presentere de ulike validitetstypene og diskutere relevansen i forhold til mitt forskningsprosjekt.

Statistisk validitet. Dette handler om hvorvidt resultatene er systematiske og ikke tilfeldige, og at effekten er av en viss størrelse. Statistisk validitet handler om hvor sikkert vi kan gjøre slutninger om årsakssammenhenger. Siden det ikke er blitt gjort noen statistiske analyser i forbindelse med mitt prosjekt blir det feil å snakke om statistisk validering (Kleven, 2008). Det er allikevel relevant å diskutere om endringene (ved å sammenligne pre- og posttesten) i hvordan elevene tenker og løser ulike oppgaver kan sies å være av en viss størrelsesorden. Som fagperson med mye kunnskap om tallforståelse (samt hvordan denne kan måles og utvikles) er det mulig å gjøre vurderinger i forhold til grad av endring hos elevene.

Indre validitet. Fortolkninger av årsaksforhold er knyttet til den indre validiteten. Dersom vi med sikkerhet kan dra en slutning om at en variabel er eneste årsak til endring, så har forskningen høy grad av indre validitet (Kleven, 2008). I mitt prosjekt ønsket jeg å utarbeide et pedagogisk opplegg som skal øke tallforståelsen hos elever med matematikkvansker. Eventuelle endringer måles blant annet ved å sammenligne pre- og posttestene. Det er flere trusler mot den indre validiteten som må tas hensyn til. Elevene fikk ordinær undervisning samtidig som de var med på dette prosjektet. Det er derfor ikke mulig å garantere at utviklingen kun skyldes mitt pedagogiske opplegg. I tillegg kan tid i seg selv være en faktor som kan føre til endring ved at elevene gjør andre erfaringer.

Begrepsvaliditet. Avgjørelser i forhold til hvilke indikatorer som skal representere gitte begreper er knyttet til begrepsvaliditet. Trusler mot begrepsvaliditeten er å bruke indikatorer som i virkeligheten ikke er med på å måle det begrepet vi ønsker å måle (Kleven, 2008). For å sikre begrepsvaliditeten i forhold til mitt prosjekt har jeg satt meg godt inn i teori og forskning om hva tallforståelse er og hvordan denne kan utvikles. Jeg ønsker å si noe om et fokus på strukturerte mengder kan endre tenkningen til elevene. Tenkning i seg selv er det ikke mulig å observere direkte. Jeg vil likevel argumentere for at en beskrivelse av strategibruken, og mønsteret i dette, er en god indikator på kvaliteten på tenkningen. Samtaler med min veileder har også vært en viktig del i prosessen for å sikre forståelsen og tolkningen av teori. Indikatorene er blitt valgt på grunnlag av dette.

Ytre validitet. Dette handler om gyldigheten av å overføre resultater fra et utvalg til å gjelde andre utvalg i populasjonen eller hele populasjonen. Et optimalt mål for kausal forskning ville vært å kunne generalisere en årsakssammenheng i utvalget til å gjelde hele populasjonen. Det vil si at man kan anta at en årsak som forårsaket en endring (effekt) på det studerte fenomenet i utvalget, også høyst sannsynlig vil gjøre det samme i hele populasjonen (Kleven, 2008). Spørsmålet jeg som forsker må stille meg er om det er mulig å generalisere resultatene som de tre elevene i tredje klasse viser til å gjelde alle tredjeklassinger med tilsvarende utgangspunkt. Det første motargumentet er at dette er et lite utvalg. Dette lille utvalget kan ikke representere alle elevene i populasjonen i forhold til egenskaper. Samtidig er mitt prosjekt godt teoretisk forankret, hvor tidligere forskning har vist at disse metodene har hatt en positiv effekt.

Etiske refleksjoner og forskerrollen

Som forsker i denne prosessen må jeg forholde meg til ulike retningslinjer og krav, slik at alle som omfattes blir behandlet på en verdig og riktig måte. På nettstedet etikkom.no finnes informasjon om tre nasjonale forskningsetiske komitéer. Studien som beskrives i denne oppgaven omfattes av *"Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora"* (NESH) (NESH, u.d.). Det er en grunnleggende respekt for menneskeverdet som skal ligge til grunn for all forskning. NESH stiller flere krav til forskeren som skal verne om personene. I forhold til mitt prosjekt ønsker jeg å trekke frem følgende: *"krav om å informere dem som utforskes", "krav om informert og fritt samtykke", "konsesjon og meldeplikt"* og *"barns krav på beskyttelse"*. Min studie omfatter som nevnt tre elever i tredje klasse på barneskolen. Det er derfor et krav å informere de foresatte så godt som mulig slik at de kan gi sitt informerte samtykke. Jeg sendte derfor ut et skriv (se Vedlegg A) slik at disse kravene (god informasjon og muligheten til å gi sitt samtykke) ble oppfylt. Jeg ønsket å bruke videokamera for å dokumentere alt. Dette er lagret informasjon som direkte identifiserer elevene, noe som stilte krav om å søke om tillatelse til NSD (personvernombudet). Denne søknaden ble innvilget, se `http://pvo.nsd.no/prosjekt/35337`.

Det er særlig viktig å være klar over hvilken rolle og hvilket ansvar jeg har som forsker i møte med barn. Jeg har hele tiden hatt fokus på at elevene skal føle seg trygge i situasjonen. Min vurdering er at elevene har opplevd trygghet og at de i tillegg syns det har vært gøy å være med. De utvalgte elevene blir beskrevet som svake i matematikk. Det har vært viktig at elevene ikke er klar over at dette er grunnen til at de har blitt valgt ut. Fokuset har hele tiden vært at elevene liker oppgavene vi har holdt på med, og at de ønsker å være med.

Resultater og diskusjon

Dette kapitelet vil være delt inn i tre deler; en del for hver av elevene. Resultatene fra kartleggingssamtalen, de ti gruppemøtene og posttesten vil bli beskrevet først. Deretter vil jeg diskutere disse i lys av teori. På mange måter ville det vært hensiktsmessig å presentere resultatene fra gruppemøtene samlet for alle elevene. Jeg velger likevel denne inndelingen fordi det er utviklingen til hver enkelt elev som er fokus i min oppgave. All transkribering av gruppemøte 8 er lagt til som vedlegg slik at det er mulig å få et mer helhetlig bilde av hvordan gruppemøtene foregikk (se Vedlegg B).

Case 1: "Ida"

Ida er ei jente i tredje klasse som har pensum for andre klasse i matematikk. Lærer sier at hun bruker lang tid på å løse enkle pluss- og minusoppgaver. Jeg opplevde henne som ei positivt innstilt jente. Hun likte gruppemøtene godt, og var ivrig og engasjert. Det var tydelig at hun opplevde gruppemøtene som en trygg ramme. Ida var ikke tilstede under det fjerde gruppemøtet; hun deltok i ni gruppemøter i alt.

Resultater.

1. Kartleggingssamtale.

Spørsmål rundt matematikkfaget generelt. Ida sier at hun liker mattefaget og at hun alltid har gjort det. Da hun blir spurt om hva slags oppgaver hun liker best, så er det oppgaver hvor hun løser enkle addisjonsoppgaver og dermed kan fargelegge det riktige tallet. Hun kommer derimot ikke på noe hun ikke liker å holde på med. Ved spørsmål om hun skulle ønske hun fikk til matte litt bedre, var svaret at hun syns det er greit som det er nå. Ida syns likevel det høres spennende ut å jobbe i en gruppe.

Kartlegging med pluss- og minusoppgaver. Ida bruker fingrene for å telle seg frem til riktig svar på de fleste oppgavene. Svarene hennes er oppsummert i Tabell 1 nedenfor. På alle addisjonsoppgavene bruker hun backupstrategien å telle videre fra det første tallet. Hun bruker da fingrene som hjelpemiddel. Ved f. eks. oppgaven 4+5, tar hun først opp fire fingre på venstre hand samtidig. Deretter teller hun videre fem fingre på høyre hand, hvor hun teller ett og ett tall til hun kommer til ni. Hun kommer frem til riktig svar på alle med unntak av 8+9. Her slutter hun å telle da hun kommer til 13. Da hun blir spurt om å prøve en gang til bruker hun samme strategi, men teller til 14. Her virker det som hun mistet oversikt over hvor mange tall hun har telt.

Ved subtraksjonsoppgavene brukte hun også stort sett fingrene, hvor hun teller ned baklengs fra det første tallet. Ved for eksempel oppgaven 9-5, tar hun først opp ni fingre samtidig, og tar deretter ned en og en finger til hun har tatt ned fem fingre. Hun kommer slik frem til riktig svar. Hun bruker disse strategiene på oppgavene med tallområde opp til ti. Tallområdet over ti er vanskelig. Ved oppgaven 11-8 svarer hun 19 etter å ha telt med fingrene. Jeg understreker at dette er en minusoppgave, men hun klarer allikevel ikke å løse oppgaven på en annen måte enn addisjon.

Tabell 1

Forklaring av forkortelser: N2b: Nivå 2 (tellestrategier): Telle videre fra første

Oppgave	3+2	5-2	8+2	4+5	9-5	10-3	8+4	7+6	11-8	8+9
Strategi	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	Klarer ikke	Klarer ikke

2. Gruppemøter.

Gruppemøte 1. Opplæringsmålet i det første gruppemøtet var *å kunne dele mengder opp til fem i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier.* I tillegg var det viktig å bli kjent med materialet fra Numicon. Ida hadde ingen problemer med å bruke ulike sanser for å oppleve antall mellom en og fem. Hun svarte riktig på alle oppgavene hvor hun f. eks. ble prikket noen ganger på ryggen, eller at jeg klappet fort en til fem ganger. Hun kjente også umiddelbart igjen Numiconbrikkene når hun fikk se de i kun ett sekund.

Noe av det første vi gjør er å beskrive tallbrikkene 1-5. Ida forklarer det hun ser slik: *«Ja, det er en, også, to, også tre, også fire og fem. Eller,* (peker på femmerbrikken og teller ett og ett hull imens hun hvisker) *en, to, tre, fire, fem. Ja det var fem. Jeg var litt usikker på den, trodde det var 6, så måtte jeg sjekke og det var fem.»*

Ida får tallet fire etter å ha brukt spinneren. Hun får i oppgave å komme med forslag til to tallbrikker som tilsammen blir fire: *«Du kan ta en sånn treer og en ener, det blir fire tilsammen».* Hun peker umiddelbart på tallbrikkene som ligger foran henne. Svaret kommer med en gang. Hun skal deretter gjøre det samme med tallet fem, og sier med en gang at det blir en ener og en firer. Hun forklarer hvordan hun tenkte *«Du vet at fire kommer før fem. Derfor tok jeg fire også en ener».* Hun ser ikke på tallbrikkene før hun sier dette.

Mot slutten av timen legges alt materiale bort, og Ida får i oppgave å si to tall som tilsammen blir fem. *"En toer og en treer. Jeg bare visste det med en gang".*

Gruppemøter 2-6. I forhold til det første opplæringsmålet (*elevene skal kunne dele opp mengder opp til ti i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier*) viser Ida følgende resultater:

I det femte gruppemøtet gjemmer jeg to tallbrikker og Ida får høre summen av de. Hun skal komme med forslag til hvilke to det kan være. Ida får mengden 6. Hun legger opp 6 tallfingre med en gang av seg selv, *"Det er en og seks".* Jeg sier hun må komme med et annet forslag. Hun ser på fingrene sine og sier *"to og fire".* Ida får summen 9. Hun legger opp 9 tallfingre og svarer umiddelbart *"fem og fire".* Jeg ber henne prøve igjen, og hun svarer med en gang *"tre og seks".* Hun får den samme oppgaven i gruppemøte seks. Jeg holder tallbrikkene 5 og 3, og sier at det blir 8 tilsammen. Hun legger med en gang opp 8 tallfingre og sier med en gang *"fem og tre".* Jeg sier at det er riktig, og spør om hva annet det kunne vært. Hun ser på fingrene sine og svarer 6 og 2, så 4 og 4. Til slutt får Ida tallet sju, og jeg oppfordrer henne til å finne svaret uten å bruke tallfingre. Hun svarer 5 og 2 etter 2 sekunder. Jeg sier at det er riktig, men at hun må finne et annet forslag. Hun svarer da 4 og 3 med en gang. *"Jeg bare tenkte de tallene med en gang"*.

Det andre opplæringsmålet er at *"elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier for å løse pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-10.* I løpet av gruppemøtene får Ida mange pluss- og minusoppgaver. Hun løser plussoppgaver innen tallområdet 0-10 på følgende måte:

I det femte gruppemøtet får Ida addisjonsoppgaver 2+5. Hun svarer 7 umiddelbart.

I det sjette gruppemøtet får hun får oppgaven 5+4. Etter 3 sekunder svarer hun: *"Det er ni. jeg så for meg hendene i hodet, sånn at jeg hadde to hender med fem der og fire der"*. Hun peker på hendene sine imens hun sier dette. Hun får videre oppgaven 4+6. Hun ser i noen sekunder i luften, så svarer hun 10. 3+6 løser hun ved å legge frem 6 tallfingre først, så 3. Hun svarer 9.

Minusoppgaver løser Ida på følgende måter:

I gruppemøte fem får Ida oppgaven 10-6. Hun legger opp 10 tallfingre, og begynner å telle ned en og en finger fra venstre lillefinger. Jeg stopper henne, og sier at jeg skal vise henne en annen måte. Jeg foreslår at hun kan ta bort 6 fingre med en gang. Hun tar bort hele høyre hand og venstre tommel, og svarer med en gang 4. Hun får deretter oppgaven 9-5. Hun legger opp 9 tallfingre. Hun ser ei stund på hendene sine. Jeg spør hvor mange fingre hun har på ei hand. Hun fjerner dermed hele høyre hand og svarer 4.

I gruppemøte seks får Ida noen minusoppgaver som hun helst skal finne svaret på i hodet. 10-4: Hun ser tre sekunder ut i luften, hun svarer så 6. 6-4: Hun ser tre sekunder ut i luften, og svarer 2. 10-7. Hun ser noen sekunder ut i luften og svarer 2. Jeg sier at det ble nesten riktig. Hun sier deretter 3. 8-5. Hun ser noen sekunder ut i luften. Jeg sier at hun skal se for seg 8 fingre, hun svarer da med en gang 3.

Gruppemøter 7-10. I forhold til det første opplæringsmålet (*elevene skal kunne dele opp mengder opp til tjue i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier*) viser Ida følgende resultater:

Jeg flytter et antall kuler på kulerammen som jeg skjuler. Ida får kun se kulene som er igjen, og skal utifra det finne ut hvor mange jeg skjuler. Jeg flytter fem kuler. Ida legger frem ei hand med en gang. *"Dette var enkelt!"* Jeg spør henne hvordan hun tenkte: *«Du har jo 5 der og 5 der. Det blir jo 10»*. Jeg flytter 6, slik at Ida ser at det er 4 igjen. Hun legger frem 6 fingertall med en gang. *"Jeg bare visste det. Jeg trengte ikke å tenke"*. Jeg flytter 7 slik at hun ser at det er 3 igjen. Hun legger frem ei hand og sier: *"Det er iallefall 5"*. Etter to sekunder legger hun frem 7 fingertall.

I gruppemøte sju snakker vi om mengden 11. Tallbrikkene 1 og 10 ligger sammen på bordet. Ida beskriver hvordan 11 ser ut: *«Ja, det er en firer og en sjuer».* Hun ser nøye på brikkene når hun sier dette.

Vi bygger tårn med tallbrikker og plugger, med mengden 12. Jeg legger tallbrikkene 2-10 i en pose. Elevene trekker en tilfeldig brikke, og skal finne den tallbrikken som blir

12 tilsammen med den brikken de trakk. Ida trekker 7. *"Jeg mangler fem. Jeg visste det fordi i stad så tok jeg femmern og sjuern for å lage tårn."*

I gruppemøte ni ber jeg Ida om å velge et tall mellom 10 og 15. Hun velger 15. Jeg legger to tallbrikker som tilsammen blir 15 i hver sin pose. Elevene skal etter tur komme med forslag til hvilke to tallbrikker som befinner seg i posene. Malin foreslår først at det er 10 og 5. Ida kommer deretter med en gang med forslag om 9 og 5. Dette kommer raskt.

Det andre opplæringsmålet var at *"elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier for å løse pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-20".*

Plussoppgaver:

I gruppemøte åtte skal Ida løse noen oppgaver i hodet. 8+5. Hun tenker i 20 sekunder. Jeg sier at en lur måte å tenke på er å fylle tieren først. Ida sier at svaret er 13 før jeg har snakket ferdig. Jeg holder opp kulerammen og flytter 8 på første linje og 5 på neste. Jeg: *«En måte å se svaret på her er at dere ser at det er to femmere her. Da vet dere at det er 10, også har dere igjen 3 på den åtteren der. 10+3 er 13».* Ida får deretter oppgaven 8+4. *«Det er 12».* Svaret kommer etter 3 sekunder uten å bruke kulerammen. *«Jeg tok 8 fingre inni hodet, også så jeg at det var to igjen til ti. Også to til, da blir det 12.»* 7+7. Hun tenker i noen sekunder. *«Det blir 14».* Hun legger frem 7 tallfingre og viser hvordan det er 3 igjen opp til 10. Så begynner hun å telle en og en oppover fra 10 til fjorten.

I gruppemøte ni får Ida oppgaven 7+6. Hun ser ut i luften i noen sekunder. Jeg foreslår at hun kan legge frem 7 tallfingre, og spør hvor mye hun mangler opp til 10. *"Det er tre opp til ti* (hun ser på fingrene sine mens hun sier dette)*. Blir svaret 13?"* Hun viser ingen tegn til telling når hun sier dette.

Minusoppgaver:

Etter at vi har snakket om mengden 11 (og studert tallbrikkene) i gruppemøte sju får Ida oppgaven 11-2 som hun skal regne ut i hodet. *«11-2? Det er jo ni. Jeg bare visste det med en gang.»*

I gruppemøte åtte får elevene et tall mellom 1 og 10, og skal si hvor mye det er fra det tallet til 5. Ida får tallet 3. Hun svarer 2 med en gang. Hun får deretter tallet 7. Hun ser ei stund ut i luften, og svarer 0. Jeg spør hva 7-5 er. Hun legger opp 7 tallfingre, tar bort hele venstre hand og svarer 2.

I gruppemøte ni legger jeg frem tallbrikkene 10 og 4, og sier av vi skal jobbe med tallet 14. Jeg finner frem tallkortene 1-10 og stokker dem. Elevene trekker et tilfeldig tallkort, og får i oppgave å ta 14 minus det tallet de trakk. Ida trekker 8. Hun ser ut i luften i fem sekunder og sier: *"Det blir seks. Jeg husket at 14-7 var 7, og en mindre blir 6".* Senere i gruppemøte ni får Ida oppgaven 16-3. *"13. Jeg trengte ikke å tenke, jeg bare visste det med en gang."*

I gruppemøte ti får Ida ulike minusoppgaver. Den første er 11-8. *"Hva er elleve for noe?"* spør Ida. Det er tydelig at hun ikke husker betydningen av tallordet elleve. Jeg legger frem tallbrikken 10 og 1. Hun sier med en gang: *«Å ja, det var det ja! Elleve* *minus åtte er to. Eller nei, det er en».* Jeg ber henne gjøre 10-8 med tallfingre. Hun legger frem 10 med en gang, og tar vekk 8 med en gang, og sier 2. Jeg spør så hva 11-8 er, og poengterer at 11 er en mer enn 10. Hun ser på fingrene og ser i luften ei god stund. Jeg spør hva 11-1 er, og peker på tallbrikkene som ligger på bordet. Hun svarer 10. Jeg fortsetter med 11-2. Hun må tenke i noen sekunder før hun svarer 9. 11-3: hun tenker igjen i noen sekunder før hun sier 8. Jeg spør igjen hva 11-8. Hun svarer 3 med en gang.

3. Post-test. Som nevnt over bestod post-testen av de samme pluss- og minusoppgavene gitt under kartleggingssamtalen. Svarene hennes er gjengitt i Tabell 2 nedenfor. Svarene på pre-testen er også gjengitt i tabellen slik at man enkelt kan sammenlikne.

Plussoppgavene 3+2, 8+2, 8+4 og 7+6 kan Ida svaret på automatisk. Svarene kommer med en gang, og hun sier at hun bare visste det uten å tenke. Oppgaven 4+5 løser hun slik: *"Fem pluss fem er jo ti, så da blir det ni."* Ved minusoppgavene innen tallområdet 0-10 (5-2, 9-5 og 10-3) bruker hun "backupstrategier". 5-2 løser hun slik: *"Jeg tok fem, også tok jeg bort to, også telte jeg bakover."* Oppgavene 9-5 og 10-3 løser hun ved å bruke fingertall slik hun lærte under gruppemøtene; hun legger opp alle tallfingrene samtidig først (9 eller 10), og tar vekk antallet som skal trekkes fra samtidig. Hun sier svaret uten å telle en og en.

Minusoppgavene innen tallområdet 10-15 bruker hun litt lenger tid på. Ved oppgaven 11-8 sitter hun å ser ei stund ut i luften, og det virker som hun ikke vet hva hun skal gjøre. Etterhvert spør jeg hvor mye det er fra 8 og opp til 11. Hun svarer tre med en gang.

Det ble gitt to oppgaver innen *tallområdet 15-20.* Addisjonsoppgaven var 8+9. Ida svarer 17 etter fem sekunder, uten å røre på fingrene. Hun forklarer hvordan hun tenkte slik: *"Jeg tenkte til åtte og helt opp til 17. Jeg tok åtte også tok jeg på ni. Jeg bare visste det."* Minusoppgaven var 16-9 (denne er ikke presentert i tabellen fordi den ikke ble gitt under pre-testen). Hun ser ut i luften ei stund før hun svarer 24. Jeg gjentar oppgaven og poengterer at det er minus. Hun ser ut i luften en stund. Jeg sier at hun kan tenke på hvor mye det er fra 9 og opp til 16, og spør videre hvor mye det er fra 10 og opp til 16. Hun svarer 6 med en gang. Når jeg spør hvor mye det er fra 9 og opp til 16 svarer hun 7 etter noen sekunder.

Tabell 2
Forklaring av forkortelser: N2b*: Nivå 2 (tellestrategier): Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon,* N2c*: Nivå 2 (tellestrategier): Telle videre fra største ved addisjon eller telle opp ved subtraksjon*, KT*: kjent tallfakta (nivå 3),* US*: Utledet svar (nivå 3),* TF*: tallfingre,* **: fikk hjelp.*

Oppgave	3+2	5-2	8+2	4+5	9-5	10-3	8+4	7+6	11-8	8+9
Strategi pre-test	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	Klarer ikke	Klarer ikke
Strategi post-test	KT	N2b	KT	US	TF	TF	KT	KT	N2c*	US

Diskusjon. Utgangspunktet for dette kvasi-eksperimentet var problemstillingen: *Kan et fokus på strukturerte mengder, over en periode på ti timer i løpet av fem uker, øke tallforståelsen hos elever med matematikkvansker i tredje klasse?* Jeg vil her diskutere om vi kan konkludere med at gruppemøtene har hatt en positiv effekt på tallforståelsen av mengdene 0-20 hos Ida.

For å kunne si noe om de ti gruppemøtene har hatt en effekt på talloppfatningen til Ida er det mest opplagte å sammenligne strategibruken på pre- og posttesten. Ifølge Gray og Tall (1994) bruker matematikksvake elever så og si kun tellestrategier (nivå 1 og 2 hos Carpenter og Moser) for å løse pluss- og minusoppgaver. Strategibruk sier noe om mengdeforståelsen (jfr. Frostad, 2005). Pretesten til Ida viser at hun kun bruker tellestrategien "å telle videre fra første" ved plussoppgaver, og "å telle ned" ved minusoppgaver, innen tallområdet 0-10. Innen tallområdet over ti greier hun ikke å løse minusoppgavene selv om jeg understreker at det er minus og ikke pluss. Ved addisjonsoppgavene innen tallområdet over ti bruker hun også tellestrategien "å telle videre fra første". Idas ensidige strategibruk som ble kartlagt i pretesten tyder på at hun ved dette tidspunktet har et rent prosessfokus og ønsker kun å gjennomføre denne ene prosedyren på riktig måte. Etter all sannsynlighet har ikke Ida utviklet en konseptuell forståelse av mengdene (jfr. Gray og Tall, 1994). Løsningen av oppgavene blir kun en oppramsing av tallord som hun har lært at skal komme i en definert rekkefølge; i stigende rekkefølge ved addisjon og de samme tallordene baklengs ved subtraksjon. Ved f. eks. oppgaven 4+5 tar hun utgangspunkt i tallet fire og teller fem steg videre for å komme frem til hva svaret er. Det at hun gjentar den samme prosedyren ved så og si alle oppgavene tyder på at hun har et ensidig fokus på å gjennomføre telleprosedyren, og at hun ikke har en utviklet mengdeforståelse.

Ved posttesten bruker Ida flere strategier for å løse oppgavene. Alle svarene på addisjonsoppgavene er kjente tallfakta eller utledet svar (nivå 3 hos Carpenter og Moser). Ved minusoppgavene bruker hun fortsatt tellestrategier ved noen oppgaver. I tillegg bruker hun fingertall (jfr. Neuman, 1993), slik hun lærte under gruppemøtene, ved to av oppgavene. Dette er en tydelig endring sammenlignet med pretesten. Gray og Tall (1994) fant at matematikksvake 8- åringer i all hovedsak brukte tellestrategier (på samme måte som Ida gjorde i pretesten), og at matematikksterke kun brukte utledet svar ved oppgaver de ikke visste svaret på automatisk (kjent tallfakta). Strategiene til Ida ved addisjonsoppgavene i posttesten samsvarer mer med en matematikksterk elev. En forutsetning for å bruke utledet svar er å kunne se sammenhengen mellom ulike mengder, og Ida viser i posttesten at hun gjør det når hun løser oppgaven 4+5: *"Fem pluss fem er jo ti, så da blir det ni."* Samtidig så sier Neuman (1993) at matematikksvake elever klarer å benytte kunnskap om det dobbelte av tall ved addisjon. På den annen side fant Ostad (2008) at elever uten vansker etterhvert erstatter primitive strategier med flere og mer avanserte strategier. Dette er tydelig hos Ida. Ved addisjonsoppgavene har hun gått fra å bruke strategier på nivå to hos Carpenter og Moser til å bruke strategier på nivå tre.

En utviklet tallforståelse krever at Ida klarer å koble meningsfulle prosesser til konseptuell kunnskap og at hun har rike koblinger mellom konseptene addisjon og subtraksjon (jfr. Gray & Tall, 1994; Hiebert & Lefevre, 1986). En oppfatning av mengder som strukturerte (del-del-helhet) burde også vise seg ved minusoppgaver. Ida viser at hun fortsatt er avhengig av tellestrategier (der hvor hun ikke bruker fingertall) ved minusoppgavene, noe som kan tyde på at mengdeforståelsen ikke er helt utviklet. Det må understrekes at ti timer er kort tid, og det vil nødvendigvis ta tid for Ida å se at hennes kunnskap om strukturerte mengder kan utnyttes også ved subtraksjon.

Min vurdering, basert på den store endringen i strategibruk, er at et fokus på strukturerte mengder tydelig har hatt en positiv effekt på Ida sin talloppfatning. Det er nødvendig å ta forbehold om at det er andre forhold som har påvirket henne (jfr. indre validitet) som f. eks. annen matematikkundervisning. Dog, mitt pedagogiske opplegg er godt forankret i teori og tidligere forskning som har vist positiv effekt. Endringene har kommet på såpass kort tid at jeg vurderer det som høyst sannsynlig at det er fokuset på strukturert mengder som er årsaken. For å sørge for at Ida sin utvikling fortsetter vil det være avgjørende at Ida fortsetter å jobbe med strukturerte mengder slik at hun ikke faller tilbake på å bruke tellestrategier. Hennes endring over denne korte tidsperioden gjør at jeg vurderer at det er fullt mulig for henne å utvikle proseptuell tenkning (jfr. Gray & Tall, 1994) hvor hun enkelt klarer å se tvetydigheten av ulike symbol. Dette vil frigjøre oppmerksomhetskapasitet (jfr. Zawaiza og Gerber, 1993 i Bråten, 1996) som hun kan bruke til mer avanserte oppgaver.

Case 2: "Mia"

Resultater.

1. Kartleggingssamtale.

Spørsmål rundt mattematikkfaget generelt. Mia virker trygg i situasjonen umiddelbart. Hun svarer kort på spørsmålene, men uttrykker at hun liker matematikk. I matematikktimene jobber hun hovedsaklig alene med oppgavene og får hjelp til å se over leksene hjemme. Mia sier at hun kan tenke seg å forstå matematikk bedre, men at det går greit som det er.

Kartlegging med pluss- og minusoppgaver. Ved addisjonsoppgaver med *tallområdet 0-10* bruker Mia fingrene. Hennes resultater er presentert i Tabell 3 nedenfor. Hun bruker hovedsaklig strategien "å telle videre fra det største tallet", med unntak av 3+2 og 8+2. Ved oppgaven 4+5 tar hun opp fire fingre på venstre hand samtidig, og tar deretter opp fem fingre en og en. Hun gjør dette i et rask tempo, noe som fører til at tallordene og fingrene ikke blir synkrone. Hun svarer derfor ti på denne oppgaven. Hun kommer frem til riktig svar på de andre oppgavene med tallområde opp til ti, ved bruk av den samme strategien. Hun forsøker også å bruke fingrene på *tallområdet over ti.* Oppgaven 7+6 løses ved at hun tar opp 7 fingre med en gang. Hun begynner med tallet en igjen idet hun tar opp de tre siste fingrene, som hun teller en og en. Hun forsøker så å telle høyt videre imens hun ser til høyre for de ti fingrene hun holder opp; *"fire, fem, seks"*. Hun ser ut i luften en stund før hun tar ned alle fingrene før hun teller alle fingrene en og en, og teller videre høyt til 16. Hun forstår at dette ikke blir riktig, og begynner derfor å telle klosser. Hun teller først sju klosser en og en, så seks klosser en og en. Til slutt teller hun alle klossene, og kommer frem til at svaret er 13.

Subtraksjonsoppgavene 5-2 og 9-5 løser hun ved å telle nedover i hodet. Hun bruker ingen synlige konkreter her. Ved oppgaven 10-3 holder hun opp 10 fingre med en gang, og tar ned 3 fingre samtidig og svarer med en gang 7. 11-8 løser hun ved å holde opp alle fingrene samtidig, i tillegg sier hun at hun har en usynlig finger ved siden av høyre lillefinger. Hun tar ned en og en finger til hun har telt ned 8 fingre, og kommer dermed frem til riktig svar. Oppgaven 14-5 løser hun ved hjelp av klosser. Hun teller en og en kloss til hun har 14. Hun tar dermed bort en og en kloss til hun har telt fem klosser. Hun teller teller for fort i forhold til hvor mange klosser hun tar bort, noe som gjør at svaret til slutt blir feil.

Tabell 3
Forklaring av forkortelser: N1: *Nivå 1 (tellestrategier med konkreter),* N2b*: Nivå 2 (tellestrategier): Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon,* KT*: kjent tallfakta (nivå 3).*

Oppgave	3+2	5-2	4+5	8+2	9-5	10-3	8+4	7+6	11-8	14-5	8+9
Strategi	KT	N2b	N2b	KT	N2b	N2b	N2b	N1	N2b	N1	N1

2. Gruppemøter.

Gruppemøte 1. Opplæringsmålet i det første gruppemøtet er *å kunne dele mengder opp til fem i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier.* I tillegg var det viktig å bli kjent med materialet fra Numicon. På samme måte som Ida hadde Mia heller ingen problemer med å bruke ulike sanser for å oppleve antall mellom en og fem. Hun kjente også umiddelbart igjen numiconbrikkene når hun fikk se de i kun ett sekund.

Mia bruker spinneren med tallene 1-5 under for å få et tall.Hun skulle finne to forskjellige tallbrikker som tilsammen ble det tallet hun fikk. Mia måtte telle på fingrene under bordet da hun fikk 5. Hun tar tallbrikken tre og bruker fingeren for å telle alle hullene: *"en, to, tre"*. Hun ser deretter på fingrene under bordet før hun tar tallbrikken to. Hun teller til slutt alle hullene på de to tallbrikkene for å bekrefte at det er fem hull: *"en, to, tre, fire, fem. Disse to blir fem tilsammen"*.

Mot slutten av første gruppetime skal Mia prøve å kun bruke hodet for å finne løsningen på oppgaver. Alt materiale er ryddet vekk. Jeg sier: *"hvis vi tar tallet 5, hvilke plussoppgaver kan vi lage da"*? Mia: *"fire pluss en. Jeg så for meg tallbrikkene i hodet"*.

Gruppemøter 2-6. Det første opplæringsmålet er at *elevene skal kunne dele opp mengder opp til ti i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier.* Mia viser følgende resultater:

I gruppemøte fem får Mia høre summen av to tallbrikker som jeg gjemmer under bordet, og får i oppgave å komme med forslag til hvilke to tallbrikker det kan være. Jeg har tallbrikkene 3 og 4. Hun ser ei stund ut i luften, så jeg foreslår at hun kan legge frem 7 tallfingre. Hun gjør det og sier *"fem og to"*. Jeg sier at det kunne det vært, men at det er feil. Hun ser på fingrene sine ei stund, og svarer at hun ikke vet. Jeg skyver tallfingrene 3 litt fra resten av fingrene, og hun sier dermed 3 og 4. Hun får deretter summen 8. Hun legger frem 8 tallfingre med en gang, og svarer med en gang 3 og 5, som er riktig.

Mia får den samme oppgaven i gruppemøte 6, og begynner med mengden 9. Hun legger opp 9 tallfingre. *"Jeg vet ikke"*. Jeg viser henne på fingrene hvordan det kan være 5 og 4. Jeg viser videre hvordan hun kan flytte tommelen på høyre hand bort til venstre slik at det blir seks fingre sammen. Jeg spør hvilke to tall fingrene hennes viser nå? *"To og fire"*? Jeg holder rundt de tre fingrene som er sammen på høyre hand og spør hvor mange det er. Hun svarer 3, også svarer hun at det er 6 på andre siden. Jeg viser henne så 7 tallfingre, og spør hvor mange som mangler for å få 9. Hun teller over fingrene sine før hun svarer 2.

Jeg holder tallbrikkene 3 og 2 under bordet, og sier at det blir 5 tilsammen. Ida sier 2 og 3 med en gang uten å se på fingrene. Malin gjemmer tallbrikkene 2 og 8, og sier at de blir 10 tilsammen. Mia legger opp 10 tallfingre. *"Jeg vet ikke helt"*. Jeg spør hvor mange hun har på en hand. *"Fem. Kan det være fem og fem"*? Jeg sier at det kunne det vært, men at hun må prøve med et nytt forslag. Hun ser ei stund på hendene sine. Jeg foreslår at hun kan flytte høyre tommel mot venstre hand. *"Seks og fire"*. Jeg sier at hun kan fortsette med å flytte flere fingre på høyre hand mot venstre hand. *"Jeg vet ikke noe mer"*. Jeg spør hva en mer enn 6 er. *"Sju. Kan det være sju og fem"*? Hun sier dette uten å se på fingrene sine. Jeg ber henne se på fingrene, og hjelper henne med å se 7 tallfingre på den ene siden. *"Sju og tre kan det være"*. Jeg sier at det kunne det vært, men at hun må prøve å flytte enda en finger bort til de 7. Hun virker veldig ukonsentrert, og jeg må tydeliggjøre for henne på fingrene slik at hun ser 8 og 2.

Det andre opplæringsmålet var at *"elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier for løse pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-10.* Hun løste plussoppgaver innen tallområdet 0-10 på følgende måter:

I Gruppemøte 4 oppdager Mia at fingertall er en effektiv måte å finne svaret på. Ved oppgaven 5+3 legger hun frem hele venstre hånd med en gang, deretter tre på høyre med en gang, og svarer 8 umiddelbart. Hun gjør det samme med oppgaven 5+4. Mia skal regne disse oppgavene i hodet: 1+8 og 2+8. Oppgaven 1+8 må hun tenke i fem sekunder på før hun svarer 9. Oppgaven 2+8 vet hun svaret på umiddelbart.

I Gruppemøte 5 ønsker Mia å bruke ispinner. Oppgaven er 5+4. Hun begynner å legge opp 4 ispinner. Jeg spør om hun vet svaret, og hun svarer ni umiddelbart før hun har lagt fedig ispinnene og uten å se på fingrene. Jeg spør henne hvordan hun kom på det. *"Fem pluss fem er ti, også er det en mindre, og derfor blir det ni"*. Mia får den samme oppgaven i Gruppemøte 6 (5+4). Hun legger frem 5 tallfingre med en gang på venstre hand, så 4 på høyre. Hun svarer 9 med en gang. Hun får deretter oppgaven 5+3. Hun svarer 8 med en gang uten å se på fingrene.

Minusoppgaver løser Mia slik:

I Gruppemøte 4 får Mia ulike subtraksjonsoppgaver som hun skal regne ut ved hjelp av fingertall. Hun legger frem alle 10 fingre og begynner å ta bort ett og ett tall til hun har tre igjen. Deretter får hun 8-5. Hun legger opp alle 8 med en gang riktig. Hun begynner å telle nedover en og en fra 8. Jeg påpeker at hun har jo alle fem fingre opp på venstre hånd, og spør om det ikke er letter om hun bare fjerner hele den med en gang. Hun gjør det og svarer med en gang 3. Deretter får hun oppgaven 8-6. Hun legger 8 tallfingre med en gang, fjerner deretter hele venstre hand og høyre tommel, og svarer to.

I Gruppemøte 5 oppfordrer jeg Mia til å kun bruke hodet, men at tallfingre godt kan være en hjelp dersom det blir vanskelig. Ved oppgaven 10-4 legger hun opp 10 tallfingre, og tar vekk fire fingre på venstre hand samtidig, unntatt tommel. Hun svarer med en gang 6. Neste oppgave er 9 -6. Hun legger opp 9 tallfingre med en gang, og tar fort ned en og en finger i rekkefølge fra høyre ringfinger først. Hun svarer 3 med en gang 6 tallfingre er tatt ned.

I Gruppemøte 6 bruker Mia kulerammen og får oppgaven 9-4. Hun flytter 9 kuler øverste rad samtidig, og flytter tilbake 4, og svarer 5. 8-4. Hun gjør det på samme måte, og svarer 4. *"Fire pluss fire er åtte, så da må jo åtte minus fire være fire."*

Gruppemøter 7-10. I forhold til det første opplæringsmålet (*elevene skal kunne dele opp mengder opp til tjue i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier*) viser Mia følgende resultater:

I gruppemøte 7 beskriver Mia mengden 11, da tallbrikkene 1 og 10 ligger på bordet, slik: *«To femmere og en ener, eller en tier og en ener. Det kan også være en sekser og en femmer.»* Hun ser og tar på tallbrikkene imens hun sier dette.

I det samme gruppemøtet flytter jeg et antall kuler på kulerammen på første rad, fra venstre mot høyre som jeg skjuler med handen. Mia ser kun de kulene som er igjen på høyre side. Hun får i oppgave å si hvor mange kuler som skjuler seg bak handen min. Jeg flytter 7 slik at de ser at det er 3 igjen. Malin svarer 5 og Ida svarer 4. Jeg spør Mia om hun er enig. Hun sier nei, og legger frem 3 fingertall. *«Vi har ti og ta vekk tre, det blir sju»*. Hun legger frem 10 fingertall og tar bort 3 imens hun forklarer dette. Jeg skjuler 8, slik at Mia ser at det er 2 kuler igjen. Hun tenker i noen sekunder, og legger frem 10 tallfingre. Hun ser på dem i et tre sekunder og svarer 8.

I gruppemøte ni finner Ida to tallbrikker som tilsammen blir 15. Hun velger 8 og 7 og legger disse i hver sin pose. Mia skal komme med forslag til hvilke to brikker som ligger i posene. Hun ser ut i luften i 30 sekunder før hun begynner å se på tallbrikkene. Jeg tar opp kulerammen og flytter 10 på øverste linje og 5 på neste. Hun sier 10 og 5. Malin velger to tallbrikker som tilsammen blir 17: 9 og 8. Hun legger dem i hver sin pose, og Mia skal komme med forslag til hvilke tallbrikker hun har valgt. Hun ser ei stund ut i luften. Jeg ber henne flytte 17 på kulerammen, og hun flytter 10 på første linje og 7 på andre. Hun sier dermed 10 og 7.

Det andre opplæringsmålet var at *"elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier for løse pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-20".*

Plussoppgaver:

I gruppemøte åtte får Mia kulerammen som hun skal bruke til å løse ulike addisjonsoppgaver. Hun får oppgaven 9+5. Hun flytter 9 kuler på første rad og fem kuler på andre rad. Hun svarer med en gang at svaret er 14. Jeg spør hvordan hun tenkte. *«Det er en mindre enn 15. I sted var det 10 og 5 nå er det 9 og 5, derfor blir det en mindre».* Hun får deretter oppgaven 8+6. Hun bruker kulerammen og flytter 8 på første linje og 6 på andre. *"Det blir sytten".* Jeg ber henne veksle inn to kuler fra andre linje til første. Hun ser da med en gang at svaret er 14. Jeg: *«Vi kan også tenke på en annen måte. Hvor mye mangler det på 8 for å få 10?»* Mia: *"to"*. Jeg: *"Da kan vi tenke sånn at vi tar to fra 6ern slik at 8+2 blir 10. Da har vi igjen 4, og 10+4 er 14».* Mia får deretter oppgaven 8+5. Hun ser ei stund ut i luften. *«Tretten. Det er to fra åtte til ti, også tenkte jeg litt mere.»* Jeg: *«så du tok to fra femmern slik at åtte pluss to blir ti? Hvor mye hadde du igjen av femmern da, når du har tatt bort to?»* Mia: *«tre. Og ti pluss tre er tretten".* 7+5. *«Det er tolv. sju er en mindre enn åtte, og da blir det en mindre enn i sted.»*

I gruppemøte ni gir elevene hverandre addisjonsoppgaver. Mia får oppgaven 5+6. Hun svarer 11 med en gang. Jeg spør hvordan hun tenkte: *«Først så tar man 5+5 som blir 10, og en mer blir 11».* 7+4. Mia svarer 11 med en gang. *«Jeg tenkte i minus. Sju er tre mindre enn ti. Også en til blir 11».* 8+7. Hun ser ut i luften ei stund. Jeg legger frem 8 tallfingre og spør hva hun kan gjøre. Hun sier ingenting. Jeg spør hvor mye hun har igjen til ti. Hun svarer to med en gang. Jeg spør hvor mye hun har igjen av sjuern hvis hun har brukt to opp til ti. Hun svarer fem, og at svaret blir 15.

Minusoppgaver:

I gruppemøte sju får Mia oppgaven 8-3: Hun svarer 5 med en gang, uten å se på fingrene sine. Mia får deretter oppgaven 11-3 etter at Ida har svart på hva 11-2 er. *«Åtte. Jeg bare visste det fordi hun fikk to, og en mindre da blir det åtte».*

I gruppemøte ni legger jeg frem tallbrikkene 10 og 4, og sier av vi skal jobbe med tallet 14. Jeg finner frem tallkortene 1-10 og stokker dem. Elevene trekker et tilfeldig tallkort, og får i oppgave å ta 14 minus det tallet de trakk. Mia trekker 3. Hun ser ut i luften i fem sekunder før hun sier: *«12, nei jeg mener 11 heter det. Jeg telte tre nedover fra 14».* Mia trekker så 9. Hun svarer fem med en gang. Før dette har Ida svart på hva 14-8 er. Mia sier: *«Jeg fant det ut i sted. Hun fikk 8, og en mindre da blir det 5».* Mia trekker 6 og sier: *«Åtte. Fordi at fem minus fjorten var ni, og en mindre blir åtte».*

3. Post-test. Svarene til Mia på pre- og post-test er gjengitt i Tabell 4 nedenfor. Mia er urolig til å begynne med. Hun roer seg ganske fort når vi begynner med oppgavene, og hun er fokusert på å finne riktig svar. Innen *tallområde 0-10* kan hun svaret på nesten alle oppgavene automatisk (3+2, 5-2, 4+5, 8+2 og 10-3). Svarene kommer spontant med en gang hun ser oppgavene. Den eneste oppgaven hun bruker mer tid på er 9-5. Her blir hun ukonsentrert og ser seg mye rundt i rommet. Hun svarer til slutt at hun ikke vet. Jeg foreslår at hun kan bruke fingertall slik vi gjorde under gruppemøtene. Hun legger med en gang opp ni fingertall samtidig, og tar vekk hele høyre hand samtidig. Hun svarer fire med en gang hun har gjort dette.

Innen *tallområde 10-15* er det stor variasjon i svarene til Mia. Oppgaven 8+4 løses slik: Hun ser ut i luften i fem sekunder før hun svarer 12. Jeg spør hvordan hun tenkte. *"At ehm, jeg tok fire mer enn åtte. Fire pluss fire er åtte, og fire til blir 12."* Den neste oppgaven er 7+6. *"Ehm, det vet jeg ikke."* Jeg oppfordrer henne til å prøve. Hun sitter urolig på stolen, og begynner etterhvert å se på fingrene sine under bordet. Jeg ber henne til å legge fingrene på bordet. Hun legger frem hele venstre hand og høyre tommel. Hun teller en og en videre høyt fra 6 til hun kommer til 13. Hun bruker fingrene for å holde styr på hvor mange hun har telt videre fra 6. Minusoppgaven 11-8 løser Mia å telle høyt: *"Ti, ni, åtte... er det en?"* Jeg spør hvor mye det er fra åtte og opp til ti. Hun svarer to med en gang. Jeg spør deretter hvor mye det er fra 8 til 11, og hun svarer tre med en gang. Mia får deretter oppgaven 14-5. *"Da må jeg se på fingrene."* Hun ser på fingrene sine før hun tar de vekk og ser ut i luften igjen. *"Jeg vet ikke."* Jeg spør hva 14-4 er. Hun tenker i tre sekunder før hun svarer 10. Når jeg spør hva 14-5 blir, svarer hun ni med en gang.

Når vi kommer til *tallområde 15-20* er Mia veldig ukonsentrert. Ved oppgaven 8+9 ser hun ut i luften i ti sekunder før hun svarer at hun ikke vet. Jeg spør hva 8+10 er. Hun svarer 18 med en gang. Jeg spør hva 8+9 blir da. *"19? Nei 16 blir det. Nei 17."* Mia får oppgaven 16-9. *"Blir det 12?"* Hun sier dette med en gang. Hun er urolig, og det er tydelig at hun ikke ønsker å prøve. Vi avslutter derfor.

Tabell 4
Forklaring av forkortelser: N1: *Nivå 1 (tellestrategier med konkreter),* N2b*: Nivå 2 (tellestrategier): Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon,* KT*: kjent tallfakta (nivå 3),* FT**: Påminnet henne å bruke fingertall.*

Oppgave	3+2	5-2	4+5	8+2	9-5	10-3	8+4	7+6	11-8	14-5	8+9
Strategi pre-test	KT	N2b	N2b	KT	N2b	N2b	N2b	N1	N2b	N1	N1
Strategi post-test	KT	KT	KT	KT	FT*	KT	US	N2b	N2b	Fikk hjelp	Fikk hjelp

Diskusjon. Ifølge pretesten er noen tallkombinasjoner "kjente tallfakta" for Mia (3+2 og 8+2). På samme måte som Ida bruker også hun i hovedsak tellestrategien "å telle videre fra første". I tillegg løser hun noen av oppgavene ved å bruke tellestrategien på det første nivået hos Carpenter og Moser (1982); hun bruker klosser i alle ledd av addisjons- eller subtraksjonsoppgaven. Det tyder på at når tallområdet er større enn ti, og det dermed er vanskeligere å bruke fingrene for å finne svaret, så bruker hun klossene for å kunne holde oversikt over alle prosessene som inngår i oppgaven. Selv om noen få tallkombinasjoner er kjente tallfakta, viser strategikartleggingen at også Mia har et prosessfokus hvor kombinasjonen av tallsymbolene og symbolene for addisjon eller subtraksjon "trigger" noen innlærte tellestrategier (Gray og Tall 1994).

Å bruke fingrene som hjelp i telleprosedyrene for å løse oppgaver var sterkt innøvd hos Mia. Dette viste seg også under gruppemøtene hvor hun ofte måtte bruke fingrene (som hun gjerne gjemte under bordet) for å være helt sikker på at svaret var riktig. Under gruppemøte en skal hun finne to tallbrikker som til sammen blir fem. Selv etter at hun har telt hullene i tallbrikkene tre, og deretter sjekket med fingrene at hun mangler to for å få fem , må hun dobbeltsjekke ved å telle over alle hullene i de to tallbrikkene til slutt. Dette er ikke i samsvar med at 3+2 var "kjent tallfakta" under pretesten. Denne usikkerheten og manglende innsikt i strukturen i mengder gjør at Mia må bruke tellestrategier for å være sikker på at hun kommer frem til riktig svar.

Som nevnt over hadde Mia i utgangspunktet ikke lyst til å delta i posttesten. Det må tas høyde for at dette sannsynligvis hadde en innvirkning på resultatene. Særlig mot slutten er det tydelig at hun ikke orker å prøve. Selv med dette utgangspunktet viser en sammenligning mellom pre- og posttesten (tabell 4) at Mia har utviklet strategibruken sin. Alle oppgavene innen tallområdet 0-10 er enten "kjente tallfakta" (nivå 3), eller så bruker hun "utledet svar" som strategi. Ved en oppgave (9-5) bruker hun "fingertall" for å finne svaret. Det er viktig å påpeke at hun ble påminnet denne strategien. Det blir dermed feil å konkludere med at dette er en innlært strategi som hun vil benytte i andre situasjoner.

Selv om posttesten viser en endring av strategibruk (som er en indikasjon på økt tallforståelse) innen tallområdet 0-10 viser hun ikke samme utvikling innen tallområdet over ti. Dette kan som nevnt ha noe å gjøre med motivasjonen hennes. Under gruppemøte åtte skal Mia løse oppgaven 8+5: *«Tretten. Det er to fra åtte til ti, også tenkte jeg litt mere.»* Jeg: *«så du tok to fra femmern slik at åtte pluss to blir ti? Hvor mye hadde du igjen av femmern da, når du har tatt bort to?»* Mia: *«tre. Og ti pluss tre er tretten".* Selv om hun fikk veiledning i forhold til å forklare hvordan hun tenkte her, så virker det som at hun brukte utledet svar for å finne løsningen. Denne måten å tenke på samsvarer i såfall ikke med posttesten. Dette understreker også viktigheten av at Mia fortsetter å jobbe med strukturerte mengder slik at mengdeforståelsen får mulighet til å utvikle seg videre.

Case 3: "Malin"

Malin var ei positiv og engasjert jente, som tydelig uttrykte at hun likte gruppemøtene og gledet seg til neste gang. Ved flere anledninger fortalte Malin at hun var trett, og at hun hadde sovet lite. Dette påvirket hennes konsentrasjonsevne, og hun hadde lett for å gi opp ved oppgaver hun hadde løst riktig tidligere.

Resultater.

1. Kartleggingssamtale.

Spørsmål rundt mattefaget generelt. Malin er ei utadvendt jente som virket trygg i situasjonen med en gang. Hun liker mattefaget samtidig som hun syns det kan være vanskelig. Hun liker oppgaver hvor hun skal fylle inn tall som mangler på en tall-linje. Hun uttrykker at hun har lyst til å forstå mattematikk bedre.

Kartlegging med pluss- og minusoppgaver. Malin ser tydelig for seg tall-linjen når hun løser oppgavene. Resultatene hennes er presentert i Tabell 5 nedenfor. Ved oppgaven 3+2 sier hun: *"Man har tre, så plusser man på to til* (bruker fingeren og tegner en "m" i luften, og "hopper" to hakk fra venstre mot høyre), *og da blir det fem."* 5-2 løser hun på samme måte, bortsett fra at hun her tegner en "m" i luften fra høyre mot venstre; hun "hopper" to hakk nedover på den imaginære tall-linjen. Jeg spør etter dette om hun har andre måter å løse addisjonsoppgaver på, som for eksempel ved å bruke fingrene. Dette gjør at hun videre stort sett bruker fingrene for å løse oppgavene med tallområde opp til 10. Hun bruker også backupstrategien å telle videre fra første ved addisjonsoppgavene.

Tallområde over ti viser seg å være en utfordring for Malin. Oppgaven 8+4 løser hun ved å begynne med åtte fingre. Hun sier: *"Så tar man fire til. En* (tar opp venstre pekefinger), *to* (tar opp venstre tommel), *tre* (tar sammen høyre hand, og tar opp høyre lillefinger), *fire* (tar opp høyre ringfinger). *Det blir tretten."* Jeg ber henne prøve en gang til. Hun gjør som sist, men svarer fjorten. Oppgaven 11-8 løser hun slik: *"Man har elleve* (tar opp alle ti fingre, tar ned alle på høyre hand og tar opp tommelen), *elleve. Og da tar man minus åtte. Ti* (tar ned høyre tommel), *ni* (tar ned høyre pekefinger), *åtte* (tar ned høyre langfinger). *Og da har man sju igjen. Svaret er sju."* Jeg ber henne om å bruke klosser for å telle med. Hun teller elleve klosser en og en som hun samler i en haug. Og teller åtte til som hun legger i en haug ved siden av. Jeg spør om hun husker at oppgaven var 11 minus 8. Malin sier: *"Ja, vi skal ta minus, og da trenger vi åtte til. Også skal vi ta bort åtte som jeg har lagt her. Jeg skal ta bort noen av elverne også. Eller nei, svaret blir vel elleve tror jeg. Ja, tror det."*

Oppgavene 7+6 og 8+9 løser hun ved å bruke klosser. Hun må bruke klossene i alle ledd av addisjonsprosedyrene. Oppgaven 7+6 f. eks. løser hun ved å først telle sju klosser en og en, deretter seks klosser en og en. Til slutt teller hun alle klossene, og kommer slik frem til at svaret er 13. 8+9 løses på samme måte.

Tabell 5

Forklaring av forkortelser: N1: *Nivå 1 (tellestrategier med konkreter),* N2b*: Nivå 2 (tellestrategier): Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon,* **: feil svar.*

Oppgave	3+2	5-2	4+5	8+2	9-5	10-3	8+4	11-8	7+6	8+9
Strategi	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b*	N2b*	N1	N1

2. Gruppemøter.

Gruppemøte 1. Malin har heller ingen problemer med å bruke ulike sanser for å oppfatte antall opp til fem. Hun viser følgende reultater i forhold til opplæringsmålet *(å kunne dele mengder opp til fem i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier*):

Jeg legger frem en spinner med tallene 1-5 under. Elevene skal snurre slik at de får et tall, og skal finne to forskjellige tallbrikker som tilsammen blir det tallet de fikk. Malin får tallet fire og sier: *«Du kan ta en toer og en toer».* Hun viser ingen synlig telling når hun sier dette. Malin spinner deretter tallet tre og sier: *«Det blir en ener,* (tenker i tre sekunder) *og en toer. Det blir tre tilsammen. En, to og tre».* Hun teller hullene for å vise hvor mye det ble tilsammen.

Gruppemøter 2-6. Det første opplæringsmålet er at *elevene skal kunne dele opp mengder opp til ti i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier.* Malin viser følgende resultater:

I det femte gruppemøtet skal Malin finne to tall som tilsammen blir ni. Hun ser ut i luften ei stund før hun sier: *"tre og fire".* Jeg oppfordrer henne til å legge frem ni tallfingre. Hun svarer med en gang 5 og 4, etter at hun litt motvillig legger opp ni tallfingre. Hun får deretter summen 10. *"Det er fem og fem. Det vet jeg bare".* Jeg sier at det kunne det vært, men at hun må prøve igjen. *"Hva med to og fire".* Jeg gjentar spørrende det hun sa. *"Nei, det blir jo feil. Hm.. hva med fire og seks"?* Hun ser ut i luften i tre sekunder før hun sier dette, og der er ingen synlige tegn på telling.

I gruppemøte seks skal Malin komme med forslag til to tall som blir ti tilsammen. *"Fem og fem blir ti. Eller så kan det være en og ni, to og åtte, tre og sju eller fire og seks".* Alt dette kommer spontant og uten bruk av fingre. Hun skal deretter gjøre det samme med mengden ni. *"Fem og fire er ni".* Jeg sier at det er riktig, men at hun må prøve igjen. *"Tre og sju. Nei... sju pluss to er ni".* Jeg sier at det er riktig, men at hun må prøve igjen. *"Åtte pluss en eller seks pluss tre".* Hun sier dette fort og uten å bruke fingre eller annen telling.

Det andre opplæringsmålet er at *"elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier for løse pluss- og minusoppgaver innen tallområde 0-10.* Hun løser plussoppgaver innen tallområdet 0-10 på følgende måter:

I gruppemøte fire får elevene ulike addisjonsoppgaver hvor de skal bruke fingertall for å finne svaret. Malin syns oppgavene 6+3 og 2+8 er lette, og svarer riktig med en gang uten å bruke fingertall eller annen synlig telling. I gruppemøte fem får hun oppgaven 3+4. *"Jeg trenger ikke å tenke, jeg bare vet at tre pluss fire er sju".* Hun viser også at dette er kjente tallfakta i gruppemøte seks. Ved oppgaven 5+4 svarer hun umiddelbart ni.

Minusoppgaver:

I gruppemøte fire skal Malin si hva 8-5 er mens hun holder tallbrikken 8 med øynene lukket. Hun svarer først en med en gang. Jeg spør igjen, og hun svarer deretter 3 etter å ha kjent over alle hullene. Hun får senere i det samme gruppemøtet i oppgave å regne ut 9-7 i hodet. Etter fem sekunder svarer hun: *"fire, nei en mener jeg".* Jeg foreslår at hun kan bruke tallfingre for å finne svaret, og hun teller dermed ned en og en finger fra 9. Hun får deretter oppgaven 9-5, og jeg foreslår å bruke tallfingre. Hun begynner å telle ned en og en finger fra 9. Jeg påpeker at hun har 5 fingre på en hand. Hun fjerner hele høyre hand og svarer 4.

I gruppemøte fem får Malin får oppgaven 8-4. Hun svarer 4 etter ett sekund. Deretter får hun oppgaven 7-3 og svarer 4 med en gang. Ved oppgaven 9-6 svarer hun en med en gang. Jeg gjentar det hun har svart, og spør om hun er sikker. Jeg foreslår at hun kan bruke tallfingre. Hun legger opp 9 tallfingre, og teller nedover en og en finger, og kommer frem til riktig svar. I det sjette gruppemøtet får Malin oppgaven 9-4. *"Det er jo kjempelett. Det er fem det".*

Gruppemøter 7-10. I forhold til det første opplæringsmålet (*elevene skal kunne dele opp mengder opp til tjue i ulike delmengder uten å bruke tellestrategier*) viser Malin følgende resultater:

I gruppemøte sju skal Malin si hvor mange kuler av ti jeg skjuler på kulerammen. Jeg skjuler fire. *«Det der så sinnsykt lett ut»!* Hun legger frem 4 tallfingre med en gang. Jeg spør hvordan hun tenkte. *"Jeg bare visste det inni hodet mitt. Jeg tenkte ikke".* Jeg flytter tre kuler slik at Malin ser at det er sju igjen. Hun svarer tre med en gang.

Jeg legger frem tallbrikkene ti og en slik at de tydelig tilsammen er elleve. Jeg spør om noen kan forklare hvordan 11 ser ut. Malin sier: *«Det er en tier og en ener. Jeg kan andre ting om elleve. Det er ti pluss en, ni pluss to og åtte pluss tre».* Dette sier hun uten å se på tallbrikkene eller bruke andre hjelpemidler.

I gruppemøte åtte bygger vi tårn med tallbrikker og plugger, med mengden 12. Jeg legger tallbrikkene 2-10 i en pose. Elevene trekker en tilfeldig brikke og skal finne den tallbrikken som blir 12 tilsammen med den brikken de trakk. Malin trekker 9. Jeg spør hva hun mangler for å få til 12. Hun svarer 3 med en gang uten å se på tallbrikkene.

I gruppemøte ti skal Malin komme med forslag til to tall som tilsammen blir 15. *"Ti og fem blir femten*". Dette sier hun med en gang. Hun sier så 9 og 4. Jeg spør hva 9+4 er. Hun tenker i ei stund uten å si noe. Jeg gjentar at summen er 15, og at 10 og 5 kunne vært riktig. *"Ni og seks da".* Hun tenker ei stund. Jeg spør hva det andre tallet er dersom det ene er 8. Hun sier med en gang 7. Hun bruker ingen hjelpemidler i denne prosessen.

Det andre opplæringsmålet var at *"elevene skal kunne bruke tallfaktastrategier for løse pluss- og minusoppgaver innen tallområdet 0-20".*

Plussoppgaver:

I gruppemøte sju skal Malin regne ut 11-4 ved å kun bruke hodet. Hun svarer sju umiddelbart.

I gruppemøte åtte får Malin flere addisjonsoppgaver: 8+4. *"Det er tolv. Jeg bare visste det inni hodet mitt med en gang. Tenkte ikke*". 9+7. *«Det blir 16. Jeg tenkte ikke, jeg bare visste det».* Jeg: *«Jeg ville tenkt sånn at 9 er en mindre enn 10, så hvis du tar en fra 7 og flytter den til niern, så får du 10+6 som er 16».* 7+8. *«7+8»?* Hun begynner å tulle, og sier at hun ikke vil tenke så mye. Jeg: *«Jeg ville snudd på oppgaven og tatt 8+7. Hva mangler på 8 for å få 10»?* Malin: *«2».* Jeg: *« Da har du tatt to fra 7 slik at du fikk 10. Og da blir oppgaven 10+5»?* Malin: *«Det er 15».*

Malin får også noen addisjonsoppgaver i gruppemøte ni. 4+9. Hun svarer 13 med en gang. 8+9. Hun svarer 17 med en gang. Hun sier hun bare visste svaret med en gang.

Gruppemøte ti: Hun spinner 6+3. Hun svarer 9 med en gang. Hun spinner igjen 9+9. Hun svarer med en gang 18. Hun trekker tallkortet 6 som hun skal trekke fra 18. Hun ser ut i luften ei stund. Jeg finner frem ispinner og legger opp 18. Hun tar vekk 3 med en gang. Hun sier det er 15 igjen. Jeg spør hva 15-3 er. Hun tar vekk 3 ispinner og sier at det er 12.

Minusoppgaver:

I det sjuende gruppemøtet bruker Malin spinneren for å få oppgaven 8-5. *"Jeg må tenke litt inni meg. Det blir tre, jeg telte fem nedover fra åtte".*

I det åttende gruppemøtet skjuler jeg 3 kuler, hun ser 7. *"Det er ni tror jeg".* Jeg spør hvor mange hun ser som ikke er skjult. Hun svarer 7. Jeg: *«Hva er 10-7»?* Malin ser ei stund ut i lufta før hun svarer: *«Fire, nei tre».*

I gruppemøte ni snakker vi om mengden 14. Jeg spør Malin hva 9+5 er, og hvordan hun tenker. Malin: *«Jeg vet jo at 10+5 blir 15, også så jeg jo at det var ni så da ble det 14».* 14-5. Hun svarer 9 med en gang. *«Jeg tenkte ikke! 14 minus 4 det er 10. 14 minus 5 det er 9».* 16-8. Hun sier med en gang hun ikke aner. Jeg spør hva 16-6 er. Hun svarer først 6. Jeg ber henne flytte 16 på kulerammen, 10 på første rad og 6 på andre rad. Hun tar bort de 6 på andre rad og sier hun har igjen 10. Hun begynner å ta bort 6 på første rad også. Jeg stopper henne og sier at hun har tatt bort 6 av de 8 hun skulle. Hun tar bort to og sier at det blir 8.

3. Post-test. Resultatene til Malin på pre- og post-test er gjengitt i Tabell 6 nedenfor. Innen tallområde 0-10 er disse oppgavene kjente tallfakta for Malin: 3+2, 5-2, 8+2 og 10-3. Ved oppgaven 5-2 svarer hun først sju med en gang. Når jeg ber henne lese oppgaven på nytt, og hun blir oppmerksom på at det er minus, svarer hun tre umiddelbart. Ved oppgaven 4+5 benytter Malin tellestrategien "å telle videre fra første". Hun holder opp høyre hand, begynner med tommel og tar opp en og en finger, imens hun sier: *"Fem, seks, sju, åtte, ni."* På oppgaven 9-5 svarer hun med en gang at hun ikke vet. Hun ser ei stund ut i lufta og svarer igjen at hun ikke vet svaret. Jeg spør hva 10-5 er. Hun svarer fem med en gang, og deretter sier hun at svaret på 9-5 er fire.

Løsningene på oppgavene innen tallområdet over ti preges av tellestrategier. Oppgavene 8+4 og 7+6 løses med samme strategi: "å telle videre fra største". 7+6 løses slik: *"Sju pluss seks. Åtte, ni, ti, elleve, tolv, tretten. Tretten!"* Hun tar opp en og en finger imens hun sier ett og ett tall. Ved minusoppgavene 11-8 og 14-5 bruker Malin også "å telle videre fra største". 11-8 løses slik: *"Ehm, ti, ni, åtte, sju, seks, fem, fire..."* Hun teller høyt imens hun ser ut i luften uten å bruke fingrene. Hun stopper opp ei stund når hun har kommet til fire og sier etter noen sekunder at svaret er tre. Addisjonsoppgaven *innen tallområdet 15-20,* 8+9, bruker hun tallfaktastrategien utledet svar. *"Jeg tenkte at jeg hadde på en måte at jeg hadde ti søsken også skulle jeg ta sju videre. Og sju pluss ti er jo sytten."* Minusoppgaven innen dette tallområdet, 16-9, løste hun ved "å telle videre fra største". Hun ser ut i luften i ti sekunder uten å røre på fingrene før hun sier: *"Jeg så for meg tall-linja, også hoppet jeg fra seksten, femten, fjorten, tretten, tolv, elleve, ti, ni, åtte, sju. Så stoppet jeg på sju."*

Tabell 6
Forklaring av forkortelser: N1: *Nivå 1 (tellestrategier med konkreter),* N2b*: Nivå 2 (tellestrategier): Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon,* KT*: kjent tallfakta (nivå 3), *: feil svar,* US*: Utledet svar (nivå 3).*

Oppgave	3+2	5-2	4+5	8+2	9-5	10-3	8+4	11-8	7+6	8+9
Strategi pre- test	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b	N2b*	N2b*	N1	N1
Strategi post- test	KT	KT	N2b	KT	Klarte ikke	KT	N2b	N2b	N2b	US

Diskusjon. Malin sine resultater fra pretesten viser at også hennes utgangspunkt er et rent prosessfokus. Det er tydelig at hun løser oppgavene ved å "hoppe" oppover eller nedover på tall-linjen. Pretesten viser at Malin har manglende konseptuell kunnskap (jfr. Hiebert og Lefevre 1986). Det rene prosessfokuset i seg selv er en indikasjon på manglende konseptuell kunnskap. Ved de siste oppgavene brukte Malin klosser og tellestrategien på det første nivået (hun brukte konkreter i alle tre leddene av telleprosedyren) for å finne svaret. I ettertid ser jeg at hun ble oppfordret til å bruke klossene, noe som blir en feil ved kartleggingen av hennes strategier. Det beste hadde vært å ikke oppfordre henne til noe, men å la henne finne løsningen helt på egen hand. Likevel gir pretesten et tydelig bilde på at hun i hovedsak bruker tellestrategien "å telle videre fra første" (nivå 2); oppgavene utløser prosessene å telle oppover på tall-linjen eller å telle nedover på den hos Malin.

Posttesten viser at Malin ikke lenger bruker telleprosedyrer ved alle oppgavene, slik hun gjorde under pretesten. De fleste oppgavene innen tallområdet 0-10 har hun lagret som "kjente tallfakta". Malin bruker likevel den samme tellestrategien som hun brukte i pretesten ("å telle videre fra første") ved halvparten av oppgavene. Konklusjonen må likevel være at Malin viser utvikling fra pre- til posttest, i all hovedsak innen tallområdet 0-10.

Som nevnt over var det tydelig at Malin sine prestasjoner ofte var preget av det faktum at hun blant annet hadde søvnunderskudd. Dette var noe hun selv sa opptil flere ganger og som viste seg ved at hun ikke fikk med seg det som ble sagt. I gruppemøte fire svarer Malin med en gang at 8-5 er en. Det virket som at hennes strategi når hun ikke orket å prøve å finne svaret var å svare "en". Tretthet og andre årsaker som gjør det krevende å konsentrere seg vil nødvendigvis påvirke prestasjonene til Malin faglig. Lange telleprosedyrer hvor hun må klare å konsentrere seg i en viss tid er dermed på alle mulige måter lite hensiktsmessig. Det krever mye oppmerksomhetskapasitet, og dersom man har lav konsentrasjonsevne i tillegg er det høy sannsynlighet for at eleven underveis i prosessen glemmer hva utgangspunktet for prosedyren var (jfr. Gray og Tall 1994; forholdet mellom input og output blir uklart). Dette understreker viktigheten av å utvikle talloppfatningen til Malin slik at den begrensede oppmerksomhetskapasiteten kan bli frigjort (jfr. Zawaiza og Gerber, 1993 i Bråten 1996).

Oppsummerende diskusjon

"Kan et fokus på strukturerte mengder, over en periode på ti timer i løpet av fem uker, øke tallforståelsen hos elever med matematikkvansker i tredje klasse?" Som presentert og diskutert for hver enkelt elev over er det tydelig at elevene har vist utvikling når pre- og posttest sammenlignes. Det at dette resultatet kommer etter at elevene kun har gjennomført ti gruppetimer med fokus på strukturerte mengder er på mange måter styrkende i forhold til resultatet. Samtidig er det ikke mulig å si noe om langtidseffektene. Som nevnt er dette et lite utvalg, noe som svekker mulighetene for å generalisere til hele populasjonen (trussel mot den ytre validiteten). På en annen side er det pedagogiske opplegget forankret i teori og andre forskningsfunn som har vist effektiviteten av å fokusere på strukturerte mengder, å bruke ulike sanser for å oppleve mengder samt å fokusere på å bygge videre fra femmermengden og tiermengden(Atkinson et al., 2005; Cotter, 2001; Gray & Tall, 1994; Neuman, 1993). De tre elevene var motiverte og likte det vi gjorde i gruppetimene. Å gjøre elevene motiverte er helt essensielt for at det er mulig å kunne påvirke dem.

Oppgavene som ble gitt i gruppemøtene er valgt og utviklet på grunnlag av nivået elevene lå på i forkant av gruppemøtene. Deres ensidige bruk av tellestrategier tydeliggjorde deres manglende konseptuelle kunnskap. Gjentatt telling ("den første veien") og fokus på tall-linjen utvklet tydeligvis ikke tallforståelsen til disse elevene slik det kan gjøre for andre elever. Det førte ikke til en komprimering av idéer. Det var på dette grunnlaget at jeg valgte å lage oppgaver hvor konkretene ble brukt på en slik måte at strukturen i mengdene ble synliggjort. Grunnen til at jeg valgte å lage oppgaver som representerer begge "veiene" (å utvikle tallforståelse gjennom gjentatt telling (vei 1) og å visualisere mengder (vei 2) er at begge har elementer som teoriene jeg har presentert trekker frem som viktig for å utvikle tallforståelsen. Det er på denne måten jeg har forsøkt å endre fokuset til elevene, fra fokus på oppramsing av tallordene i riktig rekkefølge til å tenkte på tallene som strukturerte mengder.

Elever med matematikkvansker tenderer til å henge seg opp i tellestrategier (Gray & Tall, 1994; Ostad, 2008), og på et tidlig stadium ser de ingen grunn til å ikke bruke denne siden de jo får riktig svar. Felles for alle tre elevene var at de nesten kun brukte strategien "å telle videre fra første", og denne fungerte så lenge tallområdet ikke ble for stort. I tredje klasse begynner elevene å jobbe med store tall som skal adderes eller subtraheres. De begynner også med multiplisering og dividering. Dette vil by på store problemer for disse elevene som etter all sannsynlighet ikke har en mengdeforståelse selv for tallene 0-10. Strategibruken og prosedyrefokuset hos disse elevene henspeiler også den proseptuelle kløften, hvor de står på feil side for å ha mulighet til å tilegne seg en tilfredsstillende tallforståelse og dermed oppnå matematikkmestring. Det som kjennetegner en som har proseptuell tallforståelse er bruken av utledet svar der hvor svaret ikke kommer automatisk.

For å bruke utledet svar må elevene ha innsikt i tallsymboler sin struktur, og på en fleksibel måte kunne dekomponere og komponere symbolene (Gray & Tall, 1994).

Som spesialpedagog som skal jobbe med elever med matematikkvansker ønsket jeg å finne gode pedagogiske verktøy og oppgaver som kan hjelpe elever med å endre fokus fra ren telling til å få en utdypet forståelse for tallenes innhold og sammenheng. Min konklusjon er at Numiconmaterialet og prinsipper beskrevet i RightStart Mathematics, hvor fokus er på mengdenes deler og helhet, er godt egnet til dette arbeidet.

Referanser

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2. utg.). London: Continuum International Publishing Group.

Atkinson, R., Tacon, R. & Wing, T. (2005). *Numicon. Sett 1: Lærerveiledning.* Numicon Ltd.

Bråten, I. (1996). *Cognitive strategies in mathematics* (Teknisk rapport nr. 10). University of Oslo.

Brissiaud, R. (1992). A tool for number construction: Finger symbol set. I J. Bideaud, C. Meljac & J. Fischer (red.), *Pathways to number. Children's developing numerical abilities* (s. 41–65). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cotter, J.A. (2001). *RightStart mathematics. Kindergarten lessons.* Silver Lake, Minnesota: Joan A. Cotter.

Cotter, J.A. (2011a). *About Dr. Cotter - RightStart mathematics by activities for learning inc.* Hentet 2013-12-03 fra http://rightstartmath.com/about-us/

Cotter, J.A. (2011b). *Basics of the AL abacus.* Hentet 2013-12-03 fra http://rightstartmath.com/resources/

Cotter, J.A. (2011c). *Differences revealed! - RightStart mathematics by activities for learning inc.* Hentet 2013-12-03 fra http://rightstartmath.com/resources/differences-revealed

Frostad, P. (2005). Grunnleggende ferdigheter i matematikk. I H. Sigmindsson & M. Haga (red.), *Ferdighetsutvikling. utvikling av grunnleggende ferdigheter hos barn.* (s. 118–141). Oslo: Universitetsforlaget.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number.* London: Harvard University Press.

Gray, E.M. & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*(25), 116–140.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I j. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1–23). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Kamii, C. (2000). *Young children reinvent arithmetic. Implications of Piaget's theory* (2. utg.). Columbia University, New York: Teachers College Press.

Kamii, C., Lewis, B.A. & Kirkland, L. (2001). Manipulatives: when are they useful? *Journal of Mathematical Behavior*(20), 21–31.

Kjærnsli, M. & Olsen, R.V. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (Teknisk rapport). Oslo: Universitetsforlaget.

Kleven, T.A. (2008). Validity and validation in qualitative and quantitative research. *Nordisk Pedagogik*, *28*, 219–233.

Lund, T. & Haugen, r. (2006). *Forskningprosessen.* Oslo: Unipub AS.

Lunde, O. (2010). *Hvorfor tall går i ball. Matematikkvansker i et spesialpedagogisk fokus.* Bryne: Info Vest Forlag.

NESH. (u.d.). *Forskningsetiske komiteer.* Hentet 2013-12-21 fra http://www.etikkom.no/

Neuman, D. (1993). *Räknefärdighetens rötter.* Helsingborg: Schmidts Boktryckeri AB.

Numicon. building a secure future in mathematics for every child. (2013). Hentet 2013-12-03 fra https://global.oup.com/education/content/primary/series/numicon/

Ostad, S.A. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring- med fokus på elever med matematikkvansker.* Trondheim: Læreboka Forlag A/S.

PISA. (2006). *PISA-Programme for international student assessment.* Hentet 2013-12-03 fra http://www.pisa.no/resultater/matematikk.html

PISA. (2012). *PISA- programme for international student assessment.* Hentet 2013-12-17 fra http://www.pisa.no/resultater/pisa2012/index.html

Postholm, M.B. (2010). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Ringdal, K. (2009). *Enhet og mangfold* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (learning in doing: Social, cognitive and computational perspectives)* (Utkast 2008 utg.). University of Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D., Gray, E., Ali, M.B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., ... Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *1*(1), 81–104.

Utdanningsdirektoratet. (u.d.). *Grunnleggende ferdigheter.* Hentet 2014-02-08 fra http://www.udir.no/Lareplaner/Grunnleggende-ferdigheter

VG: PISA 2012. (2013, mars). *PISA-rapport: norske elever blir dårligere i matte og naturfag - VG nett om skole og utdanning.* Hentet 2013-12-03 fra http://www.vg.no/nyheter/innenriks/elevavisen/artikkel.php?artid=10148226

Wold, E. (2013, desember). *Debatten.* NRK 1.

Tillegg A

Informasjon til foreldre

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"Forbedre tallforståelsen hos elever med matematikkvansker"

Bakgrunn og formål
Med dette vil jeg be om tillatelse til at deres barn kan delta i mitt forskningsprosjekt. Jeg er en mastergradsstudent i spesialpedagogikk ved pedagogisk institutt, NTNU. I forbindelse med min masteroppgave ønsker jeg å lage et pedagogisk opplegg som har som formål å øke tallforståelsen hos noen elever på tredje trinn. Problemstillingen jeg tar utgangspunkt i er: "Hvordan kan økt forståelse for strukturerte mengder gi elever en økt tallforståelse?" I dette ligger det at vi som gruppe skal jobbe med å få en bedre forståelse for hva tall og mengder innebærer.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Jeg ønsker å lage en gruppe med tre elever som har en manglende tallforståelse. Det vil si at de bruker litt ekstra tid når de skal regne pluss- og minusoppgaver for eksempel. I samarbeid med min veileder, Per Frostad- professor i spesialpedagogikk, skal jeg utarbeide et undervisningsopplegg som varer i fem uker. Gruppen vil møtes i en time to ganger i uken, slik at det blir ti møter i alt. I forkant av disse gruppemøtene ønsker jeg å snakke med en og en elev slik at vi kan bli bedre kjent, i tillegg til at jeg kartlegger hva eleven kan og ikke kan innen matematikkfaget.

I forbindelse med gruppemøtene vil jeg be om tillatelse til at disse blir filmet. Disse opptakene behandles konfidensielt, og det er kun jeg om min veileder som vil ha tilgang til opptakene. Grunnen til at jeg ønsker å filme er for at jeg skal slippe å notere alt, og dermed kan ha fullt fokus på å hjelpe elevene. Jeg ønsker også å filme samtalene med elevene en og en. Videoopptakene vil bli slettet etter at jeg er ferdig med prosjektet. I oppgaven vil all informasjon om ditt barn anonymiseres, slik at det ikke er mulig å forstå hvem det er. Arbeidet er underlagt taushetsplikt. Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

I tilfelle dere har noen spørsmål, er min e- postadresse: elisalj@stud.ntnu.no. Dere kan også ringe meg på 9NN NN NNN. Per Frostad, min veileder, kan nås på per.frostad@svt.ntnu.no. Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste A/S.

For å samtykke i at barnet deres kan delta, vennligst skriv under nedenfor og returner svarslippen til lærer.

Med vennlig hilsen,
Elisa Ljøkjell Ervik.

Jeg/vi samtykker i at vårt barn kan delta i prosjektet som er blitt beskrevet ovenfor.

\- -
Underskrift foresatt(e)

Tillegg B
Transkripsjon av gruppemøte 8

Gruppemøte 8, 7.11.13

Alle elevene er tilstede. Kulerammen, tallbrikker og plugger ligger klart når elevene kommer.

Oppgave 1 (1 min.): Jeg flytter et antall kuler på kulerammen som jeg skjuler. Elevene får se kulene som er igjen, og skal utifra det finne ut hvor mange jeg skjuler.

Ida: Jeg skjuler 4, hun får se 6. Hun svarer 4 med en gang.

Mia: Jeg skjuler 8 og hun ser at det er 2 kuler igjen. Mia svarer først 11. Jeg spør hvor mange det er på en rad. Mia svarer 10. Hun begynner å se på hendene sine,

Jeg: «Hva er 10-2?»

Mia: «10 og ta vekk 2? Åtte?» Hun har hendene litt under bordet før hun svarer.

Malin: Jeg skjuler 3, hun ser 7. Hun svarer med en gang 9.

Jeg spør hvor mange hun ser som ikke er skjult. Hun svarer 7.

Jeg: «Hva er 10-7?»

Malin ser ei stund ut i lufta før hun svarer: «Fire, nei tre.»

Ida: Jeg skjuler 5, hun ser 5. Hun svarer 5 med en gang.

Mia: Jeg skjuler 6, hun ser fire. Hun ser noen sekunder før hun svarer 6.

Malin: Jeg skjuler 7, hun ser 3. Hun svarer 7 med en gang.

Oppgave 2 (8min, 0sek): Elevene får mengdene 11-15 hvor de får i oppgave å finne to tallbrikker som blir den gitte mengden tilsammen.

Oppgave 3 (10 min, 15 sek): Vi bygger tårn med tallbrikker og plugger, med mengden 12. Jeg legger tallbrikkene 2-10 i en pose. Elevene trekker en tilfeldig brikke, og skal finne den tallbrikken som blir 12 tilsammen med den brikken de trakk.

Malin. Hun trekker 9. Jeg spør hva hun mangler for å få til 12. Hun svarer 3 med en gang uten å se på tallbrikkene.

Mia: Hun trekker 10. Jeg spør hva hun mangler for å få 12 tilsammen. Hun tenker i noen sekunder uten å se på tallbrikkene. Hun svarer 2.

Ida: Hun trekker 7. Jeg spør hva hun mangler for å få 12 tilsammen. Hun svarer 5 med en gang.

Oppgave 4 (18 min, 0 sek): Elevene får tall mellom 1 og 10, og skal si hvor mye det er fra det tallet til 5.

Malin: Jeg: «Hvor mye er det fra 8 til 5». Hun svarer 3 med en gang.

Mia: Jeg: «Hvor mye er det mellom 9 og 5». Mia sier at hun ikke vet. Jeg ber henne legge opp 9 fingertall, noe hun gjør. Jeg spør hvor mange fler fingre enn 5 hun har. Hun svarer 4 med en gang.

Ida: Jeg: «Hvor mye er det mellom 3 og 5». Hun svarer 2 med en gang.

Malin: Jeg: «Hvor mye er det mellom 1 og 5». Hun svarer 4 med en gang.

Mia: Jeg: «Hvor mye er det mellom 10 og 5». Hun legger opp 10 tallfingre og svarer 5.

Ida: Jeg: «Hvor mye er det mellom 7 og 5?» Hun ser ei stund ut i luften, og svarer 0. Jeg spør hva 7-5 er. Hun legger opp 7 tallfingre, tar bort hele venstre hand og svarer 2.

Oppgave 5 (20 min, 55 sek): Jeg gir kulerammen til en og en elev, og gir de addisjonsoppgaver over 10 som de skal løse på kulerammen.

Ida: 10+1. Hun flytter alle kulene på øverste linje og en på neste, og svarer 11. Mia får 10+2 og gjør det riktig på samme måte. Malin. får 10+3 og gjør det riktig på samme måte.

Ida: 9+6. Hun flytter 9 på første linje og 6 på andre linje. Jeg forklarer hvordan det kan være lettere å finne svarer dersom hun flytter en kule fra de 6 over til de 9 slik at det blir 10 på første linje og 5 på andre. Jeg ber henne gjøre det samme som jeg har gjort. Hun ser med en gang at svaret er 15.

Mia: 9+5. Hun flytter 9 kuler på første linje og 5 på andre. Hun svarer med en gang at svaret er 14. Jeg spør hvordan hun tenkte. «Det er en mindre enn 15. I sted var det 10 og 5 nå er det 9 og 5, derfor blir det en mindre.»

Malin: 8+4. Hun svarer 12 med en gang uten å bruke kulerammen. Hun sier at hun ikke tenkte men bare visste det.

<u>Ida</u>: 8+5. Hun tenker i 20 sekunder. Jeg: «En lur måte å tenke på er å fylle tieren først.» Ida sier at svaret er 13. før jeg har snakket ferdig. Jeg holder opp kulerammen og flytter 8 på første linje og 5 på neste. Jeg: «En måte å se svaret på her er at dere ser at det er to femmere her. Da vet dere at det er 10, også har dere igjen 3 på den åtteren der. 10+3 er 13.»

<u>Mia:</u> 8+6. Hun bruker kulerammen og flytter 8 på første linje og 6 på andre. Hun svarer med en gang at svaret er 17. Jeg ber henne veksle inn 2 fra andre linje til 1. Hun ser da med en gang at svaret er 14. Jeg: «Vi kan også tenke på en annen måte. Hvor mye mangler det på 8 for å få 10?» Mia: «2». Jeg: Da kan vi tenke sånn at vi tar to fra 6ern slik at 8+2 blir 10. Da har vi igjen 4, og 10+4 er 14.»

<u>Malin</u>: 8+7. Jeg: «Kan du prøve å tenke sånn at du fyller en tier først? Hvor mye er det fra 8 til 10?» Malin: «Det er 2. Svaret blir 15.»

<u>Ida</u>: 8+4. «Det er 12». Svaret kommer etter 3 sekunder uten å bruke kulerammen. Jeg: «Hvordan tenkte du?». Ida: «Jeg tok 8 fingre inni hodet, også så jeg at det var to igjen til ti. Også to til, da blir det 12.»

<u>Mia</u>: 8+5. Hun ser ei stund ut i luften. «13. Det er to fra 8 til 10, også tenkte jeg litt mere.» Jeg: «så du tok to fra femmern slik at 8+2 blir 10? Hvor mye hadde du igjen av femmern da, når du har tatt bort to?» Mia: «3». Jeg: «Så da kan du regne ut 10+3?». Mia: «13».

7+5. «Det er 12. 7 er en mindre enn 8, og da blir det en mindre enn i sted.»

<u>Malin</u>: 9+7. «Det blir 16. Jeg tenkte ikke, jeg bare visste det.» Jeg: «Jeg ville tenkt sånn at 9 er en mindre enn 10, så hvis du tar en fra 7 og flytter den til niern, så får du 10+6 som er 16.»

7+8. «7+8?» Hun begynner å tulle, og sier at hun ikke vil tenke så mye. Jeg: «Jeg ville snudd på oppgaven og tatt 8+7. Hva mangler på 8 for å få 10?» Malin: «2». Jeg: « Da har du tatt to fra 7 slik at du fikk 10. Og da blir oppgaven 10+5?» Malin: «Det er 15».

<u>Ida</u>: 7+7. Hun tenker i noen sekunder. «Det blir 14». Hun legger frem 7 tallfingre og viser hvordan det er 3 igjen opp til 10. Så begynner hun å telle en og en oppover fra 10 til fjorten. Jeg viser på kulerammen hvordan det går an å tenke slik at 7 består av en femmer og en toer, og at man da har to femmere som blir 10 og to toere som blir 4. 10+4 blir 14.

Jeg: «Hvis vi skal ta 8+8. Da vet vi at vi har iallefall to femmere siden 8 er større enn 5. Kan dere legge opp fingertallet 8? Hvis dere har tatt bort fem, hvor mange har dere igjen? Det er 3. Når dere skal finne ut hva 8+8 er, kan dere ta bort femmerne som blir ti tilsammen, og da har dere to treere igjen, som blir 6 tilsammen. Da har dere 10+6 som blir 16».