Forord

Denne masteroppgaven innen finansiell økonomi konkluderer mine fem fantastiske studieår ved NTNU i Trondheim.

Jeg vil først og fremst rette en stor takk til professor Snorre Lindset ved Institutt for Samfunnsøkonomi for hans utmerkede arbeid som veileder. Hans råd, innspill og rettelser har vært til meget stor hjelp.

Andre som fortjener en stor takk er mine kjære foreldre Liv og Magne. De har stilt opp med uvurderlig støtte gjennom hele studietiden og lest gjennom oppgaven, jeg er evig takknemlig.

Jeg vil også takke alle mine venner som har bidratt til godt humør og motivasjon. En ekstra takk går spesielt til mine studiekamerater Petter Hellstrand Tinholt, Bjørnar Hallberg Løkken og Kristoffer Danielsen, som har stilt opp med gjennomlesning og bidratt med gode råd.

Eventuelle feil i oppgaven er mine egne.

Svein Risa

Trondheim, mai 2013.

Innledning

I denne oppgaven skal jeg undersøke effektene av diversifisering på Oslo Børs. Jeg skal forsøke å besvare problemstillingene 1 og 2.

1. **Hvor mange aksjer trenger man for å ha en veldiversifisert portefølje?**

Temaet er både aktuelt og interessant. Diversifisering er en gammel strategi og det er bred enighet om at å spre investeringer over flere aktiva kontra å investere alt i ett aktivum vil gi lavere risiko. Jeg skal nå undersøke hvor mange forskjellige aksjer som behøves for at det meste av diversifiseringsgevinsten er oppnådd. Forskerne er veldig uenige om dette antallet. Tidligere undersøkelser har konkludert med alt fra at fem aksjer er nok, til flere hundre aksjer.

Oppgaven er også aktuell og interessant for investorer og forvaltere fordi det som regel vil være merkostnader ved å inkludere flere aksjer i porteføljen. Det vil være interessant å se om jeg kan konkludere med hvor mange aksjer som er nok for å oppnå god diversifiseringseffekt. Den jevne investor eller forvalter vil naturlig nok ønske å ha maksimal diversifiseringseffekt på få aksjer grunnet kostnadene.

Gjennom analysen kom jeg fram til at det er en klar diversifiseringsgevinst ved å inkludere flere aksjer i porteføljen. Porteføljestandardavviket fortsetter å falle selv utover min grense på 30 aksjer. Reduksjonen er minimal mot slutten, men jeg har konkludert med at den vil være statistisk signifikant selv med mer enn 30 aksjer i porteføljen.

Det er derimot vanskeligere å konkludere med et spesifikt antall aksjer siden vi hele tiden har en effekt av diversifiseringen, selv om den er svært liten. Jeg har gjort et forsøk på å løse dette ved å sette en nedre grense for reduksjonen i porteføljestandardavviket. Dersom reduksjonen i standardavviket ved å inkludere én ekstra aksje er lavere enn denne grensen, vil jeg ikke inkludere flere aksjer i porteføljen. Jeg kom da fram til at syv aksjer i porteføljen var tilstrekkelig.

2. Hvordan har diversifiseringseffekten utviklet seg de siste ti årene?

Jeg skal også se på hvordan diversifiseringseffekten har utviklet seg over de siste ti årene. Mye tyder på at det har blitt høyere korrelasjon mellom aksjene i markedet. Økt korrelasjon kan både skyldes bedre kommunikasjon og innførsel av aksjeroboter som gjør at aktørene i markedet handler mer likt nå enn før. Uroen i finansmarkedene de siste fem årene kan også være en forklarende faktor.

I oppgaven har jeg brukt data for månedlig avkastning på 83 aksjer og egenkapitalbevis på Oslo børs i perioden 2003-2013. Jeg har først sett på diversifiseringseffekten for hele perioden og så har jeg delt opp perioden i to og foretatt samme undersøkelse. De to delperiodene har jeg sammenlignet for å kunne observere endringer i diversifiseringseffekten over tid.

Jeg kom fram til at diversifiseringseffekten er ganske lik over de forskjellige periodene. Det som skiller dem, er at aksjemarkedet har blitt mer volatilt den siste perioden. Denne økningen skyldes både høyere standardavvik i avkastningen per aksje generelt samt at korrelasjonen mellom avkastningene har økt.

Så hva betyr det at diversifiseringseffekten er lik? I oppgaven har jeg sett på hvordan porteføljestandardavviket utvikler seg i takt med antall aksjer. Figur 4 viser utviklingen i hver av de tre delperiodene. Her kommer det tydelig fram at formen på kurvene er veldig lik. Dette bekreftes i tabell 5 hvor jeg sammenligner reduksjonen i porteføljestandardavviket for hver ekstra aksje i de tre delperiodene.

I oppgaven skal jeg først gi en liten innføring i porteføljeteori hvor jeg går igjennom teorien jeg skal bruke i undersøkelsene. Her går jeg også inn på forskjellen mellom systematisk og usystematisk risiko som er veldig sentralt i oppgaven. Så skal jeg beskrive undersøkelsen nøye før jeg til slutt presenterer resultatene og konkluderer.

1 Porteføljeteori og viktige begreper

I dette kapittelet går jeg gjennom teorien jeg har benyttet meg av i undersøkelsene mine. Jeg forutsetter at sentrale statistiske begreper er kjent for leseren. Teorien og metoden som presenteres senere i oppgaven kan være et nyttig redskap for videre analyser av aksjemarkedet.

Teorien er hentet fra lærebøkene Investments (Bodie, 2009), Financial Theory and Corporate Policy (Copeland, 2005) og Innføring i finansteori (Sandvik, 2003) som i hovedsak bygger på (Markowitz, 1952) og (Sharpe, 1963).

1.1 Viktige begreper i oppgaven:

1.1.1 Avkastning

Jeg har basert denne oppgaven på realisert månedlig avkastning over en ti-års periode. Det betyr at avkastningen kun ble målt ved prosentvis forskjell i aksjekursen for hver måned. Avkastningen ble beregnet ved $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, der R_t er realisert avkastning.

Jeg har forutsatt at dividendeutbetalinger ikke påvirker kursen på lang sikt og at dividendeutbetalinger ikke vil gjøre en aksje mer eller mindre risikabel. Vanligvis vil aksjekursen stige før en dividendeutbetaling og så falle. Jeg har forutsatt at denne svingningen ikke vil påvirke det langsiktige standardavviket. Dividendeutbetalinger er derfor utelatt fra beregningen av avkastningen, som igjen legger grunnlaget for porteføljestandardavviket.

1.1.2 Hvordan måle risiko

I denne oppgaven har jeg brukt standardavviket til avkastningen som mål på risiko. Standardavviket gir oss et mål på spredningen. Jo høyere standardavviket er, jo høyere vil spredningen på avkastningen være. Dersom en aksje har et høyt standardavvik, sier vi at den er risikabel eller volatil.

Det empiriske standardavviket er beregnet på grunnlag av realisert månedlig avkastning ved formelen $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_t - \bar{R})^2$. $\bar{R}$ er gjennomsnittlig månedlig realisert avkastning og n er antall observasjoner.

1.1.3 Systematisk risiko og usystematisk risiko

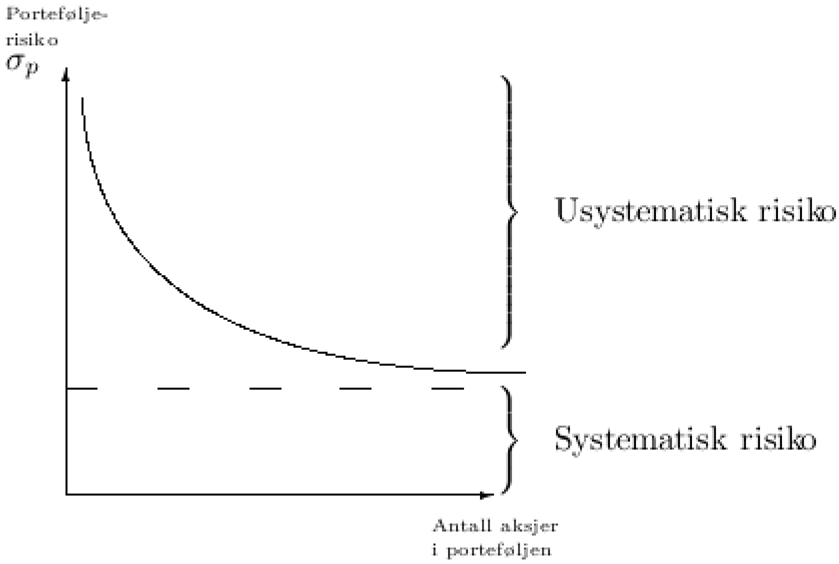
I følge (Sharpe, 1963), som er både anerkjent og akseptert blant forskere og i finanslitteraturen, kan den totale risikoen som følger med en aksje eller aksjeportefølje deles inn i to deler: usystematisk og systematisk risiko.

Total risiko = usystematisk risiko + systematisk risiko

Usystematisk risiko, også kalt selskapsrisiko eller unik risiko, er den risikoen som er unik for hvert enkelt selskap. Selskapsrisikoen kan for eksempel være problemer innad i selskapet som dårlig økonomisk styring. Denne risikoen er det mulig å diversifisere seg bort ifra. Ved å inkludere flere selskaper i porteføljen, vil den unike risikoen for hvert selskap bli en svært liten del av den totale porteføljerisikoen.

Systematisk risiko, også kalt markedsrisiko, er den risikoen som følger med markedet. Alle selskaper vil være eksponert for denne og det vil ikke være mulig å diversifisere seg bort ifra denne. Finanskrisen i 2007-2008 og børskrakket i 1987 er gode eksempler på markedsrisiko hvor de aller fleste aksjer opplevde et kraftig kursfall. Uansett hvor mange aksjer man har i porteføljen, vil man være eksponert for systematisk risiko. Det er derimot mulig å diversifisere seg bort fra uro i aksjemarkeder ved å investere i andre markeder som råvarer, eiendom og kunst, men det er ikke tema for denne oppgaven.

Når antall aksjer i porteføljen går mot uendelig, vil porteføljerisikoen konvergere mot den systematiske risikoen. Denne utviklingen er illustrert i figur 1, her er det tydelig at den systematiske risikoen blir mindre og mindre jo flere aksjer som inkluderes i porteføljen.



Figur 1: Sammenheng mellom antall aksjer i porteføljen og porteføljerisiko. Figuren er hentet fra (Ødegaard, 2007)

Den systematiske risikoen kan defineres som den gjennomsnittlige kovariansen mellom avkastningen til alle aksjene i markedet (mer om dette i kapittel 1.2.5).

1.2 Porteføljeteori

Jeg kommer til å fokusere på den mest relevante teorien som handler om beregning av porteføljevarians.

Diversifisering er en eldgammel strategi og kan blant annet spores helt tilbake til forkynnerens bok 11:2 i bibelen, som ble skrevet rundt 935 f.kr. Her står det:

«Del det du har, med sju eller åtte;

for du vet ikke hva slags ulykker

som kan hende på jorden.»

Diversifisering i moderne porteføljeteori ble introdusert av nobelprisvinner Harry Markowitz på 1950-tallet (Markowitz, 1952). Markowitz utledet formlene for beregning av porteføljevarians.

Jeg skal nå gå igjennom hvordan porteføljevarians og standardavvik beregnes. Først tar jeg for meg en portefølje bestående av to aksjer og deretter med mange aksjer.

1.2.1 Portefølje med to aksjer

Vi starter med en portefølje på to aksjer A og B.

Hver aksje har sin gjennomsnittsavkastning som vi bruker til å beregne standardavviket.

Gjennomsnittlig avkastning er hhv. $\bar{A}$ og $\bar{B}$ mens standardavviket er σ_A og σ_B, andelen investert i hhv. A og B er gitt ved w_i, i=A,B. Korrelasjonen mellom avkastningen på A og B er gitt ved ρ_{AB}.

Standardavvikene beregnes som vist i kapittel 1.1.2.

Variansen i porteføljen vil bestå av variansen i avkastningen til aksje A og B samt korrelasjonen mellom dem. Jeg viser dette ved bruk av tabell.

	$w_A\ \sigma_A$	$w_B\ \sigma_B$
$w_B\ \sigma_B$	$w_B\ \sigma_B * w_A\ \sigma_A * \rho_{AB}$	${w_B}^2\ {\sigma_B}^2$
$w_A\ \sigma_A$	${w_A}^2\ {\sigma_A}^2$	$w_B\ \sigma_B * w_A\ \sigma_A * \rho_{AB}$

Dermed blir den totale porteføljevariansen

$$\sigma_P{}^2 = {w_A}^2\ {\sigma_A}^2 + {w_B}^2\ {\sigma_B}^2 + 2(w_B\ \sigma_B * w_A\ \sigma_A * \rho_{AB}) \qquad (1)$$

og standardavviket blir

$$\sigma_P = \sqrt{{w_A}^2\,{\sigma_A}^2 + {w_B}^2\,{\sigma_B}^2 + 2(w_B\,\sigma_B * w_A\,\sigma_A * \rho_{AB})}. \qquad (2)$$

Her kommer det tydelig fram at høyere korrelasjon mellom avkastningen på aksjene i porteføljen vil gi høyere porteføljestandardavvik.

1.2.2 Eksempel med to aksjer fra virkeligheten

Vi skal demonstrere formlene over ved å bruke data fra Oslo børs i perioden 2003-2013 for to kjente aksjer: DNB og Statoil.

Månedlig avkastning på hhv. DNB- og Statoilaksjen har et standardavvik på 10,12 % og 8,38 %. Korrelasjonskoeffisienten mellom dem er 0,485. Jeg har hele tiden benyttet meg av likeveide porteføljer, andelen investert i hver av aksjene blir dermed 50 %.

Vi setter inn alle disse dataene i (2) og regner ut

$$\boldsymbol{\sigma_P} = \sqrt{\mathbf{0,5^2 * 10,12\%^2 + 0,5^2 * 8,38\%^2 + 2(0,5 * 10,12\% * 0,5 * 8,38 * 0,485)}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_P} = \mathbf{0{,}07982} \approx \mathbf{8\ \%}$$

Dette er et utmerket eksempel på diversifisering: Det totale porteføljestandardavviket er mindre enn standardavviket til avkastningen for den minst volatile aksjen.

1.2.3 Alternativ måte å beregne porteføljevarians

For en portefølje bestående av et lite antall aksjer, kan man bruke (2) uten altfor store problemer. Imidlertid blir formelen mer og mer uhåndterlig når antall aksjer i porteføljen øker. For eksempel vil (2) bestå av 400 varians/kovariansledd for en portefølje med 20 aksjer. For å løse dette problemet introduserer jeg matriseregning.

Vi bruker igjen en portefølje bestående av to aksjer, A og B, og benytter oss av en varians-kovariansmatrise, en kolonnevektor og en radvektor som begge består av andelene investert i hver portefølje w_i der i=A, B. ${\sigma^2}_A$ er variansen i avkastningen for aksje A, mens σ_{AB} er kovariansen mellom avkastningene til A og B.

$$\boldsymbol{{\sigma_P}^2 = [w_A \quad w_B] * \begin{bmatrix} {\sigma^2}_A & \sigma_{AB} \\ \sigma_{BA} & {\sigma^2}_B \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix}} \qquad \mathbf{(3)}$$

Denne definisjonen er helt lik formel (1), dette skal jeg nå demonstrere:

Vi starter med å multiplisere kolonnevektoren med varians-kovariansmatrisen. Dette gir

$$[\boldsymbol{w_A} \quad \boldsymbol{w_B}]^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_A \sigma^2{}_A} & + & \boldsymbol{w_B \sigma_{AB}} \\ \boldsymbol{w_A \sigma_{BA}} & + & \boldsymbol{w_B \sigma^2{}_B} \end{bmatrix}.$$

Vi multipliserer så inn radvektoren og får

$$\boldsymbol{\sigma_P}^2 = \boldsymbol{w_A}^2 \boldsymbol{\sigma^2{}_A} + \boldsymbol{w_A w_B \sigma_{AB}} + \boldsymbol{w_B w_A \sigma_{BA}} + \boldsymbol{w_B}^2 \boldsymbol{\sigma^2{}_B},$$

som er det samme som i (1) siden vi vet at $\sigma_{AB} = \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$.

Samler vi leddene, får vi

$$\boldsymbol{\sigma_P}^2 = \sum_{i=A}^{B} \sum_{j=A}^{B} \boldsymbol{w_i w_j \sigma_{ij}} \quad \text{hvor i,j = A,B.} \qquad \textbf{(4)}$$

Jeg har valgt å skrive om (3) slik at jeg kan benytte meg av korrelasjonsmatrisen istedenfor kovariansmatrisen.

Jeg tar utgangspunkt i kovariansmatrisen. Vi vet at $\sigma_{AB} = \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$. Dermed kan vi skrive om kovariansmatrisen til:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_{AA}} & \boldsymbol{\sigma_{AB}} \\ \boldsymbol{\sigma_{BA}} & \boldsymbol{\sigma_{BB}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma_B} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{\rho_{AB}} \\ \boldsymbol{\rho_{BA}} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma_B} \end{bmatrix}.$$

Vi setter dette uttrykket inn for kovariansen i (3):

$$\boldsymbol{\sigma_P}^2 = [\boldsymbol{w_A} \quad \boldsymbol{w_B}]^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma_B} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{\rho_{AB}} \\ \boldsymbol{\rho_{BA}} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma_B} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_A} \\ \boldsymbol{w_B} \end{bmatrix}.$$

Litt omskriving gir

$$\boldsymbol{\sigma_P}^2 = [\boldsymbol{w_A \sigma_A} \quad \boldsymbol{w_B \sigma_B}] * \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{\rho_{AB}} \\ \boldsymbol{\rho_{BA}} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_A \sigma_A} \\ \boldsymbol{w_B \sigma_B} \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(5)}$$

Denne formelen vil også gi samme resultat som likning (2).

For å demonstrere at vi vil få samme resultat ved bruk av (5) som ved bruk av (2), bruker vi dataene fra det forrige eksempelet med DNB og Statoil.

Vi husker at $\boldsymbol{\sigma_A}$ =10,12 %, $\boldsymbol{\sigma_B}$ = 8,38 %, $\boldsymbol{w_A}$ **=** $\boldsymbol{w_B}$ **= 0,5** og $\boldsymbol{\rho_{AB}} = \mathbf{0,485.}$

Disse dataene setter vi inn i (5) og beregner matriseproduktet:

$$\boldsymbol{\sigma_P}^{\mathbf{2}} = [\mathbf{5,06\%} \quad \mathbf{4,19\%}] * \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0,485} \\ \mathbf{0,485} & \mathbf{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{5,06\%} \\ \mathbf{4,19\%} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\sigma_P}^{\mathbf{2}} =$ **0,00637251**

$\boldsymbol{\sigma_P}$ **= 0,07982 ≈ 8 %**

Vi ser at resultatet stemmer overens med det vi fikk ved bruk av (2).

1.2.4 Portefølje med flere aksjer

Når antallet aksjer i porteføljen øker utover to, blir det straks mer komplisert å beregne standardavviket ved hjelp av (2). Vi benytter oss derfor kun av matriseregning.

Fremdeles er det $\boldsymbol{\sigma_P}^{\mathbf{2}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{w_i w_j \sigma_{ij}}$ som gjelder, hvor i, j = 1,2,,,,,n.

Vi beregner porteføljevariansen ved å enkelt utvide (5). Vektorene utvides med antall aksjer i porteføljen multiplisert med andel i porteføljen, mens korrelasjonsmatrisen utvider seg med ett diagonalt steg. Dermed blir formelen for en portefølje bestående av n antall aksjer slik:

$$\sigma_P^{\ 2} = W * \sum * W^T \text{,} \qquad \textbf{(6)}$$

hvor $W = \begin{bmatrix} w_1\sigma_1 & w_2\sigma_2 & \cdots & w_n\sigma_n \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ og $W^T = \begin{bmatrix} w_1\sigma_1 \\ w_2\sigma_2 \\ \vdots \\ w_n\sigma_n \end{bmatrix}$.

Denne formelen vil fungere uansett hvor mange aksjer porteføljen inneholder. Jeg har benyttet meg av (6) i mine undersøkelser. Kapittel 2 inneholder en detaljert gjennomgang av hvordan denne formelen brukes i praksis ved hjelp av Excel.

1.2.5 Hvordan beregne systematisk risiko

Som nevnt tidligere, vil den den totale risikoen konvergere mot den systematiske risikoen. Ved å sette opp en generell modell hvor vi benytter oss av gjennomsnittlig varians og kovarians, kan vi undersøke hva som skjer når vi lar antall aksjer i en likevektet portefølje gå mot uendelig.

Vi tar utgangspunkt i utrykk (4).

Gjennomsnittlig varians: $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2{}_i$

Gjennomsnittlig kovarians: $\overline{\text{cov}} = \frac{1}{n^2 - n}\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}$, i≠ j.

Dette gir:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2}\left(n\bar{\sigma}^2 + \left(n^2 - n\right)\overline{cov}\right) = \frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 + (1 - \frac{1}{n})\overline{cov}\ .$$

Så lar vi antall aksjer i porteføljen gå mot det uendelige som gir

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_P^2 = \overline{\text{cov}}.$$

Vi ser at porteføljerisikoen konvergerer mot den gjennomsnittlige kovariansen. Dette stemmer bra med teorien om at den unike risikoen knyttet til hver enkelt aksje ikke vil ha noe å si når antall aksjer er stort nok. Denne utviklingen er illustrert i figur 1.

Vi kan konkludere med at den systematiske risikoen vil være lik den gjennomsnittlige kovariansen mellom avkastningen til aksjene. Dette tallet vil kanskje ha liten vitenskapelig verdi i seg selv, men det vil komme godt til nytte når vi skal se på utviklingen i kovarians over tid og sammenligne ulike perioder. Mer om dette i kapittel 3.3.

2 Beskrivelse av undersøkelsen

2.1 Presentasjon av data og kriterier for utvelgelse

I denne undersøkelsen har jeg konstruert tilfeldige likeveide porteføljer. Jeg har brukt data for daglige sluttkurser for 83 aksjer og egenkapitalbevis på Oslo Børs i perioden 5.2.2003-5.2.2013. Dataene er hentet inn ved hjelp av Thomson Reuters Datastream på Institutt for samfunnsøkonomi. På bakgrunn av disse tallene har jeg beregnet månedlig avkastning. Dataene inkluderte ikke og var heller ikke justert for dividendeutbetalinger, som da ikke er tatt med i beregningen av månedlig avkastning. Dette skyldtes hensyn til arbeidsmengden og tidsbruken, men jeg har også i kapittel 2.1.1 argumentert for at dividendeutbetalingene trolig vil ha lite å si for den totale porteføljerisikoen på lang sikt. Dersom jeg hadde hatt lengre tid, ville jeg justert avkastningen for dividendeutbetalinger.

Jeg stilte følgende kriterier i utvelgelsen:

Aksjene må være børsnotert i dag.

Denne oppgaven kan anvendes i porteføljeseleksjon og det vil derfor være mest relevant og interessant å fokusere på aksjer som er børsnotert i dag.

Aksjene må være handlet minimum 100 ganger i året.

Jeg har beregnet standardavviket på grunnlag av månedlig realisert avkastning. For å kunne realisere avkastning for hver måned, vil man være helt avhengig av at noen står klar til å kjøpe aksjen. Dersom det er få gjennomførte handler, er det ikke like relevant å fokusere på realisert avkastning.

Aksjene må ha en verdi over NOK15

I denne oppgaven har jeg benyttet meg av likeveide porteføljer. Aksjer med lav verdi vil få unaturlig høye standardavvik i avkastningen selv ved små endringer i kursen. Dersom disse aksjene inkluderes i en likeveid portefølje, kan det føre til at hele porteføljen får et høyere standardavvik enn det som egentlig er riktig. Dermed har jeg utelatt «småaksjene» fra beregningen.

I utvelgelsen har jeg ikke tatt hensyn til ulike sektorer innad i aksjemarkedet, men har valgt helt tilfeldig fra alle sektorer.

I appendikset har jeg laget en fullstendig liste over alle aktivaene i oppgaven med deskriptiv statistikk for perioden 2003-2013. I undersøkelsen for årene 2003-2008 vil ikke alle aksjene være med da flere ikke var børsnotert.

2.2 Metode

Undersøkelsen er inspirert av (Evans and Archer, 1968) og (Ødegaard, 2007). De to artiklene undersøker diversifiseringseffekten på hhv. New York Stock Exchange og Oslo Børs.

Først beregner jeg standardavviket til avkastningen for en likeveid portefølje bestående av to tilfeldige aksjer. I neste omgang legger jeg til én ekstra tilfeldig aksje slik at porteføljen kommer opp i tre aksjer. Samtidig synker andelen per aksje fra 1/2 til 1/3 slik at det hele tiden blir en likeveid portefølje. Igjen beregnes standardavviket for avkastningen til porteføljen. Denne prosessen gjentas helt til porteføljen består av 30 aksjer.

Til sammen har jeg utført 100 slike trekninger for hver periode. I alt blir det 9000 porteføljer. Til slutt har jeg målt gjennomsnittlig standardavvik for alle porteføljene bestående av 1-30 aksjer for hver periode. Se kapittel 3 for resultater.

Jeg har valgt å gi en detaljert beskrivelse av hvordan jeg har utført analysen i Excel. På den måten kan oppgaven være nyttig for andre som skal foreta lignende undersøkelser.

2.2.1 Utførelse

Beregningene ble utført i Excel hvor jeg benyttet meg av matriseregning som er detaljert beskrevet i kapittel 1:

$$\sigma_P{}^2 = \begin{bmatrix} w_1\sigma_1 & w_2\sigma_2 & \cdots & w_n\sigma_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1\sigma_1 \\ w_2\sigma_2 \\ \vdots \\ w_n\sigma_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(6)}$$

Utvelgelsen av porteføljer er helt tilfeldig. Gjennom å bruke TILFELDIG-funksjonen i Excel får hver aksje utdelt et tall mellom 0 og 1. Jeg bruker så funksjonene N.STØRST OG FINN.RAD. funksjonene til å hente ut de 30 aksjene som har fått tildelt de største tallene. På denne måten blir det helt tilfeldige porteføljer uten at den samme aksjen dukker opp to ganger i samme portefølje.

Avkastningen til de 30 trukne aksjene setter jeg inn i et regneark og beregner standardavvik og korrelasjonsmatrise.

Hver trekning har følgende oppsett i Excel: (Dette eksempelet er fra trekning 2 for 2003-2013)

Tabell 1: Standardavvik og porteføljevektorer W,

Aksje	SPAREBAN	ALGETA	NORDIC SE	DNB	BONHEUR
Standardavvik	0,0740555	0,2336347	0,1613924	0,1007631	0,1086973
Str. på portefølje					
2	0,03702776	0,11681737	0,08069619	0,05038153	0,05434865
3	0,02468517	0,07787824	0,05379746	0,03358768	0,03623243
4	0,01851388	0,05840868	0,04034809	0,01851388	0,02717433
5	0,0148111	0,04672695	0,03227847	0,02015261	0,02173946

I tabell 1 finner vi først de 30 trukne aksjene med tilhørende standardavvik. Her har jeg kun tatt med de 5 første av hensyn til plassen. Standardavviket gir grunnlaget for den neste matrisen. Her finner vi de vertikale vektorene W som vi husker består av andel mulitplisert med standardavvik. Siden jeg bruker likeveide portefølje vil denne alltid bli $\frac{\sigma_i}{n}$, altså standardavviket dividert med antall aksjer i porteføljen.

Tabell 2: Korrelasjonsmatrise

	SPAREBANK 1 SR E	*ALGETA*	*IC SEMICONDU*	*DNB*	*BONHEUR*
SPAREBANK 1 SR BANK	1	0,36191313	0,323697544	0,62555846	0,55262254
ALGETA	0,36191313	1	0,158867893	0,36502082	0,22891842
NORDIC SEMICONDUCTOR	0,32369754	0,15886789	1	0,32122798	0,35717911
DNB	0,62555846	0,36502082	0,321227978	1	0,60146575
BONHEUR	0,55262254	0,22891842	0,357179105	0,60146575	1

Tabell 2 gir oss korrelasjonsmatrisen for alle de 30 aksjene. Igjen har jeg kun tatt med de 5 første. Matrisen er laget av Excels programtillegg Data Analysis Tool. Korrelasjonen er beregnet på bakgrunn av månedlig avkastning.

Når disse dataene er på plass, kan vi beregne porteføljestandardavviket ved å bruke (6). For å beregne variansen for en portefølje bestående av 8 aksjer, brukes følgende formel:

=MMULT(MMULT(B12:I12;C40:J47);TRANSPONER(B12:I12))

Dermed gjør Excel følgende beregninger:

Tabell 3: Porteføljevektoren for 8 aksjer er innrammet.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
	SPAREBAN	ALGETA	NORDIC SE	DNB	BONHEUR	GANGER R	FRED OLSE	PROSAFE	STOREBRA	INFRATEK	INDRE SOG	COPEINCA	SCHIBSTED	HAVILA SH	EKORNES	AKER SOLU
	0,074056	0,233635	0,161392	0,100763	0,108697	0,105674	0,140209	0,106446	0,130762	0,069047	0,075227	0,149588	0,123491	0,102627	0,08125	0,13328
2	0,037028	0,116817	0,080696	0,050382	0,054349	0,052837	0,070105	0,053223	0,065381	0,034524	0,037613	0,074794	0,061746	0,051313	0,040625	0,06664
3	0,024685	0,077878	0,053797	0,033588	0,036232	0,035225	0,046736	0,035482	0,043587	0,023016	0,025076	0,049863	0,041164	0,034209	0,027083	0,044427
4	0,018514	0,058409	0,040348	0,025191	0,027174	0,026418	0,035052	0,026612	0,032691	0,017262	0,018807	0,037397	0,030873	0,025657	0,020312	0,03332
5	0,014811	0,046727	0,032278	0,020153	0,021739	0,021135	0,028042	0,021289	0,026152	0,013809	0,015045	0,029918	0,024698	0,020525	0,01625	0,026656
6	0,012343	0,038939	0,026899	0,016794	0,018116	0,017612	0,023368	0,017741	0,021794	0,011508	0,012538	0,024931	0,020582	0,017104	0,013542	0,022213
7	0,010579	0,033376	0,023056	0,014395	0,015528	0,015096	0,02003	0,015207	0,01868	0,009864	0,010747	0,02137	0,017642	0,014661	0,011607	0,01904
8	0,009257	0,029204	0,020174	0,012595	0,013587	0,013209	0,017526	0,013306	0,016345	0,008631	0,009403	0,018698	0,015436	0,012828	0,010156	0,01666
9	0,008228	0,025959	0,017932	0,011196	0,012077	0,011742	0,015579	0,011827	0,014529	0,007672	0,008359	0,016621	0,013721	0,011403	0,009028	0,014809
10	0,007406	0,023363	0,016139	0,010076	0,01087	0,010567	0,014021	0,010645	0,013076	0,006905	0,007523	0,014959	0,012349	0,010263	0,008125	0,013328
11	0,006732	0,02124	0,014672	0,00916	0,009882	0,009607	0,012746	0,009677	0,011887	0,006277	0,006839	0,013599	0,011226	0,00933	0,007386	0,012116
12	0,006171	0,01947	0,013449	0,008397	0,009058	0,008806	0,011684	0,008871	0,010897	0,005754	0,006269	0,012466	0,010291	0,008552	0,006771	0,011107
13	0,005697	0,017972	0,012415	0,007751	0,008361	0,008129	0,010785	0,008188	0,010059	0,005311	0,005787	0,011507	0,009499	0,007894	0,00625	0,010252
14	0,00529	0,016688	0,011528	0,007197	0,007764	0,007548	0,010015	0,007603	0,00934	0,004932	0,005373	0,010685	0,008821	0,00733	0,005804	0,00952
15	0,004937	0,015576	0,010759	0,006718	0,007246	0,007045	0,009347	0,007096	0,008717	0,004603	0,005015	0,009973	0,008233	0,006842	0,005417	0,008885
16	0,004628	0,014602	0,010087	0,006298	0,006794	0,006605	0,008763	0,006653	0,008173	0,004315	0,004702	0,009349	0,007718	0,006414	0,005078	0,00833
17	0,004356	0,013743	0,009494	0,005927	0,006394	0,006216	0,008248	0,006262	0,007692	0,004062	0,004425	0,008799	0,007264	0,006037	0,004779	0,00784
18	0,004114	0,01298	0,008966	0,005598	0,006039	0,005871	0,007789	0,005914	0,007265	0,003836	0,004179	0,00831	0,006861	0,005701	0,004514	0,007404
19	0,003898	0,012297	0,008494	0,005303	0,005721	0,005562	0,007379	0,005602	0,006882	0,003634	0,003959	0,007873	0,0065	0,005401	0,004276	0,007015
20	0,003703	0,011682	0,00807	0,005038	0,005435	0,005284	0,00701	0,005322	0,006538	0,003452	0,003761	0,007479	0,006175	0,005131	0,004062	0,006664
21	0,003526	0,011125	0,007685	0,004798	0,005176	0,005032	0,006677	0,005069	0,006227	0,003288	0,003582	0,007123	0,005881	0,004887	0,003869	0,006347
22	0,003366	0,01062	0,007336	0,00458	0,004941	0,004803	0,006373	0,004838	0,005944	0,003139	0,003419	0,006799	0,005613	0,004665	0,003693	0,006058
23	0,00322	0,010158	0,007017	0,004381	0,004726	0,004595	0,006096	0,004628	0,005685	0,003002	0,003271	0,006504	0,005369	0,004462	0,003533	0,005795
24	0,003086	0,009735	0,006725	0,004198	0,004529	0,004403	0,005842	0,004435	0,005448	0,002877	0,003134	0,006233	0,005145	0,004276	0,003385	0,005553
25	0,002962	0,009345	0,006456	0,004031	0,004348	0,004227	0,005608	0,004258	0,00523	0,002762	0,003009	0,005984	0,00494	0,004105	0,00325	0,005331
26	0,002848	0,008986	0,006207	0,003876	0,004181	0,004064	0,005393	0,004094	0,005029	0,002656	0,002893	0,005753	0,00475	0,003947	0,003125	0,005126
27	0,002743	0,008653	0,005977	0,003732	0,004026	0,003914	0,005193	0,003942	0,004843	0,002557	0,002786	0,00554	0,004574	0,003801	0,003009	0,004936
28	0,002645	0,008344	0,005764	0,003599	0,003882	0,003774	0,005007	0,003802	0,00467	0,002466	0,002687	0,005342	0,00441	0,003665	0,002902	0,00476
29	0,002554	0,008056	0,005565	0,003475	0,003748	0,003644	0,004835	0,003671	0,004509	0,002381	0,002594	0,005158	0,004258	0,003539	0,002802	0,004596
30	0,002469	0,007788	0,00538	0,003359	0,003623	0,003522	0,004674	0,003548	0,004359	0,002302	0,002508	0,004986	0,004116	0,003421	0,002708	0,004443

Tabell 4: Korrelasjonsmatrisen for 8 aksjer er innrammet.

	SPAREBANK 1SR	ALGETA	:SEMICONL	DNB	BONHEUR	ANGER ROD	OLSEN ENE	PROSAFE	TOREBRAN	INFRATEK	OGN SPAR	COPEINCA	SCHIBSTED	VILA SHIPP	EKORNES
SPAREBAN	1	0,361913	0,323698	0,625558	0,552623	0,557247	0,474338	0,52632	0,509443	0,269419	0,126278	0,34728	0,595652	0,407103	0,468044
ALGETA	0,361913	1	0,158868	0,365021	0,228918	0,253769	0,239084	0,347047	0,377331	0,170997	0,145837	0,237083	0,2566	0,165682	0,27088
NORDIC SE	0,323698	0,158868	1	0,321228	0,357179	0,409477	0,214696	0,278242	0,237328	0,146413	0,140296	0,319412	0,332175	0,246105	0,247528
DNB	0,625558	0,365021	0,321228	1	0,601466	0,569591	0,472893	0,589494	0,597487	0,148142	0,090165	0,362365	0,642355	0,420723	0,530088
BONHEUR	0,552623	0,228918	0,357179	0,601466	1	0,926002	0,7139	0,680892	0,443774	0,314612	0,24977	0,292342	0,467128	0,50358	0,420543
GANGER R	0,557247	0,253769	0,409477	0,569591	0,926002	1	0,731716	0,682304	0,423352	0,283394	0,212142	0,277096	0,447831	0,483176	0,445896
FRED OLSE	0,474338	0,239084	0,214696	0,472893	0,7139	0,731716	1	0,588381	0,430928	0,145762	0,191065	0,204589	0,419982	0,405228	0,295427
PROSAFE	0,52632	0,347047	0,278242	0,589494	0,680892	0,682304	0,588381	1	0,513019	0,062864	0,264854	0,209773	0,512795	0,419262	0,406541
STOREBRA	0,509443	0,377331	0,237328	0,597487	0,443774	0,423352	0,430928	0,513019	1	0,12216	0,134789	0,442683	0,550237	0,338104	0,444827
INFRATEK	0,269419	0,170997	0,146413	0,148142	0,314612	0,283394	0,145762	0,062864	0,12216	1	0,180992	0,104249	0,194349	0,171279	0,234151
INDRE SOG	0,126278	0,145837	0,140296	0,090165	0,24977	0,212142	0,191065	0,264854	0,134789	0,180992	1	0,166665	0,131512	0,156935	0,009662
COPEINCA	0,34728	0,237083	0,319412	0,362365	0,292342	0,277096	0,204589	0,209773	0,442683	0,104249	0,166665	1	0,371264	0,439984	0,275592
SCHIBSTED	0,595652	0,2566	0,332175	0,642355	0,467128	0,447831	0,419982	0,512795	0,550237	0,194349	0,131512	0,371264	1	0,325825	0,591547
HAVILA SH	0,407103	0,165682	0,246105	0,420723	0,50358	0,483176	0,405228	0,419262	0,338104	0,171279	0,156935	0,439984	0,325825	1	0,236087
EKORNES	0,468044	0,27088	0,247528	0,530088	0,420543	0,445896	0,295427	0,406541	0,444827	0,234151	0,009662	0,275592	0,591547	0,236087	1

Porteføljevektoren W blir multiplisert med korrelasjonsmatrisen, Σ, for de åtte aksjene. Dette blir igjen multiplisert med den transponerte blå vektoren W^T - akkurat som i formel (6).

Resultatet for denne beregningen gir oss porteføljevariansen for en likeveid portefølje bestående av 8 aksjer som i dette tilfellet blir 0,0081684. Resultatet blir en avkastning med standardavvik på 9,04%.

I neste omgang utvides porteføljen med Storebrand-aksjen. Da vil porteføljevektoren W utvides et hakk til høyre samtidig som den flyttes ned til neste kolonne.

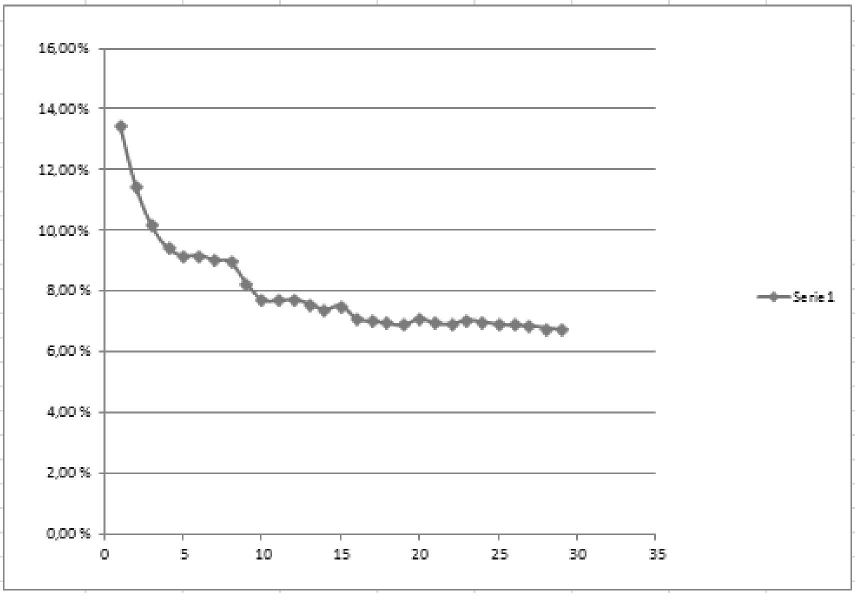
Korrelasjonsmatrisen blir utvidet med et diagonalt steg til å inkludere korrelasjonen Storebrandaksjen har med de andre aksjene i porteføljen. Dette gjentas helt til porteføljen består av 30 aksjer.

Til slutt ser jeg på utviklingen i standardavviket og lager en graf med porteføljestandardavviket på Y-aksen og antall aksjer i porteføljen på X-aksen.

Resultatet av trekningen over vises i tabell 5.

Tabell 5: Resultat for trekning 2 i perioden 2003-2013.

n	σ^2	σ
2	0,018148	13,47 %
3	0,013151	11,47 %
4	0,010343	10,17 %
5	0,008941	9,46 %
6	0,008425	9,18 %
7	0,00847	9,20 %
8	0,008168	9,04 %
9	0,008061	8,98 %
10	0,006861	8,28 %
11	0,005978	7,73 %
12	0,005924	7,70 %
13	0,005993	7,74 %
14	0,005778	7,60 %
15	0,005483	7,41 %
16	0,005683	7,54 %
17	0,005055	7,11 %
18	0,004937	7,03 %
19	0,004845	6,96 %
20	0,004754	6,90 %
21	0,005058	7,11 %
22	0,004838	6,96 %
23	0,004794	6,92 %
24	0,005001	7,07 %
25	0,004901	7,00 %
26	0,0048	6,93 %
27	0,004747	6,89 %
28	0,004727	6,88 %
29	0,004644	6,81 %
30	0,004572	6,76 %



Figur 2: Utviklingen i porteføljestandardavvik i takt med antall aksjer i porteføljen for trekning 2 i perioden 2003-2013

I denne trekningen ser vi en klar diversifiseringsgevinst. I neste trekning gjentas samme prosedyre med 30 nye aksjer, i alt 100 ganger per periode.

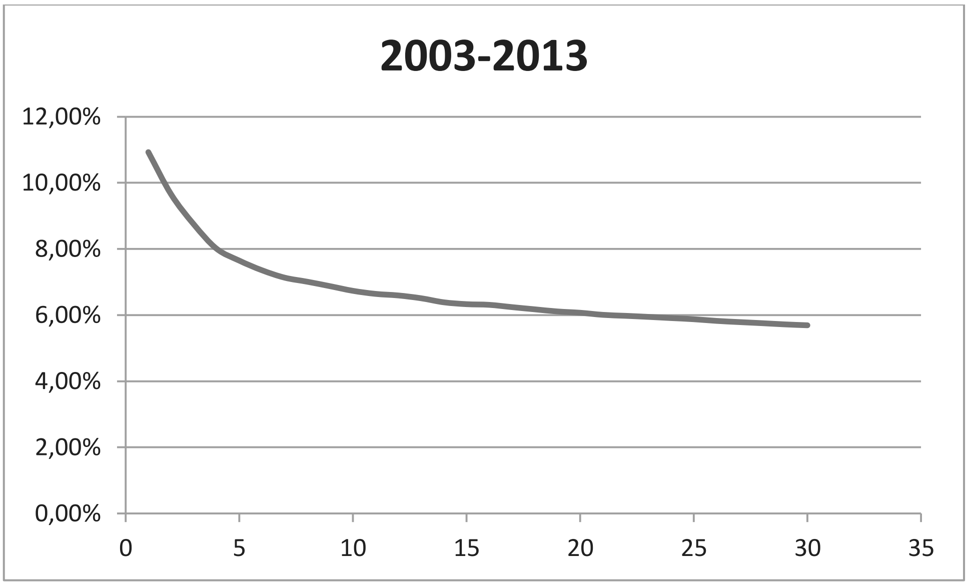
3 Resultater og konklusjon

3.1 Porteføljesimuleringene

Resultatene av de totalt 300 porteføljesimuleringene fordelt på 3 tidsperioder viser en klar diversifiseringsgevinst. Porteføljestandardavviket blir mindre jo flere aksjer som inkluderes. Det er derimot vanskeligere å si noe om nøyaktig hvor mange aksjer som kreves for at en portefølje skal være veldiversifisert.

Diversifiseringsgevinsten ved å inkludere ett ekstra selskap er størst når porteføljen består av få aksjer. Fra 6-7 aksjer og utover er endringene av å inkludere én ekstra aksje minimal. Det vil allikevel være en liten nedgang i standardavviket.

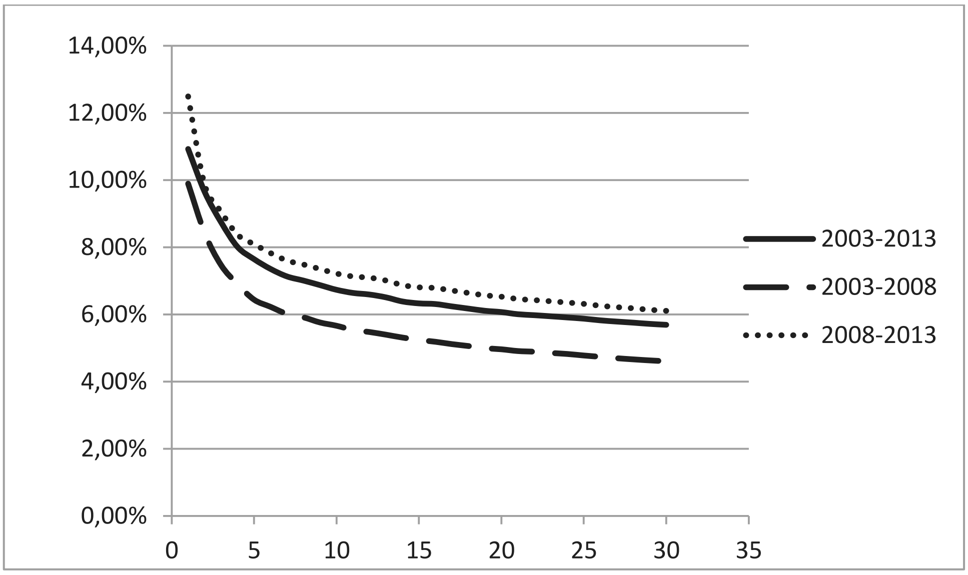
I grafen under har jeg tatt gjennomsnittet av alle de 100 trekningene for perioden 2003-2013. Gjennomsnittlig månedlig standardavvik for porteføljene er på Y-aksen, mens antall aksjer er på X-aksen.



Figur 3: Figuren viser den empiriske sammenhengen mellom gjennomsnittlig porteføljestandardavvik og antall aksjer i porteføljen.

Resultatet stemmer bra med teorien. Standardavviket synker, men reduksjonen blir gradvis mindre etter hvert som antall aksjer øker.

Når jeg sammenligner de tre tidsperiode 2003-2013, 2003-2008 og 2008-2013, har diversifiseringsgevinsten gått ned. Aksjemarkedet har blitt mer volatilt og korrelasjonen mellom aksjene har også økt.



Figur 4: Figuren viser sammenhengen mellom antall aksjer og standardavvik for hver av de tre delperiodene.

Vi ser for eksempel at for å oppnå et porteføljestandardavvik på 6 % holdt det med 8 aksjer i den første perioden, mens man trengte nærmere 30 aksjer for å oppnå det samme i den siste delperioden. Det gjennomsnittlige standardavviket for månedlig avkastning har altså økt i den siste delperioden. Vi ser at gjennomsnittlig standardavvik for kun én aksje er over 2 %-poeng høyere i siste delperiode. Gjennomsnittlig korrelasjon mellom aksjene har også økt. Dette kan ha sammenheng med all uroen som finansmarkedene har vært preget av de siste fem årene. Perioden 2003-2008 var en forholdsvis rolig periode med stabil vekst i aksjemarkedet inntil finanskrisen og den påfølgende gjeldskrisen brøt ut.

Allikevel kan vi se ut ifra formen på kurvene at effekten av diversifisering er ganske lik i alle periodene. Det meste av diversifiseringsgevinsten er oppnådd etter 6-7 aksjer og etter dette er det kun marginale endringer i standardavviket. Vi ser også at diversifiseringsgevinsten for perioden 2008-2013 er høyere for de første ekstra aksjene enn i de andre periodene, men flater etter hvert ut og blir nærmest parallell med de to andre.

Vi skal se nærmere på diversifiseringseffekten i neste tabell.

Tabell 5: Tabellen viser standardavvik for en portefølje bestående av n antall aksjer og hvor stor del av standardavviket som er igjen av den opprinnelige porteføljen på kun én aksje.

n	2003-2013		2003-2008		2008-2013	
1	10,93 %	1,00	9,90 %	1,00	12,49 %	1,00
2	9,65 %	0,88	8,43 %	0,85	9,86 %	0,79
3	8,75 %	0,80	7,47 %	0,75	9,06 %	0,72
4	8,01 %	0,73	6,90 %	0,70	8,37 %	0,67
5	7,65 %	0,70	6,44 %	0,65	8,09 %	0,65
6	7,36 %	0,67	6,23 %	0,63	7,83 %	0,63
7	7,13 %	0,65	6,02 %	0,61	7,61 %	0,61
8	7,01 %	0,64	5,91 %	0,60	7,49 %	0,60
9	6,87 %	0,63	5,76 %	0,58	7,35 %	0,59
10	6,73 %	0,62	5,66 %	0,57	7,22 %	0,58
11	6,64 %	0,61	5,54 %	0,56	7,13 %	0,57
12	6,59 %	0,60	5,48 %	0,55	7,10 %	0,57
13	6,51 %	0,60	5,40 %	0,55	7,01 %	0,56
14	6,39 %	0,58	5,31 %	0,54	6,87 %	0,55
15	6,33 %	0,58	5,24 %	0,53	6,81 %	0,54
16	6,31 %	0,58	5,19 %	0,52	6,79 %	0,54
17	6,24 %	0,57	5,12 %	0,52	6,71 %	0,54
18	6,17 %	0,57	5,06 %	0,51	6,64 %	0,53
19	6,11 %	0,56	5,00 %	0,51	6,57 %	0,53
20	6,07 %	0,56	4,96 %	0,50	6,53 %	0,52
21	6,01 %	0,55	4,91 %	0,50	6,46 %	0,52
22	5,98 %	0,55	4,89 %	0,49	6,43 %	0,51
23	5,95 %	0,54	4,85 %	0,49	6,39 %	0,51
24	5,91 %	0,54	4,82 %	0,49	6,35 %	0,51
25	5,88 %	0,54	4,78 %	0,48	6,32 %	0,51
26	5,83 %	0,53	4,74 %	0,48	6,26 %	0,50
27	5,79 %	0,53	4,70 %	0,47	6,22 %	0,50
28	5,76 %	0,53	4,66 %	0,47	6,18 %	0,49
29	5,72 %	0,52	4,63 %	0,47	6,14 %	0,49
30	5,69 %	0,52	4,61 %	0,47	6,11 %	0,49

Reduseringsratioen er ganske lik for de tre periodene og vi kan dermed konkludere med at diversifiseringseffekten er veldig lik for de tre periodene. En naturlig forklaring på dette kan være at det er den systematiske risikoen som har økt og dermed «skiftet» standardavviket oppover for den siste perioden. Dette vil undersøkes nærmere i kapittel 3.3.

3.1.1 Grense for diversifisering

Vi kan sette en grense for hvor stor diversifiseringseffekten må være for at vi skal inkludere én ekstra aksje i porteføljen. På denne måten kan vi konkludere med et spesifikt antall aksjer. Vi vet at reduksjonen i standardavviket blir mindre og mindre og at det vil være størst effekt blant de 6-7 første aksjene i porteføljen. Jeg velger å sette en grense på 3 %. Dersom reduksjonen i porteføljestandardavviket ved å inkludere én ekstra aksje er lavere enn 3 %, vil ikke porteføljen utvides.

Nedenfor vises en ny tabell hvor jeg bruker dataene fra Tabell 1 til å beregne den prosentvise endringen i standardavviket.

Tabell 6: Prosentvis endring i standardavviket ved å inkludere den n-te aksjen.

n	2003-2013	2003-2008	2008-2013
2	-11,7 %	-14,8 %	-21,1 %
3	-9,4 %	-11,4 %	-8,1 %
4	-8,4 %	-7,6 %	-7,5 %
5	-4,5 %	-6,7 %	-3,4 %
6	-3,8 %	-3,3 %	-3,2 %
7	**-3,0 %**	**-3,4 %**	**-2,9 %**
8	-1,7 %	-1,7 %	-1,6 %
9	-1,9 %	-2,6 %	-1,8 %
10	-2,0 %	-1,7 %	-1,8 %
11	-1,4 %	-2,2 %	-1,2 %
12	-0,7 %	-1,1 %	-0,5 %
13	-1,3 %	-1,5 %	-1,2 %
14	-1,9 %	-1,6 %	-2,0 %
15	-0,9 %	-1,3 %	-1,0 %
16	-0,3 %	-1,0 %	-0,3 %
17	-1,1 %	-1,3 %	-1,1 %
18	-1,1 %	-1,1 %	-1,1 %
19	-1,0 %	-1,2 %	-1,1 %
20	-0,6 %	-0,7 %	-0,6 %
21	-1,0 %	-1,1 %	-1,0 %
22	-0,5 %	-0,4 %	-0,5 %
23	-0,5 %	-0,7 %	-0,5 %
24	-0,6 %	-0,6 %	-0,6 %
25	-0,6 %	-0,9 %	-0,6 %
26	-0,9 %	-0,8 %	-0,9 %
27	-0,6 %	-0,9 %	-0,7 %
28	-0,6 %	-0,7 %	-0,5 %
29	-0,6 %	-0,7 %	-0,7 %
30	-0,5 %	-0,6 %	-0,5 %

I Tabell 6 ser vi at den prosentvise reduksjonen ved å inkludere den syvende aksjen er rundt 3 % for alle de tre tidsperiodene. Dersom vi setter 3 % reduksjon i standardavviket som et minimumskrav for at flere aksjer skal inkluderes kan vi konkludere med at 7 aksjer er nok. Konklusjonen stemmer godt overens med det vi tidligere har observert ut i fra grafene; at diversifiseringseffekten er svært liten etter 6-7 aksjer. I oppgaven min har jeg ikke tatt hensyn til kostnader ved diversifisering. Det vil være svært interessant for en investor å se på diversifiseringseffekten i forhold til transaksjonskostnader. Dette har jeg drøftet mer i kapittel 3.4.2.

3.2 Statistisk signifikans

Som vi ser i tabell 5 og 6 er reduksjonen i standardavviket ved å legge til én ekstra aksje i porteføljen svært liten når porteføljen har over 20 aksjer. Det er derfor nødvendig å teste for statistisk signifikans slik at vi kan slå fast at endringen ikke skyldes tilfeldigheter.

Vi undersøker dette ved en t-test. Jeg bruker data for alle porteføljer som inneholder 29 aksjer og 30 aksjer. Hver av seriene har 100 observasjoner for hver delperiode. Vi tester så om gjennomsnittsdifferansen mellom de to seriene er høy nok til at vi kan påberope at diversifiseringen har en signifikant effekt. Vi tester altså nullhypotesen om at gjennomsnittsdifferansen mellom seriene er lik 0.

For testen velger jeg et konfidensintervall på 95 %. Dersom t-verdien vi oppnår er har en høyere absoluttverdi enn 1,984 forkastes nullhypotesen. Reduksjonen i standardavvik er dermed signifikant forskjellig fra 0 og vi kan konkludere med at diversifiseringen vil ha en effekt helt ut til 30 aksjer.

Tabell 7: T-test for perioden 2003-2008

	29 aksjer	30 aksjer
Gjennomsnitt	0,046	0,046
Varians	1,25E-05	0,00001
Observasjoner	100	100
Hypotesens gjennomsnittsforskjell	0	
Frihetsgrader	99	
T-verdi	3,283	
Sjansen for at endringene skyldes tilfeldigheter	0,001	
Kritisk T-verdi	1,984	

Tabell 8: T-test for perioden 2008-2013

	29 aksjer	30 aksjer
Gjennomsnitt	0,0614	0,06109
Varians	1,98E-05	1,93E-05
Observasjoner	100	100
Hypotesens gjennomsnittsforskjell	0	
Frihetsgrader	99	
T-verdi	3,052	
Sjansen for at endringene skyldes tilfeldigheter	0,003	
Kritisk t-verdi	1,984	

Tabell 9: T-test for perioden 2003-2013

	29 aksjer	30 aksjer
Gjennomsnitt	0,0572	0,0569
Varians	1,59E-05	1,51E-05
Observasjoner	100	100
Hypotesens gjennomsnittsforskjell	0	
Frihetsgrader	99	
T-verdi	2,851	
Sjansen for at endringene skyldes tilfeldigheter	0,005	
Kritisk t-verdi	1,984	

Undersøkelsene er foretatt i Excel.

Som vi ser er t-verdien for alle de tre periodene alltid høyere enn den kritiske t-verdien på 1,984. Vi forkaster dermed nullhypotesen. Det vil være en signifikant forskjell i porteføljestandardavviket ved å legge til én ekstra aksje når porteføljen allerede inneholder 29 aksjer. Vi kan i alle tre delperiodene slå fast med over 99 % sannsynlighet at endringen i standardavviket skyldes diversifisering. Vi konkluderer dermed med at det vil være en diversifiseringsgevinst for alle aksjene frem til 30 aksjer. Det kan være interessant for senere forskning å undersøke om denne forskjellen noen gang slutter å være signifikant om man inkluderer mange nok aksjer i porteføljen.

3.3 Kovarians

I første kapittel viste jeg hvordan vi kan definere den systematiske risikoen som gjennomsnittlig kovarians. Her tester vi også hypotesen om at det har blitt mer korrelasjon i markedet. Jeg har brukt data for avkastningen på alle aksjene i de tre periodene til å beregne gjennomsnittlig kovarians og fikk følgende resultat:

Tabell 9: Gjennomsnittlig kovarians mellom månedlig avkastning for alle aksjer i hver delperiode

Periode	Gjennomsnittlig kovarians
2003-2013	0,00334
2003-2008	0,001925
2008-2013	0,003923

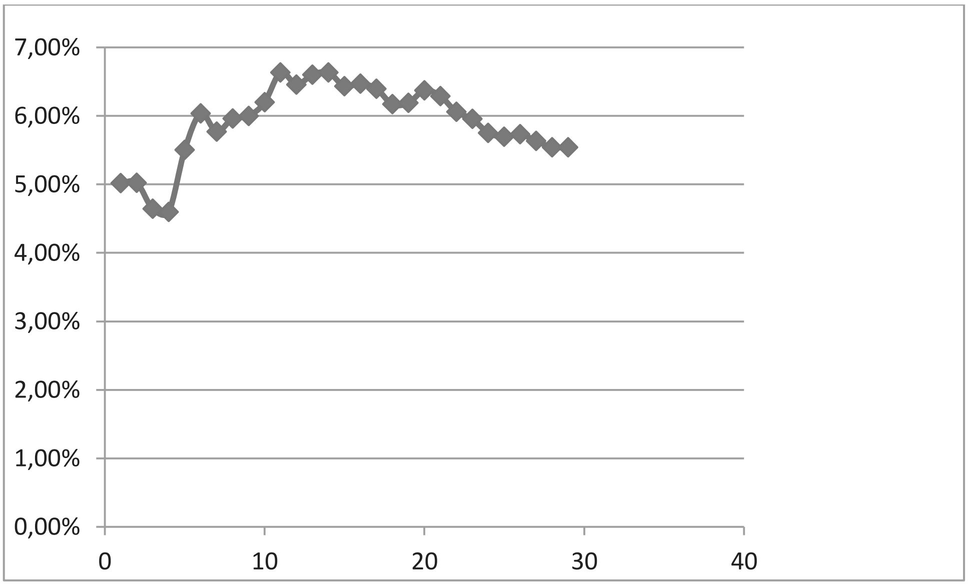
Her kommer det tydelig fram at kovariansen har økt betraktelig og fordoblet seg fra første delperiode til siste. Det betyr, som jeg har antatt, at korrelasjonen i markedet har økt med tiden. Grunner til dette kan være at vi kommuniserer mer og bedre enn før og/eller at innføringen av aksjeroboter i markedet har ført til at reaksjonene i markedet blir raskere og mer identiske. Noe som er spesielt for perioden 2008-2013 er finanskrisen og den påfølgende gjeldskrisen som bidro til å trekke hele aksjemarkedet i negativ retning. Når avkastningen på så å si alle aksjer går ned, vil den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom dem øke.

Som jeg utledet i 1.2.5 vil den systematiske risikoen være lik den gjennomsnittlige kovariansen. Som vi ser har denne økt betraktelig. Vi kan konkludere med at aktørene i markedet reagerer mer likt nå enn før og at avkastningen til aksjene på Oslo børs er mer korrelert nå enn før.

3.4 *Andre observasjoner*

3.4.1 Egenkapitalbevis

En annen observasjon jeg gjorde, var at egenkapitalbevisene til de forskjellige sparebankene var mindre volatile enn de fleste andre aksjene. I tillegg hadde avkastningene lav korrelasjon med avkastningene til de andre aksjene. Dermed fikk porteføljer som fikk tildelt egenkapitalbevis blant de første aksjene, helt andre grafer enn de som bestod av aksjer. Se for eksempel trekning 16 i perioden 2003-2013:



Her ser vi at porteføljestandardavviket er lavest når porteføljen kun inneholder 4 aktiva og går så opp når mer volatile aksjer inkluderes. Sammenligning av volatilitet og avkastning mellom aksjer og egenkapitalbevis kan være et interessant tema for senere forskning.

I og med at resultatet av 100 trekninger stemte godt med teori og intuisjon, betrakter jeg disse resultatene som statistiske avvik.

3.4.2 Avveining mellom kostnad og gevinst

Som nevnt vil det etter 6-7 aksjer kun være minimal nedgang i porteføljestandardavviket. I denne oppgaven har hverken forventet avkastning eller transaksjonskostnader vært en del av undersøkelsene. Diversifiseringen bør fortsette så lenge marginalgevinsten overgår marginalkostnadene. For en investor vil det være interessant å sette en nedre grense for hva diversifiseringseffekten må være for at flere aksjer skal inkluderes i porteføljen. Her kan det være nyttig å ta hensyn til tabellen i 3.1.1. Her kommer vi inn på prising av risiko som ikke er en del av denne oppgaven, men som vil kunne være interessant for senere analyser.

3.5 Konklusjon

Min oppgave føyer seg, i all ydmykhet, inn i rekken av artikler som beviser at det er en klar effekt av å diversifisere, samt at et lavt antall aksjer er tilstrekkelig for å oppnå en veldiversifisert portefølje.

3.5.1 Diversifiseringseffekten

Jeg har i denne oppgaven analysert virkningene av diversifisering på Oslo Børs. Resultatene av porteføljesimuleringene kan være nyttige å benytte seg av når man skal sette sammen porteføljer. Oppgaven tar ikke hensyn til avkastningen og eventuelle kostnader, men gir et godt bilde på hvordan risikoen utvikler seg i takt med antall aksjer.

Resultatene viser en klar diversifiseringsgevinst i henhold til teori og intuisjon. Det totale standardavviket for porteføljeavkastning synker i takt med antall aksjer i porteføljen. Det er derimot vanskelig å konkludere med nøyaktig hvor mange aksjer som behøves for å ha en veldiversifisert portefølje. Undersøkelsen viser at det kun vil være en svært liten reduksjon i porteføljestandardavviket ved å inkludere flere aksjer etter at porteføljen inneholder rundt 7 selskaper. Allikevel vil det være en diversifiseringsgevinst ved å inkludere enda flere aksjer, som jeg har bevist er statistisk signifikant ut til min grense på 30. Jeg kan konkludere med at dersom målet er å redusere risikoen mest mulig, er det best å ha så mange forskjellige aksjer som mulig.

Dersom vi definerer en veldiversifisert portefølje som en portefølje som kun er eksponert for markedsrisiko, tyder analysen på at det vil kreve et veldig høyt antall aksjer, fordi kurven ikke slutter å falle for de første 30 aksjene.

3.5.2 Grense for diversifisering

Jeg har derimot konkludert med at dersom vi setter en nedre grense for hva diversifiseringsgevinsten må være for å inkludere én ekstra aksje, vil vi klare å konkludere med et spesifikt antall. Selv har jeg valgt en nedre grense på 3 % reduksjon i porteføljestandardavviket og kan da konkludere med at en portefølje på 7 aksjer er tilstrekkelig.

3.5.3 Kovarians og korrelasjon

Resultatene fra analysen indikerer at det har blitt høyere korrelasjon i aksjemarkedet de siste årene. Gjennomsnittlig kovarians har nesten doblet seg fra den første delperioden til den siste. Mye kan tyde på at denne utviklingen kommer til å fortsette, jeg tenker da på økt bruk av aksjeroboter og bedre kommunikasjonslinjer. Finanskrisen og den påfølgende gjeldskrisen kan også være forklarende faktorer på hvorfor det er observert større korrelasjon i din siste delperioden enn i den første.

4 Kilder

BODIE, Z., KANE, A. & MARCUS, A. J. 2009. *Investments,* Boston, Mass., McGraw-Hill.

COPELAND, T. E., WESTON, J. F. & SHASTRI, K. 2005. *Financial theory and corporate policy,* Boston, Mass., Pearson Addison-Wesley.

EVANS, J. L. & ARCHER, S. H. 1968. Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. *The Journal of Finance,* 23**,** 761-767.

MARKOWITZ, H. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance,* 7**,** 77-91.

SANDVIK, B. 2003. *Innføring i finansteori,* Bergen, Fagbokforl.

SHARPE, W. F. 1963. A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science,* 9**,** 277-293.

ØDEGAARD, B. A. 2007. *Asset pricing at the Oslo Stock Exchange. A source book*.

Idéen om å inkludere bibelsitatet har jeg fra den engelske wikipediasiden om porteføljeteori.

5 Appendiks

5.1 Liste over aksjer og egenkapitalbevis med deskriptiv statistikk for perioden 2003-2013

	AKER SOLUTIONS	*AKER*	*ATEA*	*AUSTEVOLL SEAFOOD*
Gjennomsnitt	2,49 %	2,14 %	1,19 %	0,74 %
Median	3,65 %	2,89 %	0,27 %	0,00 %
Standardavvik	13,39 %	10,60 %	13,27 %	14,23 %
Spenn	83,72 %	70,27 %	78,25 %	85,29 %
Minimum	-40,65 %	-27,73 %	-31,75 %	-38,63 %
Maximum	43,07 %	42,54 %	46,50 %	46,67 %
Antall obs.	106	100	121	75

	AWILCO DRILLING	*AF GRUPPEN 'A'*	*BORGESTAD 'A'*	*BAKKAFROST*
Gjennomsnitt	5,59 %	2,12 %	1,19 %	1,92 %
Median	7,32 %	1,67 %	-0,20 %	0,77 %
Standardavvik	10,88 %	6,83 %	10,72 %	7,61 %
Spenn	33,32 %	45,81 %	101,60 %	33,49 %
Minimum	-12,73 %	-14,75 %	-32,61 %	-15,26 %
Maximum	20,59 %	31,06 %	68,99 %	18,23 %
Antall obs.	19	121	121	34

	CERMAQ	*COPEINCA*	*DNB*	*DET NORSKE OLJESELSKAP*
Gjennomsnitt	1,54 %	1,26 %	1,21 %	2,07 %
Median	1,73 %	1,99 %	0,96 %	-0,31 %
Standardavvik	12,73 %	15,06 %	10,12 %	18,51 %
Spenn	69,25 %	103,20 %	86,27 %	118,20 %
Minimum	-34,43 %	-57,74 %	-40,86 %	-29,10 %
Maximum	34,82 %	45,45 %	45,40 %	89,10 %
Antall obs.	87	72	121	61

	DOCKWISE	*EIDESVIK OFFSHORE*	*EKORNES*	*FRED OLSEN ENERGY*
Gjennomsnitt	-0,67 %	-0,07 %	0,47 %	3,65 %
Median	-0,79 %	0,31 %	0,00 %	2,83 %
Standardavvik	14,38 %	7,64 %	8,16 %	14,08 %
Spenn	79,31 %	54,04 %	43,64 %	91,18 %
Minimum	-42,53 %	-34,48 %	-20,13 %	-33,20 %
Maximum	36,78 %	19,56 %	23,51 %	57,98 %
Antall obs.	64	91	121	121

	FRONTLINE	GANGER ROLF	GJENSIDIGE FORSIKRING	HAFSLUND 'A'
Gjennomsnitt	0,38 %	2,44 %	1,82 %	0,87 %
Median	0,33 %	1,09 %	2,77 %	0,00 %
Standardavvik	14,48 %	10,61 %	5,15 %	8,59 %
Spenn	81,97 %	72,41 %	20,53 %	56,46 %
Minimum	-39,61 %	-38,79 %	-9,46 %	-25,42 %
Maximum	42,36 %	33,62 %	11,07 %	31,03 %
Antall obs.	121	121	25	121

	HAVILA SHIPPING	ALGETA	BONHEUR	DOF
Gjennomsnitt	0,04 %	4,28 %	2,56 %	1,50 %
Median	-0,77 %	0,23 %	2,13 %	0,39 %
Standardavvik	10,32 %	23,53 %	10,91 %	10,34 %
Spenn	62,46 %	161,65 %	69,26 %	63,13 %
Minimum	-27,61 %	-57,86 %	-43,11 %	-34,09 %
Maximum	34,85 %	103,79 %	26,15 %	29,03 %
Antall obs.	92	70	121	121

	FARSTAD SHIPPIN(	NORSK HYDRO	HOEGH LONG HOLDINGS	IM SKAUGEN
Gjennomsnitt	1,29 %	0,96 %	1,73 %	0,38 %
Median	1,57 %	2,20 %	0,23 %	0,00 %
Standardavvik	8,17 %	10,88 %	10,14 %	10,18 %
Spenn	47,52 %	62,90 %	37,90 %	65,81 %
Minimum	-26,09 %	-30,97 %	-18,87 %	-21,92 %
Maximum	21,43 %	31,94 %	19,04 %	43,88 %
Antall obs.	121	121	19	121

	INFRATEK	KONGSBERG GRUPP	KVAERNER	LEROY SEAFOOD GF
Gjennomsnitt	0,36 %	1,86 %	3,35 %	2,50 %
Median	0,00 %	1,32 %	2,74 %	1,90 %
Standardavvik	6,96 %	9,19 %	15,30 %	12,53 %
Spenn	36,51 %	55,21 %	61,93 %	95,21 %
Minimum	-14,29 %	-22,12 %	-29,55 %	-47,71 %
Maximum	22,22 %	33,09 %	32,38 %	47,50 %
Antall obs.	62	121	18	121

	MEDI-STIM	NAMSOS TRAFIKKSELSKAP	NORTHERN LOGISTIC PR.	NORDIC SEMICONDUCTOR
Gjennomsnitt	1,08 %	0,68 %	-0,26 %	4,14 %
Median	1,70 %	0,00 %	0,00 %	3,08 %
Standardavvik	8,70 %	10,71 %	9,90 %	16,21 %
Spenn	57,68 %	62,22 %	67,21 %	86,22 %
Minimum	-21,57 %	-27,60 %	-41,31 %	-34,12 %
Maximum	36,11 %	34,62 %	25,90 %	52,11 %
Antall obs.	104	121	67	121

	NORWEGIAN AIR SHUTTLE	ODFJELL 'A'	OPERA SOFTWARE	ORKLA
Gjennomsnitt	3,39 %	0,56 %	2,39 %	0,94 %
Median	0,76 %	-0,51 %	2,93 %	1,01 %
Standardavvik	18,87 %	10,82 %	15,69 %	8,61 %
Spenn	110,93 %	69,81 %	82,79 %	56,61 %
Minimum	-41,04 %	-19,21 %	-36,28 %	-28,53 %
Maximum	69,89 %	50,60 %	46,51 %	28,08 %
Antall obs.	109	121	106	121

	PETROLEUM GEO SERVICES	PROSAFE	PHOTOCURE	PCI BIOTECH HOLDING
Gjennomsnitt	3,71 %	1,82 %	0,64 %	4,39 %
Median	4,42 %	1,46 %	0,00 %	0,00 %
Standardavvik	18,48 %	10,69 %	9,96 %	26,47 %
Spenn	151,77 %	79,07 %	69,85 %	200,51 %
Minimum	-50,00 %	-41,32 %	-34,99 %	-38,70 %
Maximum	101,77 %	37,75 %	34,85 %	161,81 %
Antall obs.	121	121	121	54

	POLARCUS	RIEBER & SON	ROYAL CRBN.CRUISES	SCHIBSTED
Gjennomsnitt	3,08 %	0,55 %	1,66 %	1,94 %
Median	2,23 %	0,00 %	0,00 %	1,65 %
Standardavvik	19,18 %	7,90 %	16,05 %	12,40 %
Spenn	77,98 %	82,22 %	120,40 %	83,24 %
Minimum	-36,52 %	-14,69 %	-55,88 %	-43,71 %
Maximum	41,46 %	67,53 %	64,52 %	39,52 %
Antall obs.	40	121	121	121

	SEADRILL	STATOIL	STOREBRAND	SIEM SHIPPING INC.
Gjennomsnitt	2,67 %	1,10 %	1,04 %	0,81 %
Median	3,13 %	1,65 %	2,48 %	0,00 %
Standardavvik	13,23 %	8,38 %	13,13 %	10,39 %
Spenn	74,59 %	63,38 %	96,19 %	59,23 %
Minimum	-37,27 %	-33,19 %	-43,01 %	-24,69 %
Maximum	37,32 %	30,19 %	53,18 %	34,55 %
Antall obs.	86	121	121	121

	SOLSTAD OFFSHORE	SPECTRUM	SUBSEA 7	SALMAR
Gjennomsnitt	1,57 %	4,05 %	3,29 %	1,01 %
Median	1,46 %	3,34 %	2,80 %	1,50 %
Standardavvik	10,13 %	20,62 %	14,70 %	10,17 %
Spenn	50,35 %	112,03 %	90,43 %	58,61 %
Minimum	-26,32 %	-61,96 %	-47,96 %	-29,76 %
Maximum	24,04 %	50,06 %	42,47 %	28,85 %
Antall obs.	121	55	121	68

	STOLT-NIELSEN	SPAREBANK 1 SMN	TOMRA SYSTEMS	TGS-NOPEC GEOPHS.
Gjennomsnitt	1,56 %	1,11 %	0,60 %	2,98 %
Median	1,04 %	0,66 %	0,79 %	4,27 %
Standardavvik	13,05 %	7,83 %	10,70 %	12,69 %
Spenn	66,98 %	44,92 %	60,48 %	71,95 %
Minimum	-28,93 %	-18,24 %	-34,85 %	-34,42 %
Maximum	38,05 %	26,68 %	25,63 %	37,54 %
Antall obs.	121	121	121	121

	TELENOR	VEIDEKKE	VIZ R T (OSL)	WILHS.WILHELMSEN
Gjennomsnitt	1,64 %	1,64 %	0,79 %	3,62 %
Median	2,03 %	1,49 %	1,61 %	1,08 %
Standardavvik	8,75 %	8,94 %	9,21 %	10,80 %
Spenn	60,29 %	54,94 %	42,68 %	44,33 %
Minimum	-36,23 %	-21,21 %	-20,27 %	-16,67 %
Maximum	24,06 %	33,73 %	22,41 %	27,66 %
Antall obs.	121	121	92	31

	WILHS.WILHELMSEN HDG.'A'	YARA INTERNATIONAL	SPAREBANK 1 SR BANK
Gjennomsnitt	1,45 %	2,69 %	4,39 %
Median	1,00 %	1,80 %	0,78 %
Standardavvik	9,60 %	14,41 %	7,44 %
Spenn	54,62 %	115,10 %	42,22 %
Minimum	-30,06 %	-46,06 %	-20,84 %
Maximum	24,56 %	69,04 %	21,38 %
Antall obs.	121	106	121

	HELGELAND SPAREBANK	HOL SPAREBANK	INDRE SOGN SPAREBANK
Gjennomsnitt	-0,28 %	-0,08 %	-0,29 %
Median	0,00 %	0,00 %	0,00 %
Standardavvik	6,17 %	5,53 %	7,55 %
Spenn	30,05 %	32,09 %	54,53 %
Minimum	-16,41 %	-15,91 %	-25,65 %
Maximum	13,64 %	16,18 %	28,88 %
Antall obs.	121	121	121

	NES PRESTEGJELDS SPB.	SANDNES SPAREBANK	SPB.1 BUSKR.VESTFOLD
Gjennomsnitt	0,03 %	0,29 %	0,03 %
Median	0,00 %	0,00 %	0,50 %
Standardavvik	7,11 %	11,20 %	6,95 %
Spenn	55,50 %	100,05 %	43,30 %
Minimum	-18,75 %	-41,59 %	-20,01 %
Maximum	36,75 %	58,46 %	23,29 %
Antall obs.	121	121	121

	SPB.1 OSTFOLD AKRS.	SPB.1 RINGERIKE HADELAND	SPAREBANKEN MORE
Gjennomsnitt	-0,57 %	0,10 %	0,34 %
Median	-1,20 %	0,00 %	0,67 %
Standardavvik	5,92 %	4,67 %	5,98 %
Spenn	29,25 %	32,39 %	44,09 %
Minimum	-13,68 %	-18,75 %	-26,51 %
Maximum	15,58 %	13,64 %	17,58 %
Antall obs.	87	121	121

	SPAREBANKEN VEST	*SPAREBANK 1 TONSBERG*	*TOTENS SPAREBANK*	*AURSKOG SB*
Gjennomsnitt	-0,07 %	-0,54 %	0,28 %	3,71 %
Median	0,00 %	-1,00 %	0,37 %	0,00 %
Standardavvik	6,84 %	6,49 %	7,46 %	5,26 %
Spenn	54,15 %	27,61 %	49,22 %	37,59 %
Minimum	-26,88 %	-13,98 %	-24,55 %	-22,47 %
Maximum	27,27 %	13,64 %	24,68 %	15,12 %
Antall obs.	121	63	121	121
	SPAREBANKEN PLUSS	*SPAREBANK 1 NORD-NORGE*	*KLEPP SPAREBANK*	
Gjennomsnitt	0,02 %	0,77 %	-0,84 %	
Median	0,00 %	0,93 %	-0,85 %	
Standardavvik	4,75 %	8,80 %	6,12 %	
Spenn	28,32 %	47,24 %	45,00 %	
Minimum	-13,94 %	-27,07 %	-20,00 %	
Maximum	14,38 %	20,17 %	25,00 %	
Antall obs.	121	121	69	

Analysen er laget på grunnlag av månedlig avkastning for perioden 2003-2013