

FORORD

Denne masteroppgaven ble skrevet våren og sommeren 2013 som en del av mastergraden i finansiell økonomi på Institutt for samfunnsøkonomi ved fakultet for samfunnsvitenskap og teknologiledelse.

Jeg ønsker å takke min veileder, Frode Kjærland. Han har vært en meget viktig støttespiller gjennom hele prosessen.

Videre ønsker jeg takke Markus Malema, Patrick Kiernan og Vincent Villamosa for uvurderlig hjelp i MATLAB. I tillegg takker jeg min far, Kjell Danielsen, for korrekturlesing og grammatikalske innspill. Jeg ønsker også sende en hilsen til min mor, Wenche Danielsen, for moralsk støtte, samt en hilsen til Stein-Erik Fleten for en hyggelig diskusjon rundt realopsjoner og Det Norske for informasjon om oljefelter i Norge.

Til slutt vil spesielt takke min forlovede, Lisa Fretin, som alltid har stått ved min side og støttet meg i denne prøvelsen.

Kristoffer Danielsen, august 2013

SAMMENDRAG

Denne avhandlingen presenterer en særegen realopsjonsmodell som estimerer optimal utvinningskapasitet fra undersjøiske oljereservoarer. Særegenheten i realopsjonsmodellen er at den tar høyde for realistiske kostnader i estimatet av optimal utvinningskapasitet.

Det er totalt fire kapitler i avhandlingen. Første kapittel er innledningen som inkluderer problemstillingen. I kapittel 2 utledes teorien som implementeres i realopsjonsmodellen. I hovedsak er relevant teori i avhandlingen stokastiske prosesser og opsjonsteori.

I kapittel 3 presenteres realopsjonsmodellen som maksimerer verdien av et oljereservoaret ved å estimere optimal utvinningskapasitet. All potensiell utvinningskapasitet vil ikke nødvendigvis bli benyttet, men høy utvinningskapasitet gir en fleksibilitetsverdi som kan utnyttes i tilfeller med fordelaktig oljepris. I tillegg estimeres de empiriske parameterverdiene for å analysere robustheten til modellen. Selve analysen av modellen blir gjennomført i kapittel 4.

Avhandlingen konkluderer med at implementeringen av mer en realistisk kostnadsstruktur er vellykket og forbedrer presisjonen ved realopsjonsmodellering med Monte Carlo simulering.

INNHALDSFORTEGNELSE

Forord	i
Sammendrag	ii
Innholdsfortegnelse	iii
Tabeller.....	vii
Figurer	viii
1 Innledning.....	1
1.1 Problemstilling.....	2
2 Teori	4
2.1 Opsjonsteori.....	4
2.1.1 Realopsjoner	4
2.1.2 Opsjonsfamilier.....	5
2.1.3 En europeisk kjøpsopsjon	6
2.2 Råvareprisen og tilfeldig gange	7
2.2.1 Stokastiske prosesser	8
2.2.2 Martingal.....	8
2.2.3 Itô-Prosess.....	9
2.3 Browns bevegelse	9
2.3.1 Browns aritmetiske bevegelse.....	11
2.3.2 Browns geometriske bevegelse.....	12
2.3.3 Vasicek-prosess.....	13

2.4 Itô's lemma	14
2.4.1 Browns geometriske bevegelse og Itô's lemma.....	15
2.4.2 Itô's Bivariable lemma.....	16
2.4.3 Korrelasjon med Cholsky dekomponering	17
2.5 Risikonøytral prosess.....	17
2.5.1 Risiko premie	17
2.5.2 Girsanov's teorem	17
2.6 Black-Scholes modellen	18
2.6.1 Risikofritt aktivum	20
2.6.2 Selvfinansierende replikasjon av portefølje.....	20
2.6.3 Deltasikring.....	21
3 Realopsjonsmodellen	23
3.1 Valg av oljeprismodell.....	23
3.1.1 Oljeprismodellen.....	24
3.1.2 Monte Carlo simulering	25
3.2 Parameter estimering	27
3.2.1 Risikofri rente	27
3.2.2 Eierfordelen.....	27
3.2.2.1 Statisk eierfordel	28
3.2.2.2 Dynamisk eierfordel.....	28
3.2.3 Volatilitet i Browns bevegelse	29
3.2.4 Kálmán-filter.....	30

3.2.5 Korrelasjon.....	30
3.2.6 Sammendrag av oljeprisparameterne	31
3.3 Reservoarmodellen	31
3.3.1 Verdiene estimert	33
3.4 Kontantstrømmer	34
3.4.1 Inntekter	35
3.4.2 Kostnader	36
3.4.2.1 Kostnadsstrømmer	36
4 Analyse.....	39
4.1 Realopsjonsmodellen.....	39
4.1.1 Nettonåverdi metoden	42
4.1.2 Flexibilitetsverdien	43
4.2 Følsomhetsanalyse.....	45
4.2.1 Analyse av skaleringsfaktoren	45
4.2.2 Maksimal platautvinning	50
4.2.3 Kostnadsnivå.....	51
4.3 Konklusjon og implikasjon.....	52
Referanseliste	i
Appendiks.....	iii
A Produksjonsverdier.....	iii
B Datasett oljeprisen	iv
C Matlab koden.....	vii

C.I	Råvareprisen	vii
C.II	Estimering av ekstra kapasitet	ix
C.IV	Realopsjonsverdien vs. nettonåverdi	xii

TABELLER

Tabell 1 Variablene benyttet i Black-Scholes modellen	6
Tabell 2 Det stokastiske inkrementet	9
Tabell 3 Browns bevegelse	10
Tabell 4 Egenskaper Browns bevegelse	11
Tabell 5 Browns aritmetiske bevegelse.....	11
Tabell 6 Browns geometriske bevegelse	13
Tabell 7 Variablene benyttet i Vasicek-prosessen	13
Tabell 8 Totalt syv punkter for at Black og Scholes (1973) modellen skal holde	19
Tabell 9 Variablene benyttet i Schwartz To-faktor modell.....	24
Tabell 10 Variablene benyttet i Monte Carlo simuleringen	26
Tabell 11 Variablene benyttet for å beregne den statiske eierfordelen	28
Tabell 12 Parameterverdiene estimert for Schwartz To-faktor modell.....	31
Tabell 13 Variablene benyttet i produksjonsmodellen.....	31
Tabell 14 Parameter verdiene for oljebrønnen	33
Tabell 15 Opptappingsverdier benyttet for å estimere de tre første produksjonsårene fra en oljebrønn produksjon.....	33
Tabell 16 Den teoretisk maksimale produksjonskapasiteten fra oljebrønnen uten ekstra kapasitet parameterisert for hele produksjonen på 30 år.....	34
Tabell 17 Variablene benyttet i innteksstrømmen	36
Tabell 18 Variablene benyttet i kostnadsfunksjonen	37
Tabell 19 Variablene benyttet i realopsjonsverdien	40
Tabell 20 En numerisk gjengivelse av realopsjonsverdien for initial utvinningskapasitet fra 15 millioner fat olje til 75 millioner fat olje.....	41
Tabell 21 Variablene benyttet for å beregne nettonåverdi	42
Tabell 22 En numerisk gjengivelse av realopsjonsverdien og nettonåverdien for utvinningskapasitet fra 15 millioner fat olje til 75 millioner fat olje	44
Tabell 23 Realopsjonsverdien med to skaleringsfaktorer 0.2 og 0.1 sammenlignet med nettonåverdien	49
Tabell 24 Realopsjonsverdien for maksimal praktisk produksjonskapasitet lik 50 millioner fat årlig og 27.5 millioner fat årlig	51

FIGURER

Figur 1 Hvert nivå er en kostnadsstrøm for en utvinningskapasitet mellom 15 og 75 millioner fat olje. Summen av hvert nivå gir de totale kostnadene for en gitt utvinningskapasitet.....	37
Figur 2 Kostnader som en funksjon av initial utvinningskapasitet	38
Figur 3 Monte Carlo simuleringen av oljepris	40
Figur 4 Realopsjonsverdien til reservoaret som en funksjon av initial utvinningskapasitet	41
Figur 5 Gjennomsnittsprisen av Monte Carlo simuleringen av to-faktor modellen.....	43
Figur 6 Realopsjonsverdien og nettonåverdien	43
Figur 7 Eksponentiel økning i fleksibilitetsverdien til utvinningskapasiteten	45
Figur 8 Monte Carlo simulering oljeprismodellen med skaleringsfaktor for volatilitet lik 0.246	
Figur 9 Monte Carlo simulering av oljeprisen fem år	47
Figur 10 Monte Carlo simulering av oljeprisen med skaleringsfaktor lik 0.1	48
Figur 11 Nettonåverdi og realopsjonsverdien med skaleringsfaktor lik 0.1 og 0.2	48
Figur 12 Realopsjonsverdien med praktisk platautvinning lik 27.5 millioner fat/år og 50 millioner fat/år olje.....	50
Figur 13 Realopsjonsverdien for forskjellige kostnadsnivå <i>akostnad</i>	52

1 INNLEDNING

Petroleumsinvesteringer er av stor betydning for Norges økonomi, både direkte ved salg av produktene på verdensmarkedet og indirekte gjennom en stor leverandørindustri. Man skal heller ikke glemme at aktiviteten på norsk kontinentalsokkel påvirker leverandørindustriens evne til å konkurrere globalt.

Olje_og_energidepartementet (2011) estimerte de totale petroleumsressursene på norsk kontinentalsokkel til 13 mrd. standard kubikkmeter oljeekvivalenter (Sm^3 o.e.). Med en Brent oljepris på \$ 100 pr. fat, er verdianslaget \$ 1.300 mrd. eller kr. 8.000 mrd. Det er åpenbart at en selv en liten prisendring kan gi store utslag i fremtidige inntekter. Endringer i valutakurs, spesielt mellom USD og NOK vil også påvirke bunnlinjen, men inngår ikke i denne avhandlingen.

Godt utført arbeid krever godt verktøy. Geologer og ingeniører har avansert verktøy til å løse sine oppgaver. Vurdering av drivverdighet er et spørsmål om pris på det salgbare produktet i forhold til pris på utvinning, både investering og drift. Denne oppgaven er ikke mindre krevende, og økonomene har således et tilsvarende behov for godt verktøy.

Et mulig verdsettelsesverktøy er realopsjonsteorien som allerede er benyttet for å modellere forskjellige aspekter ved oljeutvinning. Blant de første artiklene som presenterte en verdsettelsesmodell basert på realopsjonsteori, var Ekern (1988). Artikkelen har en binomial tilnærming til oljeutvinning samtidig som den påpeker muligheten til å benytte Black og Scholes (1973) som verdsettelsesmetode for å estimere verdien av et oljefelt.

Hull (2002) tok realopsjoner et steg videre ved å implementere to-faktor modellen til Schwartz (1997) i en Monte Carlo simulering. Artikkelen estimerer det optimale tidspunktet for å investere i en oljeplattform som en funksjon av oljeprisen. Videre utviklet realopsjonslitteraturen seg ved inkluderte usikkerhet i reservoarstørrelsen (Lund 1999). Realopsjonsteorien rundt oljeutvinning er godt oppsummert i artikkelen til Dias (2004). Artikkelen inkluderer alt fra en grundig gjennomgang av hele produksjonsprosessen til forskjellen i verdi mellom nettonåverdi og realopsjonsverdi.

Fleten et al. (2011) foreslår en modell som beregner optimalt utvidelsestidspunkt for å knytte mindre brønner til hovedbrønnen slik at produksjonen opprettholdes og verdien av oljeplattformen maksimeres.

Brennan og Schwartz (1985) understreker nytteverdien av å øke utnyttelsesgraden på eksisterende oljefelt. Økt utnyttelsesgrad innebærer at marginalkostnaden øker fordi oljen som utvinnes er mer krevende å hente ut. Det kan allikevel være mer lønnsomt å hente opp olje fra eksisterende brønner isteden for fra nye felt. Grunnen er at både leting og utvinning på større havdyp og høyere breddegrader medfører stor usikkerhet knyttet til kostnader og risiki (Regjeringen.no 2002).

1.1 PROBLEMSTILLING

Opsjonsmodellen definerer et rammeverk for verdsettelse av alle opsjonsklasser. Et godt rammeverk estimerer fremtidige pris på det underliggende aktivumet og gir en opsjonsverdi basert på utøvelseskurs.

Realopsjoner er en form for opsjon som verdsetter realverdier med opsjonsmodell rammeverket. For å estimere realopsjonsverdien er det nødvendig å modellere verdien av fremtidig inntekts- og kostnads-strømmer. Nettokontantstrøm diskonteres for å beregne verdien av prosjektet. Merverdien til realopsjonsmodellen er verdien av oppsiden til underliggende prosjekt i tillegg til vanlig nettonåverdi.

Realopsjoner er sjeldent *plain vanilla* fordi et prosjekt ofte har mange former for usikkerhet. Allikevel har realopsjonslitteraturen tradisjonelt brukt enkle kostnadsfunksjoner ved verdsettelse av prosjekter. Fleten et al. (2011) beregner et optimale investeringstidspunktet på en venteopsjon. Artikkelen argumenterer for flate utvinningskostnader ved utvidelse av eksisterende oljefelt med nye oljebrønner. Konsekvensen er at man bør øke produksjonen uansett kostnad så lenge råoljeprisen er høyere enn konstant marginalkostnad.

En mer realistisk modell vil derimot ha økende marginalkostnader fordi alle oljebrønnene ikke er like tilgjengelige. Rasjonell tankegang tilsier at den minst kostnadskrevende oljen utvinnes først og den mest kostnadskrevende oljen sist. De marginale utvinningskostnadene må derfor være konvekse.

Oljeutvinningen er ifølge Wallace et al. (1987) stegvis. Første steg er en leteperiode der oljereservene estimeres samtidig som at utvinningsteknologien bestemmes. Deretter begynner opptrappingen av oljeutvinningen til prosjektet når neste steg, maksimal utvinning av

oljereservene. Dette steget har også navnet platautvinningen. Til slutt kommer en nedtrappingsperiode før oljeutvinningen avsluttes.

Realopsjonsmodeller kan være veldig komplekse, (Finansdepartementet 2009), fordi de kan ta høyde for mange parametere, oljekurser, forventede marginalkostnader og den optimale økningen i produksjon i forhold til dagens produksjonsnivå

Denne avhandlingen presenterer en særegen realopsjonsmodell som verdsetter undersjøiske oljereserver ved å estimere optimal initial utvinningskapasitet. Særegenheten i realopsjonsmodellen er at den verdsetter oljereserver ved å implementere en realistisk kostnadsstruktur, samt at realopsjonsmodellen estimerer fleksibilitetsverdien som implisitt eksisterer i høy utvinningskapasitet.

Utvinningen av de første oljefatene fra et undersjøisk oljereservoar krever relativt lite teknologi som gir en flat kostnadsstruktur akkurat som i Fleten et al. (2011). Lav utvinningsrate modelleres derfor med en flat marginalkostnad og oljen utvinnes fra reservoaret når salgsprisen er høyere enn kostnadsterskel. For å øke den initiale utvinningskapasiteten, for å få større handlingsrom, en fleksibilitetsverdi, til oljereservoaret.

I tillegg er det kostnadskrevende å justere kapasiteten i etterkant. Det kan derfor være optimalt med en ekstra initial investering i dyrere teknologi som øker den totale utvinningskapasiteten. Samtidig er det viktig å implementere at kostnadene vil øke proporsjonelt med den økt utvinningskapasiteten. Konsekvensen er at deler av utvinningskapasiteten kun vil bli utnyttet i når oljeprisen er fordelaktig. Denne avhandlingen er således en utvidelse av Fleten et al. (2011).

Avhandlingen verdsetter undersjøiske oljereserver med usikre fremtidige oljepriser og konvekse marginale utvinningskostnader.

Avhandlingen er disponert på følgende måte. I kapittel 2 utledes teorien, i all hovedsak stokastiske prosesser og opsjonsteori. I kapittel 3 presenteres realopsjonsmodellen som maksimerer verdien av et oljereservoaret ved å estimere optimal utvinningskapasitet. All potensiell utvinningskapasitet vil ikke nødvendigvis bli benyttet, men høy utvinningskapasitet gir en fleksibilitetsverdi som kan utnyttes i tilfeller med fordelaktig oljepris. I tillegg estimeres de empiriske parameterverdiene for å analysere robustheten til modellen. Selve analysen av modellen blir gjennomført i kapittel 4.

2 TEORI

Formålet med kapittelet er å definere all nødvendig teori for å konstruere en realopsjonsmodell som predikerer optimal utvinningskapasitet fra et undersjøisk oljereservoar.

Teorien i dette kapittelet er blant andre basert på Berge og Kjærland (2003), Hull (2002), (McDonald 2006) og Berk og DeMarzo (2011).

2.1 OPSJONSTEORI

Et derivat er en finansiell kontrakt mellom to parter basert på ett eller flere underliggende aktiva. Det betyr at alle finansielle avtaler må ha to kontraktsparter. En opsjon er en form for derivat som baserer seg på et finansielt aktivum, hovedsakelig en aksjepris, en råvarepris eller en obligasjonspris. Avtalen gir kjøper rett, men ikke plikt, til å gjennomføre en handel med selger en gang i fremtiden. Fordi valget gjøres av kjøper, får selger et avtalt honorar i forkant, en opsjonspremie.

Retten til å utøve opsjonen er en lang posisjon i kontrakten. Lang posisjon gir retten til å selge eller kjøpe det underliggende aktivum til en forhåndsdefinert pris en gang i fremtiden. Motparten har en kort posisjon og får en opsjonspremie som kompensasjon. (Berk & DeMarzo 2011). En opsjon er først og fremst en forsikring for lang posisjonen, men kan selvfølgelig brukes til å spekulere.

En forsikringspremie er prisen man betaler for å få kompensasjon når uhellet inntreffer. På samme måte er opsjonsprisen en premie man betaler for å få et gode, eller en rettighet, når tiden er inne. For å verdsette opsjonspremien, bruker man i hovedsak en av to modeller *Binomial* eller *Black-Scholes*. Tidsperspektivet skiller modellene, men estimert opsjonspremie er kun marginalt forskjellig.

2.1.1 REALOPSJONER

Realopsjonslitteraturen verdsetter realverdier basert på opsjonsteorien. Verdien estimert av realopsjonsmodellen er en rett, men ingen plikt, til å gjennomføre et prosjekt. Et klassisk eksempel er en realopsjonsmodell som verdsetter venteopsjonspremien på undersjøiske

oljereserver (Trigeorgis & Schwartz 2004). I sin enkleste form har en rettighetshaver to valg, utvinne oljereserven med en gang eller vente for å få mer informasjon før en beslutning fattes. Denne venteverdien har navnet realopsjonsverdi eller kvasi-opsjonsverdi, (Finansdepartementet 2012).

Realopsjonsteorien tillater en mer kompleks modellering enn nettonåverdimetoden som tradisjonelt er blitt brukt til å verdsette prosjekter ved å ta høyde for usikkerheten i kontantstrømmen til investeringen.

I finansstyring er verdsettelse av fremtidige kontantstrømmer en av de viktigste og vanskeligste oppgavene. Realopsjonsteorien verdsetter i tillegg til kontantstrømmen også råderetten til investeringen. Eier av et oljefelt kan bygge en oljebrønn, matjord kan omgjøres til golfbaner eller boligtomter, og eier av en radiosender kan øke antall radiokanaler.¹

Realopsjonsmodellen baseres seg på at kun økonomisk lønnsomme prosjekter vil bli igangsatt, altså prosjekter med positiv kontantstrøm. Prosjekter med negativ kontantstrøm inkluderes ikke, fordi realopsjonsteorien kun verdsetter oppsiden av prosjekter. Det kan enkelt forklares at oljeutvinning bare forekommer med positive kontantstrømmer fordi det er relativt enkelt å redusere utvinningsraten til et nytt optimalt nivå.

2.1.2 OPSJONSFAMILIER

Opsjonsteorien har flere forskjellige familier, men det dreier seg alltid om kjøp eller salg av et eller flere underliggende aktivum. I hovedsak kan opsjoner deles tre grupper, europeisk, amerikansk og eksotisk.

Tidspunktet for å utøve opsjonsretten er nedfelt i opsjonskontrakten. Europeiske opsjoner har et utøvelsestidspunkt t som er sammenfallende med utløpsdato. Opsjonsholder kan på dette

¹Det er selvfølgelig rettslige begrensninger på det man faktisk har lov til å gjøre. Utvinning av olje i nordområdene er i dag ikke tillatt, en grunneier er begrenset av reguleringsplaner, og antallet radiokanaler er begrenset av antallet konsesjoner.

tidspunktet velge å utøve opsjonen. Hvis utøvelsesprisen er lavere enn verdien på det underliggende aktivum, vil rettighetshaver utøve opsjonen.

Amerikanske opsjoner kan utøves over et tidsintervall. Opsjonsholder kan fritt velge tidspunkt innen tidsintervallet for å utøve opsjonen, dog senest på utløpsdato.

Eksotiske opsjoner har kan ha andre begrensninger utover utløpsdato. Opsjonen kan ha flere intervall som i Bermuda-kontrakten, eller utøvelsesprisen kan være et gjennomsnitt over tid som i Asiatiske kontrakt. Skreddersydde kontrakter tilpasses partenes spesielle behov.

2.1.3 EN EUROPEISK KJØPSOPSJON

I denne avhandlingen benytter europeiske opsjoner Black og Scholes (1973) europeiske opsjoner for å estimere verdien av de undersjøiske oljereservoarverdiene. Det som hovedsakelig skiller europeisk opsjoner fra andre opsjoner er grensebetingelsene definert i ligning 2.1.

$$V[s, t] = \max(s - K, 0) \quad 2.1$$

Black-Scholes modellen estimerer opsjonspremien som en lukket form. Det vil si at man finner en eksplisitt verdi C , definert i ligning 2.2. Opsjonspremien og opsjonsverdien er nødvendigvis like ved kontraktsinngåelse gitt rettferdig prising. Opsjonsverdien derimot endres i løpet av kontraktens levetid.

$$C(s_0, K, \sigma, r_f, T, t, \delta) = s_0 e^{-\delta(T-t)} N(d_1) - K e^{-r_f(T-t)} N(d_2) \quad 2.2$$

TABELL 1 VARIABLENE BENYTTET I BLACK-SCHOLES MODELLEN

C	Opsjonsverdien
s_0	Prisen på det underliggende aktivumet.
K	Utøvelsespris
$T - t$	Tid til utøvelse
r_f	Risikofri rente
e	Grunntallet 2.71828
$N(d_i) \ i = 1,2$	Den kumulative standard normalfordelingen
$N(d_1)$	Sannsynligheten for prisen på underliggende aktivum
$N(d_2)$	Sannsynligheten for utøvelsesprisen

Utøvelsesprisen er normalfordelt og definert i 2.3:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(r_f - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad 2.3$$

På utløpsdato, som er utøvelsestidspunktet for en europeisk opsjon, er t lik T . Da er $\sigma\sqrt{T-t}$ null som gir lik verdi for d_1 og d_2 . Normfordelingen tar enten verdien en eller null.

$$\begin{aligned} \text{Hvis } s > K \text{ er } \ln\left(\frac{s}{K}\right) > 0 \text{ og } \frac{\ln(s/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} \rightarrow \infty \text{ da blir } N(d_1) = N(d_2) = 1 \\ \text{Hvis } s < K \text{ er } \ln\left(\frac{s}{K}\right) < 0 \text{ og } \frac{\ln(s/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} \rightarrow -\infty \text{ da blir } N(d_1) = N(d_2) = 0 \end{aligned} \quad 2.4$$

Veldig enkelt fortalt er opsjonsverdien på utløpsdato fra Black og Scholes (1973) modellen kun egenverdien til derivatet, altså $C = S - K$ hvis $S > K$ og $C = 0$ hvis $S < K$. Opsjonspremien er derfor alltid større eller lik null. (McDonald 2006)

Før forfallsdato kan opsjonspremien C være høyere enn egenverdien $S - K$ fordi tidsverdien av opsjonen er positiv. Positiv tidsverdi vil si at det er en sannsynlighet for at opsjonsverdien kan øke før utløpsdato.

En komplet utledning av Black og Scholes (1973) blir presentert i avsnitt 2.6.

2.2 RÅVAREPRISEN OG TILFELDIG GANGE

For å estimere realopsjonsverdien av oljereservene, trenger man estimater for både salgsprisen og kostnaden knyttet til utvinning av oljen. Realopsjonslitteraturen beskriver flere modeller for å predikere prisutviklingen til råoljen. Felles for de fleste modellene er at råvareprisen følger Browns geometriske bevegelse, BGB. En grundig definisjon av stokastiske prosesser og Browns bevegelse er derfor nødvendig for å forstå prisutviklingen benyttet i realopsjonsmodellen.

Et forstyrrende element i litteraturen om stokastiske prosesser, er de mange navnene og uttrykkene. Browns bevegelse, også kalt Wienerprosessen, er et spesielt tilfelle innen diffusjonsprosesser.

Browns geometriske bevegelse, avsnitt 2.3, som er en form for Browns bevegelse, har mange likheter med risikable aktiva (McDonald, R. L. 2006). BGB er selve grunnlaget i diskusjoner om opsjonsprising og verdsettelsesmodellen til Black og Scholes (1973).

Browns geometriske bevegelse gjentar en tilfeldig gange uendelig mange ganger over et lukket tidsintervall slik at bevegelsen blir tilnærmet kontinuerlig. Hvert skritt av den tilfeldige gangen er et rettferdig spill med to utfall, opp eller ned. Et rettferdig spill har forventet avkastning lik null, det vil si den samme sannsynligheten for begge utfallene. Å kaste et perfekt kronestykke i luften er et rettferdig spill hvor utfallene, mynt og kron, definerer oppgang og nedgang.

Dette er filosofien bak BGB, men snarere enn å kaste et kronestykket uendelig mange ganger i løpet av et tidsintervall, estimeres den forventede verdien av det rettferdige spillet med en standard normalfordelingen i Matlab.

2.2.1 STOKASTISKE PROSESSER

En stokastisk prosess er summen av endringer over tid av en eller flere tilfeldige variabler. Prosessen starter ofte på et tidspunkt 0 og stopper på et tidspunkt T .

Gitt at sannsynlighetsfordelingen til den tilfeldige variabelen er kjent, er det mulig å beskrive den stokastiske banen av mulige utfall i løpet av prosessen. En stokastisk differensialligning beskriver en stokastisk prosess hvor de tilfeldige variablene er en funksjon av tid. En diffusjonsprosess er form for stokastisk prosess som beskriver alle verdiene til en stokastisk differensiallikning definert på et kontinuerlig tidsintervall (McDonald 2006).

2.2.2 MARTINGAL

Martingal er sentral i definisjonen av risikonøytrale sannsynligheter. En stokastisk prosess Z_t er Martingal hvis den forventede verdien er lik dagens verdi. Martingal definerer derfor et rettferdig spill. Martingal er formelt definert i ligning 2.5.

$$E(Z_{t+h}|Z_t) = Z_t; h > t \quad 2.5$$

2.2.3 ITÔ-PROSESS

En Itô-prosess er en stokastisk prosess der drift og volatilitet er en funksjon av bevegelsen til den samme stokastiske variabelen. Definer den stokastiske variabelen som s_t med drift, $\alpha_{s,t}$, volatilitet, $\sigma_{s,t}$ og stokastisk variabel Z . Differensialform til en Itô-prosess er formelt definert i ligning 2.6.

$$ds_t = \alpha_{s,t}dt + \sigma_{s,t}dZ \quad 2.6$$

2.3 BROWNS BEVEGELSE

Browns bevegelse Z_t er en stokastisk prosess. Et stokastisk inkrement er endringen i verdi av Z_t fra tidspunkt t til tidspunkt $t + h$. Browns bevegelse er summen av uendelige mange små inkremitter definert over et lukkede tidsintervall $[0, T]$. Gitt at inkrementet er lite nok, kan det uttrykkes som dZ_t . Det stokastiske inkrement er formelt definert i ligning 2.7. (Hull 2002; McDonald 2006).

$$dZ_t \approx Z_{t+h} - Z_t = y_{t+h}\sqrt{h} \quad 2.7$$

Det stokastiske inkrementet er Martingal fordi forventet verdi av Y_t er null.

TABELL 2 DET STOKASTISKE INKREMENTET

Z_t	Den stokastiske prosess verdien på tidspunkt t
Z_{t+h}	Den stokastiske prosess verdien på tidspunkt $t + h$
dZ_t	Et stokastisk inkrement
Y_t	En stokastisk variabel med en binomisk fordeling
$y_{t+h} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$	Utfallsrommet til den stokastiske variabelen tidspunkt $t + h$
$E(y_t) = 0$	Den forventede verdien av den stokastiske variabelen er null
$Var(y_t) = 1$	Den forventede variansen til y_t
h	Størrelsen på inkrementet
$[0, T]$	Størrelsen på tidsintervallet
$n = T/h$	Antall inkremitter på tidsintervallet

Ligning 2.8 summerer alle de stokastiske, binomiske inkrementene for å genere den stokastisk prosessen Z_t , Browns bevegelse.

$$\begin{aligned}
Z_t - Z_0 &= \sum_{i=1}^n (Z_{ih} - Z_{(i-1)h}) \\
Z_t - Z_0 &= \sum_{i=1}^n y_{ih} \sqrt{h} = \sqrt{T} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} y_{ih}
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

TABELL 3 BROWNS BEVEGELSE

$E(y_t) = 0$	$E\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} y_{ih}\right) = 0$	Forventet verdi er null
$Var(y_t) = 1$	$T \cdot Var\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} y_{ih}\right) = T$	Variansen er lik T

Browns bevegelse er Martingal.

Hvert inkrement er uavhengig og identisk fordelt. Antallet inkremitter vil nærme seg uendelig når størrelsen på vært enkelt inkrement går mot null ($\sqrt{h} \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$). Hvis h er kort nok², kan endringen i h defineres om som dt .

$$dZ_t = \sqrt{dt} \tag{2.9}$$

Den stokastiske prosessen er som summen av de binomiske inkrementene, ligning 2.10, eller tilsvarende en stokastisk integrasjon, ligning 2.11.

$$Z_t = Z_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{T} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n y_{ih} \right] \tag{2.10}$$

$$Z_t = Z_0 + \int_0^T dZ_t \tag{2.11}$$

Ligning 2.11 er en stokastisk integrasjon fordi dZ_t er en tilfeldig variabel.

Sentralgrenseteoremet sier at summen av identiske og uavhengige binomiske fordelinger er normalfordelt når antall inkremitter går mot uendelig, $n \rightarrow \infty$. Den stokastiske inkrementet dZ_t er derfor normalfordelt.

² Den matematiske definisjonen på kort nok er uklart, men det er veldig kort inkrement.

$$dZ_t \sim N(0, T) \quad 2.12$$

Browns bevegelse har derfor noen gode egenskaper som er summert opp i Tabell 4

TABELL 4 EGENSKAPER BROWNS BEVEGELSE

$$Z_0 = 0$$

$Z_{t+s} - Z_t$ er normalfordelt med gjennomsnitt lik null og variansen lik s

$Z_{t+s_1} - Z_t$ er uavhengig av $Z_t - Z_{t-s_2}$ gitt at $s_1, s_2 > 0$. Inkrementer som ikke overlapper hverandre har uavhengige fordelinger.

2.3.1 BROWNS ARITMETISKE BEVEGELSE

Browns aritmetiske bevegelse s_t er en utvidelse av Browns bevegelse fra avsnitt 2.3. Browns aritmetisk bevegelse er en Itô-prosess, definert i avsnitt 2.2.3, med drift lik α og en skalert volatilitet lik σ på tidspunkt t .

TABELL 5 BROWNS ARITMETISKE BEVEGELSE

s_t	Den stokastiske prosess verdien på tidspunkt t
s_{t+h}	Den stokastiske prosess verdien på tidspunkt $t + h$
α	Deterministisk drift i prosessen
σ	Skaleringsfaktor volatilitet
ds_t	Et stokastisk inkrement
Y_t	En stokastisk variabel med en binomisk fordeling
h	Størrelsen på inkrementet

Akkurat som i enkel Browns bevegelse blir inkrementet i Browns aritmetiske bevegelse, ligning 2.13, modellert med en binomiske hjelpevariabel y_t .

$$s_{t+h} - s_t = ah + \sigma y_t \sqrt{h} \quad 2.13$$

Når inkrementene er kort nok forenkles $s_{t+h} - s_t$ til ds_t og $y_{t+h} \sqrt{h}$ til dZ_t definert i ligning 2.7. Inkrement i Browns aritmetiske bevegelse er definert i ligning 2.14.

$$ds_t = \alpha \cdot dt + \sigma dZ_t \quad 2.14$$

Browns aritmetiske bevegelse s_t er summen av de stokastiske inkrementene ds_t over hele tidsintervallet $[0, T]$. Skaleringsfaktoren σ gjør det mulig å forhånds definere volatilitetsnivå i

bevegelsen. Leddet αdt gir en deterministisk drift til prosessen som kan ha positiv og negativ verdi.

$$s_t = s_0 + \int_0^T \alpha dt + \int_0^T \sigma dZ_t \quad 2.15$$

s_t er summen av en deterministisk og en stokastisk integrasjon. Verdien av stokastisk integrasjoner oppnås ved å bruke Itô's lemma avsnitt 2.4.

Inkrementet i prosessen er normalfordelt fordi det er en skalert Browns bevegelse. Den forventet verdien av inkrementet er lik αT og variasjonen til inkrementet er lik $\sigma^2 T^2$.

$$ds_t \sim N(\alpha T, \sigma^2 T^2) \quad 2.16$$

Browns aritmetiske bevegelse gir en mer fleksibel og naturtro modell, men det to grunner til at den ikke kan brukes direkte til modulering av aksjekurser.

Den stokastiske prosessen kan få negative verdier. Aksjekursen til et børsnotert selskap kan ikke få en negativ verdi.

Forventet pekuniær gjennomsnittsverdi og variansen er uavhengig av nivået på den stokastiske variabelen. Hvis den stokastiske variabelen dobles, vil den også forventete avkastningen og standardavviket dobles. Volatiliteten øker proporsjonelt med aksjekursen noe som ikke reflekteres av empiriske observasjoner.

2.3.2 BROWNS GEOMETRISKE BEVEGELSE

Browns geometriske bevegelse BGB er alternativ utvidelse av Browns bevegelse avsnitt 2.3. definert i avsnitt 2.2.3 med drift $\alpha_{s,t}$ og skaleringsfaktor for volatilitet $\sigma_{s,t}$ relativ til verdien på den stokastiske prosessen, s_t definert i ligning 2.17.

$$\alpha_{s,t} = (\alpha - \delta) \cdot s \text{ og } \sigma_{s,t} = \sigma \cdot s \quad 2.17$$

Browns geometriske bevegelse er ikke er normalfordelt, men log-normalfordelt, fordi inkrementet ds endres relativt til verdien i den stokastiske prosessen, s .

$$ds = (\alpha - \delta) s dt + \sigma s dZ \quad 2.18$$

Differensialligningen 2.18 utledes etter den samme metoden som Browns aritmetiske bevegelse avsnitt 2.3.1 og Browns bevegelse avsnitt 2.3

TABELL 6 BROWNS GEOMETRISKE BEVEGELSE

s_t	Den stokastiske prosess verdien på tidspunkt t
δ	Dividende betalt av det underliggende aktivumet
α	Deterministisk drift i prosessen
σ	Skaleringsfaktor volatilitet
ds_t	Et stokastisk inkrement

Driften α reduseres for eventuel dividende δ utbetalt av det underliggende aktivumet.

Verdien av den stokastiske prosessen er definert av stokastiske integrasjon som følger i ligning 2.19

$$s_t - s_0 = \int_0^t (\alpha - \delta) s dt + \int_0^t \sigma s dZ \quad 2.19$$

I likhet med Browns aritmetiske bevegelse benyttes Itô's lemma, avsnitt 2.4, for å integrere Browns geometriske bevegelse ligning 2.19.

2.3.3 VASICEK-PROSESS

Vasicek-prosessen beskriver en *mean-reverting* Itô-prosess fra ligning 2.6. Denne familien prosesser svinger rundt et gjennomsnitt i motsetning til BGB som driver i en positiv eller negativ retning. (Hull 2002)

Mean-reverting prosesser ble først definert i Uhlenbeck og Ornstein (1930) og introdusert i opsjonsteori av Vasicek (1977) i en-faktor modell for å verdsette obligasjoner. Vasicek-prosessen er definert i 2.20.

$$d\delta = k(a - \delta)dt + \sigma dZ \quad 2.20$$

Parallellen til Itô prosess er $\alpha_{\delta,t} = k(a - \delta)$ og $\sigma_{\delta,t} = \sigma$ fra ligning 2.6.

TABELL 7 VARIABLENE BENYTTET I VASICEK-PROSESSEN

a	Forventet avkastningen på underliggende aktivum
-----	---

δ	Verdien på aktivumet som kan ta både positive og negative verdier
t	Tid
dt	Umiddelbar endring tid
k	Reverseringsfaktor, hvor fort man vender tilbake til gjennomsnittet.
$Z(t)$	En stokastisk variabel som følger Browns bevegelse
σ_δ	Skalering av variasjonen i den stokastiske variabelen

Modellen implementeres i Monte Carlo simuleringer ved å bruke ligning 2.21 (Berg 2011).

$$\delta_{t+1} = \delta_t e^{-a \cdot dt} + k \cdot (1 - e^{-a \cdot dt}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a \cdot dt}}{2a}} \cdot N(0,1) \quad 2.21$$

2.4 ITÔ'S LEMMA

I artikkelen Itô (1944) ble en metode for å finne verdien på et stokastisk integral utledet. I ettertid har denne metoden det blitt kjent som Itô's lemma. Matematisk er lemmaet på meget høyt nivå og utledningen vil derfor kun bli skissert.

V er opsjonsverdien på et risikabelt aktivum. Opsjonsverdien er en funksjon av det underliggende aktivumet s_t og t tid. En Taylor-ekspansjon på punktet (s, t) gir en lineær tilnærming til V på et definert punkt. Itô brukte denne velkjente tilnærmingen da han utarbeide sitt lemma.

$$V_{s+ds, t+dt} = V_{s,t} + \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} (ds)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} ds dt + \dots \quad 2.22$$

Små endringer opsjonsverdien er tilnærmet lik dV hvis hvert inkrement er lite nok³.

$$dV \approx V_{s+ds, t+dt} - V_{s,t} \quad 2.23$$

I korte trekk kombinerer Itô's lemma ligning 2.22 og ligning 2.23. Itô's lemma er form for Taylor ekspansjon av en stokastisk funksjon $V_{s,t}$.

Itô's lemma er formelt definert som følger:

³ Her også, hva som er lite nok er en matematisk underfundighet som har liten praktisk nytte

$$dV = V_s ds + V_t dt + 0,5 \cdot V_{ss} (ds)^2 \quad 2.24$$

Hvis det underliggende aktivumet følger Browns geometriske bevegelse, en Itô-prosess, er inkrementet definert i ligning 2.18.

Støyen, til den tilfeldig variabelen Z , i Itô-prosesser overdøve driften, α på korte intervaller. Det vil si at leddene dt^2 og $dV \cdot dt$ fra ligning 2.22, samt alle høyere variasjoner er null.

Leddene $(ds)^2$ er derimot definert lik $\sigma^2 s^2 dt$ takket være multipliseringsregelen. (McDonald 2006) som gir ligning 2.25.

$$dV = (\alpha s V_s + 0,5 \sigma^2 s^2 V_{ss} + V_t) dt + \sigma s V_s dZ \quad 2.25$$

Hvis det ikke noe usikkerhet er volatiliteten null, $\sigma = 0$ og ligning 2.25 reduseres til en ordinær differensialligning.

$$dV(s, t) = V_s ds + V_t dt \quad 2.26$$

2.4.1 BROWNS GEOMETRISKE BEVEGELSE OG ITÔ'S LEMMA

Ligning 2.27 beskriver en lognormal Itô-prosess (Hull 2002; McDonald 2006).

$$s_t = s_0 e^{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma Z(t)} \quad 2.27$$

Itos lemma definert i ligning 2.24 viset at den stokastiske integrasjonen av ligning 2.20

$$ds = \frac{\partial s}{\partial Z} dZ + \frac{\partial s}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial Z^2} [dZ_t]^2 \quad 2.28$$

For benytte ligning 2.27 i ligning 2.28 er det nødvendig med litt mellomregning

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_t}{\partial t} &= \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) s_t, \quad \frac{\partial s_t}{\partial Z} = \sigma s_t, \quad \frac{\partial^2 s_t}{\partial Z^2} = \sigma^2 s_t, \quad [dZ_t]^2 = dt \\ ds_t &= \sigma s_t dZ + \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) s_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 s_t dt \end{aligned} \quad 2.29$$

Ved å implementere verdiene fra ligning 2.29 i ligning 2.28 utledes inkrementet til Browns geometriske bevegelse fra ligning 2.18 gjengitt i ligning 2.30.

$$ds_t = (\alpha - \delta)s_t dt + \sigma s_t dZ \quad 2.30$$

Den prosentmessige endringen i aksjeverdien blir da som følger:

$$\frac{ds_t}{s_t} = (\alpha - \delta)dt + \sigma dZ(t) \quad 2.31$$

Browns geometriske bevegelse og er normalfordelt. s_t er har derfor en lognormal fordeling. Det er tydelig fra ligning.2.27 at

$$\ln[s_t] \sim N(\ln[s_0] + (\alpha - \delta - 0,5\sigma^2) \cdot T, \sigma^2 T) \quad 2.32$$

Browns geometriske variabel følger en lognormalfordeling. Ligning 2.27 kan dermed implementeres i Monte Carlo simuleringen av råoljekursen.

2.4.2 ITÔ'S BIVARIABLE LEMMA

Itô's bivariable lemma er basert på Itô's lemma fra avsnitt 2.4, men kombinerer to korrelerte Itô-prosesser.

$$ds = v_s dt + \sigma_s dZ_s \quad 2.33$$

$$d\delta = v_\delta dt + \sigma_\delta dZ_\delta \quad 2.34$$

Korrelasjonen mellom prosessene er gitt i ligning 2.35

$$E(dZ_s \cdot dZ_\delta) = \rho_{s,\delta} dt \quad 2.35$$

Gitt at $V_{s,\delta}$ er to ganger differensierbar funksjon av s og δ kan variasjon endringen i opsjonsverdien, dV , uttrykkes som følger:

$$dV_{s,\delta,t} = V_s ds + V_\delta d\delta + dsd\delta V_{s\delta} + 0,5ds^2 V_{ss} + 0,5d\delta^2 V_{\delta\delta} + V_t dt \quad 2.36$$

Dette er basert på de samme prinsippene som Itô's lemma. Den eneste forskjell er leddet $dsd\delta V_{s\delta}$ som implementerer korrelasjon mellom de to stokastiske prosessene. Hvis prosessene er motsatt korrelert, vil verdien av opsjonen reduseres, $dsd\delta V_{s\delta}$. Da er $dsd\delta V_{s\delta}$ negativ fordi risikoen er lavere. Hvis bevegelsen er i samme retning, vil verdien øke fordi momentet i endringen øker for hver endring.

2.4.3 KORRELASJON MED CHOLSKY DEKOMPONERING

For implementere korrelasjon mellom to stokastiske variabler, s og δ , benytter man seg av en korrelasjonskoeffisient $\rho_{s,\delta}$ definert i ligning 2.35 Z .

$$\begin{aligned} Z_s &= \epsilon_1 \\ Z_\delta &= \rho_{s,\delta}\epsilon_1 + \epsilon_2\sqrt{1 - \rho_{s,\delta}^2} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Variablene Z_s , Z_δ , ϵ_1 og ϵ_2 er standard normalfordelt. Korrelasjonen mellom Z_s og Z_δ er definert av koeffisienten $\rho_{s,\delta}$. Ligning 2.35, Cholsky dekomponeringen gjør det mulig å inkludere utfallene av Z_s i estimeringen av Z_δ .

2.5 RISIKONØYTRAL PROSESS

Investorer har aversjon mot risiko. De verdsetter mindre en økning på en enhet enn et tap på en enhet. På grunn av den binomiale konstruksjonen vil ikke Browns geometrisk bevegelse være Martingal for en risikoavers investor med sanne sannsynligheter. Det er derfor nødvendig å ta høyde for dette i Monte Carlo simuleringen.

2.5.1 RISIKO PREMIE

Kapitalverdimodellen (KVM) definerer risikoen som kovariansen mellom underliggende aktivum og markedsavkastningen. Risikopremien er meravkastningen som investor forlanger for å holde underliggende aktivumet isteden for markedsporteføljen. Markedsporteføljen har risikofri avkastning r . Underliggendeaktivum s har forventet avkastning α_s . Risikopremien er dermed definert som forskjellen mellom forventet avkastning og risikofri avkastning.

$$\text{Risiko premie}_s = \alpha_s - r \tag{2.38}$$

2.5.2 GIRSANOV'S TEOREM

Girsanov's teorem sier at Browns geometriske bevegelse er Martingal ved å endre sannsynlighetsfordelingen. Girsanov's benytter Sharpe's forholdstall til å endre sannsynlighetsmålet til risikonøytrale sannsynligheter. Dette er mulig fordi Sharpe's

forholdstall er likevekts-avkastningen som investorer forlanger for å holde den ekstra risikoen (McDonald 2006).

Sharpe's forholdstall for et aktivum s er risikopremien i forhold til volatiliteten σ_s .

$$\text{Sharpe's forholdstall}_s = \frac{\alpha_s - r}{\sigma_s} = \lambda_s \quad 2.39$$

Sharpe's forholdstall benyttes for å sammenligne godt diversifisert porteføljer av aktiva, men ikke for å sammenligne to individuelle aktiva. To aktiva med samme volatilitet kan ha forskjellig risikopremie hvis den diversifiserbare risiko er forskjellig.

Girsanov implementerer dermed Sharpe's forholdstall i Browns geometrisk bevegelse fra ligning 2.31.

$$(\alpha_s - \delta_s)dt + \sigma_s dZ_s = (r - \delta_s)dt + \sigma_s \left(dZ_s + \frac{\alpha_s - r}{\sigma_s} dt \right) \quad 2.40$$

For å utligne risikoaversjonen, må man manipulere sannsynlighetsfordeling til Z_{t+h} i ligning 2.40 slik at positive utfall blir mer sannsynlig. Driften må således reduseres til risikofri rente for fremdeles ha riktig pris på det underliggende aktivum. Resultat ved å bruke Sharpe's forholdstall er ligning 2.41.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{s} &= (r - \delta_s)dt + \sigma_s d\tilde{Z}_s \\ d\tilde{Z}_s &= dZ_s + \lambda_s dt \end{aligned} \quad 2.41$$

$d\tilde{Z}_s$ ble konstruert for verdsette aktivumet som om investoren var risikonøytral. Det er dermed mulig å implementere teorien fra avsnitt 2.3.2 om Browns geometrisk bevegelse. Sannsynlighetsfordeling til $d\tilde{Z}_s$, den risikonøytrale prosessen, har navnet risikonøytralt mål.

Legg merke til at Volatilitetsskalaen, σ_s , forblir uendret i den risikonøytrale prosessen.

2.6 BLACK-SCHOLES MODELLEN

Fischer Black og Myron Scholes utledet i samarbeid med Robert C. Merton en modell for å verdsette finansielle opsjoner basert på prisen på det underliggende aktivumet. Modellen ble presentert i Black og Scholes (1973) *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* og

leder frem til Black-Scholes partielle differensial-ligning, PDL, som beskriver bevegelsen i replikasjonsporteføljen og således den potensielle opsjonsrisikoen (Dineen 2005).

Black og Scholes (1973) verdsetter en kjøpsopsjon eller en salgsopsjon som en portefølje av et risikabelt aktivum og et risikofritt aktivum. Modellen replikerer kjøpsopsjonen med N andeler av det risikable aktivumet og φ risikofri obligasjoner. Den ekstra replikasjonskostnaden er opsjonspremien til kjøpsopsjonen (Copeland et al. 2005).

I Black og Scholes (1973) beskrives en kort posisjonen i en kjøpsopsjon. Risikoen i posisjonen vurderes som en funksjon av underliggende aktivum. Den korte posisjonen sikres ved å replikere posisjonen med en porteføljen av N andeler i det underliggende aktivumet og φ andeler i et risikofritt aktivum. Den totale verdien av investeringen, I , er da null. Nullspillet er formelt definert i ligning 2.42.

$$I = V(s, t) + Ns + \varphi = 0 \quad 2.42$$

TABELL 8 TOTALT SYV PUNKTER FOR AT BLACK OG SCHOLES (1973) MODELLEN SKAL HOLDE

1	Underliggende aktivum følger Browns geometriske bevegelsen
2	Underliggende aktivum betaler ikke dividende og har ikke andre utbetalinger. Modellen er blitt videre utviklet til å omfavne et aktivum som utbetaler dividende
3	Opsjonen er europeisk og kan bare innløses på forfallsdato
4	Det er ingen transaksjonskostnader ved å selge eller kjøpe aksjer eller opsjoner
5	Korttidsrente, r , er kjent og konstant over tid
6	Full tilgang til lånemarkedet. Det er ingen begrensninger på låneopptak, og lån gis med kortsiktig risikofri rente
7	Det er ingen begrensninger på å selge kort. Når man selger kort eier man ikke opsjonskontrakten i det man selger den. Når kjøper utøver opsjonskontrakten, må selger enten kjøpe underliggende aktivum på markedet eller gjøre opp avtalen pekuniært for å dekke den korte posisjonen.

I tillegg forutsetter modellen ideelle forhold i aksje- og opsjonsmarkedet, det vil si at det ingen arbitrasjemuligheter.

Black-Scholes modellen verdsetter opsjonspremien på europeiske opsjoner i lukket form⁴

2.6.1 RISIKOFRITT AKTIVUM

Det risikofrie aktivumet φ gir en proporsjonel og kontinuerlig avkastning r lik risikofri rente i lånemarkedet.

$$\varphi_t = \varphi^{-r(T-t)} \quad 2.43$$

Differensialformen av det risikofrie aktivumet uttrykker en endring i verdi over tid fordi det ikke er knyttet til usikkerhet til denne aktivaklassen.

$$d\varphi = r\varphi dt \quad 2.44$$

2.6.2 SELVFINANSIERENDE REPLIKASJON AV PORTEFØLJE

For å finansiere en lang posisjon i et aktivum går man kort i et annet finansielt aktivum slik at kostnadene går i null. For å finansiere kjøpet av et risikabelt aktivum, kan går man kort i et risikofritt aktivum.

Opsjonspremien V er en funksjon av underliggende aktivum s , tid til utløp av opsjonen t og eventuell dividende δ .

Porteføljen inkluderer opsjonskontrakten samt risikabelt og risikofritt aktiva som endrer verdi kontinuerlig som en funksjon av underliggende aktivum og tid. Ved å total differensiere investeringsporteføljen, ligning 2.42, oppnås ligning 2.45 et uttrykk som beskriver verdiendringen av opsjonen.

$$dI = dV(s, t) + N(ds + \delta s dt) + d\varphi = 0 \quad 2.45$$

⁴ En lukket form bruker kun addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og multiplikasjon for å finne løsningen

For å gå ligning 2.45 til ligning 2.46 benyttes teorien utledet om råvareprisen og tilfeldig gange i avsnitt 2.1.3, Itô's lemma, ligning 2.24, Browns geometrisk bevegelse, ligning 2.18 og differensialligningen til det risikofrie aktivumet, ligning 2.44.

$$dI = V_t dt + V_s ds + 0,5\sigma^2 s^2 V_{ss} dt + N(ds + \delta s dt) + r\phi dt = 0 \quad 2.46$$

Merk at en lang posisjon i et risikabelt aktivum mottar porteføljen dividende, $N\delta S dt$, som må inkluderes.

2.6.3 DELTASIKRING

Man deltasikrer ved å sette $N = -V_s$. Det vil si at man har samme antall aksjer som opsjonsverdien endres i forhold til underliggende aktivum. Deltasikringen medfører at ds leddet forsvinner og som en konsekvens også usikkerheten fra dZ . Investeringen er derfor uten usikkerhet, altså risikofri.

Fordi investeringen er uten risiko og går i null, benytter man et risikofritt aktivum for å finansiere sikringen av opsjonen.. Det vil si at en kort posisjon i et risikofritt aktivum finansierer kjøpet av et risikabelt aktivum for å sikre en kort posisjon i en kjøpsopsjon. Nøyaktig antall risikofrie aktiva som er nødvendig for å sikre kjøpet, er $\phi = V_s s - V$. Den totale sikringen med $N = -V_s$ og $\phi = V_s s - V$ blir da:

$$dI = V_t dt + 0,5\sigma^2 s^2 V_{ss} dt - \delta s dt V_s + r(V_s s - V) dt \quad 2.47$$

En selvfinansierende investering uten risiko gir heller ingen avkastning. I så fall hadde man hatt en arbitrasjemulighet. Endringen i investeringen må derfor være null $dI = 0$.

$$V_t dt + 0,5\sigma^2 s^2 V_{ss} dt - \delta s dt V_s + r(V_s s - V) dt = 0 \quad 2.48$$

Ved å dividere igjennom 2.48 med dt får man Black og Scholes (1973) partielle differensial ligning (PDL)

$$V_t + 0,5\sigma^2 s^2 V_{ss} + (r - \delta)PV_s - rV = 0 \quad 2.49$$

Ligning 2.49 gir opsjonspremien V_t gitt at det ikke finnes arbitrasje muligheter. PDL verdetter nesten alle opsjonspremier bortsett fra asiatiske opsjoner⁵, ved å endre er grensebetingelsene til ligningen.

Underliggende hypoteser:

- a) Underliggende aktivum følger Browns geometriske bevegelse med konstant volatilitet
- b) Underliggende aktivum utbetaler kontinuerlig proporsjonel dividende rate lik δ
- c) Renta er fast med lik låns- og utlånsrente.
- d) Det er ingen transaksjonskostnader

⁵ Asiatiske opsjoner er gjennomsnittsoptjoner. En annen form for differensial-ligninger er derfor nødvendig.

3 REALOPSJONSMODELLEN

Formålet med dette kapittelet er å presentere oljeprismodellen og oljeutvinningsmodellen i som i sum bygger opp realopsjonsmodellen. I tillegg defineres parameterverdiene som benyttes i modellene. Kapittelet lager rammeverket som verdsetter av oljereservoarer som en funksjon av initial utvinningskapasitet. Selve analysen av realopsjonsmodellen kommer i kapittel 3.4.

Først i kapittel 3 presenteres oljeprismodellen med tilhørende parameterverdier. Det er flere potentielle oljeprismodeller i råvareprislitteraturen, men valget falt på Schwartz (1997) to-faktor modell. I tillegg presenteres Monte Carlo simulering.

Kapittelet avsluttes med en presentasjon av en deterministisk oljeutvinningsmodell. Oljeutvinningsmodellen benyttes for å finne potensiell ekstra utvinningskapasitet ved bruk av mer sofistikert utvinningsteknologi.

3.1 VALG AV OLJEPRISMODELL

Realopsjonsmodeller verdsetter usikkerhet. Valget av estimeringsmetode for oljeprisen vil ha en direkte påvirkning på estimert realopsjonsverdi fordi ulike metoder implementerer usikkerheten knyttet til oljeprisen forskjellig.

Schwartz har tilført råvarepris litteraturen et stort antall artikler. Felles for alle artiklene er ulike fler-faktor modeller som baserer seg på Browns geometrisk bevegelse fra avsnitt 2.3.2. Implementering av flere faktorer betyr ikke nødvendigvis at modellen er mer presis eller at den forutsier prisutviklingen bedre. For mange faktorer medfører at man ender opp med å modellere støy isteden for hovedtrenden i prisutviklingen. Utfordringen ved valg av modell er således å skille relevante faktorer fra støy for å modellere prisutviklingen.

I denne analysen implementeres to faktormodellen fra Schwartz (1997) fordi den er allment anerkjent i råvarepris-litteraturen. To-faktor modellen estimerer oljeprisen ved å bruke historiske data på spotkursen og eierfordel⁶.

Schwartz (1997) to-faktor modell ble fortrukket fremfor to-faktor modellen i Schwartz og Smith (2000) som er anbefalt av Fleten et al. (2011) fordi den er enklere å simulere. Begge modellene gir samme resultat noe også Schwartz og Smith (2000) understreker. Den eneste fordelen med Schwartz og Smith (2000) er forståelsen av variasjonen til oljeprisen på kort og lang sikt, spesielt for et bredere publikum⁷. I denne avhandlingen har dette allikevel ingen reell betydning spesielt sett i lys av at begge modellene baserer seg på to geometriske Browns bevegelser med korrelasjonskoeffisient ρ .

3.1.1 OLJEPRISMODELLEN

To-faktor modellen fra Schwartz (1997) er formelt definert fra ligning 3.1 til ligning 3.3. I to-faktor modellen beskriver Browns geometriske bevegelse oljeprisen, se avsnitt 2.3.2. Vasicek-prosess, se avsnitt 2.3.3, beskriver eierfordelen. Eierfordelen er en innsatsfaktor i oljeprisen.

TO-FAKTOR MODELLEN

$$\frac{ds}{s} = (r - \delta)dt + \sigma_s dz_s, \quad 3.1$$

$$d\delta = k(a - \delta)dt + \sigma_\delta dz_\delta \quad 3.2$$

$$dz_s \cdot dz_\delta = \rho_{s,\delta} \quad 3.3$$

TABELL 9 VARIABLENE BENYTTET I SCHWARTZ TO-FAKTOR MODELL

s	Råoljekursen
a	Forventet gjennomsnitt av Eierfordelen
r	Risikofri rente
δ	Eierfordelen
dt	Umiddelbar endring tid

⁶ Convenience yield

⁷ Professorer har også behov for å skrive et gitt antall artikler pr. år

k	Reverseringsfaktor, hvor fort man vender tilbake til gjennomsnittet.
σ_δ	Skalering av volatiliteten til Eierfordelen
σ_s	Skalering av volatiliteten til råoljekursen
$\rho_{s,\delta}$	Korrelasjonsfaktoren mellom eierfordelen og råoljekursen
dz_s	Normalfordelt variasjon i oljeprisen
dz_δ	Normalfordelt variasjon i eierfordelen

Oljeprismodellen beskriver formelt inkrementene til de stokastiske prosessene, se avsnitt 2.3. Det er således nødvendig med en simuleringsmetode for å implementere oljeprismodellen i realopsjonsmodellen. Monte Carlo simulering, som blir presenter i avsnitt 3.1.2., benyttes derfor til å simulere oljeprismodellen.

3.1.2 MONTE CARLO SIMULERING

Monte Carlo simulering er et kraftig verktøy for estimere opsjonsverdier i kraft av sin fleksible natur i motsetning til differansemetoder⁸ som implisitt og eksplisitt derivasjon eller Crank-Nicholsen metoden som alle krever presis kalibrering for å konvergere mot en opsjonsverdi. Valget å bruke Monte Carlo simulering for å verdsette realopsjonsmodellen var således enkel takket gitt metodens fleksible natur.

Monte Carlo simuleringsprinsippet går ut på å trekke et stort antall utfall fra en sannsynlighetsfordeling. Sannsynlighetsteori om nesten sikker konvergens fastsetter at et stort populasjonsutvalg vil konvergere mot den teoretiske verdien hvis variansen til opsjonspremien går mot en verdi σ_c mindre enn uendelig, $var(c) = \sigma_c < \infty$.. Dette prinsippet gjør at man kan simulere Black og Scholes (1973) modellen ved å simulere et stort antall utfall fra standardnormalfordelingen.

MONTE CARLO SIMULERING

$$s_t = s_0 e^{(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma_s^2)dt + \sigma_s \cdot N(0,1)} \quad 3.4$$

⁸ Finite difference methods

$$\delta_{t+1} = \delta_t e^{-\mu \cdot dt} + k \cdot (1 - e^{-\mu \cdot dt}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\mu \cdot dt}}{2\mu}} \cdot N(0,1) \quad 3.5$$

$$W = \epsilon_1$$

$$Z = \rho_{s,\delta} \epsilon_1 + \epsilon_2 \sqrt{1 - \rho_{s,\delta}^2} \quad 3.6$$

TABELL 10 VARIABLENE BENYTTET I MONTE CARLO SIMULERINGEN

s	Råoljepris
s_0	Initial oljepris
μ	Forventet gjennomsnitt av eierfordelen
r	Risikofri rente
δ	Eierfordelen
$N(0,1)$	En trekning fra en standard normalfordeling
dt	Umiddelbar endring tid
k	Reverseringsfaktor, hvor fort man vender tilbake til gjennomsnittet
$\epsilon_i, i = 1,2$	En standard normalfordelt stokastisk variabel
σ_δ	Skalering av volatiliteten til Eierfordelen
σ_s	Skalering av volatiliteten til råoljekursen
$\rho_{s,\delta}$	Korrelasjonsfaktoren mellom Eierfordelen og råoljekursen

Monte Carlo simuleringen Browns geometriske bevegelse med ligning 3.4 og Vasicek-prosessen med ligning 3.5.

Cholsky dekomponering, avsnitt 2.4.3, benytter korrelasjonsfaktoren $\rho_{s,\delta}$ for å simulere korrelasjonen mellom to stokastiske diffusjonsprosesser. Korrelasjonen implementeres således i Monte Carlo simuleringen med ligning 3.6.

I appendiks C.I er står hele Monte Carlo simuleringen av oljeprisen skrevet i Matlab.

I alle simuleringsmetoder er den faktiske estimeringen av de forskjellige parameterne en av de største utfordringene. Modellen spesifiserer parameterne som er nødvendig i beregningene, men empiriske datasett vil alltid være begrenset av tilgjengelighet. For å simulere oljeprisen med Monte Carlo simulering må alle parameterne i modellen estimeres.

Analysen er begrenset til 4000 simuleringer for oljeprisen på grunn begrenset dataminne. Dette kan være en svakhet i oppgaven fordi antallet simuleringer er relativt lite. Flere

gjentagelse av 4000 simuleringer gir likevel tilnærmet likt resultat. Det er således nærliggende å påstå at antallet simuleringer stort nok og gir et relativt godt estimat av fremtidig oljepris.

3.2 PARAMETER ESTIMERING

Datasettet som benyttes er vedlegg B i appendiks og strekker seg over en fem-års periode. Grunnet til at eldre datasettet ikke er inkludert i estimeringen av parameterne er at eldre statistikk ikke har den samme relevansen for fremtidig oljepris. Dette reflekteres i analysen som kommer i kapittel 3.4, spesielt ved å sammenligne Monte Carlo simulering av hele perioden på 30 år, Figur 8, og Monte Carlo simuleringen av de 5 første årene, Figur 9. Volatiliteten i oljeprisen de siste 25 årene av simuleringen reflekterer usikkerheten knyttet til priser langt frem i tid. Historiske data som er eldre enn 5 år, vil derfor også ha begrenset verdi med tanke på fremtidig oljepristrender.

3.2.1 RISIKOFRI RENTE

Risikofri rente er estimert med månedlig amerikanske T-Bill fra appendiks B over en fem-årsperiode. Verdien som er estimert er 0.02 og er et aritmetiske gjennomsnittet av historisk data.

r_f	Risikofri rente	0.02
-------	-----------------	------

3.2.2 EIERFORDELEN

Eierfordelen må inkluderes for å beregne fremtidig oljepris fordi den tar høyde for lagringskostnaden av olje og fordelen ved å ha olje lett tilgjengelig.

Eierfordelen baserer seg på varierende tilgang på olje. Rask tilgang på olje er nødvendig i mange sammenhenger. Et oljeraffineri produserer døgnet rundt og har derfor kontinuerlig behov for olje til produksjonen. En direkte levering av olje verdsettes høyere enn levering om en måned. Verdien av eierfordelen er direkte knyttet opp mot tilgangen på olje.

I gode makroøkonomiske tider og med stabil politisk ledelse vil eierfordelen være lav. I perioder med mye usikkerhet, for eksempel krig, vil eierfordelen være høy. Teorien tilsier

derfor at eierfordelen er syklisk, den varierer rundt et gjennomsnitt. Vasicek-prosessen er således optimal for å modellere utviklingen til eierfordelen.

3.2.2.1 STATISK EIERFORDEL

Eierfordelen estimeres som forskjellen mellom oljespotpris og nærmeste futurepris. Grunnen til å at man bruker nærmeste futurepris er for å ekskludere all form usikkerhet knyttet til oljeleveransen. Nærmeste futureskontrakt har tilnærmet null leveransrisiko.

Den faktiske spottprisen er ikke observerbar. Isteden benyttes nærmeste futurepris som Proxy spottpris. Som Proxy for futuresprisen brukes nest nærmeste futurepris. Prisene er hentet fra historiske priser gjengitt i appendiks B .

Fleten et al. (2011) estimerer oljeprisen med Schwartz (1997)en-faktor modell med statistisk eierfordel definert i ligning 3.7.

$$\delta \equiv r_f - \frac{1}{T} \ln \left(\frac{F_{0,T}}{s_0} \right) \quad 3.7$$

TABELL 11 VARIABLENE BENYTTET FOR Å BEREGNE DEN STATISKE EIERFORDELEN

T	Periodiske observasjoner i datasettet
δ	Eierfordelen
$F_{0,T}$	Futuresprisen
s_0	Spottpris tidspunkt null
r_f	Risikofri rente

Denne metoden kan således brukes for å finne den historiske eierfordelen for hver tidspunkt t som benyttes i estimeringen av dynamisk eierfordel i to-faktor modellen.

3.2.2.2 DYNAMISK EIERFORDEL

Schwartz (1997) to-faktor modell implementer en dynamisk eierfordel som et alternativ til den statiske representasjonen i en-faktor modellen. To-faktor modellen tar høyde for et skiftene økonomisk landskap. I fredstider, med god tilgang til råolje, vil eierfordelen være lavere enn i mer usikre tider. Verdien kan teoretisk bli meget høy eller meget lav, men vil alltid variere rundt et gjennomsnitt.

Vasicek-prosessen fra avsnitt 2.4.1 er en *mean-reverting* prosess og derfor ideell til å modellere denne eierfordelen. For å estimere parameterverdiene av eierfordelen benyttes minstekvadratsmetode med en enkel lineær regresjon definert i 3.8.

$$\delta_{i+1} = \alpha\delta_i + \beta + \varepsilon \quad 3.8$$

Den dynamiske eierfordelen δ_i er heller ikke direkte observerbar, men estimeres med samme metode som den statiske eierfordelen. Den dynamiske eierfordelen benytter ligning 3.7 på hvert tidspunkt t av et historisk datasett. Det historiske datasettet benyttet for estimeringen av eierfordelen er gjengitt i appendiks B og består av månedlige observasjoner av nærmeste og nest nærmeste oljefuturespris over fem år.

Volatilitet σ_δ reverseringsfaktoren k og forventet gjennomsnitt μ til eierfordel estimeres først med en enkel lineær regresjon av ligning 3.8. Verdiene a , b og $sd(\varepsilon)$ gir implisitt parameterverdien ved hjelp av ligningssettet 3.9 som implementeres i Monte Carlo simuleringen av Schwartz (1997) to-faktor modell.

$$\begin{aligned} k &= -\frac{\ln(a)}{dt} \\ \mu &= \frac{b}{1-a} \\ \sigma_\delta &= sd(\varepsilon) \cdot \sqrt{\frac{-2\ln(a)}{dt(1-a^2)}} \end{aligned} \quad 3.9$$

Reverseringsfaktoren, k , ble estimert til 0.01 som er et relativt lavt sammenlignet med verdiene estimert av Schwartz (1997). Det forventede gjennomsnittet, μ , er lik -0.01 og eierfordelens volatilitet, σ_δ , er også lav, 0.03. Verdien av en dynamisk eierfordel er således begrenset.

3.2.3 VOLATILITET I BROWNS BEVEGELSE

To-faktor modellen til Schwartz (1997) modellerer volatiliteten i en stokastisk prosess. Det er hovedsakelig to metoder som blir benyttet for å beregne skaleringsfaktoren σ_s , enten implisitt standardavvik eller historisk data.

Implisitt standardavvik tar utgangspunkt i et gitt tidspunkt av futures priser for å beregne skaleringsfaktoren. En verdsettelsesmodell, der man har kjennskap til alle variabler bortsett

fra volatiliteten, benyttes for å estimere volatiliteten som vil gi den observerte prisen i henhold til modellen. Dette fungerer best når eierfordelen er konstant som Fleten et al. (2011).

Schwartz og Smith (2000) empiriske del benytter historisk data. Dette gir en enhetlig tilnærming fordi eierfordelsparameterne også ble estimert med historiske data. Dette er også metoden som denne oppgaven benyttet for å finne skaleringsfaktoren σ_s .

Skaleringsfaktoren blir derfor standardavviket av nettobevegelsen av oljeprisen. Verdien estimert er 0.2 som er ganske nær datasettet fra *Enron* som ble benyttet i Schwartz (1997)

3.2.4 KÁLMÁN-FILTER

Schwartz og Smith (2000) benyttet Kálmán-filteret for å optimalisere parameterverdiene. Et Kálmán-filter er en algoritme som gir optimal rekursiv databehandling. Teorien ble utviklet av Rudolf E. Kálmán og går ut på å benytte all tilgjengelig informasjon for å forutse neste bevegelse i en stokastisk prosess (Welch & Bishop 1995).

I praksis vil derfor filteret være en dataprogram som inkluderer all tilgjengelig informasjon på en definert måte. Kálmán filtre blir for eksempel benyttet i raketstyring for å beregne posisjonen til raketten forhold til målet.

Definisjonen av optimalverdi ved å bruk av Kálmán-filtre er alltid relativt i forhold til ønsket resultat. I oljeprissammenheng handler det om å finne den mest realistiske volatilitet som kan implementeres i en simulering. Dessverre hadde jeg ikke tilgang til denne type spesialisert programvare. Parameterverdiene som estimert for oppgaven er således gode, men ikke optimalt uten bruk av et Kálmán-filter. Dette er uansett ikke sjenerende for formålet med oppgaven fordi det gir neglisjerbare utslag i resultatet.

3.2.5 KORRELASJON

Det er vanskelig å estimere korrelasjonen uten Kálmán-filteret. Kovariansen mellom eierfordelen og oljeprisavkastningen gir likevel et relativt godt resultat er. Det historiske datasettet gir da en korrelasjonsfaktor $\rho_{s,\delta}$ på -0.4 som er relativt godt estimat.

3.2.6 SAMMENDRAG AV OLJEPRISPARAMETERNE

Her kommer et sammendrag av alle parameterverdiene estimert i avsnitt 3.2

TABELL 12 PARAMETERVERDIENE ESTIMERT FOR SCHWARTZ TO-FAKTOR MODELL

Risikofri rente	r_f	0.02
Initial oljepris	s_0	94
Skaleringsfaktor Browns geometriske bevegelse	σ_s	0.2
Skaleringsfaktor eierfordel	σ_δ	0.03
Reverseringsfaktor eierfordel	k	0.01
Forventet gjennomsnitt av eierfordel	μ	-0.01
Korrelasjonsfaktoren mellom oljepris og eierfordel	$\rho_{s,\delta}$	-0.4
Antall Monte Carlo simuleringer av oljeprisen	Sim	4000

3.3 RESERVOARMODELLEN

Reservoarmodellen beskriver utviklingen til utvinningsraten av olje fra reservoaret i løpet av oljebrønnens levetid. Utvinningsraten er en viktig innsatsfaktor i realopsjonsmodellens verdsettelse av et oljereservoar. Modellen er hentet fra Wallace et al. (1987) og er meget godt presentert i Fleten et al. (2011).

TABELL 13 VARIABLENE BENYTTET I PRODUKSJONSMODELLEN

$P_{W,0}$	Initial trykk
$P_{W,t}$	Reservoarets trykk på tidspunkt t
P_{min}	Avstengingstrykk
R_0	Reservoarets initiale kapasitet
R_t	Reservoarets kapasitet på tidspunkt t
q_w	Teoretisk utvinningsrate fra selve oljereservoaret
$q_{r,t}$	Årlig teoretiske utvinningsrate fra installasjonen på oljeplattformen på tidspunkt t
q_p	Øvre praktisk utvinningsrate fra installasjonen på oljeplattformen. Denne rate har også navnet <i>Platå-utvinning</i>
$q_{ramp-up,t}$	Maksimal praktisk utvinningsrate ved oppstart av oljeutvinningen
γ	Utvinningsgrad av teoretisk utvinningsrate. Denne faktoren kan i tillegg benyttes for å implementere usikkerhet i modellen

Det er nødvendig med overtrykk i undersjøiske reservoarer for å utvinne olje. Ligning 3.10 definerer forholdet mellom trykket og utvinningskapasiteten til et oljereservoar.

$$P_{w,t} = P_{w,0} - \frac{R_0 - R_t}{R_0} \cdot (P_{w,0} - P_{min}) \quad 3.10$$

Gitt at det ikke er andre begrensninger, faller trykket kontinuerlig mot et avstengingsnivå P_{min} ved kontinuerlig utvinning. Konsekvensen er at utvinningskapasiteten på tidspunkt t R_t faller med trykket.

I reservoarmodellen til Wallace et al. (1987) er den årlige utvinningsraten $q_{r,t}$ en funksjon av teoretisk utvinningsrate fra oljereservoaret, q_w justert for utvinningsgraden γ og gjenværende trykk i oljebrønnen, $\frac{P_{w,t} - P_{min}}{P_{w,0} - P_{min}}$.

$$q_{r,t} = \gamma \cdot q_w \cdot \frac{P_{w,t} - P_{min}}{P_{w,0} - P_{min}} \quad 3.11$$

Ved å kombinere ligning 3.10 og 3.11 får man et uttrykk for den årlig teoretiske utvinningsraten $q_{r,t}$ uten eksplisitt å definere trykket i reservoaret.

$$q_{r,t} = \gamma \cdot q_w \cdot \frac{R_t}{R_0} \quad 3.12$$

Ligning 3.12 gir optimal årlig utvinningsrate som en funksjon av oljereservoaret teoretisk utvinningsrate q_w justert for utvinningsgraden γ samt forholdet mellom initial og kontinuerlig utvinningskapasitet $\frac{R_t}{R_0}$.

Wallace et al. (1987) viser at økt trykk i et oljereservoar gir høyere initial utvinningskapasitet R_0^{new} og høyere teoretisk utvinningsrate $q_{r,t}^{new}$ definert i ligning 3.13.

$$q_{r,t}^{new} = \gamma \cdot q_w \cdot \frac{R_t}{R_0^{new}} \quad 3.13$$

Den årlige utvinningsraten har også en øvre praktisk begrensning q_p platautvinningen basert på den tekniske installasjonen. Det er sjeldent praktisk gjennomførbart å utvinne maksimal teoretisk kapasitet. I tillegg er det praktiske begrensninger i løpet av opptrappingsperioden for nye reservoarer $q_{ramp-up}$.

Den reelle utvinningsraten q_{max} blir derfor et minimum av $q_{r,t}$, q_p og $q_{ramp-up}$.

$$q_{max} = \min(q_{r,t}; q_p; q_{ramp-up}) \quad 3.14$$

3.3.1 VERDIENE ESTIMERT

Verdiene i reservoarmodellen er hentet fra Det_Norske_Oljeselskap (2013) estimerer for oljefeltet Johan Sverdrup. Estimaten er vedlegg A i appendiks. Det vil si at alle verdiene som er benyttet i analysen er tilnærmet lik reelle tall. Eneste faktiske forskjell er at reservoarmodellen i avhandlingen satt til å begynne i år 2013 isteden for 2018. Dette er av praktiske hensyn til oljeprissimuleringen i avsnitt 3.1.

TABELL 14 PARAMETER VERDIENE FOR OLJEBRØNNEN

Reservoarets initial kapasitet	R_0	450
Teoretisk utvinningsrate fra selve oljereservoaret	q_w	66
Øvre praktisk utvinningsrate, platå-utvinningen	q_p	27.5
Justeringsfaktor	γ	0.7

Oljeutvinningen trappes opp over en tidsperiode på 3 år. Opptrappingen er en fraksjon av maksimal tømmingsraten $q_{r,t}$ på tidspunkt t formelt definert som følger:

$$q_{r,t} \cdot a_t = q_{ramp-up,t} \quad 3.15$$

I Tabell 15 står de tre forskjellige verdiene opptrappingsparameteren a_t .

TABELL 15 OPPTRAPPINGSVERDIER BENYTTET FOR Å ESTIMERE DE TRE FØRSTE PRODUKSJONSÅRENE FRA EN OLJEBRØNN PRODUKSJON

Tidspunkt 1	a_1	0.2
Tidspunkt 2	a_2	0.3
Tidspunkt 3	a_3	0.4

Verdiene til den maksimale teoretiske utvinningsraten $q_{r,t}$ definert i ligning 3.12 avhenger av tidspunkt. Tabell 16 gjengir produksjonen for oljefeltet uten ekstra kapasitet. Legg merke til at tabellen sammenfaller med Johan Sverdrups felt fra appendiks A .

TABELL 16 DEN TEORETISK MAKSIMALE PRODUKSJONSKAPASITETEN FRA OLJEBRØNNEN UTEN EKSTRA KAPASITET PARAMETERISERT FOR HELE PRODUKSJONEN PÅ 30 ÅR

Tid - år	Teoretisk utvinningsrate	Tid - år	Teoretisk utvinningsrate
1	13,20	16	12,59
2	19,22	17	11,30
3	24,50	18	10,14
4	46,20	19	9,10
5	41,46	20	8,16
6	37,20	21	7,33
7	33,38	22	6,57
8	29,95	23	5,90
9	26,88	24	5,29
10	24,12	25	4,75
11	21,64	26	4,26
12	19,42	27	3,82
13	17,43	28	3,43
14	15,64	29	3,08
15	14,03	30	2,76

I Tabell 16 er de tre første årene er utvinningen i en opptrappingsperiode. I denne perioden kan utvinningsraten derfor ikke økes. Fra år fire til år åtte er utvinningsraten høyere enn den øvre praktiske utvinningsraten q_p som tilsier at den er platå-utvinning. Den ekstra utvinningskapasiteten vil først øke utvinningsraten etter år åtte som er relativt langt frem tid.

Analysen av verdsettelsesmodellen i kapittel 3.4 som implementerer økte utvinningsrater er derfor relativt usikre. Sannsynligheten er således stor for at ekstra utvinningskapasitet vil ha en realopsjonsverdi.

3.4 KONTANTSTRØMMER

Økonomisk modellering forenkler virkeligheten for å understreke et økonomisk fenomen. Profitten, forskjellen mellom inntekt og kostnad (Varian 1992), danner grunnlaget for både samfunnsøkonomisk analyse og finansstyring.

$$\text{Profitt} = \text{inntekt} - \text{kostnad} \quad 3.16$$

Realopsjonsteorien kan kombinerer det beste fra begge leire ved å implementere usikre fremtidige kontantstrømmer fra finanstyring (Copeland et al. 2005) og samfunnsøkonomisk marginalteori for optimalt produksjonsnivå. (Mas-Colell et al. 1995).

Verdien av utvinningskapasitet er den diskonterte forskjellen mellom inntekt og kostnader. Det er derfor viktig å analysere grundig både inntektene og kostnadene for å forstå mekanismene og dynamikk bak verdien av oljeutvinningskapasitet. Optimal utvinningskapasitet i realopsjonsmodellen er pr. definisjon det nivået som gir størst realopsjonsverdi.

Hovedutfordringen i denne avhandlingen er bruk av realistiske marginalkostnader. Avsnitt 3.4.2 om kostnader er således av spesielt stor verdi.

3.4.1 INNTEKTER

Inntekten fra en oljebrønn er definert som diskontert verdi fra produktet av prisen og mengden solgte over et lukket tidsintervall.

Mengden solgte enheter er gitt og definert som en kontrollvariabel. I en mer kompleks modell kan mengden selvfølgelig være en stokastisk variabel. For eksempel i Fleten et al. (2011) utvides modellen ved at potentiel ekstra utvinningskapasitet følger en *mean-reverting* Vasicek-prosess fra avsnitt 2.3.3. Her har dette begrenset merverdi i forhold til formålet med oppgaven.

Oljeprisen s er usikker og implementeres i form av Schwartz's (1997) to-faktor modell i realopsjonsmodellen. Monte Carlo simuleringen av to-faktor modellen benytter risikonøytral sannsynligheter. Inntektsstrømmene diskonteres med risikofri rente takket være Girsanov's teorem fra avsnitt 2.5.2. Teoremet stadfester at oljeprisen er simulert med risikonøytrale sannsynligheter.

$$R_Q = \sum_{t=1}^T e^{-r \cdot t} \cdot s_t \cdot q_t \quad 3.17$$

TABELL 17 VARIABLENE BENYTTET I INNTEKTSSTRØMMEN

R_Q	Diskontert inntekt for en ekstra utvinningskapasitet Q
$e^{-r \cdot t}$	Diskonteringsfaktor med risikofri rente, r
t	Tidspunkt t
q_t	Mengde solgt på tidspunkt t
s_t	Salgspris tidspunkt t

Den intertemporale inntektsstrømmen er risikjustert og benytter diskonteringsfaktor $e^{-r \cdot t}$. Verdien av inntekten i dag er en funksjon av diskontert fremtidig pris og mengde.

3.4.2 KOSTNADER

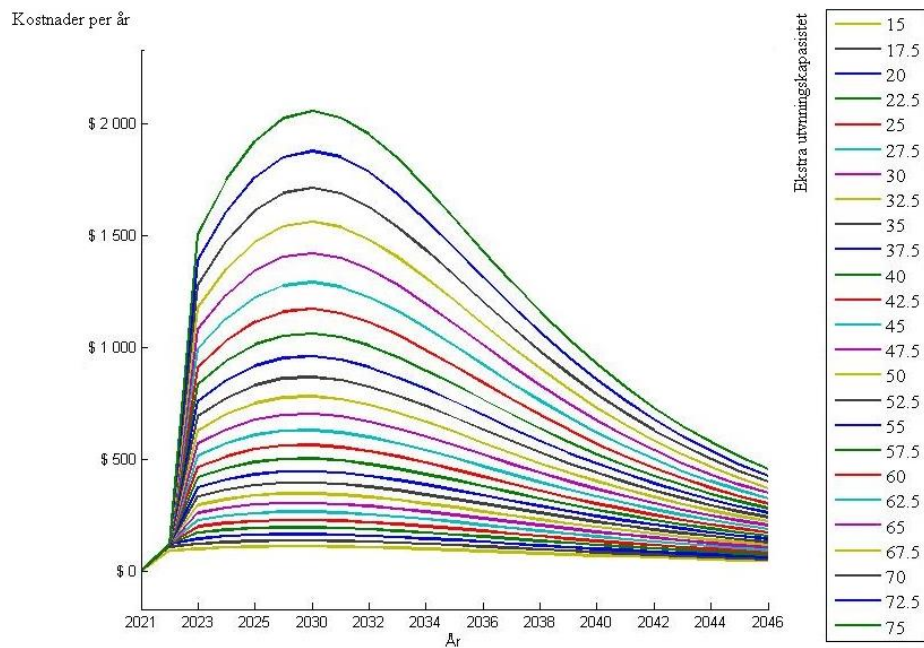
I en realopsjonsmodell som verdsetter et oljereservoar som en funksjon av utvinningskapasitet er marginalkostnadene spesielt viktig. Marginalkostnadene til utvidet kapasitet vil være konvekse fordi økning i kapasitet krever mer og bedre teknologi etterhvert som utvinningen blir vanskeligere.

Den funksjonelle kostnadsstrukturen foreslått i dette avsnittet implementerer konvekse marginalkostnader som gjør det mulig å optimalisere utvinningskapasiteten. Realopsjonsmodellen kan således benyttes for å maksimere verdien av oljereservoaret.

3.4.2.1 KOSTNADSSTRØMMER

Kostnaden til utvinningskapasitet må estimeres over alle årene med potensiell oljeutvinning, og har navnet intertemporale kostnader. Kostnadsstrømmene diskonteres med risikofri rente fordi rammeverket til realopsjonsanalysen tilsier at alle kostnader er deterministiske og således uten risiko.

Kostnadsfunksjonen reflekter alle kostnader knyttet til et prosjekt. De totale kostnadene er en funksjon av produsert mengde gitt et forhåndsdefinert kostnadsnivå for alle innsatsfaktorer $a_{kostnadsnivå}$. Kostnadsnivået reflekterer lønn og andre produksjonsfaktorer og har dollar som enhet. Det er selvfølgelig stor usikkerhet knyttet til fremtidig kostnadsnivå, men dette er utenfor omfanget av denne avhandlingen.



FIGUR 1 Hvert nivå er en kostnadsstrøm for en utvinningskapasitet mellom 15 og 75 millioner fat olje. Summen av hvert nivå gir de totale kostnadene for en gitt utvinningskapasitet.

Figur 1 viser de forskjellige kostnadsstrømmene som en funksjon utvinningskapasiteten. Legg spesielt merke til at kurvene aldri bryter hverandre. Dette understreker det faktum at marginalkostnadene øker. De totale kostnadene er summen av den intertemporale kostnadsstrømmen på det definerte tidsintervallet. Totale kostnader kan deles i to kategorier, variable- og faste-kostnader (Varian 1992) og (Mas-Colell et al. 1995).

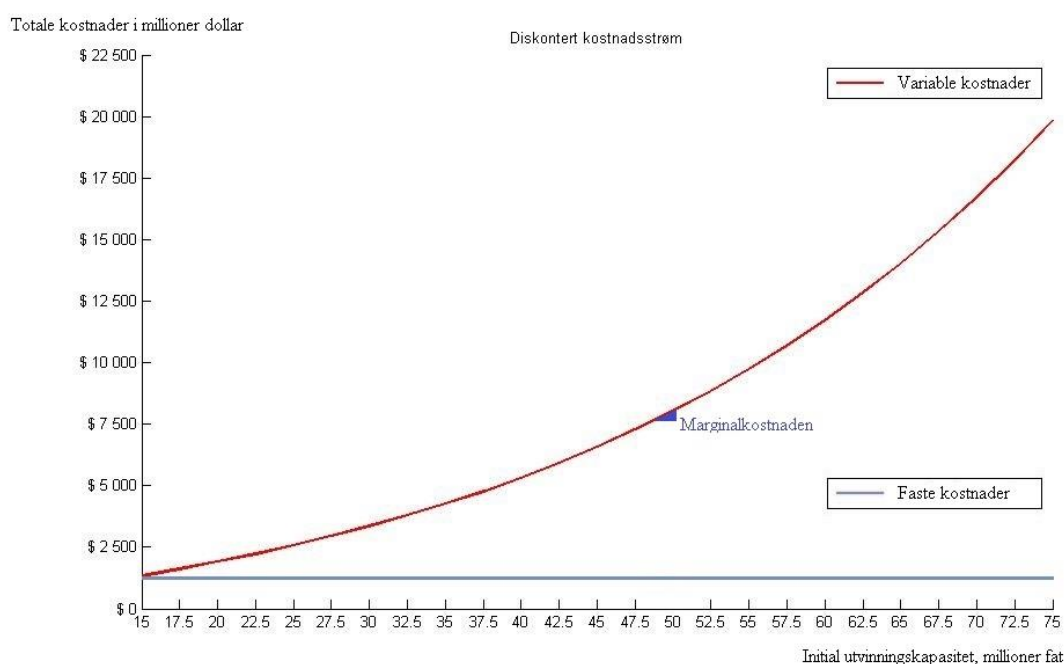
$$c_{a,Q} = \sum_{t=1}^T e^{-r \cdot t} \cdot (a_{kostnad} \cdot (\exp(q_t) - 1)) + F \quad 3.18$$

TABELL 18 VARIABLENE BENYTTET I KOSTNADSFUNKSJONEN

$c_{a,Q}$	Kostnader for et kostnadsnivå $a_{kostnadsnivå}$ og en utvinningskapasitet Q
$e^{-r \cdot t}$	Diskonteringsfaktor med risikofri rente, r
t	Tidspunkt t
$f(q_t)$	Variable kostnader på tidspunkt t
F	Faste kostnader
$a_{kostnads}$	Forhåndsdefinert kostnadsnivå for innsatsfaktorer
$\exp(q_t)$	Eksponentiell mengde på tidspunkt t
-1	Fordi $\exp(0)$ er lik 1 blir variable kostnaden justert til verdien null når det ikke er utvinning

Faste kostnader kan være reversible eller irreversible, men løper uansett produksjonsnivå. Et eksempel på faste kostnad er faste månedlig nedbetalinger av en lånefinansiert investering. Stopp i oljeutvinningen, samt gjenbruk og ombygging av oljeplattformer, er svært kostbart. Det tilsier at investeringer knyttet initial utvinningskapasitet er tilnærmet irreversible kostnad⁹. Irreversible kostnader er investeringer som ikke har gjenbruksverdi eller mulighet til å benyttes til andre formål. Selve verdien av kostnaden er tapt i det øyeblikket den påløper.

De variable kostnadene endres med produksjonsnivået. Dette er kostnader som er direkte knyttet til produksjonen, for eksempel borhode til en boremaskin.



FIGUR 2 KOSTNADER SOM EN FUNKSJON AV INITIAL UTVINNINGSKAPASITET

Figur 2 viser hvordan de totale kostnadene fordeles mellom variable- og faste- kostnader. Kostnadsendringen fra en utvinningskapasitet til den neste er marginalkostnaden. Det vil si variasjonen i kostnad for hver endring i utvinningskapasitet.

Formelt er marginalkostnaden den deriverte av kostnadsfunksjonen, gitt at funksjonen deriverbar.

⁹ Sunk cost

4 ANALYSE

Dette kapitlet analyserer realopsjonsmodellen. Formålet med analysen er å bevise at realopsjonsmodellen kan implementere en mer realistisk kostnadsstruktur for verdsettelse et oljereservoar. Avsnittet inneholder i tillegg en analyse av fleksibilitetsverdien til optimal utvinningskapasitet.

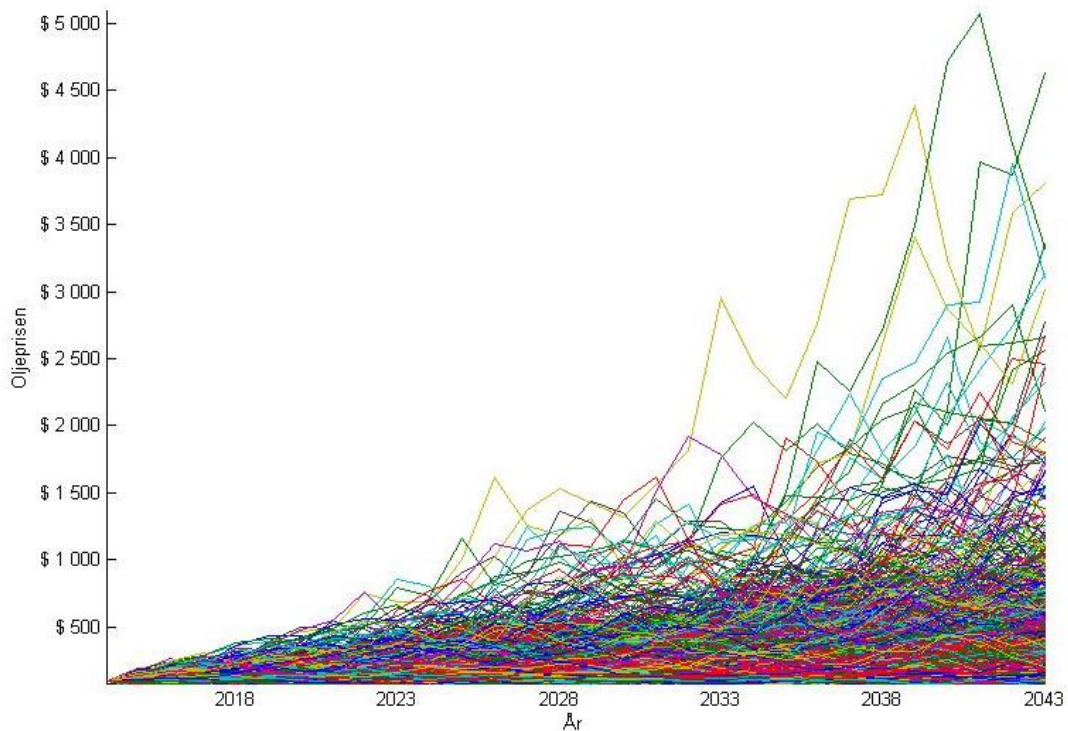
Som en del av analysen sammenlignes realopsjonsmodellen med nettonåverdimetoden fordi, i motsetning til realopsjonsmodellen, fanger ikke nettnåverdimetoden opp fleksibilitetsverdien som implisitt kan ligge i optimal utvinningskapasitet. Verdiforskjellen definerer altså fleksibilitetsverdien.

I tillegg gjennomføres følsomhetsanalyser av realopsjonsmodellen for å bekrefte robustheten i forhold nøkkelparameterne. Kapitlet avrundes med en konklusjon og implikasjon av avhandlingen.

4.1 REALOPSJONSMODELLEN

Realopsjonsverdien, ROV, er realopsjonsmodellens verdsettelse av prosjekter. Flexibilitetsverdien er inkludert i realopsjonsverdien.

Realopsjonsmodellen implementerer fleksibilitetsverdien ved å ta høyde for usikkerhet i fremtidige kontantstrømmer. Usikkerheten i modellen er fremtidig oljepris. Figur 3 gjengir grafisk Monte Carlo simuleringen av oljepris med Schwartz (1997) to-faktor modell. Oljepris-simuleringen gir nominelle verdier.



FIGUR 3 MONTE CARLO SIMULERINGEN AV OLJEPRIS

Usikkerheten implementeres i modellen ved å ekskludere prosjekter med negativ nåverdi fordi de uansett ikke vil gjennomføres. Beslutningstaker beregner således verdien av oppsiden av prosjektet gitt at prosjektet gjennomføres. Konsekvensen er at realopsjonsverdien alltid vil være større eller lik null.

$$ROV = \text{maks} (\text{Inntektsstrøm} - \text{kostnadsstrøm}, 0) \quad 4.1$$

$$ROV = \frac{1}{N} \cdot \text{maks} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T e^{-r \cdot t} \cdot s_t^i \cdot q - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T e^{-r \cdot t} a_{\text{kostnad}} \cdot (\exp(q) - 1), 0 \right)$$

TABELL 19 VARIABLENE BENYTTET I REALOPSJONSVERDIEN

s_t^i	Oljeverdien av simulering i på tidspunkt t
N	Simuleringer av oljeprisen
r	Risikofri rente
q	Ekstra årlig utvinningskapasitet
a_{kostnad}	Kostnadsnivået
$\exp(q)$	Implementering av økende marginalkostnader
$e^{-r \cdot t}$	Diskonteringsfaktor
$1/N$	Vektet gjennomsnitt av realopsjonsverdien

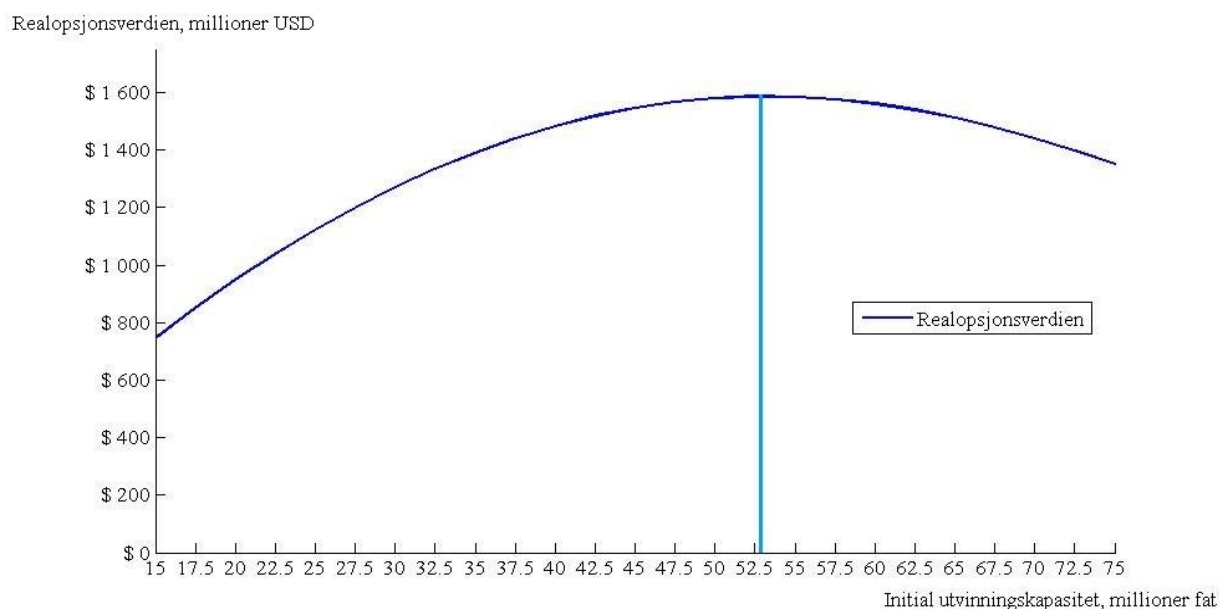
Ligning 4.1 viser at realopsjonsverdien estimeres for hver enkel oljeprissimulering og evalueres positiv eller negativ. Kun de positive verdiene blir brukt av modellen for å estimere realopsjonsverdien.

Realopsjonsverdien, gjengitt i Tabell 20, er gjennomsnittet av alle positive prosjekter.

TABELL 20 EN NUMERISK GJENGIVELSE AV REALOPSJONSVERDIEN FOR INITIAL UTVINNINGSKAPASITET FRA 15 MILLIONER FAT OLJE TIL 75 MILLIONER FAT OLJE

Antall fat (mill.)	ROV, (Mill. \$)	Antall fat (mill.)	ROV, (Mill. \$)	Antall fat (mill.)	ROV, (Mill. \$)	Antall fat (mill.)	ROV, (Mill. \$)
15	745	33	1334	50	1579	68	1478
18	850	35	1391	53	1585	70	1439
20	948	38	1441	55	1584	73	1397
23	1038	40	1483	58	1576	75	1351
25	1122	43	1518	60	1561		
28	1199	45	1546	63	1539		
30	1270	48	1566	65	1511		

Tabell 20 viser hvordan realopsjonsverdien endres som en funksjon av utvinningskapasiteten. Maksimal realopsjonsverdi er \$ 1585 mill., hvilket gir en optimal utvinningskapasitet på 52,5 millioner fat olje.



FIGUR 4 REALOPSJONSVERDIEN TIL RESERVOARET SOM EN FUNKSJON AV INITIAL UTVINNINGSKAPASITET

Figur 4 viser grafisk realopsjonsverdien som en funksjon av utvinningskapasitet. Fra figuren er det tydelig at ekstra utvinningskapasitet kun er lønnsomt til optimalt nivå. For en høyere utvinningskapasitet vil den totale verdien av reservoaret reduseres. Implementeringen av den realistiske kostnadsstrukturen, konvekse marginalkostnader definert i avsnitt 3.4.2, medfører således at realopsjonsmodellen kan estimere optimal utvinningskapasitet.

4.1.1 NETTONÅVERDI METODEN

Finansstyring verdsetter prosjekter med nettonåverdimetoden. Nettonåverdi er diskonterer fremtidige kontantstrømmer, altså forskjellen mellom inntektsstrømmen, ligning 3.17, og kostnadsstrømmen, ligning 3.18. Kontantstrømmen med høyest positive nettonåverdien er det optimale prosjektet.

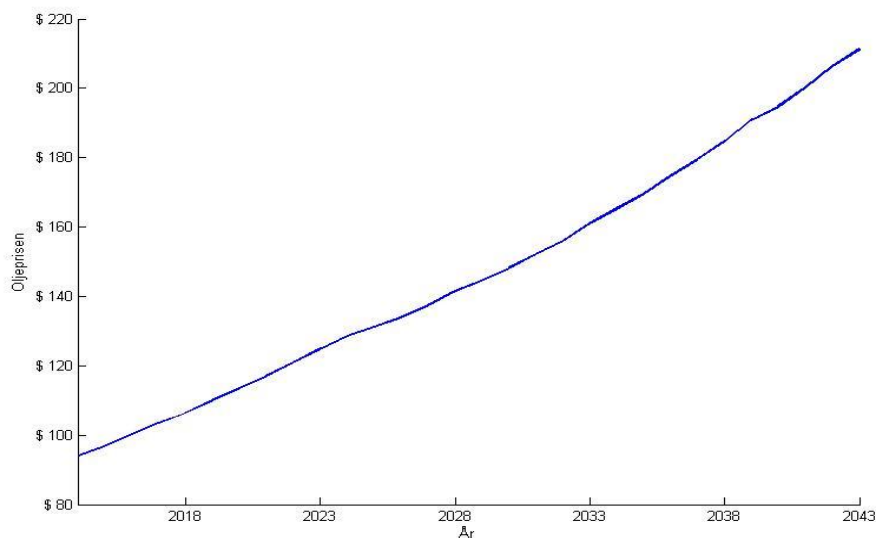
$$NNV_{Q,a} = \text{Inntektsstrøm} - \text{kostnadsstrøm} \quad 4.2$$

$$NNV_{Q,a} = \sum_{t=1}^T e^{-r \cdot t} \cdot S_t^{\text{gjennomsnittkurs}} \cdot q_t - \sum_{t=1}^T e^{-r \cdot t} \cdot a_{\text{kostnad}} \cdot (\exp(q_t) - 1)$$

TABELL 21 VARIABLENE BENYTTET FOR Å BEREGNE NETTONÅVERDI

$S_t^{\text{gjennomsnittkurs}}$	Oljeprisen i nettonåverdimetoden er gjennomsnittverdien av Monte Carlo simuleringen
N	simuleringer av oljeprisen
r	Risikofri rente
q	Ekstra årlig utvinningskapasitet
a_{kostnad}	kostnadsnivå
$\exp(q)$	Implementering av økende marginalkostnader
$e^{-r \cdot t}$	Diskonteringsfaktor

Oljeprisen i nettonåverdimetoden er gjennomsnittverdien av Monte Carlo simuleringen. Oljeprisen er grafisk gjengitt i Figur 5.

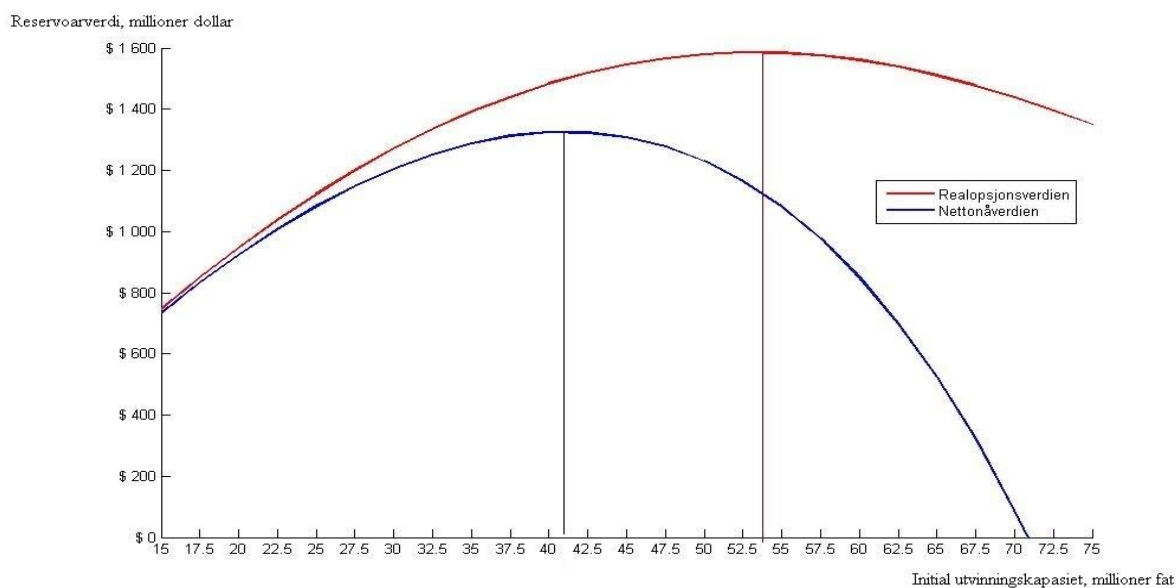


FIGUR 5 GJENNOMSNITTSPRISEN AV MONTE CARLO SIMULERINGEN AV TO-FAKTOR MODELLEN

Med gitte rammebetingelser og ingen usikkerhet, vil oljekursen i gjennomsnitt krype mot 210 dollar fatet. Det gir en årlig forrentning av oljekursen på cirka 2.8 prosent, litt over inflasjonsmålet til Norges-Bank (2008) er på 2.5 prosent.

4.1.2 FLEKSIBILITETSVERDIEN

Fleksibilitetsverdien er forskjellen mellom realopsjonsverdien og nettonåverdien.



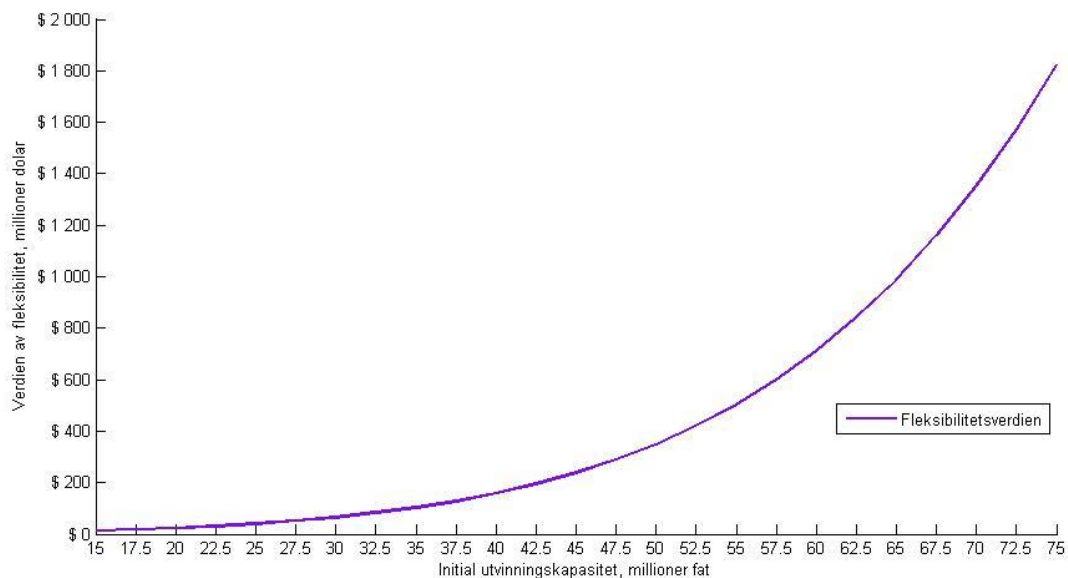
FIGUR 6 REALOPSJONSVERDIEN OG NETTONÅVERDIEN

I Figur 6 er fleksibilitetsverdien forskjellen mellom realopsjonskurven og nettonåverdikurven. Eksplicit kan dette leses i Tabell 22.

TABELL 22 EN NUMERISK GJENGIVELSE AV REALOPSJONSVERDIEN OG NETTONÅVERDIEN FOR UTVINNINGSKAPASITET FRA 15 MILLIONER FAT OLJE TIL 75 MILLIONER FAT OLJE

Antall fat (mill.)	ROV, (Mill. \$)	NNV, (Mill. \$)	Antall fat (mill.)	ROV, (Mill. \$)	NNV, (Mill. \$)
15	745	732	48	1566	1277
18	850	833	50	1579	1230
20	948	925	53	1585	1165
23	1038	1007	55	1584	1081
25	1122	1082	58	1576	976
28	1199	1148	60	1561	849
30	1270	1205	63	1539	699
33	1334	1252	65	1511	523
35	1391	1288	68	1478	320
38	1441	1313	70	1439	88
40	1483	1325	73	1397	-175
43	1518	1324	75	1351	-472
45	1546	1308			

Fra Tabell 22 er det tydelig at realopsjonsverdien er høyere nettonåverdien. Forskjellen i verdi er fleksibilitetsverdien knyttet til økt utvinningskapasitet. Optimal utvinningskapasitet i realopsjonsmodellen er 53 mill. ekstra fat, til en verdi av \$ 1585 mill.. Nettonåverdien verdsetter denne utvinningskapasiteten til \$1165 mill.. Fleksibilitetsverdien er da verdsatt til \$ 420 mill.



FIGUR 7 EKSPONENTIEL ØKNING I FLEKSIBILITETSVERDIEN TIL UTVINNINGSKAPASITETEN

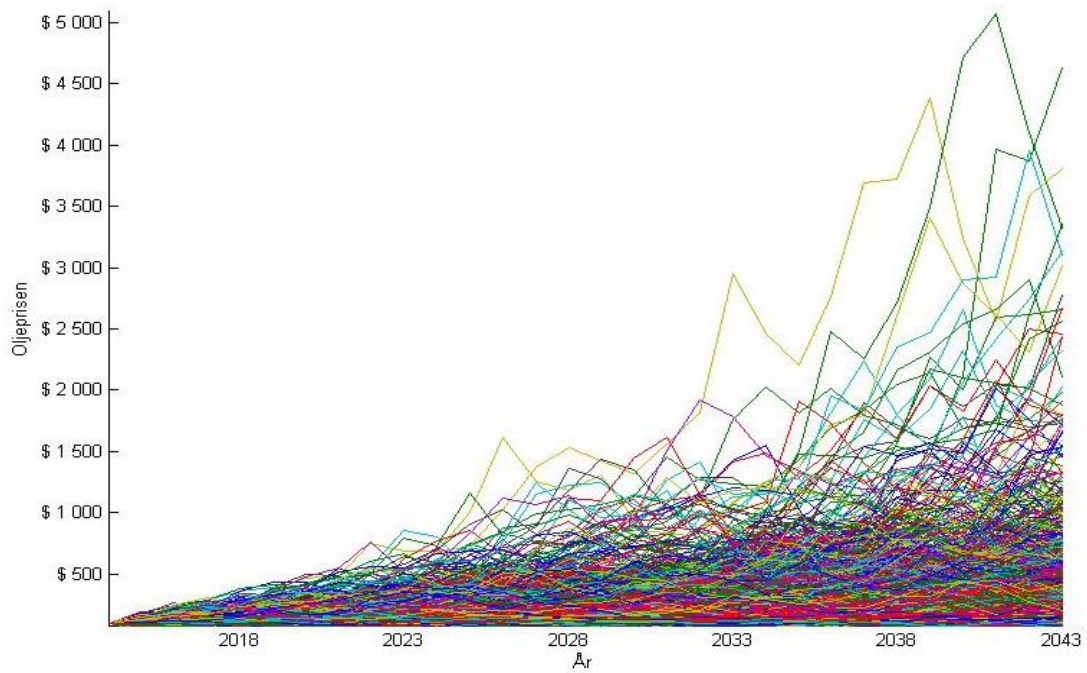
Den eksponentielle økningen i fleksibilitetsverdien, Figur 7, er en konsekvensen av økt usikkerhet knyttet til lønnsomheten av utvinningskapasiteten. Oppsiden av høy utvinningskapasitet kan være betydelig ved høy oljepris.

4.2 FØLSOMHETSANALYSE

Realopsjonsmodellen estimerte i avsnitt 4.1 den optimal utvinningskapasiteten til 52.5 millioner fat olje. Utvinningskapasiteten ble funnet på forhåndsdefinerte parameter nivåer. Følsomhetsanalysen er således viktig for å avgjøre robustheten til modellen. I dette avsnittet analyserer endringer i realopsjonsverdien og optimale utvinningskapasitet når parameterverdiene justeres.

4.2.1 ANALYSE AV SKALERINGSFAKTOREN

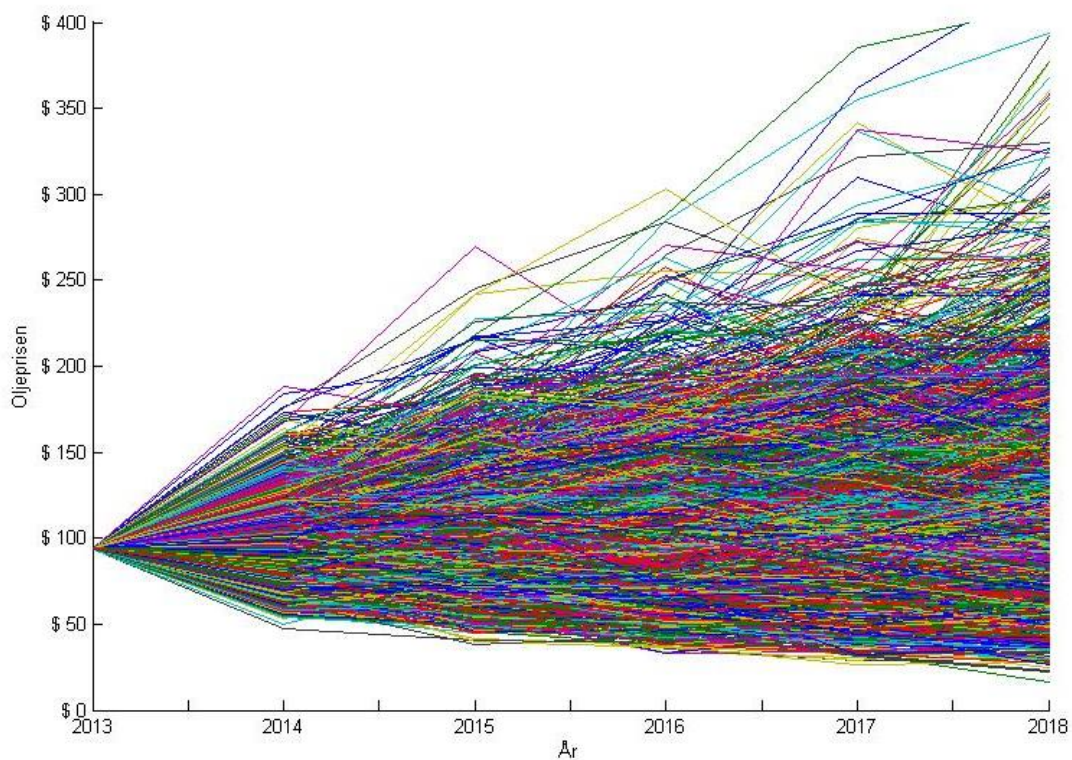
I to-faktor modellen til Schwartz (1997) er det to skaleringsfaktorer for volatilitet. En reduksjon i en av skaleringsfaktorene vil således redusere usikkerheten i oljeprisen og påvirke realopsjonsverdien. Analysen vurderer skaleringsfaktoren for volatilitet av oljeprisen σ_s , men en tilsvarende vurderingen av skaleringsfaktoren for volatilitet av eierfordelen σ_δ vil være tilsvarende relevant.



FIGUR 8 MONTE CARLO SIMULERING OLJEPRISMODELLEN MED SKALERINGSFAKTOR FOR VOLATILITET LIK 0.2

Figur 8 viser Monte Carlo simuleringen oljeprisen med skaleringsfaktor for volatilitet lik 0.2. En helt presis prediksjon av oljepriser på et 30-års tidsintervall er ikke realistisk, og figuren gir en relativt stor spredning på langsikt.

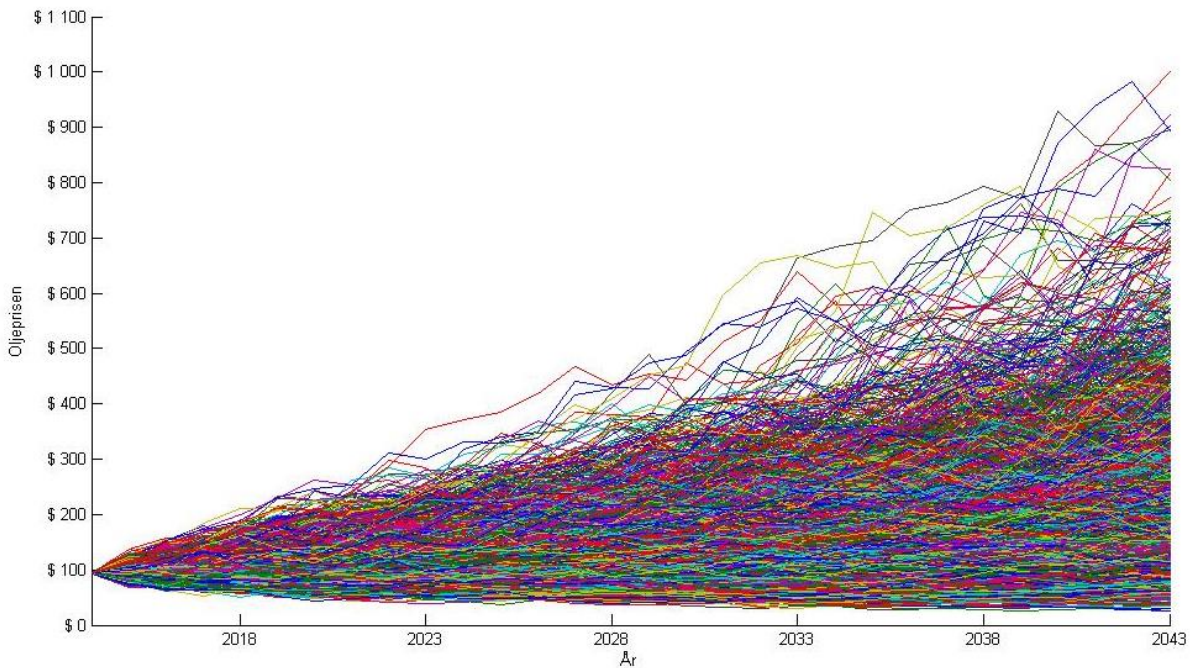
Spredningen kan for eksempel forklares av muligheten for krig eller politisk ustabilitet som vil medføre at oljeprisen fyker i været. På den andre siden kan oljeprisen gå under 10 dollar fatet. En mulig forklaring er ny teknologi som gjør oljen overflødig.



FIGUR 9 MONTE CARLO SIMULERING AV OLJEPRISEN FEM ÅR

Figur 9 viser oljeprisen for de første fem årene der oljeprisen likevel holder seg relativ samlet. Med andre ord holder prediksjonen på kort sikt relativt stabil på et langt mindre intervall, 0 til 400 dollar pr. fat.

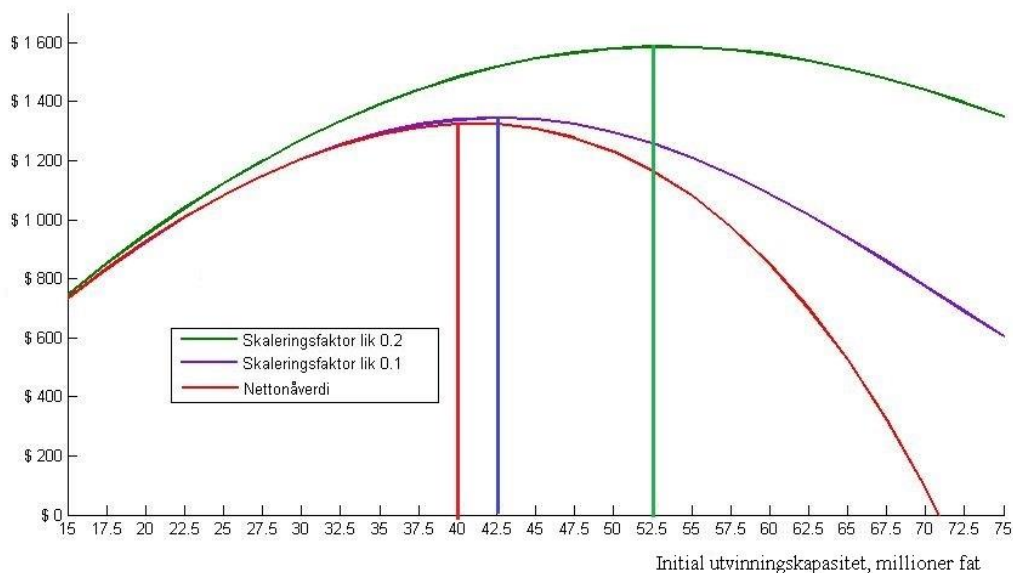
Det er likevel interessant å analysere følsomheten i skaleringsfaktoren og en eventuell sammenheng med optimal utvinningskapasitet. Realopsjonsmodellen simuleres derfor med en redusert skaleringsfaktor gjengitt i Figur 10.



FIGUR 10 MONTE CARLO SIMULERING AV OLJEPRISEN MED SKALERINGSFAKTOR LIK 0.1

Skaleringsfaktoren reduseres fra 0.2 til 0.1. Dette reduserer utfallsrommet for oljeprisen. Laveste oljepris blir da 25 dollar pr. fat, opp fra nesten null. Den øvre verdien reduseres fra nesten 5000 dollar pr. fat. til 1000 dollar pr. fat. Konsekvensen er at både oppsiden og nedsiden reduseres hvilket tilsier at usikkerheten er lavere.

Reservoarverdien i millioner dollar



FIGUR 11 NETTONÅVERDI OG REALOPPSJONSVERDIEN MED SKALERINGSFAKTOR LIK 0.1 OG 0.2

Figur 11 viser at den lavere oppsiden gjør at optimal ekstra kapasitet reduseres til 42.5 millioner fat olje. Dette er nesten samme optimale kapasitet som estimert med nettonåverdimetoden. Dette viser at realopsjonsmodellen fungerer tilfredsstillende og verdsetter usikkerheten i oljeprisen.

TABELL 23 REALOPSJONSVERDIEN MED TO SKALERINGSFAKTORER 0.2 OG 0.1 SAMMENLIGNET MED NETTONÅVERDIEN

Antall fat (mill.)	Realopsjonsverdien i millioner dollar $\sigma_s = 0.2$	Realopsjonsverdien i millioner dollar $\sigma_s = 0.1$	Nettonåverdien i millioner dollar
15	745	731	732
18	850	832	833
20	948	924	925
23	1038	1007	1007
25	1122	1082	1082
28	1199	1149	1148
30	1270	1207	1205
33	1334	1255	1252
35	1391	1294	1288
38	1441	1322	1313
40	1483	1339	1325
43	1518	1346	1324
45	1546	1340	1308
48	1566	1324	1277
50	1579	1296	1230
53	1585	1258	1165
55	1584	1210	1081
58	1576	1153	976
60	1561	1087	849
63	1539	1015	699
65	1511	938	523
68	1478	857	320
70	1439	774	88
73	1397	689	-175
75	1351	604	-472

Tabell 23 viser at realopsjonsverdien verdsetter utvinningskapasitet høyere enn nettonåverdimetoden. Dette er i tråd med fleksibilitetsverdien estimert i avsnitt 4.1.2 som verdsetter fleksibiliteten i utvinningskapasiteten.

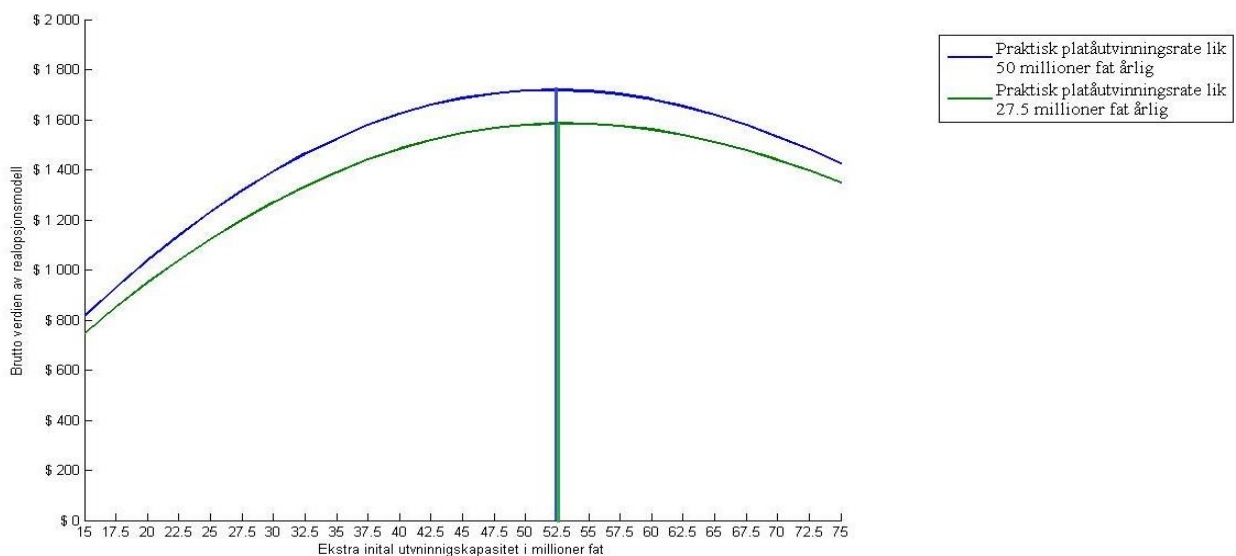
Modellen er i tillegg robust i forhold til å at man finner en optimal utvinningskapasitet som maksimerer verdien fra feltet. Den optimale kapasiteten er en funksjon av forventet fremtidig

usikkerhet av oljeprisen. Skaleringsfaktoren er således en av nøkkel faktorene i realopsjonsmodellen.

4.2.2 MAKSIMAL PLATAUTVINNING

Fra Tabell 16 ser man at ekstra initial utvinningskapasitet først utvinningsraten etter ni år. Før år ni er utvinningsraten fra oljebrønnen høyere enn maksimalt praktisk utvinningsnivå, q_p . I tillegg viser avsnitt 4.2.1 at oljeprisene langt frem i tid er mer volatile og således mer usikre.

Det er derfor nærliggende å påstå at å øke det maksimale praktiske utvinningsraten fra oljebrønnen vil påvirke optimal utvinningskapasitet. Analysen av realopsjonsmodellen konkluderer likevel med at å øke platautvinningen ikke påvirker estimatet for optimal utvinningskapasitet. Høyere platautvinning øker realopsjonsverdien, før faste kostnader, men endrer ikke optimal ekstra utvinningskapasitet nevneverdig.



FIGUR 12 REALOPSJONSVERDIEN MED PRAKTISK PLATAUTVINNING LIK 27.5 MILLIONER FAT/ÅR OG 50 MILLIONER FAT/ÅR OLJE

Ved å sette platautvinningen til 50 millioner fat er det ikke lengre en øvre praktisk begrensning fordi den øvre teoretiske utvinningsraten 46.20 millioner fat olje årlig fra Tabell 16 er. I Tabell 24 kommer det tydelig frem at den optimal ekstra utvinningskapasitet er 52.5 millioner fat olje uansett øvre grense på platautvinningen gitt Ceteris Paribus. Platautvinningsnivået er derfor ikke en nøkkelvariabel.

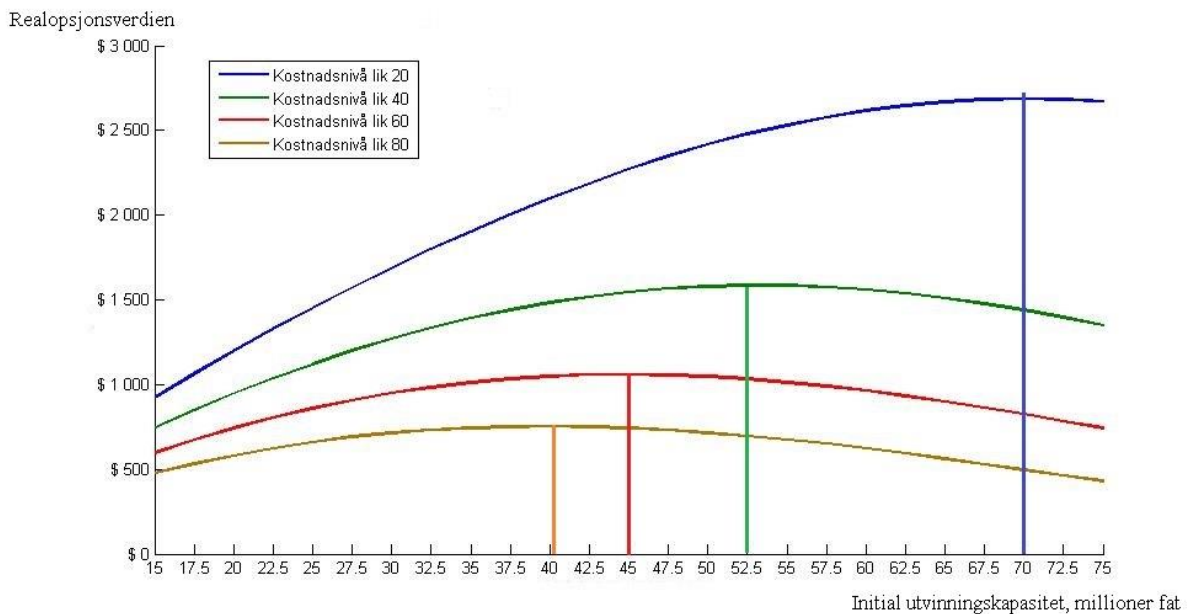
TABELL 24 REALOPSJONSVERDIEN FOR MAKSIMAL PRAKTISK PRODUKSJONSKAPASITET LIK 50 MILLIONER FAT ÅRLIG OG 27.5 MILLIONER FAT ÅRLIG

Antall fat (mill.)	Verdien av platå-utvinningen på 50 millioner \$	Verdien av platå-utvinningen på 27.5 millioner fat/år i \$	Optimal ekstra utvinningskapasitet	Verdien av platå-utvinningen på 50 millioner fat/år i \$	Verdien av platå-utvinningen på 27.5 millioner fat/år i \$
15	814	745	48	1705	1566
18	928	850	50	1716	1579
20	1036	948	53	1719	1585
23	1137	1038	55	1714	1584
25	1230	1122	58	1701	1576
28	1316	1199	60	1681	1561
30	1394	1270	63	1653	1539
33	1463	1334	65	1618	1511
35	1525	1391	68	1578	1478
38	1578	1441	70	1532	1439
40	1622	1483	73	1481	1397
43	1659	1518	75	1428	1351
45	1686	1546			

Den økte platå-utvinning gir høyere realopsjonsverdi. I eksempelet, Tabell 24, øker verdien fra \$ 1585 millioner til \$ 1719. Det er således lønnsomt å øke platåutvinningen hvis investeringskostnaden er lavere enn verdiøkningen på \$ 134 millioner.

4.2.3 KOSTNADSNIVÅ

Dette avsnittet analyserer endringene i realopsjonsmodellen som en funksjon av kostnadsnivået. Kostnadsnivået fanges opp av skaleringsfaktoren for kostnader $a_{kostnad}$. $a_{kostnad}$ er en deterministisk faktor i kostnadsstrømmen. Analysen vurderer således betydningen av endringer i kostnadsnivået på realopsjonsverdien og optimal utvinningskapasitet.



FIGUR 13 REALOPSJONSVERDIEN FOR FORSKJELLIGE KOSTNADSNIVÅ $a_{kostnad}$

Figur 13 viser at realopsjonsverdien endres med kostnadsnivået. Ceteris Paribus, alt annet likt, vil realopsjonsverdien og optimal utvinningskapasitet øke når kostnadsnivåene $a_{kostnad}$ reduseres.

Det kan være en svakhet i realopsjonsmodellen at både realopsjonsverdien og optimal utvinningskapasitet endres med kostnadsnivået nettopp fordi gjør det vanskelig å definere optimal kapasitet. På den andre siden påpeker dette en nytteverdi av å implementere en realistisk kostnadsstruktur. Denne kostnadsanalysen og definisjonen er av stor betydning på det endelige resultatet.

Kostnadsnivået er av stor betydning for å definere optimalt utvinningsnivå og således en meget viktig parameter å estimere.

4.3 KONKLUSJON OG IMPLIKASJON

Denne avhandlingen har presentert særegen realopsjonsmodell med spesiell vekt på implementeringen av en mer realistisk kostnadsmodellering. Realopsjonsmodellen har verdsatt et undersjøiske oljereservoar som en fleksibilitetsopsjon. Flexibilitetsfaktoren har vært den initiale utvinningskapasiteten.

Økt utvinningskapasitet gir økt potentiel utvinningsrate i nedtrappingsperioden som igjen fører til at marginalkostnadene øker eksponentielt i takt med utvinningsraten. Realopsjonsmodellen maksimerer verdien av oljereservoaret som en funksjon av initial utvinningskapasitet som gjør det mulig å finne optimal kapasitet.

Realopsjonsmodellen er robust uansett kostnadsnivå, i den forstand at den gir en optimal utvinningskapasitet. utfordringen er at forskjellige kostnadsnivåer gir ulik optimal utvinningskapasitet, men dette understreker relevansen til kostnadsstrukturen. Kostnadsnivået påvirker direkte optimal utvinningskapasitet, hvilket vil si at en realistisk kostnadsfunksjonen av avgjørende for å optimalisere utvinningskapasiteten og maksimere verdien av oljereservoaret. En mulig utvidelse av denne avhandlingen vil således være en modell som tar høyde for usikkerhet i kostnadsnivået.

Analysen viser i avsnitt 4.1.2 at fleksibilitetsverdien estimeres godt i realopsjonsmodellen. Det er en tydelig merverdi fra ekstra utvinningskapasiteten utover optimal kapasitet estimert fra nettonåverdimetoden. I tillegg lykkes realopsjonsmodellen i avhandlingen godt med å implementere usikkerheten i oljeprisen og betydningen den har på optimal utvinningskapasitet.

Konklusjonen er at implementeringen av mer en realistisk kostnadsstruktur er vellykket og forbedrer presisjonen ved realopsjonsmodellering hvis kostnadsnivået er kjent.

REFERANSELISTE

- Berg, T. v. d. (2011). *Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) model*. Tilgjengelig fra: <http://www.sitmo.com/article/calibrating-the-ornstein-uhlenbeck-model/>.
- Berge, C. & Kjærland, F. (2003). *Masteroppgave*.
- Berk, J. & DeMarzo, P. (2011). *Corporate Finance: Pearson Education Limited*.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). *The pricing of options and Corporate liabilities*. *The Journal of Political Economy*, vol 81 (3): 637-654.
- Brennan, M. J. & Schwartz, E. S. (1985). *Evaluating Natural Resource Investments*. *The Journal of Business*, 58 (2): 135-157.
- Copeland, T. E., Weston, F. J. & Shastri, K. (2005). *Financial Theory and Corporate Policy: Pearson Addison Wesley*.
- Det_Norske_Oljeselskap. (2013). *E-post med estimasjoner av oljeproduksjon*.
- Dias, M. A. G. (2004). *Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models*. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 44 (1–2): 93-114.
- Dineen, S. (2005). *Graduate Studies in Mathematics. I: Probability Theory in Finance. A mathematical guide to the Black-Scholes Formula: The American Mathematical Society*.
- EcoWin-Pro. (2013). *Copyright © 2005-2008 utg. Ltd., R. (red.)*.
- Ekern, S. (1988). *An option pricing approach to evaluating petroleum projects*. *Energy Economics*, 10 (2): 91-99.
- Finans-departementet. (2012). *Irreversible virkninger. Samfunnsøkonomiske analyser*. Tilgjengelig fra: <http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/nouer/2012/nou-2012-16/9/2.html?id=700932>.
- Finansdepartementet. (2009). *Realopsjoner og læring. Globale miljøutfordringer – norsk politikk*. Tilgjengelig fra: <http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/nouer/2009/nou-2009-16/9/4.html?id=576411>.
- Fleten, S.-E., Gunnerud, V., Hem, Ø. D. & Svendsen, A. (2011). *Real Option Valuation of Offshore Petroleum Field Tie-ins*. *Journal of Real Options 1*: 17.
- Hull, J. C. (2002). *Options, Futures and Other Derivatives: Prentice Hall*.
- Itô, K. (1944). *Stochastic integral*. 20 (8): 519-524.
- Lund, M. W. (1999). *Real Options in Offshore Oil Field Development Projects*. *Natural Gas Marketing & Supply, Statoil*.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D. & Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*.

- McDonald, R. L. (2006). *Derivatives Markets: Pearsons Addison Wesley*.
- Norges-Bank. (2008). *Inflasjonsmål. Tilgjengelig fra: <http://www.norges-bank.no/no/prisstabilitet/pengepolitikken-i-noreg/malet-for-pengepolitikken/>.*
- Olje_og_energidepartementet. (2011). *Norges olje- og gassressurser. Tilgjengelig fra: http://www.regjeringen.no/nb/dep/oed/tema/olje_og_gass/norges-olje-og-gassressurser-.html?id=443528.*
- Regjeringen.no. (2002). *Oljeforvaltning for økt verdiskaping i modne områder. Tilgjengelig fra: <http://www.regjeringen.no/en/dep/oed/documents-and-publications/propositions-and-reports/reports-to-the-storting/20012002/Stmeld-nr-38-2001-2002-/7.html?id=327718>.*
- Schwartz, E. & Smith, J. E. (2000). *Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. Management Science, 46 (7): 893-911.*
- Schwartz, E. S. (1997). *The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. Journal of Finance, 52 (3): 923-973.*
- Trigeorgis, L. & Schwartz, E. S. (2004). *Real Options and Investment under Uncertainty: First MIT Press paperback edition.*
- Uhlenbeck, G. E. & Ornstein, L. S. (1930). *On the Theory of the Brownian Motion. Physical Review, 36 (5): 823-841.*
- Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis. 3 utg.*
- Vasicek, O. (1977). *An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5 (2): 177-188.*
- Wallace, S. W., Helgesen, C. & Nystad, A. N. (1987). *Generating production profiles for an-oil field. Mathematical Modelling, 8 (0): 681-686.*
- Welch, G. & Bishop, G. (1995). *An introduction to the Kalman filter.*

APPENDIKS

A PRODUKSJONSVERDIER

Påfølgende verdier er estimert av det Norske Oljeselskap er kun benyttet som en representativ estimering av et teoretisk oljefelt.

År		Årlig utvinning	År		Årlig utvinning
Det norske	Realopsjons-modellen	000m ³	Det norske	Realopsjons-modellen	000m ³
2019	2013	13230,5	2035	2028	8994,4
2020	2014	19091,4	2036	2029	8066,0
2021	2015	23675,7	2037	2030	7369,6
2022	2016	26054,8	2038	2031	6847,4
2023	2017	26867,2	2039	2032	6383,1
2024	2018	27505,6	2040	2033	6093,0
2025	2019	26867,2	2041	2034	4700,3
2026	2020	25242,4	2042	2035	3655,8
2027	2021	22921,3	2043	2036	2843,4
2028	2022	20019,9	2044	2037	2205,1
2029	2023	17756,8	2045	2038	1740,9
2030	2024	15957,9	2046	2039	1334,7
2031	2025	14623,2	2047	2040	1044,5
2032	2026	13578,7	2048	2041	812,4
2033	2027	11605,7	2049	2042	638,3

Legg merke til at utvinningsdatoen i den teoretiske modellen er flyttet fra 2019 til 2013 av praktiske hensyn. Det er som kjent stor usikkerhet knyttet til oljepriser langt frem i tid. Det er derfor hensiktsmessig i en teoretisk analysere mindre volatile kontantstrømmer.

B DATASETTELJEPRISEN

Oljeprisen, futuresprisen og risikofri rente er hentet med (EcoWin-Pro 2013) som oppdateres av Thomson Reuters

Tid	Spottpriisen Brent nordsjøolje	Futuresoljepris Brent nordsjøolje	Risikofri rente Amerikansk T- Bill	Eierfordel
2013:04:00	102,37	102,04	0,11	0,071254
2013:03:00	110,02	109,79	0,13	0,104887
2013:02:00	111,38	110,42	0,16	0,056122
2013:01:00	115,55	114,54	0,14	0,034649
2012:12:00	111,11	109,89	0,15	0,01751
2012:11:00	111,23	110,25	0,17	0,063805
2012:10:00	108,7	107,56	0,17	0,043484
2012:09:00	112,39	111,58	0,17	0,083202
2012:08:00	114,57	114,05	0,16	0,105412
2012:07:00	104,92	103,84	0,16	0,035837
2012:06:00	97,8	97,88	0,21	0,219812
2012:05:00	101,87	101,43	0,18	0,128057
2012:04:00	119,47	119,17	0,19	0,159829
2012:03:00	122,88	122,08	0,18	0,10162
2012:02:00	122,66	121,56	0,17	0,0619
2012:01:00	110,98	110,69	0,12	0,088602
2011:12:00	107,38	106,87	0,11	0,05287
2011:11:00	110,52	109,98	0,11	0,051224
2011:10:00	109,56	108,84	0,11	0,030879
2011:09:00	102,76	100,88	0,12	-0,10157
2011:08:00	114,85	114,08	0,1	0,019276
2011:07:00	116,74	116,53	0,2	0,178394
2011:06:00	112,48	112,41	0,19	0,18253
2011:05:00	116,73	116,38	0,16	0,123965

2011:04:00	125,89	125,62	0,19	0,164236
2011:03:00	117,36	117,2	0,26	0,243629
2011:02:00	111,8	111,63	0,24	0,221739
2011:01:00	101,01	101,12	0,24	0,253061
2010:12:00	94,75	94,67	0,27	0,259864
2010:11:00	85,92	86	0,26	0,271168
2010:10:00	83,15	83,38	0,21	0,243147
2010:09:00	82,31	82,59	0,26	0,300752
2010:08:00	74,64	74,98	0,24	0,294538
2010:07:00	78,18	78,48	0,28	0,325959
2010:06:00	75,01	75,28	0,31	0,353117
2010:05:00	74,65	75,4	0,32	0,439961
2010:04:00	87,44	88,45	0,38	0,517815
2010:03:00	82,7	83,25	0,38	0,459542
2010:02:00	77,59	77,97	0,3	0,358627
2010:01:00	71,46	72,08	0,28	0,383665
2009:12:00	77,93	78,65	0,44	0,55036
2009:11:00	78,47	79,3	0,25	0,376261
2009:10:00	75,2	76	0,35	0,476985
2009:09:00	69,07	69,8	0,38	0,506162
2009:08:00	69,65	70,38	0,42	0,545117
2009:07:00	71,7	72,21	0,47	0,555054
2009:06:00	69,3	69,9	0,55	0,653449
2009:05:00	65,52	66,18	0,44	0,560274
2009:04:00	50,8	51,86	0,46	0,707817
2009:03:00	49,23	50,56	0,55	0,869891
2009:02:00	46,35	47,2	0,69	0,908071
2009:01:00	45,88	47,7	0,48	0,946825
2008:12:00	45,59	48,82	0,35	1,17142
2008:11:00	53,49	55,58	0,88	1,339944
2008:10:00	65,32	67,15	1,3	1,631568

2008:09:00	98,17	99,56	1,73	1,898718
2008:08:00	114,05	115,38	2,11	2,249129
2008:07:00	123,98	125,11	2,2	2,308877
2008:06:00	139,83	140,6	2,27	2,335899

C MATLAB KODEN

Modelleringskoden ble delt opp i tre deler for å gjøre utregningen lettere og redusere nødvendig minne for å beregne realopsjonsverdien

C.I RÅVAREPRISEN

%Jeg ønsker å beregne prisen for en periode på 30 år. Det vil si jeg estimerer ny pris for hvert år i 30 år

```
%-----%
%-----Modell parametere-----%
%-----%
T          = 30;          % Tid til opsjons utøvelse
NSteps     = 30;          % Antall år med produksjon
n_sim      = 4e3;         % Antall replikasjoner av råoljeprisen
dt         = T/NSteps;   % Deler opp perioden i like perioder
r          = 0.02;       % risikofri rente
%-----%
%-----Schwartz to-faktor modell variabler-----%
%-----%
S0         = 94;         % Oljepris i dag
k          = 0.01;       % hastighet på mean-reversion
sigma_conv = 0.03;      % Eierfordelen skaleringsfaktor volatilitet
sigma_long = 0.2;       % Skaleringsfaktor volatilitet
rho        = -0.4;      % Korrelasjonskoeffisient
inconv     = -0.01;     % Praktisk nytteverdi
%-----%
%-----Fyller minne for å lette beregningen diffusjons modellen-----%
%-----%
S          = zeros(T,n_sim);
S(1,:)     = S0;
conv       = zeros(T,n_sim);
conv(1,:)  = -0.01;
randomrho  = zeros(n_sim,T-1);
random1    = zeros(n_sim, T-1);
```

```

%-----%
%-----Cholsky korrelasjonen-----%
%-----%

for j = 1:1:n_sim
for i = 1:1:T-1
random1(i,j) = randn(1,1);
randomrho(i,j) = (rho*random1(i,j))+(randn*(sqrt(1-rho^2)));
end
end

%-----%
%-----To-faktor modellen for oljesimulering-----%
%-----%

for j = 1:1:n_sim
for i = 1:1:T-1
conv(i+1,j) = conv(i,j)*exp(-k)+inconv*(1-exp(-k)+sigma_conv*...
sqrt((1-exp(-2*k))/(2*k)))*randomrho(i,j);
S(i+1,j) =S(i,j)*exp((r-conv(i+1,j)-
0.5*sigma_long^2)+sigma_long*random1(i,j));

end
end

```

C.II ESTIMERING AV EKSTRA KAPASITET

%-----%

%----- Reservoar parameters -----%

%-----%

T = 30 % Tid
 fem = 5 % Full produksjon fra det femte året
 fire = 4 % Normal produksjon
 q_w = zeros(T,1) % Millioner Fat/år-Maks teoretisk kapasitet brønn
 q_r = zeros(T,1) % Millioner Fat/år-Maks teoretisk kapasitet tidspunkt t
 q_p = zeros(T,1) % Millioner Fat/år -Maks praktisk kapasitet installasjon
 Q_max = zeros(T,1); % Millioner Fat/år-Maks praktisk kapasitet tidspunkt t

%-----%

%-----Modellen er kalibrert med verdier for Johan Sverdrup plattformen-----%

%-----%

N = 1 % Antall ekstra brønner
 R0 = 450 % Millioner Fat - Opprinnelig oljereserve
 q_w(:,1) = 66; % Millioner Fat/år - Maks teoretisk kapasitet brønn
 q_p(:,1) = 27.5 % Millioner Fat/år -Maks praktisk kapasitet installasjon
 gamma = 0.7 % Justeringsparameter
 a1 = 0.2 % Opptrapping år 1
 a2 = 0.3 % Opptrapping år 2
 a3 = 0.4 % Opptrapping år 3

%-----%

%-----Produksjonsmodellen uten utvidet kapasitet-----%

%-----%

R = zeros(T,1);
 q_r(1,1) = q_w(1,1)*(a1);
 q_r(2,1) = q_w(2,1)*(a2)*((R0-q_r(1,1))/R0);
 q_r(3,1) = q_w(2,1)*(a3)*((R0-q_r(2,1)-q_r(1,1))/R0);
 R(4,1) = q_r(3,1)+q_r(2,1)+q_r(1,1);

```

%-----%
%-----Produksjonsmodellen loop-----%
%-----%

for j=fire:T
q_r(j,1)      = q_w(3,1)*gamma*((R0-R(j-1,1))/R0);
R(j,1)       = q_r(j,1)+R(j-1,1);
end

%-----%
%-----Maks praktisk kapasitet tidspunkt t-----%
%-----%

Q2           = [q_w q_p q_r];
t_Q2         = Q2';
Q_max2       = min(t_Q2);

%-----%
%-----Parametere for produksjonsmodellen med utvidet kapasitet-----%
%-----%

Q_max1       = zeros(T,T);
q_r1         = zeros(T,1);
R1           = zeros(T,1);
q_r1(1,1)    = q_w(1,1)*(a1);
q_r1(2,1)    = q_w(2,1)*(a2)*((R0-q_r1(1,1))/R0);
q_r1(3,1)    = q_w(2,1)*(a3)*((R0-q_r1(2,1)-q_r1(1,1))/R0);
R1(4,1)     = q_r1(3,1)+q_r1(2,1)+q_r1(1,1);

%-----%
%-----Ekstra kapasitet-----%
%-----%

for i=1:T
R_in(i,1)    = 2.5*i;
End

```

```

%-----%
%-----Produksjonsmodellen loop-----%
%-----%

for i=1:T
for j=fire:T
Rnew          = R0 + R_in(i,1);
q_r1(j,1)     = q_w(3,1)*gamma*((Rnew-R1(j-1,1))/Rnew);
R1(j,1)       = q_r1(j,1)+R1(j-1,1);
Q1            = [q_p q_r1];
Q_max1(:,i)   = min(Q1)';
end
end

%-----%
%----- Maks praktisk kapasitet tidspunkt -----%
%-----%

t_Qmax2       = Q_max2';
Q_maxr        = ones(T,T);
Q_max21       = zeros(T,T);
for j=1:T
for i=1:T
Q_max21(i,j)  = Q_maxr(i,j)*t_Qmax2(i,1);
end
end
Q_max1(:,1:fem) = Q_max21(:,1:fem); Den ekstra kapasiteten begynner på 15

%-----%
%-----Forskjellen i produksjon med og uten utvidet produksjon-----%
%-----%

mengde        = Q_max1-Q_max21 ;

```


C.IVREALOPSJONSVERDIEN VS. NETTONÅVERDI

```
%-----%
%----- Verdsettelsesmodellene-----%
%-----%

sim          = 4e3;           % Antall simuleringen
T            = 30;           % Tid
kosts        = 220;          % Produksjonskostnad
r            = 0.021;         % Risikofri rente
mengde       = suppNEW2;      % Produsert mengde
marginalkost = kosts * exp(mengde); % Marginalkostnaden

%-----%
%-----Realopsjonsmodellen-----%
%-----%

for h=1:T
for j=1:sim
for i =1:T
Vi(i,j)      = exp(-r*i)*( S(i,j)*mengde(i,h) - marginalkost(i,h) );
end
end
Visum        = sum(Vi);
Visum1       = max(Visum,0);
Visum2       = mean(Visum1);
VN2(h,1)     = Visum2;
end
```

```

%-----%
%-----Nettonåverdismodellen-----%
%-----%

Smean      = mean(S');
Smean      = Smean';
for h=1:T
for i=1:T
Vii(i,1)   = exp(-r*i)*( Smean(i,1)*mengde(i,h)- marginalkost(i,h) );
end
Vii1       = sum(Vii);
VN2mean(h,1) = Vii1;
end

```