

---

Prediksjon av volatilitet under ulike  
markedstilstander -En økonometrisk analyse  
av indeksen S&P 500

*Joakim Kvamvold*

---



# Forord

Denne oppgaven er skrevet som en del av masterstudiet i finansiell økonomi ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim.

Arbeidet med oppgaven har vært en lærerik og krevende prosess. Jeg har i løpet av oppgaveskrivingen fått dyp innsikt i begrepet volatilitet, og også innsikt i det å gjennomføre en grundig analyse. Synspunkter fra mine veiledere har vært et betydelig bidrag til det endelige resultatet. Jeg ønsker i den forbindelse å takke hovedveileder Dagfinn Rime samt biveileder Kåre Johansen. Jeg ønsker også å takke Torgeir Kråkenes for korrekturlesing.

Til sist vil jeg presisere at alle eventuelle feil, mangler eller unøyaktigheter hviler på mine skuldre. Alle eventuelle gode konklusjoner og resultater deler jeg derimot med mine veiledere.

Trondheim, 26.mai 2010

Joakim Kvamvold

# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teori</b>	<b>3</b>
2.1	Volatilitet . . . . .	3
2.2	Implisitt volatilitet . . . . .	4
2.3	Volatilitetssmilet . . . . .	6
2.4	VIX-indeksen . . . . .	7
2.5	Markedseffisiens . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Data</b>	<b>10</b>
3.1	Definering av variable . . . . .	10
3.2	Egenskaper til dataseriene . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Analyse</b>	<b>15</b>
4.1	GARCH-modellering . . . . .	15
4.2	Prediksjonsmodell . . . . .	19
4.2.1	Prediksjonsmodell med VIX-indeksen . . . . .	19
4.2.2	Prediksjonsmodell med betinget varians . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Prediksjon</b>	<b>25</b>
5.1	Volatilitetsprediksjoner for finanskriseårene . . . . .	26
5.2	Analyse for å avdekke om funnene er generaliserbare . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>37</b>
<b>A</b>	<b>Appendiks</b>	<b>41</b>
A.1	ADF-tester . . . . .	41

# Figurer

1	VIX-indeksen . . . . .	12
2	Egenskaper ved historisk volatilitet og VIX . . . . .	13
3	Residualer . . . . .	21

4	Prediksjonsperioder . . . . .	29
---	-------------------------------	----

## Tabeller

1	Deskriptiv statistikk for volatilitetstidsserier . . . . .	14
2	GARCH-modellering med månedlige data . . . . .	17
3	GARCH-modellering med daglige data . . . . .	18
4	Tre regresjoner for å avdekke informasjonsverdien til VIX-indeksen . . . . .	22
5	IV-estimator for VIX . . . . .	23
6	Regresjoner for å avdekke informasjonsverdien til betinget varians . . . . .	24
7	Prediksjonsevaluering for finanskrisetårene . . . . .	31
8	Ulike prediksjonsperioder . . . . .	35
9	Prediksjonsevaluering for ulike markedstilstander . . . . .	35
10	PR std: ADF tests . . . . .	41
11	LPR std: ADF tests . . . . .	42
12	VIX: ADF tests . . . . .	42
13	LVIX: ADF tests . . . . .	42
14	DVIX: ADF tests . . . . .	43



# 1 Innledning

Som det fremkommer av tittelen på oppgaven vil det utføres prediksjoner av volatilitet for ulike markedstilstander. Ulike økonometriske modeller vil benyttes til volatilitetsprediksjon. Da i hovedsak modeller basert på implisitt volatilitet og modeller basert på GARCH-modellering. Oppgaven tar sikte på å undersøke hvorvidt implisitt volatilitet gir gode prediksjoner for de ulike markedstilstandene. Det er da også samtidig en test på om opsjonsmarkedet kan sies å være effisient i løpet av de ulike delperiodene. Markeds-effisiens vil kort fortalt si at prisene til en hver tid reflekterer korrekt informasjon til markedsaktørene. Hvis effisiens er fraværende i noen av delperiodene vil informasjonen i opsjonsprisene ikke gi et korrekt bilde av virkeligheten. Problemstillingen eller hypotesen er at opsjonsmarkedet i noen markedstilstander ikke er effisient og at det derfor vil være ulike modeller som predikerer godt for de ulike tilstandene.

Min motivasjon for å gjennomføre en slik analyse kommer til dels av en irritasjon over at volatiliteten gjennom studiene stort sett har vært en eksogent gitt parameter uten utstrakt diskusjon. Volatiliteten i markedet har vært ekstrem i løpet av mine masterstudier, og jeg har derfor tatt stor interesse for denne ene parameteren. For investorer er det ekstremt viktig å vite hvor stor risiko som er knyttet til deres portefølje. Å kunne være i stand til å predikere en nøyaktig og troverdig fremtidig volatilitet vil derfor være viktig for enhver kapitalforvalter. På grunn av, i mine øyne, utilstrekkelig faglig vektlegging av volatilitetsparameteren har jeg ønsket å fordype meg grundigere i denne. Det er altså mitt ønske om å tilegne meg manglende kunnskap som er hovedmotivasjonen bak oppgavevalget.

I denne oppgaven er det volatiliteten til den brede indeksen S&P 500 som analyseres. S&P 500 er en indeks som består av 500 store amerikanske børsnoterte industribedrifter. Den består ikke av de 500 største selskapene, men velges av en komité slik at indeksen representerer et bredt utsnitt av amerikanske industrier. Poon og Granger (2003) har gransket 93 artikler hvor volatilitetsprediksjon er hovedtema. De evaluerer de ulike funnene i disse artiklene og finner at modeller basert på implisitt volatilitet foretrekkes i majoriteten av artiklene. Det er en veletablert forståelse blant markedets aktører at den implisitte volatiliteten fra opsjonsmarkedet er markedets forventning om fremtidig volatilitet. I så måte er det ikke overraskende at modeller basert på implisitt volatilitet gir bedre prediksjoner enn andre modeller. Årsaken er at implisitt volatilitet besitter et større informasjons-

sett enn alternative prediksjonsmetoder. Dersom andre modeller hadde vist seg å inneha overlegne prediksjonsegenskaper ville det være et sterkt argument mot effisiens i opsjonsmarkedet. Opsjonsprisene ville da ikke reflektert riktig informasjon til markedsaktørene. Eventuelt kan en si at markedsaktørene ikke tolker informasjonssettet korrekt og at opsjonene dermed prises med en feilaktig volatilitet. En kunne da potensielt gjort store penger på handel i disse opsjonene. Poon og Granger (2003) kommer også med en oppfordring til videre forskning innenfor volatilitetsprediksjon. Denne oppfordringen går ut på å dele opp prediksjonsperiodene i “normale” og “eksepsjonelle” perioder for å undersøke om ulike prediksjonsmetoder er å foretrekke for ulike perioder.

Hvis opsjonsmarkedet er effisient vil implisitt volatilitet gi en effisient prediksjon av fremtidig volatilitet uavhengig av hvilken markedstilstand vi befinner oss i. Om opsjonsmarkedet er effisient er et empirisk spørsmål som det er skrevet mange artikler om. Konklusjonene i de ulike artiklene er dog meget forskjellige. Det konkluderes med alt fra at implisitt volatilitet er en effisient prediksjon av fremtidig volatilitet (Fleming(1998)) til at implisitt volatilitet ikke har noen som helst korrelasjon med fremtidig volatilitet (Canina og Figlewski(1993)). At implisitt volatilitet ikke skal ha noen korrelasjon med den realiserte volatiliteten går mot all opsjonsteori. Det indikerer også at opsjonsmarkedet ikke er effisient. Christensen og Prahbala (1998) kritiserer funnene fra Canina og Figlewski (1993) og kommer med en mulig forklaring på det oppsiktsvekkende funnet fraværet av en slik korrelasjon er. Forklaringen de foreslår er at det er benyttet et relativt kort datasett med overlappende observasjoner. Når et 30-dagers standardavvik beregnes ved bruk av daglige serier vil standardavviket på påfølgende dag basere seg på 29 av de samme observasjonene. Dette gir sterke autokorrelasjoner. For å unngå å gå i samme felle som Canina og Figlewski vil det i denne oppgaven derfor benyttes daglige data for å beregne månedlige serier. Standardavvik beregnes da ved hjelp av daglige data før det trekkes ut en observasjon for hver måned som går. De månedlige datapunktene blir da uavhengige av hverandre i motsetning til studier som bygger på overlappende dataserier. Dataseriene vil deretter benyttes til å lage månedlige prediksjoner for fremtidig volatilitet.

Det som i hovedsak skiller denne studien fra tidligere studier er at den forsøker å avdekke forskjeller mellom prediksjonsmodeller i ulike regimer. Regimeinndelingen som er tiltenkt er “normaltilstand” og “ekstremtilstand”. “Ekstremtilstand” vil være perioder med høyere volatilitet enn hva som er normalt. I de siste foregående årene har vi vært vitne til nettopp



en slik “ekstremtilstand”. Da finanskrisen slo inn i markedene for fullt bevitnet vi en ekstrem økning i volatiliteten som vedvarte over en lengre periode før volatiliteten nådde tilbake til mer normale verdier. Prediksjoner utført i løpet av denne perioden vil derfor tillegges stor vekt i denne oppgaven. I analysedelen vil det benyttes data for hele utvalget når ønskede prediksjonsmodeller evalueres. For selve prediksjonstesting vil det i første omgang benyttes data frem til februar 2006. Deretter vil det foretas prediksjoner for de fire kommende årene. Vi har først to år med det vi kan karakterisere som “normaltilstand” påfulgt av to år som kan karakteriseres som “ekstremtilstand”. Sistnevnte periode kan vi også dele inn i to delperioder. Vi har en delperiode med sterkt økende volatilitet og en delperiode med sterkt nedadgående volatilitet. Disse delperiodene vil også diskuteres nærmere. Det vil også bli foretatt testing for å undersøke hvorvidt funnene fra disse prediksjonstestene kan sies å være generaliserbare for liknende perioder.

I kapittel 2 vil teori rundt volatilitet og noen relevante begrep bli diskutert. Herunder implisitt volatilitet, volatilitetssmilet, VIX-indeksen og markedseffisiens. I kapittel 3 vil egenskapene til tidsseriene som er blitt benyttet i den empiriske analysen diskuteres. Videre vil kapittel 4 ta for seg analyse av hvilke modeller som egner seg best til prediksjon av fremtidig volatilitet. I kapittel 5 vil prediksjon foretas for de ulike regimene nevnt ovenfor før en oppsummering og konklusjon kommer i kapittel 6.

## 2 Teori

I dette kapitlet vil det legges vekt på å forklare noen begrep som benyttes i oppgaven og teorien bak disse begrepene. Dette for å gjøre det enklere for leseren i påfølgende kapitler. Begrepene som forklares er volatilitet, implisitt volatilitet, volatilitetssmilet, VIX-indeksen og markedseffisiens.

### 2.1 Volatilitet

Volatilitet er et begrep som beskriver svingninger i en tidsserie. Det kan være svingninger i råvarepriser, eiendomspriser, antall ansatte i kommunesektoren eller hva som helst annet. I denne oppgaven vil det dreie seg om svingninger i den brede indeksen S&P 500 eller

også kalt SPX. Som nevnt tidligere er denne indeksen sammensatt av 500 av de største selskapene ved den amerikanske børsen. Volatilitet benyttes i finans som en kvantifiserbar størrelse på den totale risikoen som er knyttet til avkastningen til et finansielt aktivum. Volatiliteten er en uobserverbar størrelse i den forstand at man må estimere verdier for den. Se Kjetil Johan Rakkestad (2002) for ulike måter en kan estimere volatilitet på. Hvilken metode man velger for å estimere volatiliteten vil påvirke størrelsen på denne parameteren. Den vil blant annet også variere med hensyn til hvor mange observasjoner vi benytter til å kalkulere verdiene. Vanligvis oppgis volatilitet i form av variansen til avkastningen eller ved standardavviket til avkastningen. Variansen eller standardavviket har i seg selv liten informasjonsverdi før de blir knyttet opp mot en sannsynlighetsfordeling. Ved å knytte standardavviket opp mot en slik fordeling forteller det oss sannsynligheten for at avkastningen vil havne utenfor et utfallsrom gitt av standardavvikets størrelse. Både sannsynlighetsfordelingen og standardavviket er størrelser som er i kontinuerlig forandring. Siden disse til en hver tid er avhengig av investorenes handlinger er det vanskelig å vite hva den virkelige volatiliteten og sannsynlighetsfordelingen til en hver tid er. I denne oppgaven vil vi benytte oss av et estimat for den virkelige volatiliteten. Vi benytter oss da av historisk volatilitet definert som tidsseriens annualiserte standardavvik. De annualiserte standardavvikene vil være beregnet over 22 handledager slik at vi får månedlige observasjoner.

## 2.2 Implisitt volatilitet

Implisitt volatilitet er volatilitet som regnes ut ved hjelp av priser en observerer i markedet. Ofte benytter man da en opsjonsprisindemodell hvor man kan observere alle variable bortsett fra volatiliteten. Opsjoner er verdipapirer som gir en rett til å kjøpe eller selge et såkalt underliggende aktivum til en forhåndsbestemt pris. Det underliggende aktivumet kan for eksempel være råvarepriser, aksjer, valuta, ulike indekser eller til og med andre opsjoner. Opsjonen har en utbetalingsstruktur som er en ikke-lineær funksjon av underliggendes utbetalingsstruktur. Ved hjelp av den observerte prisen på opsjonen kan man regne ut til hvilken volatilitet opsjonen prises til. Denne volatiliteten blir altså da implisitt gitt de observerte størrelsene i markedet.

En kjøpsopsjon fungerer slik at en avtaler en fremtidig pris for levering av et underliggende

aktivum på et fremtidig tidspunkt. Det spesielle med opsjoner er at en har en rett til å utøve opsjonen til den avtalte prisen, men ingen plikt. Altså vil en kjøpsopsjon ha en potensielt stor oppside, men ingen fare for tap utover den prisen man har betalt for den. Denne spesielle egenskapen ved opsjoner gjør at opsjoner kan fungere som forsikringer. Spesielt salgsoptjoner er attraktive instrumenter investorer kan benytte for å forsikre seg mot tap i markedet. Hvis en har investert i en aksje og samtidig har en salgsoptjon på denne aksjen kan porteføljeværdien ikke gå lavere enn den salgsprisen som er forhåndsbestemt av opsjonen. Desto mer usikkerhet det er i markedet desto høyere blir prisen på opsjonene. Dette nettopp fordi høy usikkerhet går hånd i hånd med høy volatilitet. Høy volatilitet gir høye opsjonspriser uavhengig av om vi ser på en kjøpsopsjon eller en salgsoptjon.

Utbetalingsstrukturen til en kjøpsopsjon på utøvelsestidspunktet kan skrives slik:

$$C = \max(S_T - K, 0) \quad (2.1)$$

hvor  $C$  er verdien av opsjonen,  $S_T$  er verdien av underliggende på tidspunkt  $T$  og  $K$  er den forhåndsbestemte utøvelseskursen. Denne utbetalingsstrukturen gjør opsjonen verdifull, og den omsettes derfor til en markedsbestemt pris.

Implisitt volatilitet beregnes ved at en løser en opsjonsprisindeformel for volatiliteten til underliggende aktivum. På ethvert tidspunkt vil en kunne observere alle variable i formelen bortsett fra den forekommende volatiliteten. Den vanligste opsjonsprisindeformelen er Black & Scholes opsjonsprisindeformel (Black og Scholes(1973)):

$$C = S_0 N(d_1) + K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.2)$$

hvor:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Her er vist opsjonsprisindeformelen for en europeisk kjøpsopsjon på et underliggende aktivum som ikke betaler ut dividende.  $C$  er prisen en observerer på tidspunkt 0,  $S_0$  indikerer underliggendes verdi på starttidspunktet,  $N$  er den kumulative sannsynlighetsfordelingen,  $K$  er utøvelseskursen for opsjonen,  $r$  er risikofri rente,  $T$  er tid til forfall og  $\sigma$  er standardavviket til avkastningen på underliggende aktivum. Alle variable unntatt  $\sigma$  kan

altså observeres i markedet. Opsjonspriseringsformelen kan forøvrig ikke løses direkte for  $\sigma$ . Man benytter derfor en iterativ metode for å finne hvilket standardavvik som passer til den prisen som observeres i markedet. En beregner da den teoretiske opsjonsprisen for mange ulike standardavvik og finner ut hvilket standardavvik som gir en opsjonspris som samsvarer med den man observerer i markedet. Den implisitt gitte volatiliteten som svarer til opsjonens markedspris vil da være markedets forventning om den fremtidige volatiliteten til underliggende over opsjonens løpetid.

Opsjonspriseringsformelen bygger forøvrig på en del forutsetninger:

- Avkastningen på underliggende er normalfordelt og identisk og uavhengig over tid.
- Volatiliteten til avkastningen er konstant.
- Risikofri rente er konstant.
- Ingen transaksjonskostnader eller skatter.
- Korte posisjoner kan bli inngått kostnadsfritt og lån kan gjøres til risikofri rente.

Noen av disse forutsetningene kan bryte med virkeligheten i deler av datasettet, mens noen kan virke for strenge for alle dataobservasjoner. Som for de fleste økonomiske modeller så benytter vi altså strenge forutsetninger for å avdekke volatiliteten. Men det som er av interesse her er hvor godt markedet priser opsjonene, og dermed hvor godt markedet forutser fremtidig volatilitet. Brudd på forutsetningene vil derfor diskuteres i mer detalj under de punkter det vil finnes naturlig.

## 2.3 Volatilitetssmilet

Det viser seg at implisitt volatilitet fra ellers identiske opsjoner med ulik utøvelseskurs vil være forskjellig i markedet. Denne observasjonen kalles volatilitetssmilet ettersom opsjoner som har en utøvelseskurs langt unna dagens kurs på underliggende prisen til en høyere volatilitet enn såkalte at-the-money-opsjoner eller ATM-opsjoner (Hull(2008); Brooks(2008); McDonald(2006)). En ATM-opsjon er en opsjon hvor  $K = S_0$ . Hvis en plotter implisitt volatilitet i et diagram med implisitt volatilitet på y-aksen og forskjellige utøvelseskurser på x-aksen vil vi da få en graf som minner om et skjevt smil. Siden implisitt volatilitet er forskjellig for opsjoner med samme underliggende vil det være vanskelig å fastslå hva som

er markedets egentlige oppfatning av underliggendes volatilitet over opsjonens levetid.

Det er veldokumentert at avkastningen til finansielle aktiva er fordelt med tykkere haler enn en vanlig normalfordeling. Denne egenskapen til avkastningen vil kunne forklare volatilitetssmilet. Det vil være veldig lite sannsynlig at en kjøpsopsjon som er langt out-of-the-money eller OTM (K langt over dagens kurs på underliggende) gir utbetaling ved forfall. Men på grunn av at fordelingen til avkastningen har tykkere haler enn vanlig normalfordeling vil reell sannsynlighet for at den gir utbetaling være større enn hva normalfordelingen tilsier. Dette bruddet på forutsetningen for Black & Scholes prisingsformel fører altså til at opsjonen prises høyere og vi får en høyere implisitt volatilitet (Granger og Poon(2003)). Spesielt for aksjer og aksjeindekser observerer vi at implisitt volatilitet er spesielt høy for opsjoner med lav utøvelseskurs. To årsaker peker seg ut som forklaring på dette fenomenet. Den ene kommer av bedriftenes kapitalstruktur og kan kalles for brekkstangeffekt. De fleste bedrifters kapital består av både egenkapital og lånefinansiering. Hvis aksjekursen synker vil da egenkapitalens verdi bli lavere. Dette medfører samtidig at gjeldsgraden til selskapet øker og at egenkapitalen blir mer risikabel. Siden volatiliteten til aksjene er et mål på risiko vil denne da øke. Hvis aksjeverdien derimot øker så øker andelen egenkapital og denne blir da mindre risikabel. Mindre risiko fører igjen til lavere volatilitet. Et annet argument er den såkalte krasjefrykten. Investorer frykter markedskollaps og er derfor villige til å betale en høyere pris for opsjoner som forsikrer porteføljen mot en slik kollaps (Hull(2008)). Empirisk viser det seg at meget høy implisitt volatilitet for opsjoner med veldig lav utøvelseskurs er enklere å påvise etter markedskollapsen i 1987. Dette vil støtte siste argument for hvorfor denne effekten oppstår. Det er altså svært mange hensyn en bør ta når en evaluerer implisitt volatilitet. Ettersom bruk av implisitt volatilitet direkte gjør at en må ta veldig mange hensyn er det derfor valgt å benytte VIX-indeksen fremfor å hente ut implisitt volatilitet fra opsjoner.

## 2.4 VIX-indeksen

Siden 1993 har Chicago Board Options Exchange (CBOE) rapportert en indeks som viser markedets oppfatning av fremtidig volatilitet. Denne indeksen kalles VIX, og er også ofte omtalt som fryktindeksen eller uroindeksen. Indeksen er et vektet snitt av volatiliteten hentet ut fra både salgs- og kjøpsopsjoner på SPX med ulik utøvelseskurs og løpetid.

Indeksen er bygd opp på en måte som gjør at den er ment å vise markedets syn på volatiliteten til SPX de neste 30 kalenderdagene. Frem til 22. september 2003 ble denne kalkulert ved at en kalkulerte implisitte volatiliteter fra opsjoner som var nær ATM. Frem til denne datoen ble indeksen kalt VXO, og den var da basert på opsjoner på indeksen S&P 100 eller også kalt OEX. Etter denne datoen har en ny metode vært benyttet, og denne metoden er benyttet bakover på historiske data slik at vi har data tilgjengelig for VIX tilbake til 1990. En fordel med å benytte opsjoner på SPX er at en slipper å bekymre seg for det såkalte wildcard-problemet som er knyttet til opsjoner på OEX (Fleming(1998)). OEX-opsjoners pris blir slutført klokken 15.00 hver dag, men utøvelse kan forekomme frem til klokken 15.20. Dette resulterer i at markedssvingninger i løpet av disse 20 minuttene (som ellers ville redusert opsjonsprisen) kan utløse en utøvelse til den forhåndsbestemte kursen. Markedsaktøren slipper da å sitte med opsjonen som i utgangspunktet har blitt mindre verdt. Dette kan resultere i målefeil. Siden opsjoner på SPX ikke innehar denne egenskapen behøver vi ikke å ta hensyn til dette problemet ved benyttelse av verdier for VIX-indeksen. Formelen som benyttes til kalkulasjon av VIX-indeksen følger nedenfor (Chicago Board Options Exchange(2009)):

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (2.3)$$

hvor:

- $\sigma$        $\frac{VIX}{100} \rightarrow VIX = \sigma \cdot 100$ .
- T      Tid til forfall.
- F      Forwardnivå på SPX basert på opsjonspriser.
- $K_0$       Første utøvelseskurs lavere enn F.
- $K_i$       Utøvelseskurs på OTM-opsjon i. Kjøpsopsjon hvis  $K_i > K_0$ , salgsoption  
hvis  $K_i < K_0$ , både Call og Put dersom  $K_i = K_0$ .
- $\Delta K_i$       Intervall mellom utøvelseskurser. Halvparten av differansen  
mellom uteøvelseskurser på begge sider av  $K_i$ :  $\Delta K_i = \frac{K_{i-1} - K_{i+1}}{2}$ .
- r      Risikofri rente til forfallstidspunktet.
- $Q(K_i)$       Midtpunktet mellom etterspørsels- og tilbudspris for hver opsjon  
med utøvelseskurs  $K_i$ .

Denne formelen benytter opsjonsprisene fra markedet direkte isteden for å regne ut impli-

sitt volatilitet gjennom en opsjonsprisindeformel. Den er kalkulert ved å benytte de to nærmeste forfalls månedene på en slik måte at den oppnår en 30-dagers kalenderperiode. Den benytter seg av både kjøpsopsjoner og salgsoptjoner. Desto nærmere utøvelseskursen er forwardprisen, jo større vekt tillegges opsjonsprisen. Opsjoner inkluderes helt til det eksisterer to etterfølgende etterspørselspriser lik null. Det vil si at antallet opsjoner som benyttes i beregningen kan variere fra dag til dag, eller til og med fra minutt til minutt. Utøvelseskursen er diskrete størrelser. Man kan derfor oppleve at det ikke eksisterer utøvelseskursen som er lik forwardnivået til SPX. Dette tas hensyn til gjennom siste ledd i formelen.

Blant tidligere studier er det funnet at modeller som benytter implisitt volatilitet har vært å foretrekke fremfor GARCH-modeller eller modeller basert på historisk volatilitet (Granger og Poon(2003); Fleming(1998)). Siden VIX-indeksen er en form for implisitt volatilitet vil det være grunn til å tro at modeller basert på VIX-indeksen også vil gi bedre estimat enn andre modeller.

## 2.5 Markedseffisiens

Teorien om at markedene er effisiente er grunnleggende i de fleste modeller innen finans. Fama (1970) deler inn markedseffisiens i tre ulike former: Svak form, halvsterk form og sterk form. Svak form for markedseffisiens vil si at en ikke kan forutse fremtidige priser basert på historiske verdier. Altså vil ingen former for økonometriske metoder eller prisingsanomalier gi meravkastning over tid. Halvsterk form for effisiens karakteriseres ved at all offentlig informasjon ligger priset inn i markedsprisen. En kan altså ikke oppnå meravkastning selv ved utstrakt benyttelse av fundamental analyse av markedet. Sterk form for effisiens forklares ved at selv ikke tilgjengelig privat informasjon eller innsideinformasjon vil kunne bidra til meravkastning. Graden av markedseffisiens tilsier altså hvor mye informasjon som er priset inn i markedsprisen. Summers (1985) diskuterer i en artikkel forskjellen mellom absolutt og relativ effisiens. Relativ effisiens vil si at prisene i markedet er korrekte målt i forhold til hverandre. I Summers artikkel beskrives denne formen for effisiens ved at en halv flaske ketchup koster halvparten av en hel flaske ketchup. Absolutt effisiens vil si at prisen er fundamentalt korrekt. I aksjesammenheng vil dette si at prisen på aksjen reflekterer de neddiskonterte fremtidige dividendeutbetalingene.

I den forekommende analysen vil det benyttes økonometriske metoder og markedets egen volatilitetsprediksjon gjennom opsjonsprisene. De økonometriske metodene baserer seg utelukkende på historiske data. I tillegg til å undersøke prediksjonsegenskapene til modellene vil det derfor samtidig være en test på hvorvidt svak form av markedseffisiens er tilstede i opsjonsmarkedet. Hvis en modell basert på historiske data gir bedre prediksjoner enn en modell basert på markedets egne prediksjoner vil en kunne foreslå at svak form for effisiens ikke er tilstede. Jamfør Summers vil dette være test på absolutt effisiens av opsjonsmarkedet.

### 3 Data

I denne delen vil jeg definere noen av variablene som benyttes i den empiriske analysen. Det vil også legges vekt på å gjøre leseren kjent med tidsseriene som skal benyttes i analysen og de egenskapene disse tidsseriene innehar.

For å beregne den historiske volatiliteten til S&P 500 må en først vite de daglige avkastningsratene til serien. For å finne disse må en først vite hva indeksens verdier er. Indeksens daglige sluttkurs vil benyttes til å beregne de daglige avkastningsratene før volatiliteten deretter beregnes. Verdiene for VIX-indeksen kan benyttes direkte ettersom VIX-indeksens verdier kan observeres direkte i markedet. Det er altså kun tidsseriene til SPX sine daglige sluttkurs og VIX-indeksens daglige verdier som behøves for å gjennomføre analysen. Flere andre variable er forsøkt brukt i analysedelen uten at disse har vist seg å endre resultatene vesentlig. Disse variablene vil derfor ikke diskuteres. Begge dataseriene som benyttes i den empiriske analysen er hentet fra Reuters Ecowin. For både VIX-indeksen og SPX strekker dataseriene seg fra 2.januar 1990 til 1. februar 2010. Historisk volatilitet vil heretter betegnes  $h_t$ . For implisitt volatilitet vil  $i_t$  benyttes som betegnelse.

#### 3.1 Definerings av variable

Fra sluttkursene til SPX kan en beregne daglige avkastninger på indeksen. Dette er gjort ved å ta den naturlige logaritmen til dagens verdi over gårsdagens verdi. På samme måte kan en regne ut månedlige avkastningsrater. En tar da den naturlige logaritmen til dagens



verdi over forrige måneds verdi. Ettersom en benytter 22 handledager for hver måned vil da forrige måneds verdi være nivået på SPX for 22 dager siden. Nedenfor er vist kalkulasjon for daglige avkastningsrater ( $r_t$ ) og månedlige avkastningsrater ( $R_t$ ).

$$r_t = \ln \frac{SPX_t}{SPX_{t-1}} \quad (3.4)$$

$$R_t = \ln \frac{SPX_t}{SPX_{t-22}} \quad (3.5)$$

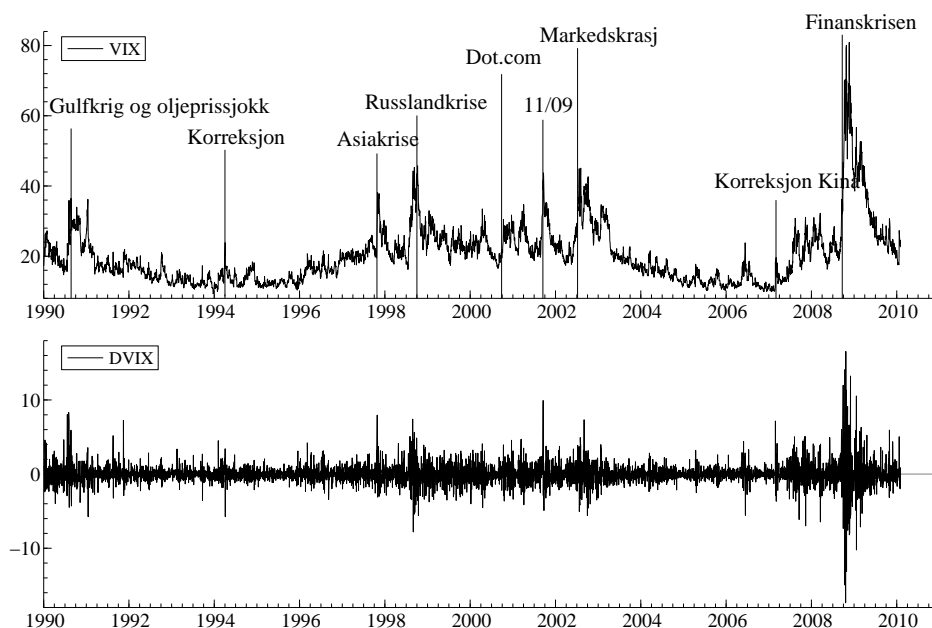
VIX-indeksen er oppgitt som annualisert standardavvik til avkastningen over de neste 30 kalenderdager multiplisert med 100. VIX oppgir altså markedets ex ante volatilitetsprediksjon for den kommende måneden. For SPX velges det å beregne historisk observert standardavvik for en 30-dagers periode slik at sammenligningsgrunnlaget blir mest mulig likt. Det er i gjennomsnitt omtrent 22 handledager over en slik 30-dagers periode. Standardavviket beregnes derfor over de 22 kommende handledager for ex post observerte avkastningsrater. For å annualisere standardavviket multipliseres det daglige observerte standardavvik med roten av antall handledager i løpet av ett år. Her benyttes da 252 handledager.

$$h_t = \sqrt{\frac{1}{22} \sum_{k=1}^{22} (r_{t+k} - \bar{r}_t)^2 \cdot 252} \quad (3.6)$$

### 3.2 Egenskaper til dataseriene

Det kommer tydelig frem av figur 1 at perioder med negative sjokk i markedene sammenfaller med perioder med høy implisitt volatilitet. Enkelte av krisene som er plassert inn i tidslinjen forekommer på bestemte datoer mens noen varer over perioder. Merkenes plassering er derfor plassert tildels ved en subjektiv vurdering. Schwert (1990) diskuterer sammenfallet mellom høy volatilitet og markedsnedgang grundigere i en artikkel som studerer markedskrasjen i 1987. Han poengterer viktigheten av at negative sjokk leder til større volatilitetsøkning enn positive sjokk. Dette fenomenet er et eksempel på de asymmetriske sammenhengene mellom avkastning og volatilitet. De asymmetriske egenskapene gjør seg gjeldende nettopp ved at positive og negative sjokk av samme størrelse gir ulikt utslag i volatiliteten. Av figur 1 kan vi se at første differens til VIX-indeksen virker stasjonær, men med betydelig innslag av heteroskedastisitet. En kan teste om seriene

Figur 1: VIX-indeksen



Figuren viser daglige data for VIX-indeksen fra 2.januar 1990 til 1.februar 2010. Første differens av VIX er representert ved DVIX.

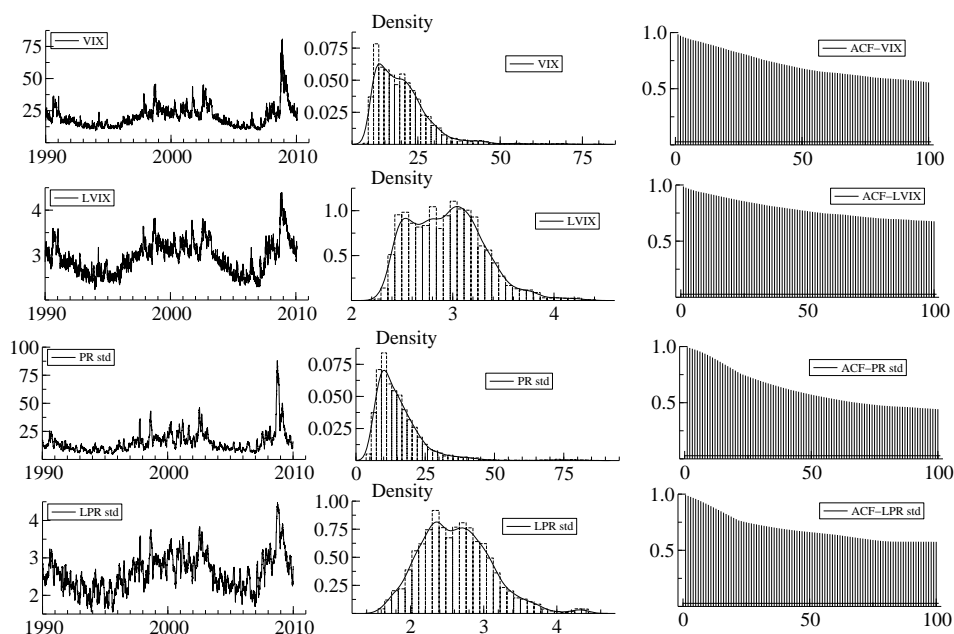
er stasjonære ved å gjennomføre en utvidet Dickey-Fuller-test eller også kalt ADF-test (Dickey og Fuller(1979)). For å gjennomføre en ADF-test på VIX-indeksen tar vi utgangspunkt i likning (3.7).

$$\Delta VIX_t = \mu + \psi VIX_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta VIX_{t-i} + u_t \quad (3.7)$$

Nullhypotesen vår er at variabelen er random walk. Det vil si at  $\psi = 0$ . En variabel som er random walk vil ikke være korrelert med tidligere verdier av samme variabel. Som navnet tilsier vil verdien av neste observasjon være tilfeldig. Den vil dog i snitt være lik en langsiktig gjennomsnittsverdi. Alternativhypotesen ved en slik test vil være at variabelen er stasjonær. Det vil den være dersom  $\psi < 0$ . At en variabel er stasjonær vil si at den fluktuierer rundt et langsiktig gjennomsnitt. I motsetning til random walk vil en stasjonær prosess tvinges tilbake mot det langsiktige gjennomsnittet dersom avvik forekommer. Det vil altså være en tendens til at neste observerte verdi er lavere dersom dagens verdi er høyere enn det langsiktige gjennomsnittet. Dersom dagens verdi er lavere

enn det langsiktige snittet vil det være en tendens til at neste verdi er nærmere snittet enn forrige verdi. ADF-tester viser at random walk kan forkastes for både VIX og DVIX på henholdsvis 5%-nivå og 1%-nivå. Se appendiks A.1 for testresultater.

Figur 2: Egenskaper ved historisk volatilitet og VIX



Kolonne 1: Daglige tidsserier av VIX,  $\ln(VIX)$ , historisk standardavvik og logaritmen til standardavviket. Kolonne 2: Histogram av de samme seriene. Kolonne 3: Autokorrelasjonsfunksjoner for de samme seriene.

I figur 2 presenteres de faktiske tidsseriene som er benyttet i den empiriske analysen sammen med histogrammer og autokorrelasjonsfunksjoner. Histogrammene viser oss intensiteten av de ulike observasjonene. Autokorrelasjonsfunksjonene viser korrelasjonen mellom observert verdi og tidligere verdier av den samme variabelen. Autokorrelasjonen mellom verdien på tid  $t$  og verdien på tidspunkt  $t-i$  defineres som  $corr(y_t, y_{t-i})$ . Autokorrelasjonsfunksjonen er altså en funksjon som er bygd opp av mange slike autokorrelasjoner. Tabell 1 viser deskriptiv statistikk for de samme seriene.

Uavhengig av hvilken tidsserie vi ser på så er det finanskrisen, som slo inn for fullt høsten 2008, som utpreger seg som den mest volatile perioden. Ser vi bort fra denne har vi en god del høyvolatilitetsperioder i tidsrommet 1997 til 2003. Da med slutten av 1997,

Tabell 1: Deskriptiv statistikk for volatilitetstidsserier

	$h_t$	$\ln h_t$	$i_t$	$\ln i_t$
Gjennomsnitt	15.667	2.6214	20.272	2.9407
Standardavvik	9.6409	0.48478	8.3333	0.35806
Skjevhet	3.0181	0.58861	2.0276	0.54923
Kurtosis	13.999	0.58745	7.1591	0.22643
Minimum	4.7358	1.5552	9.3100	2.2311
Maksimum	88.049	4.4779	80.860	4.3927

Kolonne 1: Historisk volatilitet. Kolonne 2: Den naturlige logaritmen til historisk volatilitet. Kolonne 3: VIX-indeksen. Kolonne 4: Den naturlige logaritmen til VIX-indeksen. Datautvalget består av daglige data som strekker seg fra 3.januar 1990 til 1.januar 2010.

høsten 1998 og sommeren 2002 som de mest volatile underperiodene. En kan tydelig se at VIX-indeksen får et mye mer betydelig utslag enn historisk volatilitet i september 2001. Dette tyder på at markedsaktørene overvurderte effekten av terrorangrepene som ble utført denne måneden. Markedsaktørenes forventning ble da sterkt påvirket av frykten disse angrepene utløste, og dette gjorde at de trolig overvurderte sannsynligheten for markedskollaps. Prisene på opsjoner ble da mye høyere enn hva ex-post volatilitet viser at de burde ha vært. Dette kan sies å være en svak indikasjon på at opsjonsmarkedet ikke var effisient i denne korte perioden.

Vi kan legge merke til at perioder med veldig høy volatilitet skaper positiv skjevhet og tykke haler i fordelingene. Dette kan også leses ut fra tabell 1 hvor vi finner høye verdier for skjevhet og overskudd av kurtosis. Gjennomsnittsverdien er betydelig høyere for implisitt volatilitet, men det behøver ikke i seg selv å være problematisk. Historisk volatilitet har til tross for den lavere gjennomsnittsverdien både lavere minimumsverdi og høyere maksimumsverdi enn implisitt volatilitet. Denne observasjonen sammen med det høyere standardavviket til historisk volatilitet tyder på at implisitt volatilitet gir dårligere prediksjoner i ekstremperioder. En variabel som svinger lite vil vanskelig kunne predikere korrekt der avhengig variabel svinger mye. Dette inntrykket forsterkes hvis vi ser på de logaritmiske fordelingene. Det er her veldig tydelig at det eksisterer noen ekstreme utenforliggende verdier i histogrammet for historisk volatilitet. Disse kommer ikke like tydelig fram i histogrammet for implisitt volatilitet. Dette gir mye høyere verdier for overskudd av kurtosis for historisk volatilitet sammenliknet med implisitt volatilitet.

Tidsserieegenskapene er rapportert i tredje kolonne i figur 2. Disse indikerer at seriene

er stasjonære og positivt seriekorrelerte. ADF-tester for alle seriene bekrefter at seriene er stasjonære i det benyttede datautvalget. For  $h_t$  og  $\ln i_t$  forkastes random walk på 1%-nivå, mens for  $\ln h_t$  og  $i_t$  forkastes random walk på 5%-nivå. Se appendiks A.1 for testresultater. Høy volatilitet i periode  $t - i$  virker altså positivt på volatiliteten i periode  $t$ . Denne effekten er avtagende ettersom avstanden  $i$  øker. Vi kan også se at VIX-seriene har mer persistente tidsserieegenskaper enn seriene for standardavviket. Det vil si at implisitt volatilitet er mer avhengig av tidligere verdier enn hva den historiske volatiliteten er. Koopman et al. (2005) gjennomfører en lignende studie hvor de sammenlikner realisert volatilitet og implisitt volatilitet. De trekker den samme slutningen angående persistensen til implisitt volatilitet. Det tyder på at det er noe treghet i tilpasningen for implisitt volatilitet kontra andre volatilitetsmål. En mulig forklaring på at implisitt volatilitet er mer persistent kan finnes i litteraturen om adferdsfinans. Denne litteraturen hevder at investorer har en tendens til å vektlegge nylig informasjon mer enn eldre informasjon. Dersom dette er tilfellet kan det virke som en forklaring på at volatiliteten hentet ut fra opsjonspriser har en tregere tilpasning enn historisk volatilitet. Den historiske volatiliteten vektlegger alle observasjoner likt uavhengig av avstanden i tid og vil derfor ikke berøres av en slik teori. Hvis det viser seg at statistiske modeller predikerer mer presist enn modeller basert på implisitt volatilitet kan persistensforskjellene være en mulig forklaring.

## 4 Analyse

I analysedelen vil jeg begynne med å ta for meg GARCH-modellering. Betingede varianser fra GARCH-modelleringen vil benyttes videre i en annen modell for prediksjon av fremtidig volatilitet. VIX vil også benyttes i modellen som skal predikere fremtidig volatilitet. VIX er grundig forklart tidligere og er en observerbar størrelse i markedet. Det er derfor ikke behov for å utrede VIX-verdiene i analysen.

### 4.1 GARCH-modellering

I mange finansielle tidsserier finner vi at volatiliteten klumper seg. Det vil si at volatiliteten har en form for persistens ved seg, og vi kan si at den er positivt seriekorrelert (Brooks(2008)). I tradisjonelle økonometriske modeller forutsettes det at restleddsvariansen

er konstant. En GARCH-modell tillater at vi opphever denne forutsetningen. GARCH-modellen ble uavhengig utviklet av Bollerslev (1986) og Taylor (1986). Denne modellen tillater at betinget varians er avhengig av sine egne tidligere verdier. Altså tillates seriekorrelasjon i restleddet. Vi formulerer en enkel GARCH-modell nedenfor:

$$R_t = \beta_0 + u_t \quad (4.8)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (4.9)$$

hvor  $R_t$  månedlige avkastningsrater,  $\sigma_t$  er standardavviket på tidspunkt  $t$  og  $u_t$  er restleddet.  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  og  $\beta$  er parametre som estimeres i modellen. Vi kan tolke leddene i likning (4.9) som den langsiktige gjennomsnittsverdien ( $\alpha_0$ ), informasjon om fremtidig volatilitet fra forrige periode ( $\alpha_1 u_{t-1}^2$ ) og den betingede variansen fra modellens forrige periode ( $\beta \sigma_{t-1}^2$ ). Følgende parameterrestriksjoner er pålagt:  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  og  $\alpha_1 + \beta < 1$ . Disse restriksjonene er pålagt rett og slett for at den ubetingede variansen til  $u_t$  skal være definert.

Det kan også tas hensyn til de asymmetrirslike effektene nevnt i delkapittel 3.2 i volatilitetsestimeringen. Det er rimelig å tro at negative sjokk gir opphav til høyere volatilitet enn positive sjokk av samme størrelse. Flere studier peker på at nettopp denne effekten også eksisterer. En mulig forklaring på hvorfor effekten oppstår er at egenkapitalen blir mindre verdt ved en reduksjon av aksjeprisen, og derfor blir den også mer risikabel. Denne forklaringen tar hensyn til bedriftenes kapitalstruktur og kan på norsk kalles brekkstangeffekter. Amin og Ng (1997) foreslår at effekten også kan komme av at investorer blir tvunget til salg på grunn av marginkrav eller at mange forsøker å begrense tap ved å selge seg ned i aksjer ved et negativt sjokk. Av figur 1 kan vi se at negative sjokk sammenfaller med høye verdier for implisitt volatilitet, og siden implisitt volatilitet og historisk volatilitet er sterkt korrelerte kan man trygt si at denne effekten bør være til stede i alle tidsseriene. For å fange opp denne effekten inkluderes det en parameter som tar hensyn til slike asymmetriske effekter av sjokk. Det inkluderes også en parameter for å undersøke om effekten er asymmetrisk rundt null eller om den er asymmetrisk rundt en annen verdi. Disse hensyn tatt i betraktning så får vi en ATGARCH-modell, slik at likning (4.9) kan utvides til likning (4.10). ATGARCH-modellen er en utvidelse av en standard GARCH-modell og ble utviklet av Crouhy og Rockinger (1997).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1(u_{t-1} - \kappa_1)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \kappa_2(u_{t-1} - \kappa_1)^2 I_{t-1} \quad (4.10)$$

hvor  $I_{t-1} = 1$  hvis  $u_{t-1} < \kappa_1$  og 0 ellers.

Hvis  $\kappa_2$  er positiv betyr det at negativt oppfattede avkastningsrater bidrar til høyere volatilitet enn positivt oppfattede avkastningsrater.  $\kappa_1$  tilsier for hvilken terskelverdi denne effekten vil oppstå. Det behøver altså ikke være at terskelen er lik null. Med andre ord behøver ikke en negativt oppfattet avkastningsrate være negativ. Den behøver kun gi en verdi på  $u_{t-1}$  som er lavere enn  $\kappa_1$ .

For å evaluere ulike GARCH-modeller benyttes Akaikes informasjonskriterium (AIC). Dette er presentert algebraisk i likning (4.11). Et informasjonskriterium er bygget opp av to ledd. Det ene leddet er en funksjon av kvadrerte residualer fra estimeringen. Det andre leddet er et “straffeled” som øker dersom vi inkluderer flere parametre. Ved å inkludere flere parametre vil første ledd reduseres, mens andre ledd øker. Målet vil derfor være å finne en modell som gir lave kvadrerte residualer samtidig som modellen er parameterfattig. En ønsker altså så lav verdi på AIC som mulig.

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{T} \quad (4.11)$$

Tabell 2: GARCH-modellering med månedlige data

Modell	GARCH	ATGARCH	AGARCH	TGARCH
$\alpha_0$	$1.16232 \cdot 10^{-4}$ ( $5.737 \cdot 10^{-5}$ )	$6.22611 \cdot 10^{-5}$ (0.0001096)	$2.95249 \cdot 10^{-5}$ ( $8.980 \cdot 10^{-5}$ )	$2.49664 \cdot 10^{-4}$ ( $1.460 \cdot 10^{-4}$ )
$\alpha_1$	0.288067 (0.1036)	0.140602 (0.1957)	0.247939 (0.06923)	0.0343389 (0.08589)
$\beta$	0.699793 (0.07788)	0.619530 (0.06018)	0.618315 (0.06056)	0.625171 (0.07927)
$\kappa_1$		0.0318046 (0.01460)	0.0359150 (0.01037)	
$\kappa_2$		0.132648 (0.2707)		0.493091 (0.3875)
AIC	-3.44323058	-3.49114068	-3.49819482	-3.48062143

Estimeringen er gjort på grunnlag av likning 4.10. Datasettet består av 248 månedlige observasjoner som ikke overlapper. Tidsperioden for disse observasjonene er fra februar 1990 til januar 2010. Tall i parenteser er tilhørende robuste standardavvik.

Tabell 2 viser at vi ikke kan forkaste at  $\kappa_2 = 0$ . Dersom vi legger AIC til grunn som evalueringskriterium vil AGARCH-modellen være den modellen som vil være å foretrekke. Denne modellen betraktes som en rent asymmetrisk GARCH. I denne modellen er det ingen større effekt på volatiliteten av negative sjokk enn av positive sjokk. I så måte er dette funnet til dels overraskende. Dette kan kanskje forklares ved at sjokk i markedene ofte varer relativt kort. Sjokkene vil da ikke i like stor grad påvirke modellen når den er basert på månedsdata. Av tabell 2 kan vi som nevnt se at AGARCH-modellen er den modellen som minimerer AIC. Den betingende variansen fra AGARCH-modellen blir derfor lagret i datasettet slik at denne kan benyttes til den videre analysen.

En kan tenke seg at estimering basert på månedlige data kan gi unøyaktige estimat. Estimaten vil også være sterkt seriekorrelerte på grunn av måten den betingede variansen er definert på. Det kan være grunn til å tro at en GARCH-modell på daglige data gir mer nøyaktige estimat enn en modell på månedlige data. Avkastningsratene  $R_t$  fra likning (4.8) byttes derfor ut med daglige rater ( $r_t$ ). For den betingede volatiliteten benyttes fremdeles likning (4.10). Analysen som er gjennomført i tabell 3 baserer seg på de daglige observasjonene.

Tabell 3: GARCH-modellering med daglige data

Modell	GARCH	ATGARCH	AGARCH	TGARCH
$\alpha_0$	$6.78238 \cdot 10^{-7}$ ( $2.179 \cdot 10^{-7}$ )	$2.97586 \cdot 10^{-7}$ ( $5.407 \cdot 10^{-7}$ )	$1.82896 \cdot 10^{-9}$ ( $5.070 \cdot 10^{-10}$ )	$1.02191 \cdot 10^{-6}$ ( $2.845 \cdot 10^{-7}$ )
$\alpha_1$	0.0599788 (0.007770)	0.00455515 (0.008216)	0.0666928 (0.009550)	0.000716238 (0.005224)
$\beta$	0.934648 (0.007284)	0.933370 (0.01060)	0.917653 (0.01200)	0.934867 (0.01041)
$\kappa_1$		0.00250745 (0.001622)	0.00489503 (0.0004909)	
$\kappa_2$		0.0823081 (0.02142)		0.107810 (0.02024)
AIC	-6.53057478	-6.55904349	-6.55254002	-6.55828372

Estimeringen er gjort på grunnlag av likning 4.10. Datasettet består av 5239 daglige observasjoner. Tidsperioden for disse observasjonene er fra januar 1990 til februar 2010. Tall i parenteser er tilhørende robuste standardavvik.

I motsetning til analysen med månedsdata er det ATGARCH-modellen som minimerer AIC når vi benytter daglige observasjoner. Den virkelig store forskjellen ved å benytte dag-



lige observasjoner gjør seg gjeldende gjennom  $\kappa_2$ . Ser nå at denne blir statistisk signifikant forskjellig fra null. Denne modellen er altså mer i tråd med økonomisk teori og tidligere empirisk forskning ettersom de asymmetriske effektene av sjokk blir tatt hensyn til. Siden ATGARCH-modellen her viser seg å minimere AIC lagres den betingede variansen fra denne modellen. Deretter blir hver 22. observasjon trukket ut av dataserien på datoer som samsvarer med de samme datoene som månedsdata forekommer på. Vi får da månedlige observasjoner av ATGARCH-verdier som er basert på daglige data.

## 4.2 Prediksjonsmodell

Før vi kan starte med prediksjon av fremtidig volatilitet må vi finne ut om forklaringsvariablene våre har noen som helst forklaringskraft for fremtidig volatilitet. De variablene som skal benyttes til prediksjon er GARCH-estimatene og VIX-indeksen.

### 4.2.1 Prediksjonsmodell med VIX-indeksen

Den enkleste og mest vanlige måten å finne ut om VIX har forklaringskraft for fremtidig volatilitet er å estimere følgende regresjon:

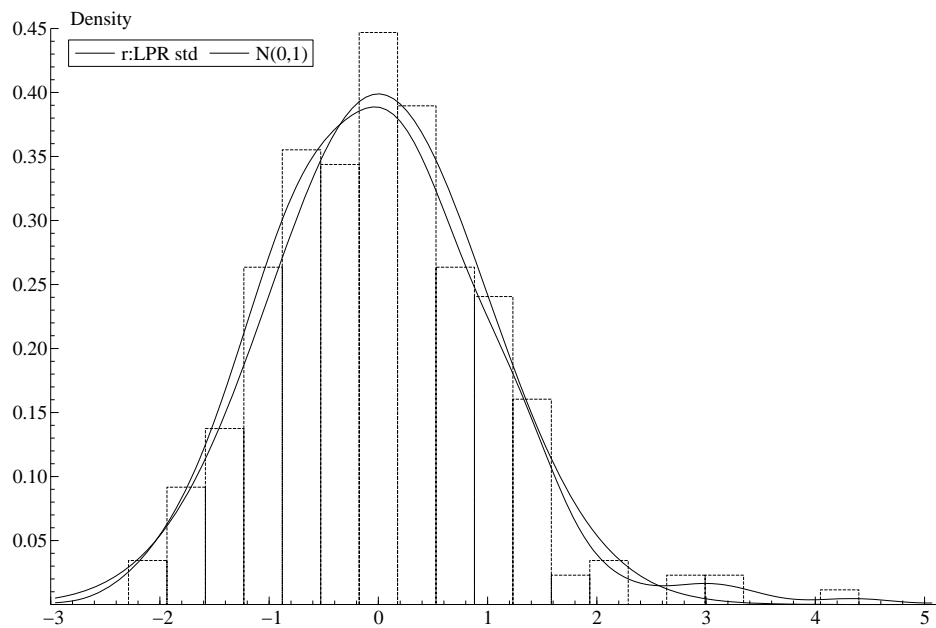
$$h_t = \beta_0 + \beta_1 i_t + u_t \quad (4.12)$$

hvor  $h_t$  er den naturlige logaritmen til historisk volatilitet for periode  $t$  (definert empirisk som i likning 3.6),  $i_t$  er den naturlige logaritmen til VIX ved starten av periode  $t$ . En kan teste flere hypoteser ved relasjon (4.12). Hvis VIX har noen informasjon om fremtidig volatilitet vil  $\beta_1$  være ulik null. Hvis VIX gir et forventningsrett estimat for historisk volatilitet skal  $\beta_0 = 0$  og  $\beta_1 = 1$ . Hvis VIX er effisient skal residualene være hvit støy.

Resultater fra MKM-estimering av likning (4.12) er rapportert i første linje i tabell 4. Estimert verdi på  $\beta_1$  lik 1,09247 er statistisk signifikant forskjellig fra null på 1%-nivå, men er ikke statistisk forskjellig fra en. For øvrig så forkastes en F-test med restriksjonene  $\beta_0 = 0$  og  $\beta_1 = 1$  på 1%-nivå. Vi kan fastslå at VIX-indeksen har noe informasjon om fremtidig volatilitet, men det ser ut til at estimatet ikke er forventningsrett.

Ettersom den deskriptive statistikken fra tabell 1 viser at implisitt volatilitet har en høyere gjennomsnittsverdi enn historisk volatilitet ville man forventet en koeffisient lavere enn en. Årsaken til det negative skjæringspunktet og den relativt bratte kurven kommer av at det finnes noen få residualer som er sterkt positive. Figur 3 bekrefter at negative residualer forekommer hyppigst, men at fordelingen har en ganske tykk høyre hale. Altså vil implisitt volatilitet som oftest overpredikere historisk volatilitet fordi større estimat enn observert verdi gir negative residualer. På grunn av noen få observasjoner med langt lavere implisitt volatilitet enn historisk volatilitet vil likevel estimatet anslå at et 1-til-1-forhold er statistisk signifikant. De sterkt positive residualene oppstår i perioder med hurtig volatilitetsøking der VIX ikke klarer å følge med utviklingen hurtig nok. Som tidligere poengtert så er VIX mer persistent enn historisk volatilitet. Dette forklarer den trege tilpasningen. Se figur 2 for tidsserieegenskaper. De mest ekstreme positive residualene oppstår i første del av finanskrisearene. Tidligere studier har stort sett funnet en estimator for VIX som er mindre enn en. Disse studiene har ikke hatt tilgjengelig data for de siste årenes hendelser. Det er derfor sannsynlig at finanskrisearene bidrar til at det er noe avvik mellom mine funn og tidligere empiriske funn.

Figur 3: Residualer



Figuren viser et histogram av residualene fra estimering av likning (4.12). I diagrammet er også tegnet en funksjon av en standard normalfordelt variabel.

For å se hvor godt VIX predikerer fremtidig volatilitet sammenliknet med laggede verdier av historisk volatilitet har følgende to regresjoner også blitt estimert:

$$h_t = \beta_0 + \beta_2 h_{t-1} + u_t \quad (4.13)$$

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 i_t + \beta_2 h_{t-1} + u_t \quad (4.14)$$

Resultater fra estimering av likning (4.13) og likning (4.14) vises i henholdsvis rad 2 og rad 3 i tabell 4. Det viser seg at lagget historisk volatilitet også gir signifikant forklaringskraft for fremtidig volatilitet, men lavere t-verdi og  $R^2$  antyder at denne isolert sett ikke gir en bedre prediksjon enn VIX. Vi ser også at når likning (4.14) estimeres forsvinner mye av effekten fra historisk volatilitet. Koeffisienten foran historisk volatilitet reduseres fra 0,773007 til 0,266511, men er fremdeles statistisk signifikant. Dette tyder på at VIX er ineffisient. Estimatoren for VIX er likevel statistisk signifikant forskjellig fra null, og er mer enn tre ganger så stor som estimatoren for historisk volatilitet. Selv om implisitt volatilitet virker å være verken forventningsrett eller effisient har den altså stor forklaringskraft hva

gjelder fremtidig volatilitet. En høyere  $R^2$  samt en DW-verdi nærmere 2, hvilket tyder på mindre autokorrelasjon i restleddene, gjør at likning (4.14) vil være å foretrekke fremfor relasjon (4.12) og relasjon (4.13) når prediksjoner skal foretas.

Tabell 4: Tre regresjoner for å avdekke informasjonsverdien til VIX-indeksen

$\beta_0$	$i_t$	$h_{t-1}$	$R^2$	DW
-0.588484	1.09247		0.650854	1.65
(-3.90)	(21.4)			
0.594542		0.773007	0.597007	2.38
(5.49)		(19.1)		
-0.365196	0.779096	0.266511	0.670335	2.01
(-2.24)	(7.37)	(3.42)		

$i_t$  er her den naturlige logaritmen til VIX-indeksen ved starten av tidspunkt  $t$ ,  $h_t$  er den naturlige logaritmen til volatiliteten av ex-post daglige avkastningsrater over de neste 22 handledager. Datasettet som er benyttet består av 247 månedlige observasjoner som ikke overlapper for perioden januar 1990 til januar 2010. Tall i parenteser indikerer tilhørende t-verdi.

En kan argumentere for at VIX i seg selv er avhengig av historisk volatilitet. Hvis investorer ser på historisk volatilitet når de handler opsjoner vil det være naturlig å bruke et instrument for VIX. Hvis implisitt volatilitet forklarer fremtidig volatilitet så bør den også være avhengig av historisk volatilitet ettersom fremtidig volatilitet er positivt avhengig av historisk volatilitet. Følgende likning blir estimert:

$$i_t = \beta_0 + \beta_1 i_{t-1} + \beta_2 h_{t-1} + v_t \quad (4.15)$$

Det kommer tydelig frem av tabell 5 at VIX i stor grad er avhengig av laggede verdier på VIX samt historisk volatilitet. Hele 85% av variansen i VIX kan forklares gjennom denne relativt enkle modellen som kun inneholder variable som er kjent for markedsaktørene på tidspunkt  $t$ . Det vil si at den kan predikere både fremtidige verdier av både VIX og opsjonspriser med stor presisjon. Inkludering av flere laggede verdier endrer ikke denne konklusjonen. Estimaten fra likning (4.15) benyttes isteden for VIX-verdier videre. Ser fra del b i tabell 5 at vi ikke lenger kan forkaste at  $\beta_0 = 0$  når vi benytter IV-estimator i relasjonen. Mengden forklart varians reduseres dog nevneverdig da  $R^2$  reduseres fra 0,670335 til 0,618288 når vi benytter IV-estimat.

Tabell 5: IV-estimator for VIX

a:Første stegs estimat hvor $i_t$ er avhengig variabel.				
$\beta_0$	$i_{t-1}$	$h_{t-1}$	$R^2$	DW
0.607246	0.455328	0.378248	0.849568	2.12
(7.96)	(10.6)	(12.0)		
b:Andre stegs IV-estimat hvor $h_t$ er avhengig variabel.				
-0.754065	1.15042		0.611534	1.94
(-4.34)	(19.6)			
-0.322157	0.748367	0.285331	0.618288	2.15
(-1.19)	(3.69)	(2.07)		

$i_t$  er her den naturlige logaritmen til VIX-indeksen ved starten av tidspunkt  $t$ ,  $h_t$  er den naturlige logaritmen til volatiliteten av ex-post daglige avkastningsrater over de neste 22 handledager. Datasettet som er benyttet består av 245 månedlige observasjoner som ikke overlapper for perioden februar 1990 til januar 2010. Tall i parenteser indikerer tilhørende t-verdi. I del b er  $i_t$  IV-estimatet fra del a.

#### 4.2.2 Prediksjonsmodell med betinget varians

En kan enkelt gjennomføre den samme analysen ved å benytte den lagrede betingede variansen fra GARCH-modelleringen. Ved å inkludere betingede varianser fremfor implisitt volatilitet i likning (4.14) får vi:

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 garch_t + \beta_2 h_{t-1} + u_t \quad (4.16)$$

hvor  $garch_t$  er den naturlige logaritmen til den betingede variansen enten fra analysen med månedsdata eller fra analysen med daglige data.  $h_t$  er som tidligere den naturlige logaritmen til historisk volatilitet.

Fra panel a i tabell 6 kan vi se at betinget varians har relativt stor forklaringskraft når den benyttes isolert. Estimert verdi på  $\beta_1$  lik 0,360316 er statistisk signifikant forskjellig fra null på 1%-nivå, men er også signifikant forskjellig fra 1. En simultan test hvor restriksjonene  $\beta_0 = 0$  og  $\beta_1 = 1$  forkastes også på 1%-nivå, og vi kan fastslå at prediksjonsegenskapene ikke er forventningsrette. Den relativt lave Durbin-Watson-verdien indikerer også innslag av seriekorrelasjon. Ettersom GARCH er avhengig av tidligere verdier av betinget varians er ikke denne seriekorrelasjonen overraskende. Denne seriekorrelasjonen oppstår naturlig som en følge av definisjonen av GARCH. En lav  $R^2$  tyder på at forklaringskraften til modellen er begrenset. Problemet med seriekorrelasjon løses ved å inkludere lagget verdi av historisk volatilitet, men samtidig viser det seg at den betingede variansen ikke lenger

Tabell 6: Regresjoner for å avdekke informasjonsverdien til betinget varians

a: Estimering med betinget varians fra månedsdata.				
$\beta_0$	$garch_t$	$h_{t-1}$	$R^2$	DW
4.91967	0.360316		0.34414	0.965
(24.1)	(11.3)			
1.16372	0.0609715	0.704248	0.602138	2.29
(3.44)	(1.77)	(12.6)		
b: Estimering med betinget varians fra daglige data.				
$\beta_0$	$garch_t$	$h_{t-1}$	$R^2$	DW
7.00779	0.466409		0.61552	2.09
(31.5)	(19.8)			
4.65231	0.299225	0.298689	0.62557	2.25
(4.92)	(4.31)	(2.56)		

$garch_t$  er her den naturlige logaritmen til den betingede variansen på tidspunkt  $t$ . For panel a er  $garch_t$  betinget varians fra AGARCH basert på månedsdata. For panel b er  $garch_t$  betinget varians fra ATGARCH basert på daglige data.  $h_t$  er den naturlige logaritmen til volatiliteten av ex-post daglige avkastningsrater over de neste 22 handledager. Datasettet som er benyttet består av 247 månedlige observasjoner som ikke overlapper for perioden februar 1990 til desember 2009. Tall i parenteser indikerer tilhørende t-verdi.

blir statistisk signifikant forskjellig fra null. Trolig kommer dette av at variansen basert på månedlige avkastningsrater er betydelig lavere enn hva variansen basert på daglige data er. Når avhengig variabel er historisk volatilitet basert på daglige data er det ikke overraskende at en slik betinget varians ikke har stor forklaringskraft. På grunn av den lave forklaringskraften til den betingede variansen vil denne modellen være lik en AR(1)-modell hvor avhengig variabel kun er avhengig av en lagget verdi av seg selv. Selv om det i in-sample-analysen viser seg at betinget varians er lite signifikant kan disse resultatene endre seg i out-of-sample-analysen. Modellen vil derfor benyttes videre i neste kapittel uavhengig av at resultatene her indikerer liten eller ingen forklaringskraft fra GARCH-leddet.

I panel b er det isteden benyttet betinget varians estimert med daglige data. Betinget varians blir da betydelig mer signifikant samtidig som  $R^2$  og DW får verdier som vi må si oss mer tilfredse med. Testing indikerer at  $\beta_1$  er ulik både null og en på 1%-nivå og at  $\beta_0 \neq 0$  også på 1%-nivå. Altså har den betingede variansen forklaringskraft, men heller ikke her er estimatene forventningsrette. Vi ser at selv om historisk volatilitet inkluderes så er betinget varians statistisk signifikant. Estimatorene  $\beta_1$  reduseres derimot

ved inkludering av historisk volatilitet. Dette indikerer at GARCH-leddet ikke er effisient. En kan også merke seg at estimatoren her er mye lavere enn hva tilfellet var i modellen hvor VIX-indeksen var benyttet. GARCH-modellen har likevel forklaringskraft, og en kan ved estimering over hele datamaterialet ikke forutsi hvilke prediksjonsegenskaper modellen har for ulike delperioder innenfor de observasjonene som er benyttet. Funnene fra analysen gir sterk motivasjon for å benytte modellen fra panel b fremfor modellen fra panel a når prediksjonstester skal utføres. Likevel benyttes begge modeller videre ettersom en som nevnt ikke kan vite om disse resultatene gjelder for alle deler av datamaterialet.

Tidligere konkluderte vi med at implisitt volatilitet oftest overpredikerte volatiliteten. At implisitt volatilitet overpredikerer realisert volatilitet finnes av blant andre Jorion (1995) og Fleming (1998). De analyserer henholdsvis valutaopsjoner og indeksopsjoner. Det kan derfor sies at implisitt volatilitets overprediksjoner kan være uavhengig av hvilket underliggende vi ser på. Fleming (1998) hevder at en risikopremie på volatilitet kan medføre positiv skjevhet i estimat basert på implisitt volatilitet. Basert på denne observasjonen for implisitt volatilitet skulle det være mulig å tjene store summer på å selge opsjoner som i realiteten har priset inn en for høy volatilitet. Det finnes at det også er mulig å tjene store penger på denne strategien, men hvis en tar hensyn til transaksjonskostnader vil disse mulighetene forsvinne (Fleming(1993)). Ettersom betinget varians baserer seg på statistiske metoder vil en slik risikopremie på volatiliteten ikke gjøre seg gjeldende for prediksjoner, og en ville derfor ha grunn til å tro at det var mindre skjevhet ved disse modellene. Det viser seg at dette likevel ikke er tilfelle. Uavhengig av de påviste skjevhetene til de ulike modellene viser analysen at både implisitt volatilitet og betinget volatilitet innehar egenskaper som kan benyttes til prediksjoner av fremtidig volatilitet. Til tross for at implisitt volatilitet gir best estimat in-sample betyr ikke det nødvendigvis at dette gjelder out-of-sample. Spesielt kan det være store avvik når det gjelder foretrukket modell når en deler opp datasettet i ulike typer regimer.

## 5 Prediksjon

I dette kapittelet vil det foretas prediksjoner out-of-sample. I første omgang vil perioden mellom 7.mars 2006 og 17.desember 2009 være i fokus. I løpet av denne perioden

ble markedene hardt rammet av finanskrisen, og volatiliteten nådde rekordhøye verdier. Nettopp derfor er denne perioden interessant dersom vi skal følge Poon og Grangers oppfordring om å dele opp prediksjonsperiodene i “normale” og “eksepsjonelle” perioder. En ønsker å undersøke om opsjonsmarkedet er effisient uavhengig av hvilket regime vi finner oss i. Hypotesen er at modellen som er basert på implisitt volatilitet vil gi best prediksjoner når markedet er normalt, men at den ikke nødvendigvis gir best prediksjoner i “eksepsjonelle” perioder. Dersom en annen modell gir bedre prediksjoner vil det være et tegn på at opsjonsmarkedet har priset inn feil volatilitet og dermed ikke er effisient.

Ingen andre delperioder kan sies å være like høyvolatil som finanskrisearene. Disse årene kan sies å være en eksepsjonelt “eksepsjonell” periode. Vi kan dermed ikke vente at funnene fra prediksjoner gjort i denne perioden vil gjelde for andre høyvolatilitetsperioder. Prediksjoner som blir utført under denne tidsperioden vil kun si noe om markedets effisiens i akkurat denne perioden. For å undersøke om funnene er generaliserbare for andre “eksepsjonelle” perioder vil det derfor foretas prediksjoner for flere liknende delperioder i delkapittel 5.2.

## 5.1 Volatilitetsprediksjoner for finanskrisearene

For å avdekke om modellene har ulike prediksjonsegenskaper for ulike markedstilstander velges det først å se på de fire foregående årene. I denne perioden velger vi å definere tre ulike markedstilstander. Se figur 4 for hvilke tidsrom disse tilstandene strekker seg over. Periode 1 defineres som “normaltilstand”, periode 2 og periode 3 defineres samlet som “ekstremtilstand”. Periode 2 defineres som en periode med sterk økning i volatiliteten og periode 3 defineres som en periode med sterkt nedadgående volatilitet. Som en kan se av figur 4 virker det som om korrelasjonen mellom avkastningen og volatiliteten er sterkt negativ. Dette samsvarer med de antatte asymmetriske egenskapene mellom disse to variablene. I periode 1 er det relativt lite fluktuasjoner i avkastningsratene, og volatiliteten er da på et relativt stabilt nivå. Når nivået på S&P 500 reduseres, hvilket vil si negative avkastningsrater, skyter volatiliteten i været. Når nivået på indeksen stabiliserer seg og begynner å stige reduseres volatiliteten.

De siste 48 observasjonene utelates ved modelleringen slik at man kan utføre prediksjoner over ovennevnte periode. Periode 1 består av 26 observasjoner, periode 2 består av 7



observasjoner og periode 3 består av 15 observasjoner. Periode 2 og periode 3 vil da totalt bestå av 22 observasjoner. Totalt vil prediksjoner utføres for 48 observasjoner. Estimering blir i første omgang gjort hvor de siste 48 observasjonene utelates før det kjøres 1-stegs prediksjoner med rekursivt vindu. Rekursivt vindu vil si at utvalgets starttidspunkt holdes fast mens horisonten gradvis utvides. Alternativt kunne en benyttet seg av et rullerende vindu hvor avstanden mellom start og sluttidspunkt holdes konstant ved estimeringen. På grunn av relativt korte prediksjonsperioder vil derimot valget mellom rekursiv og rullerende estimering ikke ha noen stor betydning. Med rekursivt vindu utføres prediksjoner først for én periode. Deretter utvides utvalget med én observasjon før det foretas en ny prediksjon for neste periode. Dette fortsetter til prediksjoner er kalkulert for alle periodene vi ser på. En kan ved å utelate de siste 48 observasjonene kjøre prediksjoner for alle de utelatte observasjonene og for periode 1 alene. Deretter estimeres modellen når 22 observasjoner utelates. Nå kan verdier for periode 2 predikeres og en kan estimere verdier for periode 2 og periode 3 samlet. Til sist estimeres modellen hvor det utelates 15 observasjoner før prediksjoner gjøres kun for periode 3. På denne måten vil volatiliteten predikeres i “normaltilstand” og “ekstremtilstand” samt underperiodene “oppgang” og “nedgang”.

Prediksjonene vil foretas ved hjelp av fire modeller. Disse fire modellene ble utredet i kapittel 4. To modeller baserer seg på betinget varians fra GARCH-modellering og to modeller baserer seg på markedets volatilitetsforventninger gjennom VIX-indeksens verdier. Alle modellene inkluderer også en lagget verdi av historisk volatilitet. Etersom VIX-indeksen skal inneholde markedets oppfatning av all informasjon som er tilgjengelig på ethvert gjeldende tidspunkt vil en forvente at modeller basert på implisitt volatilitet vil gi bedre prediksjoner enn modellene basert på betinget varians. Analysen foretatt insample tyder også på at implisitt volatilitet virkelig gir bedre prediksjoner. Dersom dette ikke er tilfelle vil det være et argument mot svak effisiens i opsjonsmarkedet.

Den første modellen er en modell som benytter et GARCH-ledd fra en AGARCH-modell som baserer seg på månedlige data. Det viste seg at asymmetriske sjokk ikke var statistisk signifikante i GARCH-leddet til denne modellen. GARCH-leddet i seg selv ble også lite signifikant i prediksjonsmodellen. En vil også ha sterke autokorrelasjoner i restleddet ved bruk av denne modellen. Modellen vil likne mye på en AR(1)-modell ettersom kun det laggede leddet av historisk volatilitet var statistisk signifikant. Den andre modellen som

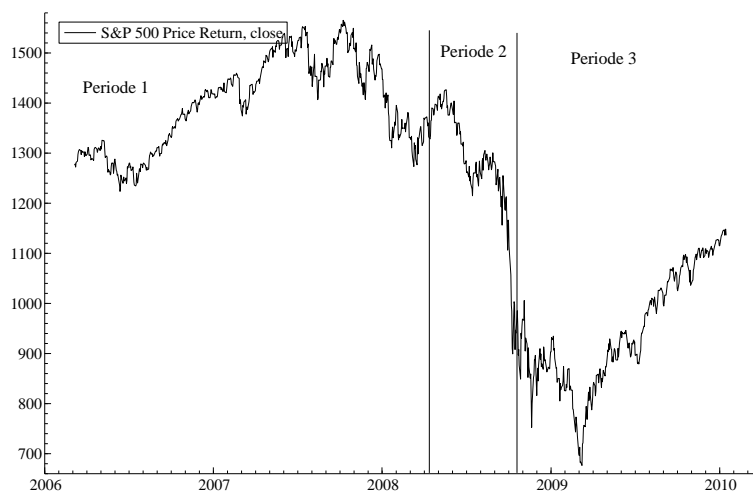
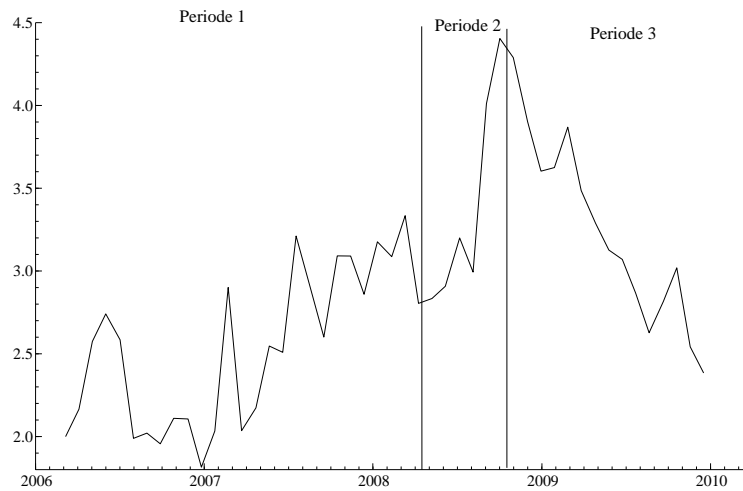
baserer seg på betinget varians benytter et GARCH-ledd fra en ATGARCH-modell basert på daglige data. Denne modellen vil ta hensyn til asymmetriske effekter av sjokk. En vil heller ikke behøve å ta hensyn til autokorrelasjon i restleddene ved bruk av denne modellen. Den første modellen som benytter implisitt volatilitet benytter VIX direkte i modellen. Den siste modellen vil inkludere et IV-estimat av implisitt volatilitet. I tillegg vil det bli utført naive prediksjoner ved hjelp av en “random walk”-modell. En slik modell baserer seg på antagelsen om at neste verdi av volatiliteten er tilfeldig, men med forventningsverdi lik dagens verdi. For denne modellen vil derfor  $\hat{h}_t = h_{t-1}$ . En slik modell benyttes kun som et sammenlikningsgrunnlag for de øvrige modellene.

Basert på analysen som ble foretatt in-sample vil vi forvente at modellene basert på implisitt volatilitet predikerer best. Spesielt vil forventningene til AGARCH-modellen være lave. Prediksjoner utført out-of-sample i et så spesielt regime som det vi nå har kan likevel gi overraskende resultater og vi velger derfor å gjøre prediksjoner med alle modellene. For å evaluere prediksjonsegenskapene til modellene er det benyttet RMSE som evalueringskriterium.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{h}_t - h_t)^2} \quad (5.17)$$

hvor  $\hat{h}_t$  er estimatverdier og  $h_t$  er ex-post observerte verdier.

Figur 4: Prediksjonsperioder



Tidsserien i den øverste figuren er den naturlige logaritmen til historisk volatilitet. Historisk volatilitet er definert empirisk som ved likning (4.13). Prediksjonsutvalget består totalt av 48 observasjoner fra perioden 7.mars 2006 til 17. desember 2009. Periode 1 er definert som “normaltilstand”. Periode 2 og periode 3 er sammen definert som “ekstremtilstand”. Herunder er periode 2 definert som periode med sterkt økende volatilitet mens periode 3 er definert som periode hvor volatiliteten reduseres kraftig. Den nederste figuren viser daglig sluttnotering på S&P 500-indeksen.

Evalueringskriteriet RMSE blir høyere jo større avstand det er mellom predikert verdi og observert verdi. Vi ønsker derfor en så lav verdi som mulig på RMSE. Jo lavere verdi på

RMSE, jo bedre prediksjoner har modellen utført. RMSE sier noe om hvor nøyaktige prediksjonene er, men ikke noe om prediksjonene har en tendens til å være høyere eller lavere enn observert verdi. Vi lager derfor et evalueringskriterium som kan gi oss en pekepinn på retningen til prediksjonene. Dette retningskriteriet er vist algebraisk i likning (5.18). Et positivt retningskriterium indikerer at prediksjonene i snitt er under den observerte verdien. Et negativt retningskriterium indikerer at modellen i snitt overpredikerer den observerte verdien. Størrelsen på kriteriet sier noe om hvor mye modellene under- eller overpredikerer. Optimalt vil ME være lik null dersom modellen predikerer godt. Vi lager også et kriterium for å undersøke hvorvidt retningen på prediksjonene er i samsvar med retningen på observert historisk volatilitet. Altså om vi predikerer økning i volatiliteten når volatiliteten øker og/eller predikerer nedgang i volatiliteten når volatiliteten reduseres. Kriteriet som benyttes for å avdekke dette teller hvor mange ganger en predikerer riktig retning og viser dette som en prosentandel av antall prediksjoner foretatt. Dette kriteriet er vist i likning (5.19). Jo høyere dette kriteriet er, desto bedre.

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (h_t - \hat{h}_t) \quad (5.18)$$

$$\Delta = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n I_t \quad (5.19)$$

hvor  $I_t = 1$  hvis  $\Delta \hat{h}_t \cdot \Delta h_t > 0$  og 0 ellers.  $\Delta \hat{h}_t = \hat{h}_t - h_{t-1}$  og  $\Delta h_t = h_t - h_{t-1}$ . Dersom både  $\Delta \hat{h}_t$  og  $\Delta h_t$  antyder samme retning vil produktet av disse være positivt og blir da telt i indikatorfunksjonen  $I_t$ .

Det kan også være av interesse å undersøke hvor ofte de forskjellige modellene over-/underpredikerer verdien i de forskjellige regimene. For å undersøke dette benytter vi likning (5.20). Denne likningen gir oss rett og slett en prosentandel for hvor ofte modellen overpredikerer observert verdi. Ønskelig vil denne være rundt 50% i størrelse.

$$OP = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n I_t \quad (5.20)$$

hvor  $I_t = 1$  hvis  $\hat{h}_t > h_t$  og 0 ellers.

Tabell 7: Prediksjonsevaluering for finanskriseårene

Periode	AGARCH				ATGARCH			
	RMSE	ME	OP	$\Delta$	RMSE	ME	OP	$\Delta$
1+2+3	0.35924	0.09551	44%	68.89%	0.34334	0.09034	38%	64.44%
1	0.34529	0.03770	54%	80.00%	0.34535	0.03506	50%	72.00%
2+3	0.37345	0.16384	32%	55.00%	0.34410	0.15567	23%	55.00%
2	0.57329	0.32969	29%	33.33%	0.52543	0.32043	29%	16.67%
3	0.21105	0.08645	33%	64.29%	0.19451	0.07877	20%	71.43%
	VIX				IVIX			
	RMSE	ME	OP	$\Delta$	RMSE	ME	OP	$\Delta$
1+2+3	0.35896	0.13090	35%	60.00%	0.37387	0.10909	40%	60.00%
1	0.34947	0.12611	35%	64.00%	0.33936	0.09056	35%	64.00%
2+3	0.36912	0.13657	36%	55.00%	0.40497	0.13100	45%	55.00%
2	0.57348	0.38545	14%	33.33%	0.63419	0.37795	29%	16.67%
3	0.20516	0.02042	47%	64.29%	0.21883	0.01575	53%	71.43%
	RW							
	RMSE	ME	OP	$\Delta$				
1+2+3	0.36007	0.02288	51%	0%				
1	0.37772	0.05339	48%	0%				
2+3	0.33671	-0.01524	55%	0%				
2	0.46989	0.26670	17%	0%				
3	0.25950	-0.13608	71%	0%				

Tabellen viser RMSE, ME, OP og  $\Delta$  for prediksjoner utført over de ulike periodene. AGARCH er prediksjonsmodellen med betinget varians fra månedsdata. ATGARCH er prediksjonsmodell med betinget varians fra daglige data. VIX er prediksjonsmodell med VIX-indeksen. IVIX er prediksjonsmodell med IV-estimat for VIX. RW er modellen basert på random walk. Prediksjonsperioden består totalt av 48 observasjoner fra perioden 7.mars 2006 til 17. desember 2009.

I tabell 7 rapporteres RMSE, ME, OP og  $\Delta$  for prediksjoner over de ulike periodene. Mange interessante spørsmål kan stilles rundt disse resultatene. Under hvilke perioder presterer modellene generelt godt? Under hvilke perioder presterer modellene generelt dårlig? I hvilke perioder er det størst/minst forskjell på prediksjonene til de ulike modellene? Hvilken modell utpeker seg som den beste til å foreta prediksjoner? Hvilke perioder er preget av over-/underprediksjon og hvorfor? Hva sier resultatene angående markedseffisiens i opsjonsmarkedet? Nedenfor vil det forsøkes å gi svar på disse spørsmålene.

Samtlige modeller gir høyest verdier for RMSE i perioden med sterk volatilitetsøkning

(periode 2). Det er utvilsomt denne perioden som vil være vanskeligst å lage prediksjoner for. Slike plutselige økninger i volatiliteten blir ofte utløst av plutselige sjokk i markedet. Sjokkene får økonomiske modeller til å bryte sammen. De statistiske modellene får vanskeligheter når plutselige ekstremverdier oppstår. Informasjonssettet til markedsaktørene blir plutselig veldig mye større og mye mer uoversiktlig. Det blir derfor vanskeligere å prise finansielle instrumenter. Det viser seg, basert på verdiene av OP og ME, at modellene basert på implisitt volatilitet underpredikerer volatiliteten både oftere og i større grad enn de statistiske modellene under denne ekstreme volatilitetsøkningen. Med verdier på RMSE mellom 0,52543 og 0,634190 er dette den perioden hvor det også er størst forskjell på nøyaktigheten til modellene. Avviket mellom RMSE for den beste og den dårligste modellen er på hele 0,108760, mot et avvik på kun 0,024320 i periode 3. GARCH-modellene gir bedre resultater enn modellene med implisitt volatilitet denne perioden. Faktisk er det den naive modellen basert på random walk som gir lavest RMSE i periode 2. Etttersom de statistiske modellene og RW-modellen viser seg å gi bedre prediksjoner enn VIX-modellene i periode 2 kan dette tyde på at opsjonsmarkedet ikke er effisient i løpet av denne delperioden. Det må forøvrig påpekes at periode 2 består av kun 7 observasjoner, og at det derfor kan være grunn til å være skeptisk angående resultatene.

Noe overraskende er det at samtlige modeller predikerer mest nøyaktig under perioden med nedgang i volatiliteten (periode 3). Med en rapportert RMSE på rundt 0,2 for alle modeller er avvikene til prediksjonene betydelig lavere i denne delperioden enn i andre delperioder. Plutselig nedgang i volatiliteten har aldri forekommet i dataseriene uten at volatiliteten i utgangspunktet var på et høyt nivå. En plutselig nedgang i volatilitet fra et normalt nivå lar seg heller ikke forklare teoretisk. Etttersom denne volatilitetsnedgangen følger naturlig etter oppgangen vil det si at det ikke nødvendigvis er like mye ny informasjon for markedsaktørene i løpet av denne perioden. Det kan nok være at volatilitetsnedgangen er et resultat av at markedsaktørene har fått tid på seg til å fortolke den informasjonen som er kommet etter at sjokkbølgene har lagt seg. Historisk volatilitet vil naturlig reduseres som følge av at avkastningsratene stabiliserer seg. Når avkastningsratene etter hvert snur og blir positive vil ATGARCH-modellen dra fordel av at den tar hensyn til asymmetriske egenskaper ved volatiliteten. Mye av årsaken til at ATGARCH kommer best ut ifølge RMSE kan ha sammenheng med dette. OP er mye høyere for modellene basert på implisitt volatilitet nå enn hva tilfellet er for normalt tilstand. I følge ME var

underprediksjon av volatiliteten også mye tydeligere i tiden før sjokket enn etter sjokket. Enten kan dette tolkes som at markedsaktørene undervurderte volatiliteten i forkant av sjokket som kom; alternativt kan en foreslå at nivået på ME før sjokket er hva som er normalt og at markedsaktørene etter sjokket går mer i retning av overprediksjon fordi frykten har satt seg i markedet. I følge litteratur innen fagfeltet adferdsfinans skal det finnes bevis for at aktører har en tendens til å vektlegge observasjoner fra nær fortid sterkere enn tidligere observasjoner. I så fall kan det forklare at det er en tendens til mer overprediksjon i periode 3. Det kan også hende at aktørenes risikoaversjon har økt etter den kraftige nedgangen i aktivaprisene. En slik økt risikoaversjon vil øke etterspørselen etter sikringsinstrumenter. I neste omgang vil økt etterspørsel gi en høyere pris på disse instrumentene og dermed en høyere implisitt volatilitet enn hva som er normalt.

For både periode 2 og periode 3 er det modellen som er avhengig av ATGARCH som predikerer volatilitet med størst nøyaktighet. Dette gjør den også mest nøyaktig for periode 2 og periode 3 samlet. Retningskriteriet  $\Delta$  viser at det stort sett er liten forskjell på modellenes retningsegenskaper i samtlige perioder bortsett fra periode 1. I denne perioden er det også GARCH-modellene som er overlegne. Totalt så viser det seg at prediksjonsmodellen med ATGARCH predikerer mest nøyaktig i fire av fem tilfeller. Den eneste perioden hvor den presterer dårligere enn en annen modell er for perioden som er definert som “normaltilstand”. Dette er den markedstilstanden hvor det er minst forskjell i avvikene av prediksjonene for de ulike modellene. En forskjell i RMSE på kun 0,010110 skiller den beste fra den dårligste modellen i denne delperioden. Forklaringen på den lave forskjellen kan være at det for markedsaktørene kommer lite ny informasjon og at det derfor i seg selv bidrar til å forenkle volatilitetsprediksjonen. Men dersom vi følger dette argumentet burde denne perioden også gi mest nøyaktige prediksjoner. Det gjør den derimot ikke da nøyaktigheten til prediksjonene for periode 3 overgår prediksjonene for periode 1 med god margin.

Det er litt oppsiktsvekkende at modellene basert på implisitt volatilitet gjør det såpass svakt i forhold til modellene basert på betinget volatilitet. Resultatene tyder på at det har vært fravær av effisiens i opsjonsmarkedet i løpet av finanskriseårene. Om fraværet av effisiens kan sies å gjelde for alle perioder med sterk nedgang eller oppgang i volatiliteten er umulig å si basert på denne analysen. Den perioden vi har sett på har vært det mest ekstreme av ekstremtilstander. Basert på prediksjoner for de fire siste årene

er det altså ikke mulig å fastslå om disse resultatene er generaliserbare for alle perioder med sterk nedgang/oppgang i volatiliteten. For å undersøke dette nærmere vil det foretas prediksjoner for flere perioder som innehar liknende volatilitetsmønster. Det vil bli utført prediksjoner for fem oppgangsperioder og fem nedgangsperioder for å undersøke om funnene kan generaliseres for flere tilfeller. Det vil også bli foretatt prediksjoner for to delperioder hvor volatiliteten er relativt stabil.

## 5.2 Analyse for å avdekke om funnene er generaliserbare

Her vil det analyseres om funnene fra delkapittel 5.1 kan sies å være generaliserbare for andre deler av datamaterialet som er benyttet. Det gjøres prediksjoner for fem delperioder med nedadgående volatilitet og fem delperioder med økende volatilitet. I tillegg foretas det prediksjoner for to delperioder hvor volatiliteten kan sies å være karakterisert av en mer normal tilstand. Hva som er normalt for volatiliteten kan diskuteres, men her vil normal tilstand defineres som de periodene hvor det ikke har vært sterkt økende eller sterkt nedadgående volatilitet. I løpet av de 20 årene datasettet består av er det få delperioder som deler denne karakteristikken. Man kan derfor stille et spørsmål om det er normalt at volatiliteten ikke er preget av sterk økning eller nedgang. Et kanskje mer passende navn for disse delperiodene vil derfor være “rolig marked”. Hvilket navn man velger å benytte er derimot ikke av essensiell interesse.

Tabell 8 viser for hvilke delperioder det blir utført prediksjoner for. For hver av periodene i tabell 8 lages estimatorene i modellene frem til starttidspunktet av den aktuelle underperioden. Deretter benyttes rekursivt vindu for å predikere én og én verdi for hele delperioden. For alle periodene vil observerte dataverdier helt frem til starttidspunktet av perioden benyttes. Det er altså ikke de samme datapunkter som benyttes for å lage prediksjoner for de ulike underperiodene. Eksempelvis vil alle data frem til 25.mars 2000 benyttes for å lage prediksjoner for perioden 25.mars 2000 til 20.august 2000. For prediksjoner for perioden 29.mai 2006 til 17.januar 2007 benyttes data helt frem til 29.mai 2006 for å danne estimatorene. På denne måten får vi observert verdi og predikert verdi for alle datapunktene vi ønsker å se på. Predikert verdi ved bruk av de ulike modellene og observert historisk verdi blir deretter lagret og samlet under sine respektive regimer. Deretter regnes de ulike evalueringskriteriene ut for hver prediksjonsmodell.



Tabell 8: Ulike prediksjonsperioder

Nedgang i volatiliteten	Oppgang i volatiliteten	Normaltilstand
03-11-1997 → 10-04-1998	18-10-1996 → 15-10-1997	22-10-1998 → 06-11-1999
18-08-1998 → 08-07-1999	10-04-1998 → 18-08-1998	12-08-2003 → 25-03-2006
25-03-2000 → 20-08-2000	20-08-2000 → 28-12-2000	
21-09-2002 → 12-08-2003	25-12-2001 → 30-09-2002	
29-05-2006 → 17-01-2007	07-01-2007 → 04-03-2007	
Antall observasjoner:40	Antall observasjoner:33	Antall observasjoner:44

Vi velger også i dette delkapitlet å benytte de samme evalueringkriteriene som i delkapittel 5.1. Disse evalueringkriteriene er RMSE, ME, OP og  $\Delta$ . Verdiene av disse for de ulike modellene kan man se i tabell 9.

Tabell 9: Prediksjonsevaluering for ulike markedstilstander

	Nedgang i volatiliteten				
	AGARCH	ATGARCH	VIX	IVIX	RW
RMSE	0.23584	0.23178	0.20299	0.24540	0.34404
ME	-0.05210	-0.02482	-0.03947	-0.07225	-0.02245
OP	58%	48%	53%	60%	62%
$\Delta$	69.23%	71.79%	71.79%	69.23%	0%
	Oppgang i volatiliteten				
	AGARCH	ATGARCH	VIX	IVIX	RW
RMSE	0.39988	0.37617	0.33811	0.39228	0.50438
ME	0.26042	0.24516	0.20414	0.21678	0.02274
OP	18%	18%	21%	27%	44%
$\Delta$	56.25%	56.25%	65.63%	65.63%	0%
	Normaltilstand				
	AGARCH	ATGARCH	VIX	IVIX	RW
RMSE	0.23235	0.23559	0.17562	0.21037	0.23119
ME	-0.02157	-0.01807	0.03719	-0.01539	-0.02007
OP	55%	57%	41%	50%	51%
$\Delta$	60.47%	62.79%	72.09%	65.12%	0%

AGARCH er prediksjonsmodellen med betinget varians fra månedsdata. ATGARCH er prediksjonsmodell med betinget varians fra daglige data. VIX er prediksjonsmodell med VIX-indeksen. IVIX er prediksjonsmodell med IV-estimat for VIX. RW er modellen basert på random walk. Prediksjonene er utført for periodene vist i tabell 8

Det første en bør merke seg er at modellen basert på VIX-indeksens verdier gir lavest RMSE for alle de ulike markedstilstandene. I delkapittel 5.1 fant vi at modellen basert

på ATGARCH gav best prediksjoner. Denne utvidede analysen tilsier derimot at funnene fra forrige delkapittel ikke lar seg generalisere til liknende perioder. En kan derfor basert på resultatene fra tabell 9 ikke si at vi observerer fravær av effisiens i opsjonsmarkedet.

En kan også observere, gjennom negative verdier for ME, at samtlige modeller i snitt overpredikerer volatiliteten i nedgangstider. Som nevnt tidligere kommer perioder med nedadgående volatilitet ofte etter en periode med økning i volatiliteten. Det kan altså tenkes at informasjon fra høyvolatilitetsperioden tillegges vekt fremdeles. Dermed kan overprediksjon i påfølgende perioder være en tenkelig konsekvens. I forrige delkapittel fant vi også at modellene hadde størst presisjon i delperioden med nedadgående volatilitet. Dette er ikke lenger tilfelle. Vi observerer nå best prediksjonsegenskaper i normaltillstand, hvilket kan sies å være en observasjon mer i tråd med forventningene. Som sist finner vi at modellene gir solid underprediksjon når volatiliteten øker hurtig. Denne observasjonen kan altså sies å være generaliserbar. Når det gjelder  $\Delta$ -kriteriet viser det seg at VIX-modellene nå oftest predikerer riktig retning på fremtidig volatilitet. Spesielt i perioden med økning i volatiliteten kan man påstå at dette kriteriet er viktig. Sist fant vi at GARCH-modellene hadde størst verdi på  $\Delta$  i normalperioden. Nå viser det seg derimot at VIX-modellene er overlegne på retningsprediksjon også i normalperiodene.

Ettersom markedsaktørene er klar over at plutselige volatilitetssjokk kan forekomme bør det være en risikopremie for dette slik som foreslått av Fleming (1998). Men basert på OP og ME for normalperiodene viser det seg at modellen basert på VIX-indeksen underpredikerer volatiliteten. Dette gir ikke hold for at en slik risikopremie eksisterer. Denne risikopremien gjør seg i så fall gjeldende i kjølvannet etter et volatilitetssjokk. Men resultatene fra tabell 9 tilsier at markedsaktørene "glemmer" denne risikopremien når markedet er rolig. Argumentet for at det skal eksistere en risikopremie er i aller høyeste grad troverdig. Men denne risikopremien bør gjelde i alle delperioder. Fleming har i sin artikkel ikke delt inn perioder i ulike regimer. Det kan tenkes at den oppfattede risikopremien rett og slett oppstår som følge av aktørenes tendens til å prise opsjoner til en høyere volatilitet når volatiliteten er nedadgående. Da vil det i så fall tilsa at prisingen er en funksjon av risikoaversjonen til aktørene. Det kan også være en funksjon av volatiliteten til volatiliteten. Den viser seg å være størst ved økende volatilitet, og nest størst når volatiliteten er nedadgående. Hvis aktørene, jamfør adferdsfinans, tillegger nærliggende observasjoner størst vekt kan dette gi utslag i prisen på sikringsinstrumenter selv

etter volatiliteten snur og reduseres. Prisen og den implisitte volatiliteten blir da høyere enn hva den skulle ha vært i henhold til teorien om absolutt effisiens. Når markedet er rolig føler kanskje aktørene mindre behov for å sikre porteføljen. Dette kan gi lavere pris og implisitt volatilitet i rolige perioder. Men det kan tyde på at plutselige sjokk ikke er tatt høyde for i de rolige periodene.

Uavhengig av ovennevnte komplikasjoner er det modellen basert på VIX-indeksen som gir best prediksjoner i samtlige predefinerte regimer. En kan derfor anbefale modeller basert på implisitt volatilitet for investorer selv om de under finanskrisen ikke gav mest nøyaktige prediksjoner. Når det gjelder effisiens kan man påstå at opsjonsmarkedet kanskje ikke var effisient under finanskrisen, men vi har ikke klart å frembringe bevis for at dette er tilfellet for andre tilsvarende perioder.

## 6 Konklusjon

I denne oppgaven har det i all hovedsak vært to spørsmål som har vært sentrale. Er implisitt volatilitet den beste måten å predikere fremtidig volatilitet på? Og i hvilke typer regimer er det eventuelt andre modeller gjør det bedre? Det har da også samtidig vært et spørsmål om opsjonsmarkedet er effisient, og eventuelt for hvilke regimer det kan se ut til at det er fravær av effisiens i opsjonsmarkedet.

Fremgangsmåten som ble benyttet var å først foreta en analyse in-sample for deretter å gjøre prediksjoner out-of-sample. I analysen foretatt in-sample viste det seg at modeller basert på implisitt volatilitet var overlegne. Koeffisienten i regresjonsanalysen viste et statistisk signifikant 1-til-1-forhold mellom ex post historisk volatilitet og implisitt volatilitet. Dette avviker fra tidligere studier hvor koeffisienten stort sett har ligget mellom 0,6 og 0,8. Forklaringen på avviket fra tidligere studier var at data fra finanskrisearene gav en spesielt tykk høyre hale i fordelingen til residualene. At implisitt volatilitet verken var en effisient eller forventingsrett forklaringsvariabel er konsistent med de aller fleste tidligere studier.

I analysen foretatt out-of-sample fant vi at det kunne tyde på at opsjonsmarkedet ikke var effisient under finanskrisen. Grunnen til konklusjonen om fravær av effisiens ble begrunnet i at statistiske modeller foretok en mer nøyaktig prediksjon. Jamfør Famas definisjon av

effisiens tydet dette på fravær av effisiens fordi modeller basert på historiske data kunne predikere mer nøyaktig enn markedet selv. Det mest interessante spørsmålet vi deretter analyserte var om dette funnet kunne generaliseres til å gjelde for andre perioder med lignende volatilitetsmønster. Funnene tydet derimot på at modellene basert på implisitt volatilitet gav mest nøyaktige prediksjoner i den videre analysen. Vi kunne derfor ikke fastslå at fraværet av effisiens var generaliserbart for liknende regimer. I den utvidede analysen kunne vi derimot finne noe interessant hva gjaldt implisitt volatilitets prediksjonsevner. I tidligere studier har det vist seg at implisitt volatilitet har en tendens til å overpredikere ex post volatilitet. Dette har ledet til å tro at det eksisterer en inkalkulert risikopremie i den implisitte volatiliteten. Vi fant derimot at modellene basert på implisitt volatilitet har en tendens til å underpredikere ex post volatilitet i rolige perioder, men med overprediksjon i perioder med nedadgående volatilitet. Dette tyder på at konklusjonen om denne risikopremien bør problematiseres, om den i det hele tatt eksisterer.

Funnene i oppgaven har brakt lys over problematikken rundt at forskjellige prediksjonsmodeller kan være best egnet under ulike regimer. Det er kun foretatt prediksjoner i tre ulike definerte regimer med fire ulike modeller. Det kan derfor tenkes at andre prediksjonsmodeller vil være overlegne de som er benyttet i denne oppgaven, og det kan tenkes at andre typer predefinerte regimer også kan frembringe interessante resultater. Tidshorisonten for prediksjoner har også vært fastsatt til en månedlig horisont. Det kan også være at forskjellige modeller gir ulike resultater hvis man varierer prediksjonshorisonten. For en videre analyse vil derfor andre modeller, andre definerte regimer og forskjellige prediksjonshorisonter være mulige utvidelser.

## Referanser

- Amin, K. I. og Ng, V. K. (1997): "Inferring Future Volatility from the Information in Implied Volatility in Eurodollar Options: A New Approach." *The Review of Financial Studies* 10, 333–367.
- Black, F. og Scholes, M. (1973): "The pricing of options and corporate liabilities." *The Journal of Political Economy* 81, 637–659.
- Bollerslev, T. (1986): "Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity." *Journal of econometrics* 31, 307–327.
- Brooks, C. (2008): *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge University Press.
- Canina, L. og Figlewski, S. (1993): "The informational content of implied volatility." *The Review of Financial Studies* 6, 659–681.
- Chicago Board Options Exchange (2009): "The CBOE volatility index - VIX." <http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>.
- Christensen, B. og Prabhala, N. (1998): "The relation between implied and realized volatility." *Journal of Financial Economics* 50, 125–150.
- Dickey, D. A. og Fuller, W. A. (1979): "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root." *Journal of the American Statistical Association* 74, 427–431.
- Fama, E. (1970): "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical work." *Journal of Finance* 25, 383–417.
- Fleming, J. (1993): "The valuation and information content of S&P 100 index options." Doktorgradsavhandling, Duke University.
- Fleming, J. (1998): "The quality of market volatility forecasts implied by S&P 100 index option prices." *Journal of Empirical Finance* 5, 317–345.
- Granger, C. W. og Poon, S.-H. (2003): "Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review." *Journal of Economic Literature* 41, 478–539.
- Hull, J. C. (2008): *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Prentice Hall.
- Jorion, P. (1995): "Predicting volatility in the foreign exchange market." *Journal of Finance* 50, 507–528.
- Koopman, S. J., Jungbacker, B. og Hof, E. (2005): "Forecasting daily variability of the S&P 100 stock index using historical, realised and implied volatility measure-

- ments.” *Journal of Empirical Finance* 12, 445–475.
- McDonald, R. L. (2006): *Derivatives Markets*. Pearson Addison Wesley.
- Rakkestad, K. J. (2002): “Estimering av indikatorer for volatilitet.” Norges Bank, Working Paper -avdeling for verdipapirer og internasjonal finans.
- Schwert, G. W. (1990): “Stock Volatility and the Crash of '87.” *The Review of Financial Studies* 3, 77–102.
- Summers, L. H. (1985): “On Economics and Finance.” *The Journal of Finance* 40, 633–635.
- Taylor, S. J. (1986): “Forecasting the volatility of Currency Exchange Rates.” *International Journal of forecasting* 3, 159–170.

# A Appendiks

## A.1 ADF-tester

ADF-tester for tidseriene fra delkapittel 3.2. Variabeldefinisjon:

VIX = VIX-indeksen

LVIX = Den naturlige logaritmen til VIX-indeksen

PR std = Historisk standardavvik definert som i likning (4.13)

LPR std = Den naturlige logaritmen til PR std

\* indikerer forkastelse av random walk på 5%-nivå, \*\* indikerer forkastelse av random walk på 1%-nivå.

Antall laggede differenser er bestemt av minimumsverdien av AIC.

Tabell 10: PR std: ADF tests

PR std: ADF tests (T=5118, Constant; 5%=-2.86 1%=-3.43)

D-lag	t-adf	beta Y1	sigma	t-DYlag	t-prob	AIC	F-prob
96	-3.525**	0.99468	0.8633	1.512	0.1305	-0.2749	0.9631
95	-3.455**	0.99479	0.8635	0.4895	0.6245	-0.2748	0.7177
94	-3.436**	0.99482	0.8634	-1.920	0.0549	-0.2752	0.7931
93	-3.535**	0.99468	0.8636	-0.004285	0.9966	-0.2748	0.4491
92	-3.540**	0.99468	0.8635	2.070	0.0385	-0.2752	0.5574
91	-3.443**	0.99483	0.8638	1.194	0.2324	-0.2748	0.2695
90	-3.390*	0.99492	0.8639	0.9377	0.3485	-0.2749	0.2520

Tabell 11: LPR std: ADF tests

LPR std: ADF tests (T=5118, Constant; 5%=-2.86 1%=-3.43)

D-lag	t-adf	beta Y1	sigma	t-DYlag	t-prob	AIC	F-prob
70	-3.201*	0.99434	0.05437	-0.7175	0.4731	-5.810	0.1238
69	-3.237*	0.99428	0.05436	-0.03466	0.9724	-5.810	0.1382
68	-3.242*	0.99428	0.05436	-0.08030	0.9360	-5.811	0.1668
67	-3.250*	0.99427	0.05435	0.5590	0.5762	-5.811	0.1985
66	-3.228*	0.99431	0.05435	-8.703	0.0000	-5.811	0.2231
65	-3.653**	0.99353	0.05475	-1.653	0.0985	-5.797	0.0000
64	-3.744**	0.99337	0.05476	0.9258	0.3546	-5.797	0.0000

Tabell 12: VIX: ADF tests

VIX: ADF tests (T=5118, Constant; 5%=-2.86 1%=-3.43)

D-lag	t-adf	beta Y1	sigma	t-DYlag	t-prob	AIC	F-prob
89	-3.010*	0.99196	1.407	0.8580	0.3910	0.7004	0.1646
88	-2.976*	0.99206	1.407	-0.1703	0.8648	0.7002	0.1847
87	-2.986*	0.99204	1.407	-0.5493	0.5828	0.6998	0.2398
86	-3.013*	0.99198	1.407	-2.069	0.0386	0.6994	0.2851
85	-3.106*	0.99173	1.407	2.587	0.0097	0.6999	0.1449
84	-2.997*	0.99203	1.408	-2.474	0.0134	0.7008	0.0369
83	-3.108*	0.99174	1.409	-1.451	0.1467	0.7017	0.0096

Tabell 13: LVIX: ADF tests

LVIX: ADF tests (T=5118, Constant; 5%=-2.86 1%=-3.43)

D-lag	t-adf	beta Y1	sigma	t-DYlag	t-prob	AIC	F-prob
16	-3.621**	0.99184	0.05656	-0.5546	0.5792	-5.741	0.0000
15	-3.655**	0.99178	0.05656	0.5435	0.5868	-5.742	0.0000
14	-3.632**	0.99184	0.05655	-1.111	0.2668	-5.742	0.0000
13	-3.695**	0.99171	0.05656	1.727	0.0842	-5.742	0.0000
12	-3.611**	0.99191	0.05657	-0.3775	0.7058	-5.742	0.0000
11	-3.635**	0.99186	0.05656	-3.370	0.0008	-5.742	0.0000
10	-3.817**	0.99146	0.05662	3.680	0.0002	-5.740	0.0000



Tabell 14: DVIX: ADF tests

DVIX: ADF tests (T=5118, Constant; 5%=-2.86 1%=-3.43)

D-lag	t-adf	beta Y1	sigma	t-DYlag	t-prob	AIC	F-prob
88	-9.705**	-1.2353	1.409	-0.7088	0.4785	0.7028	0.3241
87	-9.897**	-1.2577	1.409	0.3055	0.7600	0.7025	0.3636
86	-9.951**	-1.2481	1.409	0.6107	0.5415	0.7021	0.4319
85	-9.963**	-1.2290	1.408	2.112	0.0347	0.7018	0.4795
84	-9.763**	-1.1649	1.409	-2.552	0.0107	0.7023	0.2652
83	-10.22**	-1.2450	1.410	2.589	0.0096	0.7032	0.0827
82	-9.954**	-1.1667	1.411	1.568	0.1169	0.7041	0.0205

