

Optimal lagerstyring av kontanter i minibanker med usikker etterspørsel

Geir Martin Bakken

Michael Wiik

Industriell økonomi og teknologiledelse

Innlevert: juni 2014

Hovedveileder: Lars Magnus Hvattum, IØT

Medveileder: Marielle Christiansen, IØT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

MASTERKONTRAKT

- uttak av masteroppgave

1. Studentens personalia

Etternavn, fornavn Bakken, Geir Martin	Fødselsdato 05. aug 1988
E-post geirmaba@stud.ntnu.no	Telefon 91314579

2. Studieopplysninger

Fakultet Fakultet for samfunnsvitenskap og teknologiledelse	
Institutt Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse	
Studieprogram Industriell økonomi og teknologiledelse	Hovedprofil Anvendt økonomi og optimering

3. Masteroppgave

Oppstartsdato 15. jan 2014	Innleveringsfrist 11. jun 2014
Oppgavens (foreløpige) tittel Optimal lagerstyring av kontanter i minibanker med usikker etterspørsel	
Oppgavetekst/Problembeskrivelse Formålet er å utvikle optimeringsbasert beslutningsstøtte for konkurransedyktig drift av minibanker, med fokus på kostnadsreduksjoner og driftsstabilitet. Optimeringsmodell(er) som utvikles vil ha et operasjonelt/taktisk fokus, der usikker etterspørsel etter kontanter, mengde kontanter som påfylles og frekvens av påfyllinger av minibanker står sentralt. Masteroppgaven skrives i samarbeid med SpareBank1 Midt-Norge.	
Hovedinnhold: 1. En beskrivelse av problemet som skal studeres 2. Utvikling av optimeringsmodell(er) for det beskrevne problemet 3. Implementering av optimeringsmodell(er) ved bruk av egnet programvare 4. Kjøring av modell(er) med relevante data og påfølgende diskusjon rundt optimeringstekniske og økonomiske resultater	
Hovedveileder ved institutt Førsteamanuensis Lars Magnus Hvattum	Medveileder(e) ved institutt Marielle Christiansen
Merknader 1 uke ekstra p.g.a påske.	

4. Underskrift

Student: Jeg erklærer herved at jeg har satt meg inn i gjeldende bestemmelser for mastergradsstudiet og at jeg oppfyller kravene for adgang til å påbegynne oppgaven, herunder eventuelle praksiskrav.

Partene er gjort kjent med avtalens vilkår, samt kapitlene i studiehåndboken om generelle regler og aktuell studieplan for masterstudiet.

TRONDHEIM / 9.4.2014

.....
Sted og dato

Gen. Martin Bohren
.....
Student

.....
Hovedveileder

Originalen lagres i NTNUs elektroniske arkiv. Kopi av avtalen sendes til instituttet og studenten.

MASTERKONTRAKT

- uttak av masteroppgave

1. Studentens personalia

Etternavn, fornavn Wiik, Michael	Fødselsdato 22. apr 1985
E-post michaew@stud.ntnu.no	Telefon 99745129

2. Studieopplysninger

Fakultet Fakultet for samfunnsvitenskap og teknologiledelse	
Institutt Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse	
Studieprogram Industriell økonomi og teknologiledelse	Hovedprofil Anvendt økonomi og optimering

3. Masteroppgave

Oppstartsdato 15. jan 2014	Innleveringsfrist 11. jun 2014
Oppgavens (foreløpige) tittel Optimal lagerstyring av kontanter i minibanker med usikker etterspørsel	
Oppgavetekst/Problembeskrivelse Formålet er å utvikle optimeringsbasert beslutningsstøtte for konkurransedyktig drift av minibanker, med fokus på kostnadsreduksjoner og driftsstabilitet. Optimeringsmodell(er) som utvikles vil ha et operasjonelt/taktisk fokus, der usikker etterspørsel etter kontanter, mengde kontanter som påfylles og frekvens av påfyllinger av minibanker står sentralt. Masteroppgaven skrives i samarbeid med SpareBank1 Midt-Norge.	
Hovedinnhold: 1. En beskrivelse av problemet som skal studeres 2. Utvikling av optimeringsmodell(er) for det beskrevne problemet 3. Implementering av optimeringsmodell(er) ved bruk av egnet programvare 4. Kjøring av modell(er) med relevante data og påfølgende diskusjon rundt optimeringstekniske og økonomiske resultater	
Hovedveileder ved institutt Førsteamanuensis Lars Magnus Hvattum	Medveileder(e) ved institutt Marielle Christiansen
Merknader 1 uke ekstra p.g.a påske.	

4. Underskrift

Student: Jeg erklærer herved at jeg har satt meg inn i gjeldende bestemmelser for mastergradsstudiet og at jeg oppfyller kravene for adgang til å påbegynne oppgaven, herunder eventuelle praksiskrav.

Partene er gjort kjent med avtalens vilkår, samt kapitlene i studiehåndboken om generelle regler og aktuell studieplan for masterstudiet.

TRONDHEIM / 9.4. 2014

Sted og dato


.....
Student


.....
Hovedveileder

Originalen lagres i NTNUs elektroniske arkiv. Kopi av avtalen sendes til instituttet og studenten.

SAMARBEIDSKONTRAKT

1. Studenter i samarbeidsgruppen

Etternavn, fornavn Bakken, Geir Martin	Fødselsdato 05. aug 1988
Etternavn, fornavn Wiik, Michael	Fødselsdato 22. apr 1985

2. Hovedveileder

Etternavn, fornavn Hvattum, Lars Magnus	Institutt Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
---	---

3. Masteroppgave

Oppgavens (foreløpige) tittel Optimal lagerstyring av kontanter i minibanker med usikker etterspørsel

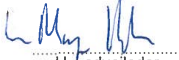
4. Bedømmelse

Kandidatene skal ha *individuell* bedømmelse
Kandidatene skal ha *felles* bedømmelse



TRONDHEIM / 9.4.2014

.....
Sted og dato


.....
Hovedveileder

Geir Martin Bakken

Geir Martin Bakken


.....
Michael Wiik

Originalen oppbevares på instituttet.

Forord

Dette arbeidet er gjort i forbindelse med masteroppgaven innen fordypningen anvendt økonomi og optimering på studiet industriell økonomi og teknologiledelse, ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) våren 2014.

Masteroppgaven er skrevet i samarbeid med SpareBank 1 Midt-Norge, og oppgaven er således skrevet med tanke på SpareBank 1 Midt-Norge som publikum. Dette betyr at beskrivelser rundt teori, optimeringsmodeller og liknende er skrevet med mål om at ansatte ved SpareBank 1 Midt-Norge i stor grad skal kunne forstå hva masteroppgaven omhandler. Etter ønske fra SpareBank 1 Midt-Norge er masteroppgaven forfattet på norsk.

Vi vil takke Professor Lars Magnus Hvattum og Professor Marielle Christiansen ved NTNU for deres gode og uvurderlige veiledning underveis i arbeidet. Vi ønsker også å takke SpareBank 1 Midt-Norge for et nært samarbeid og god tilgjengelighet i hele vår. En spesiell takk til vår kontaktperson hos banken, Rune Forslund Bostad.

Sammendrag

Lønnsomheten av norske bankers drift av minibanker er redusert de siste årene. Dette som en konsekvens av blant annet en kraftig økning av korttransaksjoner og dertil nedgang i kontantuttak fra minibanker. Redusert lønnsomhet innen drift av minibanker er utgangspunktet for denne rapporten, som ser på kostnadsbesparelser ved bruk av optimeringsbasert beslutningsstøtte for påfylling av minibanker. Rapporten tar utgangspunkt i hvordan SpareBank 1 Midt-Norge drifter sine minibanker i dag.

Etterspørselen etter kontanter ansees å være stokastisk i denne rapporten og på bakgrunn av historisk data for etterspørselen fremstilles en prognose for fremtidig etterspørsel. Videre undersøkes to forskjellige måter å håndtere usikkerheten i etterspørselen etter kontanter: sikkerhetslager og sannsynlighetsbegrenset programmering (*Chance Constrained Programming*). Optimeringsmodellenes hensikt er å komme frem til en optimal påfyllingsplan for en minibank som minimerer kontanthåndterings- og kapitalkostnadene samtidig som den forventede etterspørselen etter kontanter dekkes.

Beslutningene som optimeringsmodellene kommer frem til på grunnlag av prognostiseringen og håndteringen av usikkerheten viser seg i stor grad å dekke den reelle etterspørselen. I tillegg viser resultatene kostnadsreduksjoner på ca. 24 % sammenliknet med hvordan SpareBank 1 Midt-Norge drifter sine minibanker i dag. Etter det forfatterne kjenner til er modellene i rapporten nyskapende ved at retur av ubrukte sedler ved en påfylling og flere forskjellige valører i en og samme minibank er inkludert i modellene.

Abstract

The profitability of operating ATMs in Norway has declined in recent years. The main reasons for this are a substantial growth in the number of card transactions, resulting in a substantial decline in the number of cash withdrawals from ATMs, and lower income from withdrawal fees. Reduced profitability of operating ATMs is the background for this report. It focuses on reducing operational and capital costs of ATMs by using optimization as decision support for replenishing cash in ATMs. The report is based on how the Norwegian bank *SpareBank 1 Midt-Norge* operate their ATM network.

The cash demand for each ATM is forecasted using historical demand and the demand uncertainty is dealt with using two different methods: safety stock and chance constrained programming. Optimization models are developed with the objective of finding the optimal replenishment plan for each ATM that minimizes capital and operational costs, and at the same time meet the demand for cash.

Analysis show that the results from the models, that takes decisions based on the demand forecast, are of high quality both in regard to meeting the realized demand and reduced total costs. According to the results it is possible to achieve a total cost reduction of about 24 % compared to how SpareBank 1 Midt-Norge operate their ATM network today. As far as the authors know the models presented in this master thesis are innovative as they model a problem with cash-swap, where all cassettes are swapped when the ATM is replenished, and the possibility of having banknotes with different denominations in an ATM.

Innhold

1	Introduksjon	1
2	Bransjeinnsikt	3
2.1	Samfunnsendringer og drift av minibanker	3
2.2	Kommersiell programvare	6
3	Problembeskrivelse	9
3.1	Dagens driftsrammer	9
3.2	Påfyllingsrutiner	10
3.3	Påfyllingsfaktorer	11
3.3.1	Oppetidskrav	11
3.3.2	Etterspørsel	12
3.3.3	Faktisk kassettkapasitet	12
3.3.4	Mulige påfyllingsdager	13
3.3.5	Bestillingssystemet	14
3.3.6	Overvåkingssystemet	15
3.3.7	Uttaksbestemmelser	16
3.4	Kostnadsstruktur	16
3.4.1	Servicekostnader	16
3.4.2	Mellomregningskostnader	17
3.4.3	Kontanthånderings- og transportkostnader	18
3.5	Problemdefinisjon	20
4	Teori og litteratur	21
4.1	Lagerstyringsprinsipper	21
4.1.1	Lagersystemer	22
4.1.2	Lagerbeholdning	23

4.1.3	Lagermodeller	25
4.1.4	Strategier for bestillingspunkt og -mengde	31
4.2	Håndtering av usikkerhet	36
4.2.1	Sikkerhetslager	37
4.2.2	Stokastisk programmering med korreksjonsbeslutninger	39
4.2.3	Robust optimering	45
4.2.4	Sannsynlighetsbegrenset programmering	47
4.3	Prognosemetoder	52
4.3.1	Skjønnsbaserte metoder	52
4.3.2	Kausale metoder	53
4.3.3	Tidsrekkemodeller	56
4.4	Optimering av minibankers påfylling	62
4.5	Valg av metoder for LMU	67
5	Modellformulering	69
5.1	Modeller med sikkerhetslager	71
5.1.1	Bruk av sikkerhetslager på LMU	71
5.1.2	Grunnmodellen med sikkerhetslager	72
5.1.3	Valgfri kassettpåfylling med sikkerhetslager	79
5.1.4	Valgbare besøksmønster med sikkerhetslager	81
5.2	Modeller med CCP	85
5.2.1	Bruk av CCP på LMU	85
5.2.2	Grunnmodellen med CCP	89
5.2.3	Valgfri kassettpåfylling med CCP	95
5.2.4	Valgbare besøksmønster med CCP	97
5.3	Likheter mellom sikkerhetslager og CCP	101
6	Beskrivelse av inndata	103
6.1	Valg av minibanker	103
6.2	Valg av planleggingshorisont	104
6.3	Parametere tilknyttet etterspørselen	105
6.3.1	Estimering av etterspørselen	105
6.3.2	Sikkerhetslager	117
6.4	Start- og sluttsaldo	117
6.5	Kostnadsparametere	117
6.6	Parametere tilknyttet fysisk kapasitet	118
6.7	Besøksmønster	118

7	Beregningsstudie	121
7.1	Potensielle kostnadsbesparelser	121
7.1.1	SMN sine kostnader ved forventet etterspørsel	122
7.1.2	Resultater fra grunnmodellene	123
7.1.3	Resultater fra valgfri kassettpåfylling	126
7.1.4	Resultater fra valgbare besøksmønstre	127
7.2	Modellenes egnethet	128
7.2.1	Løsningstid	128
7.2.2	Inndata som ikke gir lovlige løsninger	130
7.2.3	Modellenes representasjon av virkeligheten	131
7.2.4	Modellenes resultater under reell etterspørsel	131
7.2.5	Estimering av etterspørselen	139
8	Operasjonsanalyse- og arbeidsprosess	141
8.1	Fasene innen operasjonsanalyse	141
8.2	Arbeidsprosess	144
9	Konklusjon	149
10	Videre arbeid	151
10.1	Forbedret prognose	151
10.2	Ulike valører	151
10.3	Dynamisk størrelse på sikkerhetslageret	152
10.4	Symmetriske løsninger	152
A	Appendiks	161
A.1	Tester for å avgjøre om etterspørselen er normalfordelt	162
A.2	Resultater fra beregningsstudiet	170

Tabeller

2.1	Mest kritiske endringer for minibanker det kommende året	4
2.2	Kommersiell programvare	7
4.1	Behandling av etterspørsel i utvalgte artikler	65
4.2	Inkluderte påfyllingsfaktorer i utvalgte artikler	65
6.1	Valgt planleggingshorisont brukt i LMU.	105
6.2	Resultater fra <i>Kolmogorov-Smirnov</i> -testen.	111
6.3	Sesongfaktorer for ukedager for MB1.	113
6.4	Aktuelle besøksmønster med opp til tre mulige besøk per uke.	119
7.1	SMN sine kostnader ved forventet etterspørsel	123
7.2	Resultater fra grunnmodellene.	123
7.3	Andel returnerte sedler fra MB1 for GCCP	124
7.4	Resultater fra modellene med valgfri kassettpåfylling.	126
7.5	Resultater fra modellene med valgbare besøksmønster.	127
7.6	Løsningstid for modellene.	128
7.7	Løsningstid ved planleggingshorisont på 42 dager.	129
7.8	Løsningstider for GCCP med heltallskrav	131
7.9	Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes for MB1	136
7.10	Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes for MB2	137
7.11	Indikasjon på hvor gode løsningene fra GS er.	138
9.1	Mulige kostnadsbesparelser sammenliknet med dagens nivå.	149
A.1	Sesongfaktorer for ukedager for MB2.	166

A.2	Sesongfaktorer for ukedager for MB3.	167
A.3	Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes av SMN, grunnmodellene og valgfri kassettpåfylling for MB3	174
A.4	Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes av valgbare besøksmønstre for MB3	174

Figurer

2.1	Utvikling i antall minibanker og kontantuttak i Norge	5
2.2	Illustrasjon av elementer kommersiell programvare består av. . .	7
3.1	Illustrasjon av en minibanks oppbygning	10
3.2	Illustrasjon av begrepet påfyllingsperiode	14
3.3	Lokasjon av SMN sine minibanker	19
4.1	Bestanddeler i det totale lagernivået i SMN sine minibanker . . .	25
4.2	EOQ med tapt salg	28
4.3	Illustrasjon av (nQ, s, R) strategi	33
4.4	Illustrasjon av (S, R) strategi	34
4.5	Illustrasjon av (s, S, R) strategi	35
4.6	Illustrasjon av ikke-lovlig løsning	36
4.7	Eksempel på et scenariotre	41
4.8	Mullige tidspunkt for observasjon av etterspørsel	42
4.9	Scenariotre dersom etterspørselen observeres før innkjøp av tekstil	42
4.10	Scenariotre dersom etterspørselen observeres etter produksjon . .	43
4.11	Scenariotre dersom etterspørselen observeres før produksjon . . .	44
4.12	Illustrasjon av en normalfordeling	50
4.13	Illustrasjon av årsak-virkning-sammenheng	53
4.14	Illustrasjon av observerte verdier og estimerte sammenhenger . .	55
4.15	Ulike typer tidsrekker	56
5.1	Illustrasjon av sammenheng mellom grunnmodell og utvidelser .	69
5.2	Beskrivelse av tidsoppløsningen brukt i modellene med sikkerhetslager.	76
5.3	Illustrasjon av planleggingshorisont som tidsperiode for en CCP-restriksjon.	87

5.4	Beskrivelse av tidsoppløsningen brukt i modellene med CCP.	92
6.1	Histogram per valør av datagrunnlaget tilhørende MB1	108
6.2	pp-plot per valør av datagrunnlaget tilhørende MB1	110
6.3	Illustrasjon av to forskjellige normalfordelinger	112
6.4	Sesongfaktorer for måned for MB1.	114
6.5	Sesongfaktorer for dato i måned for MB1.	114
6.6	Tidsrekker per valør av datagrunnlaget tilhørende MB1	116
7.1	Spredningsplott som viser effekt på total kostnad ved ulike oppe- tidskrav for GS og GCCP	125
7.2	Lagernivået per valør tilhørende MB1 i planleggingshorisonten for grunnmodellene	133
7.3	Lagernivået per valør tilhørende MB1 i planleggingshorisonten for modellene med valgfri kassettpåfylling og valgbare besøksmønster	135
7.4	Lagernivå per valør tilhørende MB2 i planleggingshorisonten for GS.	139
8.1	Illustrasjon av fasene innen arbeidet med operasjonsanalyse.	142
A.1	Histogram per valør av datagrunnlaget tilhørende MB2 og MB3 .	163
A.2	pp-plot per valør av datagrunnlaget tilhørende MB2 og MB3 . .	165
A.3	Sesongfaktorer for MB2 per måned	166
A.4	Sesongfaktorer for MB3 per måned	167
A.5	Tidsrekke per valør av datagrunnlaget tilhørende MB2	169
A.6	Lagernivået per valør tilhørende MB2 for grunnmodellene	170
A.7	Lagernivået per valør tilhørende MB2 for modellene med valgfri kassettpåfylling og valgbare besøksmønster	171
A.8	Lagernivået per valør tilhørende MB3 for grunnmodellene	172
A.9	Lagernivået per valør tilhørende MB3 for modellene med valgfri kassettpåfylling og valgbare besøksmønster	173

Ordliste

- CCP - Sannsynlighetsbegrenset programmering (*Chance Constrained Programming*)
- GCCP - Grunnmodellen med CCP
- GS - Grunnmodellen med sikkerhetslager
- LMU - Lagerstyring av kontanter i Minibanker med Usikker etterspørsel
- LP - Lineær programmering
- MB - Minibank
- RM - Stokastisk programmering med korreksjonsbeslutninger (*Recourse Models*)
- RO - Robust optimering (*Robust Optimisation*)
- SMN - SpareBank 1 Midt-Norge
- VBCCP - Valgbare besøksmønster med CCP
- VBS - Valgbare besøksmønster med sikkerhetslager
- VKCCP - Valgfri kassettpåfylling med CCP
- VKS - Valgfri kassettpåfylling med sikkerhetslager

Kapittel 1

Introduksjon

Det ble gjennomført 66,8 millioner uttak fra Norske minibanker i 2013, dette er 9 % færre enn i 2012 og utgjør en reduksjon med tilnærmet 35 % [1] i løpet av de siste ti årene. Publikums reduserte bruk av kontanter er en av flere samfunnsendringer som har redusert lønnsomheten for minibanker [2]. Dette har ført til et større behov for å redusere kostnadene forbundet med drift av minibanker.

Norges Bank er av en oppfatning av at bankene plikter å holde publikums innskudd tilgjengelig i form av kontanter [3]. Dette er et krav som kan være med å sette en nedre grense på antall minibanker og deres lokasjon som en bank må tilby. Strategiene på området er forskjellig fra bank til bank, og spenner fra banker som ønsker færrest mulig minibanker med små mengder kontanter til banker som ønsker en tydelig lokal tilstedeværelse med mange minibanker og nok kontanter i hver minibank til å oppfylle enhver etterspørsel. Uavhengig av strategi har endringer og krav resultert i et tydelig behov for verktøy som kan bidra til en reduksjon av bankenes drifts- og kapitalkostnader forbundet med sine minibanker.

Med utgangspunkt i SpareBank 1 Midt-Norge sin drift av minibanker viste Bakken og Wiik [4] at det er teoretisk mulig å redusere kapital- og driftskostnadene forbundet med drift av minibanker gjennom bruk av operasjonsanalyse. Denne rapporten bygger videre på dette arbeidet, noe som medfører likheter i noen deler av rapporten. Rapporten har som formål å anslå muligheten for å redusere kapital- og driftskostnadene til SpareBank 1 Midt-Norge under usikker etterspørsel etter kontanter, og ser på potensielle kostnadsreduksjoner som

følge av å benytte optimeringsbasert beslutningssøtte og å endre noen utvalgte driftsrutiner Sparebank 1 Midt-Norge i dag følger. SpareBank 1 Midt-Norge sin lokale forankring er en viktig årsak til at de, sammenliknet med sine konkurrenter, har valgt å legge ned få minibanker. Med et høyt krav til oppetid på sine mange minibanker kan det være mye å spare om SpareBank 1 Midt-Norge klarer optimalt å bestemme både påfyllingstidspunktet for hver minibank, samt hvor mye kontanter som skal fylles på ved hver enkelt påfylling.

Rapporten vil starte med å gi leseren en bransjeinnsikt og en beskrivelse av problemet rapporten omhandler i kapittel 2 og 3, før relevant litteratur innen optimering av minibankdrift, lagerstyring og håndtering av usikker etterspørsel presenteres i kapittel 4. Disse delene har til hensikt å gi leseren et grunnlag for å bedre kunne forstå problemet som studeres i rapporten, før de matematiske formuleringene av optimeringsmodellene som er utviklet presenteres i kapittel 5. Videre vil inndata som er brukt ved implementering av modellene presenteres i kapittel 6, før et beregningsstudie av modellenes resultater presenteres i kapittel 7. Beregningsstudiet har til formål å kartlegge de potensielle kostnadsbesparelsene modellene kan gi, og å vurdere modellenes egnethet. I kapittel 8 presenteres måten forfatterne har jobbet med rapporten med bakgrunn i teori om operasjonsanalyse, før rapporten avsluttes med en konklusjon og en beskrivelse av foreslått videre arbeid i kapittel 9 og 10.

Rapporten er delt opp i kapitler, hvert kapittel har flere underkapitler og hvert underkapittel består av en serie nummererte avsnitt.

Rapporten ser på *Lagerstyring av kontanter i Minibanker med Usikker etterspørsel* med utgangspunkt i SpareBank 1 Midt-Norge sin drift. Dette problemet vil videre i rapporten omtales som LMU. SpareBank 1 Midt-Norge vil videre omtales som SMN.

Kapittel 2

Bransjeinnsikt

Dette kapittelet vil gi en innsikt i bransjen omhandlende drift av minibanker, både internasjonalt og i Norge. Kapittelet vil først søke å gi en innsikt i samfunnsendringer og hvordan bankene legger opp sin drift av minibanker i underkapittel 2.1, før kapittelet avsluttes med en presentasjon av kommersiell programvare for optimal minibankdrift i underkapittel 2.2.

2.1 Samfunnsendringer og drift av minibanker

Det er rundt 2,2 millioner minibanker på verdensbasis [5], og over 500 000 av disse er plassert i Europa [6]. Mye tyder på at antall minibanker i Europa er på vei ned [6], men blant annet på grunn av en meget høy vekst i Kina [7] forventes det høy vekst i antall minibanker på verdensbasis de neste fem årene [8]. Med nye banktjenester som kortterminaler og nettbank, er behovet for minibanker endret, noe som kan være med å forklare nedgangen i antall minibanker i Europa.

Bankenes kostnader forbundet med drift av minibanker kan hovedsakelig deles inn i drifts- og kapitalkostnader. Driftskostnader består av kostnader innen vedlikehold, kontanthåndtering og driftsplanlegging. *ATMmarketplace.com* har i flere år fulgt minibankindustrien tett, og foretar blant annet årlig en undersøkelse blant finansielle institusjoner på hvilke tre mest kritiske endringene de anser som nødvendig å innføre for sine minibanker det kommende året. Som vist i Tabell 2.1 er reduksjon av minibankenes driftskostnader årlig blant de høyeste valgene, og i 2014 var dette ett av de høyeste valgene til 32 % av respondentene.

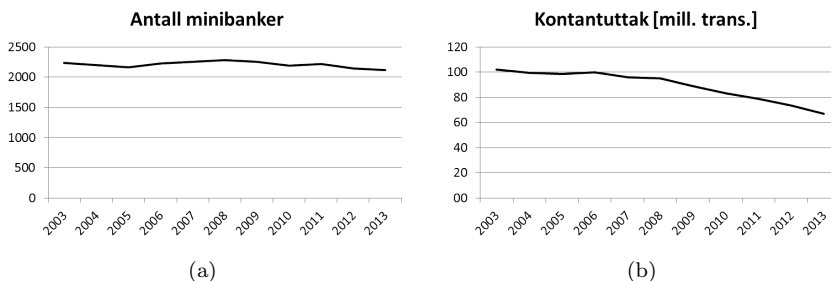
Tabell 2.1: De mest kritiske endringer finansielle institusjoner anser som nødvendig å innføre for sine minibanker det kommende året, [9]–[12].

Egenskaper	2014	2013	2012	2011
Støtte for Windows 7 eller 8	54 %	-	-	-
Bedre brukergrensesnitt	34 %	33 %	33 %	11 %
Reduserte driftskostnader	32 %	29 %	13 %	23 %
Fjernadministrere nettverket av minibanker	13 %	18 %	15 %	10 %
Implementere teknologier med økt sikkerhet	8 %	17 %	15 %	8 %
Hyppigere utsendelse av oppdat. og endringer	7 %	9 %	16 %	5 %
Oppgradere kommunikasjonsinfrastrukturen	6 %	9 %	10 %	3 %
Ingen endringsønsker	1 %	2 %	2 %	3 %

Siden bankene kunne anvendt kontantene i sine minibanker til andre formål, påløper det en kapitalkostnad for kontantene. For å minimere disse kostnadene er det ønskelig å redusere beløpet utplassert i en minibank, samtidig som etterspørselen blir dekket. Dette krever en god prognose for etterspørselen, noe som grunnet høy varians og uforutsigbarhet er svært vanskelig å lage.

Norge er et foregangsland når det gjelder innføring av nye tekniske løsninger i samfunnet. Nettbank, mobilbank, kortterminaler og liknende har ført til en stor reduksjon i antall minibanktransaksjoner de siste ti årene, og tall fra 2011 [13] viser at hver tredje nordmann tror at kontanter som betalingsmiddel vil forsvinne. I følge en rapport fra Norges Bank [1] utgjorde kontanter i 2013 en andel på knappe 5,5 % av alle betalingsmidler i Norge. Den samme rapporten viser til at Norge er i verdenstoppen på kortbruk, og at antall korttransaksjoner per innbygger fortsatt øker.

Minibankene i Norge har til tross for denne utviklingen holdt seg relativt stabilt rundt et antall på 2 200 de siste ti årene, vist i Figur 2.1(a). Hovedårsaken til dette er trolig den kraftige reduksjonen i antall bankfilialer i samme periode [14]. Bankene effektiviserer sin drift, og de rundt 300 bankfilialene som er lagt ned i samme periode er i mange tilfeller erstattet av minibanker. I tillegg er det færre og færre filialer hvor det er mulig å ta ut kontanter over disk [15], noe som har økt behovet for minibanker. Antall uttak i minibankene har derimot hatt en kraftig nedgang i samme periode med en reduksjon på ca. 35 %, vist i Figur 2.1(b).



Figur 2.1: Utvikling i antall minibanker og kontantuttak i Norge [1].

De norske bankenes drift av minibanker følger i stor grad samme modell, ved at bankene utkontrakterer kontanthåndteringen og vedlikehold forbundet med sine minibanker til verdihåndteringselskaper. Hvorvidt selve påfyllingsplanleggingen utføres internt i banken eller er utkontraktert som en del av verdihåndteringen varierer fra bank til bank. Nokas og Loomis er de ledende verdihåndteringselskapene i Norge, og markedet deles i hovedsak mellom disse. Nokas tilbyr gjennom sin minibankservice å ta det hele og fulle ansvaret for bankens minibanker [16]. Tilbudet innebærer overvåkning av maskinene, utføring av service og vedlikehold i tillegg til å sørge for at det til en hver tid er positiv kontantbeholdning i automatene. Banken utkontrakterer således all drift av sine minibanker til Nokas. Loomis tilbyr ikke full utkontraktering av minibankdrift [17]. Deres automatservice er et samarbeid mellom bank og Loomis, hvor førstnevnte sørger for overvåkning og bestilling mens Loomis sørger for påfylling av sedler og vedlikehold.

Loomis har etter sin kontraktinngåelse med DnB [18] begynt å utfordre Nokas som markedsleder. Det er interessant at Nokas, hvor DnB Bank ASA er deleier [19], ble vraket av nettopp DnB, og dette kan åpne for endringsmuligheter også for andre banker ettersom Nokas antakelig vil ønske å omstille seg. Etter en periode hvor selskaper som tilbyr kontanthåndtering har satt agendaen, er nå antakelig et godt tidspunkt for en bank til å få gjennomslag for endringer i sin søken etter å redusere sine driftskostnader.

Ifølge norsk lov har banker i Norge enerett på å motta kontantinnskudd fra publikum. Det er ingen andre aktører som kan gjøre dette, og mot et slikt monopol er bankene, etter Norges Banks oppfatning [3], pliktig å holde inn-

skuddene tilgjengelige i form av kontanter. Dette er et moment som kan ha stor innvirkning på bankenes fremtidige drift av minibanker. Ved overholdelsen av denne plikten vil bankene kunne komme i en situasjon hvor de er nødt til å tilby kontanter gjennom eksempelvis minibanker, selv om dette skulle medføre store kostnader.

De siste årenes samfunnsendringer, som eksempelvis den store reduksjonen i bruk av kontanter og reduksjon av gebyr ved uttak i minibank [20], har redusert lønnsomheten for minibanker [2]. Dette kombinert med bankenes plikt om å holde kontanter tilgjengelig, viser et tydelig behov for verktøy som kan bidra til en reduksjon av drifts- og kapitalkostnadene. Med større konkurranse i kontanthåndteringsmarkedet kan det nå også være mulig å få gjennomslag for vilkår leverandørene tidligere ikke har akseptert.

2.2 Kommersiell programvare

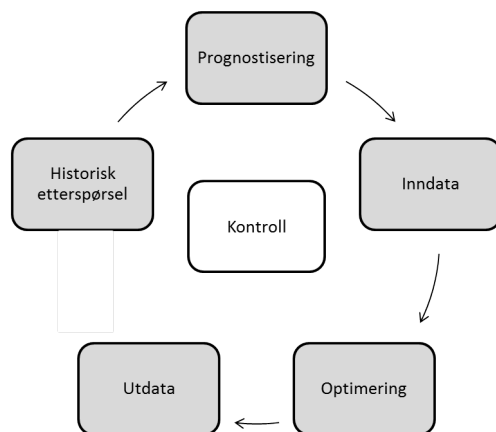
Flere internasjonale aktører tilbyr kommersiell programvare som har som formål å optimere drift av minibanker, men norske banker har ikke, etter forfatterens kunnskap, gått til anskaffelse av slike internasjonale systemer. De mest kjente aktørene presenteres videre i underkapittelet.

De mest kjente kommersielle programvarene er listet i Tabell 2.2. Slik programvare dekker normalt sett flere aspekter innen drift av minibanker, som prognostisering og lagerhåndtering. Hensikten med slik programvare er å minimere kostnadene, samtidig som tilgjengeligheten av kontanter i minibanken garanteres.

Tabell 2.2: Utvalgt kommersiell programvare, [21]–[29].

Selskap	Programvare
Data Solutions	Cash Management Optimization
bpc Group	Smart ATM
SAS	SAS/OR
NCR	APTRA OptiCash
Wincor Nixdorf	Cash Cycle Management
Morphis	MorphisCM
Fiserv	Integrated Currency Manager
Sautner & Partner	CashPilot ATM
Fobiss	Fobiss cash Management

I andre land i Europa er det kjent at programvare som listet opp i Tabell 2.2 benyttes ved drift av minibanker. Sautner & Partner sin programvare CashPilotATM er blant annet utbredt i Østerrike hvor ca. 35 % [28] av landets minibanker fylles på med bakgrunn i CashPilotATM. Videre tilbyr også det ungarske selskapet Data Solutions slik programvare og OTP Bank, en av Sentral- og Øst-Europas største banker med over 36 000 ansatte, tok i bruk denne programvaren i 2005 [21].



Figur 2.2: Illustrasjon av elementer kommersiell programvare består av.

Figur 2.2 gir en illustrasjon av de enhetene den type programvare som pre-

senteres i dette underkapittelet normalt sett består av. I enheten for historisk etterspørsel kartlegges den historiske etterspørselen etter kontanter før disse verdiene brukes i enheten for prognostisering. I denne enheten genereres en prognose over kommende etterspørsel. Videre sendes prognosen videre til en enhet som klargjør all inndata som er nødvendig for optimeringsmodellen. Inndata sendes videre til enheten som optimerer driften av minibanken, hvor resultatene angir foreslåtte tidspunkt for påfylling av minibanken og mengde kontanter tilknyttet de forskjellige påfyllingene. Resultatene fra optimeringen sendes så videre til enheten for utdata. Fra denne enheten kommuniseres det hvor mye og når minibanken bør fylles på til brukeren. Kontrollenheten har tilgang til de fem omkringliggende elementene. I denne enheten overvåkes driften av minibanken, samt beregnes kritiske prestasjonsindikatorer for å gi et bilde av hvor godt valgene programvaren tar fungerer i praksis.

En utfordring for programvare av den typen som her presenteres er parametrene som brukes i prognostiseringen av etterspørsel etter kontanter. Disse parametrene settes normalt under implementeringen av systemet, og holdes således konstant ved videre bruk av systemet. Da prognosemodeller gjerne er kompliserte av natur samt at minibanker befinner seg i stadig skiftende omgivelser er det vanskelig for brukerne av programvaren å oppdatere modellparametrene.

Da programvare som omhandles i dette underkapittelet er kommersiell og blant annet konkurrerer seg imellom har det ikke lyktes forfatterne å få innsikt i hvordan programvaren er bygd opp. Hvilke konkrete metoder og/eller modeller som brukes i de forskjellige programvarene vil derfor ikke kunne presenteres.

Kapittel 3

Problembeskrivelse

Dette kapitlet har til hensikt å gi en detaljert beskrivelse og definisjon av LMU. Først vil det gis en kort innføring i SMN sine driftsrammer i underkapittel 3.1, før det gis innsikt i de påfyllingsrutiner og -faktorer som er inkludert i SMN sin drift av minibanker i henholdsvis underkapittel 3.2 og 3.3. Videre vil problemets kostnadsstruktur forklares i underkapittel 3.4. Kapitlet avsluttes med en definisjon av problemet i underkapittel 3.5.

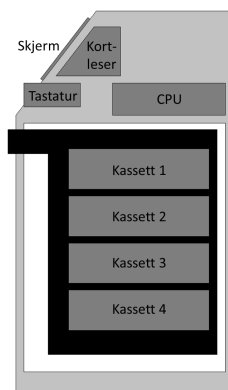
3.1 Dagens driftsrammer

SMN har, per dags dato, 63 minibanker lokalisert i Norge, fra Førde og Årdal i sør til Leka og Terråk i nord. SMN er regionens største finanskonsern og et av seks medlemmer i SpareBank 1 Alliansen. SMN er en regional, selvstendig sparebank med lokal forankring og hovedkontor i Trondheim [30].

SMN inngikk våren 2014 en avtale med verdihåndteringsselskapet Nokas, med utkontraktering av vedlikehold og påfylling av sine minibanker. Denne avtalen er, med noen endringer, en videreføring av den eksisterende avtalen SMN hadde med Nokas, og vil tre i kraft 1. januar 2015. Alle kostnader forbundet med vedlikehold og påfylling av en minibank bestemmes av avtalen, og rapporten bygger på de kostnadene som vil gjelde i den nye avtalen.

3.2 Påfyllingsrutiner

SMN sine minibanker inneholder normalt fire kassetter med sedler, illustrert i Figur 3.1, hvor hver kassett har en øvre kapasitet på et gitt antall sedler. Når Nokas fyller på en minibank byttes alle kassetter som står i minibanken med nye kassetter, og de gamle kassettene returneres til Nokas sitt depot. Dette betyr at det resterende beløpet som stod i minibankens kassetter ved en påfylling blir returnert til depotet, og den oppdaterte kontantmengden i minibanken blir lik kontantmengden i de nye kassettene. Hver kassett inneholder kun én valør, og SMN sine minibanker fylles normalt på med en kombinasjon av NOK 200, 500 og 1000 sedler.



Figur 3.1: Illustrasjon av en minibanks oppbygning

Hvor mye som skal fylles på i minibankene bestemmes av SMN. På bakgrunn av ulik etterspørsel på ulike lokasjoner varierer beløpet som bestilles påfylt fra minibank til minibank. Når SMN har tatt en avgjørelse på hvilket beløp som skal fylles på i en minibank, sendes en bestilling til Nokas. Bestillingen inneholder informasjon om hvilken minibank som skal fylles på, når den skal fylles på og hvilken valør og hvilket beløp som skal være i hver kassett. Siste frist for å endre på en bestilling er klokken 11:00 dagen før den aktuelle påfyllingen.

Før en påfylling klargjør Nokas kassettene i sitt depot. Kassettene blir fylt opp med det bestilte beløpet de har mottatt fra SMN, før de påfylte kassettene blir plombert. Plomberingen settes for å sikre at ingen har åpnet kassettene før de

igjen returnerer til depotet.

Etter påfylling og plombering blir kassetene transportert per bil til angitt minibank. Fremme ved minibanken fjernes først de kassetene som allerede står i minibanken, før de nye kassetene installeres. Vekterne utfører i tillegg til påfyllingen en kontroll av at minibanken fungerer slik den skal, og utfører vedlikeholdende service som eksempelvis rens av minibankens kortleser. De kassetene som er fjernet fra minibanken returneres til depotet, hvor plomberingen kontrolleres og innholdet telles.

På en påfyllingsrunde kan Nokas betjene flere minibanker. Nokas er leverandør av verdihåndtering for flere kunder, og kan eksempelvis fylle på minibanker som tilhører ulike banker på samme runde. Det er en begrensning på hvor mye kontanter Nokas kan ta med seg på en runde. Dersom det er lagt inn bestillinger som til sammen overstiger denne grensen vil Nokas holde igjen bestillingene, slik at begrensningen overholdes. De resterende bestillingene vil Nokas utføre påfølgende dag, såfremt dette lar seg gjøre. Hvilken rute som kjøres til hvilken ukedag og hvor ofte ruten kjøres blir bestemt av Nokas. Mønsteret av hvilken ukedag og frekvens en rute kjøres bestemmer mulige påfyllingsdager for SMN sine minibanker, og mulige ukedager vil variere fra minibank til minibank. Dersom SMN ønsker å endre påfyllingsdag og/eller frekvensen til en av sine minibanker må de levere en endringsforespørsel. Det er opp til Nokas om de godkjenner endringsforespørselen eller ikke.

3.3 Påfyllingsfaktorer

Det vil i dette underkapittelet presenteres faktorer som påvirker dagens påfyllingsrutiner. I tillegg til forholdene nevnt i underkapittel 3.2 er dette faktorer som har innvirkning på SMN sin drift av minibanker, og består av hensyn som må tas i de daglige bestillingsrutinene.

3.3.1 Oppetidskrav

SMN har et meget høyt oppetidskrav for sine minibanker på 97,5 %, hvorav oppetidskravet måles totalt for alle minibanker. Oppetiden til en minibank regnes som den tiden minibanken ikke har vært ute av drift som følge av tekniske problemer eller at minibanken er tom for kontanter. Det spesifiseres at alle kassetene i minibanken må være tomme før minibanken betegnes som tom for

kontanter. For å være sikre på at minibankene ikke går tom for kontanter, fylles det generelt på mer i kassetene enn hva som er forventet etterspørsel. Oppetidskravet er i så måte en viktig faktor til at SMN ofte har høye kostnader forbundet med å ha kontanter stående i sine minibanker.

3.3.2 Etterspørsel

Etterspørselen i forbindelse med SMN sine minibanker er lite forutsigbar, og varierer fra time til time, ukedag til ukedag, år til år. Det er økt etterspørsel i forbindelse med arrangementer, ferier og liknende og i tillegg er det sesongvariasjoner i forbindelse med julehandel og turisme. Uforutsigbarheten i etterspørselen gjør avgjørelsen om hvor ofte og med hvor mye en minibank skal fylles på vanskelig. For å bestemme påfyllingen av minibankene bruker SMN i dag nøkkelpersonell med lang erfaring fra minibankdrift. For å komme frem til en avgjørelse på hvilket beløp minibanken burde fylles på med for kommende påfylling, bruker nøkkelpersonellet i dag sin erfaring og kunnskap om hvordan minibanken opereres og hvordan den har blitt påfylt tidligere. Som grunnlag for påfyllingsavgjørelsene inkluderes også nøkkelpersonellets kunnskap om hvorvidt det vil inntreffe noe i minibankens kundeområde som vil ha påvirkning på etterspørselen. Bruken av nøkkelpersonell gjør SMN som selskap avhengig av enkeltpersoner, noe som er risikabelt om eksempelvis nøkkelpersonellet slutter.

Uforutsigbarheten i etterspørselen gjør det tilnærmet umulig å bestille en påfyllingsmengde som tilsvarer nøyaktig det beløpet kundene vil etterspørre, og for å unngå at minibanken går tom legges det derfor på en ekstra mengde kontanter i bestillingene. Som nevnt er denne situasjonen og praksisen en viktig faktor til at SMN ofte har høyere kostnader forbundet med de kontantene som står i deres minibanker enn nødvendig.

3.3.3 Faktisk kassettkapasitet

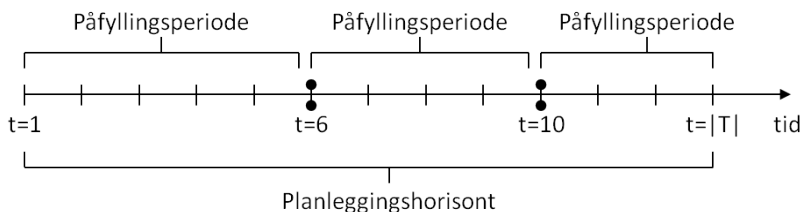
Produsenten av SMN sine minibanker har satt en øvre kapasitet på et gitt antall sedler per kassett. Det er SMN sin erfaring at kassetter fylt opp til sin øvre kapasitet ofte skaper tekniske problemer, og på dette grunnlag opererer SMN med en øvre grense per kassett som ligger noe under den øvre grensen satt av minibankprodusenten. Den reduserte kapasiteten dette medfører oppveies av en reduksjon i tekniske problemer, som igjen er med på å sikre en overholdelse av oppetidskravet nevnt i avsnitt 3.3.1.

Bestillingsrutinen som per dags dato følges av SMN i forbindelse med den reduserte kapasiteten er inkonsistent, da rutinen er basert på en reduksjon av et fast beløp og ikke på en reduksjon av et fast antall sedler. Eksempelvis vil dette, gitt et beløp på NOK 50 000, føre til at en kassett fylt med NOK 1000 sedler påfylles med 50 sedler mindre enn maksimal kapasitet, mens for NOK 200 sedler vil tilsvarende beløp resultere i at kassetten fylles med 250 sedler mindre enn maksimal kapasitet. Dermed reduserer denne rutinen kapasiteten til en minibank med mer enn det som er nødvendig for å unngå tekniske problemer.

3.3.4 Mulige påfyllingsdager

Nokas ønsker ikke å fylle på minibanker på lørdager og søndager. I tillegg utfører ikke Nokas påfyllinger på helligdager og høytidsdager, som eksempelvis 2. pinseudag og 17. mai. Hverdager hvor ikke Nokas utfører påfyllinger vil videre i rapporten omtales som *røddager*.

Røddager medfører en reduksjon i mulige påfyllingsdager som det må tas hensyn til i planleggingen. Eksempelvis må en minibank, for ikke å gå tom for kontanter, fylles på for to påfyllingsperioder om neste påfyllingsdag faller på en røddag. En påfyllingsperiode vil videre i rapporten vise til perioden mellom to påfyllinger, illustrert i Figur 3.2. I de tilfellene hvor en planleggingshorisont ikke starter med en påfylling vil dagene fra og med planleggingshorisontens første dag frem til første påfylling også utgjøre en påfyllingsperiode. I de tilfellene hvor planleggingshorisonten ikke avsluttes med en påfylling, vil dagene mellom den siste påfyllingen og planleggingshorisontens slutt også omtales som en påfyllingsperiode.



Figur 3.2: Illustrasjon av begrepet påfyllingsperiode. En påfyllingsperiode viser til dagene mellom planleggingshorisontens første dag, $t = 1$, og første påfylling, dagene mellom to påfyllinger eller dagene mellom siste påfylling og planleggingshorisontens siste dag $t = |T|$. Det er i figuren påfylling på dag $t = 6$ og $t = 10$, ikke på dag $t = 1$.

3.3.5 Bestillingssystemet

SMN plasserer sine påfyllingsbestillinger gjennom en gammel, nettbasert bestillingstjeneste tilhørende Nokas. Systemet er statisk med dårlig funksjonalitet, og er i dag en betydelig flaskehals i SMN sine bestillingsrutiner. Eksempelvis er bestillingssystemet basert på ukedag og ikke dato. Med dette menes at man ikke velger hvilken dato, men hvilken ukedag man skal fylle på. Når brukeren har bestemt seg for hvilken ukedag det skal fylles på, velges påfyllingsfrekvensen. Dette betyr at dersom man ønsker å fylle på flere ganger i uken, for eksempel mandag og torsdag, må man først skrive inn beløp for hver kassett på mandag og velge frekvensen hver uke. Deretter velger man beløp for hver kassett for torsdag og velger frekvens hver uke. Når ukedag og frekvens er godkjent av Nokas vil denne bestillingen gjelde inntil SMN velger å endre den.

Bestillinger som havner på en røddag vil ikke bli gjennomført. Dette skaper en utfordring for SMN, som i bestillingssystemet må håndteres på en av to måter:

- **Endre gjeldende bestilling**

Da bestillingssystemet er basert på per ukedag kan man ikke endre gjeldende bestilling uten å endre alle bestillinger som faller på samme ukedag. SMN kan velge å fylle på ekstra mye i påfyllingen som inntreffer før røddagen, for så å endre bestillingen tilbake til det originale nivået etter at påfyllingen tilhørende den endrede bestillingen er utført. Alternativt

kan SMN levere en endringsøknad for nytt valg av påfyllingsdag. Endring av bestillinger for hver røddag er en tidkrevende måte å håndtere utfordringen på, og brukes derfor svært sjelden i dag.

- **Legge inn en midlertidig overstyrende bestilling**

Bestillingssystemet har i tillegg til ovennevnte funksjonalitet, en bestillingsmulighet hvor man midlertidig kan overstyre den gjeldende bestillingen. Brukeren velger da beløp, ukedag og frekvens for påfyllingen, og angir hvilket tidsrom overstyringen skal gjelde for.

En begrensning med denne funksjonaliteten er at man kun kan ha én overstyring per minibank liggende i bestillingssystemet til enhver tid. Man kan dermed eksempelvis ikke legge inn bestillinger for 17. mai før 1. mai er passert. Til tross for denne begrensningen er metoden ansett for å være den beste måten å håndtere røddager i bestillingssystemet, og er derfor funksjonaliteten som i hovedsak brukes.

3.3.6 Overvåkingssystemet

For å overvåke driften av sine minibanker har SMN inngått en avtale med Evry om bruk av deres system kalt Micos. I dette systemet kan SMN til enhver tid sjekke antall sedler i hver kassett, feilmeldinger og annen informasjon om minibankene. Det er toveis kommunikasjon mellom minibanken og Micos, noe som åpner for at man eksempelvis kan sende ordrer om omstart og stenging til en minibank via Micos.

I Micos er det definert et *end of day*-tidspunkt klokken 21:00. På dette tidspunktet registreres blant annet dagens omsetning og minibankens saldo. Denne registreringen foregår hver ukedag, med unntak av lørdager og søndager.

Gjennom Micos har SMN, per dags dato, ikke tilgang til detaljert data om minibankene for lengre enn 3 måneder tilbake i tid. Dette kan være en begrensende faktor, eksempelvis innen datainnhenting for bruk i prognostisering av etterspørsel.

3.3.7 Uttaksbestemmelser

SMN sine minibanker har uttaksbestemmelser som går på hvordan etterspørselen per uttak skal oppfylles:

- Minibankene har en algoritme installert som styrer at det deles ut færrest mulig sedler ved et uttak. Det vil si at dersom man gjør et uttak på NOK 1000, vil man få ut én seddel med valør NOK 1000, såfremt minibanken ikke er tom for denne valøren. I så tilfelle vil minibanken gi ut to NOK 500 sedler om dette er mulig og så videre. Om minibanken ikke har sedler som kombinert kan oppfylle etterspørselen i et uttak, vil kunden få valget om å ta ut et mulig beløp over eller under etterspørselen.
- Dersom flere kassetter i en minibank inneholder samme valør, vil kassetene tømmes jevnt. Dette vil si at to kassetter med lik valør i en minibank alltid vil ha tilnærmet likt antall sedler, såfremt de ble fylt på like mye ved forrige påfylling.

3.4 Kostnadsstruktur

I dette underkapittelet vil kostnadsstrukturen forbundet med SMN sin drift av minibanker presenteres.

Kostnadene kan hovedsakelig deles inn i tre kostnadselementer; servicekostnader, mellomregningskostnader og kontanthånderings- og transportkostnader.

3.4.1 Servicekostnader

Med servicekostnader menes kostnader forbundet med vedlikehold og reparasjoner av minibankene. Flere av minibankene er lokalisert utendørs og er derfor utsatt for vær og vind. Dette kan for eksempel føre til tekniske problemer som følge av støv, regn, snø eller skitt i kortleseren. Minibanker er også utsatt for hærverk, som kan føre til behov for reparasjoner og andre vedlikeholdstjenester. Som en del av avtalen mellom SMN og Nokas utføres det vedlikeholdende service på en minibank for her gang minibanken besøkes.

Servicekostnadene er inkludert i avtalen mellom SMN og Nokas som en fast kostnad. Altså vil kostnaden ikke påvirkes av hvordan en minibank fylles på.

3.4.2 Mellomregningskostnader

Kostnadene forbundet med å ha penger stående i en minibank er en intern kapitalkostnad i SMN, da kontantene som fylles på i minibanken kunne vært anvendt til andre formål. Kontantene i minibanken klassifiseres altså som kapital på lik linje med annen kapital SMN har. SMN bruker begrepet *mellomregningskostnad* om kapitalkostnaden forbundet med driften av minibanker, hvilket er begrepet som vil brukes videre i rapporten.

Mellomregningskostnaden beregnes på bakgrunn av en mellomregningsrente. Mellomregningsrenten settes av SMN i slutten av hver måned, og består av to komponenter: 3-måneders NIBOR og et påslag som settes internt i banken. Påslaget beregnes med utgangspunkt i bankens finansieringsstruktur og varierer derfor fra måned til måned.

SMN regner i dag ut mellomregningskostnaden ved å ta utgangspunkt i den gjennomsnittlige kontantmengden i en minibank i løpet av en kalendermåned. Den gjennomsnittlige kontantmengden beregnes ved å summere alle *end of day*-saldoer for måneden. Denne summen divideres på antall *end of day*-saldoer i den aktuelle måneden, som gir en snittsaldo per dag. Snittsaldoen multipliseres videre med månedens mellomregningsrente, som er justert til en månedlig rente ved å multiplisere renten med antall dager i den aktuelle måneden dividert på 365 dager i året. Utregningen av mellomregningskostnaden kan illustreres med følgende formel:

$$M_a = \frac{\sum_a S_a}{E_a} R_a \frac{D_a}{365} \quad (3.1)$$

I formel (3.1) representerer M_a og R_a henholdsvis mellomregningskostnaden og -renten for måned a , D_a antall dager i måned a , S_a *end of day*-saldoen i minibanken på dag a og E_a antall *end of day*-saldoer for måned a .

3.4.3 Kontanthånderings- og transportkostnader

Kontanthåndtering og transport er, i tillegg til service nevnt over, en del av avtalen mellom SMN og Nokas. Avtalen bestemmer kostnadsstrukturen for disse tjenestene. Videre presenteres kostnadene forbundet med henholdsvis kontanthåndtering og transport:

- **Kontanthånderingskostnader**

Kontanthånderingskostnadene deles i to: kassett- og betjeningsavgift.

- *Kassettavgift*

For hver kassett som byttes, det vil si fylles på, ved en påfylling påløper det en kassettavgift. Kassettavgiften er altså uavhengig av hvor mye som fylles på eller hvor mye som returneres.

- *Betjeningsavgift*

Ved påfylling av en minibank tar Nokas ut de gamle kassetten og setter inn nye kassetter. For dette arbeidet påløper det en betjeningsavgift. Betjeningsavgiften er uavhengig av antall kassetter man bytter. Det vil si at betjeningsavgiften er lik om man bytter ut én, to, tre eller fire kassetter. Dersom ingen kassetter byttes påløper det ingen betjeningsavgift.

- **Transportkostnader**

Hver av SMN sine minibanker er av Nokas plassert i en transportsone. Nokas opererer med fire transportsoner med hver sin tilhørende transportkostnad. Sone 4 inneholder minibanker som ligger over 180 km unna depot, og kostnaden tilknyttet denne sonen består av kostnaden for sone 3 addert en kostnad per kilometer overskytende grensen på 180 km. Figur 3.3 viser plassering av de stedene i Norge hvor SMN har minibanker, og gir et bilde av spredningen SMN har på sine minibanker.



Figur 3.3: Lokasjon av SMN sine minibanker

Transportkostnaden er kun avhengig av hvilken sone minibanken er tilknyttet, ikke hvilken rute som kjøres for å besøke minibanken. Dersom man eksempelvis besøker to minibanker lokalisert i umiddelbar nærhet av hverandre på samme rute, vil det påløpe en transportkostnad tilsvarende sonesatsen for begge minibankene. Det betyr at en eventuell planlegging av hvilke minibanker som bør besøkes på samme dag, og derfor samme rute, ikke vil kunne gi reduserte kostnader for SMN.

Dersom SMN ser at det ikke er nødvendig å fylle på en minibank en dag det ifølge planen skal fylles på kontanter, kan SMN avbestille den

aktuelle påfyllingen. Ved en avbestilling vil Nokas grunnet serviceavtalen fortsatt besøke minibanken den aktuelle dagen. Besøket brukes til å kontrollere at minibanken er i god fysisk stand, utføre vedlikeholdene service og eventuell annen service om minibanken skulle ha behov for det. Som en følge av dette er det forskjell på en besøksdag og en påfyllingsdag. En påfyllingsdag vil alltid også være en besøksdag, mens en besøksdag ikke alltid er en påfyllingsdag. En minibank vil altså ikke alltid fylles på ved et besøk.

På bakgrunn av serviceavtalen vil transportkostnaden være en fast kostnad som påløper uavhengig av hvorvidt et besøk inneholder påfylling eller ikke.

3.5 Problemdefinisjon

Lagerhåndtering er et velkjent problem hvor man i korte trekk skal bestemme mengden av et produkt som skal lagres og når lageret skal fylles på for å oppfylle etterspørselen etter produktet. Hver enkelt minibank kan sees på som et lager hvor etterspørselen etter produktet på lager, kontanter, er usikker. Videre opererer SMN med et krav til oppetid for sine minibanker, noe som resulterer i at tilnærmet all etterspørsel etter kontanter må dekkes. LMU går altså ut på å finne en påfyllingsplan med lavest mulig kostnad, samtidig som oppetidskravet overholdes.

Kapittel 4

Teori og litteratur

Dette kapitlet vil ta for seg relevant teori og litteratur som omhandler optimeringsbasert beslutningsstøtte for påfylling av minibanker med usikker etterspørsel. Kapitlet er bygd opp slik at elementer som bygger på hverandre presenteres suksessivt. Kapitlet starter således med en innføring i forskjellige lagerstyringsprinsipper i underkapittel 4.1, før utvalgte metoder for håndtering av usikkerhet og ulike prognosemetoder presenteres i henholdsvis underkapittel 4.2 og 4.3. Videre presenteres litteratur som omhandler liknende problemer som LMU i underkapittel 4.4. Kapitlet avsluttes med en kort presentasjon av hvilke metoder forfatterne velger å benytte i underkapittel 4.5.

4.1 Lagerstyringsprinsipper

SMN sine minibanker kan sees på som små, individuelle lager, hvor varer går inn og ut ettersom lageret henholdsvis fylles på og kunders etterspørsel oppfylles. Dette underkapitlet vil se nærmere på lagerstyring og underliggende metoder og strategier for å overvåke lagernivåer for videre å kunne ta avgjørelser på mengde av og tidspunkt for bestilling av produkter.

Ideelt sett burde det ikke vært behov for å ha varer på lager; man kunne anskaffet eller produsert varen akkurat tidsnok til å dekke etterspørselen etter varen. Dette er i de fleste tilfeller ikke mulig og man er derfor nødt til å holde et lager for å kunne dekke etterspørselen. Hvor mange varer det skal være på lageret og hvor ofte det skal fylles på er de grunnleggende utfordringene i lagerstyring, som

bedrifter forsøker å løse ved bruk av lagersystemer. Et lagersystem kan defineres som et koordinert sett av regler og prosedyrer som samlet legger grunnlaget for at rutineavgjørelser, som tidspunkt og mengde som skal bestilles av hvert enkelt produkt for å oppfylle kunders etterspørsel, effektivt kan tas av selskapet med nødvendig informasjonsgrunnlag [31].

4.1.1 Lagersystemer

Minner [32] og Hax og Candea [31] hevder at det finnes tre typer lagersystemer:

- **Rene lagersystemer (*pure inventory systems*)**
Innen logistikk utgjør disse systemene den enkleste formen for støtteverktøy for avgjørelser. Disse systemene har som formål å støtte avgjørelser innen påfylling av lager med individuelle produkter. Reglene knyttet til påfylling baserer seg på statistikk og spesifiserer et bestillingspunkt, som angir når produktet skal bestilles, og en bestillingsmengde, som angir hvor mye som skal bestilles. Normalt brukt i tilfeller hvor det kun er innkjøp, og ikke produksjon og/eller distribusjon, eksempelvis ved kjøp av råvarer, eller ved enkel detaljhandel eller engrossalg hvor produktene er kjøpt fra en utenforstående forhandler. Konkurransen mellom forskjellige produkter om samme, begrensede lagerkapasitet og involveringer som følge av felles prosessering sees ikke på i dette systemet.

SMN sin drift av minibanker kan klassifiseres som et rent lagersystem. SMN bestiller kontanter fra Nokas på vegne av sine minibanker, før kontantene distribueres uforedlet videre til kundene.

- **Produksjonssystemer (*production-inventory systems*)**
Disse systemene tilhører de tilfellene hvor selskapet produserer de ferdige produktene internt, kontra eksterne innkjøp. De produserte produktene vil normalt kjempe om tilgjengelig produksjonskapasitet, hvilket forklarer grunnen til at bruken av enkle regler for bestillingspunkt og -mengde, som ignorerer interaksjon mellom produkter, ikke er effektive verktøy for slike systemer.

SMN har ingen produksjon og har således ikke et produksjonssystem.

- **Distribusjonssystemer og Produksjons- og distribusjonssystemer** (*distribution-inventory systems and production-distribution-inventory systems*)

Distribusjon omhandler allokering av produkter, som er kjøpt eksternt og/eller produsert internt, mellom et nettverk av tilgjengelige lager. For å håndtere avgjørelsene om allokering brukes det to relativt forskjellige kontrollsystemer. I det første systemet, kalt et *push system*, samles tilgjengelig informasjon om lagernivå fra alle lager i et hovedkontor eller liknende, og brukes som grunnlag for en felles bestemmelse for videre allokering av produkter. I et slikt system tar man hensyn til lagernivåene til alle lagrene samtidig i planleggingen. I det andre systemet, kalt et *pull system*, utfører hvert enkelt lager løpende evaluering av sitt eget lagernivå, og bestemmer selv tidspunkt og mengde for neste allokering av produkter.

SMN tar beslutningene om når og hvor mye hver minibank skal fylles på sentralt og dette likner på et *push system*. Men i motsetning til et *push system* planlegger ikke SMN lagernivåene i ulike minibanker i sammenheng med hverandre, men ser på hver minibank for seg selv. SMN sin drift av minibanker kan altså ikke klassifiseres som hverken et *push system* eller et *pull system*.

4.1.2 Lagerbeholdning

Med bakgrunn i de utfordringene man møter i et lagersystem definerer Minner [32] tre ulike motiver innen avgjørelser om mengde og frekvens for påfylling av produkter: transaksjons-, sikkerhets- og spekulasjonsmotivet. Anskaffelse eller produksjon av en vare foregår ikke kontinuerlig, men deles opp i bestillinger med ulike intervaller. Av dette kommer transaksjonsmotivet, hvor man må ta hensyn til antall av varen man skal skaffe til veie og til hvilket tidspunkt. Sikkerhetsmotivet oppstår hvis noe av nødvendig data, eksempelvis bestillingstid, etterspørsel og/eller produksjonskvalitet, er ukjent når man må ta avgjørelsen om en anskaffelse. For at ikke usikkerhet skal ha for stor innvirkning på systemets ytelse introduseres et sikkerhetslager. Spekulasjonsmotivet refererer som oftest til en forventning om en prisstigning for anskaffelse av varen, noe som fører til anskaffelse av en større mengde varer enn normalt. Basert på disse motivene klassifiseres fem typer lagerbeholdninger:

- **Syklisk lagerbeholdning (*cycle stocks*)**

Transaksjonsmotivet medfører produksjon og bestilling av varer i partier. Ofte er det høye oppstartskostnader forbundet med et vareparti, noe som også fører til en syklisk lagerbeholdning. Størrelsen på den sykliske lagerbeholdningen varierer mellom et øvre nivå umiddelbart etter ankomst av et parti, og et nedre nivå umiddelbart før ankomst av neste parti.

SMN sine minibanker har en syklisk lagerbeholdning da minibankene fylles på med kontanter periodisk.

- **Uferdige produkter (*pipeline stocks*)**

Denne kategorien omhandler alle produkter som er under produksjon, samt produkter som er på vei til andre prosesseringsenheter eller lager. Denne kategorien lagerbeholdning er ikke aktuell for SMN sine minibanker.

- **Sikkerhetslager (*safety stocks*)**

Sikkerhetslager er definert som det forventede lagernivået umiddelbart før ankomst av neste parti [32]. Et slikt lagernivå oppstår som følge av sikkerhetsmotivet, hvor man ønsker å sikre seg mot usikkerheten man er utsatt for. I tilfeller hvor etterspørselen er prognostisert vil man for eksempel ønske å sikre seg mot eventuelle feilmarginer i prognosen, noe som kan gjøres ved hjelp av et sikkerhetslager.

Som nevnt i avsnitt 3.3.1 fyller ofte SMN minibankene med et høyere beløp enn hva det kan forventes at etterspørselen vil bli. Dette som et resultat av en kombinasjon mellom deres ønske om å overholde oppetidskravet og at etterspørselens faktiske størrelse er usikker når påfyllingen bestilles. Det ekstra beløpet som fylles på fungerer altså som et sikkerhetslager.

- **Spekulativ lagerbeholdning (*speculative stocks*)**

Spekulasjonsmotivet kan medføre et høyere lagernivå enn normalt. Forventede prisøkninger i innkjøpspris kan eksempelvis resultere i tidligere bestilling og påfylling av lageret enn hva som ville vært resultatet ved et konstant prisenivå. Denne kategorien lagerbeholdning er ikke aktuell for SMN sine minibanker.

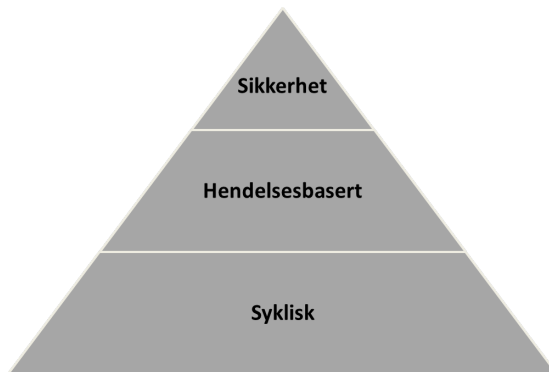
- **Hendelsesbasert lagerbeholdning (*anticipation stocks*)**

Denne kategorien kommer som en følge av en justering av planlagt bestillingsnivå, gjerne som følge av en innsikt i fremtidige hendelser som kan påvirke etterspørselen. Dette kan for eksempel være sesongvarierende

etterspørsel eller hendelsesvarierende etterspørsel.

SMN bruker nøkkelpersonell sin innsikt i hendelser som vil inntreffe i en planleggingsperiode. Om hendelsen ikke er tatt høyde for i prognosen, og er forventet å medføre negativ eller positiv effekt på etterspørselen etter kontanter, justeres størrelsen på beløpet som skal bestilles. Slike hendelser kan eksempelvis være arrangementer som faller på en annen dato enn hva det har gjort tidligere år.

Figur 4.1 illustrerer hvilke typer lagerbeholdninger SMN sine minibanker inneholder i dag. Minibankene inneholder alltid syklisk lagerbeholdning og sikkerhetslager, men hendelsesbasert lagerbeholdning er naturligvis ikke alltid til stede i en minibank.



Figur 4.1: Det totale lagernivået i SMN sine minibanker er en kombinasjon av sikkerhetslager, syklisk- og hendelsesbasert lagerbeholdning

4.1.3 Lagermodeller

Det vil i dette avsnittet nevnes to velkjente lagermodeller: statisk og dynamisk versjon av *the economic lot size model*. Modellene vil relateres og vurderes for bruk på LMU.

Statisk versjon av *The Economic Lot Size modell*

Innen lagermodeller nevnes ofte *The Economic Lot Size Model*, blant annet presentert av Hax og Candea [31], i forbindelse med utfordringen med å finne den

optimale bestillingsmengden basert på minimering av bestillings- og lagerkostnader. *Economic Order Quantity* (EOQ) formelen, utledet fra *The Economic Lot Size Model*, brukes til å finne svar på denne utfordringen.

Det er en rekke antakelser som ligger til grunn for EOQ-formelen:

1. Etterspørselen er kontinuerlig og etterspørselen per tidsenhet er konstant.
2. Prosessen fortsetter i uendelig lang tid.
3. Bortsett fra at man må oppfylle etterspørselen, er det ingen restriksjoner til stede (bestillingsmengde, lagerkapasitet og liknende)
4. Ledetiden er lik 0, altså fylles lageret opp med bestilt mengde i det øyeblikket man bestiller.
5. Alle kostnader er uavhengig av tid.
6. Det er ingen kvantumsrabatt.

Følgende notasjon brukes i EOQ-formelen:

- E - Etterspørselsrate, enheter per år
- C^B - Bestillingskostnad, NOK per bestilling
- C - Enhetskostnad, NOK per bestilt enhet
- H - Lagerkostnad, NOK per NOK verdi av lagernivå
- TK - Total årlig kostnad for systemet, NOK per år
- x - Bestilt mengde, enheter per bestilling

Dette gir E/x antall bestillinger i løpet av ett år og med et gjennomsnittlig lagernivå på $x/2$ enheter, gir dette følgende TK:

$$TK = C^B \frac{E}{x} + HC \frac{x}{2}$$

Ved å sette $\frac{d(TK)}{dx} = 0$, kan man finne den optimale bestillingsmengden x^* fra formelen som kalles EOQ-formelen:

$$x^* = \sqrt{\frac{2C^B E}{HC}} \quad (4.1)$$

Det finnes en rekke versjoner av EOQ-modellen, blant annet basert på hvilket reaksjonsmønster den aktuelle kundegruppen vil ha om man ikke kan oppfylle kundenes etterspørsel. Disse reaksjonsmønstrene deles gjerne i tapt kunde (*lost customer*), tapt salg (*lost sales*) og restordre (*backordering*):

- **Tapt kunde**

Etterspørselen kunden hadde er tapt og i tillegg vil kunden aldri lenger vurdere å kjøpe produktet igjen. Modellering av dette reaksjonsmønsteret er komplisert da det blant annet fordrer en endring av etterspørselsprognosen dersom man går tom for varer.

Kontanter er et homogent produkt som en kunde vil kunne få tak i fra en rekke leverandører, og i så måte vil SMN sine kunder velge å bruke en annen bank, butikk eller liknende for fremtidige uttak om SMN sin minibank ikke kan oppfylle kundens etterspørsel. Kværner [33] skriver at "*forskning på atferd viser at det tar et menneske cirka seks til åtte uker å endre vaner*" i sin artikkel om nevrovitenskap, atferdspsykologi og nevrofysiologisk kunnskap. Det er naturlig å anta at SMN sine kunder vil innebefattes i dette og dermed ha en treghet i sitt reaksjonsmønster. For SMN er det derfor antatt at en kunde vil gi minibanken én eller flere nye sjanser før personen endrer sin atferd, og at SMN derfor ikke opererer under antakelsen om tapt kunde.

- **Tapt salg**

Etterspørselen kunden hadde er tapt, men i motsetning til reaksjonsmønsteret i tapt kunde vil kunden her oppsøke den samme leverandøren neste gang kunden etterspør produktet.

Av argumentasjonen for tapt kunde følger det at det kan antas at SMN opererer under antakelsen tapt salg.

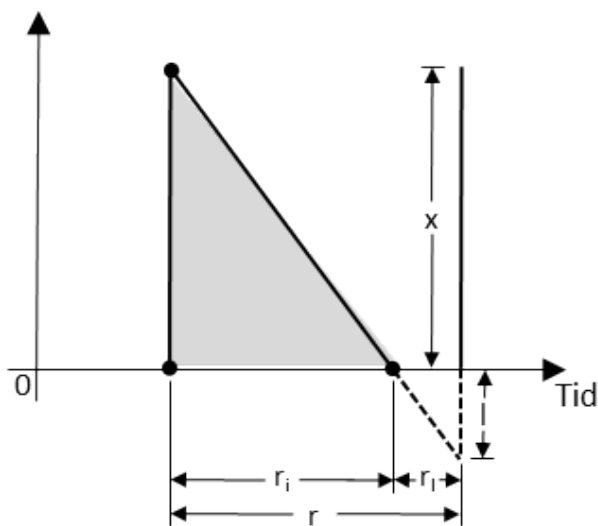
- **Restordre**

Om kunden ikke får oppfylt sin etterspørsel vil kunden vente med sin forespørsel frem til etterspørselen igjen kan oppfylles.

Det vil i de fleste tilfeller ikke være naturlig å anta at en kunde vil vente med å ta ut kontanter til SMN sin minibank har fått en påfylling. Unntak kan eksempelvis forekomme for situasjoner hvor kunden ikke kan oppfylle sin etterspørsel andre steder, eller hvor det ikke er så farlig for kunden når

etterspørselen oppfylles. De fleste lagermodeller tar for seg enten antakelsen om tapt salg eller restordre, og ikke tapt kunde. Minner [32] skriver at det i virkeligheten vil være slik at kunders reaksjonsmønster vil fordele seg over både tapt salg og restordre. Gitt at unntakene presentert over er realistiske vil dette også gjelde for SMN, men det er naturlig å anta at restordre vil utgjøre en ubetydelig andel og at SMN derfor ikke kan sies å operere under denne antakelsen.

Som følge av antakelsen om at SMN opererer under tapt salg vil det være naturlig å se på versjonen av *EOQ*-formelen som tar høyde for tapt salg. Figur 4.2 illustrerer én syklus i en situasjon med tapt salg, hvor x angir antallet produkter per bestilling gitt etterspørselen E .



Figur 4.2: EOQ med tapt salg

Varigheten av perioden med mangel på produkter er angitt av r_l i Figur 4.2, og perioden med positivt lager angis av $r_i = x/E$. Mengde tapt salg i en syklus er gitt av l og syklusens varighet er $r = (x + l)/E$. Det vil dermed være $E/(x + l)$

sykluser per år. Gjennomsnittlig lagernivå i løpet av året blir altså:

$$\text{Gjennomsnittlig lagernivå} = \frac{1}{r} \frac{xr_l}{2} = \frac{x^2}{2(x+l)}$$

For hver enhet av etterspørselen som ikke oppfylles, påløper en kostnad C^l . Dette gir en total kostnad for hele året:

$$TK = C^B \frac{E}{x+l} + H \frac{x^2}{2(x+l)} + C^L \frac{LE}{x+l}$$

Ved å partiellderivere TK med hensyn på x og l og sette de partiellderiverte lik null, får man:

$$\frac{1}{2}Hx^2 + Hxl - C^lEl - CE = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2}Hx^2 - C^lEx + CE = 0 \quad (4.3)$$

Ved å omorganisere 4.2 får man:

$$x^* = \frac{C^lE \pm \sqrt{(C^lE)^2 - 2HCE}}{H} \quad (4.4)$$

Som man kan se av 4.4 er det utfordringer knyttet til at uttrykket under kvadratroten må være lik null eller positivt for at x^* ikke skal ta imaginære verdier. Det henvises til Hax og Candea [31] for en nærmere diskusjon rundt denne utfordringen, men konklusjonen av diskusjonen er at det aldri vil være noen ekstra verdi i å la det oppstå situasjoner med tapt salg. Man bør altså unngå å gå tom for varer på lager slik at slike situasjoner ikke oppstår.

Hverken den klassiske EOQ-formelen (4.1) eller EOQ-formelen med tapt salg (4.4) er aktuelle for LMU. Årsakene til dette ligger i antakelse 1, 3 og 5 som ikke er oppfylt i LMU, siden etterspørselen etter kontanter i en minibank varierer fra dag til dag, det er begrenset lagerkapasitet i minibankene og mellomregningsrenten varierer fra måned til måned.

Dynamisk versjon av *The Economic Lot Size modell*

Wagner og Whitin presenterte i 1958 [34] en publikasjon omhandlende en *dynamisk* versjon av *The Economic Lot Size Model*. I motsetning til den klassiske *The Economic Lot Size Model* presentert ovenfor, tillater Wagner-Whitin modellen ulik etterspørsel i forskjellige tidsperioder og tidsvarierende kostnader. Følgende notasjon innføres for Wagner-Whitin modellen:

- y - Lagernivå på starten av en periode t
- $f_t(I)$ - Kostnad for perioden t frem til og med siste periode i planleggingshorisonten T
- H_t - Renten som påløper varer som ligger på lager fra periode t til periode $t + 1$
- x_t - Bestilt, eller produsert, mengde for periode t
- C_t^B - Oppstartskostnaden for ordrebestillingen i periode t
- E_t - Etterspørsel i periode t

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 0, & \text{dersom } x_t = 0 \\ 1, & \text{dersom } x_t > 0 \end{cases}$$

For å finne lagernivået på starten av en periode, benyttes følgende sammenheng:

$$y = y_0 + \sum_{j=1}^{t-1} x_j - \sum_{j=1}^{t-1} E_j \geq 0 \quad (4.5)$$

hvor y_0 er initialt lagernivå. For å finne de optimale bestillingsmengdene og bestillingstidspunktene for planleggingshorisonten benytter modellen følgende formel:

$$f_t(y) = \min [H_{t-1}y + \delta(x_t)C_t^B + f_{t+1}(y + x_t - E_t)] \quad (4.6)$$

I tillegg er:

$$\begin{aligned} x_t &\geq 0 \\ y + x_t &\geq E_t \end{aligned}$$

For å finne den optimale kombinasjonen av påfyllingsmengder og bestillingstidspunkt starter man med å beregne $f_T(y)$, og jobber seg deretter ned til $f_1(y)$. En slik måte å løse problemet på kalles baklengs dynamisk programmering og er kjent som en relativt effektiv måte å løse slike problemer på. Wagner-Whitin modellen inkorporerer bare ett produkt og har heller ikke støtte

for begrenset lagerkapasitet. I tillegg returneres resterende lagernivå i SMN sine minibanker ved en påfylling, noe Wagner-Whitin modellen ikke tar høyde for som man kan se av formel (4.5). Som nevnt tidligere er det begrenset lagerkapasitet i LMU og mer enn ett produkt, mer enn én valør i hver minibank, og derfor er ikke Wagner-Whitin modellen aktuell for LMU.

Wagner-Whitin presenterer i sammenheng med modellen ovenfor noen teoremer som er interessante med tanke på LMU:

Theorem 4.1.1 *Det eksisterer en optimal løsning hvor $y_{x_t} = 0$ for alle perioder t .*

For LMU vil dette si at i en optimal løsning vil en kassett aldri bli fylt på så lenge antall sedler i kassetten er større enn 0. Dersom den beste løsningen man kommer frem til ikke har denne egenskapen, kan man altså konkludere med at løsningen ikke er optimal.

Theorem 4.1.2 *For alle perioder t eksisterer det en optimal løsning hvor*

$$x_t = 0 \text{ eller } x_t = \sum_{j=t}^k E_j \quad \text{for en vilkårlig } k, t \leq k \leq T$$

For en optimal løsning på LMU vil dette si at dersom en kassett fylles på vil det fylles på for å dekke etterspørselen i k antall perioder, men dersom etterspørselen mellom to påfyllinger er større enn lagerkapasiteten spesifisert i LMU vil det ikke finnes noen lovlige løsninger og teoremet vil da ikke holde.

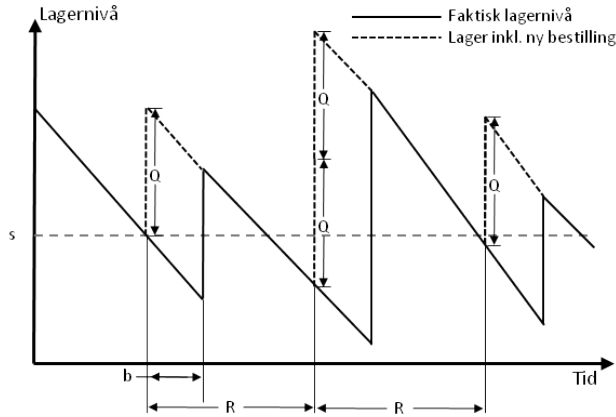
4.1.4 Strategier for bestillingspunkt og -mengde

Lagersystemer inkluderer en valgt strategi for overvåkning av lagernivå som et ledd i informasjonsinnhenting for å bedre grunnlaget for de avgjørelser som skal tas. En slik strategi for overvåkning burde gi svar på når man skal bestille neste parti av produkter og hvor mange produkter partiet skal inneholde. Det skiller mellom to klasser overvåkningssystemer: kontinuerlig overvåkning, antall produkter på lager oppdateres kontinuerlig, og periodisk overvåkning, antall produkter på lager oppdateres periodisk. Under hver klasse tilhører det forskjellige bestillingsstrategier.

SMN har kontinuerlig oversikt over lagernivået i sine minibanker via Micos, men som en konsekvens av at SMN opererer med fastsatte påfyllingsdager vil ikke de bestillingsstrategiene som tilhører kontinuerlig overvåkning passe for deres bruk. For SMN må størrelsen på påfylt beløp i en minibank være tilstrekkelig til å oppfylle etterspørselen som inntreffer frem til neste planlagte påfylling, hvilket tilhører strategiene under periodisk overvåkning. Periodisk overvåkning tar høyde for usikkerhet i både tidspunkt for og mengde av et produkt som blir etterspurt ved at det genereres en sannsynlighetsfordeling for etterspørselen per tidsperiode. Hax og Candea [31] presenterer tre underliggende strategier tilhørende periodisk overvåkning:

- **(nQ , s , R) strategi**

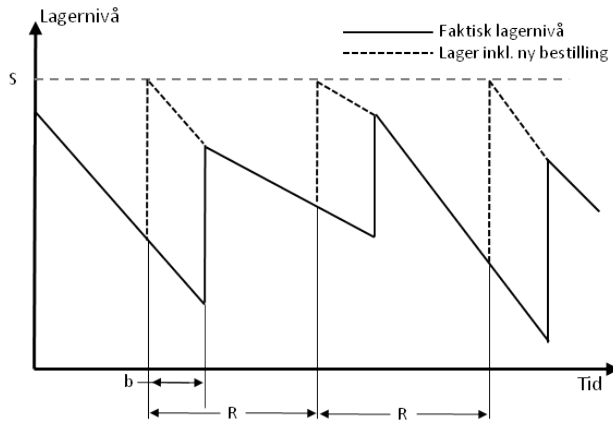
Bestillingspunkt/bestillingsmengde-strategien, (s, Q) , er den mest grunnleggende strategien for overvåkning av lagernivå, og er en strategi tilhørende kontinuerlig overvåkning. (nQ, s, R) er en periodisk tilpasning av (s, Q) , hvor lagernivået sjekkes for hver tidsperiode R . Om tilgjengelig lagernivå er mindre enn eller tilsvarende et fastsatt nivå s , bestilles et antall produkter tilsvarende en mengde nQ ($n=1, 2, 3, \dots$) hvorav Q er en fastsatt bestillingsmengde. Dette er en komplisert strategi hvor man ved å bestille n antall av Q søker å kompensere for tilfeller hvor lagernivået i punkt R er lavere enn forventet nivå og mindre enn s , noe som gitt periodisk overvåkning er teoretisk mulig da eksakt lagernivå er ukjent frem til punkt R . Denne strategien er ikke mye brukt og er heller ikke aktuell for SMN da det ikke er fornuftig å basere sine bestillinger på en fastsatt mengde, men heller på størrelsen på forventet etterspørsel i kommende periode.



Figur 4.3: Illustrasjon av (nQ, s, R) strategi, hvorav b angir siste frist for bestilling før påfylling

- **(S, R) strategi**

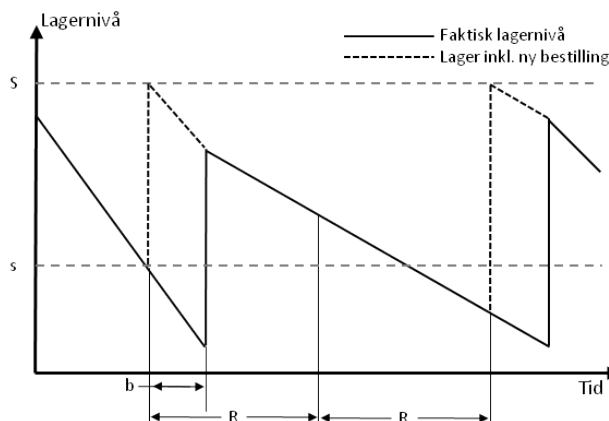
Lagernivået sjekkes hver tidsperiode R , hvorpå en ordre som øker lagernivået til en øvre grense, S , plasseres. Dette er en populær strategi da den er svært enkel å forstå og bruke, i tillegg gir den en relativ forutsigbar arbeidsbelastning da det alltid sendes en bestilling per tidsperiode. Denne strategien er ikke aktuell for SMN da den fordrer at de fyller på en minibank i hver periode. Dette er ikke ønskelig i tilfeller hvor lagernivået i punkt R er tilstrekkelig for påfølgende periodes etterspørsel, samt vil det for de tilfeller hvor en påfyllingsdag faller på en røddag ikke være mulig å fylle på minibanken.



Figur 4.4: Illustrasjon av (S, R) strategi

- **(s, S, R) strategi**

Strategien inkluderer valgfri bestillingsmulighet for hver tidsperiode, hvilket kan være ønskelig om en bestilling medfører store kostnader, eksisterende lagernivå holder for neste tidsperiodes etterspørsel eller liknende. Strategien går ut på at det for hver tidsperiode sjekkes om eksisterende lagernivå er mindre eller tilsvarende et fastsatt nivå s , i så tilfelle plasseres en ordre som øker lagernivået til en øvre grense S . Om lagernivået er større enn s vil det ikke plasseres en ordre for den aktuelle tidsperioden.



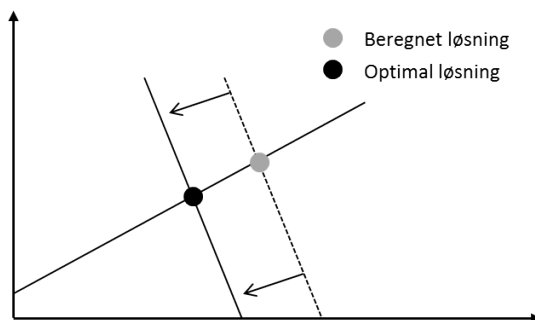
Figur 4.5: Illustrasjon av (s, S, R) strategi

Denne strategien representerer til en viss grad rammene SMN møter når de planlegger påfylling av sine minibanker, ved at de også har muligheten til å ikke fylle på ved en mulig påfyllingsdag. Men det er flere momenter i denne strategien som ikke passer med den realiteten SMN opererer under, hvilket gjør at heller ikke denne strategien vil være relevant for SMN. Det vil ikke være hensiktsmessig for SMN å for hver bestilling øke lagernivået til et fastsatt nivå S , både dette og nivå s burde representere det beløpet som dekker etterspørselen frem til neste mulige påfylling. S og s vil dermed utgjøre samme nivå for SMN, og vil kunne variere fra tidsperiode til tidsperiode som følge av varierende etterspørsel. Da det kan fastsettes påfyllinger av en minibank flere ganger per uke vil antall dager i en tidsperiode R kunne avvike fra antall dager i tidsperiode $R + 1$, noe som også vil inntreffe om en påfyllingsdag faller på en røddag. Dette gir at en fastsatt tidsperiode R heller ikke vil passe for SMN.

Som vist for de tre ovennevnte strategiene innen periodisk overvåking vil samtlige bryte med noen av de rammene SMN må forholde seg til når de planlegger påfylling av sine minibanker. Dette gir at ingen av de ovennevnte strategiene vil være aktuelle for LMU.

4.2 Håndtering av usikkerhet

Den tradisjonelle måten å håndtere usikkerhet på er å bruke forventede verdier på de usikre parameterne, og slik få et deterministisk problem. Hiple [35] påpekte at i det de usikre parameterne har tatt sin endelige verdi kan en slik håndtering av usikkerheten potensielt medføre at den beregnede løsningen ikke lenger ligger i mulighetsområdet og/eller at den er suboptimal, illustrert i Figur 4.6. Det finnes derfor et insentiv for å behandle de usikre parameterne på en annen måte.



Figur 4.6: Illustrasjon av situasjon hvor beregnet løsning er en ikke-lovlig løsning etter at usikre verdi(er) har tatt sin endelige verdi og medført forskyvning av stiplede restriksjoner

Det finnes flere forskjellige metoder for å ta hensyn til og inkludere usikkerhet i optimeringsproblemer. For LMU er det forfatterens oppfatning at sikkerhetslager, stokastisk programmering med korreksjonsbeslutninger (*Recourse Models*, RM), robust optimering (*Robust Optimisation*, RO) og sannsynlighetsbegrenset programmering (*Chance Constrained Programming*, CCP) er de mest relevante metodene. Dette kapitlet vil ta for seg aspekter ved de ulike metodene som er spesielt aktuelle, og ut fra dette vil det gjøres en vurdering av hvilke metoder som er best egnet for LMU. Det bør påpekes at avsnittene om metodene ikke er ment som en innføring i de respektive metodene, men som bakgrunn for en diskusjon om hvilke metoder som egner seg best.

4.2.1 Sikkerhetslager

Dette avsnittet vil se nærmere på sikkerhetslager som en måte å håndtere usikkerheten i LMU. Sikkerhetslager er ikke en optimeringsteknisk metode, men et begrep innenfor lagerstyring. Underkapittelet vil derfor bygge på teori om lagerstyring presentert i underkapittel 4.1. Begrepet sikkerhetslager vil først diskuteres nærmere, før det sees på forskjellige regler for å bestemme sikkerhetslagerets størrelse og hvilke av disse som vil være relevant for LMU.

Behovet for et sikkerhetslager oppstår som følge av usikkerhet forbundet med deler av datagrunnlaget som avgjørelsen for påfyllingsmengde og tid for påfylling er tatt på bakgrunn av. I planleggingsøyemed estimeres usikker data, men prognoser som avviker fra reell etterspørsel kan medføre store negative utslag i verdikjedens ytelse. For å beskytte lageret mot å gå tom for produkter mellom to påfyllinger, hvilket vil skje om reell etterspørsel er større enn prognostisert, implementeres et sikkerhetslager som adderes til den prognostiserte etterspørselen.

Sikkerhetslagerets størrelse kan eksempelvis baseres på prognosens feilmargin, eller som en avveining mellom lagerkostnader og kundetilfredshet; et sikkerhetslager vil medføre ekstra lagerkostnader, samtidig vil sikkerhetslageret øke sannsynligheten for at lagernivået for perioden er tilstrekkelig stort til å oppfylle ønsket nivå av kundetilfredshet. SMN opererer med et ønsket mål på kundetilfredshet gjennom et oppetidskrav på 97,5 %. For å møte oppetidskravet benytter de seg i dag av hva som kan klassifiseres som et sikkerhetslager, hvorav sikkerhetslagerets størrelse er en skjønnsbasert avgjørelse som følge av nøkkelpersonels innsikt i fremtidige hendelser og erfaring. Bakken og Wiik [4] viste at rundt 40 % av de totale kostnadene forbundet med SMN sin drift av minibanker kommer fra at minibanken er fylt på med et større beløp enn hva som etterspørres. Det foreligger dermed en økonomisk motivasjon for å finne en måte å redusere størrelsen på sikkerhetslageret, samtidig som oppetidskravet overholdes.

Det eksisterer en rekke regler for å bestemme et sikkerhetslagers størrelse. Disse klassifiseres som enten tommelfinger- eller teoretiske regler, og det vil videre sees nærmere på disse to klassene.

Teoretiske regler for fastsettelse av sikkerhetslagerets størrelse

Inderfurth og Minner [36] sier det er velkjent innen lagerteori at sikkerhetslagerets størrelse fastsettes av etterspørselens standardavvik σ i ledetiden multiplisert med en sikkerhetsfaktor Z . Dette gir følgende formel for fastsettelsen av sikkerhetslageret S :

$$S = Z\sigma \quad (4.7)$$

For en normalfordelt etterspørsel, e , og med et krav til servicenivå for å dekke en viss andel av etterspørselen, P , kan en restriksjon for servicenivå formuleres slik:

$$Pr(e \leq y + S) \geq P$$

I formelen over er y lagernivået. Altså blir sikkerhetsfaktoren Z lik P -kvantilen i en standard normalfordeling:

$$Z = \Phi^{-1}(P)$$

Her er Φ^{-1} den inverse av funksjonen for den kumulative sannsynligheten i en standard normalfordeling. Utfordringen med å benytte formel (4.7) i LMU er hva som faktisk er ledetiden SMN må forholde seg til. Som nevnt tidligere i oppgaven kan SMN endre sin bestillingsordre frem til klokken 11:00 dagen før en påfylling. Med bakgrunn i dette kan det argumenteres for at ledetiden er perioden mellom klokken 11:00 dagen før en påfylling og tidspunktet for selve påfyllingen. Samtidig kan det argumenteres for at SMN sin ledetid er hele perioden mellom to påfyllinger siden minibanken ikke kan fylles på nytt mellom to påfyllinger. Konklusjonen er at SMN ikke har en ledetid i den klassiske betydningen av begrepet, men en spesiell form for ledetid.

Tommelfingerregler for fastsettelse av sikkerhetslagerets størrelse

Som en kontrast til de teoretiske modellene eksisterer en rekke tommelfingerregler for bestemmelse av sikkerhetslagerets størrelse. El-Najdawi [37] foretok i 1993 en empirisk undersøkelse som viste at ingen av de firmaene som svarte på undersøkelsen brukte den teoretiske formelen (4.7) i sin planlegging. Minner [32] argumenterer også for at det reelt er flere firmaer som benytter praktiske i stedet for teoretiske modeller i sin planlegging. SMN bruker nøkkelpersonels innsikt om kommende hendelser samt erfaring for å fastslå størrelsen på sikkerhetslageret, hvilket kan klassifiseres som en tommelfingerregel.

Det er en rekke faktorer som kan ha påvirkning på hvorvidt man skal holde et sikkerhetslager [38], og hvor stort det i så tilfelle skal være. Slike faktorer kan både være generelle og spesifikke for det enkelte tilfellet, og vil danne utgangspunktet for eventuelle tommefingerregler. Eksempler på faktorer kan være:

- **Hvilket stadium i livssyklusen produktet er i**
Produkter i introduksjons- og vekstfase krever mer sikkerhetslager enn produkter som er modne eller som har fallende etterspørsel.
- **Hvor viktig produktet er for selskapet**
Produkter som eksempelvis gir høy fortjeneste, har gode utsikter til vekst eller som representerer fokusområdet for selskapet vil alle være høyaktuelle kandidater til sikkerhetslager.
- **Etterspørselsmønster**
Det vil være fornuftig å holde et sikkerhetslager for produkter med varierende etterspørsel.

Tommefingerregler for bestemmelse av sikkerhetslagerets størrelse vil være aktuelt for LMU, men det må i såfall utarbeides et sett med regler slik at prognosen for etterspørselen og sikkerhetslageret i større grad tilsvarer den reelle etterspørselen enn hva de gjør per dags dato. De tommefingerreglene som i dag brukes av nøkkelpersonellet følger ikke et fast regelverk, men er heller basert på skjønnsmessige vurderinger fra påfylling til påfylling. Dette er en av hovedgrunnene til at SMN holder et langt større sikkerhetslager enn hva som er nødvendig.

4.2.2 Stokastisk programmering med korreksjonsbeslutninger

Stokastisk programmering med korreksjonsbeslutninger (*Recourse models*, RM) ble introdusert av Dantzig i 1955 [39] og hører innunder begrepet stokastisk programmering. Det er skrevet mye litteratur om RM og metoden er anvendt på mange ulike problemer, dog vil dette underkapittelet kun ta for seg sider ved RM som er spesielt relevant for LMU og er således ikke ment som en innføring i temaet. Leseren henvises til [40] og [41] for en grundig introduksjon til temaet.

I de tilfeller hvor en eller flere parametere kan beskrives med tilfeldige variabler, og hvor det er mulig å oppnå en gevinst ved å korrigere initiale beslutninger

etter at utfallet av usikre hendelser er observert, er det vanlig å modellere optimeringsproblemer som RM. Det at man kan oppnå en gevinst ved å korrigere initiale beslutninger er et viktig aspekt ved RM og med utgangspunkt i det oppdiktede selskapet DekkDegTil vil dette aspektet omhandles nærmere nedenfor.

DekkDegTil produserer og selger t-skjorter og ønsker naturligvis å maksimere sin profitt. Optimeringsproblemet DekkDegTil står ovenfor innebærer innkjøp av tekstil, x_i , produksjon og salg av t-skjorter, y_j , hvorav de kan produsere ulike versjoner av t-skjortene ved å kombinere ulike mengder gul ($i = 1$), grønn ($i = 2$) og blå ($i = 3$) tekstil. Etterspørselen etter de ulike versjonene j er usikker og kan beskrives med tilfeldige variabler. Under følger det underliggende LP-problemet som vil være utgangspunkt for formuleringen av RM:

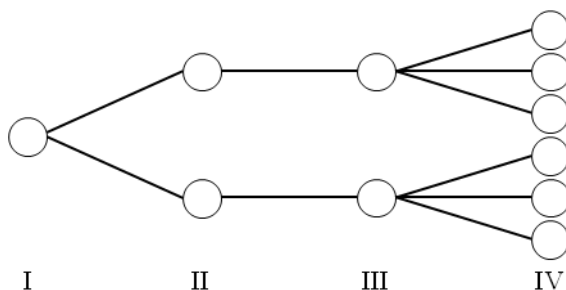
$$\begin{aligned}
 \max Z &= \sum_{j \in J} (I_j - C_j^P) y_j - \sum_{i \in I} C_i^T x_i & (4.8) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} B_{ij} y_j - x_i \leq 0 & i \in I \\
 & y_j \leq D_j & j \in J \\
 & x_i \geq 0 & i \in I \\
 & y_j \geq 0 & j \in J
 \end{aligned}$$

I dette problemet angir I_j inntekten og C_j^P produksjonskostnaden for versjon j , C_i^T kostnaden for innkjøp av én enhet av tekstil i , B_{ij} mengden av tekstil i som går med til å produsere én enhet av versjon j og D_j angir etterspørselen.

Variabler som kan ta tilfeldige verdier beskrives normalt med kontinuerlige fordelinger. Slike fordelinger egner seg ikke i optimeringsmodeller da kontinuiteten vil føre til ulinearitet. Som en følge av dette er det vanlig å diskretisere de kontinuerlige fordelingene og på den måten konstruere *scenarioer*, noe som muliggjør en lineær beskrivelse av problemet. Et scenario beskriver et mulig utfall for en eller flere aktuelle tilfeldige variabler, og hvert scenario har en tilhørende sannsynlighet for å inntreffe. For å tilnærme seg den kontinuerlige fordelingen kan man lage et stort antall scenarioer, men utfordringen med dette er at løsnings tiden for RM øker med antall scenarioer. En avveining må derfor gjøres mellom å inkludere et antall scenarioer som samlet gir en god beskrivelse av virkeligheten, samtidig som man begrenser antallet slik at løsnings tiden holder seg innenfor ønsket nivå.

Et viktig aspekt ved RM er hendelsesforløpet i problemet man modellerer: når gjør man hvilke beslutninger og når får man tilgang til mer informasjon. Det er vanlig å illustrere et problems hendelsesforløp med et scenariotre som vist i Figur 4.7.

Figur 4.7: Eksempel på et scenariotre



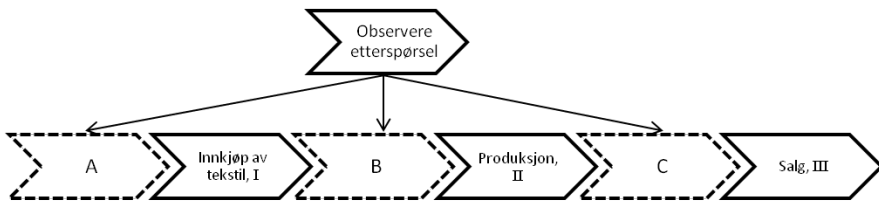
Hver sirkel i figuren illustrerer en beslutning og hver forgrening illustrerer utfallet av en eller flere tilfeldige variabler. I figuren gjør man altså først, i punkt *I*, en beslutning, før man deretter får tilgang til mer informasjon gjennom observasjon av hvilken verdi naturen tildeler de aktuelle tilfeldige variablene. På bakgrunn av denne informasjonen tar man så to nye beslutninger, i punkt *II* og *III*, før man observerer hvilke verdier andre aktuelle tilfeldige variabler tildeles. På bakgrunn av denne informasjonen tas det så, i punkt *IV*, en ny beslutning. En sammenhengende sti fra sirkelen i punkt *I* frem til en av sirklene i punkt *IV* representerer et scenario.

Higle [35] poengterer viktigheten av å analysere hendelsesforløpet i et problem for å fastslå nytten av RM. Om man har mulighet til å korrigere en beslutning, kan det ligge en verdi i å utsette denne beslutningen. Eksempelvis vil det for `DekkDegTil` antakelig ligge en verdi i å kunne vente med å bestille tekstiler til etter at etterspørselen er blitt kjent, siden de da kan kjøpe inn eksakt det antallet tekstiler som vil maksimere deres profitt. Gjennom en analyse av hendelsesforløpet kan man kartlegge hvorvidt det finnes slike mulige verdier.

En illustrasjon av viktigheten av hendelsesforløpet i et problem kan gjøres ved å ta utgangspunkt i `DekkDegTil` sitt optimeringsproblem. Observasjon av etterspørsel, innkjøp av tekstil, produksjon og salg av t-skjorter er de hendelsene som danner hendelsesforløpet til problemet selskapet står overfor. Kronologien

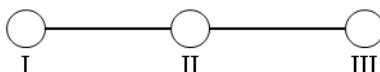
på disse hendelsene er avgjørende for hvordan problemet bør modelleres. Da DekkDegTil ikke har tekstil på lager må innkjøp av dette gjøres før produksjonen, hvilket betyr at tidspunktet for når etterspørselen observeres vil være den avgjørende faktoren for hendelsesforløpet. Figur 4.8 skisserer i hvilke tre punkter, *A*, *B* eller *C*, etterspørselen kan observeres, og således de tre mulige hendelsesforløpene som eksisterer for problemet:

Figur 4.8: Observasjon av etterspørsel kan foregå ved tre forskjellige tidspunkt



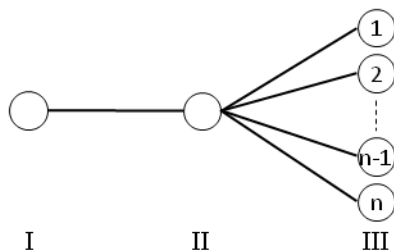
Dersom DekkDegTil kan observere etterspørselen før de kjøper inn tekstil, punkt *A* i Figur 4.8, kan de tilpasse innkjøpet perfekt ut fra den observerte etterspørselen og produsere akkurat så mange t-skjorter som etterspørres, såfremt dette er lønnsomt. Ved et slikt hendelsesforløp, illustrert i Figur 4.9, er etterspørselen observert før DekkDegTil skal ta sitt første valg. Dermed er det ingen usikkerhet i problemet, og man vil ikke oppnå noen ekstra verdi av å formulere problemet som RM.

Figur 4.9: Scenariotre dersom etterspørselen observeres før innkjøp av tekstil



En annen mulighet er at DekkDegTil ikke kan observere etterspørselen før etter at produksjonen er ferdig, punkt *C* i Figur 4.8. Ved et slikt hendelsesforløp, illustrert i Figur 4.10, må bedriften gjette på hva etterspørselen vil bli, og gjøre innkjøp og produksjon ut fra denne gjetningen. Prékopa [42] omtaler et slikt hendelsesforløp som et *statisk stokastisk problem*: man tar alle beslutninger før man observerer utfallet av en usikker hendelse. Et annet begrep for et slikt hendelsesforløp er ett-steps problem (*one-stage problem*), det vil si at man tar alle beslutninger uten at man observerer utfallet av en eller flere tilfeldige variabler mellom beslutningene.

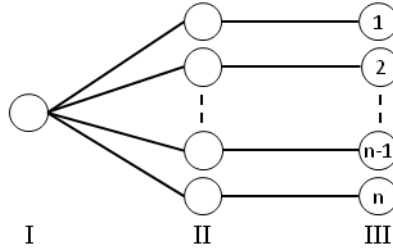
Figur 4.10: Scenariotre dersom etterspørselen, som kan ta n ulike verdier, observeres etter produksjon



I slike tilfeller kan man modellere etterspørselen som en tilfeldig variabel, og ut fra hvor sannsynlig ulike utfall av etterspørselen er kan DekkDegTil kjøpe inn tekstil og produsere slik at de maksimerer sin forventede profitt. Det er altså mulig å modellere dette som et stokastisk problem, men det er ingen fleksibilitet å utnytte da DekkDegTil ikke gjør noen beslutninger etter at størrelsen på etterspørselen observeres. Det vil derfor ikke være hensiktsmessig å benytte RM for et slikt hendelsesforløp.

Om DekkDegTil observerer etterspørselen etter at innkjøpet av tekstil er gjort, men før de produserer t-skjortene, punkt B i Figur 4.8, ligger det derimot en fleksibilitet i problemet som kan utnyttes ved å bruke RM. Dette hendelsesforløpet er illustrert i Figur 4.11. Ved å kjøpe inn et antall av gul, grønn og blå tekstil som muliggjør at DekkDegTil kan produsere ulike mengder av de ulike versjonene, kan bedriften justere effekten av den initiale beslutningen om innkjøp av tekstil ved hjelp av produksjonsmengden av t-skjorter. På den måten kan bedriften tilpasse produksjonen bedre etter etterspørselen og oppnå høyere profitt. Prékopa [42] omtaler et slikt hendelsesforløp som et *dynamisk stokastisk problem*. Et mer vanlig brukt begrep på slike hendelsesforløp er to-steps problem (*two-stage problem*), siden man tar beslutninger ved to ulike tidspunkt i planleggingsperioden. Hadde man sett på flere innkjøps- og salgssykluser for DekkDegTil, ville det vært et fler-steps problem (*multi-stage problem*).

Figur 4.11: Scenariotre dersom etterspørselen, som kan ta n ulike verdier, observeres før produksjon.



DekkDegTil har altså muligheten til å korrigere effekten av sin initiale beslutning med en ny beslutning etter at man har fått mer informasjon om problemet, hvilket gjør det hensiktsmessig å benytte RM. LP-problemet presentert i (4.8) kan da omformuleres til RM, som vist i (4.9) og (4.10):

$$\begin{aligned} \max Z &= - \sum_{i \in I} C_i^T x_i + E[h(x, \tilde{D})] & (4.9) \\ \text{m.h.t. } x_i &\geq 0 & i \in I \end{aligned}$$

I dette problemet representerer $E[h(x, \tilde{D})]$ forventningsverdien av profitten for fremtidig salg og produksjon av t-skjorter, og $\tilde{D} = \{\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \dots, \tilde{D}_{|J|}\}$ er den usikre etterspørselen. For hvert scenario ω får man følgende problem:

$$\begin{aligned} h(x, D_\omega) &= \max \sum_{j \in J} (I_j - C_j^P) y_{j\omega} & (4.10) \\ \text{m.h.t. } \sum_{j \in J} B_{ij} y_{j\omega} - x_i &\leq 0 & i \in I \\ y_{j\omega} &\leq D_{j\omega} & j \in J \\ y_{j\omega} &\geq 0 & j \in J \end{aligned}$$

SMN må foreta en bestilling av det antall sedler av de ulike valørene som skal fylles på i hver enkelt minibank, før de kan observere hvilken verdi den usikre etterspørselen tar. Dette problemet kan modelleres som RM, men det minnes om at SMN har liten mulighet til å korrigere beslutningen om hvor mye som skal

fylles på etter at etterspørselen er blitt kjent: når man først har gjort en påfylling, må man vente til neste mulige påfylling for å korrigere den initiale beslutningen. Altså er det lite fleksibilitet å utnytte og RM er derfor ikke hensiktsmessig å bruke på LMU.

4.2.3 Robust optimering

Robust optimering (RO) er en metode for å modellere problemer som inneholder usikkerhet, hvor målet er å finne en løsning som er sikret å være innen mulighetsområdet uavhengig av variasjoner i usikre parameterverdier. Altså har slike løsninger a priori blitt sikret å ligge innenfor mulighetsområdet uansett verdi på problemets tilfeldige variabler. Bertsimas og Sim [43] omtaler dette som at den løsningen som er funnet er immun mot usikkerheten knyttet til parameterne sine verdier.

Ved bruk av RO vil et problem med usikre parameterverdier kunne optimeres ved at usikkerheten omformuleres fra å være stokastisk til å bli deterministisk og sett-basert. RO krever dermed ingen kjennskap til de usikre parameterne sin sannsynlighetsfordeling, bare deres øvre og nedre grense [44]. RO skiller seg dermed fra stokastisk programmering, da det for sistnevnte vil legges til grunn en antakelse om at usikkerheten har en sannsynlighetsfordeling. Den første RO formuleringen av et optimeringsproblem ble gjort av Soyster [45]. Han antok at alle usikre parametere i en gitt restriksjon kan ende opp med sin verst tenkelige (*worst case*) verdi til samme tid, hvilket må kunne sies å være en konservativ antakelse. Den resulterende formuleringen kalles for en kolonnevis usikkerhet. I sin artikkel fra 1999 presenterte Ben-Tal og Nemirovski [46] modellen til Soyster slik:

$$\begin{aligned}
 & \min c^T x \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n A_j x_j \leq b \qquad \forall A_j \in K_j, j = 0, \dots, n \qquad (4.11) \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

I modell (4.11) er hver kolonne A_j i matrisen A del av et sett K_j . Settet K_j består av tupler som hver seg inneholder en prognose av verdien de usikre parametrene hver kolonne kan ta. For tilfellet med usikker etterspørsel etter kontanter fra en

minibank vil hver tuppel bestå av en prognose for etterspørselen over perioden mellom to påfyllinger. Soyster antok at for hver rad i vil alle elementer a_{ij} ta sin verst tenkelige verdi samtidig, og modellen vil derfor sette parameterverdien lik den verst tenkelige verdien for å sikre at løsningen, for ethvert utfall parameterverdier, er innenfor mulighetsområdet. Den resulterende modellen fra denne antakelsen kalles det robuste alternativet til den originale modellen. Gitt lineariteten i (4.11) vil det robuste alternativet også være en lineær modell:

$$\begin{aligned}
 & \min c^T x \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \hat{A}_j x_j \leq b \qquad \hat{a}_{ij} = \sup_{A_j \in K_j} (A_j)_i \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

I sin artikkel fra 1999 argumenterer Ben-Tal og Nemirovski for at den kolonnebaserte modellen til Soyster er for konservativ, da sannsynligheten for at samtlige av de usikre parameterne samtidig tar sin verst tenkelige verdi er liten. De introduserer derfor en ny formulering som kalles for radvis usikkerhet:

$$\begin{aligned}
 & \min c^T x \\
 & \text{s.t.} \\
 & A_i^T x \leq b_i \qquad A_i \in K_i, i = 0, \dots, m \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

I modell (4.13) er hver rad A_i i matrisen A del av et sett K_i . Som for Soyster sin formulering består settet K_i av tupler, hvorav settet nå er per rad i . Målet med denne modellen er å vurdere deviasjonen verdiene i en rad har fra den normale parameterverdien, i stedet for å se på summen av alle de individuelle variasjonene. Det robuste alternativet til denne modellen vil som regel ikke være lineær, uavhengig av om det originale problemet er lineært eller ikke. Ben-Tal og Nemirovski argumenterer for at til tross for dette vil det robuste alternativet fortsatt kunne ha karakteristikk som gjør det håndterbart av datamaskiner, gitt at egenskapene til usikkerheten i settet K_i er gitt.

For SMN er dagene hvor det er mulig å besøke og påfylle en minibank gitt. Ved bruk av RO ville man måtte ta hensyn til det verst tenkelige utfallet mellom alle påfyllinger. Det vil si at den 1. påfyllingen må sammenliknes med de kommende påfyllingene i tidshorizonten individuelt, altså 1. påfylling med 2. påfylling, 1. påfylling med 3. påfylling og så videre. I tillegg vil det innen RO være slik at naturen velger størrelsen som etterspørselen skal ta, altså hvilken verdi den usikre parameteren skal ta innen settet K , mens SMN må anta hvilken verdi etterspørselen vil være på ut fra et sett mulige verdier. SMN vet ikke hvilken verdi på etterspørselen naturen har valgt når de bestemmer beløpet som skal fylles på, hvilket betyr at de eksempelvis kan komme i en situasjon hvor de fyller på for lite. Når mulige dager for besøk og påfylling er gitt vil ikke SMN ha mulighet til å fremskynde en påfylling om de har fylt på et for lavt beløp til å kunne oppfylle etterspørselen og således overholde oppetidskravet. Dette betyr at SMN må velge å fylle på den verst tenkelige verdien etterspørselen kan ta. Dette er som nevnt en for restriktiv fremgangsmåte, og sammen med kravet om sammenlikning mellom alle påfyllinger gjør dette at RO ikke vil være en naturlig metode å bruke på LMU.

4.2.4 Sannsynlighetsbegrenset programmering

Sannsynlighetsbegrenset programmering (*Chance constrained programming*, CCP) er en metode for å håndtere usikkerheten i statiske stokastiske problemer. I dynamiske stokastiske problemer, som ofte beskrives med RM, har man mulighet til å korrigere en initial beslutning med en ny beslutning etter at man har observert utfallet av en eller flere tilfeldige variabler. I statiske stokastiske problemer har man ikke mulighet til å korrigere den initiale beslutningen, noe som betyr at alle beslutninger tas før man observerer utfallet av de aktuelle tilfeldige variablene. Dersom man er usikker på den korrekte verdien til en eller flere parametre og parametrene lar seg beskrive ved en sannsynlighetsfordeling, er det mulig å benytte CCP. Dette avsnittet vil gi en introduksjon til metoden. For en grundigere innføring i metoden anbefales kapittel 4 i [47], hvor også ulike anvendelser av metoden presenteres.

Hensikten med restriksjoner i en optimeringsmodell er å begrense hvilke løsninger som er mulige: alle løsninger må overholde alle restriksjoner. Man vet ikke alltid den korrekte verdien til en parameter i en restriksjon, og CCP er en metode for å håndtere slik usikkerhet. I CCP håndterer man usikkerheten ved å beskrive sannsynligheten for at parameteren tar ulike verdier. Videre relaxerer man begrensningen som ligger i at *alle* løsninger må overholde *alle* restriksjoner, og

sier i stedet at en eller flere restriksjoner må overholdes i en gitt prosentandel av parameterens mulige verdier.

Det er vanlig å skille mellom to versjoner av CCP: individuell (*individual*) og samlet (*joint*). I den individuelle versjonen ser man på sannsynligheten for at én restriksjon skal overholdes for en gitt andel av den/de usikre parametrene utfall. Et eksempel på en slik restriksjon kan være et krav om at etterspørselen etter kontanter på en dag blir dekket i minst 90 % av tilfellene:

$$Pr(y_t \geq e_t) \geq P, \quad t \in T \quad (4.14)$$

Restriksjon (4.14) er en matematisk formulering av eksempelet over. I denne formuleringen er y_t mengden kontanter i en minibank på dag t , e_t er den tilfeldige variabelen som representerer etterspørselen etter kontanter for dag t , P er kravet for hvor stor andel av den tilfeldige variabelens utfall som restriksjonen må holde for og T er alle dager i perioden. Dette gir at man i den individuelle versjonen av CCP får én individuell restriksjon for hver dag i perioden T .

I den samlede versjonen av CCP ser man på et sett av restriksjoner og sier at settet skal overholdes i en gitt andel av de usikre parametrene utfall. Et eksempel på en slik restriksjon kan være et krav om at etterspørselen etter kontanter per dag over en periode på 30 dager skal dekkes i minst 90 % av tilfellene. Dette gir at man for den samlede versjonen ønsker at sannsynligheten for ikke å gå tom for kontanter i minibanken i løpet av *hele* perioden skal være minst 90 %, mens man i den individuelle versjonen ser på kun én dag om gangen. Gitt samme notasjon som i restriksjon (4.14) kan kravet i den samlede versjonen uttrykkes matematisk på følgende måte:

$$Pr(y_t \geq e_t, t \in T) \geq P \quad (4.15)$$

Dersom $|T|$ er like stor i en individuell versjon som i en samlet versjon av CCP, vil det være en vesentlig forskjell i antall restriksjoner mellom de to versjonene. Dette er gitt av restriksjon (4.14) og (4.15), hvor den individuelle versjonen har én restriksjon per dag i tidsperioden mens den samlede versjonen kun har én restriksjon.

Noe av utfordringen med å anvende CCP er å bevare lineariteten i problemet. Dersom det kun er høyresiden i den aktuelle restriksjonen som har usikkerhet knyttet til seg, og man antar at parameteren kan beskrives ved en normalfordeling, er det mulig å omformulere (4.14) slik at restriksjonen blir lineær, noe

Keown og Taylor viser i [48] og Henrion i [49]. Ved bruk av samlet CCP på LMU hadde det trolig blitt et ulineært optimeringsproblem. I tillegg mener forfatterne at samlet CCP ikke beskriver problemet bedre enn individuell CCP, og derfor vil samlet CCP ikke behandles nærmere.

I LMU vil etterspørselen etter kontanter i en minibank være den eneste usikre parameteren. SMN har et fastsatt oppetidskrav på 97,5 %, hvor blant annet det å gå tom for kontanter i minibanken inngår som en del av oppetiden. Dette betyr at det ikke kreves at kontantbeholdningen i minibanken oppfyller 100 % av etterspørselen. Gitt beskrivelsen av individuell CCP og fleksibiliteten kravet om et oppetidskrav på under 100 % gir, virker CCP som en lovende metode for å håndtere usikkerheten i etterspørselen etter kontanter på.

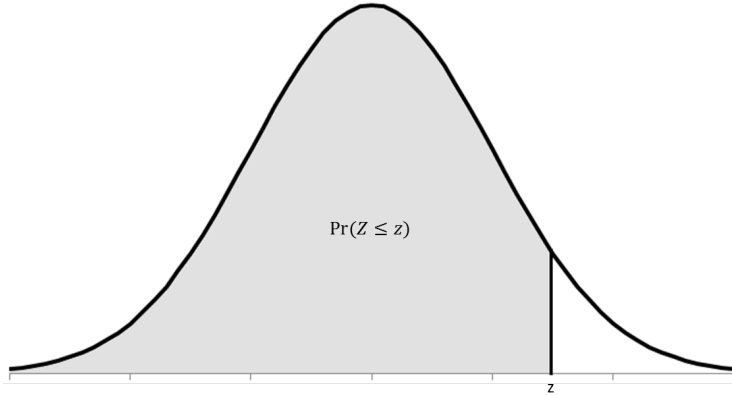
Normalfordelt etterspørsel

Som nevnt kan restriksjon (4.14) for individuell CCP omformuleres til en lineær restriksjon om man antar normalfordelt etterspørsel. Det vil i dette avsnittet sees nærmere på normalfordelingen, og hvordan restriksjon (4.14) kan omformuleres til en lineær restriksjon.

En normalfordeling har to parametere som beskriver fordelingen; forventningsverdien μ og variansen σ^2 . En stokastisk variabel Z som er normalfordelt med forventningsverdi lik 0 og varians lik 1 sies å ha en standard normalfordeling.

$$f(z, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\mu)^2}, \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad (4.16)$$

Funksjon (4.16) beskriver punktsannsynligheten for et utfall z av den stokastiske variabelen Z . For å finne den kumulative sannsynligheten, $\Phi(z)$, for et utfall z av Z , integrerer man funksjon (4.16) fra $-\infty$ til z , hvilket gir $Pr(Z \leq z)$ skravert i Figur 4.12. Vet man verdien på z kan man dermed finne den tilhørende kumulative sannsynligheten for z , og vet man den kumulative sannsynligheten p kan man finne verdien på z ved hjelp av $\Phi^{-1}(p)$.



Figur 4.12: Illustrasjon av en normalfordeling

I CCP ønsker man å finne verdien på utfallet e_t som tilfredsstillers en sannsynlighet p . Dersom e_t er normalfordelt kan dette gjøres ved å benytte seg av formel (4.17) som transformerer en normalfordelt stokastisk variabel til en standard normalfordeling:

$$z = \frac{e_t - \mu_{e_t}}{\sigma_{e_t}} \quad (4.17)$$

I denne formelen er e_t en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ_{e_t} og varians $\sigma_{e_t}^2$. Ved å bruke formel (4.17) kan man omformulere (4.14) til en lineær restriksjon på følgende måte:

$$\begin{aligned}
 Pr(y_t \geq e_t) &\geq P, & t \in T \\
 Pr\left(\frac{y_t - \mu_{e_t}}{\sigma_{e_t}} \geq \frac{e_t - \mu_{e_t}}{\sigma_{e_t}}\right) &\geq P, & t \in T \\
 \Phi\left(\frac{y_t - \mu_{e_t}}{\sigma_{e_t}}\right) &\geq P, & t \in T \\
 \frac{y_t - \mu_{e_t}}{\sigma_{e_t}} &\geq \Phi^{-1}(P), & t \in T \\
 y_t &\geq \mu_{e_t} + \Phi^{-1}(P)\sigma_{e_t}, & t \in T \\
 y_t &\geq \mu_{e_t} + z^P\sigma_{e_t}, & t \in T
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

I denne omformuleringen er z^P den tilhørende z-verdien i en standard normalfordeling til den kumulative sannsynligheten P .

Normalfordelingen har en nyttig egenskap ved at summen av to eller flere uavhengige, normalfordelte tilfeldige variabler også er normalfordelt. Det vil si at dersom man legger sammen den tilfeldige variabelen som representerer etterspørselen etter kontanter for to påfølgende dager, e_1 og e_2 , vil summen av disse, $\zeta = e_1 + e_2$, også være en normalfordelt tilfeldig variabel, såfremt de er uavhengige. Den nye normalfordelte tilfeldige variabelen vil ha en forventningsverdi lik summen av forventningsverdiene til e_1 og e_2 , altså $\mu_\zeta = \mu_{e_1} + \mu_{e_2}$ og standardavvik $\sigma_\zeta = \sqrt{\sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2}$ [50]. Dette kan generaliseres til å gjelde for alle lineære kombinasjoner av uavhengige, normalfordelte variabler:

$$\zeta = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

vil være normalfordelt med forventningsverdi:

$$\mu_\zeta = a_1 \mu_{e_1} + a_2 \mu_{e_2} + \dots + a_n \mu_{e_n}$$

og standardavvik:

$$\sigma_\zeta = \sqrt{a_1^2 \sigma_{e_1}^2 + a_2^2 \sigma_{e_2}^2 + \dots + a_n^2 \sigma_{e_n}^2}$$

hvor a_t er en konstant. Altså kan man lage versjoner av (4.18) hvor den stokastiske variabelen representerer etterspørselen for flere dager og ikke bare én dag, eller justere den tilfeldige variabelen e_t med en faktor a_t .

4.3 Prognosemetoder

Dersom man er usikker på hvilket utfall en fremtidig hendelse kommer til å få, er det ofte et behov for å prognostisere utfallet. Å prognostisere utfallet av en hendelse er særdeles vanskelig og det sies at det eneste man kan si sikkert om en prognose er at den alltid er feil. Allikevel kan en prognose være et nyttig hjelpemiddel for å ta beslutninger. For eksempel ser man på værvarselet for den kommende helgen og bruker dette som beslutningsgrunnlag for om man skal reise på hytta eller ikke, man ser på forventet renteutvikling før man eventuelt kjøper bolig og man ser på forventet avkastning på en aksje før man eventuelt kjøper aksjen.

I LMU er den usikre faktoren etterspørselen etter kontanter, og det er således et behov for å prognostisere denne. Prognosemetoder kan grovt sett deles inn i tre hovedgrupper [51]: skjønnsbaserte (*judgmental*), kausale (*causal*) og tidsrekke-modeller (*time-series*), og underkapittelet vil følgelig bestå av en presentasjon av disse hovedgruppene. Kontanter vil i forklaringen sees på som et produkt, og det vil videre tas utgangspunkt i at det er en etterspørsel etter et produkt som skal prognostiseres.

4.3.1 Skjønnsbaserte metoder

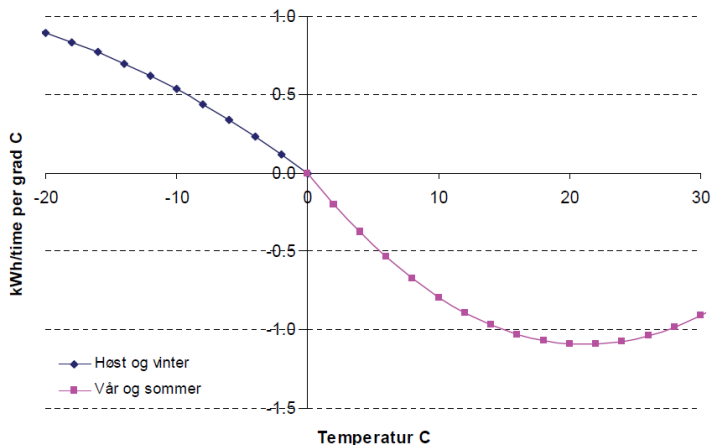
Skjønnsbaserte metoder er kvalitative metoder som ofte baserer seg på eksperters kunnskap om etterspørselen, produktet eller markedet man opererer i. Basert på en eller flere eksperters meninger og prognoser kan man komme frem til en endelig prognose for etterspørselen. Ekspertene i denne sammenhengen kan for eksempel være nøkkelpersonell, ledelsen, markedsanalytikere eller andre med god innsikt i problemstillingen. Prognoser ekstrapolert fra spørreundersøkelser blant kunder og potensielle kunder er også en skjønnsbasert og kvalitativ metode. Dette, og bruk av eksperter, benyttes ofte i tilfeller hvor man har lite historisk data om etterspørselen tilgjengelig, for eksempel i forbindelse med lanseringen av et nytt produkt eller nye egenskaper ved produktet.

Som beskrevet i avsnitt 3.3.2 benytter SMN nøkkelpersonell til å avgjøre hvor mye som skal fylles på i minibankene, hvilket kan klassifiseres som en skjønnsbasert prognosemetode. Denne praksisen er med på å resultere i at SMN sine minibanker blir fylt på med flere sedler enn hva som etterspørres, som presentert i avsnitt 4.2.1. Som følge av dette konkluderer forfatterne med at dagens praksis med bruk av nøkkelpersonell til å ta skjønnsbaserte avgjørelser ikke er en god

prognosemetode for LMU. Som nevnt brukes skjønnsbaserte metoder ofte i de tilfeller hvor man har lite historisk data. Riktig nok har SMN kun tilgang til 3 måneder med detaljert data i Micos, men dette hindrer ikke banken i eksempelvis å fortløpende lagre tilgjengelig data på egenhånd. I så måte har SMN tilgang til detaljert historisk data og skjønnsbaserte metoder fremstår dermed ikke som en aktuell prognosemetode for LMU.

4.3.2 Kausale metoder

Kausale metoder bygger på antakelsen om at en hendelse har en årsak-virkningssammenheng med en annen hendelse. Ut fra utfallet av den ene hendelsen kan man altså estimere utfallet av den andre hendelsen. Eksempelvis er strømforbruket i Norge avhengig av temperaturen utendørs, som illustrert i Figur 4.13, siden elektrisitet er en av de vanligste oppvarmingskildene i landet. Dersom man vet eller har en god prognose for temperaturen kan man altså anslå etterspørselen etter elektrisitet.



Figur 4.13: Illustrasjon av årsak-virkning-sammenheng mellom strømforbruk og temperatur, [52]

Det kan være utfordrende å finne slike årsak-virkning-sammenhenger mellom hendelser og ikke minst å anslå hvor stor sammenhengen mellom hendelsene er. Ofte er det vanskelig å isolere virkningen av en spesiell hendelse fordi flere andre hendelser inntreffer samtidig. For eksempel kan etterspørselen etter pinneis

være avhengig av været; flere kjøper pinneis dersom det er sol og varmt vær. På 17. mai er det mange som kjøper pinneis i Norge uansett vær, så dersom man skal prognostisere etterspørselen etter pinneis 17. mai: hvor mye av etterspørselen kommer av det fine været og hvor mye kommer av at det er 17. mai?

I forbindelse med ulike markeder som Bondens marked, julemarked og liknende er det ofte behov for kontanter for å kunne betale for varer. Det er altså rimelig å anta at det er en årsak-virkning-sammenheng mellom slike markeder og etterspørselen etter kontanter fra minibanker, men størrelsen på denne sammenhengningen kan derimot være vanskelig å anslå. Hvor mange av selgerne på markedet har kortterminaler? Hvor mange salgsboder er det på Bondens marked denne gangen? Hvor stor er etterspørselen etter varene som kun kan kjøpes med kontanter? Det kan altså være mange underliggende hendelser og årsaker til stede som kan være vanskelig å fastslå, og det vil derfor være vanskelig å prognostisere etterspørselen etter kontanter fra minibanker som en virkning av det aktuelle markedet. I tillegg må man ha oversikt over når og hvor disse markedene inntreffer, noe som krever ekstra ressursbruk. Andre liknende arrangementer som konserter, internasjonale konferanser og idrettsarrangement kan også ha sammenheng med etterspørselen etter kontanter fra minibanker.

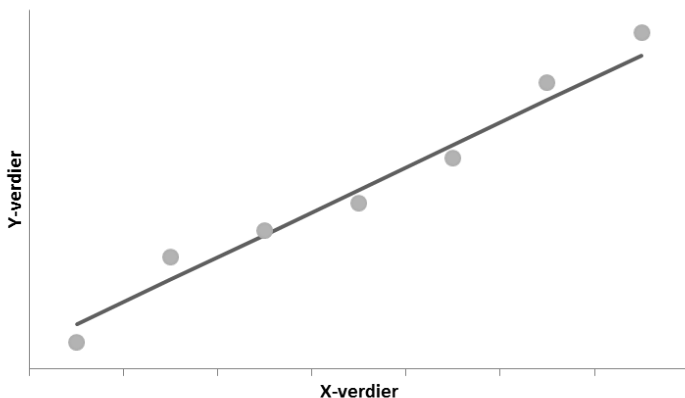
Selv om det kan være utfordrende å prognostisere etterspørselen ut fra hvilket type arrangement som skal gjennomføres, er det nettopp slike arrangementer som kan føre til at en minibank går tom for kontanter. Derfor mener forfatterne at det bør kartlegges hvilken effekt ulike arrangementer har på etterspørselen.

En vanlig metode for å kartlegge de kvantitative sammenhengene i et årsak-virkning-forhold er lineær regresjon. Ved å anta at det er en lineær sammenheng mellom hendelse X og hendelse Y , hvor Y er hendelsen man er interessert i å prognostisere, kan man ved hjelp av lineær regresjon estimere hvordan X påvirker Y . Man antar altså følgende sammenheng mellom hendelsene:

$$E(Y|X = x) = A + Bx \quad (4.19)$$

På bakgrunn av observerte verdier av Y og X kan man deretter estimere verdiene på A og B i formel (4.19). Som regel vil ikke de observerte verdiene av Y og X ligge på en rett linje, og man må derfor finne verdier på A og B som passer best mulig til de observerte verdiene. For å finne disse verdiene er det vanlig å benytte seg av minste kvadraters metode (*method of least squares*), hvor man minimerer summen av kvadratet av avvikene mellom den rette linjen og de

observerte verdiene. Som man kan se av Figur 4.14 er det et avvik mellom de observerte verdiene, de runde punktene, og den estimerte sammenhengen mellom Y og X , den rette linjen.



Figur 4.14: Illustrasjon av observerte verdier og estimert sammenheng mellom X og Y

Dersom den rette linjen i Figur 4.14 er $\tilde{y} = A + Bx$ kan summen av kvadratet av avvikene mellom linjen og de observerte verdiene uttrykkes slik:

$$q = (\tilde{y}_1 - y_1)^2 + (\tilde{y}_2 - y_2)^2 + \dots + (\tilde{y}_n - y_n)^2 \quad (4.20)$$

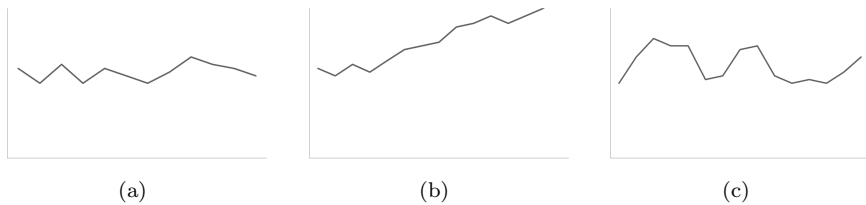
Ved å minimere q ved å la A og B i funksjonen for \tilde{y} variere kan man deretter finne linjen som passer best for de observerte verdiene av X og Y .

For LMU vil bruk av kausale metoder kunne utgjøre en del av bestemmelsen for hvor mye kontanter som skal fylles på i en minibank. Som nevnt i avsnitt 4.1.2 er det totale lagernivået i SMN sine minibanker i dag en kombinasjon av sikkerhetslager, syklisk- og hendelsesbasert lagerbeholdning, hvorav kausale metoder kan brukes for å estimere størrelsen på den hendelsesbaserte lagerbeholdningen.

4.3.3 Tidsrekkemodeller

De fleste statistiske prognosemetodene er basert på bruk av historisk data; hvor stor har etterspørselen vært. Slike samlinger av data hvor hvert tidspunkt har en tilhørende etterspørsel kalles tidsserier eller tidsrekker, hvorav metoder og modeller som tar utgangspunkt i tidsrekker kalles tidsrekkemodeller. Dersom historisk data kan sies å være representativ for hva som vil skje i fremtiden er det mulig å benytte seg av denne dataen for å fremstille prognoser om fremtiden.

Hvilken tidsrekkemodell man kan benytte er avhengig av tidsrekken man skal benytte modellen på. Det er vanlig å dele inn tidsrekkene i tre typer: konstant nivå (*constant level*), lineær trend (*linear trend*) og sesongavhengig (*seasonal effect*), illustrert i henholdsvis Figur 4.15(a), 4.15(b) og 4.15(c).



Figur 4.15: Ulike typer tidsrekker

En tidsrekke kan ha en kombinasjon av konstant nivå og sesongavhengighet eller lineær trend og sesongavhengighet. Naturligvis kan ikke en tidsrekke ha både konstant nivå og lineær trend samtidig. For å undersøke hvilke egenskaper en tidsrekke har er det vanlig å undersøke dataen grafisk, som illustrert i Figur 4.15.

Konstant nivå

Selv om etterspørselen har et tilnærmet konstant nivå vil det være tilfeldige utslag i etterspørselen som vist i Figur 4.15(a). Dette kan beskrives matematisk:

$$X_t = A + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

I den stokastiske prosessen som representerer etterspørselen, X_t , utgjør A det konstante nivået og e_t det tilfeldige utslaget, også kalt feilmarginen. I prognoser

er det vanlig å anta at feilmarginen har forventningsverdi lik 0 og konstant varians, og på den måten kan man prognostisere verdien på X_t slik:

$$F_{t+1} = E(X_t) = A \quad (4.22)$$

Prognosen og forventningsverdien angis av henholdsvis F_{t+1} og $E(X_t)$. Det finnes flere måter å prognostisere en etterspørsel som har egenskapen konstant nivå. Den enkleste man kan tenke seg er å si at morgendagens etterspørsel er lik gårsdagens etterspørsel, x_t , kalt siste-verdi prognosemetode (*last-value forecasting method*):

$$F_{t+1} = x_t \quad (4.23)$$

På grunn av tidsrekkenes størrelse, som er lik 1, har denne metoden stor varians. Man burde normalt sett bare vurdere å benytte denne metoden dersom antakelsen om konstant nivå er lite trolig og det er store, raske endringer i tidsrekken som gjør at den historiske dataen er irrelevant. Eventuelt kan metoden benyttes dersom antakelsen om at feilmarginen, e_t , har konstant varians er lite trolig, og at variansen er mye større eller mindre nå enn den har vært tidligere. Metoden kan sees på som litt naiv, men ved hurtige endringer i etterspørselen er det godt mulig at det kun er det siste datapunktet som er relevant for prognosen.

Gjennomsnitt er en annen prognosemetode. I motsetning til siste-verdi metoden benytter man i metoden gjennomsnitt *alle* datapunkter man har tilgjengelig:

$$F_{t+1} = \sum_{i=1}^t \frac{x_i}{t} \quad (4.24)$$

Dersom antakelsen om konstant nivå er troverdig, altså at prosessen er stabil, er dette en god metode å benytte. Allikevel må man være oppmerksom på at det konstante nivået kan endre seg over tid og at de eldste datapunktene derfor ikke vil være relevante lenger. Altså kan man argumentere for at metoden er best egnet for unge prosesser.

For å unngå problemet med ikke-relevante datapunkter kan man ha et glidende gjennomsnitt (*moving-average*). Med dette menes at man endrer hvilke datapunkter man tar gjennomsnittet av ettersom man får tilgang til nye datapunkter. Når man får tilgang til et nytt datapunkt legger man altså dette inn i beregningene for gjennomsnittet og fjerner samtidig det eldste datapunktet. På

denne måten er antall elementer N i tidsrekken man benytter konstant, men verdiene i tidsrekken endres:

$$F_{t+1} = \sum_{i=t-N+1}^t \frac{x_i}{N} \quad (4.25)$$

Denne metoden kombinerer fordelene ved prognosemetodene siste-verdi og gjennomsnitt ved at metoden kun bruker relevant historie *og* mange observasjoner. En utfordring med denne metoden er å fastsette størrelsen på N . Tar man med for mange datapunkter vil man kunne få problemer med ikke-relevante datapunkter og tar man med for få vil variansen bli høy. En annen ulempe med prognosemetoden glidende gjennomsnitt er at den legger like stor vekt på den nyeste observasjonen som den eldste observasjonen: intuitivt bør det legges mer vekt på de nyeste observasjonene sammenliknet med de eldste observasjonene. Prognosemetoden eksponentiell glatting (*exponential smoothing*) bruker en glattingsfaktor, α , på observasjonene for å svare på denne ulempen:

$$F_{t+1} = \alpha x_t + (1 - \alpha)F_t, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.26)$$

Altså er prognosen F_{t+1} en vektet sum av den siste observerte verdien x_t og den forrige prognosen F_t . Dersom man skriver ut formel (4.26) blir det tydeligere hvorfor metoden heter *eksponentiell* glatting:

$$F_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \dots, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.27)$$

Som man kan se av formel (4.27) legges det mest vekt på den nyeste observasjonen, mens det legges mindre og mindre vekt på observasjoner desto eldre de er. Sammenliknet med prognosemetoden glidende gjennomsnitt vil eksponentiell glatting reagere raskere på endringer i den stokastiske prosessen, siden den legger mest vekt på det nyeste datapunktet. Da metoden ikke er i stand til å inkorporere trender i sine beregninger er en ulempe med metoden at den alltid vil ligge i bakkant av en kontinuerlig trend. En annen ulempe med metoden er utfordringen med å finne en passende verdi på glattingsfaktoren α . Dersom man velger en for liten verdi på α vil prognosen reagere veldig tregt på endringer i den stokastiske prosessen. Med en for høy verdi på α vil prognosen legge for mye vekt på de nyeste datapunktene og kan da tolke tilfeldige utslag i etterspørselen som endringer i den stokastiske prosessen. Dette vil medføre for høye eller for lave prognoser, noe som ikke er ønskelig. Hillier og Lieberman [51] mener at α ikke bør overstige 0,3 og at et fornuftig valg er i nærheten av 0,1.

Mean square error (MSE) og *mean absolute deviaton* (MAD) er to mål på hvor god en prognose er, hvor man sammenlikner den prognostiserte verdien, F_t , i punkt t med observerte verdier av etterspørselen i samme punkt, x_t .

$$MAD = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |x_t - F_t| \quad (4.28)$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_t - F_t)^2 \quad (4.29)$$

Ved å minimere MSE eller MAD ved å endre på α , kan man komme frem til en verdi på α man kan forsvare siden man minimerer den gjennomsnittlige feilen for prognosen.

Lineær trend

Som nevnt er ikke prognosemetoden eksponentiell glatting i stand til å inkorporere lineære trender i sine beregninger, men dette kan oppnås ved hjelp av noen små endringer. La oss anta at den stokastiske prosessen med en lineær trend kan uttrykkes matematisk med samme notasjon som ovenfor:

$$X_t = A + Bt + e_t, \quad \text{for } t = 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Den lineære trendfaktoren, B , kan, i likhet med det konstante nivået A , endre seg over tid. For å fange opp slike endringer kan man benytte eksponentiell glatting på B . La

$$T_{t+1} = \text{eksponentielt glattet estimat for trendfaktoren } B$$

Gitt verdien på T_{t+1} , vil en prognose for etterspørselen være:

$$F_{t+1} = \alpha x_t + (1 - \alpha)F_t + T_{t+1}, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.31)$$

Legg merke til at formel (4.30) impliserer at:

$$B = E(X_{t+1}) - E(X_t)$$

Altså kan et estimat for B uttrykkes som gjennomsnittet av differansen mellom to påfølgende observasjoner. For å vektlegge de nyeste observasjonene mest og de eldste minst, defineres:

L_{t+1} = Trenden ved tidspunktet $t+1$ basert på de to siste observasjonene x_t og x_{t-1} , og de to siste prognosene F_t og F_{t-1} .

Den eksponentielle glattingsformelen for L_{t+1} blir da:

$$L_{t+1} = \alpha(x_t - x_{t-1}) + (1 - \alpha)(F_t - F_{t-1}), \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.32)$$

Med introduksjon av trendens glattingsfaktor β , gir dette følgende formel for T_{t+1} :

$$T_{t+1} = \beta L_{t+1} + (1 - \beta)T_t, \quad \beta \in [0, 1] \quad (4.33)$$

For å benytte prognosemetoden eksponentiell glatting for lineær trend er det nødvendig med to startverdier:

- x_0 = Initialt estimat for den forventede verdien på etterspørselen A , såfremt forholdene rett før man starter prognoseringen forblir uforandret uten noen trend.
- T_1 = Initialt estimat for trenden B rett før man starter prognoseringen.

Ofte benyttede verdier på x_0 og T_1 er henholdsvis den første observerte verdien x_1 og 0.

Sesongavhengig

Det er relativt vanlig at etterspørselen er preget av sesongavhengighet. Som en følge av julegavehandel er det eksempelvis veldig mange varer som har høyere etterspørsel i desember enn i årets andre måneder. For å sesongjustere en prognose kan man benytte seg av en *sesongfaktor* som man får ut av følgende formel:

$$\text{Sesongfaktor} = \frac{\text{Gjennomsnitt for sesongen}}{\text{Totalt gjennomsnitt}} \quad (4.34)$$

Sesongfaktoren anvendes først til å justere alle datapunktene i tidsrekken som påvirkes av sesongen:

$$\text{Sesongjustert datapunkt} = \frac{\text{Faktisk verdi}}{\text{Sesongfaktor}} \quad (4.35)$$

De sesongjusterte datapunktene viser altså etterspørselen i sesongen, justert for sesongeffekten. Når man har sesongjustert alle aktuelle datapunkter benytter

man deretter den prognosemetoden som passer, gitt hvorvidt datasettet har konstant nivå eller lineær trend, for å prognostisere den neste *sesongjusterte* etterspørselsverdien. Deretter multipliserer man denne verdien med sesongfaktoren og ender opp med en prognose for den *faktiske* verdien på etterspørselen. Den generelle prosedyren for å benytte seg av sesongfaktor er som følger:

1. Bruk følgende formel (4.35) for å sesongjustere alle datapunktene i tidsrekken.
2. Velg en tidsrekkemodell som passer for den aktuelle tidsrekken.
3. Anvend tidsrekkemodellen på den sesongjusterte tidsrekken for å finne en prognose for det neste sesongjusterte datapunktet.
4. Multipliser prognosen med den aktuelle sesongfaktoren for å få en prognose for det neste faktiske datapunktet.

For SMN er det trolig flere sesongfaktorer som påvirker etterspørselen. For eksempel er det naturlig å anta at etterspørselen etter kontanter er avhengig av hvor mye penger kundene har tilgjengelig. I Norge er det vanlig med månedlige lønnsutbetalinger på en fast dato i måneden, men på grunn av at denne datoen med jevne mellomrom havner på en helligdag eller i en helg kan datoen for lønnsutbetalingen variere noe. Uansett er lønningsdagen den datoen i måneden kundene normalt har mest penger tilgjengelig, og etterspørselen varierer derfor trolig med dato i måneden. Andre eksempler på mulige sesongfaktorer for SMN er måned og ukedag.

4.4 Optimering av minibankers påfylling

Dette underkapittelet vil ta for seg relevante publikasjoner omhandlende optimeringsbasert beslutningsstøtte for påfylling av minibanker, og gi en sammenlikning mellom publikasjonene og LMU. Først vil egenskapene ved problemene og modellformuleringene i publikasjoner som omhandler optimering av minibankers påfylling presenteres, før underkapittelet avsluttes med en sammenlikning av de presenterte publikasjonene.

Økt fokus på mer effektiv drift av minibanker de siste årene har ført til noen publikasjoner innen optimering av minibankers påfylling, men det er fortsatt få publikasjoner innenfor dette temaet. På grunn av at banker drifter sine minibanker på forskjellige måter har forfatterne av de ulike publikasjonene ofte hatt forskjellige utgangspunkt for sitt arbeid. For eksempel gjelder LMU spesifikt for SMN, mens en annen bank i Norge kan drifte sine minibanker på en annen måte. Dette vises tydelig i de publikasjonene som er funnet, noe som resulterer i store forskjeller i de matematiske modellene i de ulike publikasjonene. På bakgrunn av dette vil det her fokuseres på egenskaper ved problemene i de ulike publikasjonene, før disse sammenliknes med LMU.

Wagner [53] tar for seg et todelt problem: et lagerproblem og et ruteplanleggingsproblem. Hver minibank sees på som et lager som må fylles på med sedler, og man må finne ruter som sørger for at alle minibanker blir fylt på. Det påløper en oppstartskostnad for hver påfylling, som kan sammenliknes med SMN sin betjeningsavgift. Wagner opererer med beslutninger om hvor mange sedler som skal fylles på, og ikke hvor stort beløp som skal fylles på. Dette er likt som i LMU, men siden Wagner kun ser på én valør og verdien på valøren er lik 1, er antall sedler tilsvarende det påfylte beløpet. Videre påløper det en kostnad ved å ha sedler stående i en minibank, som er tilsvarende mellomregningskostnaden i LMU. Noe som klart skiller problemet i Wagner fra LMU er at det ikke returneres sedler ved en påfylling. Det vil si at ved en påfylling er ny saldo lik saldoen før påfyllingen *addert* påfylt mengde kontanter. Etterspørselen i modellen Wagner presenterer ansees som *deterministisk*, og er modellert som et konstant antall sedler per tidsenhet. Dette er forskjellig fra LMU hvor etterspørselen er usikker. Etterspørselen varierer fra minibank til minibank. En stor forskjell mellom problemet i Wagner og LMU er den nevnte ruteplanleggingen, noe som gjør at Wagner har et *Inventory Routing Problem*. Wagner ser bort fra kostnaden som påløper per seddel som fylles på, og begrunner dette med at oppstartskostnaden ved en påfylling vil dominere kostnaden som påløper per

seddel. Hensikten med modellen som Wagner presenterer er å minimere de totale kostnadene forbundet med transport og påfylling av kontanter i minibanker.

I [54] ser du Toit på utfordringene en bank i Sør-Afrika har forbundet med sin drift av minibanker, hvor verdihåndtering og påfylling er en del av denne driften. Du Toit prognostiserer etterspørselen etter kontanter ved å benytte eksponentiell glatting med lineær trend, inkludert sesongfaktorer for dato i måned, ukedag og måned. Det er fleksibelt hvilken dag en minibank kan fylles på, noe som muliggjør forfatterens bruk av påfyllingsstrategiene (s,S) og (s,S,R). Videre returneres det sedler ved en påfylling slik som i LMU og alle kassetter byttes alltid ved en påfylling. Du Toit presenterer tre ulike modeller med ulike kombinasjoner av påfyllingsstrategi og ruteplanlegging. I to av modellene antar forfatteren at man uansett kjører tur/retur for hver enkelt minibank, mens i den tredje inkluderer forfatteren *travelling salesman problem* og planlegger altså hvilken rekkefølge minibankene skal fylles på. Ved å benytte seg av simuleringer med utgangspunkt i de tre modellene, hvor du Toit varierer verdiene på s og S , foreslår forfatteren en ny bestillingsordning for banken.

Sammenliknet med problemet som er omhandlet i Wagner [53] inneholder problemet som Altunoğlu [55] tar for seg langt færre kostnadsparametre. De eneste kostnadene Altunoğlu ser på er kapital- og straffekostnaden. Kapitalkostnaden påløper for kontanter som står i en minibank på slutten av en periode, mens straffekostnaden påløper dersom en minibank går tom for kontanter. Altunoğlu opererer med en stokastisk etterspørsel, hvor etterspørselen antas å ha en sannsynlighetsfordeling, og forsøker å minimere den totale kostnaden for å drifte en minibank basert på denne etterspørselen. Forfatteren presenterer en målfunksjon uten noen restriksjoner, men på grunn av straffekostnaden dersom en minibank går tom vil en stor andel av etterspørselen allikevel dekkes. Som i problemet Wagner tar for seg returneres det ikke sedler ved en påfylling, og ny saldo etter en påfylling er dermed lik saldoen før påfyllingen pluss påfylt beløp.

Castro [56] presenterer et problem med stokastisk etterspørsel hvor det påløper en oppstartskostnad for hver påfylling. I tillegg påløper det en kapitalkostnad for kontanter som står i en minibank. I artikkelen modelleres problemet først som et RM med to steg, før Castro deretter presenterer en flerstegs modell. Hensikten med begge modellene er å minimere summen av de forventede kapital- og oppstartskostnadene basert på sannsynligheten for at forskjellige etterspørselsscenarier inntreffer. Slik som for problemet presentert i Wagner [53] og Altunoğlu [55] returneres det ikke sedler ved en påfylling.

Simutis m.fl. [57] ser på et problem hvor de tar hensyn til kapitalkostnader, oppstartskostnader for å fylle på en minibank og en konstant vedlikeholdskostnad for hver minibank. Som i Wagner [53] ansees etterspørselen å være deterministisk, hvilket er forskjellig fra LMU. Publikasjonen sier lite om hvordan selve påfyllingen foregår. Eksempelvis fremgår det ikke om en minibank kan påfylles uten å returnere kontanter. Forfatterens mål er å finne den optimale påfyllingsplanen som minimerer de nevnte kostnadene.

Armenise m.fl. [58] angriper problemet annerledes sammenliknet med publikasjonene ovenfor. I stedet for å finne en optimal påfyllingsplan som minimerer kostnader, prøver Armenise m.fl. å finne optimale påfyllingsstrategier som minimerer mengden kontanter i en minibank, men som samtidig dekker all etterspørsel, ved bruk av genetiske algoritmer. Sett med optimale strategier brukes videre i påfyllingsplanleggingen, ved at strategiene velges ettersom man får informasjon om hvilke(n) nøkkelegenskap som vil inntreffe i kommende periode. Etterspørselen ansees altså å være deterministisk, siden man antar at etterspørselen vil bli et gitt beløp avhengig av hvilke(n) nøkkelegenskap som inntreffer. Et eksempel på en strategi som presenteres er å alltid fylle en minibank opp til maksimal kapasitet dersom det arrangeres en festival i nærheten av minibanken i de nærmeste dagene etter en påfylling. Denne strategien vil altså velges om man får informasjon om at det vil arrangeres en festival i kommende periode. En annen strategi kan være å bare fylle opp minibanken slik at saldoen etter påfyllingen er halvparten av maksimal kapasitet, dersom de neste dagene etter påfyllingen er vanlige arbeidsdager.

Høsten 2013 skrev forfatterne, Bakken og Wiik, med utgangspunkt i hvordan SMN drifter sine minibanker en rapport [4] som omhandlet tilsvarende problem som LMU tar for seg. Som nevnt i underkapittel 3.1 har SMN inngått en ny kontrakt med Nokas våren 2014, hvilket har medført en annen kostnadsstruktur sammenliknet med problemet forfatterne tok for seg i [4]. Som følge av den nye avtalen er det eksempelvis ikke kostnader forbundet med retur av ubrukte sedler. Forfatterne bygde i [4] sin rapport på antakelsen om deterministisk etterspørsel. Med kjent etterspørsel ble modellene presentert i rapporten brukt til å vise de teoretiske kostnadsbesparelsene ved bruk av optimeringsbasert beslutningsstøtte i SMN sin drift av minibanker. Disse resultatene ble videre brukt som begrunnelse for at det ville være en verdi i å videre se på mulige kostnadsbesparelser gitt stokastisk etterspørsel, hvilket er formålet for LMU.

Tabell 4.1: Oversikt over hvordan etterspørselen behandles i de presenterte publikasjonenes modeller

	LMU	[4]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]
Deterministisk ettersp.		x	x				x	x
Stokastisk ettersp.	x			x	x	x		

Tabell 4.1 viser en oversikt over hvordan etterspørselen håndteres i problemene og modellene som er presentert i litteraturen ovenfor og en sammenlikning mellom disse og LMU, hvorav LMU i tabellen viser til denne rapporten. Som nevnt er etterspørselen etter kontanter fra minibanker vanskelig å forutse, hvilket dels forklarer hvorfor enkelte forfattere velger å anta etterspørselen som deterministisk. Dette er et valg som gjør problemet lettere å modellere og som kan gi et svar på hva som er teoretisk mulig å oppnå innen besparelser ved bruk av optimeringsbasert beslutningsstøtte. Antakelsen om stokastisk etterspørsel kan medføre mer realistiske resultater enn ved deterministisk da usikkerheten forbundet med hvilke verdier etterspørselen vil ta inkluderes i modellen.

Tabell 4.2: Oversikt over hvilke påfyllingsfaktorer som er inkludert i de presenterte publikasjonenes modeller

	LMU	[4]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]
Påfyllingsfaktor								
Etterspørselsdrevet påf.	x	x	x	x	x	x	x	
Betingelsedrevet påf.								x
Forskjellige valører	x	x		x				
Påf. av antall sedler	x	x	x	x				
Påf. av totalbeløp					x	x	x	x
Påf. uten retur			x		x	x		x
Påf. med retur	x	x		x				
Kapitalkostnad	x	x	x	x	x	x	x	
Oppstartskost. ved påf.	x	x	x	x		x	x	
Kostnad per påf. seddel		x	x	x				
Minimerer totalbeløp								x
Minimerer kostnad	x	x	x	x	x	x	x	
Ruteplanlegging			x	x				

Tabell 4.2 viser en oversikt over egenskaper ved problemene og modellene som er presentert i litteraturen ovenfor og en sammenlikning mellom disse og LMU, hvorav LMU i tabellen viser til denne rapporten. Som tabellen viser er det ingen problemer som omhandles i den nevnte litteraturen som tar for seg tilsvarende problem som sees på i denne rapporten. Problemet til SMN innebærer eksempelvis inkludering av forskjellige valører og retur av ubrukte sedler ved påfylling, hvilket er egenskaper ved optimering av minibankers påfylling som ingen i den nevnte litteraturen presenterer.

Publikasjonene som er presentert i dette kapittelet representerer som nevnt de relevante utgivelser som forfatterne har funnet ved utarbeidelsen av denne rapporten. Med utgangspunkt i de presenterte publikasjonene og oppsummeringene i Tabell 4.1 og 4.2 resulterer dette i at det, etter forfatternes kjennskap, ikke er utgitt publikasjoner innen området som omhandler et problem tilsvarende LMU.

4.5 Valg av metoder for LMU

Det er i kapittelet presentert relevant teori og litteratur for optimeringsbasert beslutningsstøtte for påfylling av minibanker med usikker etterspørsel. Som følge av argumentasjonen tilhørende hvert underkapittel er det noen metoder som er mer aktuelle for bruk i LMU enn andre, og dette underkapittelet vil konkludere med hvilke metoder som vil brukes.

Som presentert i underkapittel 4.1 finnes det mange forskjellige påfyllingsstrategier og modeller for lagerhåndtering. På grunn av strukturen i LMU er ingen av de presenterte strategiene eller modellene aktuelle å benytte på LMU og forfatterne kan derfor ikke benytte seg av noen av disse.

I underkapittel 4.2 ble det presentert fire forskjellige fremgangsmåter for å håndtere usikker etterspørsel, hvilket var bruk av sikkerhetslager og de tre metodene RM, RO og CCP. Det ble konkludert med at grunnet lite fleksibilitet og strukturen i LMU var det ikke ønskelig å bruke henholdsvis RM eller RO. Både sikkerhetslager og CCP ble konkludert med at kunne være aktuelle for LMU. Forfatterne ser det som ønskelig å gå videre med både sikkerhetslager og CCP da det er interessant å vurdere disse måtene å håndtere usikkerheten på mot hverandre. Sikkerhetslager og CCP har store likheter i måten usikkerheten håndteres og forfatterne ønsker å se nærmere på disse likhetene.

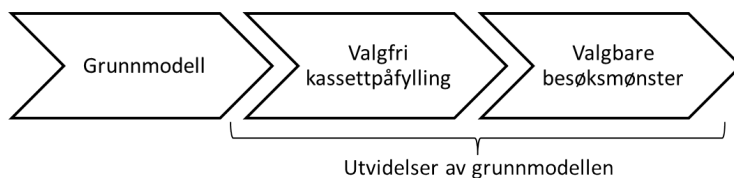
Sikkerhetslager og CCP brukes direkte i en optimeringsmodell for å håndtere usikkerheten i fremtidig etterspørsel etter kontanter. En optimeringsmodell er avhengig av inndata, hvilket fremmer behovet for å benytte prognosemetoder for å estimere etterspørselen etter kontanter. Det ble i underkapittel 4.3 presentert tre forskjellige metoder for å prognostisere den fremtidige etterspørselen: skjønnsbaserte metoder, kausale metoder og tidsrekkemodeller. I dag benytter SMN seg av skjønnsbaserte metoder, noe som ofte fører til at det fylles på alt for mye kontanter i minibankene. Derfor utelukker forfatterne skjønnsbaserte metoder for LMU, og vil benytte seg av elementer fra kausale metoder og tidsrekkemodeller for å prognostisere etterspørselen.

Kapittel 5

Modellformulering

Dette kapitlet presenterer modellformuleringene utarbeidet i forbindelse med LMU. Først vil modellene med sikkerhetslager presenteres i underkapittel 5.1 før modellene med CCP presenteres i underkapittel 5.2. Kapitlet avsluttes med underkapittel 5.3 hvor likheter mellom de to valgte måtene å håndtere usikkerheten på vil omtales nærmere.

Underkapitlene tilhørende hver av metodene følger samme oppbygning: metodens grunnmodell presenteres før underkapitlet avsluttes med presentasjon av de to utvidelsene for henholdsvis valgfri kassettpåfylling og valgbart besøksmønster. Utvidelsene bygger på hverandre, og representerer en gradvis relaksing av antakelsene presentert i grunnmodellen, illustrert i Figur 5.1.



Figur 5.1: Illustrasjonen viser sammenhengen mellom grunnmodell og utvidelser. Modellene bygger på hverandre i den rekkefølgen figuren illustrerer.

Samtlige modeller er formulert som blandede heltallsproblem. Grunnmodellen

vil brukes til å minimere kostnadene forbundet med SMN sin drift av minibanker, gitt de restriksjonene som følger av dagens driftsrutiner og den nye avtalen med Nokas. Utvidelsene vil brukes til å undersøke om SMN kan redusere sine kostnader ved å endre på dagens rutiner og/eller avtaler.

For presentasjonen av utvidelsene vil det kun legges frem de endringer og tillegg som er lagt til for den aktuelle utvidelsen som presenteres. Tidligere presenterte antakelser og modellformuleringer er gjeldende, om ikke annet er spesifisert, for den utvidelsen som legges frem.

5.1 Modeller med sikkerhetslager

I dette underkapittelet vil det presenteres tre modeller som håndterer usikkerheten ved hjelp av sikkerhetslager. Som nevnt vil det først presenteres en grunnmodell som modellerer SMN sin nåværende drift. Videre presenteres en utvidelse med valgfri påfylling av hver enkelt kassett og en utvidelse med valg mellom ulike besøksmønstre. Ut fra avsnitt 4.2.1 omhandler sikkerhetslager er det ikke innlysende hvordan et sikkerhetslager bør inkorporeres i forbindelse med LMU, og det vil derfor først redegjøres for hvordan forfatterne har valgt å gjøre dette.

5.1.1 Bruk av sikkerhetslager på LMU

For LMU kan det settes et sikkerhetslager på to ulike måter: antall sedler for hver kassett eller en felles, total mengde kontanter for alle kassetter. I det første alternativet settes ett sikkerhetslager for hver enkelt kassett, hvor sikkerhetslageret består av et gitt antall sedler. I det andre alternativet settes en total mengde kontanter som et sikkerhetslager, og det vil da være opp til optimeringsmodellen hvilke valører som benyttes for å oppfylle sikkerhetslageret.

Med bruk av sikkerhetslager som måte å håndtere usikkerheten i etterspørselen på følger en utfordring innen hvilken tidsperiode det valgte sikkerhetslageret skal gjelde. Som nevnt i avsnitt 4.2.1 er hensikten med et sikkerhetslager å sikre mot usikre verdier, eksempelvis usikker etterspørsel, for en gitt periode. For LMU er det naturlig å se på et sikkerhetslager for hver påfyllingsperiode, da et viktig mål er å unngå å gå tom for kontanter mellom to påfyllinger. For LMU vil man dermed formulere modellene slik at gjenværende lagernivå på slutten av en påfyllingsperiode tilsvarer valgt sikkerhetslager for perioden.

En utfordring forbundet med å ha et sikkerhetslager for hver påfyllingsperiode oppstår dersom modellen velger å fylle på minibanken for å dekke etterspørselen i flere påfyllingsperioder. Flere dager med usikker etterspørsel gir økt usikkerhet som sikkerhetslageret skal sikre mot, og størrelsen på sikkerhetslageret bør dermed øke desto lengre periode sikkerhetslageret skal gjelde for. En slik dynamisk modellering av sikkerhetslagerets størrelse er ikke inkludert i modellene.

For modellene med sikkerhetslager er det valgt å bruke det første alternativet for bruk av sikkerhetslager, med ett sikkerhetslager per kassett. Avslutningsvis i kapittelet vil det forklares nærmere hvorfor det er valgt å bruke denne løsningen

fremfor en felles, total mengde kontanter for alle kassettenes. Det er for utfordringen tilknyttet påfyllinger som dekker flere påfyllingsperioder valgt å formulere modellene slik at modellene tar høyde for sikkerhetslageret tilhørende den siste av de inkluderte periodene. Årsaken til dette er at påfyllingsperioden(e) før den siste påfyllingsperioden uansett vil være sikret mot usikkerheten i etterspørselen, siden lagernivået er så høyt at det skal dekke flere påfyllingsperioder.

5.1.2 Grunnmodellen med sikkerhetslager

Grunnmodellen med sikkerhetslager er en matematisk formulering av de rutineene som følges av SMN i deres minibankdrift, og hvor usikkerheten håndteres med bruk av sikkerhetslager. Modellen fungerer, slik navnet tilsier, som grunnmuren i de kommende utvidelsene, da alle utvidelser bygger på denne modellen. Modellen vil videre refereres til som *GS*.

Antakelser

For matematisk å kunne formulere enkelte av dagens driftsrutiner og samarbeidsavtaler er det behov for å spesifisere noen antakelser som modellen vil bygge på:

- **Den usikre etterspørselen kan representeres ved en prognose**
Etterspørselen tilhørende en minibank er ikke kjent og vil variere fra time til time, dag til dag, år til år. For å kunne modellere LMU er det altså nødvendig å estimere etterspørselen ved en prognose. Drivende faktorer for etterspørselen er blant annet dato for lønnsutbetaling, arrangementer, høytider og liknende.
- **Dersom en eller flere kassetter inneholder lik valør, har de aktuelle kassettenes lik etterspørsel**
Sedlene i en minibank er lagret i kassetter, og det kan kun lagres sedler av lik valør i samme kassett. Dersom flere kassetter i en minibank inneholder samme valør, fordeles den prognostiserte etterspørselen likt på de aktuelle kassettenes. Det vil si at dersom minibanken inneholder to kassetter med NOK 200 sedler, vil den prognostiserte etterspørselen tilhørende hver av de to kassettenes være halvparten av valørens opprinnelige, totale prognostiserte etterspørsel.
- **Besøksdager for en minibank er gitt**
Besøksdager er begrenset av avtalen mellom SMN og Nokas. Disse dagene

er bestemt ut fra et ønske og behov fra SMN sin side, med godkjenning av at disse dagene passer inn med Nokas sine kjøreruter og planlegging. En endring av besøksdag(er) for en minibank er mulig og vil måtte godkjennes av begge parter før den kan tre i kraft. En besøksdag kan ikke være på lørdag eller søndag.

I den matematiske formuleringen vil ikke muligheten for å fremme forslag om endrede besøksdager bli modellert, men leseren minnes om at en slik mulighet vil kunne gi et bedre resultat ved at eksempelvis besøksdager som passer bedre til den prognostiserte etterspørselen vil kunne brukes.

- **Tillatt(e) dag(er) for påfylling av en minibank er gitt**

Mulige påfyllingsdager er begrenset av en kombinasjon mellom bestemte besøksdager og røddager. I de tilfeller en besøksdag faller på en røddag vil ikke besøket gjennomføres, og det kan dermed ikke foretas en påfylling i dette besøket. En tillatt påfyllingsdag er altså en besøksdag som ikke faller på en røddag.

- **Ved påfylling av en minibank må samtlige kassetter byttes, og kassettene har et bestemt oppsett av valører**

En minibank inneholder fire kassetter med mulighet for lagring av sedler, og det er bestemt hvilken valør som kan fylles på i hver enkelt kassett. Når Nokas besøker en minibank som skal fylles på, vil de skifte ut samtlige kassetter. Utskiftningen vil ikke ta høyde for hvor mange ubrukte sedler en kassett inneholder, og hvorvidt denne mengden ville være tilstrekkelig for å dekke den prognostiserte etterspørselen frem mot neste påfylling.

I den matematiske formuleringen vil muligheten for å bestemme fritt hvilke kassetter som skal skiftes ut under en påfylling ikke modelleres, men leseren minnes om at en slik mulighet vil kunne gi et bedre resultat ved at eksempelvis kassettagiften reduseres.

- **Det er en fast maksimumsgrense for antall sedler i en kassett, uavhengig av kassett og valør**

Hver av kassettene i SMN sine minibanker har en teoretisk øvre grense på et gitt antall sedler. Grunnet erfaringer med tekniske problemer når kassettene fylles helt opp, fyller ikke SMN kassettene helt fulle. Det fremgikk av avsnitt 3.3.3 at denne øvre grensen er forskjellig mellom valørene, og at inkonsistens i valg av øvre grense reduserer minibankens kapasitet.

I den matematiske formuleringen er det valgt å modellere kassetten med en felles øvre grense, da den reduksjonen av minibankens kapasitet som SMN per dags dato praktiserer ikke er nødvendig for å unngå tekniske problemer.

- **Mellomregningskostnaden kan beregnes separat for hver enkelt dag, og mellomregningsrenten er kjent**

Mellomregningskostnaden er en intern kostnad hos SMN, med formål å beregne kapitalkostnaden forbundet med å ha penger stående i en minibank. Mellomregningsrenten fastsettes per måned, men da det kan forekomme et månedsskifte mellom to påfølgende besøk vil det i den matematiske formuleringen være modellert en daglig mellomregningsrente. En slik modellering vil i tillegg åpne for at modellens planleggingshorisont ikke må være innen én og samme måned.

- **Påfylling er siste hendelse på en besøksdag med påfylling**

Tidspunktet for et eventuelt besøk er avhengig av flere usikre faktorer som for eksempel Nokas sin kjøreplan, trafikk og liknende. For å unngå situasjoner hvor eksempelvis minibanken går tom for kontanter grunnet forsinket påfylling, er det i den matematiske formuleringen definert hvilken rekkefølge hendelser tilhørende en dag inntreffer.

I den matematiske formuleringen blir saldoen modellert til å fastsettes på starten av hver dag og etterspørselen denne dagen inntreffer rett etter fastsettelsen av saldoen. Et eventuelt besøk med retur og påfylling inntreffer på slutten av dagen. Påfylling er det siste som inntreffer den aktuelle dagen, og vil skje umiddelbart etter at resterende sedler er returnert. Rekkefølgen på dagens hendelser er illustrert i Figur 5.2.

Indekser

- i - kassett
- t - dag

Mengder

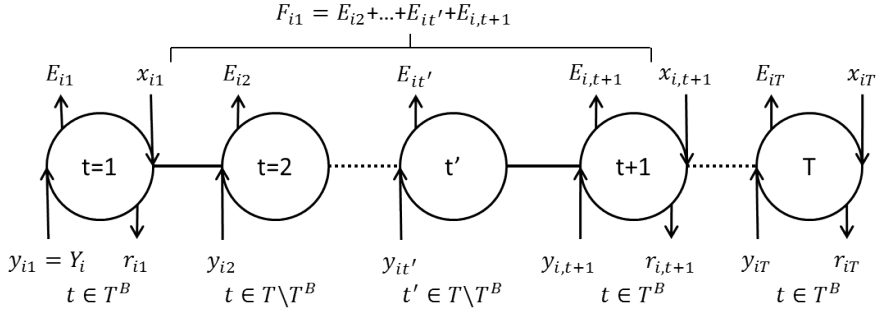
- I - Mengden kassetter
- T - Mengden dager
- T^B - Mengden dager med besøk, $T^B \subseteq T$

Parametere

- C^B - Betjeningsavgift for påfylling av en minibank, [NOK/påfylling]
- C^K - Kassettagift for bruk av en kassett, [NOK/kassett]
- V_i - Verdi av valøren påfylt i kassett i , [100 NOK]
- H_t - Mellomregningsrente for dag t , [%]
- A_t - =1 om dag t er en tillatt påfyllingsdag, 0 ellers, [-]
- Y_i^1 - Antall sedler som står i kassett i på planleggingshorisontens første dag, [-]
- $Y_i^{|T|}$ - Antall sedler som skal stå i kassett i på slutten av planleggingshorisontens siste dag $|T|$, [-]
- E_{it} - Prognostisert etterspørsel etter antall sedler tilhørende kassett i på dag t , [-]
- F_{it} - Prognostisert total etterspørsel etter valør i for påfyllingsperiode $t \in T^B$. Definert for alle dager $t \subseteq T$ tilhørende påfyllingsperioden, [-]
- S_{it} - Sikkerhetslager for kassett i på dag t , [-]
- M^S - Maksimalt antall sedler i en kassett, [-]

Beslutningsvariabler

- y_{it} - Antall sedler i kassett i på starten av dag t , [-]
- r_{it} - Antall sedler i kassett i som returneres om det fylles på i dag t , [-]
- x_{it} - Antall sedler som fylles på i kassett i på dag t , [-]
- θ_t - = 1 om det fylles på i dag t , 0 ellers, [-]



Figur 5.2: Beskrivelse av tidsoppløsningen brukt i modellene med sikkerhetslager.

Figur 5.2 viser sammenhengen mellom y_{it} , r_{it} , x_{it} , E_{it} og F_{it} , og hvor disse inntreffer i løpet av dag t . Hver dag t er i figuren representert med en sirkel, hvorav dagens saldo, y_{it} , er første hendelse per dag t . Dagens etterspørsel, E_{it} , inntreffer rett etter fastsettelsen av y_{it} . For dager med besøk, $t \in T^B$, vil en eventuell påfylling, x_{it} , være dagens siste hendelse. En eventuell retur, r_{it} , vil inntreffe rett før påfyllingen. F_{it} er illustrert i figuren for $t = 1$, hvorav tilhørende påfyllingsperiode starter rett etter påfyllingen i $t = 1$ og slutter rett før returen i $t + 1$.

Målfunksjon

$$\min Z = \sum_{t \in T^B} (C^B + |I|C^K)\theta_t \quad (5.1a)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} V_i H_t y_{it} \quad (5.1b)$$

Restriksjoner

$$x_{it} \leq M^S A_t \theta_t \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.2)$$

$$y_{i,1} = Y_i^1 \quad i \in I \quad (5.3)$$

$$y_{i,t+1} = y_{it} - E_{it} - r_{it} + x_{it} \quad i \in I, t \in T \setminus \{|T|\} \quad (5.4)$$

$$y_{i,|T|} - r_{i,|T|} + x_{i,|T|} \geq E_{i,|T|} + Y_i^{|T|} \quad i \in I \quad (5.5)$$

$$y_{i,t+1} \geq F_{it} + S_{it} \quad i \in I, t \in T^B \setminus \{|T|\} \quad (5.6)$$

$$r_{it} - (M^S - F_{i,t-1})\theta_t \leq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.7)$$

$$r_{it} - (y_{it} - E_{it}) \leq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.8)$$

$$y_{it} - E_{it} - r_{it} + (M^S - E_{it})\theta_t \leq (M^S - E_{it}) \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.9)$$

$$y_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in T \quad (5.10)$$

$$r_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.11)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.12)$$

$$\theta_t \in \{0, 1\} \quad t \in T^B \quad (5.13)$$

Forklaring av målfunksjon og restriksjoner

Det første leddet i målfunksjonen, (5.1a), beregner den totale betjenings- og kassettkostnaden. Da alle kassettenes alltid byttes ved en påfylling multipliseres kassetavgiften med antall kassetter i minibanken. Videre beregner det andre leddet, (5.1b), den totale mellomregningskostnaden. Minibankens mellomregningskostnad beregnes daglig ved å multiplisere dagens mellomregningsrente med verdien av alle sedler som står i minibankens kassetter.

Restriksjon (5.2) sikrer at antallet sedler som fylles på i kassettenes må være innenfor kassettenes øvre grense. Restriksjonen sikrer også at det kun kan fylles på om dagen er en tillatt påfyllingsdag. Dette kunne vært løst på en annen måte ved at en kunne definert x_{it} og r_{it} for $i \in I, t \in T^B \setminus \{|T|\}$ med $A_t = 1$, for så å eliminere A_t fra (5.2). Restriksjon (5.3) setter det antallet sedler som står i hver kasset på den første dagen i planleggingshorisonten.

Restriksjon (5.4) sikrer at antallet sedler i en kasset på starten av en dag tilsvare antallet sedler som stod i den samme kassetten på starten av foregående dag minus det antallet sedler som ble tatt ut fra kassetten i løpet av foregående dag. Altså er dagens saldo lik gårdsdagens saldo minus gårdsdagens etterspørsel,

justert for eventuell retur og påfylling.

Restriksjon (5.5) sørger for at saldoen for planleggingshorisontens siste dag $|T|$, justert for eventuell retur og påfylling, er stor nok til å dekke dagens etterspørsel, E_{it} , addert ønsket mengde av valør i som skal være igjen i kassetten, $Y_i^{|T|}$, på slutten av den siste dagen i planleggingshorisonten. Restriksjon (5.6) sørger for at saldoen etter en påfylling er stor nok til å dekke påfyllingsperiodens prognostiserte totale etterspørsel F_{it} og det ønskede sikkerhetslageret S_{it} .

For å fastsette verdien på variabelen r_{it} trengs de tre restriksjonene (5.7)-(5.9). Den første, (5.7), setter r_{it} lik 0 dersom θ_t er lik 0. De to siste, (5.8) og (5.9), sørger for at $r_{it} = y_{it} - E_{it}$ dersom θ_t er lik 1. Verdien på variabelen r_{it} tilsvarer antall sedler som returneres ved en påfylling og er lik 0 dersom det ikke gjøres en påfylling ved besøk t . M^S er justert for E_{it} og F_{it} for å gjøre formuleringen bedre. Ved $t = 1$, som gir, $F_{i,0}$ i restriksjon (5.7), vil verdien på $F_{i,0}$ være lik $E_{i,1}$.

Restriksjonene (5.10)-(5.12) sikrer at henholdsvis saldo, retur eller påfylling ikke kan være et negativt antall sedler, og restriksjon (5.13) er binærkrav.

5.1.3 Valgfri kassettpåfylling med sikkerhetslager

I GS kunne man velge enten å bytte ingen eller alle kassettene i minibanken for hvert besøk. I denne utvidelsen kan man velge fritt hvilke kassetter man ønsker å bytte for hvert besøk. Utvidelsen vil videre refereres til som *VKS*.

Antakelser

Følgende nye antakelse ligger til grunn for utvidelsen:

- **Det kan velges fritt hvilke kassetter som skal fylles på ved en påfylling av minibanken**

Denne antakelsen erstatter tidligere antakelse om at alle kassettene må byttes ut ved påfylling av minibanken.

Relaksering av kravet om å bytte alle kassettene vil tillate en bedre tilpasning av minibankens saldo. Utvidelsen vil svare på om en endring av dagens rutine med tvungen påfylling av alle kassettene kan gi en reduksjon av SMN sine kostnader.

Videre vil modellen presenteres. Det introduseres ingen nye indekser, mengder eller parametere i denne utvidelsen, så presentasjonen starter med de nye beslutningsvariablene som introduseres i denne utvidelsen. Videre presenteres modellens målfunksjon og de nye restriksjonene som innføres. Avsnittet avsluttes med en forklaring av målfunksjonen og restriksjonene.

Beslutningsvariabler

α_{it} - = 1 om kassett i fylles på i dag t , 0 ellers, [-]

β_t - = 1 om en eller flere kassetter fylles på i dag t , 0 ellers, [-]

Målfunksjon

Målfunksjonsledd (5.1a) fra GS splittes for denne utvidelsen i ledd (5.14a) og (5.14b). Målfunksjonsleddet som beregner mellomregningskostnaden, (5.14c), tilsvarer ledd (5.1b).

$$\min Z = \sum_{t \in T^B} C^B \beta_t \quad (5.14a)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T^B} C^K \alpha_{it} \quad (5.14b)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} V_i H_t y_{it} \quad (5.14c)$$

Restriksjoner

Restriksjonene (5.3)-(5.6), (5.8) og (5.10)-(5.12) gjelder uendret for denne utvidelsen.

Følgende nye restriksjoner introduseres i denne utvidelsen:

$$x_{it} \leq M^S A_t \alpha_{it} \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.15)$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_{it} \leq |I| \beta_t \quad t \in T^B \quad (5.16)$$

$$r_{it} - (M^S - F_{i,t-1}) \alpha_{it} \leq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.17)$$

$$y_{it} - E_{it} - r_{it} + (M^S - E_{it}) \alpha_{it} \leq (M^S - E_{it}) \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.18)$$

$$\alpha_{it} \in \{0, 1\} \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.19)$$

$$\beta_t \in \{0, 1\} \quad t \in T^B \quad (5.20)$$

Forklaring av nye målfunksjonsledd og restriksjoner

Målfunksjonens ledd (5.14a) beregner den totale betjeningskostnaden, og ledd (5.14b) beregner den totale kostnaden forbundet med kassetavgiften.

Restriksjonene (5.15), (5.17) og (5.18) tilsvare henholdsvis (5.2), (5.7) og (5.9), hvor eneste endring er bytte av θ_t med α_{it} som følge av den nye antakelsen. Restriksjon (5.16) sikrer at det påløper en betjeningskostnad om en eller flere kassetter fylles på. Restriksjonene (5.19) og (5.20) er binærkrav som introduseres som følge av den nye antakelsen.

5.1.4 Valgbare besøksmønstre med sikkerhetslager

I tidligere presenterte modeller ble det antatt at besøksdagene $t \in T^B$ var gitt. I denne modellen er det antatt at modellen kan velge mellom forskjellige besøksmønstre. Utvidelsen vil videre refereres til som *VBS*.

Antakelser

Følgende nye antakelse ligger til grunn for utvidelsen:

- **Det kan velges mellom gitte besøksmønstre for tillatt(e) dag(er) for besøk av en minibank**

Antakelsen erstatter tidligere antakelse om at besøksdagene for en minibank er gitt. Modellen kan nå fritt velge mellom et sett av forskjellige besøksmønstre, som hver for seg angir hvilke dager en minibank besøkes. En besøksdag kan fortsatt ikke være på lørdag eller søndag.

Muligheten for å velge mellom forskjellige besøksmønstre vil tillate en bedre tilpasning mellom når det fylles på og forventet etterspørsel. Utvidelsen vil kunne svare på om en endring av dagens besøksmønstre kan gi en reduksjon av SMN sine kostnader.

Videre vil modellen presenteres. Presentasjonen starter med de nye indekser, mengder, parametere og beslutningsvariablene som introduseres i denne utvidelsen, før modellens målfunksjon og de nye restriksjonene som innføres presenteres. Avsnittet avsluttes med en forklaring av målfunksjonen og restriksjonene.

Indekser

m - mønstre

Mengder

T_m^B - Mengden dager med besøk i mønstre m , $T_m^B \subseteq T$

Parametere

- C_m^M - Transportkostnad tilhørende mønstre m [NOK/mønstre]
 F_{itm} - Prognostisert total etterspørsel etter valør i for påfyllingsperiode $t \in T_m^B$, for mønstre m . Definert for alle dager $t \subseteq T$ tilhørende påfyllingsperioden, [-]
 S_{itm} - Sikkerhetslager for kassett i på dag t for mønstre m , [-]

Beslutningsvariabler

α_{itm} - = 1 om kassett i fylles på i dag t for mønster m , 0 ellers, [-]
 ω_m - = 1 om mønster m brukes, 0 ellers, [-]

Målfunksjon

Alle av målfunksjonens tidligere presenterte ledd gjelder også for denne utvidelsen, hvorav det for (5.21a) og (5.21b) nå summeres over mønster som følge av ny indeks. (5.21d) introduseres i denne utvidelsen:

$$\min Z = \sum_{t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B} C^B \beta_t \quad (5.21a)$$

$$+ \sum_{m \in M} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T_m^B} C^K \alpha_{itm} \quad (5.21b)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} V_i H_t y_{it} \quad (5.21c)$$

$$+ \sum_{m \in M} C_m^M \omega_m \quad (5.21d)$$

Restriksjoner

Restriksjonene (5.3), (5.4), (5.5) og (5.10) gjelder uendret for denne utvidelsen.

Følgende nye restriksjoner introduseres:

$$x_{it} \leq \sum_{m \in M} M^S A_t \alpha_{itm} \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.22)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{m \in M} \alpha_{itm} \leq |I| \beta_t \quad t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.23)$$

$$y_{i,t+1} \geq \sum_{m|t \in T_m^B} (F_{itm} + S_{itm}) \omega_m \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \setminus \{|T|\} \quad (5.24)$$

$$r_{it} - \sum_{m \in M} (M^S - F_{i,t-1,m}) \alpha_{itm} \leq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.25)$$

$$r_{it} - (y_{it} - E_{it}) \leq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.26)$$

$$y_{it} - E_{it} - r_{it} + (M^S - E_{it}) \alpha_{itm} \leq (M^S - E_{it}) \quad i \in I, m \in M, t \in T_m^B \quad (5.27)$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_{itm} \leq |I| \omega_m \quad m \in M, t \in T_m^B \quad (5.28)$$

$$\sum_{m \in M} \omega_m = 1 \quad (5.29)$$

$$r_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.30)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.31)$$

$$\alpha_{itm} \in \{0, 1\} \quad i \in I, m \in M, t \in T_m^B \quad (5.32)$$

$$\beta_t \in \{0, 1\} \quad t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.33)$$

$$\omega_m \in \{0, 1\} \quad m \in M \quad (5.34)$$

Forklaring av nye målfunksjonsledd og restriksjoner

Målfunksjonens ledd (5.21d) beregner transportkostnaden som påløper som følge av valgt besøksmønster.

Restriksjonene (5.26), (5.30) og (5.31) og (5.33) tilsvarer henholdsvis (5.8), (5.11), (5.12) og (5.20), hvor eneste endring er at restriksjonene nå gjelder for $t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B$ som følge av den nye antakelsen. Samme endring gjelder for restriksjonene (5.22), (5.23), (5.25), (5.27) og (5.32), men her har α_{itm} i tillegg fått lagt til indeks m . Restriksjonene tilsvarer henholdsvis (5.15), (5.16), (5.17), (5.18) og (5.19). Restriksjon (5.24) erstatter (5.6) og sørger for at det fylles på et sikkerhetslager per kassett på bakgrunn av hvilket mønster m som velges. For at det kun skal være mulig å fylle på i dager $t \in T_m^B$ og å velge ett mønster m er henholdsvis (5.28) og (5.29) innført i denne utvidelsen. Restriksjon (5.34) er binærkrav som introduseres som følge av den nye antakelsen.

5.2 Modeller med CCP

I dette underkapittelet vil det presenteres tre modeller som håndterer usikkerheten ved hjelp av sannsynlighetsbegrenset programmering (CCP). Som i forrige underkapittel presenteres først en grunnmodell som modellerer SMN sin nåværende drift, før en utvidelse med valgfri påfylling av hver enkelt kassett og en utvidelse med valg mellom ulike besøksmønstre presenteres. Forskjellen på disse modellene og de tidligere presenterte modellene er måten usikkerheten håndteres og konsekvensene dette får for modellene. For lesbarhetens skyld vil grunnmodellen med CCP, med unntak av antakelsene som tilsvarer de presentert for GS, presenteres i sin helhet, før utvidelsene presenteres på samme måte som i forrige underkapittel.

Før modellene presenteres vil det først redegjøres for hvordan usikkerheten i etterspørselen er håndtert ved bruk av CCP.

5.2.1 Bruk av CCP på LMU

Ved bruk av CCP kan usikkerheten i LMU håndteres på flere forskjellige måter, men ut fra hvordan CCP ble presentert i avsnitt 4.2.4 er det ikke innlysende hvordan metoden bør anvendes i LMU. Som nevnt i avsnitt 3.3.1 opererer SMN med et krav til sitt servicenivå gjennom et oppetidskrav på 97,5 %. I en CCP-restriksjon som (4.14) kan oppetidskravet benyttes som verdi på sannsynligheten P , men det ligger en utfordring i at SMN måler oppetidskravet samlet for alle minibanker som en totalverdi per år. I LMU er det ikke hensiktsmessig å benytte en planleggingshorisont på ett år, hvilket resulterer i at det må tas et valg i forbindelse med hvordan oppetidskravet skal inkluderes i modellene. Videre i underkapittelet presenteres det derfor en forklaring av og begrunnelse for de valg som er tatt.

Oppetidskravet måles per tid, men dersom en minibank går tom for kontanter er det vanskelig å si hvor lang tid det vil ta før den fylles på igjen. Dette vil være avhengig av minibankens lokasjon, Nokas sine kjøreruter, på hvilken ukedag minibanken går tom og liknende. Det er også svært utfordrende å si *når* i fremtiden minibanken vil gå tom for kontanter: man kan alltid kartlegge uttaksmønsteret for en minibank for å si noe om hvor store kontantmengder som tas ut på hvilke tidspunkter, men om minibanken går tom for kontanter er uttaksmønsteret for én eller flere dager trolig unormalt. Dette betyr at man ikke kan bruke det kartlagte uttaksmønsteret til å estimere når minibanken vil

gå tom for kontanter. Utfordringene med å vite når en minibank vil gå tom for kontanter og når den vil fylles på igjen, kombinert med hvordan man eventuelt skulle implementert dette i en matematisk modell, gjør det vanskelig å benytte *tid* som måleenhet for servicenivå.

En annen aktuell måleenhet for servicenivå er sedler. På bakgrunn av en prognostisert etterspørsel etter en gitt valør kan man regne ut hvor stor andel av etterspørselen etter valøren man klarer å oppfylle med det antallet sedler som fylles på. Som nevnt i avsnitt 3.3.1 må samtlige kassetter i en minibank være tomme før manglende kontantbeholdning virker negativt på den målte oppetiden. Oppetidskravet på 97,5 % vil dermed være et dårlig mål på servicenivå om det baseres på sedler som måleenhet, da en minibank kan gå tom for én valør uten at det påvirker minibankens oppetid.

Måleenheten for servicenivå som, etter forfatterens mening, tilnærmer SMN sin registrering av oppetid best er total mengde kontanter i minibanken, altså ved at det måles hvor stor andel av den etterspurte mengden kontanter som oppfylles. Ved å bruke total mengde kontanter som måleenhet for servicenivå vil det kun innvirke negativt på servicenivået dersom minibanken er tom for alle valører. Dette samsvarer med hvordan et servicenivå basert på tid beregnes. Et servicenivå basert på total mengde kontanter vil altså måle den etterspurte mengden kontanter som ikke oppfylles, mens det for oppetidskrav måles varigheten av perioden mellom tidspunktet for når minibanken gikk tom for kontanter og når den igjen ble fylt på.

Som nevnt måles oppetidskravet av SMN totalt per år, men bruk av en planleggingshorisont på ett år vil i LMU ikke være hensiktsmessig. Dersom man skal benytte oppetidskravet som verdi på P vil man dermed få problemer knyttet til hvilken tidsperiode man velger å se på, men da oppetid er det eneste relevante kravet til servicenivå som SMN opererer med må det velges en mer hensiktsmessig måte å inkludere dette kravet i CCP-restriksjonen. Det vil videre presenteres tre mulige valg av tidshorisont for inkludering av dette kravet: planleggingshorisont, påfyllingsperiode og hver enkelt dag.

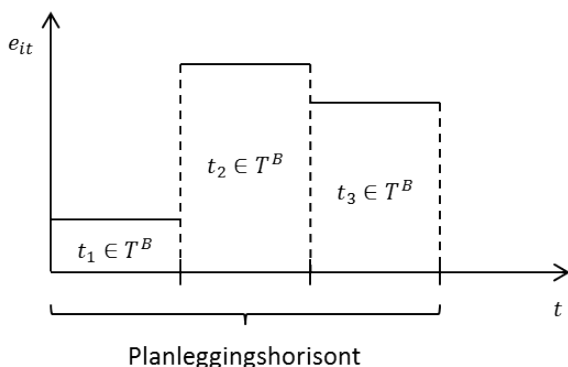
Et mulig valg for inkludering av oppetidskravet er å bruke optimeringsmodellens planleggingshorisont som tidsperiode, vist i restriksjon (5.35). Restriksjonen gir at sannsynligheten for at den totale etterspørselen i planleggingshorisonten dekkes er større eller lik sannsynligheten P . Det er verdt å merke seg at restriksjonen ikke sikrer at all etterspørsel i planleggingshorisonten dekkes, og at dette

vil kunne føre til at den aktuelle minibanken går tom for kontanter. Restriksjonen gir heller ikke noe mål for *tiden* det vil ta fra minibanken går tom for kontanter til den igjen fylles på, hvilket betyr at minibanken kan være tom for kontanter i flere dager uten at restriksjonen brytes.

$$Pr \left(\sum_{t \in T} \sum_{i \in I} V_i y_{it} \geq \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} V_i e_{it} \right) \geq P \quad (5.35)$$

Med unntak av den stokastiske variabelen som representerer etterspørselen etter valør i på dag t , e_{it} , er notasjonen brukt i formelen tilsvarende notasjonen presentert i underkapittel 5.1.

For å eksemplifisere ulempene med bruk av restriksjon (5.35) og valg av planleggingshorisonten som tidsperiode skisseres et scenario hvor etterspørselen tilhørende én av flere påfyllingsperioder i planleggingshorisonten er veldig lav sammenliknet med de andre påfyllingsperiodene, illustrert i Figur 5.3:



Figur 5.3: Illustrasjon av planleggingshorisont som tidsperiode for en CCP-restriksjon.

I et slikt tilfelle kan optimeringsmodellen kunne velge å ikke oppfylle etterspørselen i hele eller deler av påfyllingsperioden med lav etterspørsel, uten at dette vil medføre at CCP-restriksjonen brytes. Dette kan igjen resultere i at minibanken står uten kontanter i flere dager, hvilket ikke samsvarer med det høye servicenivået SMN opererer med.

Et annet mulig valg for inkludering av oppetidskravet er å bruke hver enkelt påfyllingsperiode som tidsperiode for CCP-restriksjonen, vist i restriksjon (5.36).

$$Pr \left(\sum_{i \in I} V_i y_{i,t+1} \geq \sum_{i \in I} V_i f_{it} \right) \geq P \quad t \in T^B \quad (5.36)$$

hvor f_{it} er den stokastiske variabelen som representerer etterspørselen i den aktuelle påfyllingsperioden. Med bruk av påfyllingsperiode som tidsperiode reduserer man muligheten for at situasjoner som den beskrevet i eksempelet over inntreffer. Det er viktig å merke seg at det også med bruk av restriksjon (5.36) kan oppstå liknende situasjoner som det eksemplifiserte, men tidsperioden minibanken vil være tom for kontanter reduseres betraktelig sammenliknet med å benytte planleggingshorisonten som tidsperiode. Det er dermed høyere sannsynlighet for at optimeringsmodellen vil velge løsninger som er i samsvar med oppetidskravet som SMN drifter etter.

Et tredje mulige valg for inkludering av oppetidskravet er å bruke en tidsperiode i CCP-restriksjonen på én dag. En slik inkludering gir en modifikasjon av restriksjon (5.36) ved at denne defineres for $t \in T$, vist i restriksjon (5.37).

$$Pr \left(\sum_{i \in I} V_i y_{it} \geq \sum_{i \in I} V_i e_{it} \right) \geq P \quad t \in T \quad (5.37)$$

Om man bare ser på servicenivået for én dag blir det ikke riktig å bruke et oppetidskrav som måles per år som verdi på P . Med tanke på at en påfyllingsperiode alltid vil være minst én dag lang og at man ønsker en tidsperiode som er så lang som mulig, for å imøtekomme at oppetidskravet måles per år, er det bedre å benytte påfyllingsperiode enn hver enkelt dag som tidsperiode. I tillegg vil en CCP-restriksjon definert for påfyllingsperiode som tidsperiode dominere en CCP-restriksjon definert for hver enkelt dag, hvilket enklest kan vises med et eksempel hvor man ser på dagene tilhørende den påfyllingsperioden mellom dag 2 og 4 for $T^B = \{2, 4\}$:

CCP-restriksjoner med hver enkelt dag som tidsperiode:

$$Pr \left(\sum_{i \in I} V_i y_{i3} \geq \sum_{i \in I} V_i e_{i3} \right) \geq P$$

$$Pr \left(\sum_{i \in I} V_i y_{i4} \geq \sum_{i \in I} V_i e_{i4} \right) \geq P$$

CCP-restriksjon med påfyllingsperiode som tidsperiode:

$$Pr \left(\sum_{i \in I} V_i y_{i3} \geq \sum_{i \in I} V_i (e_{i3} + e_{i4}) \right) \geq P$$

Av eksempelet over kan man se at CCP-restriksjonene med dag som tidsperiode alltid vil være oppfylt dersom CCP-restriksjonen med påfyllingsperiode som tidsperiode er oppfylt. Den siste av de tre restriksjonene ovenfor dominerer altså de to første. En viktig forutsetning for at dette skal gjelde er imidlertid at etterspørselen tilhørende én dag er uavhengig av etterspørselen alle andre dager. For LMU må en slik antakelse kunne sies å være rimelig, da det etter forfatterens mening ikke foreligger noe informasjon som tilsier at etterspørselen én dag skal ha noen innvirkning på etterspørselen dagen etter, eller noen andre dager. Det er verdt å merke seg at en CCP-restriksjon med planleggingshorisont som tidshorisont *ikke* vil dominere tilsvarende restriksjon med påfyllingsperiode som tidshorisont, da det vil være mulig å fylle på minibanken per påfyllingsperiode.

Fra argumentasjonen tilhørende de tre presenterte mulige valgene av tidshorisont for å inkludere oppetidskravet, vil en CCP-restriksjon med påfyllingsperiode som tidshorisont være det beste valget. I modellene er derfor påfyllingsperiode brukt som tidsperiode i CCP-restriksjonen.

5.2.2 Grunnmodellen med CCP

Grunnmodellen med CCP er en matematisk formulering av de rutinene som følges av SMN i deres minibankdrift, hvor usikkerheten i etterspørselen håndteres ved bruk av CCP. Modellen fungerer, slik navnet tilsier, som grunnmuren i de kommende utvidelsene, da utvidelsene bygger på denne modellen. Modellen vil videre refereres til som *GCCP*.

Antakelser

I tillegg til antakelsene presentert i avsnitt 5.1.2 legges det til én ny antakelse for denne modellen:

- **Etterspørselen per dag per kassett er normalfordelt og uavhengig av alle andre dager**

Som vist i avsnitt 4.2.4 kan man med en normalfordelt etterspørsel formulere lineære restriksjoner som sørger for at sannsynligheten for å dekke etterspørselen vil være minst en forutbestemt sannsynlighet P . Etterspørselen antas derfor normalfordelt.

Indekser

i - kassett
 t - dag

Mengder

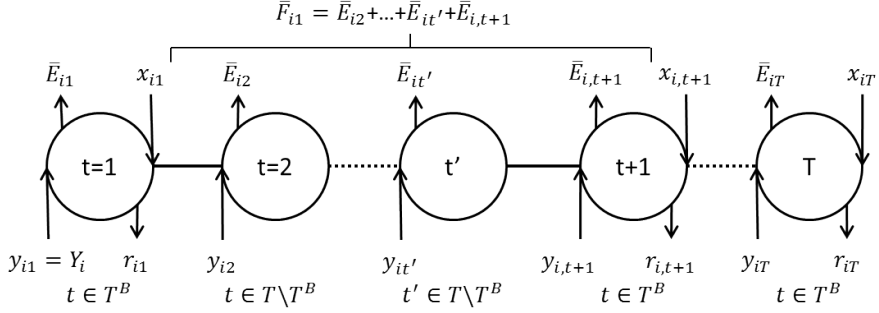
I - Mengden kassetter
 T - Mengden dager
 T^B - Mengden dager med besøk, $T^B \subseteq T$

Parametere

- C^B - Betjeningsavgift for påfylling av en minibank, [NOK/påfylling]
- C^K - Kassettavgift for bruk av en kassett, [NOK/kassett]
- V_i - Verdi av seddeltypen påfylt i kassett i , [100 NOK]
- H_t - Mellomregningsrente for dag t , [%]
- A_t - =1 om dag t er en tillatt påfyllingsdag, 0 ellers, [-]
- Y_i^1 - Antall sedler som står i kassett i på planleggingshorisontens første dag, [-]
- $Y_i^{|T|}$ - Antall sedler som skal stå i kassett i på slutten av planleggingshorisontens siste dag $|T|$, [-]
- \bar{E}_{it} - Forventet etterspørsel etter antall sedler tilhørende kassett i på dag t , [-]
- Z^P - Z-verdien tilhørende sannsynligheten P i en standard normalfordeling. P er kravet til hvor stor sannsynlighet det skal være for at minibanken ikke går tom for kontanter i en påfyllingsperiode, [-]
- \bar{F}_{it} - Forventet total etterspørsel etter valør i i for påfyllingsperiode $t \in T^B$. Definert for alle dager $t \subseteq T$ tilhørende påfyllingsperioden, [-]
- G_{it} - Standardavviket tilknyttet den forventede totale etterspørselen \bar{F}_{it} , [-]
- M^S - Maksimalt antall sedler i en kassett, [-]

Beslutningsvariabler

- y_{it} - Antall sedler i kassett i på starten av dag t , [-]
- r_{it} - Antall sedler i kassett i som returneres dersom det fylles på i dag t , [-]
- x_{it} - Antall sedler som fylles på i kassett i på dag t , [-]
- θ_t - = 1 om det fylles på i dag t , 0 ellers, [-]



Figur 5.4: Beskrivelse av tidsoppløsningen brukt i modellene med CCP.

Figur 5.4 viser sammenhengen mellom y_{it} , r_{it} , x_{it} , \bar{E}_{it} og \bar{F}_{it} , og hvor disse inntreffer i løpet av dag t . Hver dag t er i figuren representert med en sirkel, hvorav fastsettelse av dagens saldo, y_{it} , er første hendelse per dag t . Dagens forventede etterspørsel, \bar{E}_{it} , inntreffer rett etter fastsettelsen av y_{it} . For dager med besøk, $t \in T^B$, vil en eventuell påfylling, x_{it} , være dagens siste hendelse. En eventuell retur, r_{it} , vil inntreffe rett før påfyllingen. \bar{F}_{it} er illustrert i figuren for $t = 1$, hvorav tilhørende påfyllingsperiode starter rett etter påfyllingen i $t = 1$ og slutter rett før returen i $t + 1$.

Målfunksjon

Det er ingen endringer i målfunksjonen sammenliknet med tilsvarende modell med sikkerhetslager, GS, presentert i forrige underkapittel.

$$\min Z = \sum_{t \in T^B} (C^B + |I|C^K)\theta_t \quad (5.38a)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} V_i H_t y_{it} \quad (5.38b)$$

Restriksjoner

$$x_{it} \leq M^S A_t \theta_t \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.39)$$

$$y_{i1} = Y_i^1 \quad i \in I \quad (5.40)$$

$$y_{i,t+1} = y_{it} - \bar{E}_{it} - r_{it} + x_{it} \quad i \in I, t \in T \setminus \{|T|\} \quad (5.41)$$

$$y_{i,|T|} - r_{i,|T|} + x_{i,|T|} \geq \bar{E}_{i,|T|} + Y_i^{|T|} \quad i \in I \quad (5.42)$$

$$\sum_{i \in I} V_i y_{i,t+1} \geq \sum_{i \in I} V_i (\bar{F}_{it} + \lceil Z^P G_{it} \rceil) \quad t \in T^B \setminus \{|T|\} \quad (5.43)$$

$$r_{it} - (M^S - \bar{F}_{i,t-1}) \theta_t \leq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.44)$$

$$r_{it} - (y_{it} - \bar{E}_{it}) \leq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.45)$$

$$y_{it} - \bar{E}_{it} - r_{it} + (M^S - \bar{E}_{it}) \theta_t \leq (M^S - \bar{E}_{it}) \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.46)$$

$$y_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in T \quad (5.47)$$

$$r_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.48)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.49)$$

$$\theta_t \in \{0, 1\} \quad t \in T^B \quad (5.50)$$

Forklaring av restriksjoner

De aller fleste restriksjonene er like som restriksjonene for GS, med noen små endringer som følge av de nye parameterne \bar{E}_{it} og \bar{F}_{it} . Disse restriksjonene vil derfor ikke forklares nærmere. Det er én distinkt forskjell i restriksjonene og det er at (5.43) har erstattet (5.6), som kommer av at usikkerheten i etterspørselen nå håndteres annerledes.

Utgangspunktet for restriksjon (5.43) er følgende restriksjon:

$$Pr \left(\sum_{i \in I} V_i y_{i,t+1} \geq \sum_{i \in I} V_i f_{it} \right) \geq P \quad t \in T^B \setminus \{|T|\} \quad (5.51)$$

Som forklart i avsnitt 4.2.4 kan en restriksjon formulert som (5.51) omformuleres til en lineær restriksjon. Restriksjon (5.43) er den lineære omformuleringen av (5.51) og sier at sannsynligheten for å dekke etterspørselen i en påfyllingsperiode, målt i total mengde kontanter, skal være større eller lik sannsynligheten P . Denne sannsynligheten kan tolkes som et servicekrav, og for SMN sammenfaller dette

med kravet om en oppetid på 97,5 %. I (5.51) er f_{it} den normalfordelte stokastiske variabelen som representerer etterspørselen etter valør i i påfyllingsperioden $t \in T^B$. f_{it} er altså en sum av normalfordelte stokastiske variabler, e_{it} , og er derfor også selv normalfordelt.

Produktet av Z^P og G_{it} er rundet av oppover i restriksjon (5.43). Årsaken til dette er å forhindre at verdiene på y_{it} , x_{it} og r_{it} blir fraksjonelle, da et fraksjonelt antall sedler ikke samsvarer med den virkelige verden. Dersom man ikke hadde gjort denne avrundingen, kunne man endt opp med en restriksjon hvor høyresiden var et beløp som kun kunne oppfylles med et fraksjonelt antall sedler. Denne avrundingen fjerner ikke problemet med fraksjonelle verdier fullstendig, siden (5.43) tillater at et beløp på høyre side av restriksjonen kan dekkes av et fraksjonelt antall sedler på venstre side, for eksempel kan et uttak på NOK 800 dekkes av $4/5$ av en NOK 1000 seddel. Modellen kan altså komme frem til optimale beslutninger som innebærer å fylle på et fraksjonelt antall sedler. Dersom modellen skal benyttes som beslutningsstøtte må disse fraksjonelle verdiene rundes av, siden det ikke er mulig i virkeligheten å fylle på for eksempel en kvart NOK 200 seddel. Alternativt kan det innføres heltallskrav i modellen.

Heltallskrav på en variabel gjør en modell normalt vanskeligere å løse. Det er derfor ønskelig å modellere så få variabler med heltallskrav som mulig. Det er ikke naturlig å sette heltallskrav på alle variable i denne modellen grunnet størrelsen på verdiene variabelen kan ta. Eksempelvis kan y_{it} ta verdier opp til maksimal kassettkapasitet M^S , som i sammenheng med heltallskrav er et veldig høyt tall. Med bakgrunn i at verdien på beslutningsvariablene i modellen er i størrelsesorden flere hundre, mener forfatterne at det ikke er hensiktsmessig å innføre heltallskrav på de nevnte variablene, men heller at resultatene avrundes oppover når disse skal brukes som beslutningsgrunnlag av SMN.

5.2.3 Valgfri kassettpåfylling med CCP

I denne utvidelsen er det valgfritt hvilke kassetter man bytter ved en påfylling, og utvidelsen tilsvarer VKS presentert i forrige underkapittel. Det introduseres ingen nye indekser, mengder eller parametere i denne utvidelsen enn de som ble presentert for GCCP, så presentasjonen starter med en introduksjon av de nye beslutningsvariablene. Videre presenteres modellens målfunksjon og de nye restriksjonene som innføres, før det gis en forklaring av målfunksjonen og de nye restriksjonene. Utvidelsen vil videre refereres til som *VKCCP*.

Antakelser

Som for VKS introduseres det for denne utvidelsen en antakelse om at det kan velges fritt hvilke kassetter som skal fylles på ved en påfylling av minibanken.

Beslutningsvariabler

Følgende nye beslutningsvariabler introduseres i denne utvidelsen:

α_{it} - = 1 om kassett i fylles på i dag t , 0 ellers, [-]

β_t - = 1 om en eller flere kassetter fylles på i dag t , 0 ellers, [-]

Målfunksjon

Målfunksjonsledd (5.38a) fra GCCP splittes for denne utvidelsen i ledd (5.52a) og (5.52b). Målfunksjonsleddet som beregner mellomregningskostnaden, (5.52c), tilsvarer ledd (5.38b).

$$\min Z = \sum_{t \in T^B} C^B \beta_t \quad (5.52a)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T^B} C^K \alpha_{it} \quad (5.52b)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} V_i H_t y_{it} \quad (5.52c)$$

Restriksjoner

Restriksjonene (5.40)-(5.42), (5.45) og (5.47)-(5.49) gjelder uendret for denne utvidelsen.

Følgende nye restriksjoner introduseres i denne utvidelsen:

$$x_{it} \leq M^S A_t \alpha_{it} \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.53)$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_{it} \leq |I| \beta_t \quad t \in T^B \quad (5.54)$$

$$r_{it} - (M^S - \bar{F}_{i,t-1}) \alpha_{it} \leq 0 \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.55)$$

$$y_{it} - \bar{E}_{it} - r_{it} + (M^S - \bar{E}_{it}) \alpha_{it} \leq (M^S - \bar{E}_{it}) \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.56)$$

$$\alpha_{it} \in \{0, 1\} \quad i \in I, t \in T^B \quad (5.57)$$

$$\beta_t \in \{0, 1\} \quad t \in T^B \quad (5.58)$$

Forklaring av nye målfunksjonsledd og restriksjoner

Målfunksjonens ledd (5.52a) beregner den totale betjeningskostnaden, og ledd (5.52b) beregner den totale kostnaden forbundet med kassetavgiften.

Restriksjonene (5.53), (5.55) og (5.56) tilsvarer (5.39), (5.44) og (5.46), hvor eneste endring er bytte av θ_t med α_{it} . Restriksjon (5.54) sikrer at det påløper en betjeningskostnad om en eller flere kassetter fylles på. Restriksjonene (5.57) og (5.58) er binærkrav.

5.2.4 Valgbare besøksmønstre med CCP

I denne utvidelsen er det mulig å velge mellom ulike besøksmønstre, og utvidelsen tilsvarende VBS presentert i forrige underkapittel. Først vil nye antakelser, indekser, mengder, parametere og beslutningsvariabler som introduseres i denne utvidelsen presenteres. Videre presenteres og forklares modellens målfunksjon og de nye restriksjonene som innføres. Modellen vil videre refereres til som *VBCCP*.

Antakelser

Som for VBS introduseres det for denne utvidelsen en antakelse om at det kan velges mellom gitte besøksmønstre for besøk av en minibank.

Indekser

m - mønster

Mengder

T_m^B - Mengden dager med besøk i mønster m , $T_m^B \subseteq T$

Parametere

- C_m^M - Transportkostnad tilhørende mønster m [NOK/mønster]
 \bar{F}_{itm} - Forventet total etterspørsel etter valør i i for påfyllingsperiode $t \in T_m^B$, for mønster m . Definert for alle dager t tilhørende påfyllingsperioden, [-]
 G_{itm} - Standardavviket tilknyttet den forventede totale etterspørselen \bar{F}_{itm} , [-]

Beslutningsvariabler

- α_{itm} - = 1 om kassett i fylles på i dag t for mønster m , 0 ellers, [-]
 ω_m - = 1 om mønster m brukes, 0 ellers, [-]

Målfunksjon

Alle av målfunksjonens tidligere presenterte ledd gjelder også for denne utvidelsen, men med noen endringer: betjeningsavgiften beregnes i (5.59a) hvor det

summeres over unionen av alle besøksdager for alle mønster, og (5.59b) summeres over mønster som følge av ny indeks m . (5.59d) introduseres i denne utvidelsen. Målfunksjonsleddet som beregner mellomregningskostnaden, (5.59c), tilsvarer ledd (5.38b).

$$\min Z = \sum_{t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B} C^B \beta_t \quad (5.59a)$$

$$+ \sum_{m \in M} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T_m^B} C^K \alpha_{itm} \quad (5.59b)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} V_i H_t y_{it} \quad (5.59c)$$

$$+ \sum_{m \in M} C_m^M \omega_m \quad (5.59d)$$

Restriksjoner

Restriksjonene (5.40), (5.41), (5.42) og (5.47) gjelder uendret for denne utvidelsen.

Følgende nye restriksjoner introduseres i denne utvidelsen:

$$x_{it} \leq \sum_{m \in M} M^S A_t \alpha_{itm} \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.60)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{m \in M} \alpha_{itm} \leq |I| \beta_t \quad t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.61)$$

$$\sum_{i \in I} V_i y_{i,t+1} \geq \sum_{i \in I} V_i (\bar{F}_{itm} + \lceil Z^P G_{itm} \rceil) \omega_m \quad m \in M, t \in T_m^B \setminus (\{|T|\}) \quad (5.62)$$

$$r_{it} - \sum_{m \in M} (M^S - \bar{F}_{i,t-1,m}) \alpha_{itm} \leq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.63)$$

$$r_{it} - (y_{it} - \bar{E}_{it}) \leq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} y_{it} - E_{it} - r_{it} + (M^S - \bar{E}_{it}) \alpha_{itm} \\ \leq (M^S - \bar{E}_{it}) \end{aligned} \quad i \in I, m \in M, t \in T_m^B \quad (5.65)$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_{itm} \leq |I| \omega_m \quad m \in M, t \in T_m^B \quad (5.66)$$

$$\sum_{m \in M} \omega_m = 1 \quad (5.67)$$

$$r_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.68)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i \in I, t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.69)$$

$$\alpha_{itm} \in \{0, 1\} \quad i \in I, t \in T_m^B, m \in M \quad (5.70)$$

$$\beta_t \in \{0, 1\} \quad t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B \quad (5.71)$$

$$\omega_m \in \{0, 1\} \quad m \in M \quad (5.72)$$

Forklaring av nye målfunksjonsledd og restriksjoner

Målfunksjonens ledd (5.59d) beregner transportkostnaden som påløper som følge av valgt besøksmønster.

Restriksjonene (5.64), (5.68), (5.69) og (5.71) tilsvarer henholdsvis (5.45), (5.48) (5.49) og (5.58), hvor eneste endring er at restriksjonene nå gjelder for $t \in \bigcup_{m \in M} T_m^B$ som følge av den nye antakelsen. Samme endring gjelder for restriksjonene (5.61), (5.63), (5.65) og (5.70), men her har α_{itm} i tillegg fått lagt til indeks m . Restriksjonene tilsvarer henholdsvis (5.54)-(5.57). CCP-restriksjonen (5.62) erstatter (5.43) og vil kun være aktiv for det mønsteret m som velges. Restriksjon (5.66) sørger for en logisk kobling mellom α_{itm} og ω_m , slik at minibanken kun kan fylles på i besøksdager som gjelder for det mønsteret som velges. For at det kun skal velges ett mønster er restriksjon (5.67) innført. Restriksjon (5.72) er binærkrav.

5.3 Likheter mellom sikkerhetslager og CCP

Som man kan se av modellene som er presentert i dette kapittelet er det store likheter mellom sikkerhetslager og CCP som måter å håndtere usikkerheten i etterspørselen på for LMU. Diskusjonen i dette underkapittelet vil ta utgangspunkt i restriksjon (5.6) og (5.43), som for lesbarhetens skyld presenteres på nytt:

$$y_{i,t+1} \geq F_{it} + S_{it} \quad i \in I, t \in T^B \setminus (\{|T|\}) \quad (5.6)$$

$$\sum_{i \in I} V_i y_{i,t+1} \geq \sum_{i \in I} V_i (\bar{F}_{it} + \lceil Z^P G_{it} \rceil) \quad t \in T^B \setminus (\{|T|\}) \quad (5.43)$$

Dersom man endrer (5.6) til å se på total mengde kontanter i stedet for antall sedler ved å multiplisere med V_i får man en ny restriksjon som er tilnærmet identisk med (5.43), vist i (5.73):

$$\sum_{i \in I} V_i y_{i,t+1} \geq \sum_{i \in I} V_i (F_{it} + S_{it}) \quad t \in T^B \setminus (\{|T|\}) \quad (5.73)$$

Dersom $F_{it} = \bar{F}_{it}$ og verdien på sikkerhetslageret, S_{it} , settes til en verdi som er lik $\lceil Z^P G_{it} \rceil$ vil disse restriksjonene være helt like. Sett på en annen måte kan altså $Z^P G_{it}$ tolkes som et sikkerhetslager. Det er da naturlig å stille seg spørsmålet hvorfor forfatterne har tatt valget med å se på total mengde kontanter i (5.43) når det i (5.6) sees på antall sedler, og omvendt.

Ved å ha et sikkerhetslager per kassett, slik som i (5.6), forsøker man å unngå å gå tom for sedler i hver enkelt kassett. Man ser altså på innholdet i hver kassett som et eget produkt. Dette kan bidra til en bedre kundeopplevelse ved at kunden i større grad er sikret mot at minibanken ikke kan oppfylle gjeldende etterspørsel. Hadde det vært ett felles sikkerhetslager for kassetten kunne modellen valgt å kun benytte én valør for å oppnå dette sikkerhetslageret. Som konsekvens av dette kunne én eller flere kassetter blitt tomme, noe som ville redusert kundeopplevelsen.

Argumentasjonen for hvorfor det ikke er valgt å se på antall sedler i (5.43) ble diskutert i avsnitt 5.2.1. Der ble det argumentert for at total mengde kontanter som måleenhet på servicenivå er en bedre tilnærming til SMN sin oppetid enn bruk av antall sedler. Årsaken til dette er at en minibank bare regnes som tom dersom alle kassetten i minibanken er tomme, og det er derfor bedre å se

på alle kassetene samlet som en total mengde kontanter i stedet for én kassett om gangen. I (5.43) ser man altså på *kontanter* som produkt og likestiller på den måten de ulike valørene i minibanken.

SMN sin bruk av oppetid som mål på servicenivå har altså sine ulemper da dette ikke utgjør et fullstendig incentiv for best mulig kundeopplevelse. Kravet til oppetid bidrar uten tvil til en bedre kundeopplevelse sammenliknet med ikke å ha et slikt krav, men forfatterne ønsker å påpeke at oppetid ikke er et fullkomment mål på hvor god kundeopplevelsen er. Ved å sammenlikne kostnadene fra modellene med sikkerhetslager, hvor *innholdet i hver enkelt kassett* sees på som produkt, og modellene med CCP, hvor *kontanter* sees på som produkt, vil det være mulig å si noe om kostnaden for å sikre en best mulig kundeopplevelse.

Differansen mellom kostnaden for en modell med sikkerhetslager og tilsvarende modell med CCP, vil altså si noe om kostnaden ved å sikre seg mot at en kassett går tom for sedler og altså kostnaden for en bedre kundeopplevelse. For å kunne kartlegge disse kostnadene er det for modellene presentert i underkapittel 5.1 valgt å bruke et sikkerhetslager per kassett, i stedet for en felles mengde kontanter som sikkerhetslager. Da restriksjon (5.43) gir modellen en større fleksibilitet enn restriksjon (5.6), vil verdien av målfunksjonen fra modellene med CCP alltid være like høy eller lavere enn verdien av målfunksjonen fra tilsvarende modell med sikkerhetslager. Dette gjelder selvfølgelig bare dersom S_{it} er lik $[Z^P G_{it}]$ og F_{it} er lik \bar{F}_{it} .

Kapittel 6

Beskrivelse av inndata

For å evaluere egnetheten til de matematiske modellene beskrevet i kapittel 5 og kartlegge potensielle kostnadsbesparelser må modellene testes på egnet inndata.

Inndata brukt i denne rapporten er hentet fra SMN sine interne systemer. Dette med mål om å sikre et best mulig sammenlikningsgrunnlag mellom de resultatene modellene kommer frem til og SMN sin drift. Fra Micos er det hentet ut detaljert rådata per uttak i SMN sine minibanker, før denne er prosessert for å oppnå et format som videre kan brukes i prognostisering av fremtidig etterspørsel og i implementering av de matematiske modellene.

Dette kapittelet vil videre ta for seg hvilken inndata modellene er testet på og hvilke verdier som er satt på ulike parametere.

6.1 Valg av minibanker

Det er valgt ut tre av SMN sine minibanker som grunnlag for å teste modellene. De tre minibankene vil videre omtales som MB1, MB2 og MB3, hvorav MB1 og MB2 fylles på én gang per uke mens MB3 fylles på to ganger per uke. De tre minibankene har samme oppsett av valører; to kassetter med NOK 200 sedler, én kassett med NOK 500 sedler og én kassett med NOK 1000 sedler. Minibankene er lokalisert slik at de tilhører samme transportsone og har således samme transportkostnad per besøk.

6.2 Valg av planleggingshorisont

For at modellene skal kunne brukes som verktøy i SMN sine beslutningsprosesser er det viktig at modellenes planleggingshorisont dekker flere besøk. Dette for å unngå at modellene kommer frem til en løsning som er suboptimal på lengre sikt. Det vil videre forklares nærmere hva som legges i denne påstanden, før underkapittelet avsluttes med en presentasjon av den planleggingshorisonten som er valgt for LMU.

I modellene er det valgfritt å fylle på minibanken ved et besøk, hvilket gir at dersom planleggingshorisonten ikke er lang nok til å dekke flere besøk mister man i stor grad fleksibiliteten som ligger i dette valget. Ved å ha flere besøksdager i planleggingshorisonten vil modellen ha mulighet til å fylle på for flere kommende påfyllingsperioder samtidig og gjennom dette redusere betjeningskostnaden og kassettkostnaden. Desto flere besøksdager planleggingshorisonten inneholder, desto større blir denne fleksibiliteten. Dersom planleggingshorisonten bare inneholder ett besøk mister man denne fleksibiliteten, og man risikerer at modellene kommer frem til løsninger som er suboptimale på lengre sikt.

Ut fra argumentasjonen ovenfor burde man ha uendelig lang planleggingshorisont, siden dette vil gi størst fleksibilitet. Dette er forståelig nok ikke mulig og man må derfor sette en begrensning på hvor lang planleggingshorisonten skal være. Siden etterspørselen etter kontanter er usikker ligger det liten verdi i å ha en veldig lang planleggingshorisont. Etterspørselen som realiseres vil normalt sett være ulik den estimerte, og den faktiske saldoen i minibanken, som benyttes som beslutningsgrunnlag for hvor mye eller om man skal fylle på, vil derfor være usikker.

For LMU er det valgt en planleggingshorisont på 22 dager, fra 18. mars til 8. april 2014. planleggingshorisonten inneholder for MB1, MB2 og MB3 henholdsvis 3, 3 og 6 besøksdager, hvilket gir modellen den ønskede fleksibiliteten som er nevnt over. Planleggingshorisonten utgjør de siste 22 dagene i det tilgjengelige datagrunnlaget, hvilket består av alle uttak gjort mellom 6. juni 2013 og 8. april 2014. Tabell 6.1 illustrerer valgt planleggingshorisont, hvor overstrekede datoer er dager hvor påfylling ikke er mulig og planleggingshorisonten er markert med grå bakgrunn.

Tabell 6.1: Valgt planleggingshorisont brukt i LMU.

Mars 2014							
Uke	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø
9						1	2
10	3	4	5	6	7	8	9
11	10	11	12	13	14	15	16
12	17	18	19	20	21	22	23
13	24	25	26	27	28	29	30
14	31						

April 2014							
Uke	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø
14		1	2	3	4	5	6
15	7	8	9	10	11	12	13
16	14	15	16	17	18	19	20
17	21	22	23	24	25	26	27
18	28	29	30				

På bakgrunn av ovennevnte argumenter mener forfatterne at valgt planleggingshorisont er fornuftig og at dette valget gir et riktig utgangspunkt for videre å kunne si noe om potensielle kostnadsbesparelser og modellenes egnethet.

6.3 Parametere tilknyttet etterspørselen

I dette underkapittelet vil de parametrene som er knyttet til den usikre etterspørselen presenteres, og underkapittelet starter derfor med en presentasjon av estimeringen av etterspørselen. Videre presenteres parametere som bygger på den estimerte etterspørselen, da i form av standardavvik, sikkerhetslager og sluttsaldo.

6.3.1 Estimering av etterspørselen

En av antakelsene som ligger til grunn for modellene hvor usikkerheten håndteres med CCP er at etterspørselen per kassett per dag er normalfordelt. Det eksisterer en rekke tester for å undersøke om et datasett er normalfordelt og forfatterne

har valgt to grafiske tester i tillegg til en numerisk test for å undersøke om den nevnte antakelsen er en rimelig antakelse.

Datagrunnlag

Alle tester og estimeringen av etterspørselen er gjort med utgangspunkt i data fra Micos. Det er begrenset hvor langt tilbake i tid SMN har tilgang til detaljert data i Micos og derfor er det eldste datapunktet forfatterne har hatt tilgang til datert 6. juni 2013. For å ha nok tid til å behandle dataen innen innleveringsfristen for denne rapporten er 8. april den siste dagen i datagrunnlaget. For perioden 6. juni til 8. april har altså forfatterne tilgang til informasjon om hvert enkelt uttak som er gjort i de aktuelle minibankene.

All estimering av etterspørsel og testing av om etterspørselen er normalfordelt er gjort med utgangspunkt i data fra perioden 6. juni 2013 til og med 17. mars 2014. Perioden som utgjør planleggingshorisonten er altså *ikke* en del av datagrunnlaget for beslutningene som modellene tar, noe som representerer hvordan SMN kunne benyttet modellene som beslutningsstøtte i sin daglige drift av minibanker. Da det eksisterer datagrunnlag også for den valgte planleggingshorisonten er det mulig å vurdere hvor god prognosen for planleggingshorisonten er, siden man vet hva etterspørselen i planleggingshorisonten ble, for således å kunne gjøre en vurdering av hvor gode beslutninger modellene faktisk kommer frem til.

Som følge av driftsstans, stengte lokaler hvor minibanken er lokalisert og liknende vil det i rådataen forekomme enkelte dager med unormale verdier på etterspørselen etter kontanter. Disse dagene er fjernet fra datagrunnlaget. I tillegg er en periode i forkant av julaften fjernet på grunn av veldig høy etterspørsel i forbindelse med julehandelen. Årsaken til at noen dager er fjernet er at disse dagene ikke representerer etterspørselen SMN sine minibanker normalt står ovenfor og ville derfor gitt feil grunnlag for å estimere etterspørselen. For eksempel er det tydelig at etterspørselen etter kontanter i perioden med julehandel ikke tilhører den samme normalfordelingen som de andre dagene.

Rådata fra Micos inneholder kun informasjon om tidspunktet for og størrelsen på uttaket, og ikke informasjon om hvilket antall sedler av hver valør som ble delt ut per uttak eller per dag. For å finne denne informasjonen må rådataen prosesseres, hvilket kan gjøres ved hjelp av algoritmen minibanken følger. Som nevnt i avsnitt 3.3.7 er minibanken programmert til å dele ut færrest mulig antall sedler ved et uttak. På bakgrunn av denne algoritmen er det beregnet hvor

mange sedler av de forskjellige valørene som har blitt delt ut for hvert uttak i rådataen fra Micos. Ved videre å summere antall sedler som er delt ut av en valør mellom klokken 21:00 for to påfølgende dager, er etterspørselen for hver kassett per dag beregnet. Det totale uttaket mellom klokken 21:00 to påfølgende dager utgjør altså den historiske etterspørselen for den aktuelle dagen. Årsaken til dette er at grunnlaget for SMN sin beregning av mellomregningskostnaden er *end of day*-saldoen som beskrevet i avsnitt 3.3.6. Altså er det etterspørselen mellom to *end of day*-saldoer man ønsker å estimere slik at kostnadene fra modellene kan sammenliknes med SMN sine påløpte kostnader.

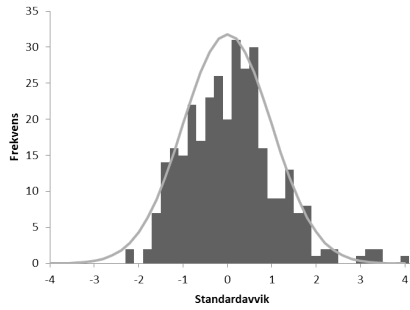
Tester for å avgjøre om etterspørselen er normalfordelt

En kurve som viser normalfordelte verdier har en veldig karakteristisk form med symmetri om normalfordelingens forventningsverdi. Ved å inspisere datagrunnlaget grafisk kan man se om plottet har en form som likner en normalfordelt kurve. Dersom plottingen likner en slik kurve er det et tegn på at datagrunnlaget er normalfordelt. Etterspørselens forventningsverdi og standardavvik kan estimeres med henholdsvis (6.1) og (6.2):

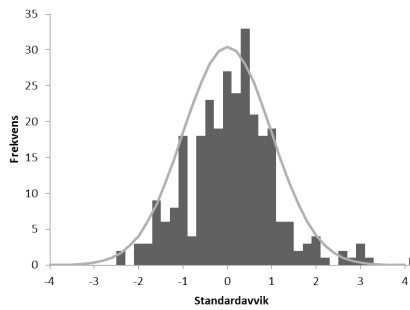
$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \quad (6.1)$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (6.2)$$

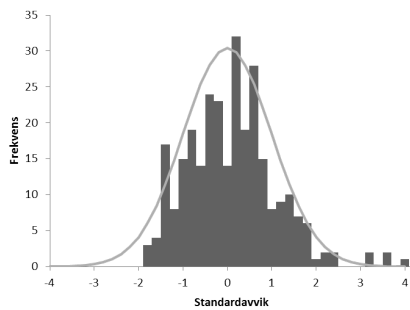
I ovennevnte formler er N antall datapunkter i datagrunnlaget, x_j er verdien på datapunktet j og \bar{x} er gjennomsnittet av alle datapunktene. Med utgangspunkt i disse estimatene er datagrunnlaget plottet sammen med en kurve som viser en normalfordeling med verdien på estimatene som parametere. Figur 6.1 viser plottene gjort for MB1. Histogrammene er fremstilt ved å transformere datapunktene fra måleenheten antall sedler til måleenheten antall standardavvik unna forventningsverdien. Et datapunkt med tilnærmet lik verdi som den estimerte forventningsverdien vil altså inngå i søylen hvor antall standardavvik er lik 0. Plottene for MB2 og MB3 er tilnærmet like som de vist for MB1, og disse plottene er derfor vedlagt i appendiks som Figur A.1. Tabeller og figurer tilhørende MB2 og MB3 vil videre ikke presenteres i dette kapittelet om de ikke viser andre resultater enn de vist for MB1, men heller vedlegges i appendiks.



(a)



(b)

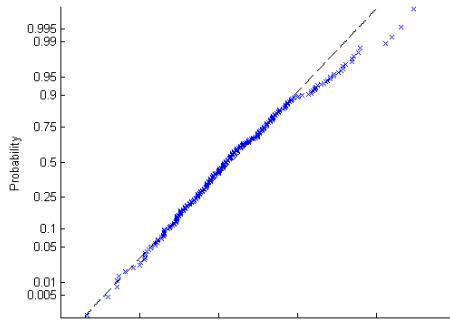


(c)

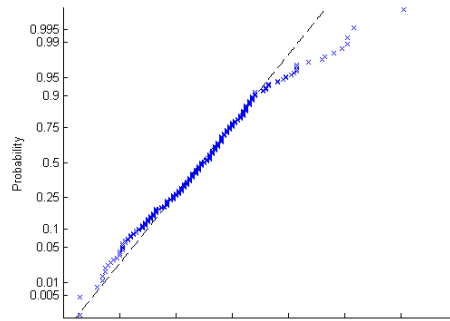
Figur 6.1: Histogram av datagrunnlaget tilhørende MB1, hvorav 6.1(a), 6.1(b) og 6.1(c) viser histogram for etterspørselen per valør for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000.

Som man kan se av Figur 6.1 følger histogrammene i stor grad kurven med normalfordelte verdier. Histogrammene følger ikke kurven perfekt, men etter forfatterens mening antyder histogrammene at datagrunnlaget er normalfordelt. Plottene for MB2 og MB3 er tilnærmet like som de vist for MB1, og disse plottene er derfor vedlagt i appendiks som Figur A.1. Tabeller og figurer tilhørende MB2 og MB3 vil videre ikke presenteres i dette kapittelet om de ikke viser andre resultater enn de vist for MB1, men heller vedlegges i appendiks.

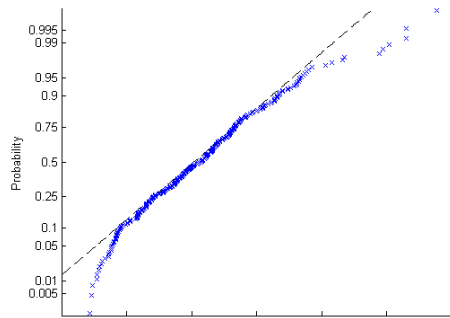
En annen grafisk test for å avgjøre om et datasett er normalfordelt er et såkalt *probability-probability-plot*, også kalt pp-plot. Forfatterne har benyttet den innebygde funksjonen *probplot* i den kommersielle programvaren Matlab for å lage pp-plot av datagrunnlaget. Referanselinjen i plottet representerer en normalfordeling, og store avvik mellom linjen og det plottede datagrunnlaget er tegn på at datagrunnlaget ikke er normalfordelt. Figur 6.2 viser pp-plot for MB1 og som figuren viser følger plottet referanselinjen i stor grad, noe som tyder på at datagrunnlaget kan sies å være normalfordelt. Tilsvarende pp-plot for MB2 og MB3 er vedlagt i appendiks som Figur A.2.



(a)



(b)



(c)

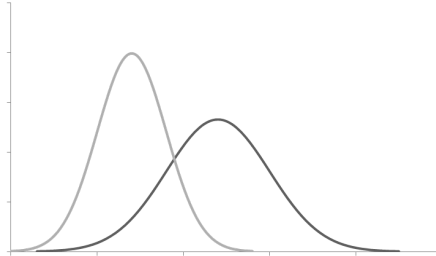
Figur 6.2: pp-plot av datagrunnlaget tilhørende MB1, hvorav 6.2(a), 6.2(b) og 6.2(c) viser plottet per valør for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000. Verdiene på x-aksen er sensitiv informasjon og er derfor sensurert.

Det eksisterer mange forskjellige numeriske tester for å undersøke om et datasett er normalfordelt. Forfatterne har benyttet *Kolmogorov-Smirnov*-testen (KS-test) på datagrunnlaget. Kort forklart tester KS-testen nullhypotesen om at datasettet kommer fra en standard normalfordeling, mot alternativet at datasettet ikke kommer fra en standard normalfordeling. Forfatterne har benyttet den innebygde funksjonen *kstest* i Matlab for å utføre testene med et signifikansnivå på 5 %. Som nevnt sjekker testen om datasettet kommer fra en *standard* normalfordeling og datapunktene i datagrunnlaget er derfor transformert til en standard normalfordeling ved å benytte formel (4.17). Forventningsverdien og standardavviket brukt i formelen er estimert ved bruk av formlene (6.1) og (6.2). En h-verdi lik 1 i Tabell 6.2 indikerer at hypotesen er forkastet, mens en h-verdi lik 0 tyder på at datasettet kommer fra en standard normalfordeling. En p-verdi mindre enn 0,05 vil gi en h-verdi lik 1.

Tabell 6.2: Resultater fra *Kolmogorov-Smirnov*-testen.

		Valør		
		NOK 200	NOK 500	NOK 1000
MB1	h-verdi	0	0	0
	p-verdi	0.2272	0.2258	0.2453
MB2	h-verdi	0	0	0
	p-verdi	0.1553	0.0694	0.2399
MB3	h-verdi	1	1	1
	p-verdi	0.0010	0.0313	0.0056

Av Tabell 6.2 ser man at 0-hypotesen forkastes for alle valører for MB3. Dette kan skyldes at det er variasjoner i etterspørselens forventningsverdi og standardavvik fra dag til dag. Så selv om etterspørselen for to dager hver for seg er normalfordelt, vil ikke nødvendigvis de to dagene sammen utgjøre en normalfordeling. Dette illustreres i Figur 6.3 hvor begge kurvene representerer normalfordelinger, men med ulik forventningsverdi og standardavvik. At 0-hypotesen ikke forkastes for MB1 og MB2 kan tyde på at det er større variasjoner i forventningsverdien og standardavviket for ulike dager for MB3 sammenliknet med MB1 og MB2.



Figur 6.3: Illustrasjon av to forskjellige normalfordelinger

Felles for de tre ovennevnte testene er at man ved bruk av disse kun undersøker om etterspørselen etter hver valør, e_i , er normalfordelt, ikke om etterspørselen etter hver valør *for hver enkelt dag*, e_{it} , er normalfordelt. Testene sjekker altså om alle datapunktene i datagrunnlaget tilhører den samme normalfordelingen, noe som vil si at etterspørselens forventningsverdi og standardavvik er lik for alle dager. I modellene med CCP er det en antakelse om at etterspørselen per valør per dag, e_{it} , er normalfordelt, og det er denne variabelen forfatterne i realiteten ønsker å teste om er normalfordelt eller ikke. Da forfatterne kun har hatt tilgang til ett datapunkt for hver dag, har det ikke vært nok data tilgjengelig til å kunne teste om e_{it} er normalfordelt eller ikke.

Testene for MB1, MB2 og MB3 viser samlet at etterspørselen etter hver valør kan være normalfordelt. Selv om det ikke har vært mulig å teste om e_{it} er normalfordelt eller ikke, mener forfatterne med utgangspunkt i de gjennomførte testene at det ikke er urimelig å anta at e_{it} er normalfordelt. Derfor vil det videre i rapporten tas utgangspunkt i at etterspørselen per valør per dag faktisk er normalfordelt.

Bruk av sesongfaktor

Med et utgangspunkt om normalfordelt etterspørsel kommer en utfordring i form av å estimere etterspørselens forventningsverdi per valør per dag. Forfatterne har i denne sammenheng benyttet elementer fra fremlagt teori om prognosemetoder, presentert i underkapittel 4.3, for å lage estimater for etterspørselen, og estimatene er i stor grad basert på bruk av sesongfaktorer. Ved å benytte prinsippet fra kausale prognosemetoder om at to hendelser kan ha en årsak-virkning-sammenheng, men kartlegge sammenhengen ved bruk av sesongfakto-

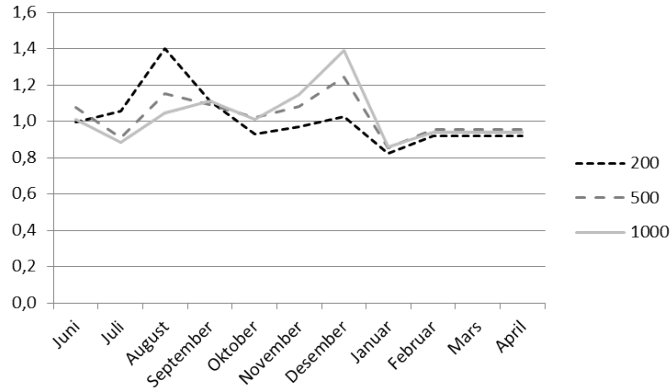
rer, benyttes elementer fra både tidsrekkemodeller og kausale prognosemetoder.

Som beskrevet i avsnitt 4.3.3 eksisterer det trolig flere sesongfaktorer som er gjeldende for SMN. Etter samtaler med nøkkelpersonell i SMN og diskusjoner mellom forfatterne, har forfatterne valgt å se på måned, ukedag og dato i måned som mulige sesongfaktorer. At etterspørselen varierer med dato i måned ble forklart i avsnitt 4.3.3 i forbindelse med sesongavhengig etterspørsel og vil ikke diskuteres nærmere her. At etterspørselen varierer med måned er etter forfatternes mening en rimelig hypotese og er derfor valgt som mulig sesongfaktor. Som følge av samtaler med nøkkelpersonell i SMN og det faktum at én av de utvalgte minibankene har en plassering som gjør den utilgjengelig for kunder på søndager, er det i tillegg valgt å se på en sesongfaktor for ukedag.

Tabell 6.3 viser sesongfaktorene for ukedager for MB1, mens sesongfaktorene for måned og dato i måned for samme minibank vises i henholdsvis Figur 6.4 og Figur 6.5. Tilsvarende tabeller og figurer for MB2 og MB3 er vedlagt i appendiks som Figur A.1 og A.2 og Tabell A.3 og A.4. Av nevnte tabeller og figurer er det tydelig at etterspørselen varierer med alle de tre faktorene, og sesongfaktoren for en spesifikk dag blir altså produktet av de tre aktuelle sesongfaktorene som gjelder for den dagen. Eksempelvis vil sesongfaktoren for tirsdag 25. mars være produktet av sesongfaktoren for tirsdager, sesongfaktoren for den 25. i hver måned og sesongfaktoren for mars.

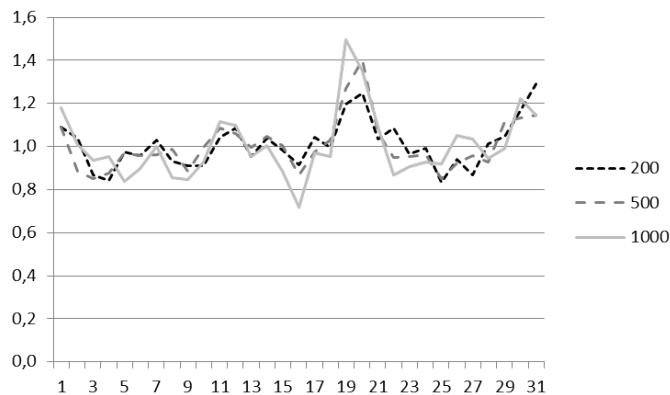
Tabell 6.3: Sesongfaktorer for ukedager for MB1.

Valør	Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lørdag	Søndag
200	0,950	1,000	0,940	0,938	1,136	0,948	0,671
500	0,977	1,003	0,988	0,990	1,168	0,909	0,534
1000	1,085	0,990	1,038	1,016	1,253	0,700	0,438



Figur 6.4: Sesongfaktorer for måned for MB1.

Legg merke til at sesongfaktoren for februar, mars og april i Figur 6.4 er lik. Som man kan se av Figur 6.5 er det mindre etterspørsel frem til rundt den 18. i en måned. Dersom man hadde benyttet etterspørselen fra 1. til 17. mars for å estimere en sesongfaktor for mars måned, ville sesongfaktoren blitt kunstig lav. Videre er siste dato i datagrunnlaget 17. mars og det er ingen data å estimere sesongfaktoren for april på bakgrunn av. Derfor er sesongfaktorene for mars og april måned antatt å være lik sesongfaktoren for februar måned.



Figur 6.5: Sesongfaktorer for dato i måned for MB1.

Estimatet for etterspørselens forventningsverdi fra formel (6.1) kan tolkes som den *sesongjusterte* prognosen for etterspørselen. Ved å multiplisere dette estimatet med sesongfaktoren for en spesifikk dag kommer man frem til den endelige prognosen for etterspørselens forventningsverdi per enkelt dag. Dette kan uttrykkes matematisk slik:

$$\bar{E}_{it} = S_{u(t)} S_{m(t)} S_{d(t)} \hat{\mu}_i \quad (6.3)$$

Estimatet for forventningsverdien til etterspørselen for kassett i på dag t er i formelen over angitt som \bar{E}_{it} . $S_{u(t)}$, $S_{m(t)}$ og $S_{d(t)}$ er henholdsvis sesongfaktoren for ukedag, måned og dato i måned. Etterspørselens standardavvik blir tilsvarende:

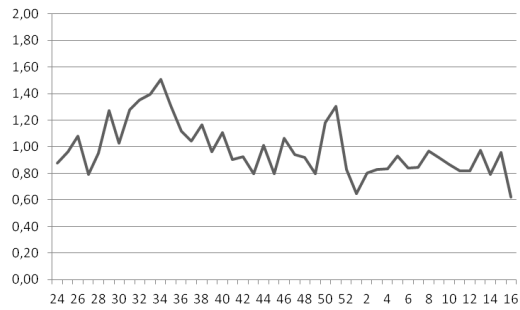
$$R_{it} = \sqrt{S_{u(t)}^2 S_{m(t)}^2 S_{d(t)}^2 \hat{S}_i^2} \quad (6.4)$$

I formelen over er R_{it} estimatet for standardavviket tilhørende etterspørselen for kassett i på dag t . Eksempelvis vil standardavviket for en påfyllingsperiode bestående av dag 3, 4 og 5 være estimert med:

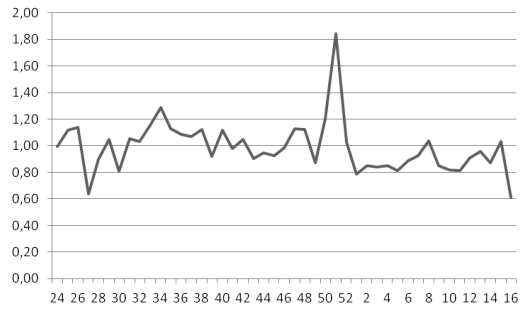
$$G_{i2} = \sqrt{R_{i3}^2 + R_{i4}^2 + R_{i5}^2} \quad (6.5)$$

Prognostisert etterspørsel

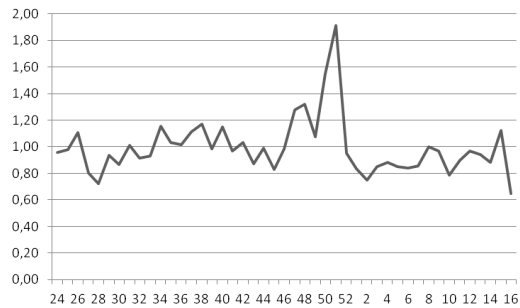
Verdien på den prognostiserte etterspørselen E_{it} i modellene hvor usikkerheten håndteres ved sikkerhetslager er satt lik estimatet for den forventede etterspørselen \bar{E}_{it} . Dette gjør det mulig å sammenlikne resultatene fra de to ulike måtene å håndtere usikkerheten på. Figur 6.6 viser datagrunnlaget for MB1 som er benyttet for å estimere etterspørselens forventningsverdi. Som man kan se av Figur 6.6 holder etterspørselen et konstant nivå, med utslag som følge av sesongavhengighet og tilfeldige utslag. Det er ingen økende eller synkende trender å observere og prognosemetoder for tidsrekker med konstant nivå kan derfor benyttes på datagrunnlaget for å prognostisere etterspørselen. En slik prognosemetode er å ta gjennomsnittet av tidsrekken, som beskrevet i avsnitt 4.3.3. Estimatet for forventningsverdien, $\hat{\mu}$, er gjennomsnittet av tidsrekken, og dermed kan det forsvares at den prognoserte etterspørselen E_{it} settes lik estimatet for forventningsverdien \bar{E}_{it} . Tilsvarende figurer for MB2 og MB3 er vedlagt i appendiks som Figur A.5.



(a)



(b)



(c)

Figur 6.6: Tidsrekker for MB1 som viser gjennomsnittlig etterspørsel per dag for hver uke i forhold til gjennomsnittsnivået. Figur 6.6(a)-6.6(c) viser tidsrekken per valør for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000.

6.3.2 Sikkerhetslager

Som beskrevet i avsnitt 4.2.1 kan størrelsen på sikkerhetslageret fastsettes ved bruk av formel (4.7). For lesbarhetens skyld repeteres denne:

$$S = Z\sigma \quad (4.7)$$

Siden sikkerhetslageret skal sikre mot usikkerheten i etterspørselen for en påfyllingsperiode, er verdien på σ satt lik estimatet for standardavviket for påfyllingsperioden tilhørende dag t , G_{it} . Verdien på faktoren Z^P er satt med utgangspunkt i oppetidskravet på 97,5 % og verdien på Z er satt lik Z^P . Altså benyttes oppetidskravet også for å fastsette verdien på sikkerhetslageret S_{it} .

6.4 Start- og sluttsaldo

Startsaldoen Y_i^1 brukt i modellene tilsvarer det antall sedler som stod i minibanken på starten av planleggingshorisontens første dag, det vil si *end of day*-saldoen den 17. mars. Denne verdien er hentet fra Micos.

Sluttsaldoen $Y_i^{|T|}$ brukt i modellene angir antall sedler man ønsker skal stå i minibanken på slutten av planleggingshorisontens siste dag. Verdien på parameteren er satt lik den estimerte etterspørselen mellom planleggingshorisontens siste dag og førstkommande mulige påfyllingsdag.

6.5 Kostnadsparametere

Som beskrevet i underkapittel 3.4 er det kostnader forbundet med påfylling av en minibank. Med unntak av mellomregningsrenten er alle kostnadsparametrene satt i henhold til Nokas' prisliste. Det er den nevnte prislisten som danner fakturagrunnlaget for faktureringen av Nokas sine tjenester ovenfor SMN, og kostnadsparametrene brukt i de matematiske formuleringene må derfor sies å ha korrekte verdier.

Som forklart i avsnitt 3.4.2 varierer mellomregningsrenten fra måned til måned, og størrelsen på denne parameteren settes internt i SMN. Siden rapporten er skrevet i etterkant av kalendermånedene som inngår i planleggingshorisonten, har det vært mulig å benytte SMN sine mellomregningsrenter for mars og april for å fastsette verdier på H_t .

6.6 Parametere tilknyttet fysisk kapasitet

Som beskrevet i avsnitt 3.3.3 har kassetene i SMN sine minibanker en øvre kapasitet på et gitt antall sedler. For å unngå tekniske problemer forbundet med overfylte kassetter opererer SMN med en maksimal grense som ligger under den øvre grensen fastsatt av minibankprodusenten, og det er SMN sin grense som er brukt som verdi på M^S for alle kassetter i beregningene.

SMN sine minibanker inneholder normalt fire kassetter, noe som også er tilfellet for de tre utvalgte minibankene. Dette er den fysiske begrensningen på antall kassetter per minibank, $|I|$, som er brukt for MB1, MB2 og MB3.

6.7 Besøksmønster

I dette underkapittelet vil de valgene som er gjort i forbindelse med besøksmønster presenteres. Per dags dato besøkes MB1 og MB2 én gang i uken. Da disse følger samme påfyllingsfrekvens er det valgt å se på tilsvarende mulige besøksmønster for disse. MB3 besøkes per dags dato to ganger i uken, og det er valgt å lage et eget sett av mulige besøksmønster for denne minibanken.

For en planleggingshorisont på 22 dager eksisterer det mange teoretisk mulige besøksmønstre, men av disse er det relativt få man i praksis vil være interessert i å undersøke. Et mulig besøksmønster er eksempelvis at minibanken besøkes hver tirsdag og fredag i planleggingshorisonten.

Med valgt planleggingshorisont på 22 dager tilsier datagrunnlaget tilhørende MB1 og MB2 at det ikke vil være hensiktsmessig å fylle på minibanken fler enn 2 ganger i uken, og det velges derfor å se på besøksmønster med maks to påfyllinger per uke for disse minibankene. Datagrunnlaget tilhørende MB3 viser langt høyere etterspørsel enn for de to andre minibankene, og det kan være interessant å se på besøksmønster med opp til 3 besøk i uken. Mønster med over 3 besøk vil det ikke være hensiktsmessig å inkludere.

Det er valgt å ikke se på mønstre som er ulike fra uke til uke. Eksempel på et usymmetrisk mønster kan være ved at det for første uke er mulig å fylle på minibanken to ganger mens det for påfølgende uke bare er mulig å fylle på én gang, eller at det er mulig å fylle på minibanken på mandag i første uke og onsdag i påfølgende uke.

Tabell 6.4 lister opp de aktuelle mønstre som eksisterer for MB1, MB2 og MB3 når usymmetriske mønstre er fjernet, og det ikke sees på mønstre med mer enn tre mulige besøk per uke. Per i dag har MB1, MB2 og MB3 henholdsvis mønster nr. 1, 4 og 7, og disse vil være gjeldende besøksmønstre i grunnmodellene og valgfri kassettpåfylling.

Tabell 6.4: Aktuelle besøksmønstre med opp til tre mulige besøk per uke.

Mønster nr.	Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag
1	x				
2		x			
3			x		
4				x	
5					x
6	x		x		
7	x			x	
8	x				x
9		x		x	
10		x			x
11			x		x
12	x		x		x

Av tabellen kan man se at det i tillegg til ovennevnte reduksjon også er valgt å se bort fra besøksmønstre som har besøk to påfølgende dager, da disse intuitivt vil være lite hensiktsmessige å se på. I tabellen er mønster 1-11 aktuelle besøksmønstre for MB1 og MB2, da disse har høyst to mulige besøk per uke. Av tabellen fremgår det også at det kun eksisterer ett interessant mønster med tre dager per uke, da det heller ikke for MB3 vurderes som hensiktsmessig å fylle på minibanken to dager på rad. I tillegg til mønster nummer 12 vil også mønster nummer 1-5 og 6-11 med henholdsvis ett eller to mulige besøk per uke være aktuelle for MB3.

Kapittel 7

Beregningsstudie

Dette kapittelet starter med en kartlegging av potensielle kostnadsbesparelser i underkapittel 7.1, hvor en sammenlikning av SMN sin drift av de utvalgte minibankene for den valgte planleggingshorisonten og modellenes resultater legges til grunn. I underkapittel 7.2 vil det videre gjøres en vurdering av ulike faktorer som påvirker hvor egnet modellene er som beslutningsstøtteverktøy for SMN.

De matematiske formuleringene er implementert ved bruk av programmeringsspråket Mosel i den kommersielle programvaren FICO® Xpress Optimization Suite, før disse er kjørt på en PC med Windows 7 Enterprise med 16 GB RAM og en Intel Core i7-3770 prosessor på 3,40 GHz. Alle modellene ble løst til optimalitet for de tre utvalgte minibankene.

7.1 Potensielle kostnadsbesparelser

Når SMN planlegger sine påfyllinger må de ta hensyn til en stokastisk etterspørsel; de vet ikke hva etterspørselen vil bli. Når man planlegger for en usikker fremtid er det vanskelig å si hva den faktiske kostnaden som vil påløpe vil bli. Det er derfor vanlig å operere med *forventede* kostnader. I modellene hvor usikkerheten håndteres ved bruk av CCP er etterspørselen antatt å være normalfordelt og det er den *forventede* etterspørselen som benyttes i disse modellene. Målfunksjonsverdien i CCP-modellene blir dermed kostnaden som påløper om den forventede etterspørselen realiseres. Verdien på målfunksjonen er altså ikke den forventede kostnaden, men kostnaden ved forventet etterspørsel. Siden ver-

dien på den prognostiserte etterspørselen i modellene med sikkerhetslager settes lik den forventede etterspørselen, blir målfunksjonsverdien også for disse modellene lik kostnaden ved forventet etterspørsel.

I de modellene hvor minibanken fylles på innen et avtalt besøkmønster mellom Nokas og SMN, vil det som nevnt i avsnitt 3.4.3 påløpe en transportkostnad uavhengig av hvilke besøksdager man velger å fylle på minibanken. For grunnmodellene og modellene med valgfri kassettpåfylling er transportkostnaden dermed en fast kostnad, og i resultatene som presenteres for disse modellene vil altså transportkostnaden være konstant.

7.1.1 SMN sine kostnader ved forventet etterspørsel

For å kunne si noe om hvor gode løsningene fra modellene er må de sammenliknes med et felles referansepunkt. Et naturlig sammenlikningsgrunnlag er SMN sine kostnader i den valgte planleggingshorisonten. Da modellene er modellert etter den nye avtalen mellom Nokas og SMN, hvilket i den valgte planleggingshorisonten ikke enda var gjeldende, vil det bli galt å sammenlikne modellenes resultater med SMN sine reelle kostnader for perioden. Derfor er det, på bakgrunn av detaljert informasjon om SMN sin drift av de utvalgte minibankene, brukt en modifisert versjon av GCCP for å beregne SMN sine kostnader ved forventet etterspørsel gitt den nye avtalen. Modellen er modifisert ved å fjerne CCP-restriksjonen, (5.43), hvorav man da står igjen med en modell som kun trenger å dekke den forventede etterspørselen, \bar{E}_{it} . SMN sine kostnader er beregnet ved å låse verdiene på x_{it} lik det antall sedler SMN faktisk valgte å fylle på kassetten med, for deretter å løse modellen til optimalitet. Tabell 7.1 viser hvor stor andel de ulike kostnadselementene utgjør av den totale kostnaden. Summen av kostnadselementene for hver av minibankene MB1, MB2 og MB3 blir altså 100 %.

Tabell 7.1: SMN sine kostnader ved forventet etterspørsel for de tre utvalgte minibankene.

	MB1	MB2	MB3
Total kostnad, [%]	100,00	100,00	100,00
Betjeningskostnad, [%]	11,94	14,21	17,84
Kassettkostnad, [%]	11,51	13,70	17,20
Mellomregningskostnad, [%]	62,85	55,76	44,47
Transportkostnad, [%]	13,71	16,33	20,49

7.1.2 Resultater fra grunnmodellene

For å kunne sammenlikne resultatene fra de to ulike måtene å håndtere usikkerheten i etterspørselen på, vil resultatene fra både GS og GCCP presenteres samtidig. Alle resultatene vil oppgis i prosent av SMN sin totale kostnad, presentert i Tabell 7.1.

Som man kan se av Tabell 7.2 er den totale kostnaden på 76-77 % i forhold til SMN sine kostnader for begge måtene å håndtere usikkerheten på for alle minibankene. Som følge av at det settes et sikkerhetslager per kassett i GS mens det i GCCP settes et felles sikkerhetslager for alle kassettenes, er total kostnad lavere for GCCP sammenliknet med GS. Dette ble omtalt nærmere i underkapittel 5.3 og vil derfor ikke forklares nærmere her. Forskjellen i kostnad mellom GS og GCCP, som kan tolkes som kostnaden for en økt kundeopplevelse, må sies å være marginal.

Tabell 7.2: Resultater fra grunnmodellene.

	MB1		MB2		MB3	
	GS	GCCP	GS	GCCP	GS	GCCP
Total kost., [%]	77,16	77,14	76,25	75,79	76,09	76,07
Betjeningskost., [%]	11,94	11,94	9,48	9,48	11,89	11,89
Kassettkost., [%]	11,51	11,51	9,13	9,13	11,46	11,46
Mellomregn.kost., [%]	40,00	39,99	41,32	40,86	32,24	32,22
Transportkost., [%]	13,71	13,71	16,33	16,33	20,49	20,49

Av Tabell 7.2 fremgår det at den største kostnadsbesparelsen kommer av den reduserte mellomregningskostnaden. Dette er en følge av at modellene velger

å fylle på mindre kontanter enn det SMN gjorde. For MB2 og MB3 reduseres også betjenings- og kassettkostnadene som følge av at modellene velger å fylle på færre ganger enn det SMN gjorde.

Teorem 4.1.1 på side 31 sier at en kassett aldri vil fylles på såfremt det fremdeles er gjenstående sedler i kassetten. Siden etterspørselen ikke er deterministisk i noen av modellene, noe som fører til at det fylles på et antall sedler som er høyere enn den forventede etterspørselen for å sikre seg mot usikkerheten, vil Teorem 4.1.1 ikke holde for noen av modellene. Tabell 7.3 viser verdien på retur-beløpet r_{it} for GCCP, og bekrefter at teoremet ikke holder. Legg merke til at r_{it} er større enn null for alle kassettene ved dag 2. Dette skyldes at beslutningen om hvor mye som skulle fylles på for påfyllingsperioden før planleggingshorisontens første besøksdag ikke er tatt av modellen, men er et resultat av SMN sin drift. I tillegg viser tabellen at $r_{3t} > 0$ for de to siste besøksdagene. Dette kommer av at usikkerheten i etterspørselen håndteres ved å fylle på et beløp som er høyere enn den forventede etterspørselen. Beløpet som returneres kan tolkes som et sikkerhetslager for å sikre seg mot usikkerheten i etterspørselen.

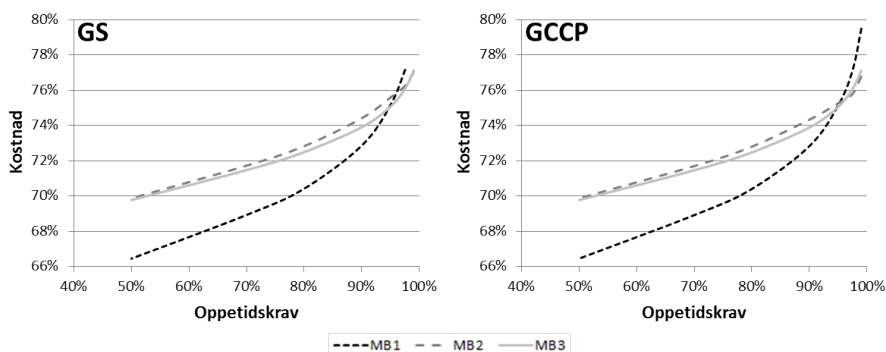
Tabell 7.3: Andel returnerte sedler, r_{it} , fra MB1 for GCCP. Verdi på r_{it} er oppgitt i prosent av M^S .

		Besøksdag, t		
		2	9	16
Kassett, i	1	51	0	0
	2	51	0	0
	3	67	54	54
	4	6	0	0

Som forklart i forbindelse med Teorem 4.1.2 på side 31 vil en optimal løsning på LMU ha den egenskapen at en kassett vil fylles på for å dekke etterspørselen i k perioder. Siden etterspørselen i modellene ikke ansees å være deterministisk, vil heller ikke dette teoremet holde. Modellene vil velge å fylle på kassettene for k perioder og i tillegg et eventuelt sikkerhetslager. Altså vil modellene fylle på for å dekke etterspørselen i et fraksjonelt antall perioder i stedet for k perioder. Dette kan man se ut fra tabell 7.3 som viser at det returneres sedler fra kassett 3 ved de to siste besøkene.

Ulike oppetidskrav

Som nevnt i avsnitt 3.3.1 drifter SMN sine minibanker med et oppetidskrav på 97,5 %, og parameteren for oppetidskravet er benyttet både i CCP-restriksjonen, (5.43), og for å beregne sikkerhetslageret, S_{it} . Oppetidskravet fungerer som en kostnadsdriver for SMN; desto høyere oppetidskrav, desto høyere kostnader. Det er derfor interessant å se hvordan oppetidskravet påvirker kostnadene, noe som er illustrert med et spredningsplott (*scatter plot*) for GS og GCCP Figur 7.1 med oppetidskrav mellom 50 % og 99 %. For MB1 er det i spredningsplottet tilhørende GS ikke tegnet inn datapunkt for et oppetidskrav på 99 %. Dette skyldes at det for dette oppetidskravet ikke var mulig å overholde restriksjonen som følger av at det er begrenset kapasitet i hver kassett, M^S , hvilket resulterte i at modellen ikke kunne finne en lovlig løsning.



Figur 7.1: Spredningsplott som viser effekt på total kostnad ved ulike oppetidskrav for GS og GCCP. Y-aksen viser total kostnad i prosent av SMN sin totale kostnad.

Som Figur 7.1 viser vil det være mulig å redusere kostnadene ved å redusere oppetidskravet. I dag regnes oppetiden samlet for samtlige minibanker, men ved eksempelvis å dele inn minibankene i forskjellige segment med individuelle oppetidskrav kan SMN kunne justere sine kostnader etter hvor god kundeservice de ønsker i det aktuelle segmentet.

Av Figur 7.1 fremgår det at kostnaden for MB1 er mer sensitiv for oppetidskravet enn kostnadene for MB2 og MB3. Dette kommer av at kombinasjonen

av størrelsen på etterspørselen og frekvensen på besøkene gir lite fleksibilitet for MB1. Etterspørselen etter NOK 1000 sedler er så stor at modellene er nødt til å fylle på NOK 1000 sedler ved hvert besøk for MB1 for å ikke bryte begrensningen om maksimalt antall sedler i en kassett, M^S . For MB2 og MB3 er M^S i mindre grad en begrensende faktor med deres gjeldende besøksmønster og etterspørsel, noe som gir modellene større fleksibilitet i når og hvor mye som skal fylles på.

7.1.3 Resultater fra valgfri kassettpåfylling

Som for resultatene presentert tidligere i kapittelet, vil alle resultater oppgis i prosent av SMN sin totale kostnad. Da modellene med valgfri kassettpåfylling, VKS og VKCCP, er en relaxering av GS og GCCP er det forventet at resultatene i dette avsnittet er minst like gode som resultatene presentert i avsnitt 7.1.2. Tabell 7.4 viser resultatene fra VKS og VKCCP for hver av minibankene.

Tabell 7.4: Resultater fra modellene med valgfri kassettpåfylling.

	MB1		MB2		MB3	
	VKS	VKCCP	VKS	VKCCP	VKS	VKCCP
Total kost., [%]	75,78	71,85	75,02	70,99	74,38	72,33
Betjeningskost., [%]	11,94	11,94	14,21	14,21	11,89	11,89
Kassettkost., [%]	7,67	5,75	6,85	7,99	8,60	7,16
Mellomregn.kost., [%]	42,46	40,45	37,63	32,46	33,39	32,78
Transportkost., [%]	13,71	13,71	16,33	16,33	20,49	20,49

Tabell 7.4 viser betydelige forskjeller i total kostnad mellom VKS og VKCCP. Det er tydelig at modellene hvor usikkerheten håndteres ved CCP klarer å utnytte fleksibiliteten som ligger i valgfri kassettpåfylling i større grad enn modellene med sikkerhetslager. For grunnmodellene var differansen mellom GCCP og GS marginal, men for VKS og VKCCP er differansen på 2-4 %-poeng.

Sammenliknet med grunnmodellene reduseres kassettkostnaden for alle tre minibankene, men legg merke til at betjeningskostnaden for MB2 har økt. Både VKCCP og VKS velger altså å fylle på MB2 flere ganger enn i GS og GCCP. Dette fører til en redusert mellomregningskostnad som veier opp for den økte betjeningskostnaden.

Den totale kostnadsreduksjonen, sammenliknet med grunnmodellene, er på

ca. 1-2 %-poeng for VKS og på ca. 4-5 %-poeng for VKCCP. Det er altså tydelig at den økte fleksibiliteten som ligger i fritt å velge hvilke kassetter man ønsker å fylle på fører til reduserte kostnader.

7.1.4 Resultater fra valgbare besøksmønstre

I modellene med valgbare besøksmønstre er det enda større fleksibilitet sammenliknet med tidligere modeller. Derfor forventes det at resultatene fra VBS og VBCCP er minst like gode som resultatene presentert i avsnitt 7.1.3. Som tidligere vil alle resultater oppgis i prosent av SMN sin totale kostnad.

Tabell 7.5: Resultater fra modellene med valgbare besøksmønstre.

	MB1		MB2		MB3	
	VBS	VBCCP	VBS	VBCCP	VBS	VBCCP
Total kost., [%]	75,78	71,85	74,84	70,99	67,59	66,62
Betjeningskost., [%]	11,94	11,94	14,21	14,21	8,92	8,92
Kassettkost., [%]	7,67	5,75	9,13	7,99	7,88	7,16
Mellomregn.kost., [%]	42,46	40,45	35,17	32,46	40,54	40,29
Transportkost., [%]	13,71	13,71	16,33	16,33	10,25	10,25
Valgt besøksmønster	1	1	1	4	4	4

Tabell 7.5 viser resultatene fra modellene med valgbare besøksmønstre. For MB1 og MB2 er transportkostnaden uendret sammenliknet med tidligere, altså velges det et besøksmønster med like mange besøk som de to nevnte minibankene hadde i de foregående modellene. I grunnmodellene og valgfri kassettpåfylling hadde MB1, MB2 og MB3 henholdsvis besøksmønstre 1, 4 og 7, hvor nummereringen tilsvarende er presentert i Tabell 6.4 på side 119.

For MB1 velger VBS og VBCCP det samme besøksmønsteret som minibanken har i dag, og som ble brukt i grunnmodellene og valgfri kassettpåfylling. VBS og VBCCP kommer dermed frem til akkurat de samme løsningene som ble funnet for MB1 i VKS og VKCCP.

For MB2 velger VBS besøksmønster 1 og kommer frem til en bedre løsning enn det VKS gjorde, mens VBCCP velger besøksmønster 4 og kommer dermed frem til den samme løsningen som VKCCP gjorde. Selv om VBS velger et annet besøksmønster for MB2 enn det som var gjeldende i VKS, fører dette kun til en marginal kostnadsbesparelse på ca. 0,2 %-poeng sammenliknet med VKS.

Det er kun for MB3 at modellene med valgbare besøksmønster kommer frem til betydelige kostnadsreduksjoner sammenliknet med tidligere modeller. Transportkostnaden halveres for både VBS og VBCCP, samtidig som betjeningskostnaden og kassettkostnaden også reduseres. Selv om disse kostnadene reduseres betraktelig fører den økte mellomregningskostnaden til at den totale kostnadsbesparelsen blir på ca. 7-8 %-poeng for både VBS og VBCCP. Årsaken til at mellomregningskostnaden øker så mye er at det fylles på sjeldnere, og at det dermed fylles på en større mengde kontanter i hver påfylling. Dette fører til at det står en større mengde kontanter i minibanken i store deler av planleggingshorisonten enn hva det gjorde for tidligere modeller.

7.2 Modellenes egnethet

I dette underkapittelet vil det gjøres en vurdering av ulike faktorer som påvirker hvor godt egnet modellene er som beslutningsstøtte for SMN. Dersom SMN skal benytte optimeringsmodeller som beslutningsstøtte er det blant annet viktig med rimelige løsningstider, god estimering av etterspørselen og at modellene i stor grad representerer virkeligheten.

7.2.1 Løsningstid

Som man kan se av Tabell 7.6 er det relativt korte løsningstider for alle modellene, med maksimal løsningstid på under 2 sekunder. Med så korte løsningstider løses alle modellene innen rimelig tid, og er slik sett egnet som beslutningsstøtte for SMN.

Tabell 7.6: Løsningstid for modellene.

	MB1		MB2		MB3	
	GS	GCCP	GS	GCCP	GS	GCCP
Tid, [s]	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,19
	VKS	VKCCP	VKS	VKCCP	VKS	VKCCP
Tid, [s]	0,09	0,10	0,04	0,07	0,14	0,29
	VBS	VBCCP	VBS	VBCCP	VBS	VBCCP
Tid, [s]	1,51	1,26	1,84	1,46	0,70	1,78

Løsningstiden for VBS og VBCCP er relativt sett betydelig høyere enn løsningstiden for grunnmodellene og valgfri kassettpåfylling. Dette tyder på at antall

besøksmønster har innvirkning på løsnings tiden. Som nevnt i delkapittel 6.7 vil det teoretisk finnes veldig mange mulige besøksmønster tilhørende en minibank, men det vil aldri være aktuelt å undersøke alle disse. VBS og VBCCP har kunnet velge mellom de forskjellige besøksmønstrene som forfatterene mente var mest aktuelle for minibankene, hvilket utgjorde 11 mønster for MB1 og MB2 og 12 mønster for MB3. Det bemerkes at det kan eksistere flere aktuelle mønster enn de inkluderte. Av Tabell 7.6 kan man se at det tok i underkant av 2 sekunder å løse modellene med valgbare besøksmønstre, hvilket skulle tilsi at løsnings tiden ikke kan sies å være en begrensende faktor for hvor mange mønster man ønsker å vurdere.

Planleggingshorisonten brukt i modellene er på 22 dager. For modellene uten valgbare besøksmønster inkluderer planleggingshorisonten 3 besøksdager for MB1 og MB2, og 6 besøksdager for MB3. Gitt antallet inkluderte besøksdager i valgt planleggingshorisont og ønsket om å bruke modellene som beslutningsstøtte i operasjonell drift er det naturlig å anta at det ikke vil være behov for en ytterligere stor utvidelse av planleggingshorisonten. Det imidlertid en slik utvidelse vil kunne bidra til er at modellene kan brukes strategisk til å sjekke hvorvidt nåværende besøksmønster er det optimale gitt prognostisert etterspørsel, men en slik bruk krever at løsnings tiden ikke øker utenfor akseptabel tidsbruk.

Tabell 7.7: Løsnings tid ved planleggingshorisont på 42 dager.

	MB1	
	GS	VBS
Tid, [s]	0,05	2,29

Tabell 7.7 viser løsnings tidene for GS og VBS for MB1 ved bruk av en planleggingshorisont på 42 dager. Som man kan se av tabellen øker løsnings tiden sammenliknet med tilsvarende tall for en planleggingshorisont på 22 dager, presentert i Tabell 7.6. Av tabellen er det dermed tydelig at løsnings tiden øker desto lengre planleggingshorisonten blir, men at løsnings tiden ikke vil være en begrensende faktor for valget av en strategisk planleggingshorisont. Dersom man ser på løsnings tid isolert viser diskusjonen tilhørende dette avsnittet at modellene må kunne sies å være godt egnet som beslutningsstøtte for SMN.

7.2.2 Inndata som ikke gir lovlige løsninger

Ikke-lovlige løsninger på grunn av størrelsen på inndata er vanlig i beslutningsstøttesystemer. Dette håndteres vanligvis med tydelige og gode feilmeldinger som gir brukeren beskjed om hva som er feil og hvordan feilen kan rettes. Det er viktig å påpeke at inndata kan gi ikke-lovlige løsninger uten at dette er en svakhet med modellene, men at muligheten for å gi slik inndata vil medføre et behov for et godt feilmeldingssystem rundt modellene. Det vil videre sees på noen tilfeller hvor inndata ikke gir lovlige løsninger for de tidligere presenterte modellene.

Dersom den forventede eller prognostiserte etterspørselen i en påfyllingsperiode, F_{it} , er høyere enn den fysiske kapasiteten til kassetten, M^S , vil det ikke finnes noen lovlige løsninger på problemet. Slike tilfeller vil gi en negativ saldo, en negativ verdi på y_{it} , noe som ikke er tillatt og modellene vil ikke kunne benyttes som beslutningsstøtte. Samtidig ligger det en verdi i at man vet at en eller flere kassetter trolig vil gå tom for sedler, da dette tyder på at man bør endre besøksmønsteret for å unngå at slike situasjoner oppstår igjen i fremtiden. Ved å manuelt endre verdien på F_{it} til M^S eller en lavere verdi kan modellene allikevel benyttes som beslutningsstøtte, men man må være klar over faren for at man kan gå tom for sedler i den aktuelle kassetten.

En liknende situasjon kan oppstå dersom startsaldoen, Y_i^1 , er for lav til å dekke etterspørselen frem til første besøksdag i planleggingshorisonten. Dette vil føre til en negativ saldo, som ikke er tillatt, og det vil ikke finnes noen lovlige løsninger på problemet. Ved å manuelt endre verdien på startsaldoen til en høyere verdi eller justere ned etterspørselen frem til første besøksdag slik at man akkurat dekker etterspørselen, kan man allikevel benytte modellene som beslutningsstøtte.

Dersom man gjør slike manuelle korrigeringer som nevnt ovenfor vil ikke kvaliteten på beslutningene i modellen forringes, men målfunksjonsverdien vil i mindre grad representere SMN sine kostnader. Alt som skjer i forkant av den første besøksdagen har man uansett ingen påvirkningskraft på, så selv om det kan virke rart å justere startsaldoen eller etterspørselen vil det ikke påvirke kvaliteten på beslutningene modellene kommer frem til.

7.2.3 Modellenes representasjon av virkeligheten

Etter forfatternes mening representerer modellene i stor grad SMN sin virkelighet, men med ett betydelig unntak. I alle modellene anses etterspørselen å være per kassett og slik sett anses innholdet i hver kassett å være ulike produkter. I virkeligheten er det en etterspørsel etter *kontanter* og en kunde vil for eksempel være relativt indifferent til å motta to NOK 500 sedler i stedet for én NOK 1000 seddel dersom minibanken er tom for NOK 1000 sedler. Denne fleksibiliteten som ligger i å kunne benytte ulike valører for å dekke en etterspørsel etter et beløp modelleres ikke i denne oppgaven, noe som må sies å være en svakhet ved modellene.

Et annet avvik fra virkeligheten som bør nevnes er muligheten for fraksjonelle verdier på x_{it} , r_{it} og y_{it} i modellene hvor usikkerheten håndteres med CCP. Et alternativ for å hindre fraksjonelle verdier er å innføre heltallskrav på x_{it} , noe som vil sørge for heltallsverdier på r_{it} og y_{it} også.

Tabell 7.8: Løsningstider for GCCP med heltallskrav på x_{it} .

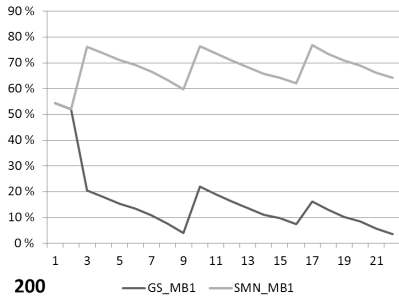
	MB1	MB2	MB3
Tid, [s]	0,02	0,04	0,11

Tabell 7.8 viser løsningstiden for GCCP med heltallskrav. Av tabellen fremgår det at et slikt krav vil ha liten innvirkning på løsningstiden for modellene, men siden de nevnte variablene kan ta relativt store verdier, i størrelsesorden flere hundre, mener forfatterne at det ikke er hensiktsmessig å innføre heltallskrav på de nevnte variablene. Dersom man skal benytte disse modellene som beslutningsstøtte vil man kunne runde av verdiene på x_{it} oppover uten at kvaliteten på beslutningen forringes i noen nevneverdig grad.

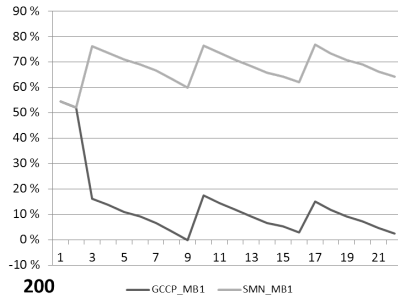
7.2.4 Modellenes resultater under reell etterspørsel

For å kunne avgjøre hvor godt modellene vil fungere i virkeligheten, er det viktig å sjekke om modellenes beslutninger medfører at minibanken går tom for kontanter eller ikke. Det er brukt data for den reelle etterspørselen for de datoene modellenes planleggingshorisont inneholder for å regne ut lagernivåene minibanken ville hatt om valgene gjort av modellene hadde blitt implementert direkte i reell drift. Figur 7.2 viser lagernivåene per valør i planleggingshorisonten for MB1 ved bruk av resultatene fra GS og GCCP. I figurene er både minibankens

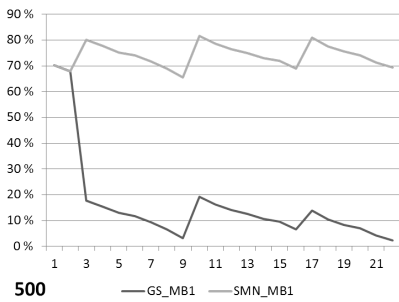
reelle lagernivå og lagernivået minibanken ville hatt om modellenes resultater hadde bestemt størrelsen på påfyllingene tegnet inn. Lagernivået er vist som en prosentandel av hver kassett sin maksimale kapasitet, M^S . Tilsvarende figurer for MB2 og MB3 er vedlagt i appendiks som henholdsvis Figur A.6 og A.8.



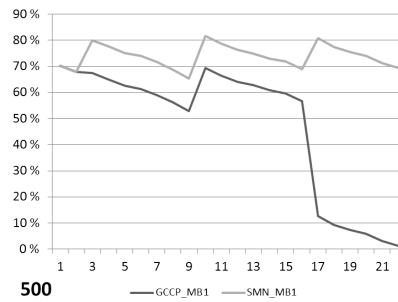
(a)



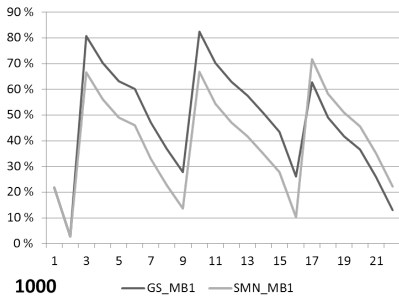
(d)



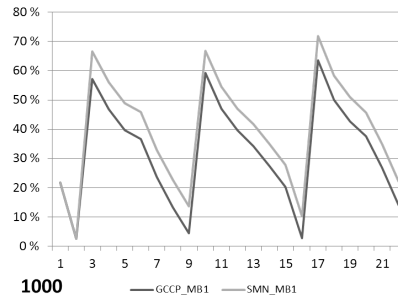
(b)



(e)



(c)



(f)

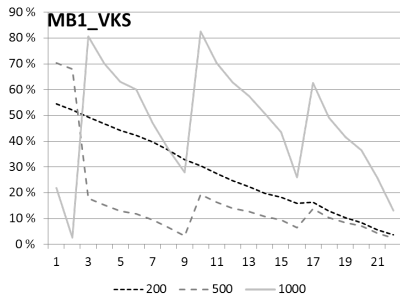
Figur 7.2: Lagernivået per valør tilhørende MB1 i planleggingshorisonten for GS, 7.2(a)-7.2(c), og GCCP, 7.2(d)-7.2(f), for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000.

Av Figur 7.2 fremgår det at lagernivået i MB1 ville vært kraftig redusert, sammenliknet med reellt nivå, om resultatene fra GS og GCCP hadde blitt brukt til å fastsette størrelsen på påfyllingene i planleggingshorisonten. Figurene viser at dagens reelle lagernivå for NOK 200 og 500 sedler er meget høye i forhold til den reelle etterspørselen, hvilket gir rom for forbedring. For NOK 1000 sedler gjenspeiler imidlertid størrelsen på påfyllingene bedre den reelle etterspørselen.

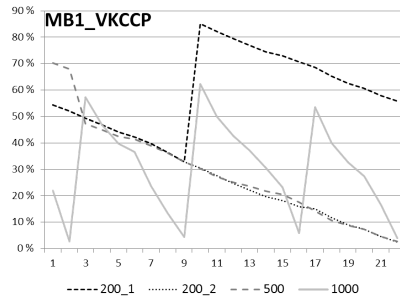
Figur 7.2 viser tydelig forskjellen på hvordan den usikre etterspørselen håndteres av GS og GCCP, med at førstnevnte har et sikkerhetslager per kassett og at det for sistnevnte velges et felles sikkerhetslager for valørene. Resultatet av dette sees tydelig for kassetten med NOK 500 sedler hvor det for GCCP er valgt å bruke NOK 500 sedler for å sikre seg mot usikkerheten, hvilket gir at lagernivået for NOK 500 sedler er langt høyere for GCCP enn GS. Et høyere lagernivå av NOK 500 sedler resulterer imidlertid i at det kan holdes et lavere lagernivå av NOK 200 og 1000 sedler.

For at modellene skal kunne ansees som egnet for operasjonelt bruk er det viktig at de leverer resultater som vil medføre at minibanken overholder de krav SMN stiller til sin drift, da gjerne i form av å ikke gå tomme for kontanter. Av Figur 7.2 kan man se at resultatene fra grunnmodellene ikke ville medført tomme kassetter, med unntak av for kassetten med NOK 200 sedler i GCCP. Figuren viser at disse kassetten så vidt går i minus den 9. dagen av planleggingshorisonten, og dette poengterer noe av svakheten med modellene: reellt vil minibanken kunne bruke andre valører for å dekke etterspørselen i de tilfellene én eller flere kassetter går tom for kontanter.

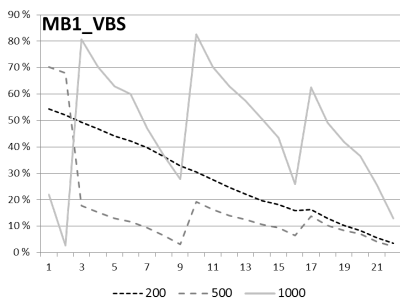
Figur 7.3 viser lagernivåene per valør i planleggingshorisonten for MB1 ved bruk av resultatene fra valgfri kassettpåfylling, VKS og VKCCP, og valgbare besøksmønster, VBS og VBCCP. I figurene vises lagernivået minibanken ville hatt om modellenes resultater hadde bestemt størrelsen på påfyllingene. Tilsvarende figurer for MB2 og MB3 er vedlagt i appendiks som henholdsvis Figur A.7 og A.9.



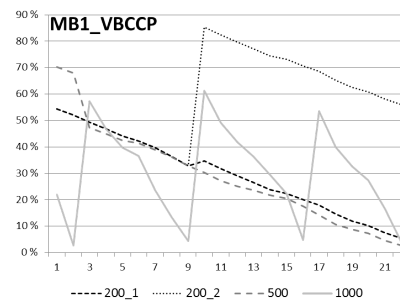
(a)



(c)



(b)



(d)

Figur 7.3: Lagernivået per valør tilhørende MB1 i planleggingshorisonten for VKS, 7.3(a), VBS, 7.3(b), VKCCP, 7.3(c), og VBCCP, 7.3(d). Figurene viser begge kassetter med valør NOK 200 i de tilfellene hvor lagernivået mellom disse er forskjellig, markert som *200.1* og *200.2*.

Av Figur 7.3 fremgår det at minibank MB1 ikke ville gått tom for noen av valørene i planleggingshorisonten ved bruk av resultatene fra modellene for valgfri kassettpåfylling og valgbare besøksmønstre. Modellene med sikkerhetslager og CCP velger forskjellig mengde kontanter av hver valør i kassettene, hvilket er en forskjell som tilsvarer den som ble belyst for grunnmodellene.

Som nevnt vil en minibank reellt kunne velge benytte ulike valører for å oppfylle etterspørselen etter kontanter. Det er derfor interessant å se på hvorvidt den totale mengden kontanter i minibanken er stor nok til å oppfylle etterspørselen. I Tabell 7.9 presenteres den totale mengden kontanter som står i

minibanken på starten av hver påfyllingsperiode som en prosentandel av den reelle etterspørselen i perioden. Tabellene viser altså dekningsgraden for MB1 i planleggingshorisonten ved bruk av de resultatene modellene kommer frem til. For den siste påfyllingsperioden er også den reelle sluttsaldoen, $Y_i^{|T|}$, inkludert i beregningene. Dette er gjort for å vise om minibanken vil gå tom for kontanter før det første besøket etter planleggingshorisontens slutt.

Tabell 7.9: Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes ved bruk av SMN sine valg og modellenes resultater for MB1.

MB1	Besøksdager		
	2	9	16
SMN	180 %	179 %	175 %
GS	136 %	137 %	101 %
VKS	149 %	140 %	101 %
VBS	149 %	140 %	101 %
GCCP	135 %	137 %	101 %
VKCCP	139 %	136 %	102 %
VBCCP	139 %	136 %	103 %

Av tabellen kan man se at etterspørselen tilhørende hver påfyllingsperiode overholdes av SMN og alle modellene, men for modellene er dekningsgraden for siste påfyllingsperiode langt lavere enn hva den er i de foregående periodene. Dette kommer av at den prognostiserte etterspørselen for dagene i april er lav sammenliknet med den reelle etterspørselen. Som nevnt benyttes sesongfaktoren for februar måned også som verdi på sesongfaktorene for mars og april, og dette kan være årsaken til at prognosen blir lav, sammenliknet med reell etterspørsel, i april. Noe som kan være en annen grunn for at prognosen i siste påfyllingsperiode er lav, er at det er vanskeligere å prognostisere verdier jo lenger frem i tid de vil inntreffe. Dette fører gjerne til større differanse mellom verdien av den prognostiserte og den reelle etterspørselen. Dekningsgraden for MB3 er tilsvarende som resultatene vist for MB1, og tabellene hvor disse er presentert er således vedlagt i appendiks som Tabell A.3 og A.4.

Tabell 7.10: Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes ved bruk av SMN sine valg og resultatene fra modellene for MB2.

MB2	Besøksdager		
	3	10	17
SMN	160 %	167 %	155 %
GS	105 %	178 %	73 %
VKS	131 %	125 %	80 %
GCCP	105 %	176 %	71 %
VKCCP	105 %	116 %	77 %
	2	9	16
VBS	127 %	118 %	92 %
	3	10	17
VBCCP	109 %	118 %	77 %

Tabell 7.10 viser dekningsgraden for MB2. Som man kan se er dekningsgraden for den siste påfyllingsperioden, ved bruk av resultatene fra modellene, ikke tilfredsstillende og minibanken ville gått tom for kontanter mot slutten av denne perioden. Dette skyldes at den prognostiserte etterspørselen for slutten av planleggingshorisonten er lavere enn den reelle etterspørselen i samme periode. Årsakene til dette er trolig det samme som beskrevet for MB1 ovenfor.

Dersom man skulle benyttet modellene i denne rapporten operativt ville man trolig kjørt modellene flere ganger i løpet av planleggingshorisonten. Etter hvert som man får mer informasjon om etterspørselen i løpet av planleggingshorisonten, og kan oppdatere prognosene, vil man dermed kunne gjennomføre en reoptimalisering ved å kjøre modellene på nytt. Dette gir at selv om resultatene for MB2 viser at minibanken ville gått tom for kontanter, er det godt mulig at man med oppdaterte prognoser underveis i planleggingshorisonten ville valgt å fylle på et høyere beløp. Dette kunne sikret at den reelle etterspørselen ville blitt dekket.

Etter en analyse av resultatene fra alle modeller i planleggingshorisonten for de tre minibankene kan det konkluderes med at resultatene i stor grad ville tilfredsstilt SMN sitt driftskrav, ved at mengden kontanter som hadde blitt fylt på i hver påfyllingsperiode stort sett ville vært nok til å oppfylle den reelle

etterspørselen etter kontanter.

Optimal løsning ved perfekt informasjon

Det er vist at beslutningene fra modellene fører til lavere kostnader sammenliknet med beslutningene SMN tok, og beslutningene gir som nevnt stort sett tilfredsstillende resultater med tanke på SMN sine driftskrav. Tabell 7.11 indikerer hvor gode løsningene fra modellene egentlig er. Tabellen viser den totale kostnaden fra den optimale løsningen ved perfekt informasjon som et kostnadsnivå på 100 %. GS viser til den totale kostnaden som hadde påløpt dersom beslutningene fra løsningen av GS hadde blitt benyttet, og SMN viser til den totale kostnaden som en følge av beslutningene SMN gjorde.

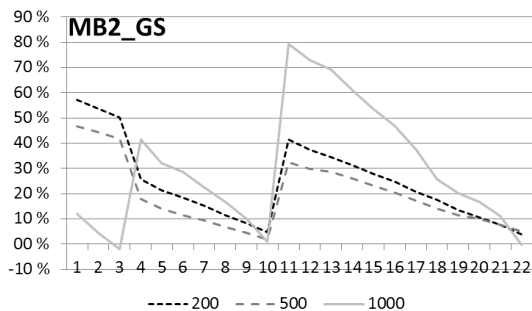
Tabell 7.11: Indikasjon på hvor gode løsningene fra GS er.

	MB1	MB3
Optimal løsning ved perfekt informasjon, [%]	100	100
GS, [%]	120	118
SMN, [%]	156	156

Tabell 7.11 gir som nevnt kun en indikasjon på hvor gode løsningene fra GS er, og årsaken til dette vil nå forklares nærmere. I modellformuleringene er det inkludert en restriksjon som gir at saldoen den siste dagen, $y_{i,|T|}$, må være større enn en gitt sluttsaldo, $Y_i^{|T|}$. Sluttsaldoen er som beskrevet i underkapittel 6.4 satt lik forventet etterspørsel frem til første besøksdag etter planleggingshorisontens slutt. Når $Y_i^{|T|}$ settes lik den reelle etterspørselen frem til første besøksdag etter planleggingshorisontens slutt er påfyllingene fra resultatene fra GS ikke store nok til at restriksjonen med $Y_i^{|T|}$ overholdes. Derfor er $Y_i^{|T|}$ satt lik 0 når kostnadene for optimal løsning, GS og SMN i Tabell 7.11 ble funnet. Beslutningene som GS kom frem til, som ble presentert i avsnitt 7.1.2, ble tatt med tanke på å overholde restriksjonen om en sluttsaldo, mens ved den optimale løsningen presentert i tabellen ovenfor var det altså ikke nødvendig å overholde en sluttsaldo. Kostnaden for den optimale løsningen presentert ovenfor er altså kunstig lav sammenliknet med kostnadene for SMN og GS, men de gir en indikasjon på forholdet mellom de tre.

Videre er det bare resultatene fra GS for MB1 og MB3 som er presentert. Årsaken til dette er at beslutningene fra GS for MB2 hadde ført til negativ

saldo på enkelte dager, som vist i Figur 7.4, og det er derfor vanskelig å beregne kostnadene som ville påløpt med disse beslutningene. Dette gjelder også for alle tre minibankene for GCCP, og det er derfor valgt å kun vise resultater fra GS i Tabell 7.11.



Figur 7.4: Lagernivå per valør tilhørende MB2 i planleggingshorisonten for GS.

Selv om Tabell 7.11 kun gir en indikasjon på hvor gode løsningene GS kommer frem til er, kan den allikevel benyttes til å ta en konklusjon. Tabellen viser tydelig at beslutningene fra GS er langt fra optimale sammenliknet med situasjonen hvor man vet hva etterspørselen vil bli, men betydelig bedre enn det SMN valgte å gjøre. Forskjellen mellom den optimale løsningen med perfekt informasjon og beslutningene fra GS er ca. 20 %, noe som viser at det er betydelige kostnadsreduksjoner å hente ved enda bedre estimering av etterspørselen.

7.2.5 Estimering av etterspørselen

Det er velkjent at dersom inndataen til en modell er dårlig, vil resultatet fra modellen ha liten verdi. Dette gjelder også for modellene i denne oppgaven, og det er spesielt etterspørselen som det er viktig å ha gode estimater på. Er estimatet for etterspørselen for lavt sammenliknet med reell etterspørsel vil det føre til tomme minibanker og misfornøyde kunder. Er estimatet for høyt medfører det unødvendige kostnader for SMN gjennom blant annet høyere mellomregningskostnad.

Verdien på etterspørselen, \bar{E}_{it} , estimeres som forklart tidligere med formel (6.3) som for lesbarhetens skyld repeteres:

$$\bar{E}_{it} = S_{u(t)} S_{m(t)} S_{d(t)} \hat{\mu}_i \quad (6.3)$$

Estimatet for forventningsverdien, $\hat{\mu}_i$, inngår også i beregningen av sesongfaktorene, så verdien på \bar{E}_{it} påvirkes mye av $\hat{\mu}_i$. En sesongfaktor beregnes ved å dividere gjennomsnittet for den aktuelle sesongen med gjennomsnittet for alle datapunktene i datagrunnlaget, altså $\hat{\mu}_i$. Dersom estimatet for forventningsverdien øker med p prosent samtidig som gjennomsnittet for de aktuelle sesongene er uforandret, fører dette til at \bar{E}_{it} endres med en faktor på $\frac{1+p}{(1+p)^3}$. Verdien på etterspørselen, \bar{E}_{it} , er altså veldig sensitiv for endringer i forventningsverdien, $\hat{\mu}_i$.

For å illustrere hvor viktig estimatet for forventningsverdien er vil det presenteres et eksempel. La μ_i være den faktiske forventningsverdien. Dersom estimatet for forventningsverdien, $\hat{\mu}_i$, er 5 % for høyt sammenliknet med μ_i fører dette til at \bar{E}_{it} blir $1 - \frac{1+0,05}{(1+0,05)^3} \approx 9,3$ % for lav sammenliknet med den faktiske forventningsverdien for etterspørselen den aktuelle dagen.

Ut fra eksempelet ovenfor er det tydelig at et godt estimat av forventningsverdien er viktig. Analysen i avsnitt 7.2.4 viste at modellene stort sett kom frem til beslutninger av høy kvalitet basert på den estimerte etterspørselen, noe som tyder på at estimatene for den forventede etterspørselen, $\hat{\mu}_i$, ikke har store avvik fra den faktiske forventede etterspørselen, μ_i .

Kapittel 8

Operasjonsanalyse- og arbeidsprosess

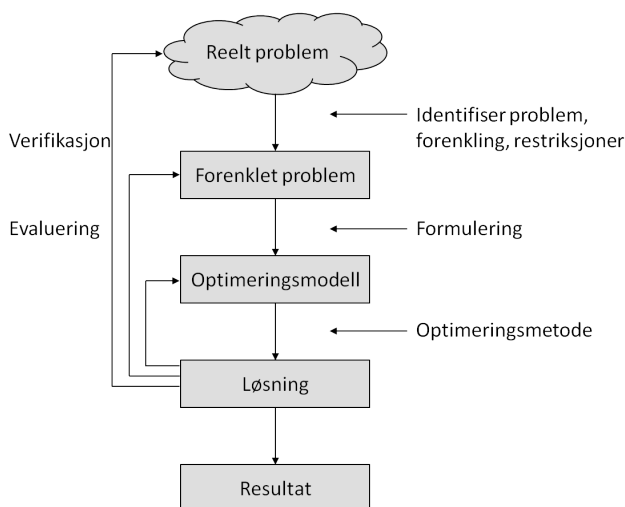
Hoveddelen av denne rapporten er forbeholdt presentasjon av de matematiske modellene som er brukt, teori og litteratur disse modellene bygger på og hvilke resultater modellene har gitt. Etter forfatterens mening er dette en god prioritering da disse kvantitative teknikkene også utgjør hoveddelen i hva man normalt sett forbinder med operasjonsanalyse. Men dette betyr ikke at praktiske problemer som LMU kun består av matematiske formuleringer. Som Hillier og Liberman [51] poengterer utgjør som oftest matematisk analyse en relativt liten andel av den totale arbeidsmengden som er lagt ned for å kunne komme frem til et svar på det praktiske problemet. Formålet med dette kapitlet er dermed å gi en innsikt i hvordan forfatterne har jobbet for å komme frem til de resultatene som presenteres i denne rapporten.

Det vil i underkapittel 8.1 gis en dypere teoretisk presentasjon av hva den totale arbeidsmengden normalt sett består av, før det reelle arbeidet som er gjort av forfatterne presenteres i underkapittel 8.2.

8.1 Fasene innen operasjonsanalyse

Lundgren m.fl. [59] presenterer en måte å splitte arbeidet innen operasjonsanalyse i forskjellige faser, illustrert i Figur 8.1. Fasene kan ofte utføres parallelt og tiden som kreves for å ferdigstille fasene avhenger av størrelsen på problemet og

problemets egenskaper, struktur og kompleksitet. Gitt det aktuelle problemet er det først nødvendig å identifisere hvilke deler av problemet som skal modelleres samt forenkle disse delene slik at de videre kan formuleres matematisk som en optimeringsmodell. Ved bruk av en passende løsningsalgoritme blir optimeringsmodellen så løst, før løsningen verifiseres og evalueres. Prosessen gjentas inntil verifisering og evaluering tilsier at løsningen kan presenteres som et endelig resultat.



Figur 8.1: Illustrasjon av fasene innen arbeidet med operasjonsanalyse.

Videre i underkapittelet vil teorien tilhørende de forskjellige fasene presenteres nærmere. Fasene vil presenteres i rekkefølgen vist i Figur 8.1.

Det *reelle problemet* man står ovenfor kan være komplekst. Lundgren m.fl. [59] påpeker at problemet som oftest vil inneholde aspekter som ikke kan inkluderes eller som er meget vanskelige å inkludere i en optimeringsmodell. Første fase består derfor i å kartlegge alle relevante komponenter i problemet og bestemme hvilke av disse som er irrelevante eller uviktige. I følge Hillier og Liberman [51] blir utenforstående ofte overrasket over hvor mye tid som normalt sett er nødvendig å investere for å samle nok informasjon til å kunne opparbeide en nøyaktig beskrivelse av problemet, samt for å ha godt nok

grunnlag til å utforme den matematiske modellen. En av grunnene til at denne fasen tar mye tid skyldes normalt sett at mye av den nødvendige dataen ikke er tilgjengelig ved oppstarten av fasen, da gjerne på grunn av at slik informasjon aldri er blitt lagret av bedriften eller at den lagrede informasjonen er utdatert og/eller lagret i et format som ikke kan brukes.

Et krav for å kunne bruke en optimeringsmodell er at de relevante delene av problemet er kvantifiserbare, og en viktig del av fasen med å kartlegge det reelle problemet er derfor å bestemme om problemet lar seg løse ved bruk av en optimeringsmodell eller om det vil være bedre å bruke en annen fremgangsmåte.

Etter at det reelle problemet er identifisert og irrelevante elementer er ekskludert står man igjen med et *forenklet problem*. Det forenklete problemet skal presentere det reelle problemet på en enklere og mer oversiktlig måte, som igjen muliggjør en matematisk formulering av problemet. En *optimeringsmodell* er en matematisk formulering av problemet, med målfunksjon, beslutningsvariabler og restriksjoner. Som Lundgren m.fl. [59] påpeker kan det innen denne fasen fortsatt være et behov for ytterligere forenklinger av problemet, hvorav det gjerne vil være en vurdering mellom å ha en modell som mer nøyaktig beskriver det forenklete problemet eller en modell som er lettere å løse.

Løsningsfasen består i å bruke en valgt løsningsmetode for å løse optimeringsmodellen, hvorav man kan skille mellom to hovedtyper av løsningsmetoder. I en eksakt metode (*exact method*) finner man den optimale løsningen på problemet, og beviser matematisk at løsningen som er funnet faktisk er optimal. I en heuristisk metode (*heuristic method*) søker man etter optimale løsninger, men man kan ikke bevise at den beste løsningen man har funnet er en optimal løsning. Hvilken metode man velger å benytte avhenger av modellens kompleksitet og krav til løsningsstid og kvalitet på løsningen.

Det vil ofte være mulig å bruke kommersiell programvare for å løse modellen. Størrelsen og strukturen i problemet har innvirkning på løsbarheten. Løsningen funnet må videre evalueres og omformuleres til et format som kan brukes som verktøy når bedriften videre skal ta sine avgjørelser. Løsningsfasen inneholder også arbeidet med å verifisere at løsningen er korrekt gitt den formulerte optimeringsmodellen, samt en evaluering av at modellen beskriver problemet med tilfredsstillende nøyaktighet. Etter evalueringen er ferdigstilt og eventuelle endringer er innført kommer man frem til det endelige *resultatet* fra optimeringsprosessen.

Hillier og Liberman [51] inkluderer *implementering* som en siste fase, hvor systemet som er utviklet implementeres i operasjonell drift i den aktuelle bedriften. Dette er ikke en fase som har vært aktuell som en del av arbeidet gjort av forfatterne, og vil således ikke utbroderes ytterligere her.

8.2 Arbeidsprosess

I dette underkapittelet vil de prosesser og det arbeidet som er gjort av forfatterne presenteres, med bakgrunn i teori presentert i underkapittel 8.1. Masteroppgaven bygger på prosjektoppgaven forfatterne utførte i samarbeid med SMN høsten 2013 [4]. Prosjektoppgaven kan sees på som en iterasjon i Figur 8.1, hvor en verifisering og evaluering av resultatet fra prosjektoppgaven la grunnlaget for utviklingen av modellene og de resultatene denne rapporten presenterer. Arbeidsprosessene gjort i forbindelse med prosjektoppgaven vil således inkluderes og beskrives i underkapittelet.

Høsten 2013

Etter at SMN hadde presentert utfordringen banken stod ovenfor innen sin drift av minibanker, inngikk forfatterne en samarbeidsavtale med SMN i august 2013. Umiddelbart etter inngåelse av samarbeidet ble det iverksatt en intensiv periode for sammen å sette seg inn i og kartlegge problemet. Drift av minibanker er et komplekst problem som krever mye arbeid for å kunne sette seg inn i og forstå. Forfatterne brukte anslagsvis 1/3 av total tilgjengelig tid mellom oppstarten i august og innleveringsfrist i desember på å opparbeide seg nok oversikt over det reelle problemet til å kunne gå videre til en forenklet versjon og modellformulering.

Da SMN ikke har mer enn 3 måneder med detaljert data over sin minibankdrift tilgjengelig i Micos, ble det som en del av informasjonsinnhentingene startet en systematisk rutine med nedlasting og lagring av slik data. Rutinen gikk ut på å laste ned ny data tilhørende de tre utvalgte minibankene fra Micos og lagre disse i et format som videre kunne behandles i Excel. Dette muliggjorde at det var data tilgjengelig for langt mer enn 3 måneder når prognosen skulle lages våren 2014. All lagret rådata ble studert og behandlet før bruk, eksempelvis ved å kontrollere og eventuelt ekskludere uvanlige størrelser og ved å prosessere dataen til et format som kunne brukes i modellene.

Etter at forfatterne hadde opparbeidet seg tilstrekkelig innsikt ble det foretatt en forenkling av problemet, ved at eksempelvis faste kostnader ble utelatt fra problemet som følge av at disse ikke vil ha innvirkning på løsningen av en optimeringsmodell. En annen forenkling som ble gjort var innen håndtering av den usikre etterspørselen etter kontanter ved at denne ble antatt deterministisk. Som en følge av kartleggingen ble det klart at utfordringen SMN hadde var kvantifiserbar, og at det var mulig å bruke optimeringsmodeller.

Det forenklete problemet forfatterne satt igjen med var langt mer håndterbart og oversiktlig enn hva som i utgangspunktet var blitt presentert av SMN. Dette muliggjorde en matematisk formulering av problemet. Forfatterne valgte å formulere det forenklete problemet som flere optimeringsmodeller, med en grunnleggende modell som beskrev problemet og flere utvidelser av denne grunnmodellen. Utvidelsene ble formulert som et resultat av et ønske om å søke svar på en hypotese forfatterne fremsatte om at endringer av utvalgte rutiner innen SMN sin drift av minibanker kunne føre til en reduksjon av de totale kostnadene.

For implementering og løsning av modellene ble den kommersielle programvaren FICO® Xpress Optimization Suite benyttet. Som nevnt i underkapittel 8.1 vil størrelsen og strukturen i problemet ha innvirkning på løsbareheten av optimeringsmodellen. Dette fikk forfatterne erfare da enkelte av modellene skulle løses, ved at disse modellene brukte uforholdsmessig lang tid på å løse problemet til optimalitet. Som en følge av dette ble det besluttet å sette en maksimal tilgjengelig løsningsstid på 2 timer. Den begrensede tilgjengelige løsningsstiden ble begrunnet med at SMN, innen operativ bruk av modellen, ikke vil ha mulighet til å bruke lenger tid enn 2 timer for å finne en løsning. Løsningene funnet ble videre analysert ved at det ble foretatt en evaluering på at de endelige modellene fortsatt representerte det reelle problemet med tilstrekkelig nøyaktighet, og en verifisering på at løsningene funnet var mulige gitt optimeringsmodellene.

Som en avsluttende del av prosjektoppgaven ble det i januar 2014 avholdt en presentasjon av løsningene i SMN sine lokaler i Trondheim, og dette var en viktig del av evalueringen. Forfatternes presentasjon av sitt arbeid for utvalgte ansatte i SMN sin ledelse muliggjorde at partene sammen kunne evaluere de løsningene som var funnet, og hvorvidt disse burde videreutvikles gitt det reelle problemet banken satt med. Som følge av at den usikre etterspørselen var antatt deterministisk ga løsningene et estimat av de teoretiske besparelsene SMN kunne oppnå ved bruk av optimeringsbasert beslutningsstøtte i sin drift av minibanker, og var således et grunnlag for å bestemme hvorvidt det skulle søkes å omformulere

modellene slik at disse representerte det reelle problemet bedre.

I tillegg til resultatene ble det på presentasjonen presentert flere operative strategier og rutiner som, etter forfatternes mening, kunne vært forbedret, blant annet innen utnyttelse av eksisterende toveis kommunikasjon mellom Micos og hver enkelt minibank ved å utvikle forskjellige algoritmer. Det ble påpekt at ved eksempelvis å endre algoritmen i en minibank mot slutten av en påfyllingsperiode, fra å dele ut færrest mulig antall sedler per uttak til flest mulig antall sedler per uttak, vil man kunne redusere antall returnerte sedler og således redusere kostnadene forbundet med dette. En annen løsning som ble påpekt var inkonsistensen i kapasiteten per kassett, hvor kapasitetsgrensen ble redusert med et felles beløp for alle valører og ikke med antall sedler, som reduserte den totale kapasiteten til en minibank mer enn nødvendig. Det ble fra SMN vist interesse for å undersøke og eventuelt endre enkelte av de påpekte punktene umiddelbart.

På bakgrunn av løsningene i prosjektoppgaven inngikk forfatterne en avtale med SMN om videre samarbeid rundt løsninger for utfordringen banken fortsatt hadde med drift av sine minibanker.

Våren 2014

Forfatterne startet arbeidet med masteroppgaven med en videre evaluering av løsningene funnet i prosjektoppgaven. Etter ønske fra SMN gjennomførte forfatterne en ny presentasjon av løsningene i starten av februar 2014, da i SpareBank 1 sine lokaler i Oslo, for representanter fra hele landet. Presentasjonen ble en oppfriskning av de punktene partene hadde blitt enige om under presentasjonen i januar 2014, samt ble det en diskusjon rundt noen nye elementer.

Ved oppstarten av masteroppgaven ble det verifisert at det reelle problemet SMN presenterte i august 2013 fortsatt var gjeldende, men nå med en endring i forbindelse med valg av selskap for verdihåndtering. I forbindelse med at gjeldende kontrakt mellom Nokas og SMN nærmet seg slutten ble det innledet forhandlinger med flere aktører innen verdihåndtering, før valget til slutt falt på å fortsette samarbeidet med Nokas. Den nye avtalen ville blant annet innebære endret kostnadsstruktur for drift av SMN sine minibanker, hvilket måtte tas høyde for i forbindelse med modellene i denne rapporten. Et eksempel på en slik endring er at det ikke lenger ville være kostnader forbundet med retur av ubrukte sedler fra minibankene til Nokas sitt depot.

Som følge av løsningene fra prosjektoppgaven og påfølgende evaluering, ble det besluttet at usikkerheten i etterspørselen skulle forsøkes inkludert i optimeringsmodellene slik at disse bedre representerte det reelle problemet. Det ble derfor gjort en antakelse om at etterspørselen kunne prognostiseres, hvorav optimeringsmodellen skulle kjøres på resultatene fra prognosen. Det ble valgt å benytte to forskjellige metoder, sikkerhetslager og CCP, for å sikre seg mot usikkerheten i problemet, da med ønske om å undersøke hvilken metode som ville passe best for SMN sitt reelle problem.

Forfatterne valgte å beholde løsningen med å modellere det forenklete problemet som en grunnleggende modell med utvidelser tilknyttet antakelser om kostnadsbesparelser som følge av endrede driftsrutiner, men antallet utvidelser ble redusert. Valget av hvilke antakelser som ville være relevante og interessante å se på som en del av masteroppgaven ble gjort på bakgrunn av løsningen fra og evalueringen av prosjektoppgaven.

For implementering og løsning av modellene ble FICO® Xpress Optimization Suite igjen benyttet. Løsningstiden av de nye optimeringsmodellene var nå godt innenfor tidsgrensen det er naturlig å anta at SMN vil ha tilgjengelig ved operativ bruk.

Løsningene funnet ble evaluert og verifisert av forfatterne. Evalueringen som er gjort ble presentert i kapittel 7, hvor forfatterne blant annet evaluerte hvor gode løsningene som ble funnet faktisk er. Resultatene fra arbeidet med masteroppgaven vil i juni 2014 bli presentert for utvalgte ansatte i SMN sin ledelse i deres lokaler i Trondheim, slik som de ble det i forbindelse med prosjektoppgaven.

Det er fremdeles noen endringer og forbedringer som kan gjøres på de presenterte optimeringsmodellene, men etter forfatternes mening er modellene allerede gode nok til å kunne benyttes som beslutningsstøtte for SMN. Uansett om man velger å benytte modellene i denne rapporten eller videreutvikler modellene, gjenstår *implementeringsfasen* hvor modellene implementeres i operasjonell drift. Denne fasen har som nevnt ikke vært aktuell i forbindelse med denne masteroppgaven og vil derfor ikke omtales nærmere.

Kapittel 9

Konklusjon

Hvor mye og når man skal fylle på en minibank er en velkjent problemstilling for mange banker. I denne rapporten er det utviklet seks modeller med utgangspunkt i hvordan SpareBank 1 Midt-Norge drifter sine minibanker med mål om å optimalisere påfyllingen av minibanker. Usikkerheten i etterspørselen etter kontanter håndteres på to ulike måter: tre modeller med sikkerhetslager og tre modeller med sannsynlighetsbegrenset programmering (*Chance Constrained Programming*). For hver av de to måtene er det utviklet en grunnmodell, som modellerer dagens drift av minibanker, med to påfølgende utvidelser som modellerer relaxeringer av dagens drift.

Tabell 9.1: Mulige kostnadsbesparelser sammenliknet med dagens nivå.

	Besparelse
Grunnmodell	23-24 %
Valgfri kassettpåfylling	24-29 %
Valgbare besøksmønster	24-33 %

Ved å prognostisere etterspørselen etter kontanter og benytte dette som beslutningsgrunnlag i modellene, viser resultatene fra modellene, presentert i Tabell 9.1, mulige kostnadsbesparelser sammenliknet med hvordan SpareBank 1 Midt-Norge drifter sine minibanker i dag. Resultatene fra grunnmodellene gir en kostnadsreduksjon på 23-24 % sammenliknet med dagens drift. Dersom dagens rutine med å alltid fylle på alle kassettene i en minibank endres slik at man kan velge hvilke kassetter man vil fylle på, viser resultatene fra den

første utvidelsen en kostnadsreduksjon på 24-29 %. En minibank besøkes ut fra et fast besøksmønster, for eksempel hver onsdag, for å fylle på kontanter. Ved å ha mulighet til å endre besøksmønster, til for eksempel hver mandag, viser den siste utvidelsen mulige kostnadsbesparelser på 24-33 % sammenliknet med dagens drift.

For at modellene skal bli ansett som egnet for operasjonell bruk er det viktig at de leverer resultater som vil medføre at minibanken overholder de krav SpareBank 1 Midt-Norge stiller til sin drift, ved å ikke gå tomme for kontanter. Analyser viser at modellene kommer frem til beslutninger som stort sett dekker den reelle etterspørselen, samt bankens driftskrav. Dette tyder på at prognostiseringen av etterspørselen er god nok til at den kan brukes som beslutningsgrunnlag i modellene. Analyser viser samtidig at gitt beslutningene grunnmodellene tar, vil det med perfekt informasjon om etterspørselen være mulig å ytterligere redusere kostnadene med ca. 20 %, hvilket gir at det vil være mulig å oppnå større besparelser ved å utvikle enda bedre prognoser.

Samtlige modeller løses til optimalitet innen to sekunder med den valgte planleggingshorisonten på 22 dager, noe som er en tilfredsstillende løsnings tid med tanke på å benytte modellene operasjonelt. Etter forfatternes mening representerer modellene i stor grad SpareBank 1 Midt-Norge sin virkelighet, men med ett betydelig unntak. I alle modellene blir etterspørselen ansett å være per kassett og slik sett betraktes innholdet i hver kassett å være ulike produkter. I virkeligheten er det en etterspørsel etter *kontanter* og en kunde vil for eksempel være relativt indifferent til å motta to NOK 500 sedler i stedet for én NOK 1000 seddel dersom minibanken er tom for NOK 1000 sedler. Denne fleksibiliteten som ligger i å kunne benytte ulike valører for å dekke en etterspørsel etter et beløp modelleres ikke i denne oppgaven, noe som må sies å være en svakhet ved modellene.

Etter forfatternes mening er modellene gode nok til å bidra til betydelige kostnadsreduksjoner for driften av SMN sine minibanker, men dersom disse skal benyttes operasjonelt bør det blant annet utvikles et brukergrensesnitt tilknyttet modellene. I tillegg burde det utvikles automatisert lagring av data for historisk etterspørsel som kan benyttes i prognostisering av etterspørselen.

Kapittel 10

Videre arbeid

Beregningsstudiet i kapittel 7 viste lovende resultater fra optimeringsmodellene, men enkelte forbedringer kan allikevel undersøkes. I dette kapittelet vil mulige utvidelser av arbeidet i denne rapporten bli presentert.

10.1 Forbedret prognose

Modellene tar avgjørelser basert på prognostisert etterspørsel. For å komme frem til gode beslutninger er de således avhengige av at prognosen på best mulig måte representerer hva den faktiske etterspørselen vil bli. Beregningsstudiet viser at det er behov for bedre prognostisering. Det er vanskelig å fastslå om den mindre gode prognosen skyldes for dårlig datagrunnlag eller om måten etterspørselen prognostiseres ikke er passende. Uavhengig av en slik konklusjon vil det være interessant å se på andre måter å prognostisere etterspørselen på for å se om dette fører til bedre prognoser.

10.2 Ulike valører

Optimeringsmodellene modellerer ikke fleksibiliteten som ligger i å ha ulike valører i en minibank. Med ulike valører kan etterspørselen etter et beløp dekkes med forskjellige valører, for eksempel kan en etterspørsel etter NOK 1000 dekkes med én NOK 1000 seddel, to NOK 500 sedler eller fem NOK 200 sedler. Ved å modellere fleksibiliteten vil man se på etterspørselen etter mengde kontanter i

stedet for en etterspørsel per valør, og således modellere virkeligheten i større grad.

10.3 Dynamisk størrelse på sikkerhetslageret

Dersom modellene velger å fylle på for å dekke etterspørselen i flere påfyllingsperioder ved en påfylling, øker tidsperioden mellom hver påfylling. Dette fører til større usikkerhet i etterspørselen, som man må sikre seg mot, og sikkerhetslagerets størrelse bør i slike tilfeller økes. En dynamisk størrelse på sikkerhetslageret kan løse denne utfordringen. Ved å la størrelsen på sikkerhetslageret variere avhengig av om man fyller på for flere påfyllingsperioder ved en påfylling, oppnår man en dynamisk størrelse på sikkerhetslageret.

10.4 Symmetriske løsninger

Modellene følger i rapporten en antakelse om at dersom en eller flere kassetter inneholder samme valør, har de aktuelle kassetten lik etterspørsel. Denne antakelsen fører til symmetriske løsninger siden kassetter med samme valør oppfører seg likt. Dersom for eksempel kassett 1 og kassett 2 inneholder samme valør, kan beslutningene man kommer frem til for kassett 1 også benyttes for kassett 2 såfremt beslutningene for kassett 2 benyttes for kassett 1 samtidig. Desto flere kassetter som inneholder samme valør, desto flere symmetriske løsninger vil eksistere.

Man ønsker helst å unngå symmetriske løsninger for optimeringsmodeller, spesielt med tanke på unødvendig lang løsnings tid. Forfatterne har ikke hatt noen utfordringer knyttet til symmetriske løsninger, hverken angående lange løsnings tider eller andre problemer. Allikevel ligger det et forbedringspotensiale i modellene som er presentert ved å for eksempel innføre et symmetrikutt som sørger for at det ikke eksisterer symmetriske løsninger.

Bibliografi

- [1] Norges Bank, “Utviklingstrekk i kunderetta betalingsformidling 2013”, Norges Bank, tekn. rapp., 2014.
- [2] B. Andersen, “Frykter det pengeløse samfunnet”, *Norsk rikskringkasting*, 9. mai 2011, Besøkt 28.04.2014. side: <http://www.nrk.no/nordland/frykter-det-pengelose-samfunnet-1.7624873>.
- [3] Norges Bank, “Årsrapport om betalingsystem 2012”, Norges Bank, tekn. rapp., 2013.
- [4] G. M. Bakken og M. Wiik, “Optimeringsbasert beslutningsstøtte for påfylling av minibanker”, Prosjektoppgave, Norges Teknisk- Naturvitenskaplige Universitet, 2013.
- [5] ATM Industry Association, *About ATMIA*, Besøkt 25.4.2014. side: <https://www.atmia.com/about-us/mission-statement--profile/>.
- [6] European ATM Security Team, *ATMs in Europe*, Besøkt 25.4.2014, 2013. side: <https://www.european-atm-security.eu/ATMs%20in%20Europe/>.
- [7] ReportsnReports, “China ATM Industry Report”, tekn. rapp., 2012.
- [8] Network Alliance, “ATM Future Trends Report 2012”, Network Alliance, tekn. rapp., 2012.
- [9] ATMmarketplace.com, “2011 ATM Software Trends and Analysis 4th Annual Edition”, ATMmarketplace.com, tekn. rapp., 2011.
- [10] ATMmarketplace.com, “2012 ATM Software Trends and Analysis 5th Edition”, ATMmarketplace.com, tekn. rapp., 2012.
- [11] ATMmarketplace.com, “2013 ATM Software Trends and Analysis 6th Edition”, ATMmarketplace.com, tekn. rapp., 2013.

- [12] ATMmarketplace.com, “2014 ATM Software Trends and Analysis 7th Edition”, ATMmarketplace.com, tekn. rapp., 2014.
- [13] EDB ErgoGroup, *Hver tredje nordmann tror pengene vil forsvinne*, Besøkt 28.4.2014, mar. 2011. side: <http://www.evry.no/bedrift/presse/hver-tredje-nordmann-tror-pengene-vil-forsvinne/>.
- [14] Finans Norge, *Antall ekspedisjonssteder*, Besøkt 25.4.2014. side: <http://fno.no/Hoved/Statistikk/Bank/Antall-ekspedisjonssteder/>.
- [15] E. Sandmo og J. Toftaker, “Får ikke ta ut pengene sine”, *Norsk rikskringkasting*, 27. okt. 2011, Besøkt 28.4.2014. side: <http://www.nrk.no/trondelag/far-ikke-ta-ut-pengene-sine-1.7852509>.
- [16] Nokas AS, *Nokas minibankservice*, Besøkt 29.4.2014. side: <http://www.nokas.no/Produkter/Minibankservice/>.
- [17] Loomis Norge AS, *Nokas automatservice*, Besøkt 29.4.2014. side: <http://loomis.no/verditransport/loomis-automatservice/>.
- [18] B. Fiksdal, “Loomis-kontrakt for 100 millioner”, *NHO Service*, 10. jun. 2013, Besøkt 23.4.2014. side: <http://www.nhoservice.no/article.php?articleID=4420&categoryID=139>.
- [19] Proff.no, *Nokas as - aksjonærer*, Besøkt 31.5.2014. side: <http://www.proff.no/roller/nokas-as/t%C3%B8nsberg/vaktselskaper/Z0I3ZLFM/>.
- [20] K. Jansson, “Bankene bør øke prisene”, *DinSide*, 27. mai 2011, Besøkt 29.5.2014. side: <http://www.dinside.no/870405/bankene-bor-oke-prisene>.
- [21] Data Solutions Ltd., *Cash Management Optimization*, Besøkt 1.5.2014. side: <http://www.datasolutions.hu/en/solutions/cash-management-optimization/>.
- [22] bpc Group, *Smart ATM*, Besøkt 1.5.2014. side: <http://bpcbt.com/products/smartatm/>.
- [23] SAS, *SAS Forecast Server*, Besøkt 1.5.2014. side: http://www.sas.com/en_us/customers/dbs.html.
- [24] NCR, *APTRA OptiCash*, Besøkt 1.5.2014. side: <http://www.ncr.com/products/banking/cash-management/aptra-opticash>.
- [25] Wincor Nixdorf, *Cash cycle management*, Besøkt 1.5.2014. side: http://www.wincor-nixdorf.com/internet/site_EN/EN/Industries/FinancialInstitutes/CashCycleManagementSolutions/{\newline}CashCycleManagementSolutions_node.html.

- [26] Morphis, *MorphisCM*, Besøkt 1.5.2014. side: <http://www.morphisinc.com/atm/atm-management/187-forecast-balance-and-report/>.
- [27] Fiserv, *Integrated Currency Manager*, Besøkt 1.5.2014. side: <https://www.fiserv.com/insights-optimization/cash-logistics/integrated-currency-manager.aspx>.
- [28] Sautner & Partner, *CashPilotATM*, Besøkt 1.5.2014. side: <http://www.sautner.co.at/en/cashpilotatm.html>.
- [29] Fobiss, *Fobiss Cash Management*, Besøkt 1.5.2014. side: <http://fobiss.com/cash-management/>.
- [30] SpareBank 1 SMN, *SpareBank 1 SMN - Om banken*, Besøkt 26.3.2014. side: <https://www.sparebank1.no/smn/hovedside-om-oss-ir/om-banken/om-banken/sparebank-1-smn/>.
- [31] A. C. Hax og D. Candeia, *Production and inventory management*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [32] S. Minner, *Strategic safety stocks in supply chains*. Springer, 2000.
- [33] K. J. Kværner, “Nytt og nyttig, men ennå ikke nyttiggjort?”, *Magma*, nr. 2, s. 27–33, 2014.
- [34] H. M. Wagner og T. M. Whitin, “Dynamic version of the economic lot size model”, *Management Science*, bd. 50, nr. 12 Suppl. S. 1770–1777, 2004.
- [35] J. L. Higle, “Stochastic programming: optimization when uncertainty matters”, *Tutorials in operations research*, s. 30–53, 2005.
- [36] K. Inderfurth og S. Minner, “Safety stocks in multi-stage inventory systems under different service measures”, *European Journal of Operational Research*, bd. 106, nr. 1, s. 57–73, 1998.
- [37] M. K. El-Najdawi, “Empirical evaluation of safety stock policies”, *International Journal of Management and Systems*, bd. 9, s. 277–286, 1993.
- [38] N. Luthra og R. Roshan, “A New Framework for Safety Stock Management”, Cognizant, tekn. rapp., 2011.
- [39] G. B. Dantzig, “Linear programming under uncertainty”, *Management science*, bd. 1, s. 197–206, 1955.
- [40] A. Shapiro og A. Philpott, “A tutorial on stochastic programming”, *Manuscript. Available at www2.isye.gatech.edu/~ashapiro/publications.html*, 2007.

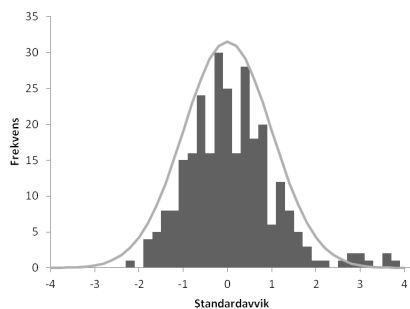
- [41] J. R. Birge og F. V. Louveaux, *Introduction to stochastic programming*. Springer, 1997.
- [42] A. Prékopa, *Stochastic programming*. Springer, 1995.
- [43] D. Bertsimas og M. Sim, “The price of robustness”, *Operations research*, bd. 52, nr. 1, s. 35–53, 2004.
- [44] A. Ben-Tal og A. Nemirovski, “Robust convex optimization”, *Mathematics of Operations Research*, bd. 23, nr. 4, s. 769–805, 1998.
- [45] A. L. Soyster, “Technical note—convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming”, *Operations research*, bd. 21, nr. 5, s. 1154–1157, 1973.
- [46] A. Ben-Tal og A. Nemirovski, “Robust solutions of uncertain linear programs”, *Operations research letters*, bd. 25, nr. 1, s. 1–13, 1999.
- [47] A. Shapiro, D. Dentcheva og A. P. Ruszczyński, *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. SIAM, 2009, bd. 9.
- [48] A. J. Keown og B. W. Taylor III, “A chance-constrained integer goal programming model for capital budgeting in the production area”, *Journal of the Operational Research Society*, nr. 7, s. 579–589, 1980.
- [49] R. Henrion, “Introduction to chance-constrained programming”, *Tutorial paper for the Stochastic Programming Community home page*, 2004.
- [50] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers og K. Ye, *Probability and statistics for engineers and scientists*, 8. utg. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [51] F. S. Hillier og G. J. Lieberman, *Introduction to operations research*, 9. utg. Tata McGraw-Hill Education, 2010.
- [52] T. Ericson og B. Halvorsen, “Etterspørselsvariasjoner i alminnelig forsyning ved endringer i pris, temperatur og sesonger”, Statistisk Sentralbyrå, tekn. rapp., 2008.
- [53] M. Wagner, “The optimal cash deployment strategy : modeling a network of automated teller machines”, masteroppg., Hanken School of Economics, 2007.
- [54] D. J. Du Toit, “Atm cash management for a south african retail bank”, masteroppg., Stellenbosch University, 2011.
- [55] Y. Altunoğlu, “Cash inventory management at automated teller machines under incomplete information”, ph.d.-avh., Bilkent University, 2010.

- [56] J. Castro, “A stochastic programming approach to cash management in banking”, *European Journal of Operational Research*, bd. 192, nr. 3, s. 963–974, 2009.
- [57] R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina, J. Friman og P. Drobinov, “Optimization of cash management for atm network”, *Information technology and control*, bd. 36, nr. 1A, s. 117–121, 2007.
- [58] R. Armenise, C. Birtolo, E. Sangianantoni og L. Troiano, “A generative solution for atm cash management”, i *Soft Computing and Pattern Recognition (SoCPaR), 2010 International Conference of, IEEE*, 2010, s. 349–356.
- [59] J. Lundgren, M. Rönnqvist og P. Värbrand, *Optimization*. Studentlitteratur, 2010.

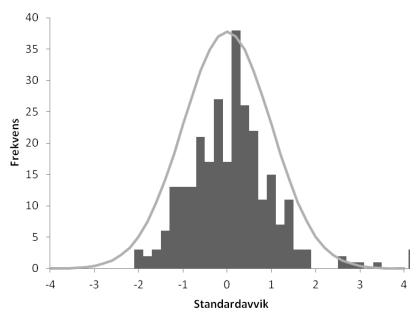
Tillegg A

Appendiks

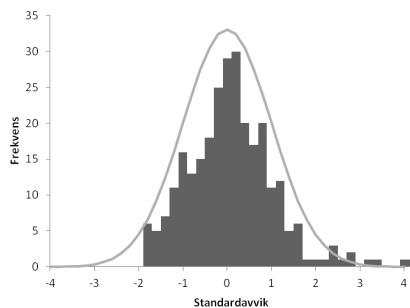
A.1 Tester for å avgjøre om etterspørselen er normalfordelt



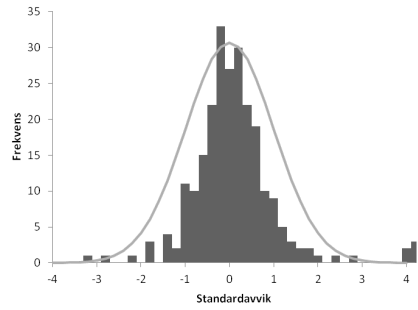
(a)



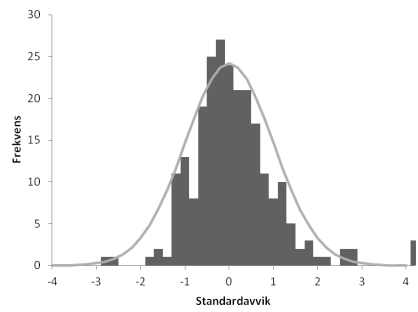
(b)



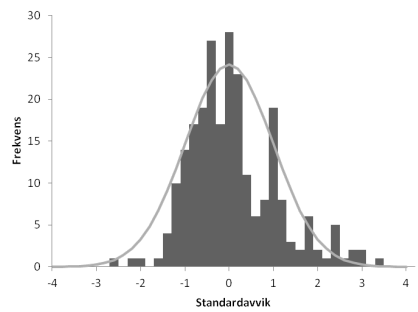
(c)



(d)

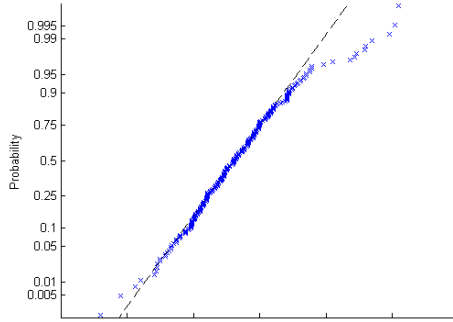


(e)

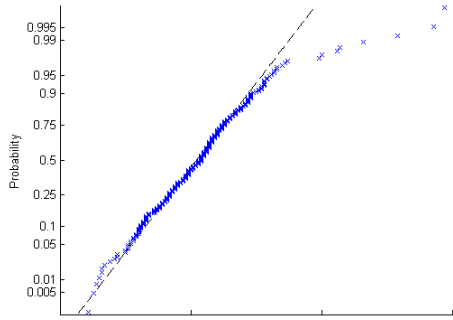


(f)

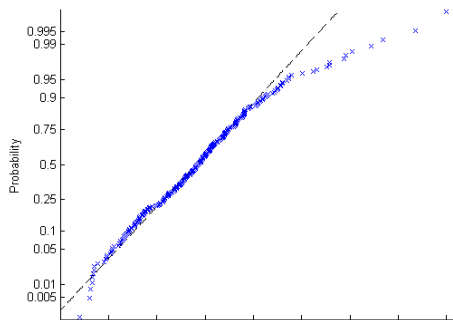
Figur A.1: Histogram av datagrunnlaget tilhørende MB2, A.1(a)-A.1(c), og MB3, A.1(d)-A.1(f), over etterspørselen per valør for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000.



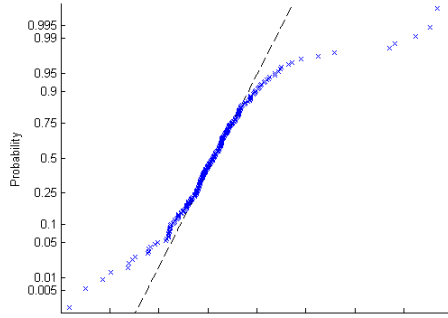
(a)



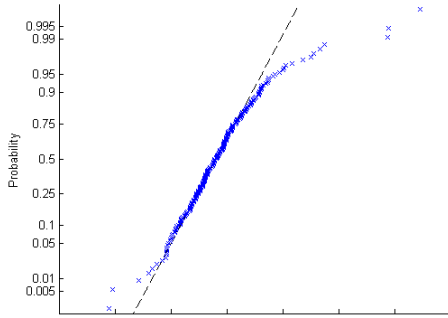
(b)



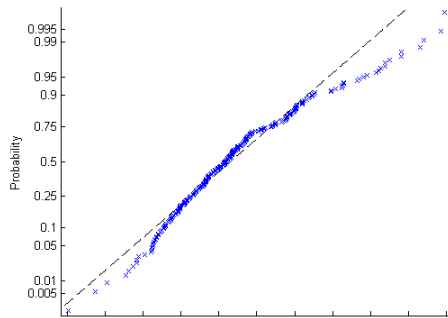
(c)



(d)



(e)

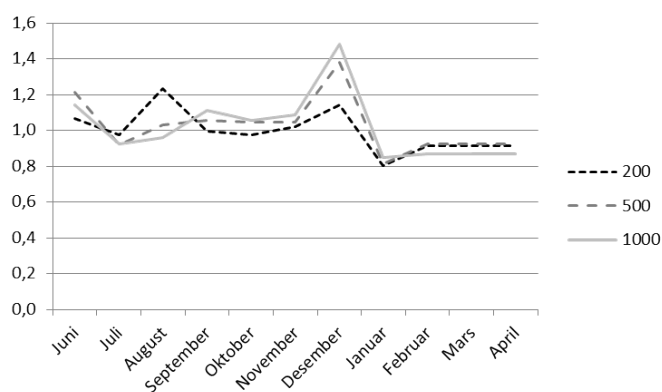


(f)

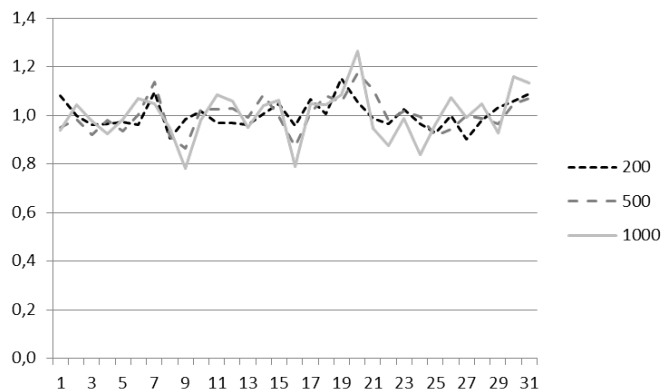
Figur A.2: pp-plot av datagrunnlaget tilhørende MB2, A.2(a)-A.2(c), og MB3, A.2(d)-A.2(f), plottet per valør for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000. Verdiene på x-aksen er sensitiv informasjon og er derfor sensurert.

Tabell A.1: Sesongfaktorer for ukedager for MB2.

Valør	Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lørdag	Søndag
200	0,976	0,913	0,971	0,911	1,134	1,046	0,730
500	0,972	0,939	0,956	0,930	1,203	0,993	0,512
1000	1,017	0,975	0,947	1,012	1,271	0,834	0,426



(a)

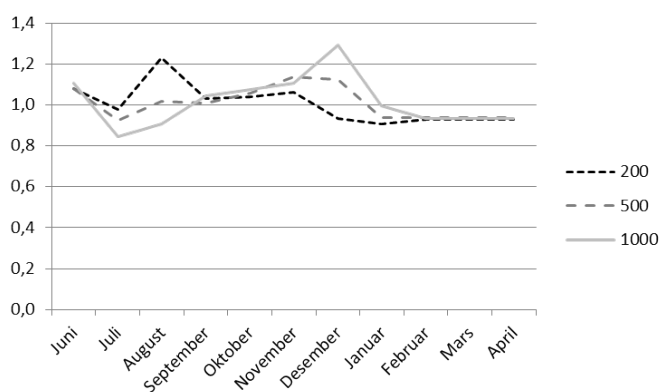


(b)

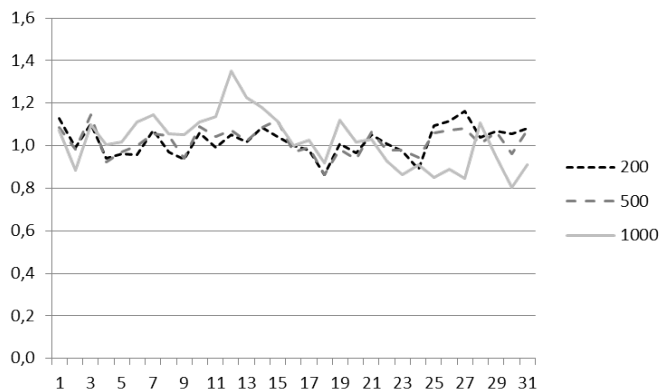
Figur A.3: Sesongfaktorer for MB2 per måned, A.3(a), og dato i måned, A.3(b).

Tabell A.2: Sesongfaktorer for ukedager for MB3.

Valør	Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lørdag	Søndag
200	0,983	0,957	1,057	1,012	1,074	0,861	0,000
500	0,944	0,946	1,041	0,996	1,033	0,849	0,000
1000	0,999	0,929	1,074	0,944	1,061	0,768	0,000

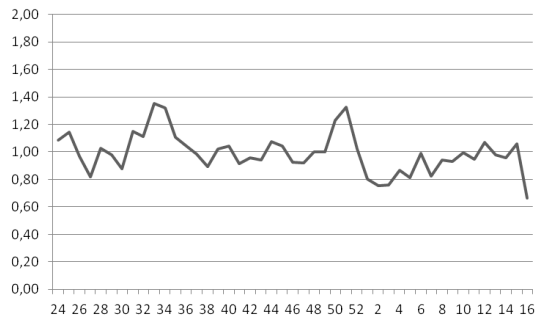


(a)

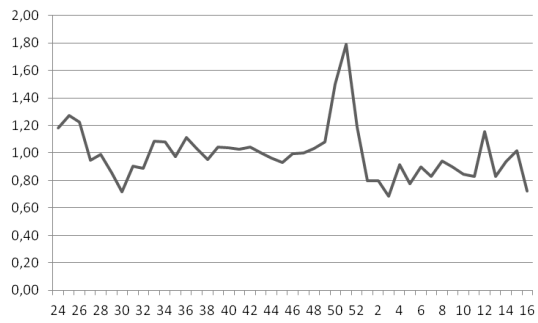


(b)

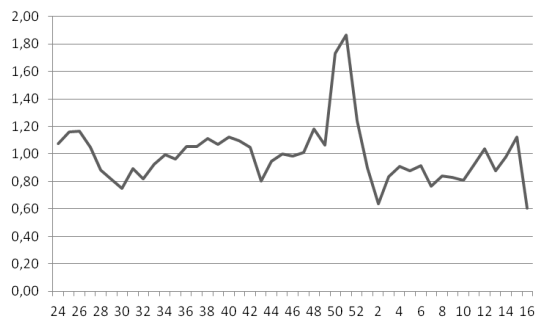
Figur A.4: Sesongfaktorer for MB3 per måned, A.4(a), og dato i måned, A.4(b).



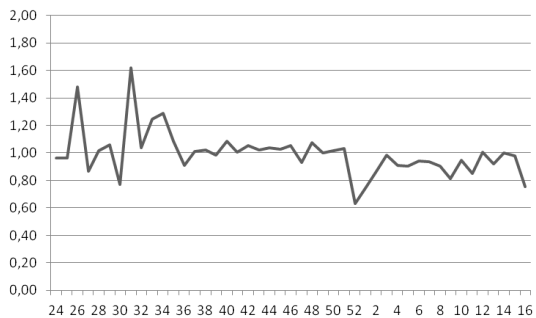
(a)



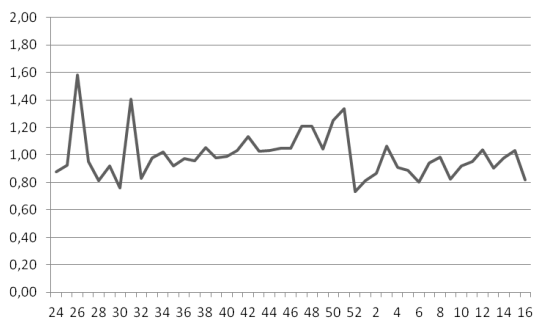
(b)



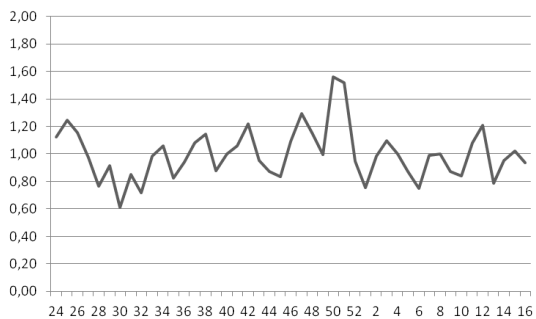
(c)



(d)



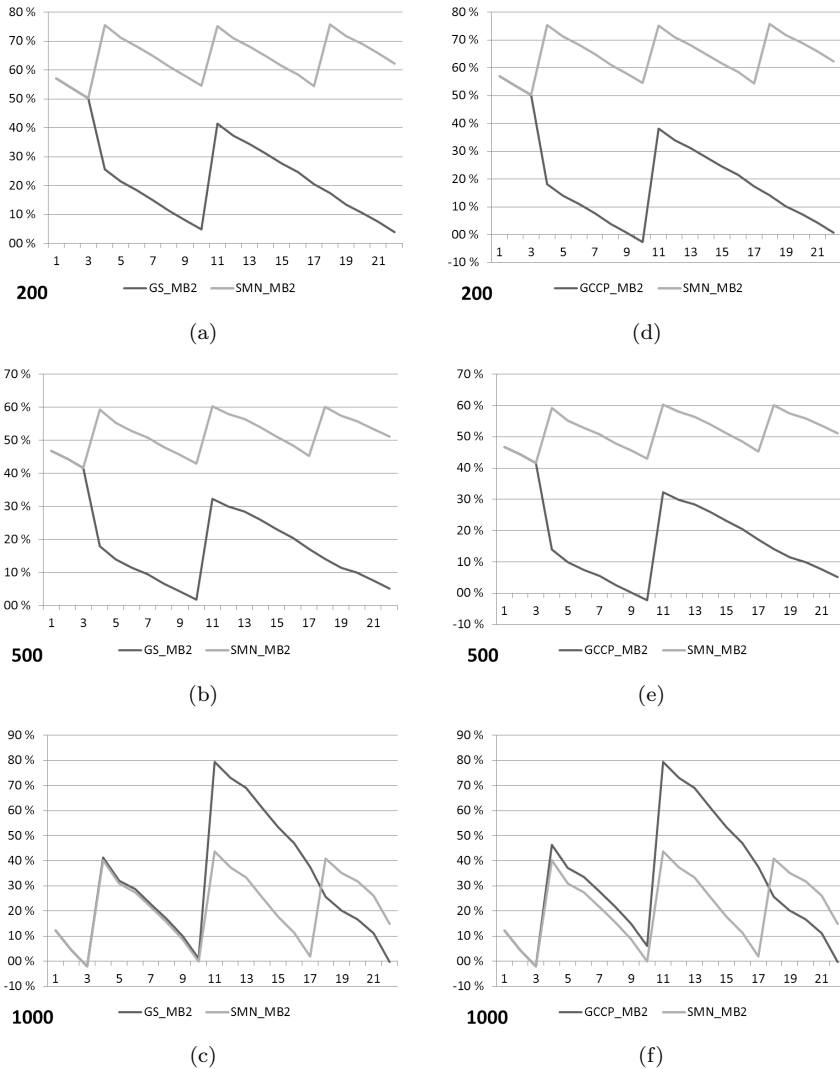
(e)



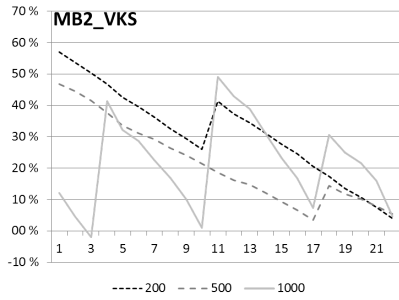
(f)

Figur A.5: Tidsrekke av datagrunnlaget tilhørende MB2, A.5(a)-A.5(c), og MB3, A.5(d)-A.5(f), plottet per valør for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000.

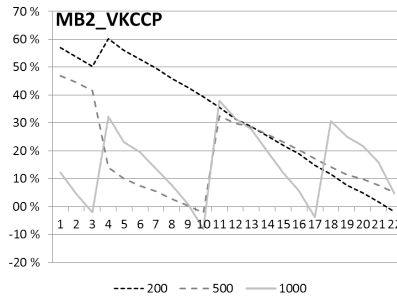
A.2 Resultater fra beregningsstudiet



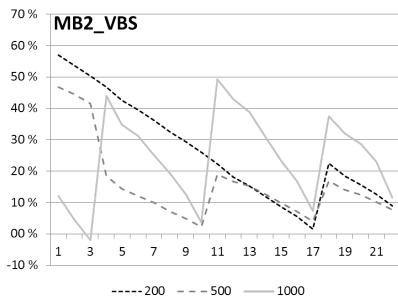
Figur A.6: Lagernivået per valør tilhørende MB2 i planleggingshorisonten for GS, A.6(a)-A.6(c), og GCCP, A.6(d)-A.6(f), for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000.



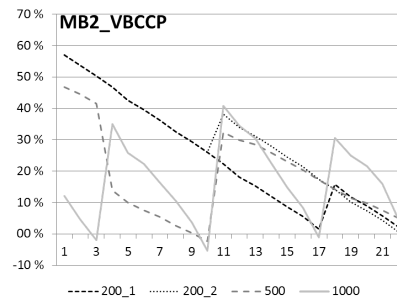
(a)



(c)

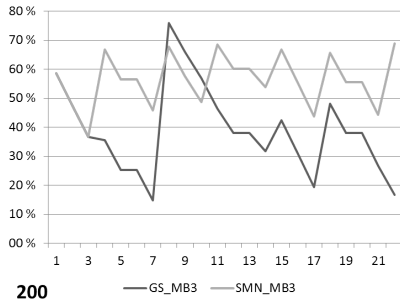


(b)

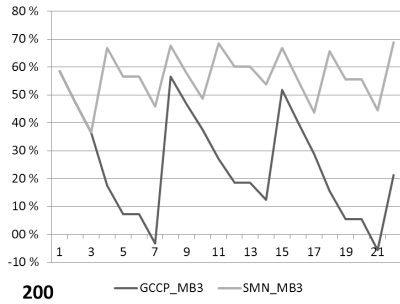


(d)

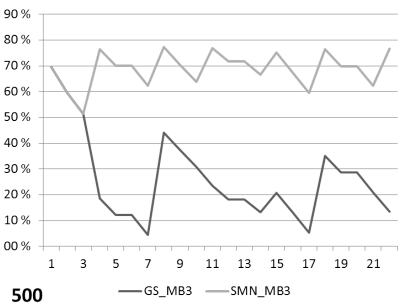
Figur A.7: Lagernivået per valør tilhørende MB2 i planleggingshorisonten for VKS, A.7(a), VBS, A.7(b), VKCCP, A.7(c), og VBCCP A.7(d). Figurene viser begge kassetter med valør NOK 200 i de tilfellene hvor lagernivået mellom disse er forskjellig.



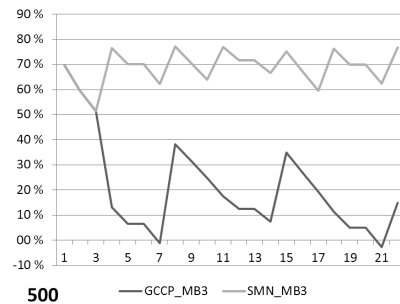
(a)



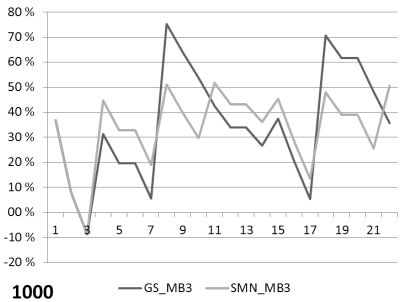
(d)



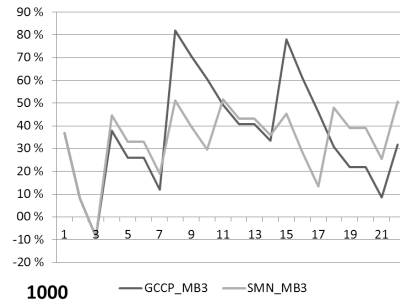
(b)



(e)

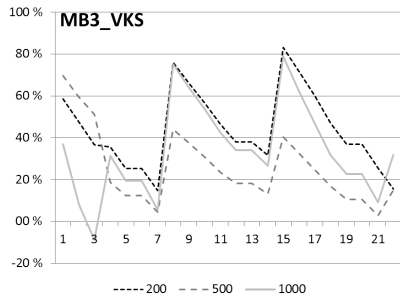


(c)

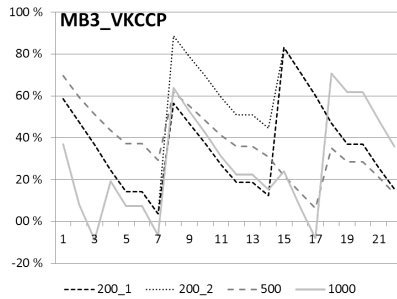


(f)

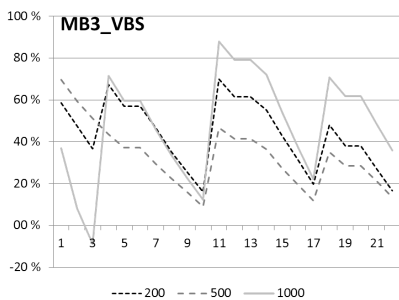
Figur A.8: Lagernivået per valør tilhørende MB3 i planleggingshorisonten for GS, A.8(a)-A.8(c), og GCCP, A.8(d)-A.8(f), for henholdsvis NOK 200, 500 og 1000.



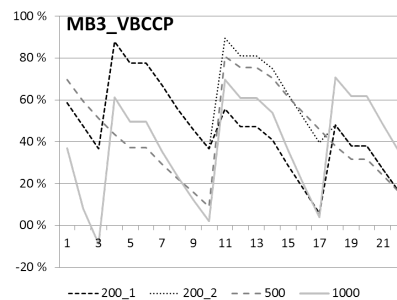
(a)



(c)



(b)



(d)

Figur A.9: Lagernivået per valør tilhørende MB3 i planleggingshorisonten for VKS, A.9(a), VBS, A.9(b), VKCCP, A.9(c), og VBCCP A.9(d). Figurene viser begge kassetter med valør NOK 200 i de tilfellene hvor lagernivået mellom disse er forskjellig.

Tabell A.3: Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes ved bruk av SMN sine valg og resultatene fra grunnmodellene og valgfri kassettpåfylling for MB3.

MB3	Besøksdager					
	3	7	10	14	17	21
SMN	200 %	246 %	298 %	180 %	220 %	226 %
GS	120 %	265 %	200 %	121 %	212 %	115 %
VKS	120 %	265 %	200 %	209 %	134 %	108 %
GCCP	115 %	258 %	192 %	188 %	108 %	112 %
VKCCP	114 %	258 %	192 %	125 %	211 %	114 %

Tabell A.4: Prosentandel av total, reell etterspørsel etter kontanter som dekkes ved bruk av resultatene fra VBS og VBCCP for MB3.

MB3	Besøksdager		
	3	10	17
VBS	119 %	130 %	107 %
VBCCP	117 %	130 %	108 %