

FORORD

Denne oppgaven er skrevet som et selvstendig arbeid i siste semester på masterstudiet i finansiell økonomi ved NTNU. Oppgaven utgjør 30 studiepoeng.

Formålet med oppgaven har vært å se om man kan kalibrere Mertons hopp modell (Merton 1976) til å gi opsjonspriser som bedre replikerer markedsprisene enn hva som er tilfellet for Black & Scholes modell (Black & Scholes 1973), for så å sammenligne volatilitetssmilene, og ut fra formen på disse, inspisere modellenes implisitte volatilitet. I all hovedsak vil vi undersøke om man kan finne parameterverdier for Mertons modell som gir et strengt horisontalt volatilitetssmil. Dette er den optimale situasjonen og impliserer i så fall at modellen er *fullstendig*; den forklarer markedets priser for *gitte* parameterverdier, *uavhengig* av utøvelseskurs.

Arbeidet med denne oppgaven har vært meget lærerikt og spennende. Jeg har ervervet meg mye ny kunnskap og forståelse innen opsjonsteori, men ikke minst innen data-programmering.

Jeg må få rette en takk til min veileder Snorre Lindset, for gode tips og innspill underveis. Samtidig vil jeg takke min far, Miroslav Jokic, for alle timene med hjelp innen Java-programmering, og for gode konstruktive tilbakemeldinger og diskusjoner.

Til sist må jeg imidlertid presisere at konklusjonene som blir tatt i denne oppgaven er mine egne, og i sin helhet bør ses i samsvar med resultater oppnådd i forbindelse med denne bestemte oppgaven. Da dette er en oppgave gjort innenfor en begrenset tidshorisont og ramme, må ikke mine konklusjoner ses på som representative for markedsoppfatninger generelt, men som konklusjoner under gitte betingelser og rammer.

Trondheim, desember 2011

Aleksander Vang Jokic

INNHOOLD

1	INNLEDNING.....	1
2	MODELLEN	4
2.1	BLACK & SCHOLES	4
2.1.1	UTTRYKK FOR OPSJONSPRISEN PÅ EUROPEISKE STANDARDOPSJONER.....	5
2.2	MERTON.....	6
2.2.1	UTTRYKK FOR AKSJEPRISEN VED RISIKONØYTRAL PRISING	8
2.2.2	UTTYKK FOR OPSJONSPRISEN PÅ EUROPEISKE STANDARDOPSJONER	10
3	METODE.....	13
3.1	BEREGNING AV IMPLISITT VOLATILITET	13
3.2	SØK ETTER OPTIMAL VOLATILITET FOR BLACK & SCHOLES' MODELL	15
3.3	SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERE FOR MERTONS MODELL.....	16
4	DATAMATERIELL	19
4.1	ER DET ARBITRASJEMULIGHETER I DETTE MARKEDET GITT DISSE OPSJONSPRISENE?.....	20
4.2	PRISER BRUKT I OPPGAVEN VIDERE.....	23
5	ANALYSE.....	24
5.1	CALL OPSJONER	24
5.1.1	RESULTATER VED INITIELLE PARAMETERVERDIER	24
5.1.2	EFFEKT PÅ INITIELLE RESULTATER AV ENDREDE PARAMETERVERDIER.....	27
5.1.2.1	EFFEKT AV ENDRET FORVENTET HOPP-INTENSITET, λ	27
5.1.2.2	EFFEKT AV ENDRET HOPP-VOLATILITET, b	32
5.1.2.3	EFFEKT AV ENDRET FORVENTET LOG HOPPSTØRRELSE, a	34
5.1.3	SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERVERDIER	37
5.1.3.1	RESULTATER FRA SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERVERDIER.....	37
5.1.3.2	HAR DE OPTIMALE PARAMETERENE ROT I VIRKELIGHETEN	42
5.2	PUT OPSJONER	43
5.2.1	VOLATILITETSSMIL TIL PUT VED Å BENYTTTE OPTIMALE PARAMETERE FOR CALL	43
5.2.2	SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERVERDIER	44
5.2.3	SAMMENLIGNING AV RESULTATENE FOR CALL OG PUT.....	47
6	KONKLUSJON.....	49

7	REFERANSER	50
7.1	ARTIKLER/TIDSSKRIFT.....	50
7.2	BØKER.....	50
7.3	INTERNETT.....	50
8	VEDLEGG	51
8.1	RCL HISTORISKE DATA.....	51

FIGURER

1	SIMULERTE DAGLIGE AKSJEPRISER OVER 365 DAGER VED VANLIG PROSESS OG HOPP-PROSESS	12
2	IMPLISITT VOLATILITET FOR INITIELLE PARAMETERVERDIER	25
3	DIFFERANSE MED MARKEDSPRIS FOR INITIELLE PARAMETERVERDIER	26
4	IMPLISITT VOLATILITET FOR ENDRINGER I DEN FORVENTEDE HOPPINTENSITETEN	28
5	DIFFERANSE MED MARKEDSPRIS FOR ENDRINGER I DEN FORVENTEDE HOPPINTENSITETEN	31
6	IMPLISITT VOLATILITET FOR ENDRINGER I HOPPETS VOLATILITET	33
7	DIFFERANSE MED MARKEDSPRIS FOR ENDRINGER I HOPPETS VOLATILITET	34
8	IMPLISITT VOLATILITET FORENDRINGER I FORVENTET LOG HOPPSTØRRELSE	35
9	DIFFERANSE MED MARKEDSPRIS FOR ENDRINGER I FORVENTET LOG HOPPSTØRRELSE	36
10	IMPLISITT VOLATILITET VED OPTIMALE PARAMETERVERDIER	39
11	KALKULERT OPSJONSPRIS FOR OPTIMALE PARAMETERVERDIER UNDER FORUTSETNING AT α KAN VARIERES	40
12	KALKULERT OPSJONSPRIS FOR OPTIMALE PARAMETERVERDIER, GITT $a = -0.5b^2$	41
13	DIFFERANSE MED MARKEDSPRIS FOR OPTIMALE PARAMETERVERDIER	42
14	IMPLISITT VOLATILITET FOR PUT MED OPTIMALE PARAMETERVERDIER FOR CALL	44
15	DIFFERANSE MED MARKEDSPRIS FOR OPTIMALE PARAMETERVERDIER FOR PUT, GITT $a = -11\%$	46
16	IMPLISITT VOLATILITET TIL PUT FOR ULIKE PARAMETERVERDIER	47
17	SAMMENLIGNING AV DIFFERANSEN MED MARKEDSPRIS FOR CALL -OG PUT-OPSJON	48

TABELLER

1	MARKEDSPRISER FOR EN 88-DAGERS OPSJON PÅ RCL	19
2	ARBITRASJEFRITT INTERVALL AV OPSJONSPRISER	22
3	GJENNOMSNITTLIGE MARKEDSPRISER	23
4	RESULTATER FRA ANALYSE HVOR HOPPINTENSITETEN, $\lambda = 16$	30
5	RESULTAT AV SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERE, CALL	38
6	RESULTAT AV SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERE, PUT, GITT $a = -11\%$	45

1 INNLEDNING

En av de mest kjente modellene for prising av vanlige europeiske opsjoner er modellen til Black & Scholes. En av parameterene i denne modellen er aksjens forventede fremtidige volatilitet, σ . Ettersom dette er et fremtidsmål, kan ikke denne parameteren (i motsetning til de andre parameterene i modellen) observeres direkte i markedet.

En måte for å finne denne ukjente parameteren er å kalkulere den implisitte volatiliteten til aksjen. Implisitt volatilitet er den volatiliteten, som innsatt i en opsjonspringsmodell, gir kalkulert pris lik markedspris.

Ettersom volatiliteten til en aksje er en egenskap til denne bestemte aksjen, bør den ikke være avhengig av forhold som har med opsjonskontrakten å gjøre. Imidlertid viser det seg at den implisitte volatiliteten ved Black & Scholes endres for ulike utøvelseskurser, noe som i realiteten betyr at dersom man benytter denne modellen til å prise opsjoner, må man benytte ulik volatilitet for aksjen avhengig av hva utøvelseskursen på opsjonen er. Dette betyr at Black & Scholes *ikke* klarer å replikere markedets opsjonspriser for ulike utøvelseskurser for *én* gitt volatilitet.

Det viser seg at for vanlige europeiske call-opsjoner er den implisitte volatiliteten ofte relativt høyere jo mer utøvelseskursene er «out-of-the-money» eller «in-the-money», og lavere for «at-the-money»-kurser. Den grafiske framstillingen av den implisitte volatiliteten kalles derfor for «volatilitetssmilet» (Hull 2009).

Mertons «hopp-modell» er en videreutvikling av Black & Scholes, hvor forskjellen er at Merton antar at aksjen kan gjøre plutselige større hopp. Dette er noe som ikke fanges opp i Black & Scholes da denne antar at underliggende følger en kontinuerlig prosess, og dermed ikke kan ha slik ukontinuitet. Black & Scholes antar at den prosentvise avkastningen på aksjen er normalfordelt, noe som betyr at større bevegelser i aksjekursen er forventet å skje veldig sjeldent (McDonald 2006) ettersom sannsynligheten for verdier større enn 3 standardavvik fra forventningen jfr. «empirisk regel» er tilnærmet lik 0 (Newbold, Carlson, Thorne, 2003). Merton antar imidlertid at underliggende følger en kontinuerlig prosess helt til rett før det skjer et hopp, og at den kontinuerlige prosessen fortsetter rett etter at hoppet har funnet sted. Sannsynligheten for et hopp, er Poisson fordelt med forventning λdt , hvor λ er Poisson

parameteren og dt er tidsintervallet man ser på. Forventningen kan dermed tolkes som forventet antall hopp innenfor opsjonens levetid.

De ukjente parameterene i Mertons modell er:

- σ – aksjens fremtidige volatilitet, gitt at aksjen ikke hopper
- a – forventningsverdien til log brutto hoppstørrelse
(skrives videre som «forventet log hoppstørrelse»)
- b – volatiliteten til log brutto hoppstørrelse
(skrives videre som «volatiliteten til hoppet»)
- λ – forventet hoppintensitet

Ettersom Mertons modell inneholder flere ukjente parametere, kan en naturlig antagelse være at kalibreringsmulighetene for denne modellen øker. Vår hypotese er dermed at, ved å finne *optimale parameterverdier for disse ukjente parameterene*, vil Mertons modell

1. *gi et mer konstant volatilitetssmil* enn Black & Scholes.
2. klare å replikere markedets opsjonspriser på en bedre måte enn hva tilfellet er for Black & Scholes.

Dette vil i så fall være interessant ettersom det betyr at Mertons modell, i motsetning til Black & Scholes, er *fullstendig*.

«*Optimale parameterverdier*» defineres i denne oppgaven som

- ***det settet med verdier på de ukjente parameterene som minimerer summen av kvadrerte avvik mellom kalkulert pris og markedspris for de utøvelseskursene vi har markedspriser for i denne oppgaven.***

Med «*mer konstant*» volatilitetssmil, menes i denne oppgaven at

- den implisitte volatiliteten for modellen endres relativt mindre *totalt* fra første til siste utøvelseskurs, men også at variasjonen for hver utøvelseskurs er lavere, målt ved standardavviket til verdiene for den implisitte volatiliteten over utøvelseskursene.

I det optimale tilfellet er den implisitte volatiliteten konstant. Dette betyr at

- den implisitte volatiliteten ikke avhenger av utøvelseskursen, men innehar én gitt verdi
- volatilitetssmilet er en horisontal rett linje
- vi kan replikere markedsprisene med et gitt sett av parameterverdier for alle utøvelseskursene.

2 MODELLEN

I forrige kapittel introduserte vi modellene som blir brukt i denne oppgaven (Mertons modell, heretter kalt MM og Black & Scholes modell, heretter kalt BSM). I dette kapittel gis en mer matematisk beskrivelse av disse.

Generelt gjøres følgende forutsetninger om markedet ved begge modellene:

- Ingen arbitrasjemuligheter, dvs ingen muligheter for å få risikofri profitt.
- Man kan kjøpe og selge hvilken mengde man vil av aksjen.
- Short salg er lovlig.

Ettersom MM er et direkte utspring fra BSM, vil vi starte med å gi en kort beskrivelse av BSM.

2.1 BLACK & SCHOLES

Tilleggsforutsetning for BSM:

- Aksjeprisen følger en kontinuerlig prosess gitt ved en geometrisk Brownsk bevegelse med konstant drift μ , og volatilitet σ .

Proessen til aksjeprisen er gitt ved:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \quad (1)$$

dS_t – endring aksjepris i en kort tidsperiode $dt = T - t$.

μ – forventet avkastning på aksje S

σ – volatiliteten til aksje S

S_t – initiell aksjepris, tid t

$$dZ_t = \sqrt{dt} \varepsilon_t$$

ε_t – tilfeldig standard normalfordelt variabel: $\varepsilon_t \sim N[0,1]$

Ved Itô's Lemma (Hull 2009), kan det vises at prosessen til logaritmen av brutto aksjeavkastning $\frac{S_T}{S_t}$, er normalfordelt og kan uttrykkes som:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ_t \sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt, \sigma^2 dt\right] \quad (2)$$

Hvor dZ_t er en standard Brownsk prosess med forventning 0 og varians dt og $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ er en Brownsk prosess med drift.

Av denne prosessen impliserer det at aksjeprisen på tid T er lognormalfordelt og kan skrives som en eksponensialfunksjon av aksjeprisen på tid t, $t < T$:

$$S_T = S_t e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ_t} \sim LN\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt, \sigma^2 dt\right] \quad (3)$$

Forventet aksjepris ved Black & Scholes er dermed:

$$E[S_T] = S_t e^{\mu dt} \quad (4)$$

2.1.1 UTTRYKK FOR OPSJONSPRISEN PÅ EUROPEISKE STANDARDOPSJONER

Opsjonsprisen ved risikonøytral prising, fant Black & Scholes som ligningene:²

$$Call(S_t, K, \tau, \sigma, r) = S_t N(d1) - e^{-r\tau} KN(d2)$$

$$Put(S_t, K, \tau, \sigma, r) = e^{-r\tau} KN(-d2) - S_t N(-d1) \quad (5)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

¹ For $x \sim N[a, b]$ har vi at $E[e^x] = e^{adt + \frac{1}{2}b^2 dt}$

² Jeg ser i denne oppgaven bort fra dividende. Dette er fordi selskapet ikke utbetaler dividende i opsjonens levetid (Oslo Børs).

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

S_t – aksjepris tid t , K – utøvelseskurs, τ – Tid til utøvelse, σ – aksjens volatilitet

r – risikofri kontinuerlig rente

2.2 MERTON

Tilleggsforutsetning for MM:

- Aksjeprisen følger en geometrisk Brownsk prosess med drift (kontinuerlig prosess) pluss en ukontinuerlig prosess, bestående av en Poisson prosess dN_t og et normalfordelt ledd, $(y_t - 1)S_t$

Merton tar utgangspunkt i BSM, men tilfører et Poisson fordelt ledd som beskriver antall hopp en aksje gjør i en kort tidsperiode dt . Prosessen til aksjeprisen uttrykkes i MM som:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t + (y_t - 1)S_t dN_t \quad (6)$$

y_t – brutto hoppstørrelse, $\frac{S_{t+}}{S_{t-}}$

S_{t-} - aksjepris rett før et eventuelt hopp

S_{t+} - aksjepris rett etter et hopp har funnet sted

$(y_t - 1)$ - prosentvise endring i aksjepris som følge av hopp

dN_t – Poisson prosess, med parameter λ som kan tolkes som forventet antall hopp per år.

De andre parameterene er gitt av ligning (1).

Poisson prosessen dN_t teller antall tilfeldige hopp, N_t , i aksjeprisen. Gitt et hopp, blir også brutto hoppstørrelse, y_t , modellert tilfeldig.

Merton antar at alle tilfeldige variable, dZ_t , y_t og dN_t er uavhengige av hverandre.

Videre antas det at hopp i aksjepris skjer identisk og uavhengig av hverandre. Det betyr at hvert hopp har lik forventning og varians og at kunnskapen om hopp som har skjedd tidligere

ikke har innvirkning på framtidige hopp. Sannsynligheten for at en aksje hopper i løpet av et lite tidsintervall dt , modelleres ved Poisson fordelingen som:

$$\begin{aligned} P\{N_t = 1\} &= \lambda dt \\ P\{N_t > 1\} &\cong 0 \\ P\{N_t = 0\} &\cong 1 - \lambda dt \end{aligned} \tag{7}$$

λdt er her den forventede hoppintensiteten til aksjen per tidsintervall og er uavhengig av tiden t , men avhengig av intervallengden, $dt = T - t$. Vi kan tolke denne som forventet antall hopp i løpet av opsjonens levetid.

Brutto hoppstørrelse modelleres som en tilfeldig eksponensiell lognormalfordelt variabel av typen:

$$y_t = e^{a + b\varepsilon_t} \sim LN[a, b^2] \tag{8}$$

Merton antar at hoppene i snitt er på nedsiden, det vil si at «forventet log hoppstørrelse», a , er negativ. b er volatiliteten til hoppet og ε_t er en tilfeldig standard normalfordelt variabel. Alle parameterne er forventet identisk og uavhengig fordelt.

Ettersom y_t er en tilfeldig lognormal variabel, impliserer dette at logaritmen til y_t er en normalfordelt tilfeldig variabel:

$$\ln\left(\frac{S_{t+}}{S_{t-}}\right) = \ln\left(\frac{y_t S_{t-}}{S_{t-}}\right) = \ln(y_t) = Y_t = a + b\varepsilon_t \sim N[a, b^2] \tag{9}$$

Videre har den prosentvise endringen i aksjepris som følge av et hopp forventning:

$$E[y_t - 1] = E[y_t] - 1 = e^{a + \frac{1}{2}b^2} - 1 = m \tag{10}$$

Ettersom y_t og dN_t er antatt uavhengige av hverandre, er den forventede prosentvise endringen i aksjeprisen, i et kort tidsintervall dt , som følge av et hopp gitt ved:

$$E\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = E[(y_t - 1)dN_t] = E[y_t - 1]E[dN_t] = m\lambda dt \quad (11)$$

Cont og Tankov (2004) gir Itô formelen for en hopp prosess, og det kan vises at vi kan få følgende uttrykk for logaritmen til brutto aksjeavkastning ved å benytte prosessen til aksjeprisen (6):

$$d\ln S_t = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dZ_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (12)$$

De første to leddene i ligning (12) gir en Brownsk prosess med drift mens det siste leddet

$$\sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (13)$$

beskriver total endring i aksjeprisen som følge av at aksjen hopper N_t ganger i løpet av tidsintervallet dt . (Merk at 0 hopp ($N_t = 0$) i ligning (14) ikke gir mening – og leddet faller bort)

Av ligning (12) ser vi at vi kan få følgende uttrykk for aksjeprisen på tid T:

$$S_T = S_t e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dZ_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i} \quad (14)$$

2.2.1 UTTRYKK FOR AKSJEPRISEN VED RISIKONØYTRAL PRISING

Merton argumenterer for at hoppet kun er en egenskap til aksjen og ikke er systematisk for markedet. Dermed kan usikkerheten ved hopp diversifiseres bort - noe som betyr at den forventede avkastningen til en aksje når vi antar at aksjen følger en hopp prosess ikke bør ha noen risikopremie, men være lik den forventede avkastningen for en aksjen som følger en geometrisk Brownsk prosess. Vi vet at i fravær av hopp er driften μ lik risikofri rente r , dersom aksjen ikke betaler dividende og dersom vi antar at modellen representerer dynamikken under et risikonøytralt sannsynlighetsmål (McDonald 2006).

³ Uavhengighet gir sammenhengen, $E[xy] = E[x]E[y]$ ettersom $Cov[x,y] = 0$.

Hvis vi antar konstant risikofri rente r , så er driften bestemt av betingelsen at $E[S_T] = S_t e^{rdt}$ under et risikonøytralt sannsynlighetsmål. Dette betyr at forventet prosentvis avkastning på aksjen må være lik risikofri rente, r .

Valget av driftparameter i MM som gjør at forventningen til avkastningen er lik r , er gitt ved $\mu = r - \lambda m$, mot $\mu = r$ for BSM (Glassermann 2003).

Dette betyr at vi kan skrive prosessen til aksjeprisen i MM, som:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda m)dt + \sigma dZ_t + (y_t - 1)dN_t \quad (15)$$

Noe som gir forventet prosentvis avkastning:

$$E\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = E[(r - \lambda m)dt] + E[\sigma dZ_t] + E[(y_t - 1)dN_t] = rdt \quad (16)$$

Vi får dermed følgende uttrykk for aksjen ved risikonøytral prising ved MM:

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda m)dt + \sigma dZ_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i} \quad (17)$$

I BSM har vi fra ligning (2), ved å sette r inn for μ , at $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt, \sigma^2 dt\right]$. I

MM tilfellet, gjør imidlertid implementeringen av leddet $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, at logaritmen til brutto aksjeavkastning ikke er normalfordelt ettersom N_t ikke er normalfordelt, men Poisson fordelt. I følge Merton er løsningen å finne opsjonsverdien som en vektet sum av ulike antall hopp, n . Vi ser at dersom vi fikserer antall hopp til en bestemt størrelse n , vil vi få normalfordelt log brutto aksjeavkastning, det vil si lognormalfordelt aksjepris likt som i BSM tilfellet. Dette fordi Poisson fordelingen forsvinner ettersom vi antar antall hopp n for gitt, og da vi vet at $Y_i \sim N[a, b^2]$:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda m\right)dt + \sigma dZ_t + \sum_{i=1}^n Y_i \quad (18)$$

Gitt denne antagelsen har vi:

$$\begin{aligned}
 E[\ln(\frac{S_T}{S_t})] &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda m)dt + an \\
 Var[\ln(\frac{S_T}{S_t})] &= E[(\ln(\frac{S_T}{S_t}))^2] - E[\ln(\frac{S_T}{S_t})]^2 = \sigma^2 dt + b^2 n \\
 S_T &\sim LN[\ln(S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda m)dt + an, \sigma^2 dt + b^2 n]
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Som igjen betyr at vi for gitt n har uttrykket for aksjeprisen:

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda m)dt + an + \sigma^2 dZ_t + b^2 n}
 \tag{20}$$

Forventet aksjepris er dermed lik:

$$E[S_T] = S_t e^{rdt - \lambda m + an + \frac{1}{2}b^2 n}
 \tag{21}$$

Gitt vårt risikonøytrale sannsynlighetsmål må å vi ha at $E[S_T] = S_t e^{rdt}$. Gitt ligning (21), hvor m er gitt av ligning (10) ser vi at for å få dette må $a = -0.5b^2$.

2.2.2 UTTRYKK FOR OPSJONSPRISEN PÅ EUROPEISKE STANDARDOPSJONER

Merton viser at gitt antagelsen om at den brutto hoppstørrelsen $y_t \sim LN[a, b^2]$, er det mulig å få følgende funksjon for prisen på europeiske standardopsjoner:

$$\begin{aligned}
 Call_{Merton}(S_t, K, \tau, \sigma, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\tilde{\lambda}\tau} (\tilde{\lambda}^n)}{n!} Call_{BS}[S_t, K, \tau, \sigma_n, r_n] \\
 \tilde{\lambda} &= \lambda(1 + m) = \lambda e^{a + \frac{1}{2}b^2}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{nb^2}{\tau}}$$

$$r_n = r - \lambda m + \frac{n \ln(1 + m)}{\tau} = r - \lambda \left(e^{a + \frac{1}{2} b^2} - 1 \right) + \frac{n \left(a + \frac{1}{2} b^2 \right)}{\tau}$$

Call_{BS} – opsjonsprisen kalkulert ved BSM (5).

$\tilde{\lambda}$ – forventet total brutto hoppstørrelse «per år».

σ_n – uttrykk for volatiliteten ved MM.

r_n – uttrykk for kontinuerlig rente ved MM.

Poisson fordelingen med parameter $\lambda > 0$ er gitt ved:

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda^n)}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Denne beskriver sannsynligheten for at aksjen hopper n ganger i et tidsintervallet med lengde τ . Dette er det første leddet i (22), noe som betyr at opsjonsprisen ved MM kan tolkes som vektet snitt av BSM priser gitt at underliggende hopper n ganger fram til utøvelse. Hver vekt er lik sannsynligheten for at aksjen hopper n ganger fram til utøvelse og er gitt ved Poisson distribusjonen.

I figur 1 vises en simulering av daglige aksjepriser over en periode på 365 dager for hver av de to modellene ved risikonøytral prising, gitt ved ligning (3), ved å sette $\mu = r$ og ligning (17), hhv.:

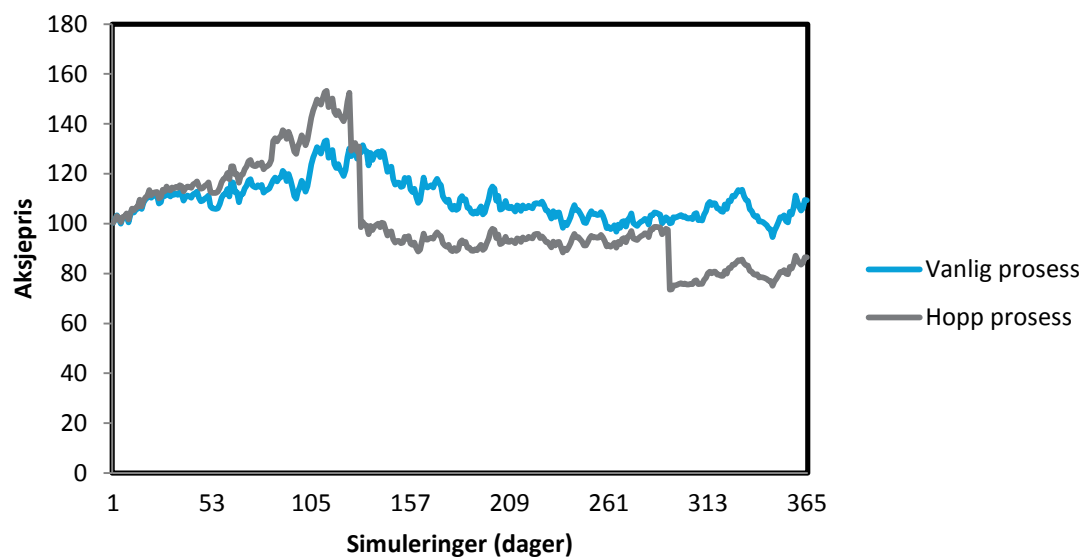
$$BSM: S_T = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dZ_t}$$

$$MM: S_T = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda m\right)dt + \sigma dZ_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_t}$$

For å få en representativ sammenligning er alle parameterene og variablene som inngår i *begge* modellene er like. Dette betyr at Z_t , r , σ , S_t , dt er like. Jeg har satt følgende verdier:

- $S_t = 100$, $r = 2.5\%$ (kontinuerlig rente), $\sigma = 30\%$, $a = -10\%$, $b = 10\%$, $\lambda = 5$, $dt = \frac{1}{365}$
- $dZ_t = \sqrt{dt}\varepsilon_t$ hvor ε_t trekkes tilfeldig fra standard normalfordelingen.

Simulerte daglige aksjepriser over et år



Figur 1: Viser simulerte daglige aksjekurser for et år for en fiktiv aksje som følger en hopp prosess, og en fiktiv aksje som følger en geometrisk Brownsk prosess. Parametere: $S_t = 100$, $r = 2.5\%$, $\sigma = 30\%$, $a = -10\%$, $b = 10\%$, $\lambda = 5$

Vi ser at hopp modellen har sterkere svingninger, noe som skyldes at vi lar aksjekursen gjøre tilfeldige hopp. (Det er imidlertid viktig å huske at Mertons modell ikke er kontinuerlig, selv om det kan se slik ut fra figuren)

3 METODE

For å teste denne oppgavens hypotese (beskrevet i kapittel 1) ble det laget et Java-program som

- kalkulerte opsjonsprisene ved BSM og MM for ulike utøvelseskurser.
- iterativt fant implisitt volatilitet for opsjoner priset ved BSM og MM.
- ved simulering, fant optimale parameterverdier for de ukjente parameterene til modellene.

3.1 BEREGNING AV IMPLISITT VOLATILITET

Implisitt volatilitet, er den volatiliteten σ^* som gir kalkulert pris lik markedspris. Dersom vi har en funksjon $f(\sigma)$ er den implisitte volatiliteten gitt ved:

$$f(\sigma^*) = \text{pris}^{\text{marked}} \quad (24)$$

Den implisitte volatiliteten ble funnet ved Newton-Raphson iterasjonsmetode (Hull 2009):

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f_x}{f'_x} \quad (25)$$

Hvor man for implisitt volatilitet har at $x = \sigma$.

Framgangsmåten ved Newton Raphson er å sette en initiell verdi på volatiliteten, σ , for så å finne σ^* ved iterasjon, gitt ved ligning (25). Man finner suksessivt bedre og bedre volatilitet i den forstand at den volatiliteten man finner, innsatt i opsjonsprisingsmodellen gir priser som blir mer og mer lik markedsprisene. For å spare simuleringstid avsluttes ofte denne iterasjonsprosessen når man oppnår en viss presisjon. I denne oppgaven ble simuleringen avsluttet når differansen mellom kalkulert pris og markedspris fikk en verdi mindre enn $|0.0005|$.

Den partielle deriverte av opsjonsfunksjonen med hensyn på volatiliteten σ , kalles Vega og viser endring i opsjonspris som følge av økning i volatiliteten med en *enhet*. Vega for opsjonspriskonfunksjonen med hopp f'_σ , ble gjort numerisk ved å tilnærme den deriverte som:

$$\frac{f(\sigma + \Delta\sigma) - f(\sigma)}{\Delta\sigma} \quad (26)$$

$\Delta\sigma$ – liten økning i volatiliteten, σ

Fremgangsmåten for å finne den deriverte numerisk var som følger:

1. Simulér opsjonsprisen ved å anta volatiliteten $\sigma + \Delta\sigma$.
2. Simulér opsjonsprisen ved å anta volatiliteten σ , som er lik σ i 1.
3. Trekk disse to opsjonsprisene fra hverandre og del på økningen i volatiliteten for å få Vega uttrykt som per *enhet* endring i volatiliteten.

For BSM er Vega gitt ved den partielle deriverte av uttrykket for opsjonsprisen (5), med hensyn på volatiliteten. Det kan dermed vises at:

$$v = S_t n[d_1] \sqrt{\tau} \quad (27)$$

v – vega, S_t – aksjepris tid t , τ – tid til utøvelse, d_1 er gitt ved ligning (5).

$n[d_1]$ – kumulativ sannsynlighet for en standard normalfordelt variabel, og gitt ved:

$$n[d_1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \quad (28)$$

Etter at de deriverte var funnet (numerisk eller analytisk) benyttet vi Newton-Raphson metode (25) for å finne *neste* volatilitet.

Merk:

- For at Newton-Raphson skal konvergere, må Vega være uttrykt som per *enhet* endring i volatiliteten og ikke per *prosent* endring.
- Vega er lik for call –og put-opsjon skrevet på samme underliggende og med lik tid til utøvelse.

3.2 SØK ETTER OPTIMAL VOLATILITET FOR BLACK & SCHOLES' MODELL

Søket etter optimale parametere er det essensielle i denne oppgaven.⁴ Framgangsmåten for søket ved BSM, var som følger:

Initialiser datasettet (jeg har hatt tilgang til markedspriser for 15 utøvelseskursur)

For hver av utøvelseskursene fra datasettet

begin

For alle volatiliteter mellom 20% og 60% i step 1%

begin

Kalkuler opsjonsprisen

Kalkuler differansen mellom denne kalkulerte prisen og markedsprisen

Skriv ny linje, slik at hver linje tilsvarer differansen for en bestemt volatilitet.

end for

end for

Resultatet av denne del-kalkulasjonen var en tabell med 15 kolonner (en for hver utøvelseskurs), og 51 rader (en rad for hver volatilitet).

⁴ Søket etter optimale parametere ble gjort nummerisk ved simulering (blir beskrevet på de neste sidene), ettersom jeg fant at multi-dimensjonal Newton-Raphson ikke konvergerer for den typen funksjoner som jeg har.

Importer tabellen i excel

For hver av radene i tabellen

begin

Kvadrer hver differanse og summer verdiene i raden, slik at en sum tilsvarer summen av kvadrerte differanser for en gitt volatilitet (angitt av raden) over alle utøvelseskursene (angitt av kolonnene).

end for

Resultatet av denne del-kalkulasjonen var en tabell med en kolonne og 51 rader hvor hver rad bestod av summen av kvadrerte differanser for alle utøvelseskurser til en gitt volatilitet.

Finn minimumsverdien til denne kolonnen.

Minimumsverdien som ble funnet tilsvarer den optimale volatiliteten (den volatiliteten som gav denne minimumsverdien). Videre i oppgaven refereres det til denne minimumsverdien som «minimum kvadrerte avvik».

Ettersom volatiliteten er den eneste ukjente parameteren i BSM, impliserer ligning (24) at den *implisitte volatiliteten* er uavhengig av hvilken volatilitet man initielt benytter i modellen, alt annet likt. Den *implisitte volatiliteten* ved BSM vil dermed være lik for den optimale volatiliteten jeg fant, som for en hvilken som helst annen volatilitet, selv om differansene med markedspris er optimert (minimert).

3.3 SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERE FOR MERTONS MODELL

I tillegg til volatiliteten σ består MM av de ukjente parameterene α , b og λ .

I kapitel 2 har vi sett at vi må ha $\alpha = -0.5b^2$ gitt vårt sannsynlighetsmål som gir $E[S_T] = S_t e^{r dt}$. Imidlertid viste det seg at resultatet av analysen gav betraktelig bedre resultater dersom vi løstet på denne betingelsen og også varierte α , dvs dersom vi antok at $E[S_T] \neq S_t e^{r dt}$. Analysen ble derfor utført for begge tilfellene - den ene for vårt

risikonøytrale sannsynlighetsmål, og den andre ved å variere forventet log hoppstørrelse, α (i dette tilfelle ble α en av parameterene vi søkte å optimalisere).

For å finne de optimale parameterene måtte vi, som for volatiliteten i BSM, finne differanser mellom markedspris og kalkulert pris, men nå for ulike verdier av alle parameterene α , b , λ og σ ⁵. Framgangsmåten er lik som for BSM, men nå må vi ha fire nøytede «loop»-rutiner, en for hver parameter. Dermed blir det i MM simulert ulike *sammensetninger* av verdier på parameterene, for hver utøvelseskurs.

Hver slik «loop» inneholder et *intervall* som beskriver hvilke verdier for denne bestemte parameteren man skal søke optimalitet innen (for BSM var dette intervallet 20-60%). Dette betyr at antall potensielle simuleringer ble betraktelig større enn for BSM, noe som av hensyn til størrelsen på datamengden som ble generert, og håndteringen av denne, gjorde det nødvendig å stille krav til valg av parameterenes «loop-intervaller» og «loop-trinn».

Metoden som ble brukt for å finne passende intervall og trinn for hver av parameterene var:

1. Simuler for brede intervaller, men for relativt store trinn.
2. Finn de optimale parameterverdiene basert på *disse* simuleringene.
3. Simuler med nye intervaller - hvor intervallene er satt i god avstand rundt de optimale parameterverdiene fra punkt 2, men mye smalere enn hva de var i punkt 1. Reduser samtidig «trinnene» slik at de tilfredsstill *mine* krav til nøyaktighet.

På samme måte som for BSM fant vi, for hvert sett med parametere, summen av kvadrerte differanser over alle utøvelseskursene, for så å finne optimalt *parametersett* som det *settet* som svarer til minimum kvadrerte avvik.

Merk:

Parameterverdiene som blir funnet i denne oppgaven defineres som optimale, selv om det antageligvis er mulig, ved å endre hver parameter mindre for hver «loop»-sekvens (mindre trinn, eks 0.5% økning istedenfor 1%), å finne parameterverdier som er mer optimale i den

⁵ Jeg beskriver her et «generelt» tilfelle, det vil si at vi også tar med α i optimeringen. I tilfellet hvor $\alpha = -0.5b^2$ optimeres kun b , λ og σ . Forskjellen fra framgangsmåten som blir beskrevet her er at «loop»-rutinen for α forsvinner i dette tilfellet.

forstand at de gir kalkulerte priser som avviker mindre fra markedsprisene for alle utøvelseskurser.

I motsetning til for BSM, vil ulike verdier på volatiliteten ha innvirkning på den implisitte volatiliteten, i den forstand at parametere α , β , λ får optimale verdier som er *forskjellige* for ulike verdier på volatiliteten.

I neste kapittel presenteres datamateriellet som er brukt i denne oppgaven, og i kapittel 5 vil vi se resultater fra analysen som er gjort basert på dette datamateriellet og ved bruk av metoden som står beskrevet i dette kapittelet.

I hovedsak baseres denne oppgaven på call-opsjoner. Imidlertid består kapittel 5.2 av resultater fra analyser gjort av en tilsvarende put opsjon. Dette ble gjort for å se om man kan finne en eventuell klar sammenheng i resultatene for call –og put-opsjoner. Denne delen av oppgaven vil imidlertid ikke lede til noen endelige konklusjoner, da det ikke ble gjort tilstrekkelig analyse.

Put prisene er funnet ved put-call pariteten (McDonald 2006).

4 DATAMATERIELL

I denne oppgaven er det sett på en europeisk opsjon skrevet på cruiseselskapet, RCL (Royal Caribbean Cruises), som handles på Oslo Børs. Opsjonsprisene som er benyttet er hentet fra internett på Nordnet sine hjemmesider (Nordnet).

Opsjonens løpetid er på 88 dager, dvs fra 19.09.2011 med utøvelse 15.12.2011. Da løpetiden er på rundt 3 måneder, har jeg benyttet renten på 3 måneders statkasservekter, som per 19.09.2011 var på 1,95% (Norges Bank), dvs 1,931% kontinuerlig forrentet [$\ln(1,0195)$].

Videre har jeg sett bort fra dividende da selskapet ikke utbetaler dividende i denne perioden (Oslo Børs).

Jeg fant markedspriser for 15 utøvelseskurs, disse er gitt i tabell 1.

Tabell 1: Viser opsjonspriser for kjøp (ask) og salg (bid) for ulike utøvelseskurs av en 88 dagers opsjon skrevet på Royal Caribbean Cruises (RCL), som handles på Oslo Børs (OSE).

Utøvelseskurs	Callpriser			Putpriser		
	<i>Bid</i>	<i>Ask</i>	<i>Gjennomsnitt</i>	<i>Bid</i>	<i>Ask</i>	<i>Gjennomsnitt</i>
175	2,80	4,30	3,55	38,75	42,50	40,63
170	3,60	5,10	4,35	34,75	38,50	36,63
165	4,50	6,00	5,25	30,50	34,25	32,38
160	5,70	7,20	6,45	27,00	30,00	28,50
155	7,00	8,50	7,75	23,50	26,50	25,00
150	8,75	10,25	9,50	20,25	23,00	21,63
145	10,25	12,50	11,38	17,50	19,50	18,50
140	12,50	14,50	13,50	14,75	16,75	15,75
135	15,00	17,25	16,13	12,25	14,25	13,25
130	18,00	20,00	19,00	10,25	12,25	11,25
125	20,75	23,50	22,13	8,75	10,00	9,38
120	24,00	27,00	25,50	7,10	8,50	7,80
115	27,50	30,50	29,00	5,60	7,10	6,35
110	31,00	34,75	32,88	4,50	6,00	5,25
105	35,00	38,50	36,75	3,60	5,10	4,35

4.1 ER DET ARBITRASJEMULIGHETER I DETTE MARKEDET GITT DISSE OPSJONSPRISENE?

Opsjonsprisene består av bid og ask priser. Før arbeidet med besvarelsen av selve oppgaven begynte, måtte jeg finne ut om de prisene jeg hadde funnet gjenspeilet arbitrasjebetingelsene i modellene, eller om det er arbitrasjemuligheter til disse prisene. Til denne analysen ble det antatt at innlån -og utlåns-rente er lik og gitt ved renten på 3 måneders statkassveksler, 1,95%. Dette gjenspeiler ikke virkeligheten, men påvirker ikke konklusjonen av sluttresultatet. Følgende transaksjonskostnader ble benyttet (Nordnet).

- a. Kjøp/salg av aksjer: maks (59kr, 0.039% ΔS)
- b. Kjøp/salg av opsjoner maks (59 kr, 0.4% ΔO)
- c. Clearing (oppgjørskostnad) maks (1 kr, 0.75% ΔO) (maks 14 kr av opsjonspremien)

Δ – antall, S- aksjer, O- opsjoner

Per 19.09.2011 kl. 11.15 sto kursen for RCL som følger:

Bid: 137.2

Ask: 137.5

Jfr. put-call Pariteten, har vi følgende sammenheng mellom call –og put- opsjoner:

$$Call = Put + Aksje - Ke^{-r\tau} \quad (29)$$

Denne sammenhengen impliserer at vi har arbitrasjemulighet dersom:

$$Call^{Ask} < Put^{Bid} + Aksje^{Bid} - Ke^{-r\tau} - TK \quad (30)$$

TK – transaksjonskostnader

Forklaring: Man kjøper en call-opsjon og betaler for dette C^{Ask} . Dersom man kan selge en syntetisk call-opsjon (en portefølje som replikerer payoff til en solgt call) til en høyere pris, vil man få risikofri avkastning og det er arbitrasje i markedet.

Videre har vi motsatt at det er arbitrasjemuligheter dersom:

$$Call^{Bid} > Put^{Ask} + Aksje^{Ask} - Ke^{-r\tau} + TK \quad (31)$$

Forklaring: Man selger en call-opsjon og får for dette C^{Bid} . Dersom man kan kjøpe en syntetisk call-opsjon til en lavere pris, vil man ha arbitrasjemuligheter. Dette gjelder også omvendt for put-opsjoner. Dette betyr at arbitrasjefritt intervall for opsjoner er gitt ved:

$$[Bid^{Teori} < Ask^{Virkelig} ; Ask^{Teori} > Bid^{Virkelig}] \quad (32)$$

Bid^{Teori} – Pris ved salg av syntetisk opsjon

Ask^{Teori} – Pris ved kjøp av syntetisk opsjon

$Ask^{Virkelig}$ – Markedspris ved kjøp av opsjonen

$Bid^{Virkelig}$ – Markedspris ved salg av opsjonen

Til denne analysen ble det antatt en portefølje av 1000 aksjer/opsjoner slik at transaksjonskostnadene ble relativt lave. Den teoretiske prisen per opsjon er gjennomsnittet av verdien av en slik portefølje. Dersom vi ser på en portefølje av relativt få aksjer og opsjoner vil transaksjonskostnadene være så høye relativt sett at man aldri vil kunne få arbitrasjemuligheter. Tabell 2 viser oversikt over resultatene av denne analysen. Vi ser at opsjonsprisene fra tabell 1 er godt innenfor dette arbitrasjefrie intervallet for alle utøvelseskurser (opsjonsprisene er såpass godt innenfor de arbitrasjefrie intervallene at vi, dersom vi hadde benyttet forskjellig utlån -og innlåns-rente, ikke ville fått et annet resultat selv om det arbitrasjefrie intervallet ville litt mindre).

Med bakgrunn i dette, kan vi konkludere med at det ikke er noen arbitrasjemuligheter gitt disse prisene.

Tabell 2: Viser hvilket intervall av priser opsjonen må ha for at det ikke skal være arbitrasjemuligheter i dette markedet gitt de observerte prisene.

Utøvelseskurs	Call		Put	
	Bid ^{Teori}	Ask ^{Teori}	Bid ^{Teori}	Ask ^{Teori}
	Ingen arbitrasje intervall: Bid ^{Teori} < Ask ; Ask ^{Teori} > Bid			
175	1,76	5,82	39,37	41,17
170	2,73	6,80	35,19	36,99
165	3,46	7,52	31,11	32,91
160	4,94	8,25	27,34	29,14
155 ⁶	6,41	9,73	23,66	25,46
150	8,14	11,20	20,43	22,23
145	10,37	12,68	16,96	19,51
140	12,59	14,91	14,23	16,53
135	15,07	17,38	11,75	14,30
130	18,05	20,36	9,78	12,08
125	21,53	23,09	7,55	10,60
120	24,85	26,56	5,82	9,12
115	28,33	30,14	4,35	7,65
110	32,21	34,02	2,87	6,92
105	36,28	38,09	1,89	5,69

⁶ Utregning av Call^{BidVirkelig} ved utøvelseskurs 155: Uten arbitrasje må Call^{BidTeori} < Call^{AskVirkelig}. i) = 0.39 kr, ii) = 4 kr, iii) = 1 kr. Call^{BidTeori} = $[1000(23.5 + 137.2 - 155e^{-0.0193dt}) - (0.39+4+1)] / 1000 = 6.41 < 8.5$ (som er Call^{AskVirkelig} for utøvelseskurs 155). Her er Put^{BidVirkelig} = 23.5, Aksje^{BidVirkelig} = 137.2, K = 155, r^c = 1.93%, dt = $\frac{88}{365}$

4.2 PRISER BRUKT I OPPGAVEN VIDERE

For å besvare denne oppgavens hypotese, benyttes gjennomsnittet av bid-ask prisene slik de sto den 19.09.2011 kl 11.15. Dette betyr at aksjeprisen som blir benyttet videre i oppgaven er lik gjennomsnittet av bid og ask prisen på dette tidspunktet, og at opsjonsprisene for gitt utøvelseskurs er lik gjennomsnittet av bid og ask prisen for denne utøvelseskursen. En oversikt over disse prisene er vist i tabell 3.

Tabell 3: Viser gjennomsnittet av bid-ask prisene.

Aksjepris: 137,35		
Utøvelse	Call	Put
175	3,550	40,625
170	4,350	36,625
165	5,250	32,375
160	6,450	28,500
155	7,750	25,000
150	9,500	21,625
145	11,375	18,500
140	13,500	15,750
135	16,125	13,250
130	19,000	11,250
125	22,125	9,375
120	25,500	7,800
115	29,000	6,350
110	32,875	5,250
105	36,750	4,350

5 ANALYSE

På de etterfølgende sidene presenteres resultater av analysen som er gjort for å svare på hypotesen beskrevet i kapittel 1. Følgende parameterverdier er konstante for oppgaven videre:

- Rente, $r = 1,95\%$, dvs kontinuerlig rente, $r^c = \ln(1+r) = 1,93\%$.
- Jeg antar 365 dager i året og har dermed $\tau = 88/365$.
- Underliggende aksjepris er 137.35 som er gjennomsnittet av bid/ask spreaden slik den sto per 19.09.2011 kl 11:15.
- Utøvelseskursene varierer fra 175 til 105, men hopp på 5 kr.

Analysen ble i hovedsak gjort på europeiske call opsjoner, men til slutt vil vi se på noen resultater fra tilsvarende put opsjoner.

5.1 CALL OPSJONER

5.1.1 RESULTATER VED INITIELLE PARAMETERVERDIER

Ettersom denne oppgaven søker etter å finne de *optimale* parameterverdiene, var det uten betydning hvilke parameterverdier modellene initielt har. Disse ble derfor valgt uten noen form for estimering.

Vi ønsker å se hvilken *innvirkning* parameterene generelt har på

- differansen mellom kalkulert pris ved hver av modellene og markedspris
- den implisitte volatiliteten til hver av modellene.

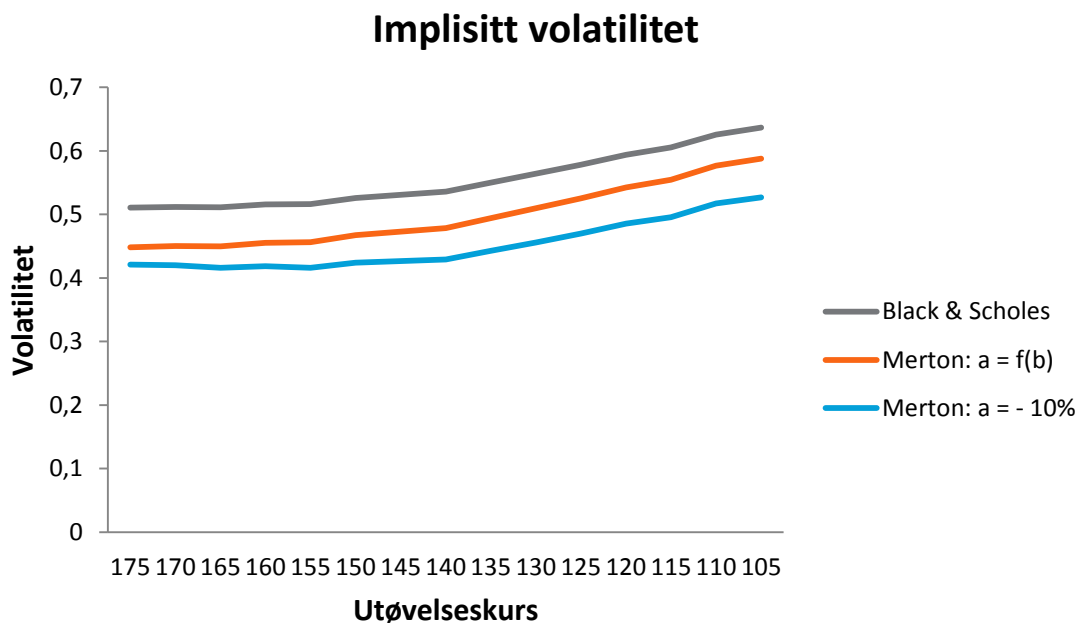
Nedenfor vises to initielle figurer for disse.

Som beskrevet i kapitte 3.3, har jeg analysert to ulike hopp-oppsjoner, en hvor $\mathbf{a} = -0,5b^2$ (kaller denne modellen MM_1) og en hvor $\mathbf{a} < 0$, men uavhengig av \mathbf{b} (MM_2).

Initielle parameterverdier er valgt som følger:

- $\sigma = 30\%$
- $b = 10\%$.
- $\lambda = 6$.
- $MM_1: a = -0,5b^2$.
- $MM_2: a = -10\%$.

Med disse parameterene fikk vi følgende initielle volatilitetssmil.



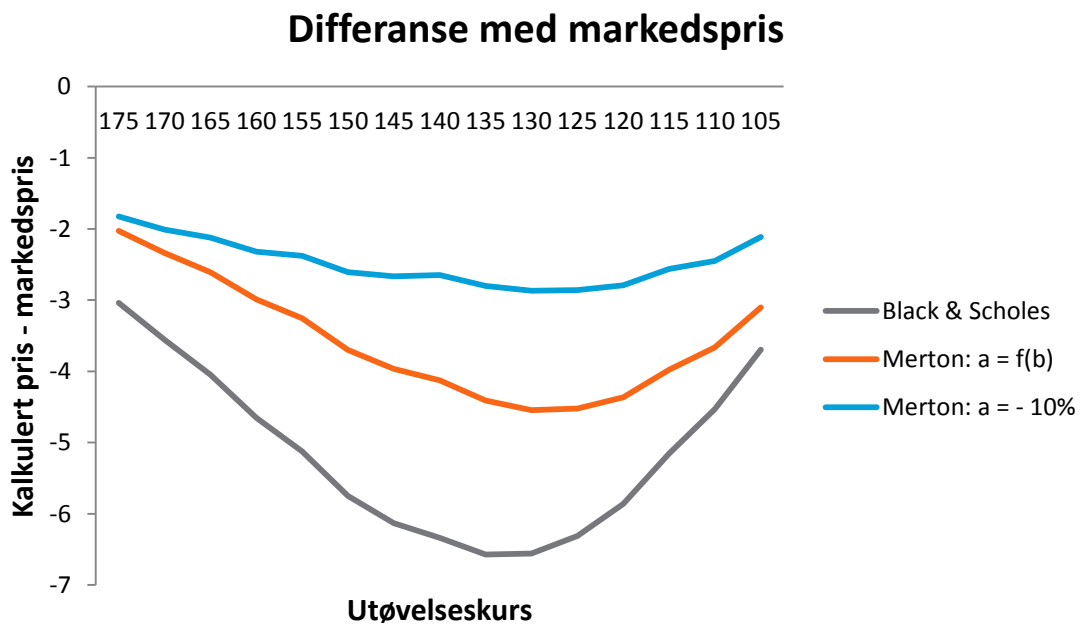
Figur 2: Viser implisitt volatilitet for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Black & Scholes modell, og Mertons hopp modell for to ulike verdier på forventet log hoppstørrelse, a . Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $a_1 = -0,5b^2$, $a_2 = -10\%$, $b = 10\%$, $\lambda = 6$

Av figur 2 kan vi trekke følgende konklusjoner:

- Den implisitte volatiliteten ved Mertons modell er forskjellig fra Black & Scholes
- Den implisitte volatiliteten avhenger av a .

I søket etter optimale parameterverdier er differansen med markedsprisen for hver utøvelseskurs av interesse ettersom vi finner kvadrerte avvik som det parametersettet som gir minimumsverdi på *kvadrerte* differanser. Det er derfor interessant å se hvordan opsjonsprisene varierer i forhold til markedsprisene for disse modellene.

I figur 3 vises differansene mellom kalkulert pris fra de ulike modellene og markedsprisen for initielle parameterverdier.



Figur 3: Viser differansen mellom kalkulert opsjonspris og markedspris for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Black & Scholes modell, og Mertons hopp modell for to ulike verdier på forventet log hoppstørrelse, a . Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $\sigma = 30\%$, $a_1 = -0.5b^2$, $a_2 = -10\%$, $b = 10\%$, $\lambda = 6$

Som for figur 2, kan vi av figur 3 konkludere med at:

- Differansen med markedspris ved Mertons modell er forskjellig fra Black & Scholes
- Differansen med markedspris avhenger av a .

5.1.2 EFFEKT PÅ INITIELLE RESULTATER AV ENDREDE PARAMETERVERDIER

Den implisitte volatiliteten for BSM er konstant for ulike verdier av σ . Imidlertid ser vi at MM inneholder parameterene α , b og λ som også er ukjente i tillegg til σ . Vi ser derfor at vi i MM har «frie» parametere som kan brukes til å kalibrere MM, noe som betyr at volatilitetssmilet kan antas å endres for ulike verdier av disse ukjente parameterene. Vi har sett indikasjoner på at dette er mulig av figur 2, ettersom volatilitetssmilet er forskjellig i alle modellene, noe som betyr at de ukjente parameterene i MM *har* en innvirkning.

Av figur 3 ser vi at differansen med markedsprisen endres for endret α , og for endret modelltype. Vi ønsker å minimere avviket mellom kalkulerte priser og markedspriser. For BSM vet vi at opsjonsprisen er en stigende funksjon av volatiliteten (Hull 2009), noe som betyr at differansen med markedsprisen først vil reduseres fra initiell verdi ($\sigma = 30\%$) ved økt σ , for så å øke igjen etter vi har passert optimal σ (dette ser vi ut fra figur 3, ettersom differansen er negativ for denne initielle volatiliteten).

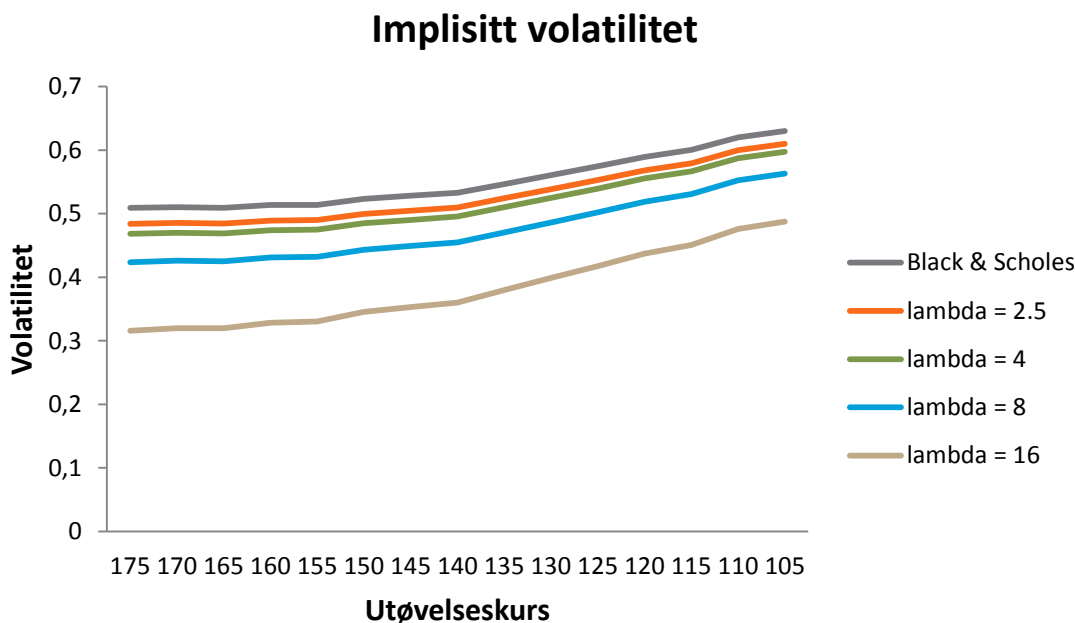
MM inneholder flere parametere. Vi har sett av figurene over at parameterene *har* en innvirkning på differanse med markedspris.

Jeg ønsker dermed å undersøke *hvordan* hver av de ulike parameterene α , b og λ , innvirker på disse to kalkulasjonene (volatilitetssmilet og differansen med markedspris), alt annet likt.

5.1.2.1 EFFEKT AV ENDRET FORVENTET HOPP-INTENSITET, λ

I dette avsnittet undersøker jeg hvilken innvirkning hoppintensiteten, λ har på den implisitte volatiliteten og på differansen mellom kalkulert pris og markedspris. Til denne analysen benyttet jeg MM₁, dvs at $\alpha = -0.5b^2$. Jeg så på effekter av følgende verdier for hoppintensiteten, alt annet likt:

- $\lambda = \{2.5, 4, 8, 16\}$



Figur 4: Viser implisitt volatilitet for en opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell for ulike verdier på den forventede hopp-intensiteten, λ . Black & Scholes er oppført som en referanse. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $a = -0.5b^2$, $b = 10\%$, $\lambda = \{2.5 ; 4 ; 8 ; 16\}$

Av ligning (23) i kapittel 2, ser vi at dersom $\lambda \approx 0$ får vi følgende Poisson fordeling:

$$P(N_t = 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda^n)}{n!} \approx 1 \quad (33)$$

Dette betyr at det ikke er forventet å skje noen hopp - noe som betyr at Mertons opsjonspringsformel (22) blir lik Black & Scholes (5). Dette impliserer at opsjonsprisen og den implisitte volatiliteten for MM ved $\lambda \approx 0$ og BSM er lik.

Figur 4 viser at volatilitetssmilet skifter nedover for økt forventet hoppintensitet. I tillegg indikerer kolonne **** i tabell 4 (viser forholdet mellom den implisitte volatiliteten ved hhv. BSM og MM), at vi ved å øke hoppintensiteten får et *mindre konstant* volatilitetssmil. Denne konklusjonen kan vi gjøre oss fordi:

1. Vi ser av kolonne *** at den implisitte volatiliteten ved MM er strengt økende for alle utøvelseskurs, mens den for BSM er strengt økende fra en utøvelseskurs på 165.

2. Dette betyr at dersom vi hadde startet analysen fra utøvelseskurs 165, ville vi med sikkerhet kunnet sagt at volatilitetssmilet for MM har brattere helning enn BSM og dermed er *mindre* konstant ettersom
 - a. den implisitte volatiliteten for MM endres relativt *mer* totalt sett fra første til siste utøvelseskurs.
 - b. variasjonen for *hver* utøvelseskurs er *høyere*, ettersom forholdet gitt ved kolonne **** er lavere for *hver* (reduuerte) utøvelseskurs.
3. Problemet oppstår når vi har konveksitet, eller en eller annen for for krumming i kurvene. Vi ser at fra utøvelseskurs 175 – 165 er ikke den implisitte volatiliteten til BSM strengt økende, men reduseres for utøvelse 165. Ettersom den implisitte volatiliteten til MM er strengt økende, vil forholdet gitt av kolonne **** reduseres for denne utøvelseskursen uansett hvor *stor* reduksjonen var for BSM. Det blir dermed feil å benytte dette forholdstallet som mål «konstanthet» så lenge ikke begge volatilitetssmilene har identisk form.
4. Imidlertid kan vi fra kolonne *** finne avviket til den implisitte volatiliteten i intervallet 175 – 165 som (oppført nederst i tabellen):

$$\text{Avvik BSM} = 0.0007$$

$$\text{Avvik MM} = 0.00245$$

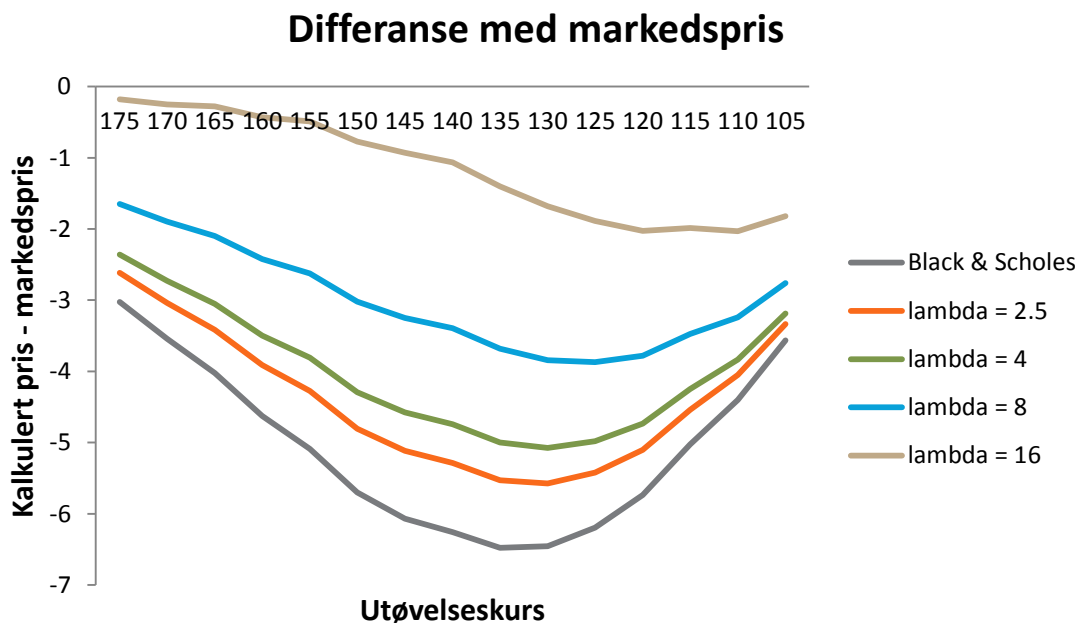
Dette viser at variasjonen i den implisitte volatiliteten har endret seg mindre for BSM også i intervallet 175 - 165, og vi kan konkludere med at den implisitte volatiliteten er mer konstant ved BSM enn hva tilfellet er for MM når $\lambda = 16$

Tabell 4: Viser resultater for BSM og MM med parameterene: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $a = -0.5b^2$, $b = 10\%$ og $\lambda = 16$.

Utøvelseskurs	Markedspris	* Opsjonspris		** Relativt avvik (P^K/P^M)		*** Implisitt volatilitet		**** $\frac{BSM^{I.V.}}{MM^{I.V.}}$
		BSM	MM	BSM	MM	BSM	MM	
175	3,55	0,52	3,37	0,15	0,95	0,5090	0,3156	1,61
170	4,35	0,81	4,10	0,19	0,94	0,5103	0,3198	1,60
165	5,25	1,23	4,97	0,23	0,95	0,5092	0,3199	1,59
160	6,45	1,83	6,02	0,28	0,93	0,5136	0,3285	1,56
155	7,75	2,66	7,26	0,34	0,94	0,5140	0,3304	1,56
150	9,50	3,80	8,73	0,40	0,92	0,5233	0,3453	1,52
145	11,38	5,31	10,44	0,47	0,92	0,5282	0,3530	1,50
140	13,50	7,24	12,43	0,54	0,92	0,5329	0,3602	1,48
135	16,13	9,65	14,72	0,60	0,91	0,5467	0,3799	1,44
130	19,00	12,55	17,32	0,66	0,91	0,5604	0,3988	1,41
125	22,13	15,93	20,24	0,72	0,91	0,5745	0,4176	1,38
120	25,50	19,76	23,47	0,78	0,92	0,5895	0,4372	1,35
115	29,00	23,97	27,02	0,83	0,93	0,6003	0,4508	1,33
110	32,88	28,48	30,84	0,87	0,94	0,6201	0,4759	1,30
105	36,75	33,19	34,93	0,90	0,95	0,6299	0,4876	1,29
Avvik i intervallet 175 – 165:						0,0007	0,00245	

Ved å sammenligne markedsprisen med opsjonsprisene gitt ved kolonne *, ser vi at MM gir priser som er mer lik markedsprisen for hver utøvelseskurs, enn det BSM gjør. Dette ser vi tydeligere i figur 5 som viser differansen mellom kalkulert pris ved hhv MM og BSM og markedspris for ulike verdier på hoppintensiteten, λ . Det vi imidlertid må huske, er at disse resultatene kommer av at vi har satt initiell volatilitet til 30%. Hadde vi økt volatiliteten til 55% (som generelt er mer lik implisitt volatilitet for BSM), ville vi fått en bedring i differansen mellom BSM og markedspris, men en relativt dårligere differanse mellom MM og markedspris ettersom den implisitte volatiliteten for MM generelt er mer lik 30%.

Konklusjonen vi kan trekke av figur 5 er at differansen mellom kalkulert pris ved MM og markedspris avhenger av λ , som betyr at kalkulert pris avhenger av λ . Vi ser at differansen med markedsprisen endrer fasong og blir «bølge-formatet»



Figur 5: Viser differansen mellom kalkulert opsjonspris og markedspris for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Mertons hopp modell for ulike verdier på den forventede hopp-intensiteten, λ . Black & Scholes er oppført som referanse. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $\sigma = 30\%$, $a = -0.5b^2$, $b = 10\%$, $\lambda = \{2.5 ; 4 ; 8 ; 16\}$

HVORFOR BLIR VOLATILITETSSMILET MINDRE KONSTANT VED ØKT FORVENTET HOPP-INTENSITET SELV OM DIFFERANSEN MED MARKEDSPRISEN BLIR LAVERE?

Det er ikke intensjonen å besvare dette spørsmålet i denne oppgaven. Imidlertid nevner jeg noen faktorer som *kan* ha betydning, uten å gjøre konklusjoner.

- Av kolonne ** i tabellen ser vi at forholdet mellom kalkulert pris ved BSM og markedspris er strengt økende for redusert utøvelseskurs. Vi vet at for $\lambda \approx 0$, er opsjonsprisen og den implisitte volatiliteten ved MM og BSM lik. Når $\lambda = 16$ ser vi at forholdet mellom MM og markedspris er relativt bedre for «in-the-money»-og «out-of-the-money»-opsjoner og relativt dårligere jo nærmere «at-the-money» man kommer. Dette betyr økt forventet hoppavkastning har endret forholdet mellom prisen kalkulert ved MM og markedsprisen, fra å være strengt økende ($\lambda \approx 0$) til å være «u-formet» ($\lambda = 16$).
- En opsjons vega (endringen i opsjonsprisen som følge av endring i volatilitet), er relativt høyere for «at-the-money»-opsjoner enn for «in-the-money»-og «out-of-the-money»-opsjoner (Hull 2009), som betyr at volatiliteten må endres relativt mer

for å gi kalkulert pris lik markedspris for opsjoner som er «in-the-money» -og «out-of-the money».

- En siste faktor er å finne ut hvordan Vega avhenger av volatiliteten. Er den strengt økende for økt volatilitet? Er effekten avhengig av utøvelseskurs, eller eventuelt størrelsen på volatiliteten?

Dette siste punktet kan være viktig. Det er rimelig å anta at Vega øker for økt volatilitet (i alle fall til en viss verdi på volatiliteten). Dermed vil det ikke være nødvendig å endre volatiliteten like mye for en gitt ønskelig endring i opsjonsprisen for BSM som har relativt høy implisitt volatilitet i forhold til MM som har en relativt lav implisitt volatilitet.

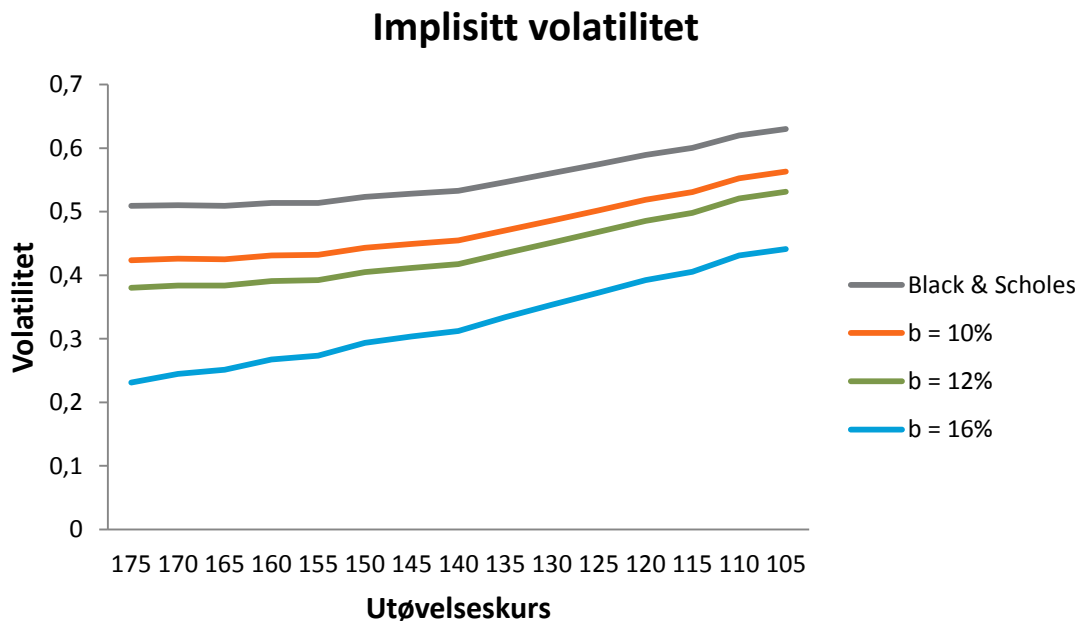
Denne oppgavens formål var imidlertid å vise at det faktisk er mulig å endre formen på volatilitetssmilet ved ulike parameterverdier i MM, og ikke å analysere årsaken til endringen.

5.1.2.2 EFFEKT AV ENDRET HOPP-VOLATILITET, b

Vi så at økt λ gav skift i volatilitetssmilet, og at differansene med markedsprisen endret seg. Et naturlig steg videre var derfor å se på effekten b har på den implisitte volatiliteten og denne differansen. Vi benytter fortsatt MM_1 , og i hovedsak de initielle parameterverdiene gitt over, men har satt:

- $\lambda = 8$
- $b = \{0.1, 0.12, 0.16\}$.

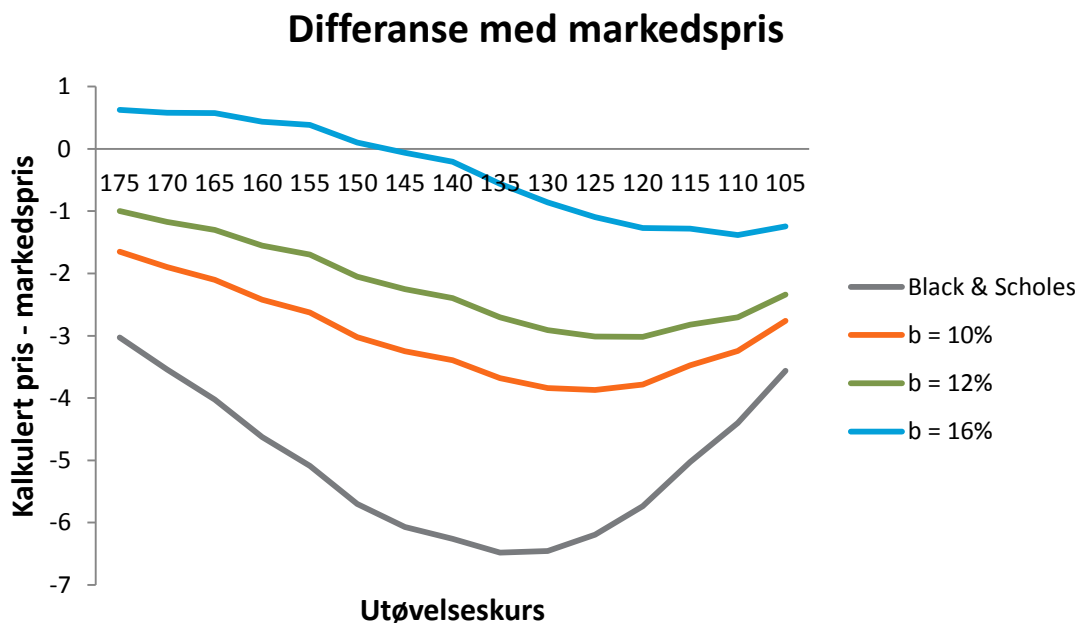
Den implisitte volatiliteten ved ulike verdier av b ser vi i figur 6.



Figur 6: Viser implisitt volatilitet for en opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell for ulike verdier på hoppvolatiliteten, b . Black & Scholes er oppført som en referanse. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $a = -0.5b^2$, $b = \{10\% ; 12\% ; 16\%$, $\lambda = 8$

Som for hoppintensiteten ser vi at økt hopp-volatilitet, **b**

- ser ut til å gi *mindre* konstante volatilitetssmil (figur 6)
- resulterer i at differansen med markedsprisen (figur 7) endrer fasong og blir «bølgeformet».



Figur 7: Viser differansen mellom kalkulert opsjonspris og markedspris for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Mertons hopp modell for ulike verdier på hopp-volatiliteten, b . Black & Scholes er oppført som en referanse. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $\sigma = 30\%$, $a = -0.5b^2$, $b = \{10\% ; 12\% ; 16\%$, $\lambda = 8$

5.1.2.3 EFFEKT AV ENDRET FORVENTET LOG HOPPSTØRRELSE, a

Resultatene over tyder på at gitt at $a = -0.5b^2$, vil vi ikke kunne kalibrere MM til å gi resultater som er «bedre» enn BSM når det gjelder volatilitetssmilet. Denne konklusjonen kan tas fordi:

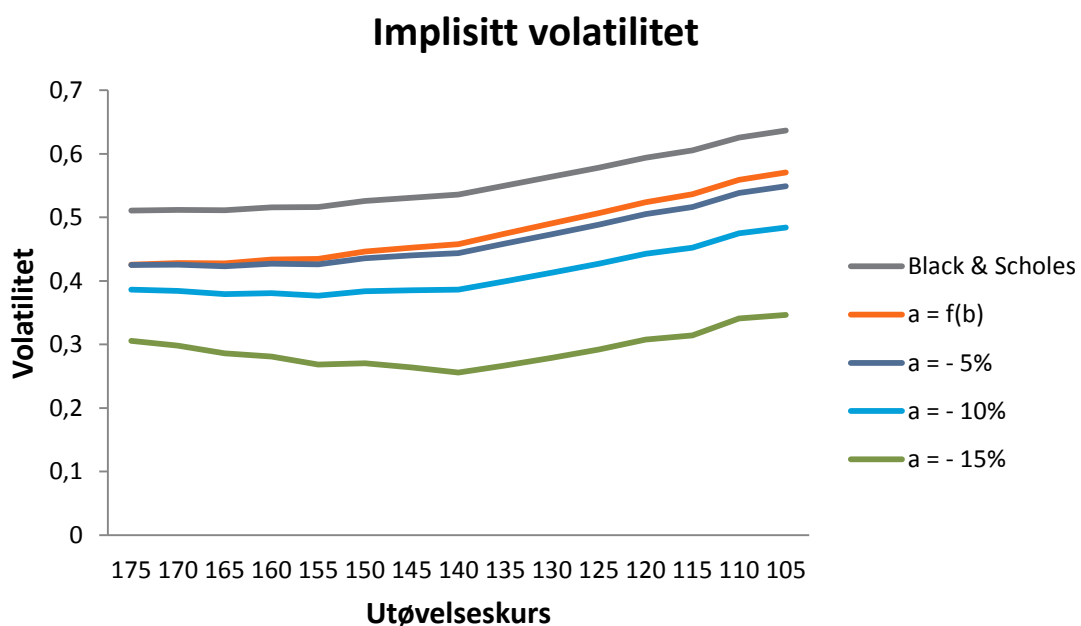
- Vi ønsker å få et volatilitetssmil som er *mer konstant* ved MM enn hva tilfellet er for BSM. Imidlertid ser vi at de implisitte volatilitetene er *mindre konstante* for økte verdier på b og λ , noe som betyr at vi ville fått et *mest mulig konstant* volatilitetssmil dersom verdien på λ hadde vært 0 slik at volatilitetssmilet hadde vært likt som for BSM.

Vi ønsker dermed å se hva som skjer om man varierer a ; hvordan innvirkning redusert a (husk at $a < 0$) har på den implisitte volatiliteten og differansen med markedsprisen, alt annet likt.

Parameterverdiene er i hovedsak gitt ved de initielle verdiene, men med :

- $\lambda = 8$
- $b = 10\%$
- $a = \{-0.5b^2; -5\%; -10\%; -15\%\}$.

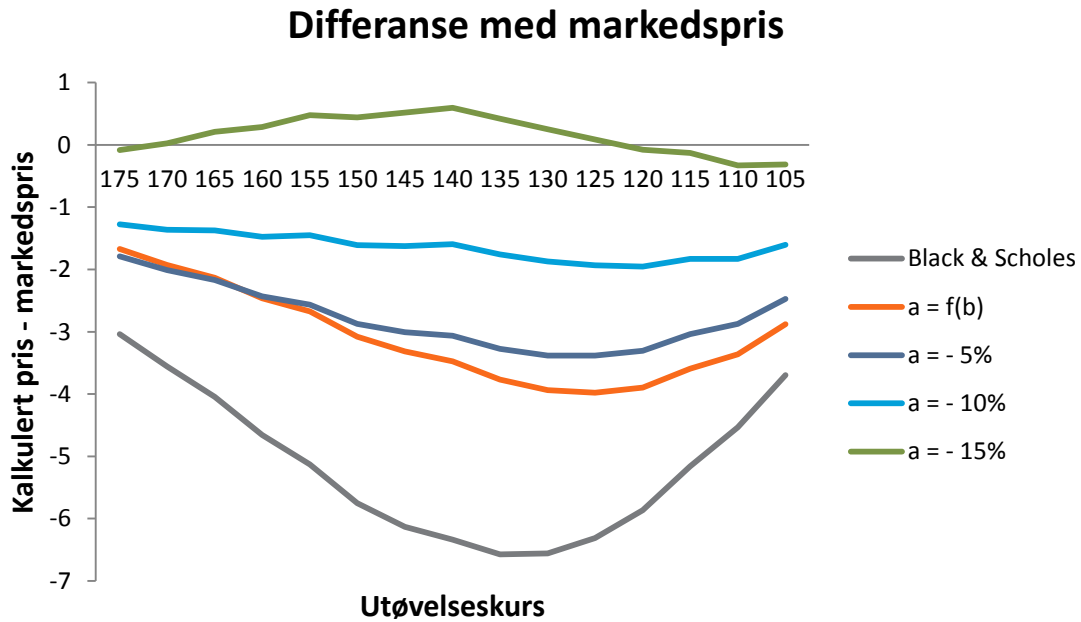
Den implisitte volatiliteten gitt ved ulike verdier på forventet log hoppstørrelse er vist i figur 8.



Figur 8: Viser implisitt volatilitet for en opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell for ulike verdier på forventet log hoppstørrelse, a . Black & Scholes er oppført som en referanse. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $a = \{-0.5b^2; -5\%, -10\%, -15\%$, $b = 10\%$, $\lambda = 8$

Vi ser at redusert a endrer volatilitetssmilet på en annen måte enn b og λ gjorde. For alle parameterene gjelder at volatilitetssmilet skifter nedover for økt absoluttverdi av parameterene, men ved å endre a ser vi imidlertid at venstre side skifter oppover, en effekt vi ikke så hos de andre parameterene.

Av figur 9 ser vi hvilken innvirkning a har på differansen mellom kalkulert pris og markedspris.



Figur 9: Viser differansen mellom kalkulert opsjonspris og markedspris for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Mertons hopp modell for ulike verdier på forventet log hoppstørrelse, a . Black & Scholes er oppført som en referanse. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$, $\sigma = 30\%$, $a = \{-0.5b^2 ; -5\% ; -10\% ; -15\%$, $b = 10\%$, $\lambda = 8$

Konklusjonen vi kan gjøre oss så langt, er at det faktisk er *mulig* å manipulere volatilitetsmilet og differansen med markedspris ved å endre på parameterene, a , b og λ i MM.

Det er imidlertid viktig å påpeke at resultatene så langt ikke gir noe bilde av hvilke modeller som best klarer å *replikere* markedspris. Vi har til nå holdt volatiliteten fast på 30%. Som vi kan se må BSM ha en høyere volatilitet for å få minimum kvadrerte avvik. Dette fordi vi av figurene ser at BSM konstant underestimerer markedspris, og ettersom vi vet at opsjonsprisen er en stigende funksjon av volatiliteten, σ .

5.1.3 SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERVERDIER

I forrige delkapittel kunne vi konkludere med at det er *mulig* å manipulere volatilitetssmilet og differansen med markedspris i MM, ved å endre på de ukjente parameterene, α , b og λ .

Målet med denne oppgaven er imidlertid å finne et ***optimalt sett med parameterverdier*** som

- viser at MM bedre er i stand til å replikere markedsprisene for ulike utøvelseskurser, enn hva tilfellet er for BSM.
- viser at MM gir et *mer konstant* volatilitetssmil enn hva tilfellet er for BSM.

For BSM vet vi at optimal verdi på volatiliteten ikke endrer volatilitetssmilet, men kun differansen med markedspris.

Gitt vårt risikonøytrale sannsynlighetsmål, fant jeg optimale verdier på parameterene b , λ , og σ , hvor jeg holdt $\alpha = -0.5b^2$.

Deretter gjorde jeg det samme, men hvor jeg inkluderte α .

5.1.3.1 RESULTATER FRA SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERVERDIER

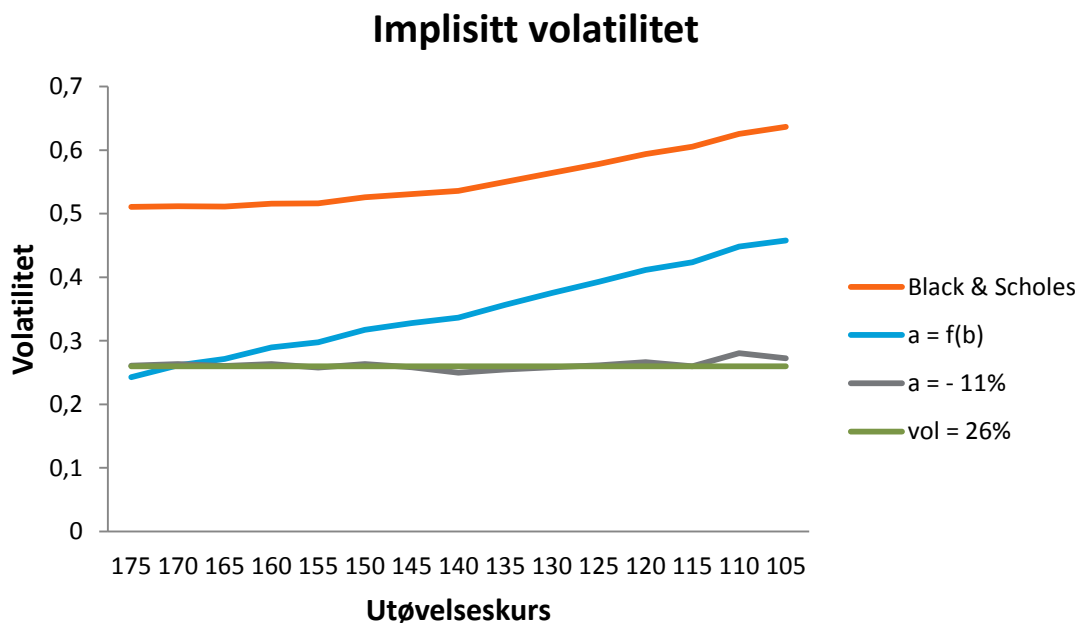
I tabell 5 presenteres resultatene av søket etter optimale parameterverdier for de tre modellene, BSM, MM_1 og MM_2 . MM_1 og MM_2 er begge Mertons hopp modell, men hvor vi har ulik antagelse om parameteren, α . I tabellen er også en oversikt over intervallene som ble brukt for hver av de ulike parameterene i søket, samt trinnstørrelsen, det vil si økningen i parameterverdi for hver nye runde i «loopen».

Tabell 5: Viser resultater av søket etter optimale parametere for hver av de tre modellene.

Black & Scholes modell			
Parameter	Intervall	Trinn	Optimal verdi
σ	{0.2 ; 0.6}	0.01	55 %
Minimum kvadrerte avvik			10.48
Merton ($a = -0.5b^2$)			
Parameter	Intervall	Trinn	Optimal verdi
σ	{0.2 ; 0.4}	0.02	34 %
λ	{0 ; 16}	1	5
b	{0.1 ; 0.25}	0.01	20 %
Minimum kvadrerte avvik			9.98
Merton (finder optimal a)			
Parameter	Intervall	Trinn	Optimal verdi
σ	{0.2 ; 0.3}	0.02	26 %
λ	{3 ; 10}	1	5
b	{0.18 ; 0.26}	0.02	22 %
a	{-0.08 ; -0.12}	0.01	-11 %
Minimum kvadrerte avvik			0.057

Vi ser av tabellen at minimum kvadrerte avvik er betraktelig mye lavere (bedre) i MM_2 , med en verdi på 0.057. Vi ser også at BSM og MM_1 får relativt like verdier på minimum kvadrerte avvik. Av disse resultatene kan følgende konklusjoner trekkes:

- MM_2 replikerer markedsprisene på en mye bedre måte enn hva BSM og MM_1 gjør.
- Det er en stor sannsynlighet for at volatilitetssmilet til MM_2 er *mer konstant*, enn for BSM og MM_1 . Dette ser vi av figur 10 at også er tilfellet.



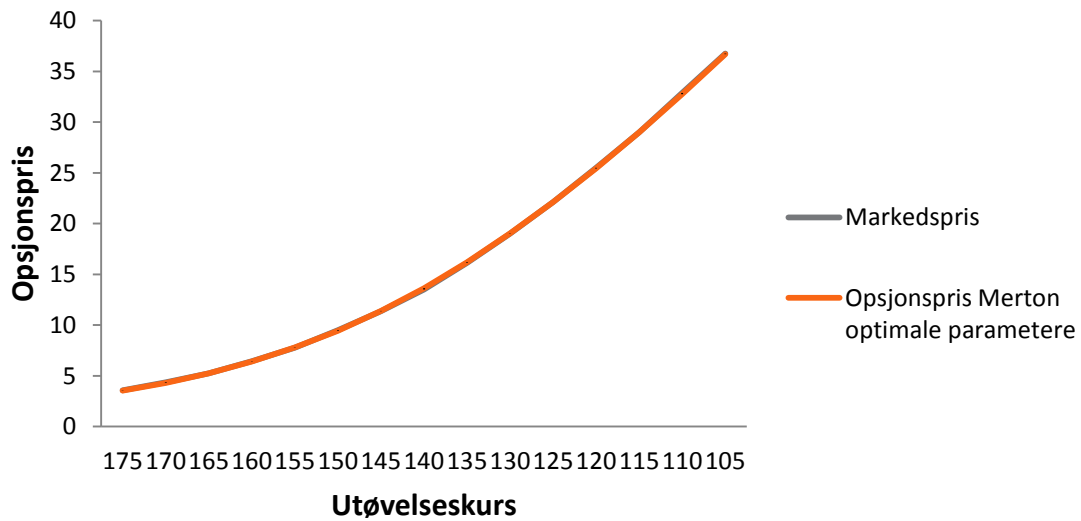
Figur 10: Viser implisitt volatilitet for optimale parametere for en opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell. Black & Scholes er oppført som en referanse. Gitte parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parametere ved MM_1 : $b = 20\%$, $\sigma = 34\%$, $\lambda = 5$, $a = f(b)$. Optimale parametere ved MM_2 : $b = 22\%$, $\sigma = 26\%$, $\lambda = 5$, $a = -11\%$. Linjen vol = 26% indikerer volatilitet på 26% som var optimalt ved MM_2

Sammenlignet med BSM og MM_1 , kan den implisitte volatiliteten til MM_2 betraktes som en rett linje, med verdi på volatiliteten tilnærmet lik 26% (som vi fant som optimal volatilitet) for alle utøvelseskurser. En rett linje med verdi 26% er tegnet som «trendlinje» over volatilitetssmilet for MM_2 , og vi ser at det jevnt over er minimale avvik fra denne linjen sett i forhold til volatilitetssmilene for MM_1 og BSM hvor den implisitte volatiliteten varierer relativt mye.

For MM_1 ser vi av tabell 5 at optimale parametere gir tilnærmet lik verdi på minimum kvadrerte avvik som BSM, men at volatilitetssmilet faktisk er relativt *mindre konstant*.

I figur 11 ser vi prisene vi får ved MM_2 når vi benytter de optimale parameterene vi fant over, sett i sammenligning med markedsprisene. Som vi ser, følger disse to grafene hverandre tilnærmet helt likt.

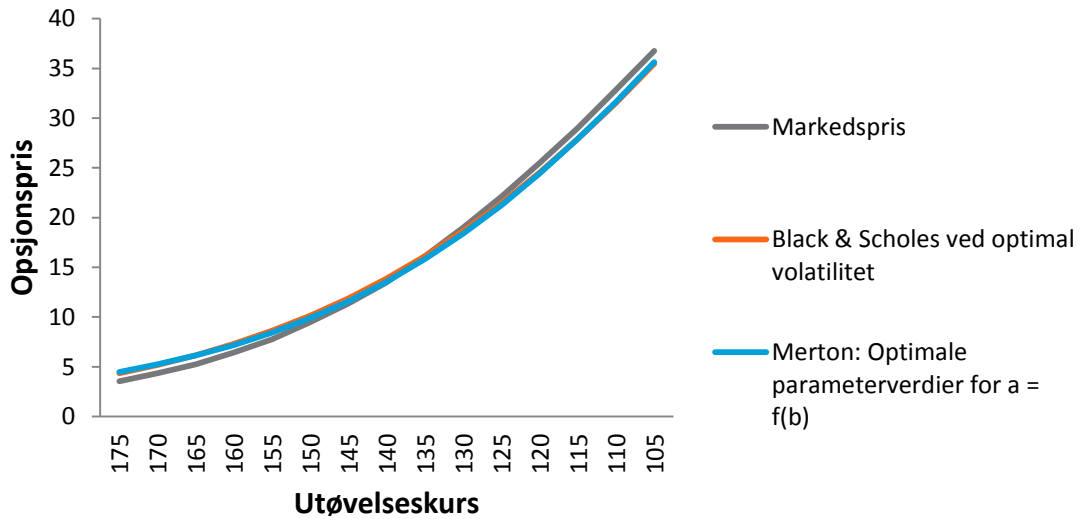
Markedspris og pris ved Mertons modell med optimale parameterverdier



Figur 11: Viser opsjonspris for optimale parametere for en opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell. Markedsprisen er oppført som en referanse. Gitte parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parametere ved MM_2 : $b = 22\%$, $\sigma = 26\%$, $\lambda = 5$, $a = -11\%$.

Figur 12 viser markedsprisen sammen med prisen som kalkuleres fra BSM og MM_1 ved optimale parameterverdier (hhv optimal σ og optimal b, λ, σ). Vi ser her at selv om forskjellen ikke er stor så feilestimerer disse modellene markedsprisen jo lenger «in-the-money» og «out-of-the-money» man kommer, relativt mye mer enn hva tilfellet er for MM_2 .

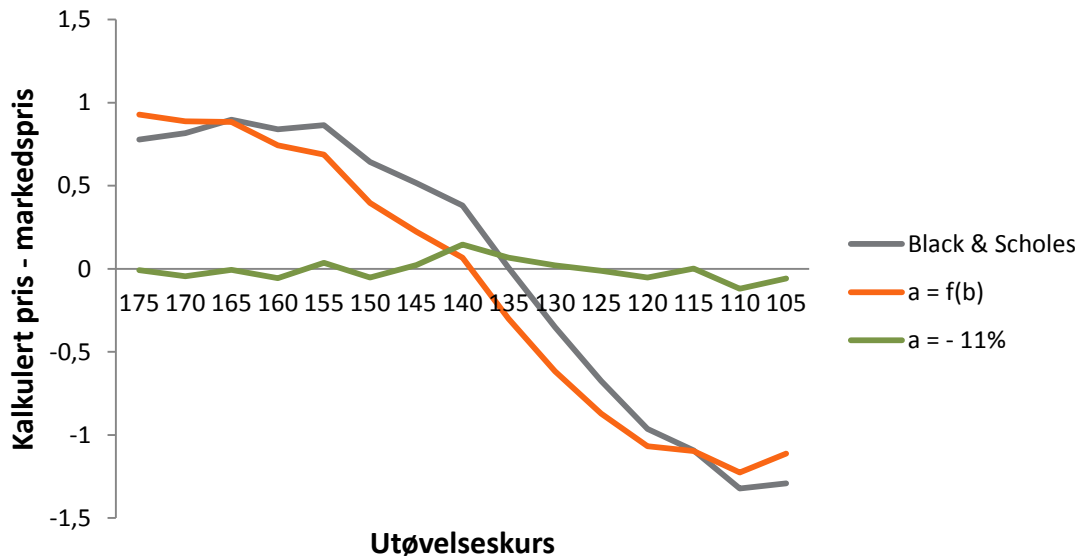
Opsjonspriser for optimale parametere av Mertons modell når $a = f(b)$, og Black & Scholes modell



Figur 12: Viser opsjonspris for optimale parametere for en opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell, og Black & Scholes modell. Markedsprisen er oppført som en referanse. Gitte parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parametere MM_1 : $b = 20\%$, $\sigma = 34\%$, $\lambda = 5$, $a = f(b)$. Optimal parameter for Black & Scholes: $\sigma = 55\%$.

Vi ser dette bedre fra figur 13 hvor vi lettere kan sammenligne differansen fra markedsprisen for ulike utøvelseskurser i de ulike modellene. Her ser vi at differansen ved MM_2 («absolutt» optimum) jevnt over er veldig liten i forhold BSM og MM_1 . Vi ser også at grafene for MM_1 og BSM er relativt like. Dette bekrefter de resultatene vi så fra tabell 5, hvor minimum kvadrerte avvik for MM_2 var på 0.057, mot rundt 10 for BSM og MM_1 .

Differanse med markedspris



Figur 13: Viser differansen mellom kalkulert opsjonspris ved optimale parametere og markedspris for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Mertons hopp modell og Black & Scholes modell. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parametere MM_1 : $b = 20\%$, $\sigma = 34\%$, $\lambda = 5$, $a = f(b)$. Optimale parametere MM_2 : $b = 22\%$, $\sigma = 26\%$, $\lambda = 5$, $a = -11\%$. Optimal parameter for Black & Scholes: $\sigma = 55\%$.

Vår konklusjon blir dermed at (under forutsetning av at a kan variere):

- Mertons modell kan kalibreres til å gi et *mer* konstant volatilitetssmil enn hva BSM gir.
- Mertons modell kan kalibreres til å gi priser som replikerer markedsprisene på en mye bedre måte enn hva BSM gir.

5.1.3.2 HAR DE OPTIMALE PARAMETERENE ROT I VIRKELIGHETEN?

Vi så at optimalt for BSM var at $\sigma = 55\%$. Dersom vi estimerer volatiliteten til avkastningen til RCL gjennom historiske data (vedlegg 8.1) får jeg en årlig volatilitet på rundt 50% noe som ikke er langt fra den optimale volatiliteten vi fant på 55%. Imidlertid ser vi at volatiliteten ved å inkludere hopp-leddet er mye lavere. Hvis jeg ser på de optimale parameterverdiene fra optimeringen av MM_2 ($a = -11\%$, $b = 22\%$, $\sigma = 26\%$ og $\lambda = 5$), ser jeg at σ er ned fra 55% til 26%.

Vi husker tidligere i oppgaven at σ ble definert som volatiliteten til aksjen gitt at det ikke skjer hopp. Parameteren b defineres som volatiliteten ved hopp, og vi har dermed delt opp volatilitetskomponenten i to:

- En som viser volatilitet når aksjen oppfører seg «vanlig».
- En som viser volatilitet når aksjen hopper.

Det kan dermed virke som et logisk resultat når vi nå får at volatiliteten til aksjekursen er tilnærmet delt mellom hoppets volatilitet og aksjens volatilitet uten hopp. Forventet hoppavkastning fant vi som $a = -11\%$ og forventet hoppintensitet $\lambda = 5$. Det er vanskelig å si noe om disse annet enn at de, etter min mening, virker rimelige; det er ikke å forvente at en aksje gjør hopp mer enn 5 ganger i året til en forventet log hoppstørrelse på -11% .

For MM_1 ser vi at $\sigma = 34\%$ og $b = 20\%$. Dette er tilsammen tilnærmet lik BSM sin optimale volatilitet på 55% , og det kan se ut som det er en sammenheng mellom de ulike modellene. Dette er imidlertid spørsmål som ikke besvares i denne oppgaven.

5.2 PUT OPSJONER

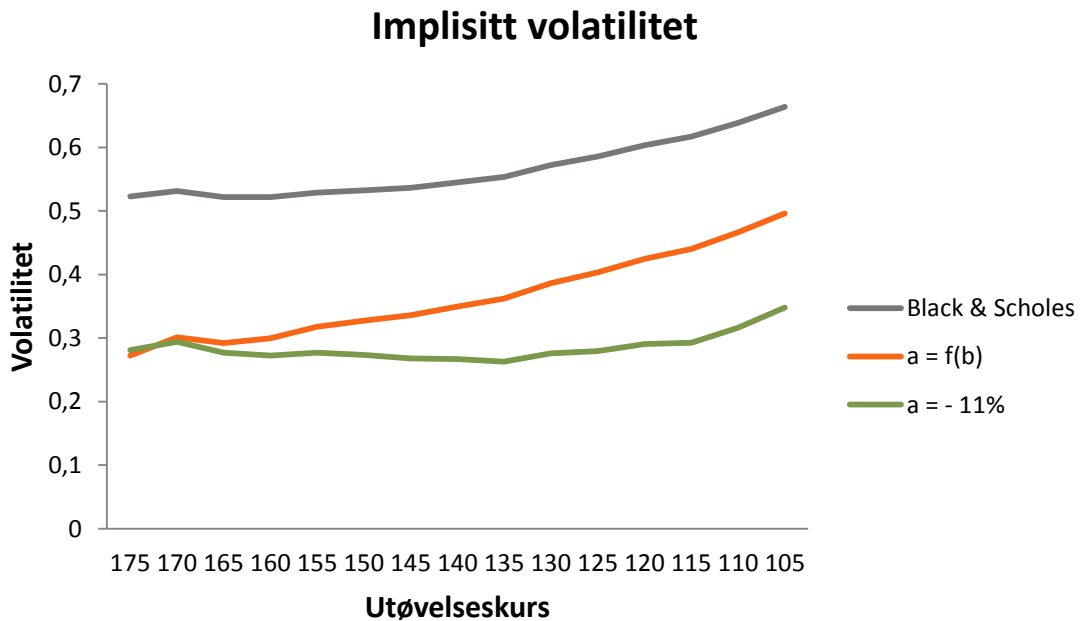
Til nå har vi bare sett på europeiske call-opsjoner. Dette er også oppgavens hovedfokus. Imidlertid vil vi i dette delkapittelet se på noen resultater også for put opsjoner.

Jfr. put-call pariteten så er den implisitte volatiliteten lik for call og put dersom opsjonene har lik utøvelseskurs, lik tid til utøvelse og dersom det ikke eksisterer transaksjonskostnader i markedet (Hull 2009). I vårt tilfelle eksisterer transaksjonskostnader, og den implisitte volatiliteten vil derfor ikke være identisk. Ettersom vi av kapittel 4 vet at det ikke eksisterer arbitrasjemuligheter gitt våre priser, er imidlertid ikke forskjellene større enn at de kan forsvare priser innenfor arbitrasjebetingelsene.

5.2.1 VOLATILITETSSMILET FOR PUT, VED Å BENYTTTE OPTIMALE PARAMETERE FOR CALL

I første omgang benytter jeg resultatene fra analysen av call-opsjoner. Dette betyr at jeg ser på hvordan volatilitetssmilet til en put-opsjon ser ut ved de optimale verdiene vi fant for call-opsjonene over, gitt ved tabell 5:

- MM_1 : $\alpha = -0.5b^2$, $b = 20\%$, $\lambda = 5$, $\sigma = 34\%$.
- MM_2 : $\alpha = -11\%$, $b = 22\%$, $\lambda = 5$, $\sigma = 26\%$.



Figur 14: Viser en put opsjons implisitt volatilitet for optimale parametere for en call opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell. Black & Scholes er oppført som en referanse. Gitte parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parametere ved MM_1 for call: $b = 20\%$, $\sigma = 34\%$, $\lambda = 5$, $a = f(b)$. Optimale parametere ved MM_2 call: $b = 22\%$, $\sigma = 26\%$, $\lambda = 5$, $a = -11\%$.

Av figur 14 ser vi at gitt call opsjonens optimale parametere så er put opsjonens implisitte volatilitet i likhet med som vi så for call, mye mer *konstant* ved prising med MM_2 .

5.2.2 SØK ETTER OPTIMALE PARAMETERVERDIER

I tabell 6 viser jeg en oversikt over resultater gjort ved optimalisering av parameterene til en put opsjon (i resten av dette kapitlet ser vi kun på BSM og MM_2) der jeg antar at forventet log hoppstørrelse α , er gitt lik -11% ⁷ som vi fant som optimalt for call.

⁷ Denne antagelsen sparer meg for mye simuleringstid, og har ikke betydning for selve sluttkonklusjonen.

Tabell 6: Viser resultater av søket etter optimale parametere for en put opsjon for Black & Scholes og Mertons modell ved å anta at $a = -11\%$

Black & Scholes modell			
Parameter	Intervall	Trinn	Optimal verdi
σ	{0.4 ; 0.6}	0.01	56 %
Minimum av kvadrerte avvik			11.53
Merton, MM_2 (gitt $a = -11\%$)			
Parameter	Intervall	Trinn	Optimal verdi
σ	{0.2 ; 0.3}	0.02	22 %
λ	{3 ; 10}	1	5
b	{0.18 ; 0.26}	0.02	24 %
a	{-0.08 ; -0.12}	0.01	-11 %
Minimum av kvadrerte avvik			0.25

En sammenligning av resultater mellom call og put er som følger (call resultater i parentes):

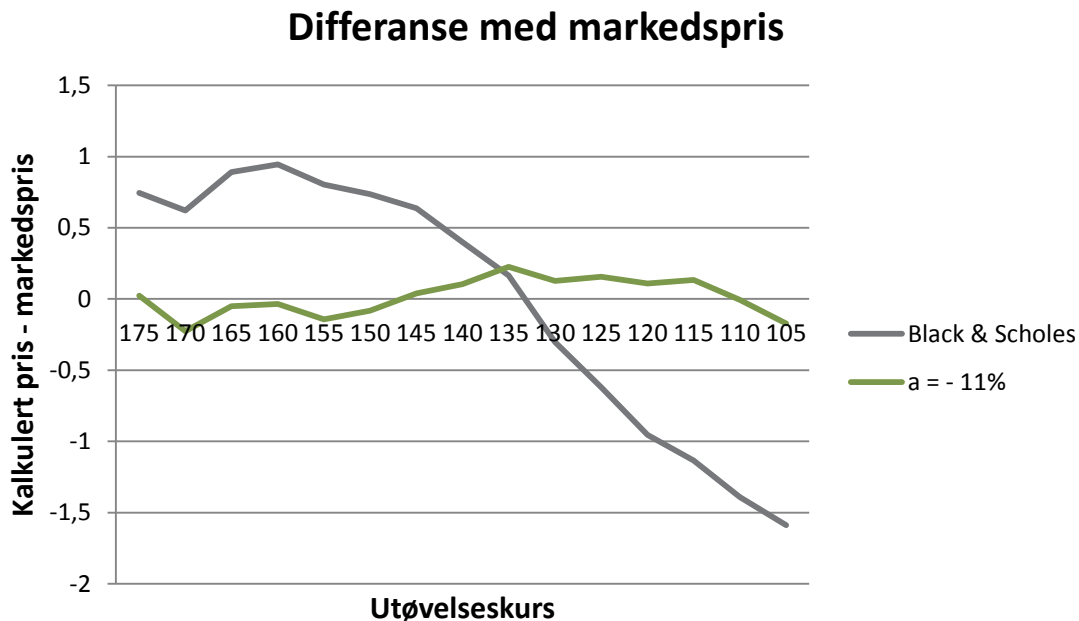
BSM:

- $\sigma = 56\%$ (55%)
- Minimum kvadrerte avvik = 11.53 (10.48)

MM_2 :

- $\sigma = 22\%$ (26%)
- $a = -11\%$ gitt som konstant (-11%)
- $b = 24\%$ (22%)
- $\lambda = 5$ (5)
- Minimum kvadrerte avvik = 0.25 (0.057)

Vi kan med andre ord se at optimale parameterverdier er veldig like for call og put, og at i likhet med for call-opsjoner, så er minimum kvadrerte avvik veldig mye mindre for MM₂ enn for BSM også for put-opsjoner. Dette vises grafisk i figur 15, hvor vi igjen ser på differansene mellom modellprisene (hhv. MM₂ og BSM) og markedsprisene, denne gangen for optimale put parametre⁸.

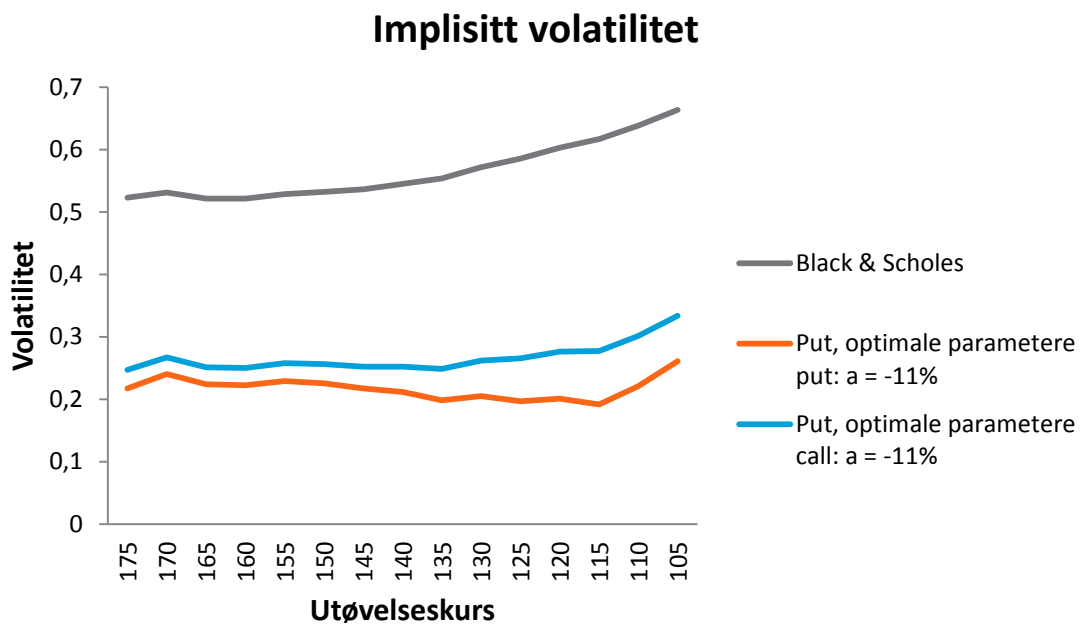


Figur 15: Viser differansen mellom kalkulert opsjonspris for putopsjon og markedspris for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Mertons hopp modell ved optimale parametre når vi antar den forventede hoppavkastningen er lik optimal verdi ved call, $a = -11\%$. Differansen mellom Black & Scholes modell og markedspris, er funnet ved optimal volatilitet for put opsjon. Parametre: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parametre ved $a = -11\%$: $b = 24\%$, $\sigma = 22\%$, $\lambda = 5$, Optimal parameter for Black & Scholes: $\sigma = 56\%$.

Vi ser som ved call at MM₂ replikerer markedsprisene mye bedre enn hva BSM gjør også for putopsjoner ved at grafen for differansen er mye jevnere rundt 0 for MM₂ enn hva tilfellet er for BSM. Figur 16 viser volatilitetssmilet ved optimale parametre for put når vi antar at den forventede hopp-avkastningen $a = -11\%$, sammen med volatilitetssmilet for put med optimale parametre som vi fant for call, hvor begge modellene er gitt ved MM₂. Vi ser av

⁸ Vi kan egentlig ikke kalle disse parameterverdiene for optimale parameterverdier ettersom vi har antatt $a = -11\%$ noe som ikke trenger å være tilfellet for put opsjonen.

figuren at det er vanskelig å si noe om hvilken av volatilitetssmilene som er mest horisontal. En av forklaringene til dette kan være at optimal a , ikke er -11% for put, men noe marginalt forskjellig slik at den optimale grafen er noe midt i mellom de vi ser av figuren 16. Ettersom verken optimal volatilitet til aksjen uten hopp, σ , eller volatiliteten til hoppet, b , er like for put og call, er det også rimelig å anta at heller ikke a er lik.

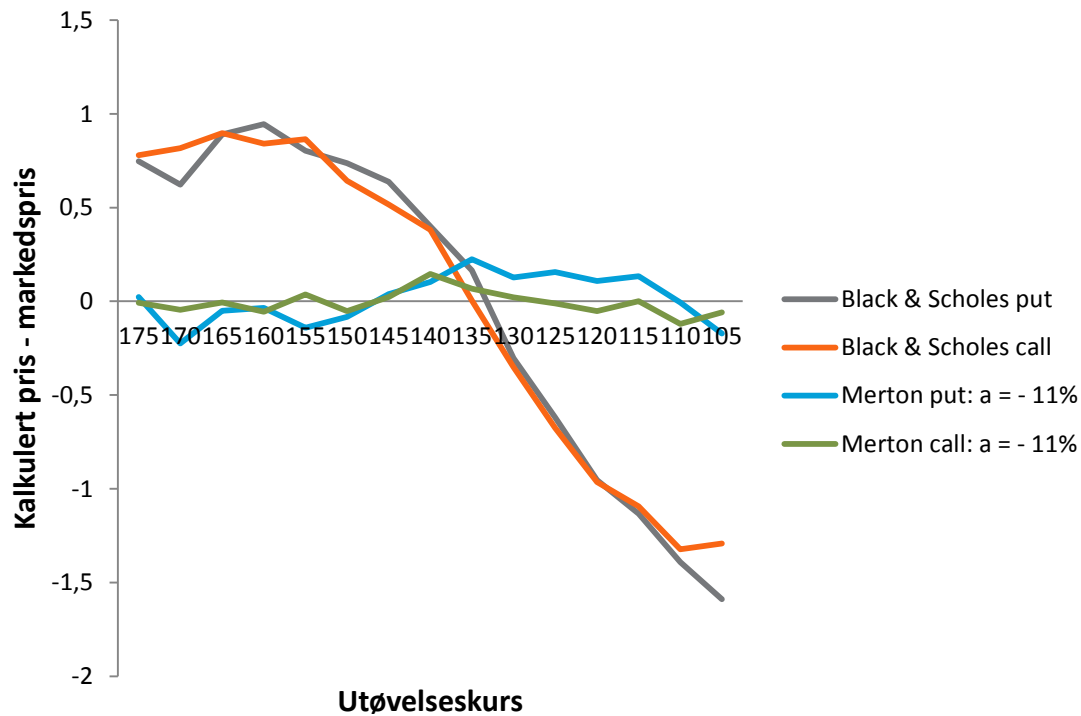


Figur 16: Viser implisitt volatilitet for en put opsjon skrevet på RCL ved Mertons hopp modell for to ulike datasett på optimale parametere. Black & Scholes er oppført som en referanse. Gitte parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parameter ved MM_2 for put med optimale parameterverdier for call: $b = 22\%$, $\sigma = 26\%$, $\lambda = 5$, $a = -11\%$. Optimale parametere ved MM_2 for put med optimale parameterverdier fra put ($a = -11\%$): $b = 24\%$, $\sigma = 22\%$, $\lambda = 5$, $a = -11\%$.

5.2.3 SAMMENLIGNING AV RESULTATENE FOR CALL OG PUT

Vi ser av figur 17 at differansen i optimum for call og put er veldig like. Figuren viser forskjellene i differansen mellom kalkulerte priser og markedspriser for call og put opsjoner ved å benytte MM_2 og BSM.

Differanse med markedspris for call -og put-opsjon



Figur 17: Viser forskjeller mellom call og put i differansen mellom kalkulert opsjonspris og markedspris for en opsjon skrevet på RCL ved å benytte Mertons hopp modell og Black & Scholes modell ved optimale parametere når vi antar at optimal forventet log hoppstørrelse for put er lik optimal parameterverdi ved call, $a = -11\%$. Parametere: $S_0 = 137,35$, $r^c = 1,93\%$. Optimale parametere ved Mertons modell for $a = -11\%$: PUT: $b = 24\%$, $\sigma = 22\%$, $\lambda = 5$. CALL: $b = 22\%$, $\sigma = 26\%$, $\lambda = 5$. Optimal parameter for Black & Scholes: PUT: $\sigma = 56\%$. CALL: $\sigma = 55\%$.

Resultatene for call og put ser ut til å være godt korrelerte, noe som jfr. put-call pariteten også må være tilfellet.

Ut fra resultatene av tabell 5 og 6, virker det ikke som det finnes et sett optimale parametere som er *helt like* for begge typen opsjoner (call og put), men at avvikene er veldig små (kan skyldes transaksjonskostnader).

6 KONKLUSJON

Formålet med denne oppgaven var å teste hypotesen om at Mertons modell er i stand til å

- gi et *mer konstant* volatilitetssmil enn Black & Scholes.
- replikere markedsprisene til en opsjon på en bedre måte enn Black & Scholes.

Jeg har i hovedsak sett på en europeisk call-opsjon hvor underliggende aktiva er aksjer i selskapet RCL (Royal Caribbean Cruises) som handles på Oslo Børs.

Konklusjonen jeg gjør meg ut fra denne oppgaven er todelt. Ved å finne optimale parametere til Mertons modell, har vi sett at volatilitetssmilet avhenger av om man benytter et risikonøytralt sannsynlighetsmål ved å sette $\alpha = -0.5b^2$ (MM₁), eller om man løsner på denne betingelsen (MM₂).

Sammenlignet med resultatene fra Black & Scholes så vi at:

Ved å finne optimale parameterverdier for MM₂, klarer MM₂ å kalibrere modellen slik at

- den implisitte volatiliteten er *mer* konstant enn hva tilfellet er for Black & Scholes.
- prisene som kalkuleres fra modellen er mer lik markedsprisene for alle utøvelseskursen enn det Black & Scholes er.

Vår hypotese er dermed sann for MM₂.

Ved å finne optimale parameterverdier for MM₁, så vi imidlertid at

- volatilitetssmilet ble *mindre* konstant ved MM₁ enn ved Black & Scholes
- modellene replikerte markedspris tilnærmet likt.

Vår hypotese er dermed usann for MM₁.

Resultatene fra denne oppgaven antyder at vi, gitt MM₂, kan forklare hvilke parametere markedet bruker til prising av opsjoner på RCL. Dette fordi man kan finne et sett med parameterverdier som gjør at modellen replikerer markedets opsjonspriser tilnærmet perfekt, og også gir implisitte volatiliteter som er tilnærmet uavhengig av utøvelseskurs. Av vår definisjon kan vi dermed si at MM₂ er en tilnærmet *fullstendig* modell.

7 REFERANSER

7.1 ARTIKLER/TIDSSKRIFT

Black, Fischer; Myron Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities",
Journal of Political Economy 81 (3), 637–654.

Robert C. Merton (1976): "Option pricing when the underlying stock returns are
discontinuous", *Journal of Financial Economics* 3, 125-144

7.2 BØKER

Robert L. McDonald (2006): *Derivatives Markets, 2.utgave*, Pearson Education Inc., New
Jersey, s. 69, 639, 661.

Paul Glasserman (2003): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer Science +
Business Media, Inc., s. 137.

Rama Cont, Peter Tankov (2004): *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman and
Hall/CRC, s. 275.

Paul Newbold, William L. Carlson, Betty Thorne (2003): *Statistics for Business and Economics*,
5. utgave, Pearson Education Inc., New Jersey, s. 41.

John C. Hull (2009): *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Education Inc., New
Jersey, s. 79, 269-271, 296, 373-374, 389-391.

7.3 INTERNETT

Nordnet:

<http://www.nordnet.no>

<https://www.nordnet.no/mux/web/nordnet/ALLcourtage.html> *(priser gjelder VIP 100+)

Norges Bank:

[http://www.norges-bank.no/no/prisstabilitet/rentestatistikk/statskasseveksler-
rente-daglige-noteringer/](http://www.norges-bank.no/no/prisstabilitet/rentestatistikk/statskasseveksler-
rente-daglige-noteringer/)

Oslo Børs:

[http://www.oslobors.no/markedsaktivitet/stockData?newt__ticker=RCL&newt__me
nuCtx=1.1.18](http://www.oslobors.no/markedsaktivitet/stockData?newt__ticker=RCL&newt__me
nuCtx=1.1.18)

8 VEDLEGG

8.1 RCL HISTORISKE DATA

Antall data		503		RCL				
		Snittavkastning						
		Daglig	Årlig (365)	Vol	252 vol	365 vol		
		0,031 %	11,89 %	2,6 %	40,8 %	49,1 %		
Dato	Sluttkurs	Avkastning	Dato	Sluttkurs	Avkastning	Dato	Sluttkurs	Avkastning
21.09.2009	141		10.12.2009	143,9	1,3 %	08.03.2010	177,8	2,8 %
22.09.2009	143,3	1,6 %	11.12.2009	144,8	0,6 %	09.03.2010	176,5	-0,7 %
23.09.2009	142,3	-0,7 %	14.12.2009	148,2	2,3 %	10.03.2010	178,5	1,1 %
24.09.2009	140,7	-1,1 %	15.12.2009	151,8	2,4 %	11.03.2010	179,4	0,5 %
25.09.2009	137,1	-2,6 %	16.12.2009	156,3	3,0 %	12.03.2010	179,2	-0,1 %
28.09.2009	140	2,1 %	17.12.2009	155,6	-0,4 %	15.03.2010	178	-0,7 %
29.09.2009	141,5	1,1 %	18.12.2009	146,5	-5,8 %	16.03.2010	180,7	1,5 %
30.09.2009	139,2	-1,6 %	21.12.2009	151,2	3,2 %	17.03.2010	183,7	1,7 %
01.10.2009	136,4	-2,0 %	22.12.2009	153,3	1,4 %	18.03.2010	183,7	0,0 %
02.10.2009	132,9	-2,6 %	23.12.2009	154,4	0,7 %	19.03.2010	183,7	0,0 %
05.10.2009	133,3	0,3 %	28.12.2009	154,1	-0,2 %	22.03.2010	185	0,7 %
06.10.2009	136,9	2,7 %	29.12.2009	152,4	-1,1 %	23.03.2010	194,7	5,2 %
07.10.2009	136,6	-0,2 %	30.12.2009	147,4	-3,3 %	24.03.2010	198,4	1,9 %
08.10.2009	139,2	1,9 %	04.01.2010	149,1	1,2 %	25.03.2010	203,8	2,7 %
09.10.2009	135,2	-2,9 %	05.01.2010	149,4	0,2 %	26.03.2010	200,2	-1,8 %
12.10.2009	133,6	-1,2 %	06.01.2010	145,1	-2,9 %	29.03.2010	197,2	-1,5 %
13.10.2009	129	-3,4 %	07.01.2010	145,8	0,5 %	30.03.2010	200,1	1,5 %
14.10.2009	131,9	2,2 %	08.01.2010	146,5	0,5 %	31.03.2010	198,9	-0,6 %
15.10.2009	131,3	-0,5 %	11.01.2010	145,9	-0,4 %	06.04.2010	206,5	3,8 %
16.10.2009	129,6	-1,3 %	12.01.2010	145	-0,6 %	07.04.2010	199,5	-3,4 %
19.10.2009	132,5	2,2 %	13.01.2010	147	1,4 %	08.04.2010	198,3	-0,6 %
20.10.2009	131,9	-0,5 %	14.01.2010	152,2	3,5 %	09.04.2010	197,2	-0,6 %
21.10.2009	128,5	-2,6 %	15.01.2010	153,3	0,7 %	12.04.2010	200,9	1,9 %
22.10.2009	124	-3,5 %	18.01.2010	153,6	0,2 %	13.04.2010	199,8	-0,5 %
23.10.2009	124,6	0,5 %	19.01.2010	155,8	1,4 %	14.04.2010	203,1	1,7 %
26.10.2009	119,6	-4,0 %	20.01.2010	153	-1,8 %	15.04.2010	206,4	1,6 %
27.10.2009	121,1	1,3 %	21.01.2010	155,1	1,4 %	16.04.2010	205,6	-0,4 %
28.10.2009	115,2	-4,9 %	22.01.2010	147,5	-4,9 %	19.04.2010	201,2	-2,1 %
29.10.2009	121,5	5,5 %	25.01.2010	147,1	-0,3 %	20.04.2010	201,4	0,1 %
30.10.2009	117,2	-3,5 %	26.01.2010	148,5	1,0 %	21.04.2010	202,9	0,7 %
02.11.2009	119,7	2,1 %	27.01.2010	146,5	-1,3 %	22.04.2010	203	0,0 %
03.11.2009	113,2	-5,4 %	28.01.2010	152,7	4,2 %	23.04.2010	210,5	3,7 %
04.11.2009	116,6	3,0 %	29.01.2010	157,4	3,1 %	26.04.2010	219,6	4,3 %
05.11.2009	121	3,8 %	01.02.2010	154,3	-2,0 %	27.04.2010	217,9	-0,8 %
06.11.2009	121,5	0,4 %	02.02.2010	160,4	4,0 %	28.04.2010	209,6	-3,8 %
09.11.2009	125,9	3,6 %	03.02.2010	160	-0,2 %	29.04.2010	213	1,6 %
10.11.2009	124,5	-1,1 %	04.02.2010	154,4	-3,5 %	30.04.2010	217,5	2,1 %
11.11.2009	128,1	2,9 %	05.02.2010	149,4	-3,2 %	03.05.2010	215,5	-0,9 %
12.11.2009	128,3	0,2 %	08.02.2010	150,5	0,7 %	04.05.2010	206,6	-4,1 %
13.11.2009	132	2,9 %	09.02.2010	150,2	-0,2 %	05.05.2010	203,6	-1,5 %
16.11.2009	134,5	1,9 %	10.02.2010	147,7	-1,7 %	06.05.2010	196,5	-3,5 %
17.11.2009	131,9	-1,9 %	11.02.2010	151,1	2,3 %	07.05.2010	186,3	-5,2 %
18.11.2009	132	0,1 %	12.02.2010	150,5	-0,4 %	10.05.2010	200	7,4 %
19.11.2009	129,7	-1,7 %	15.02.2010	148,3	-1,5 %	11.05.2010	198,3	-0,8 %
20.11.2009	131,5	1,4 %	16.02.2010	151,7	2,3 %	12.05.2010	201,4	1,6 %
23.11.2009	134,5	2,3 %	17.02.2010	152,7	0,7 %	14.05.2010	191,8	-4,8 %
24.11.2009	134,7	0,1 %	18.02.2010	151,9	-0,5 %	18.05.2010	197,6	3,0 %
25.11.2009	138,8	3,0 %	19.02.2010	155,9	2,6 %	19.05.2010	191	-3,3 %
26.11.2009	134,3	-3,2 %	22.02.2010	157	0,7 %	20.05.2010	186,4	-2,4 %
27.11.2009	136,8	1,9 %	23.02.2010	151,8	-3,3 %	21.05.2010	183,9	-1,3 %
30.11.2009	136,6	-0,1 %	24.02.2010	160,5	5,7 %	25.05.2010	176,6	-4,0 %
01.12.2009	139,5	2,1 %	25.02.2010	162,2	1,1 %	26.05.2010	186	5,3 %
02.12.2009	139,7	0,1 %	26.02.2010	164,5	1,4 %	27.05.2010	189,7	2,0 %
03.12.2009	142	1,6 %	01.03.2010	168,6	2,5 %	28.05.2010	189,7	0,0 %
04.12.2009	144	1,4 %	02.03.2010	171,1	1,5 %	31.05.2010	192,7	1,6 %
07.12.2009	147	2,1 %	03.03.2010	168,6	-1,5 %	01.06.2010	190,5	-1,1 %
08.12.2009	144,6	-1,6 %	04.03.2010	169,3	0,4 %	02.06.2010	191	0,3 %
09.12.2009	142	-1,8 %	05.03.2010	173	2,2 %	03.06.2010	196,6	2,9 %

04.06.2010	189,8	-3,5 %	14.09.2010	182,3	-0,5 %	23.12.2010	277	-1,6 %
07.06.2010	184,2	-3,0 %	15.09.2010	178,3	-2,2 %	27.12.2010	274,4	-0,9 %
08.06.2010	176,9	-4,0 %	16.09.2010	179,5	0,7 %	28.12.2010	277,8	1,2 %
09.06.2010	184	4,0 %	17.09.2010	185,7	3,5 %	29.12.2010	277,7	0,0 %
10.06.2010	182,3	-0,9 %	20.09.2010	190,5	2,6 %	30.12.2010	276,3	-0,5 %
11.06.2010	182,7	0,2 %	21.09.2010	193,4	1,5 %	03.01.2011	276,5	0,1 %
14.06.2010	191,8	5,0 %	22.09.2010	183,5	-5,1 %	04.01.2011	281	1,6 %
15.06.2010	191,7	-0,1 %	23.09.2010	181,5	-1,1 %	05.01.2011	288,6	2,7 %
16.06.2010	193,8	1,1 %	24.09.2010	188,1	3,6 %	06.01.2011	284,5	-1,4 %
17.06.2010	190,5	-1,7 %	27.09.2010	187	-0,6 %	07.01.2011	284,8	0,1 %
18.06.2010	191,8	0,7 %	28.09.2010	182,5	-2,4 %	10.01.2011	283,2	-0,6 %
21.06.2010	191,3	-0,3 %	29.09.2010	187	2,5 %	11.01.2011	288,1	1,7 %
22.06.2010	186	-2,8 %	30.09.2010	185	-1,1 %	12.01.2011	285,9	-0,8 %
23.06.2010	178,5	-4,0 %	01.10.2010	184,6	-0,2 %	13.01.2011	282,9	-1,0 %
24.06.2010	172	-3,6 %	04.10.2010	183,4	-0,7 %	14.01.2011	286	1,1 %
25.06.2010	167,2	-2,8 %	05.10.2010	187,7	2,3 %	17.01.2011	288,4	0,8 %
28.06.2010	166,2	-0,6 %	06.10.2010	190,9	1,7 %	18.01.2011	289,4	0,3 %
29.06.2010	150,4	-9,5 %	07.10.2010	189,7	-0,6 %	19.01.2011	287	-0,8 %
30.06.2010	151,3	0,6 %	08.10.2010	195	2,8 %	20.01.2011	277,4	-3,3 %
01.07.2010	146	-3,5 %	11.10.2010	197	1,0 %	21.01.2011	282,5	1,8 %
02.07.2010	148,4	1,6 %	12.10.2010	199	1,0 %	24.01.2011	273,6	-3,2 %
05.07.2010	147,5	-0,6 %	13.10.2010	201	1,0 %	25.01.2011	269,3	-1,6 %
06.07.2010	149,8	1,6 %	14.10.2010	197,8	-1,6 %	26.01.2011	281,5	4,5 %
07.07.2010	151,8	1,3 %	15.10.2010	200,5	1,4 %	27.01.2011	266	-5,5 %
08.07.2010	155,7	2,6 %	18.10.2010	202,5	1,0 %	28.01.2011	269,6	1,4 %
09.07.2010	155,8	0,1 %	19.10.2010	198	-2,2 %	31.01.2011	263	-2,4 %
12.07.2010	153,9	-1,2 %	20.10.2010	199,2	0,6 %	01.02.2011	260,2	-1,1 %
13.07.2010	156,3	1,6 %	21.10.2010	201,9	1,4 %	02.02.2011	255,5	-1,8 %
14.07.2010	155,2	-0,7 %	22.10.2010	201	-0,4 %	03.02.2011	259	1,4 %
15.07.2010	153	-1,4 %	25.10.2010	207,5	3,2 %	04.02.2011	259,4	0,2 %
16.07.2010	148,6	-2,9 %	26.10.2010	234,2	12,9 %	07.02.2011	269,5	3,9 %
19.07.2010	146,5	-1,4 %	27.10.2010	232,1	-0,9 %	08.02.2011	265,3	-1,6 %
20.07.2010	148,6	1,4 %	28.10.2010	234	0,8 %	09.02.2011	268,1	1,1 %
21.07.2010	156,3	5,2 %	29.10.2010	234,4	0,2 %	10.02.2011	271,8	1,4 %
22.07.2010	164,6	5,3 %	01.11.2010	229,7	-2,0 %	11.02.2011	277,6	2,1 %
23.07.2010	170,8	3,8 %	02.11.2010	230	0,1 %	14.02.2011	275,5	-0,8 %
26.07.2010	178,6	4,6 %	03.11.2010	234	1,7 %	15.02.2011	276,4	0,3 %
27.07.2010	176	-1,5 %	04.11.2010	242	3,4 %	16.02.2011	276,7	0,1 %
28.07.2010	175,6	-0,2 %	05.11.2010	245	1,2 %	17.02.2011	269,5	-2,6 %
29.07.2010	175,8	0,1 %	08.11.2010	247,9	1,2 %	18.02.2011	267,8	-0,6 %
30.07.2010	174,8	-0,6 %	09.11.2010	249	0,4 %	21.02.2011	257,5	-3,8 %
02.08.2010	178,5	2,1 %	10.11.2010	244,1	-2,0 %	22.02.2011	252,7	-1,9 %
03.08.2010	173,7	-2,7 %	11.11.2010	248	1,6 %	23.02.2011	240	-5,0 %
04.08.2010	175,8	1,2 %	12.11.2010	247,7	-0,1 %	24.02.2011	240,2	0,1 %
05.08.2010	176,9	0,6 %	15.11.2010	247,6	0,0 %	25.02.2011	251,6	4,7 %
06.08.2010	174,9	-1,1 %	16.11.2010	243	-1,9 %	28.02.2011	245,4	-2,5 %
09.08.2010	173,2	-1,0 %	17.11.2010	250,6	3,1 %	01.03.2011	234,5	-4,4 %
10.08.2010	166,8	-3,7 %	18.11.2010	255	1,8 %	02.03.2011	230,5	-1,7 %
11.08.2010	163,4	-2,0 %	19.11.2010	252,6	-0,9 %	03.03.2011	240,3	4,3 %
12.08.2010	162,6	-0,5 %	22.11.2010	251,8	-0,3 %	04.03.2011	235,6	-2,0 %
13.08.2010	160,1	-1,5 %	23.11.2010	246	-2,3 %	07.03.2011	232,4	-1,4 %
16.08.2010	159,1	-0,6 %	24.11.2010	254,6	3,5 %	08.03.2011	244,5	5,2 %
17.08.2010	167	5,0 %	25.11.2010	257	0,9 %	09.03.2011	245,7	0,5 %
18.08.2010	167,5	0,3 %	26.11.2010	255,2	-0,7 %	10.03.2011	249,6	1,6 %
19.08.2010	161,2	-3,8 %	29.11.2010	250,5	-1,8 %	11.03.2011	243	-2,6 %
20.08.2010	158,5	-1,7 %	30.11.2010	248,4	-0,8 %	14.03.2011	240	-1,2 %
23.08.2010	157,6	-0,6 %	01.12.2010	254,4	2,4 %	15.03.2011	236	-1,7 %
24.08.2010	150,5	-4,5 %	02.12.2010	257,7	1,3 %	16.03.2011	233	-1,3 %
25.08.2010	151,5	0,7 %	03.12.2010	252,5	-2,0 %	17.03.2011	237,5	1,9 %
26.08.2010	154,6	2,0 %	06.12.2010	254,6	0,8 %	18.03.2011	236	-0,6 %
27.08.2010	156,1	1,0 %	07.12.2010	257	0,9 %	21.03.2011	239,2	1,4 %
30.08.2010	157	0,6 %	08.12.2010	260,1	1,2 %	22.03.2011	233,9	-2,2 %
31.08.2010	154,3	-1,7 %	09.12.2010	264,8	1,8 %	23.03.2011	230	-1,7 %
01.09.2010	162,5	5,3 %	10.12.2010	261	-1,4 %	24.03.2011	233,9	1,7 %
02.09.2010	166,8	2,6 %	13.12.2010	252,2	-3,4 %	25.03.2011	233,3	-0,3 %
03.09.2010	172,9	3,7 %	14.12.2010	244	-3,3 %	28.03.2011	229,4	-1,7 %
06.09.2010	173,5	0,3 %	15.12.2010	245,4	0,6 %	29.03.2011	229	-0,2 %
07.09.2010	169	-2,6 %	16.12.2010	244,8	-0,2 %	30.03.2011	233,8	2,1 %
08.09.2010	168	-0,6 %	17.12.2010	251,9	2,9 %	31.03.2011	228,9	-2,1 %
09.09.2010	180	7,1 %	20.12.2010	253,7	0,7 %	01.04.2011	228	-0,4 %
10.09.2010	180,2	0,1 %	21.12.2010	274,4	8,2 %	04.04.2011	224,4	-1,6 %
13.09.2010	183,2	1,7 %	22.12.2010	281,4	2,6 %	05.04.2011	222,8	-0,7 %

06.04.2011	221,7	-0,5 %	12.07.2011	197,5	-1,3 %
07.04.2011	220,6	-0,5 %	13.07.2011	200,2	1,4 %
08.04.2011	210,8	-4,4 %	14.07.2011	194,8	-2,7 %
11.04.2011	213,5	1,3 %	15.07.2011	192,9	-1,0 %
12.04.2011	222	4,0 %	18.07.2011	190,3	-1,3 %
13.04.2011	215,3	-3,0 %	19.07.2011	195,7	2,8 %
14.04.2011	208,7	-3,1 %	20.07.2011	195,4	-0,2 %
15.04.2011	203,3	-2,6 %	21.07.2011	198	1,3 %
18.04.2011	203,3	0,0 %	22.07.2011	197,7	-0,2 %
19.04.2011	204,2	0,4 %	25.07.2011	195,9	-0,9 %
20.04.2011	207	1,4 %	26.07.2011	199,2	1,7 %
26.04.2011	206	-0,5 %	27.07.2011	193,1	-3,1 %
27.04.2011	211,4	2,6 %	28.07.2011	174,5	-9,6 %
28.04.2011	211,9	0,2 %	29.07.2011	167,2	-4,2 %
29.04.2011	208,1	-1,8 %	01.08.2011	161,9	-3,2 %
02.05.2011	206,9	-0,6 %	02.08.2011	159,5	-1,5 %
03.05.2011	208,6	0,8 %	03.08.2011	152	-4,7 %
04.05.2011	207,8	-0,4 %	04.08.2011	146,4	-3,7 %
05.05.2011	220	5,9 %	05.08.2011	146,5	0,1 %
06.05.2011	225,5	2,5 %	08.08.2011	134,6	-8,1 %
09.05.2011	220,5	-2,2 %	09.08.2011	135,5	0,7 %
10.05.2011	220,2	-0,1 %	10.08.2011	132,8	-2,0 %
11.05.2011	220,6	0,2 %	11.08.2011	134,6	1,4 %
12.05.2011	224,2	1,6 %	12.08.2011	141,4	5,1 %
13.05.2011	226,2	0,9 %	15.08.2011	142,2	0,6 %
16.05.2011	226,9	0,3 %	16.08.2011	140,4	-1,3 %
18.05.2011	224,6	-1,0 %	17.08.2011	136,5	-2,8 %
19.05.2011	224,4	-0,1 %	18.08.2011	127,3	-6,7 %
20.05.2011	219,5	-2,2 %	19.08.2011	125,5	-1,4 %
23.05.2011	217,4	-1,0 %	22.08.2011	123,9	-1,3 %
24.05.2011	212,5	-2,3 %	23.08.2011	122,5	-1,1 %
25.05.2011	211,5	-0,5 %	24.08.2011	127,4	4,0 %
26.05.2011	206,7	-2,3 %	25.08.2011	123	-3,5 %
27.05.2011	207	0,1 %	26.08.2011	127	3,3 %
30.05.2011	211,8	2,3 %	29.08.2011	135,1	6,4 %
31.05.2011	208,6	-1,5 %	30.08.2011	138	2,1 %
01.06.2011	204,7	-1,9 %	31.08.2011	140	1,4 %
03.06.2011	199,1	-2,7 %	01.09.2011	139,1	-0,6 %
06.06.2011	200,4	0,7 %	02.09.2011	129,2	-7,1 %
07.06.2011	196,5	-1,9 %	05.09.2011	123,8	-4,2 %
08.06.2011	186,6	-5,0 %	06.09.2011	125,4	1,3 %
09.06.2011	185,6	-0,5 %	07.09.2011	134	6,9 %
10.06.2011	181,4	-2,3 %	08.09.2011	134,9	0,7 %
14.06.2011	184,4	1,7 %	09.09.2011	130,8	-3,0 %
15.06.2011	185,1	0,4 %	12.09.2011	129,6	-0,9 %
16.06.2011	191,1	3,2 %	13.09.2011	133,5	3,0 %
17.06.2011	191,2	0,1 %	14.09.2011	134,9	1,0 %
20.06.2011	189,4	-0,9 %	15.09.2011	136,9	1,5 %
21.06.2011	206,2	8,9 %	16.09.2011	138,8	1,4 %
22.06.2011	202,1	-2,0 %	19.09.2011	139,5	0,5 %
23.06.2011	200	-1,0 %			
24.06.2011	200	0,0 %			
27.06.2011	201	0,5 %			
28.06.2011	204,2	1,6 %			
29.06.2011	203,8	-0,2 %			
30.06.2011	202,4	-0,7 %			
01.07.2011	208,9	3,2 %			
04.07.2011	213	2,0 %			
05.07.2011	208,2	-2,3 %			
06.07.2011	207,4	-0,4 %			
07.07.2011	206,8	-0,3 %			
08.07.2011	204,6	-1,1 %			
11.07.2011	200	-2,2 %			