Masteroppgave

Desember, 2019

Audun Grøtta Giske

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Audun Grøtta Giske

Et TDS-inspirert eksperiment innenfor sannsynlighetsregning

En didaktisk situasjon med intensjon om 1T-elevers utvikling av store talls lov

Desember 2019

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Kunnskap for en bedre verden

Et TDS-inspirert eksperiment innenfor sannsynlighetsregning

En didaktisk situasjon med intensjon om 1T-elevers utvikling av store talls lov

Audun Grøtta Giske

Master i realfag
Innlevert: Desember 2019
Hovedveileder: Heidi Strømskag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Med denne masteroppgaven fullfører jeg Lektorutdanningen i realfag ved NTNU. Arbeidet med denne oppgaven har vært innholdsrikt, spennende og utfordrende, men mest av alt lærerikt. Jeg synes det er en verdig markering på flotte studieår i Trondheim.

Jeg vil først av alt rette en stor takk til min veileder Heidi Strømskag for god veiledning gjennom hele prosessen. Du har hele veien gjort meg trygg på at jeg kom til å komme i mål med et produkt jeg kan være stolt av. Takk for inspirasjonen og motivasjonen du har gitt meg gjennom høsten. Dessuten vil jeg takke læreren og 1T-klassen jeg fikk besøke og gjennomføre prosjektet mitt på.

Videre ønsker jeg å takke medstudenter for å gjøre det mulig å komme seg gjennom et krevende studieløp. En spesiell takk går til Simon som har vært en god arbeids- og samtalepartner gjennom samtlige semester og eksamensperioder her på Gløshaugen.

Til slutt vil jeg få takke familie og kjæreste for all betingelsesløs støtte dere alltid gir meg.

Audun Grøtta Giske
Trondheim, desember 2019

Sammendrag

Denne oppgaven er et resultat av en studie hvor jeg har designet og implementert en didaktisk situasjon knyttet til sannsynlighetsregning. Designet og utviklingen er basert på Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk. Teorien for didaktiske situasjoner (TDS) er rammeverket jeg har brukt for å belyse hvilke faktorer ved undervisningssituasjonen som kan påvirke elevers mulighet til å oppnå en spesifikk målkunnskap. Den tilsiktede målkunnskapen omhandler "De store talls lov".

Eksperimentet er utført på forskningsdeltakere fra en 1T-klasse i matematikk. Studiens datainnsamling er en kombinering av observasjon, elevbesvarelser og intervju. Forskningsspørsmålet mitt er: *Hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer og hvilke faktorer muliggjør at elevene utvikler kunnskap om store talls lov?* Resultatene fra analysen viser at disse faktorene er delt inn i henholdsvis fem og fire underkategorier. Episoder jeg identifiserte som hindrende faktorer for at elevene oppnådde den tilsiktede målkunnskapen handler om gruppearbeid, materielt miljø, den designede situasjonen, logisk tenkning og misoppfatninger. Episoder som muliggjør oppnåelse av målkunnskapen handler om institusjonalisering, regulering, miljø med adidaktisk potensial og sammenhenger.

Studien min er et bidrag til hvordan man kan utvikle og designe undervisningssituasjoner innenfor store talls lov, der hensikten er at elevene skal lære en bestemt målkunnskap.

Abstract

This master thesis is a result of a study where I have designed and implemented a didactical situation about probability. The design and development are based on Strømskag's (2017b) model for instructional design in mathematics. The theory of didactical situations (TDS) is the framework I have used to elucidate which factors of the teaching situation that have influenced students' opportunity to achieve a specific target knowledge. The intended target knowledge is the Law of Large Numbers.

The experiment was conducted with research participants from a 1T class in mathematics. The study's data collection is a combination of observation, student solutions and interviews. My research question is: *Which factors in the designed teaching situation prevent and allow students to develop knowledge about the Law of Large numbers?* The results of the analysis shows that these factors are divided into five and four subcategories respectively. Episodes I identified as constraining factors for students achieving the intended target knowledge are about group work, material environment, the designed situation, logical thinking and misconceptions. Episodes I identified as enabling factors for students' achieving the target knowledge are about institutionalization, regulation, milieu with adidactical potential and relationships.

My study is a contribution to development and design of teaching situations within probability, where the intention is for students to learn a specific target knowledge.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Helt siden barndommen min og tiden som skoleelev og spillentusiast har jeg opplevd sannsynlighetsregning som et spesielt interessant og spennende tema. Alt fra kortspill, yatzy og brettspill til sannsynlighetsregning og kombinatorikk på skolen har fascinert og opptatt meg. I tillegg erfarer jeg i samtaler med praksiselever og medstudenter at dette er et tema mange sliter med å feste grepet om på videregående. Hvorfor akkurat dette emnet er mer utfordrende enn mye av den andre matematikken som presenteres i skolen, har jeg undret på i lang tid. Der annen matematikk har kunnskap som er grei å tilnærme seg, hører jeg stadig flere si at det å regne på sannsynlighet og kombinatorikk ofte kan være litt kontraintuitivt.

Borovcnik og Peard (1996) viser til tre forskjellige tenkemåter innen sannsynlighet: *logisk tenkning*, *sannsynlighetstenkning* og *årsakstenking*. Logisk tenkning er måten man tenker på innen vitenskap. Et logisk utsagn er enten korrekt eller galt. Argumentasjonen som blir brukt innen denne typen tenkning baserer seg på logisk resonnering og bærer preg av "på grunn av det og det, får vi det og det". Sannsynlighetstenkning dreier seg om utsagn der man ikke kan vite resultatet av en hendelse A før man faktisk har gjennomført forsøket. På forhånd snakker man om sannsynligheten for at hendelsen A skal inntreffe. Et vanlig område for denne typen tenkning er innenfor *stokastiske forsøk*. Dette kommer jeg tilbake til senere. Det ligger i ordet årsakstenkning at det handler om å lete etter en grunn for at noe skjer. Man prøver å finne relasjoner mellom årsak og virkning. I dagliglivet og i mye av naturfagene for eksempel, er årsakstenkning mye brukt.

En uheldig blanding av disse ulike måtene å tenke på mener Borovcnik og Peard (1996) bidrar til at elever kan oppleve sannsynlighetsregning som utfordrende. Dette kan gi grunnlag for ulike misoppfatninger innenfor temaet. Med tanke på at "Statistikk, sannsyn og kombinatorikk" er ett av seks hovedområder i dagens læreplan i matematikk fellesfag for grunnskole og videregående (Utdanningsdirektoratet, 2013), er det utvilsomt et problem om sannsynlighetsregning oppleves kontraintuitivt. I det nye læreplanverket i matematikk for grunnskolen er "Statistikk og sannsyn" en av fem matematiske kunnskapsområder. "*Kunnskap om statistikk og sannsyn gir elevane eit godt grunnlag når dei skal gjere val i sitt eige liv, i samfunnet og i arbeidslivet.*" (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Gal (2005) peker på to gode grunner til å undervise sannsynlighet i skolen. Den første er at sannsynlighetsregning er fundamentalt for å kunne lære om mer avanserte emner innen statistikk og forskning. Den andre er at å lære om sannsynlighet er viktig for å forberede elever på livet, siden sannsynlighet og tilfeldigheter gjennomsyrer omgivelsene våre.

I fjor høst gjennomførte jeg en pilotstudie hvor jeg undersøkte hvilke utfordringer og misoppfatninger elever kunne ha i møte med sannsynlighetsregning på videregående. Jeg fikk en klasse med R1-elever til å svare på et oppgavesett med diagnostiske oppgaver, som er oppgaver laget nettopp for å identifisere og fremheve misoppfatninger hos elever (Brekke 2002). Resultatet i pilotstudien var at misoppfatninger fortsatt i stor grad preget elever sitt syn på sannsynlighet.

1.1 Forskningsspørsmål

I lys av dette ønsket jeg å få mer forståelse av og innsikt i hvordan man kan designe undervisningssituasjoner i sannsynlighet og statistikk for å oppnå kunnskapsutvikling hos elevene. Dessuten ønsket jeg å få mer erfaring på det å planlegge, tilrettelegge og gjennomføre undervisningsopplegg, ettersom jeg selv skal bli lærer. Oppgaven min baserer seg på Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk, som bygger på prinsippet om å designe en situasjon med et tilhørende problem som kan løses på en optimal måte med en gitt målkunnskap. Det teoretiske rammeverket som ligger til grunn er teorien for didaktiske situasjoner (TDS, Brousseau, 1997). Metodologien som er brukt kan deles i fire. De to første fasene er at jeg før gjennomføringen av opplegget gjorde en epistemologisk og didaktisk analyse, samt designet en didaktisk situasjon. Etter dette kom realiseringen i klasserommet og til slutt en a posteriori analyse.

Hensikten med prosjektet mitt var å teste validiteten til en egendesignet undervisningssituasjon der elevene skulle utvikle kunnskap om "De store talls lov". Dette gjøres ved å sammenligne a priori og a posteriori analyser. Jeg ønsker å se på hvordan min egendesignede undervisningssituasjon er tilpasset til å utvikle kunnskap om store talls lov i en 1T-klasse.

Mitt forskningsspørsmål er:
Hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer og hvilke faktorer muliggjør at elevene utvikler kunnskap om store talls lov?

2 Teoretisk rammeverk: Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk

Det teoretiske rammeverket denne oppgaven tar utgangspunkt i er Guy Brousseaus teori for didaktiske situasjoner i matematikk (Brousseau, 1997, som sitert i Strømskag, 2017a). TDS handler om aspekter som inngår i en undervisningssituasjon der særegenheten til en bestemt målkunnskap er avgjørende, og er utviklet i Frankrike fra 1970-årene (Strømskag, 2017a). TDS knytter sammen de didaktiske relasjonene mellom læreren, elevene og den tilsiktede målkunnskapen. Dermed egner denne teorien seg til å forstå hvilke faktorer i en didaktisk undervisningssituasjon som kompliserer og muliggjør elevers mulighet til å oppnå denne målkunnskapen (Artigue, Haspekian & Corblin-Lefant, 2014).

Tanken bak TDS er at teorien kan brukes som et rammeverk til å designe matematikkundervisning/-oppgaver hvor man lager en (fundamental) *situasjon* der man får bruk for den tilsiktede kunnskapen eller begrepet til å kunne løse oppgaver på en optimal måte (Strømskag, 2017a). Det metodologiske prinsippet krever altså en epistemologisk antakelse om at denne konkrete målkunnskapen kan representeres gjennom situasjonen som designes.

I TDS er matematikken i seg selv og dens epistemologi sentral, men prinsippene i teorien som representerer elevperspektivet står også sterkt. Det at elevene ser oppgavens *anvendelse* og *hensikt* (Artigue et al., 2014), og at engasjementet og fokuset elevene har til oppgaven blir påvirket av *miljøet* (den intellektuelle og materielle virkeligheten elevene opererer i) heller enn læreren (Strømskag, 2017b), er to slike viktige prinsipper.

2.1 Begreper i TDS som er relevante for studien

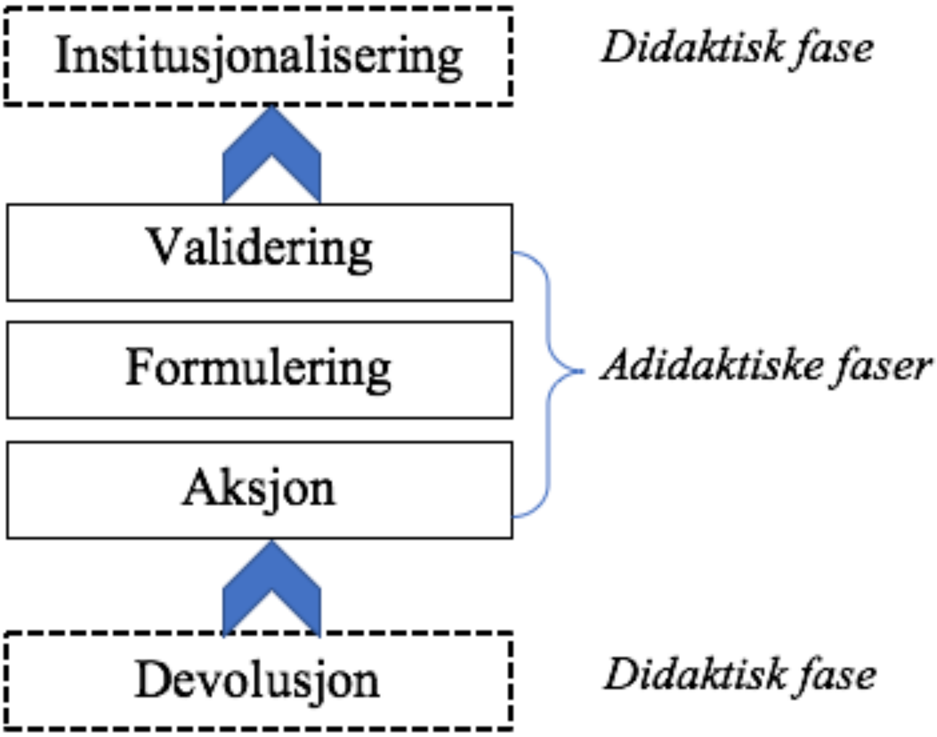
For å forstå TDS er det flere sentrale kjernebegreper man må kjenne til. Derfor er det hensiktsmessig å beskrive disse begrepene som er relevante for studien min.

Begrepet *adidaktisk situasjon* er ifølge Artigue et al. (2014) en situasjon som skal sørge for at elevene selv skal ta ansvar for å løse et bestemt matematisk problem uten at de ser lærerens intensjon med oppgaven, og at læreren ikke påvirker elevene med veiledning underveis. *Miljøet* elevene opererer i involverer de komponentene som påvirker elevens læring. Disse faktorene må være knyttet til den bestemte målkunnskapen, og består av fysiske og intellektuelle tilgjengelige redskaper som for eksempel utstyr, andre elever, regler i klasserommet eller elevens forkunnskaper (Strømskag, 2017a). Miljøet i en adidaktisk situasjon kalles et adidaktisk miljø. Et adekvat adidaktisk miljø har som hensikt å gi eleven feedback slik at eleven kan korrigere seg selv. Det går ut på at miljøet skal være designet på en slik måte at elevene skal kunne se om de har funnet en strategi for å løse problemet på en optimal måte, uten intervensjon fra læreren. Dersom dette er tilfellet har miljøet det som kalles et *adidaktisk potensial* (Strømskag, 2017a).

Brousseau (1997) skriver at læreren har to hovedoppgaver utover det å lede utviklingen av den adidaktiske situasjonen, nemlig *devolusjon* og *institusjonalisering*. Å devoluere er en adidaktisk situasjon som går ut på å introdusere elevene for situasjonen og problemet, gi de ansvar for å selv finne løsningen på problemet og å informere om den *didaktiske kontrakten* (Strømskag, 2017a). I utviklingen av dette begrepet så man at elev-lærer-interaksjonen er underlagt flere regler med tanke på den aktuelle matematiske kunnskapen. Disse oftest implisitte reglene kan omtales som uskrevne regler i klasserommet og utgjør enkelte gjensidige forpliktelser og forventninger som forhandles frem. Sammen danner den didaktiske kontrakten og en adidaktisk situasjon en *didaktisk situasjon* (Artigue et al., 2014). Institusjonalisering av kunnskapen elevene jobbet med i problemet går ut på at læreren skaper en overgang fra den kontekstbaserte kunnskapen slik at den kan brukes i andre situasjoner (Strømskag, 2014). Læreren sørger for at den gitte målkunnskapen generaliseres og viser at den kan brukes i ulike situasjoner. Dette kan være å introdusere en matematisk terminologi eller vise til hensiktsmessige matematiske definisjoner og resultat.

Mellom de to didaktiske situasjonene (fasene), devolusjonen og institusjonaliseringen, er det tre (ideelt sett) adidaktiske faser der lærerens rolle endres og kunnskapens status blir mer konkret og eksplisitt. Disse tre adidaktiske fasene er aksjonssituasjonen, formuleringssituasjonen og valideringssituasjonen. I *aksjonssituasjonen* engasjerer elevene seg i problemet på grunn av oppgavens egenart uten innblanding av læreren. Det lages en representasjon av situasjonen som blir som en modell av kunnskapen som igjen vil hjelpe elevene i videre avgjørelser (Strømskag, 2017). *Formuleringssituasjonen* handler om at elevene skal formulere en strategi som gjør at noen andre kan operere på miljøet med samme strategi. Her blir det læreren sin oppgave å gjøre de ulike formuleringene i klasserommet synlig for alle. I *valideringssituasjonen* forsøker elevene å forklare et fenomen eller verifisere en formodning (Strømskag, 2017b). Her skal læreren ideelt sett ikke fortelle hva som er riktig eller galt, men fungere som ordstyrer i en vitenskapelig debatt. Hvis behovet for begrunnelse kommer fra læreren, vil det være en didaktisk fase.

Figur 1 viser en modell av forløpet i en ønsket undervisningssituasjon basert på TDS. I starten devoluerer læreren den adidaktiske situasjonen, før de tre adidaktiske fasene følger. Her får elevene eierskap og tar del i det matematiske problemet før de får fremgang i kunnskapen. Til slutt institusjonaliserer læreren aktiviteten elevene har hatt i de adidaktiske fasene. Men det kan forekomme reguleringer og tilpasninger etterhvert.



Figur 1. Modell av forløpet i en undervisningssituasjon

3 Metode

Dette prosjektet hadde som hensikt å legge til rette for at elever i en matematikk 1T-klasse skulle oppnå kunnskapen om store talls lov gjennom en didaktisk situasjon som var designet av meg. Forsøket elevene skulle gjennomføre er inspirert av Brousseau et al. (2002) sitt forsøk i en fransk klasse som gikk ut på at elevene fikk vite at det var til sammen 5 svarte og hvite gjenstander i en pose. De fikk ikke vite sammensetningen av hvor mange det var av hver farge, men målet var at de skulle prøve å finne ut av dette gjennom å gjøre mange trekninger. Noe lignende eksperiment har ikke blitt gjennomført i Norge, og med dette som utgangspunkt tenkte jeg det kunne være interessant å finne svar på forskningsspørsmålet: "Hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer og hvilke faktorer muliggjør at elevene utvikler kunnskap om store talls lov?"

Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk ligger til grunn for metodologien i opplegget i situasjonen jeg har designet. Utover det er *didaktisk ingeniørvirksomhet* (Artigue, 2015; Strømskag, 2017b) helt sentralt for metodologien jeg bruker i denne studien. Her skriver Artigue (2015) at den er delt inn i følgende ulike deler; forhåndsanalyse, oppfatning og *a priori* analyse, realisering, observasjon og datainnsamling, *a posteriori* analyse og validering. Validiteten til opplegget jeg utfører på matematikk 1T-klassen kommer til å bli testet ved å sammenligne a priori og a posteriori analysene. Slik får jeg sjekket om situasjonen jeg designer er gyldig. Hva disse analysene går ut på forklarer jeg senere i kapitlet.

Denne studien er en småskala kvalitativ studie med fastsatt design. Det som kjennetegner en kvalitativ studie er arbeid med og innsamling av ord, med lite bruk av statistisk analyse og talldata (Robson & McCartan, 2016). Med tanke på at jeg skal analysere elevbesvarelser, videoopptak av interaksjon mellom elever i en designet undervisningssituasjon, lærerens handlinger under opplegget, samt intervju med elever går studien min under denne kategorien. Postholm (2005, s.86) mener at analysen ofte vil preges av forskerens egne perspektiver og at det derfor er intensjonen til kvalitative analyser at forskeren møter datamateriale med åpent sinn. Det som kjennetegner et fastsatt design er at det ofte er lengre perioder med forberedelse av designet der man bestemmer hvilke oppgaver eller spørsmål man skal stille før man har samlet inn noe datamateriale. Deretter kommer en betydelig analyseperiode etter datainnsamlingen (Robson & McCartan, 2016, s.103).

3.1 Design innen TDS

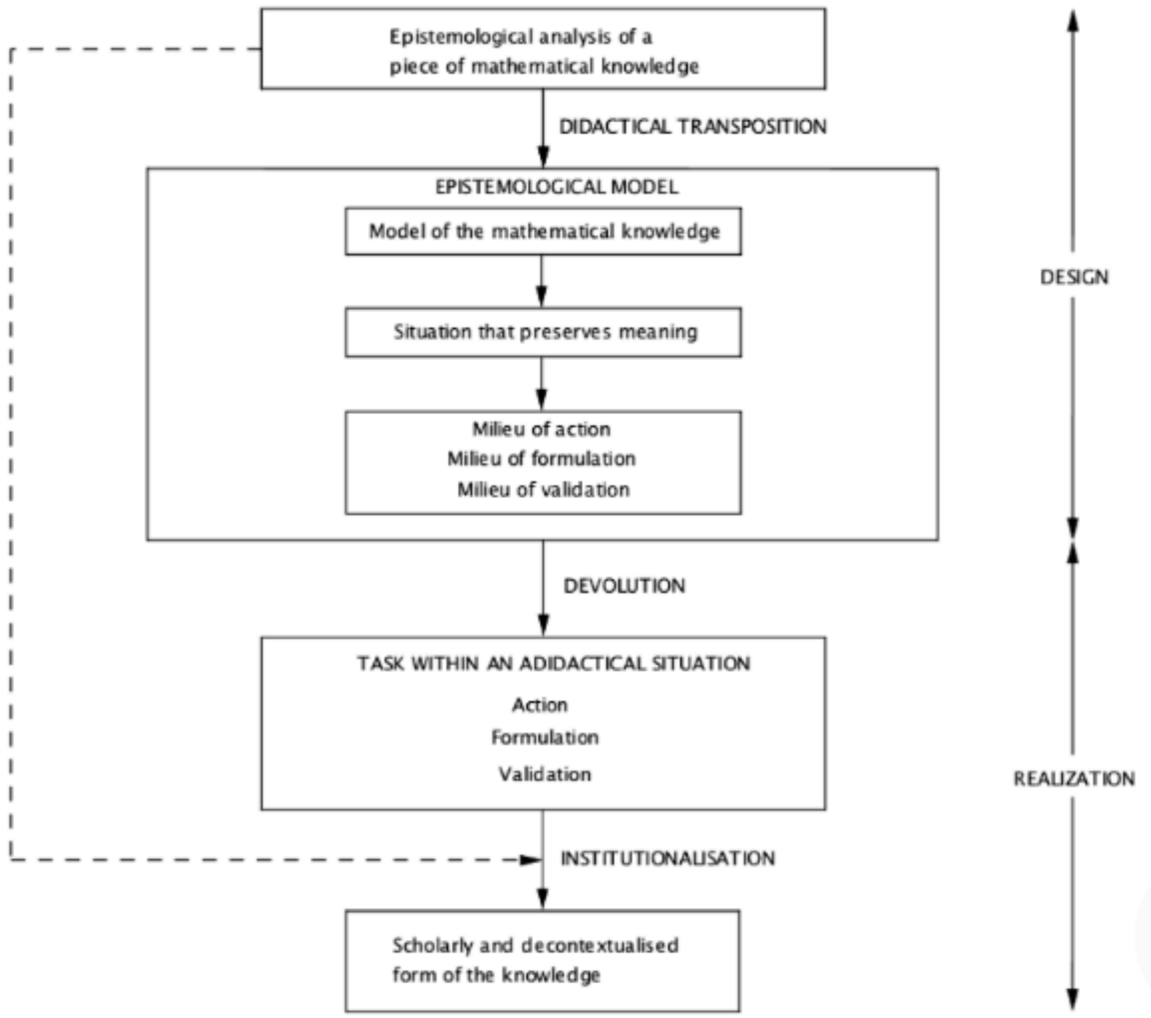
Første steg i å designe et undervisningsopplegg innenfor rammeverket til TDS er å gjennomføre en *epistemologisk analyse* av den matematiske målkunnskapen (Strømskag 2017b). Dette innebærer to ting: En analyse av kunnskapen i seg selv og en didaktisk analyse. I analysen av målkunnskapen ønsker man å finne epistemologiske hindringer. Dette er former for kunnskap som er relevant og fungerer i enkelte kontekster, men som på et visst tidspunkt blir feil eller utilstrekkelig. Man finner typisk igjen epistemologiske hindringer i skolematematikken (Brousseau, 1997, som sitert i Artigue et al., 2014). Det er også ønskelig å finne fundamentale situasjoner. Dette er en matematisk situasjon for et gitt begrep, der begrepet i seg selv støtter opp under en optimal løsning (Artigue et al., 2014). Den didaktiske analysen går ut på å studere hvilke didaktiske innfallsvinkler som kan være førende for designet av undervisningsopplegget, samt å se nærmere på hva tidligere forskning på området viser.

Andre fase skriver Strømskag (2017b) at handler om utviklingen av en *epistemologisk modell* av målkunnskapen og skal være basert på utkommet av den epistemologiske analysen. Denne fasen forklarer hun at igjen består av tre komponenter. Den første er en modell av målkunnskapen, gjerne en ikonisk representasjon; den andre er å lage en situasjon som både virker meningsfull og involverer en oppgave som kan løses optimalt ved hjelp av målkunnskapen; den tredje er miljøer for aksjons-, formulerings- og valideringssituasjonene, designet på en slik måte at elevene skal oppnå en mer matematisk form for kunnskap (Strømskag, 2017b).

Den epistemologiske modellen sies å være basisen for lærerens devolusjon, noe som finner sted under den tredje fasen Strømskag (2017b) nevner, nemlig *implementering* i klasserommet. Her får man se elevenes faktiske interaksjoner med miljøene for aksjons-, formulerings- og valideringssituasjonen. Under devolusjonen mener hun målet er at elevene skal trenge målkunnskapen for å lykkes samtidig som de innser at det finnes bruksområder for den.

Fjerde og siste fase handler om *institusjonalisering*. Strømskag (2017b) skriver at denne fasen innebærer å informere elevene om formell matematisk terminologi, definisjoner og resultater. Det skjer altså en akkulturasjon der elevene blir kjent med matematikken på et dypere nivå slik at de kan forstå viktigheten og poenget med den oppnådde målkunnskapen og i hvilke sammenhenger den kan brukes (Strømskag, 2017b).

Figur 2 er en modell av Strømskag (2017b) sin modell for instruksjonsdesign i matematikk som tar for seg de ulike stegene, eller fasene av en situasjon som bevarer mening for en spesifikk del av en matematisk kunnskap.



Figur 2: Modell for instruksjonsdesign i matematikk. Hentet fra Strømskag (2017b; s. 912).

3.2 A priori og a posteriori analyser

For å undersøke validiteten til undervisningssituasjonen vil det gjøres en a priori og a posteriori analyse, og en sammenligning av disse.

A priori analysen går ut i fra planleggingen av implementeringen (devolusjon, regulering og institusjonalisering), samt den epistemologiske modellen. Ulike beslutninger som tas i designutviklingen skal komme til syne i a priori analysen, i tillegg til å se på didaktiske variabler som kan påvirke muligheter elever har til å nå den gitte målkunnskapen. Artigue (2015) beskriver *didaktiske variabler* som de faktorer som kan virke på elevens læringsutbytte som en lærer har kontroll på. Videre er målet å utarbeide antagelser rundt utvikling av situasjonen, interaksjon eleven har med miljøet (fysisk og intellektuelt), kunnskapsutvikling og løsningsstrategier, og til slutt utarbeidingen av en didaktisk kontrakt mellom elever og læreren (Artigue, 2015). Det er viktig at eleven som inntar situasjonen har en viss bakgrunnskunnskap slik at de har forutsetning for å innta den nye målkunnskapen, og at den a priori analysen tar utgangspunkt i en *generisk* og *epistemisk* elev, altså tenkte elever (Artigue, 2015; Strømskag, 2017b). Målet er ikke å se på hvordan den enkelte elev, med dens særegenhet vil oppføre seg og dra nytte av situasjonen, men heller hva situasjonen a priori kan tilby av muligheter for å lære en ønsket målkunnskap ut fra en bestemt kontekst.

Etter realiseringen blir det gjort en *a posteriori* analyse. Margolinas & Drijvers (2015) skriver at denne analysen tar utgangspunkt i datamaterialet fra realiseringen i klasserommet. Det blir sett på hva som faktisk skjedde under realiseringen av opplegget. Om det gikk som planlagt, hvilke eventuelle reguleringer som ble gjort underveis og om de adidaktiske fasene gav tilstrekkelig med feedback (Artigue, 2015).

3.3 Forskningsdeltakere

Jeg kom med en forespørsel til en lærer på en videregående skole i Trøndelag om å få lov til å gjennomføre denne datainnsamlingen i klassen hennes. Dette var hun positiv til og jeg fikk dermed utført den egendesignede situasjonen i en matematikk 1T-klasse med 30 elever. Klassen hadde mattetimer på fredager og tirsdager, dermed fikk jeg bruke disse timene til gjennomføring av eksperimentet mitt.

Jeg lot faglæreren på forhånd dele klassen opp i grupper ettersom hun hadde mer kjennskap til klassen enn hva jeg hadde. Hun var tilstede under hele seansen som passiv tilskuer bakerst i klasserommet. Elevene hadde ikke hatt om temaet sannsynlighet og statistikk enda, så opplegget mitt ble brukt for å vekke nysgjerrighet og motivasjon for temaet.

Det var 28 av elevene som var tilstede under realiseringen av opplegget. Klassen satte seg i de ulike gruppene, og det endte opp med 4 treer-grupper og 4 firer-grupper. Jeg gjorde videoopptak av devolusjonen, to av gruppene under de (tiltenkte) adidaktiske fasene, og institusjonaliseringa på fredagen (01.11.19). Samtlige navn i oppgaven er fiktive. Gruppe 1 besto av Jonas, Maren og Thea; mens Gruppe 2 besto av Pål, Lene og Ane. Tirsdagen (05.11.19) gjennomførte jeg gruppeintervju med tre grupper: Gruppe 2, Gruppe 3 (Petter, Tom og Erling) og Gruppe 4 (Trine, Hanne og Per). De resterende gruppene var med i helklassesekvensene, dessuten leverte de inn oppgaveheftene med svarene sine.

Min rolle i dette prosjektet er at jeg har stått for planleggingen (sammen med veileder), vært læreren som gjennomførte undervisningsopplegget og samtidig vært den som evaluerte og analyserte opplegget og datamaterialet. Ettersom jeg er såpass delaktig i alle aspekter ved forskningsprosjektet har jeg forsøkt å være bevisst på å være subjektiv gjennom prosessen. Jeg kunne latt en annen lærer gjennomføre realiseringen slik at elevene fikk en lærer de kjente til, men ettersom den epistemologiske analysen og a priori analysen har en sentral rolle i TDS og jeg hadde svært god kjennskap til dette etter å ha arbeidet med det på forhånd, så jeg det som mest hensiktsmessig å bruke meg selv i lærerrollen. Dette, kombinert med at det var satt opp videokamera i klasserommet gjorde at elevene kunne oppfatte situasjonen som noe unormal, og man kan se at de enkelte ganger ser inn i kameraet og snakker om dets tilstedeværelse. Dette kan ha påvirket elevenes interaksjon og samhandlinger under realiseringen av opplegget og dermed påvirket datamaterialet.

3.4 Datamateriale

Denzin (1997) skriver at en kombinering av de tre ulike datakildene observasjon, elevløsninger og intervju kalles for *datatriangulering*. Dette er de ulike datakildene jeg har brukt i min studie for å forsøke å finne ut hvordan den designede situasjonen var egnet til å utvikle kunnskap om store talls lov. Videre skriver han at å hente inn datamateriale fra tre ulike datakilder kan bidra til å øke validiteten i en studie. Instrumentene jeg brukte for innsamling av data var to videokameraer, materielt utstyr og oppgavehefte, meg selv som lærer og en intervjuguide (Vedlegg A).

Slik omstendighetene var, tenkte jeg det var mest hensiktsmessig å fokusere filmingen i de adidaktiske situasjonene på to av gruppene. Før timen startet satte jeg opp to videokamera på stativ foran bordet til de to fremste gruppene slik at jeg fikk sett og hørt de elevene som var på det bordet samtidig som jeg fikk tatt opp det som ble sagt under helklassesekvensene av andre elever. Dette gjorde at jeg i etterkant fikk mulighet til å se hvordan elevenes samarbeid, interaksjon og framgangsmåte var. Under helklassesekvensene vendte jeg det ene kameraet fremover mot meg og tavla. Det som viste seg etter gjennomføringen var at Gruppe 2 dessverre knapt kunne høres. Dette kom nok delvis av at de snakket lavt og delvis fordi kameraet var litt for langt unna, noe som gjorde at støy og andre elever i klasserommet høres langt bedre. Derfor valgte jeg å la denne gruppen være en av de tre gruppene jeg intervjuet.

Ved å samle inn oppgaveheftene og presisere at alle gruppene måtte skrive så utfyllende som mulig sørget jeg for at jeg fikk et innblikk i hva elevene hadde tenkt, også de som ikke ble filmet. I tillegg gjorde det at jeg fikk et bredere perspektiv på hvilke ulike svar og framgangsmåter elevene hadde på de ulike oppgavene.

For å få mer dybde i datamaterialet ønsket jeg å intervjue noen av gruppene. Ettersom Gruppe 1 ikke ønsket å bli intervjuet og Gruppe 2 knapt kunne høres på videopptaket ble det til at jeg intervjuet Gruppe 2, 3 og 4. De tre gruppene ble tatt ut av timen hver for seg og intervjuet etter hverandre på tirsdagen (05.11.19). Hvert av intervjuene varte i 10-15 minutter. Før intervjuene hadde jeg forberedt temaer og underspørsmål hvor spørsmålene gikk ut på hva jeg hadde observert både fra gjennomføringen og elevbesvarelser. Dette kalles en *semi-strukturert tilnærming* for intervju (Sollid, 2013). I tillegg til de spørsmålene jeg hadde utarbeidet og forberedt på forhånd stilte jeg noen oppfølgingsspørsmål der jeg synes det var naturlig og hensiktsmessig. For å få utfyllende svar er oppfølgingsspørsmål essensielle (Postholm & Moen, 2009). Dessuten brukte jeg *stimulated recall* (Calderhead, 1981) ettersom jeg tok med meg både gruppens oppgavehefte og boksen med kulene i til gruppeintervjuene slik at de kunne svare ut i fra det.

Det at jeg har videoopptak av én gruppe, mens intervjuene er fra andre grupper påvirker resultatene mine i den forstand at jeg ikke fikk mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål knyttet til episoder som oppstod i arbeidet til den gruppen som ble filmet. Dersom jeg hadde fått intervjuet Gruppe 1, kunne jeg oppnådd en større forståelse rundt de situasjonene som utpekte seg som relevante med tanke på å besvare forskningsspørsmålet.

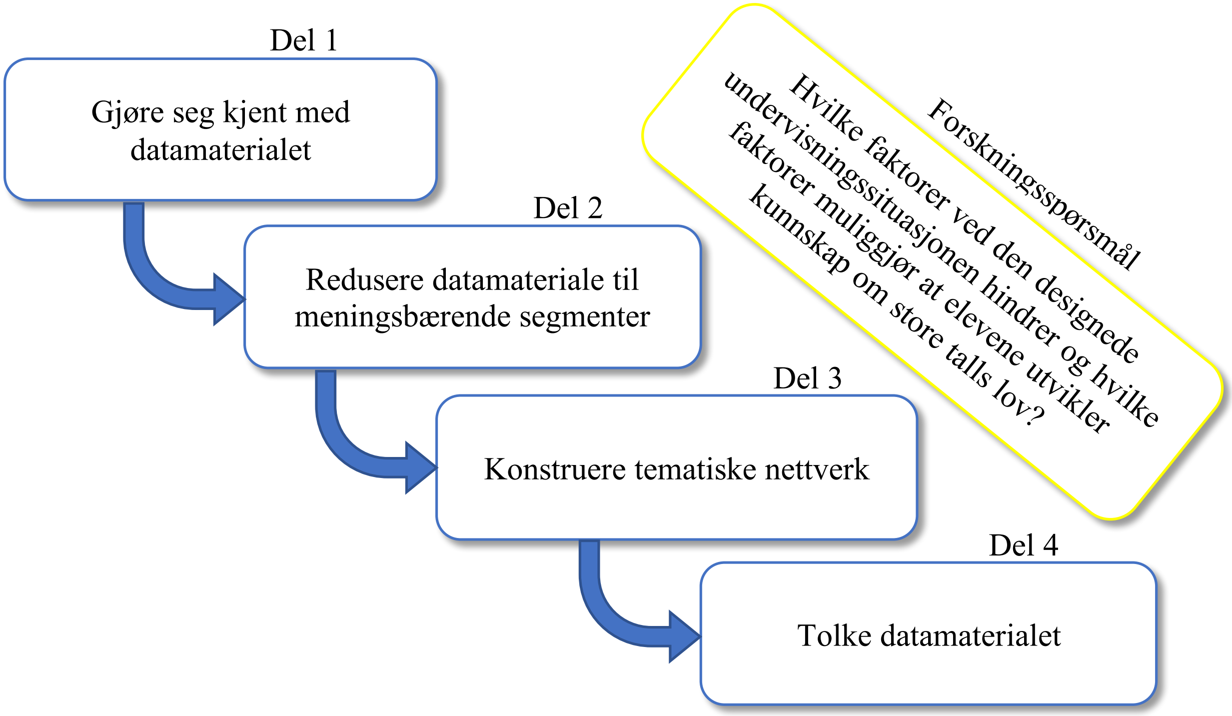
I a posteriori analysen er ytringer fra intervjuer og observasjoner nummerert fortløpende. For utfyllende forklaring på transkripsjonskoder, se vedlegg B.

3.5 Etiske betraktninger

Siden jeg skulle gjøre videoopptak av elever ble prosjektet mitt vurdert som meldepliktig til NSD. Søknaden min, med referansenummer 964549, ble godkjent 24.09.19 (Vedlegg C). Uken før datainnsamlingen møtte jeg klassen i begynnelsen av mattetimen, introduserte meg selv og informerte om prosjektet mitt. Jeg presiserte at det viktigste for meg ikke nødvendigvis var at de løste oppgavene korrekt, men hvordan de samarbeidet og hvordan opplegget var. Dessuten la jeg vekt på at videokameraene var der fordi det ville hjelpe meg å kunne notere ned i etterkant hva som skjedde i timen, ettersom det ville være umulig for meg å observere alt alene, og at det var kun jeg og eventuelt min veileder som kom til å se på opptakene. Deretter delte jeg ut samtykkeskjema (Vedlegg D) til elevene. Samtlige 30 elever skrev under på skjemaet og gav med det sitt samtykke til å delta i forskningsprosjektet. Tjora (2017) påpeker at dersom man har personopplysninger i datamaterialet, har man et stort ansvar for at andre personer ikke har mulighet til å få tak i disse opplysningene. Jeg har derfor gitt elevene pseudonymer i transkriberingen, samt anonymisert skolens navn for å ta vare på anonymiteten deres.

3.6 Analysemetode

For å analysere datamaterialet i dette prosjektet har jeg tatt i bruk tematisk koding (Robson & McCartan, 2015). Prosessen med analysearbeidet kan deles inn i fire deler. Aller først transkriberte jeg videoopptakene av undervisningssituasjonen og intervjuene med de forskjellige gruppene, for så å lese gjennom datamaterialet (455 vekslinger). For å gjøre det enklere for meg selv var det aller første jeg gjorde å notere ned forventninger jeg hadde fra a priori analysen på et ark (Del 1). Mens jeg gikk nøye gjennom datamaterialet prøvde jeg hele tiden å tenke hva som bidrog til å besvare forskningsspørsmålet "Hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer og hvilke faktorer muliggjør at elevene utvikler kunnskap om store talls lov?". Derfor noterte jeg ned underveis om det var situasjoner som utpekte seg og delte da transkripsjonene inn i meningsbærende segmenter. Dermed fikk jeg redusert datamaterialet og skilt ut det som ikke var relevant for problemstillingen (Del 2). Etter å ha delt datamaterialet inn i ulike kategorier, laget jeg flytskjema med oversikt over hoved- og underkategorier (Del 3). Til slutt prøvde jeg å tolke og forstå hva datamaterialet fortalte meg (Del 4). Figur 3 viser en oversikt over de fire delene i analyseprosessen:



Figur 3. Oversikt over de fire delene i analyseprosessen

4 Resultat av designutvikling

I dette kapitlet kommer jeg til å introdusere designet mitt, samt gjøre rede for designutviklingen som følger stegene i Strømskags (2017b) modell for instruksjonsdesign i matematikk, presentert i forrige kapittel.

4.1 Epistemologisk analyse

"De store talls lov" er loven om at alt utjevner seg i det lange løp. Den sier noe om regelmessigheten av et utfall som inntreffer når et forsøk gjentas tilstrekkelig mange ganger under like forsøksbetingelser (Lysø, 2005). Dersom vi for eksempel fortar en kastserie på 10 kast med en mynt og registrerer antall kron, så ser vi at antall kron vil variere en del fra serie til serie. Dette sier ikke nødvendigvis så mye om hyppigheten av hvor regelmessig kron faktisk inntreffer i det lange løp. Derfor kan det være hensiktsmessig å se på den relative frekvensen av kron. Den relative frekvensen vil si antall ganger utfallet har inntruffet dividert på antall ganger forsøket er utført, med andre ord andelen kron. Fordelen med å betrakte den relative frekvensen er at avvik vil få mindre å si dess flere forsøk som utføres. Eksempelvis vil de 10 siste kastene i en kastserie på 500 kast ha langt mindre å si for den relative frekvensen enn de 10 siste kastene i en kastserie på 50. Dette betyr at den relative frekvensen av kron stabiliserer seg dess flere kast en gjør, og vil si oss hva andelen kron i det lange løp blir. Ut ifra Lysø sin definisjon av begrepet sannsynlighet; "*å bestemme den brøkdelen av mange forsøk som utføres som gir utfallet*" (2005, s.40), vil denne andelen kron kunne fortelle noe om hvor stor sjansen for å få mynt/kron er. Dette viser oss at "De store talls lov" setter en sammenheng mellom begrepene sannsynlighet og andel. Det er viktig å huske på at den relative frekvensen bare er en tilnærmet verdi for sannsynligheten for utfallet, eller det man i statistikken kaller et estimat for sannsynligheten.

I Lysø (2010, s.112) defineres "*De store talls* lov" slik:

Dersom en rekke uavhengige (at resultatet i ett forsøk ikke påvirker resultatet i et annet forsøk) forsøk gjøres under identiske forhold, vil andelen av en bestemt hendelse etter hvert stabilisere seg og nærme seg en bestemt verdi når antallet forsøk gjøres stadig større. Denne verdien defineres som sannsynligheten for den bestemte hendelsen; altså at sannsynligheten er lik $\frac{antall\ ganger\ en\ registrerer\ hendelsen}{antall\ ganger\ forsøket\ blir\ gjort}$ *når antallet ganger forsøket blir gjort er et stort tall.*

Så kan man spørre seg hva er et stort nok antall ganger? Er 50 nok? Hvis nei, 100? 1000? Lysø (2010) hevder at det matematisk ikke vil være noen grense for antall observasjoner, men at vi i skolesammenheng nøyer oss med å gi tilnærmede sannsynligheter når vi anvender store talls lov. Likevel vil du få riktigere verdi for sannsynligheten dess større observasjonen er.

Kunnskapen om store talls lov kommer mest sannsynlig fra den sveitsiske matematikeren Jacob Bernoulli sitt verk "Ars Conjectandi" ("Kunsten å gjette") (Lysø, 2005). Her blir sannsynlighetsbegrepet videreutviklet som en matematisk teori og anvendt på en helt annen måte enn det som tidligere begrenset seg til hasardspill. Lysø (2005) skriver videre at store talls lov har vært krevende å anvende, så Bernoulli brukte lang tid på dette arbeidet, og begrepet har i senere tid ofte blitt feiltolket. Det er for eksempel mange som forestiller seg at dersom man triller en sekser 2-3 ganger på rad så er det mer sannsynlig at man ikke vil få en ny sekser på de neste kastene for å "jevne ut", eller at myntkastsekvensen M-K-M-M-K-M er mer sannsynlig å få enn K-K-K-K-M-K (K=kron, M=mynt). Her dukker det opp misforståelser rundt hva som kjennetegner en tilfeldig fordeling. "*People expect that a sequence of events generated by a random process will represent the essential characteristics of that process even when the sequence is short.*" (Tversky og Kahneman, 1976, s.1125). De mener at den første rekken fremstår som mer representativ for den tilfeldige fordelingen som myntkast representerer. Det er dette fenomenet som i spillteorien kalles for "the gambler's fallacy"- spillerens mistak. Da er det viktig å huske at terningkastene og myntkastene skal være uavhengige forsøk uten innflytelse på hverandre. Dette er hva man i statistikken kaller stokastiske forsøk (Lysø 2010). Forsøk som ikke er stokastisk er deterministisk.

Noe annet som kan føre til misforståelse av begrepet, er om store talls lov sees på som en definisjon av sannsynlighet, selv om omfanget på det innsamlede datamaterialet er begrenset (Lysø, 2005). Tversky og Kahneman (1976) hevder at folk kan ha en tendens til å estimere sannsynligheten for noe basert på hvordan dette utfallet sammenfaller med den totale populasjonen. Folk har det ofte for seg at den fordelingen man finner i en hel populasjon også vil gjenspeiles og representeres i et mye mindre utvalg. Eksempelvis kan folk tro at sjansen for å kaste 7 kron på 10 myntkast er like stor som å kaste 70 kron på 100 myntkast. Eller at det er lik sannsynlighet for at 4 av 10 nyfødte barn er gutter som at 400 av 1000 nyfødte barn er det. Men her forteller derimot store talls lov oss at dersom antall observasjoner øker, vil man nærme seg den teoretiske sannsynligheten.

I dag er store talls lov viktig for eksempel innenfor forsikringsbransjen. Gitt sannsynligheten for at en person som ønsker en bilforsikring kommer til å krasje innen et år ligger på 7%. Om det da er mange nok kunder med lik sjanse for å krasje er det godt mulig at forsikringsselskapet ikke trenger å betale ut mer enn 7/100 av forsikringsbeløpene. En kostnad på litt over 7/100 av forsikringssummen vil da i det lange løp sikre forsikringsselskapet overskudd.

I 1987 ble daværende læreplan M74 revidert og begrepene sannsynlighet og sannsynlighetsregning kom inn i grunnskolen gjennom mønsterplanen M87 (Lysø, 2010). I læreplanen den aktuelle målgruppen (en matematikk 1T-klasse) har vært gjennom, står det at elevene etter 10. årssteget skal kunne *finne og diskutere sannsyn gjennom eksperimentering, simulering og berekning i daglegdagse samanhengar og spel* (Utdanningsdirektoratet, 2013). Under kompetansemål etter 1T står det at elevene skal kunne *formulere, eksperimentere med og drøfte uniforme og ikkje-uniforme sannsynsmodellar* (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det står ikke noe spesifikt om store talls lov, men det står at elevene skal finne sannsynligheten gjennom eksperimentering og simulering samt eksperimentere og drøfte uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller, så jeg mener det er høyst relevant og naturlig at elevene får erfaring med store talls lov.

4.2 Didaktisk analyse

Her ønsker jeg å se på hva annen forskning innenfor sannsynlighet som er relevant for studien min sier. Inntrykket mitt fra innledningen samsvarer godt med internasjonal forskning som sier at sannsynlighet er utfordrende og komplekst. Det blir beskrevet mange ulike misoppfatninger elever har knyttet til sannsynlighet (Fischbein & Schnarch, 1997; Konold, 1989; Tversky & Kahneman, 1974).

Opplegget mitt er inspirert av en studie som er gjort av Guy Brousseau og Nadine Brousseau (Brousseau et al., 2002). De ønsket å arrangere en situasjon eller en serie av situasjoner som ville aktivere barn til å oppnå ordentlig forståelse av tilfeldighet og statistisk utvalg. Dette ble gjort i 1973-74 i en fjerdeklasse i Frankrike på 17 elever. Situasjonen gikk ut på at læreren hadde tre poser A, B og C, der det var 5 spillebrikker i hver av posene. Brikkene var enten hvite eller svarte, men man visste ikke hvor mange hvite eller hvor mange svarte det var i hver pose, bare at det var 5 spillebrikker i hver av posene. Fordelingen av svarte og hvite brikker var den samme i alle tre posene. Hensikten med eksperimentet var å presentere store talls lov og konseptet konfidensintervall.

Noen av oppdagelsene elevene gjorde underveis var at de fant ut at de fikk mer informasjon av mange trekninger. Dessuten oppdaget de etterhvert at den relative frekvensen kunne kobles opp mot sammensetningen av brikker, at når andelen hvite er 0,2 tilsvarer dette 1 hvit gjenstand, 0,4 tilsvarer 2 hvite osv. Et annet viktig moment verdt å merke seg er at læreren hevder at for å være "almost certain" på fordelingen av farger blant 5 kuler, kreves det 200 trekninger. For å være helt sikker må det trekkes 5000 (Brousseau, 2002, s. 403).

Enkelte av momentene som trekkes fram i konklusjonen om hvilken informasjon dette spesifikke eksperimentet gav oss er blant annet at samtlige elever fikk øvd på og lært ulike matematiske temaer som divisjon, prosent og brøk. Dessuten fikk elevene øvd på et matematisk vokabular, de snakket matematikk. I tillegg viste eksperimentet at det er mulig å introdusere begrep fra sannsynlighet og statistikk til elever i den aktuelle alderen på en betydelig og livlig måte (Brousseau, 2002, s. 410)

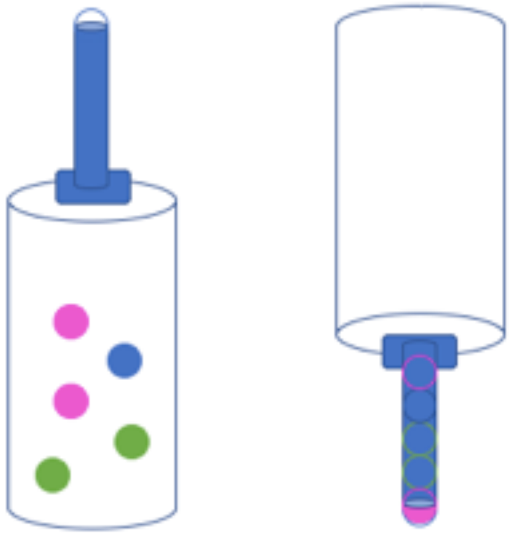
4.3 Epistemologisk modell

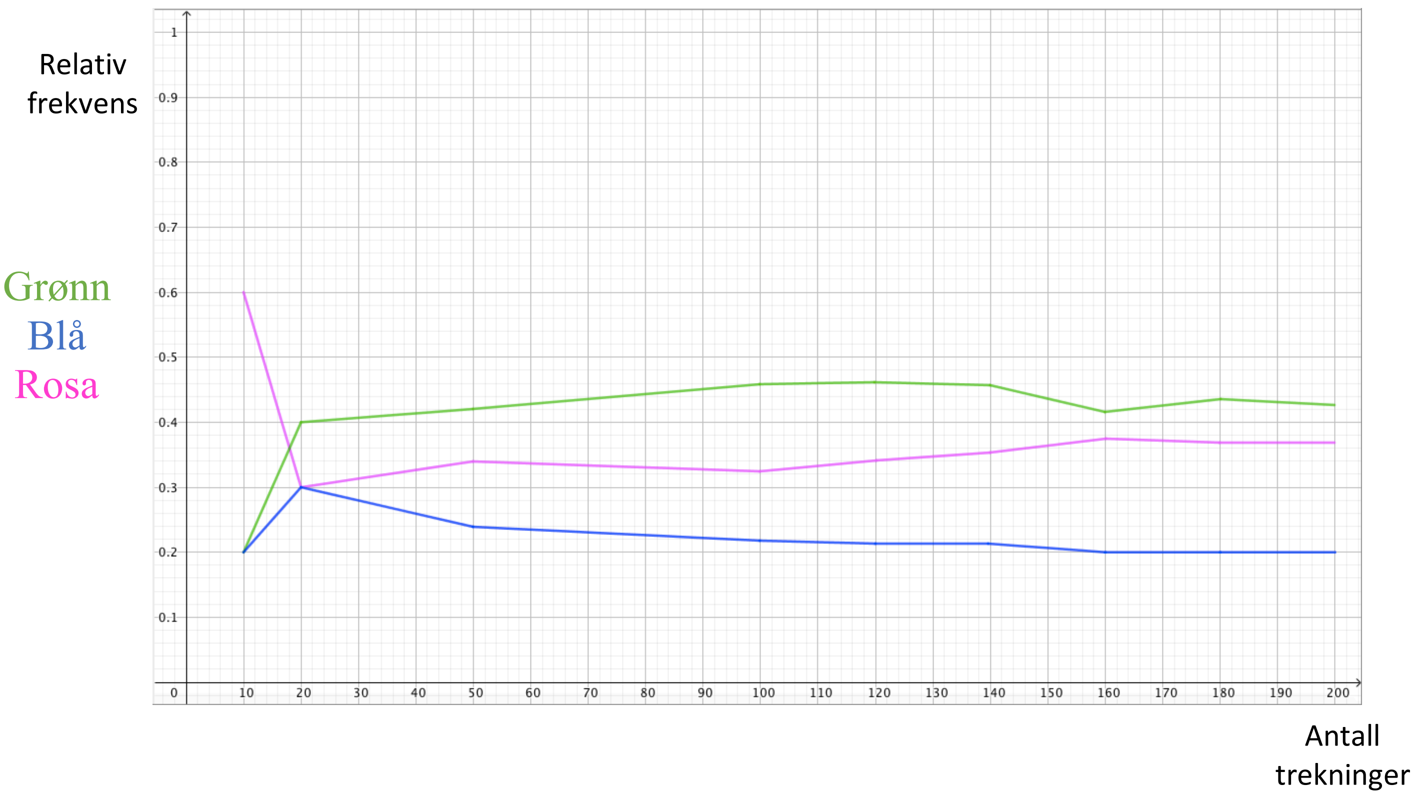
Målkunnskapen denne undervisningssituasjonen bygger på er "De store talls lov", loven som sier at dersom en rekke uavhengige forsøk gjøres under identiske forhold vil andelen av en bestemt hendelse stabilisere seg rundt en bestemt verdi når man gjør mange nok forsøk. Fra den epistemologiske analysen har vi at denne verdien defineres som sannsynligheten for den bestemte hendelsen, altså er sannsynligheten lik $\frac{\text{antall ganger en registrerer hendelsen}}{\text{antall ganger forsøket blir gjort}}$ når forsøket gjøres mange nok ganger. Store talls lov er et av flere teoremer som uttrykker idéen om at når antall forsøk med en tilfeldig prosess øker, går den prosentvise forskjellen mellom de forventede og faktiske verdier mot null (Renze og Weisstein, 2019).

I forsøket mitt valgte jeg å la elevene gjøre trekninger med 5 kuler. 2 av de var grønne, 1 var blå og 2 var rosa. Til sammen skulle elevene gjøre 200 trekninger og notere ned hvilken farge de trakk for hver gang. Dette er det som kalles et ordnet utvalg med tilbakelegging. Når det gjøres mange trekninger, vil den relative frekvensen for hver farge nærme seg en bestemt verdi (henholdsvis 0,4 for grønn og rosa, og 0,2 for blå). Denne verdien kan man koble opp mot antallet kuler av hver farge. Så ved å bruke relasjonen mellom relativ frekvens og antall kuler av hver farge, kan man koble relativ frekvens opp mot sannsynligheten for et utfall.

4.3.1 Modell av målkunnskapen

Situasjonen hvor målkunnskapen om store talls lov operasjonaliseres er forklart i neste kapittel sammen med en beskrivelse, gjennomgang og forklaring av oppgavene. Til sammen er det som nevnt totalt 5 kuler i en beholder, 2 grønne, 1 blå og 2 rosa. I figur 4 presenterer jeg en modell for hvordan målkunnskapen om store talls lov aktualiseres i forsøket mitt. Flaskene viser sammensetningen av kuler og hvordan trekningen foregikk. Tabellen og grafen som viser at den relative frekvensen nærmer seg 0,4 for fargene det er 2 kuler av og 0,2 for fargen det er 1 kule av, er et eksempel fra gjennomføringen jeg selv gjorde før realiseringen i klasserommet og er del av oppgaven. Den relative frekvensen er for hver farge notert etter 10, 20, 50, 100, 120, 140, 160, 180 og 200 trekninger.





Farge	Antall (totalt)	Relativ frekvens	Totalt
Grønn	86	$\frac{86}{200} = 0{,}43$	200
Blå	41	$\frac{41}{200} = 0{,}205$	200
Rosa	73	$\frac{73}{200} = 0{,}365$	200

Figur 4. Modell for målkunnskapen

4.3.2 En meningsfull situasjon som løses ved målkunnskapen

Med utgangspunkt i Brousseau et al. (2002) sitt forsøk og den epistemologiske analysen har jeg laget en fiktiv situasjon (Vedlegg E) som handler om at jenta Erle Perle skal få et perleskrin av bestemoren si dersom hun klarer å løse en nøtt. Hun får vite at det er 5 perler bestående av fargene grønn, blå og rosa i en flaske, men ikke hvor mange det er av hver farge. Dette skal elevene hjelpe Erle med å finne ut ved å snu flasken, notere hvilken farge som havner nederst i røret som er festet i flasken, snu flasken tilbake så perlene faller ned i flasken igjen, og gjenta dette. De skal notere hvilken farge som vises, og snu flasken tilbake. Slik skal de holde på til de kan fortelle bestemoren akkurat hvor mange av de 5 perlene som er grønne, blå og rosa. Jeg valgte å la 2 kuler være rosa, 2 grønne, og 1 blå. Det hadde fint gått an å gjøre fordelingen slik at det var 3 av én farge og 1 av de to andre. Men jeg valgte å la antallet være så jevnt som mulig med en tanke om at det ikke skulle bli åpenbart for tidlig hvor mange det var av hver farge.

Figur 5. Flasken med de 5 kulene i

Hensikten med de første oppgavene a-c var å få elevene til å komme i gang med å gjøre trekninger og studere nærmere sammenhengen mellom antall grønne, blå og rosa kuler. De skulle først fylle inn tabellen etter de 10 første trekningene (oppgave a). Så skulle de svare på om de hadde noe informasjon ut fra trekningene om hvor mange det kunne være av de ulike sortene (oppgave b). Intensjonen er å se hvilke tanker de har angående hvilken informasjon de har fått om hvor mange kuler det er av hver farge. Etter 10 trekninger til skal de svare på hvordan den relative frekvensen har endret seg (oppgave c). Videre (oppgave d og e) var hensikten min at elevene ved å gjøre mange trekninger skulle studere hvordan den relative frekvensen endret seg. Hypotesen min var at de etterhvert kom til å observere at den relative frekvensen stabiliserte seg rundt en bestemt verdi, og gradvis kunne begynne å se sammenhengen mellom relativ frekvens og antall kuler av hver farge.

Intensjonen min med oppgave f var at elevene skulle få en annen representasjon på den relative frekvensens endring enn bare å skrive ned verdier i tabeller. Derfor designet jeg en oppgave som ba dem om å tegne inn punkter i en graf og trekke linjer mellom dem, slik at den relative frekvensen ble representert på enda en måte. Hypotesen min var at dette kunne bidra til at de lettere oppnådde kunnskapen om at dersom man gjør mange nok trekninger, vil den den relative frekvensen nærme seg den teoretiske sannsynligheten for det gitte utfallet. Målet var at elevene her skulle klare å se koblingen mellom relativ frekvens og antall kuler av hver farge. Dessuten tenkte jeg at dersom de ikke hadde sett at den relative frekvensen nærmet seg en bestemt verdi tidligere, var det større sjanse for at de gjorde det nå.

I oppgave g ønsket jeg å få elevene til å diskutere en eventuell kobling mellom den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge. Hypotesen min var at de etter å ha løst de tidligere oppgavene ser at det er en direkte sammenheng mellom disse.

Ekstraoppgavene h og i er gitt med en intensjon om å se om elevene har typiske misforståelser knyttet til fenomenet "the gambler's fallacy" og at folk ikke tar hensyn til utvalgsstørrelsen når de vurderer sannsynlighet. Hypotesen min her var at selv om de nettopp har gjennomført dette forsøket, kommer det fortsatt til å være knyttet misoppfatninger til dette.

Jeg har forsøkt å være tydelig i formuleringene da jeg designet oppgaven. Dette for at jeg skulle kunne være mest mulig anonym i de adidaktiske fasene (Aksjon, formulering og validering). Jeg var ganske usikker på hvor lang tid realiseringen kom til å ta, derfor gikk jeg gjennom hele opplegget en gang for meg selv og noterte ned svar jeg så for meg elevene kunne komme med. På den måten fikk jeg gått gjennom opplegget mitt og regulert formuleringer der jeg mente det var hensiktsmessig. Dette førte også til at jeg i oppgave f valgte å endre fra å notere ned relativ frekvens for hver tiende trekning opp til 200 til hver tjuende trekning, fordi jeg så at det kunne komme til å ta for lang tid. Grunnen til at jeg valgte akkurat 200 trekninger var fordi fra den didaktiske analysen fant jeg at man måtte gjøre minst 200 trekninger med 5 kuler for å være så godt som sikker på resultatet. For å være helt sikker må man gjøre 5000 trekninger. Ettersom jeg ikke hadde mer tid enn jeg hadde, og jeg så for meg at det kunne oppleves i overkant repetitivt for 1T-elever å gjøre flere trekninger, så jeg det som mest hensiktsmessig å la elevene gjøre 200 trekninger. Dette var også grunnen til at jeg valgte å ikke ha flere kuler enn 5. Det ville krevd langt flere trekninger for å kunne være sikker på resultatet.

4.3.3 Miljøer for aksjons-, formulerings- og valideringssituasjonene

I dette avsnittet ønsker jeg å forklare valg jeg gjorde da jeg designet de ulike oppgavene i oppgaveheftet i henhold til miljø for aksjonssituasjonen, formuleringssituasjonen og valideringssituasjonen. Ettersom jeg i den didaktiske analysen har sett at tidligere forskning peker på at sannsynlighetsregning er utfordrende og komplekst, hadde jeg et mål om å lage oppgavene så oversiktlige som mulig og gi rom for at elevene fikk diskutere seg i mellom og skrive ned oppfatninger. Dessuten fokuserte jeg på at det ikke skulle være for stort gap mellom oppgavene, men at elevene skulle kunne utvikle den tilsiktede kunnskapen gradvis.

4.3.3.1 Miljø for aksjon

I oppgave a (figur 6) ble elevene introdusert til det materielle miljøet (flasken med de 5 kulene i) og bedt om å begynne å gjøre trekninger. I tillegg ble de gitt en tabell i oppgavearket der de skulle fylle ut antallet de trakk av de forskjellige fargene og regne ut de tre tilhørende relative frekvensene. Hensikten min med dette var å introdusere dem for trekningene og at de kunne begynne å fordele arbeidsoppgaver innad i gruppen.

Som et første steg i problemløsninga tipser bestemor Erle om å gjøre 10 trekninger for å komme i gang og studere nærmere sammenhengen mellom antall grønn, blå og rosa, den relative frekvensen (andelen) og totalen.

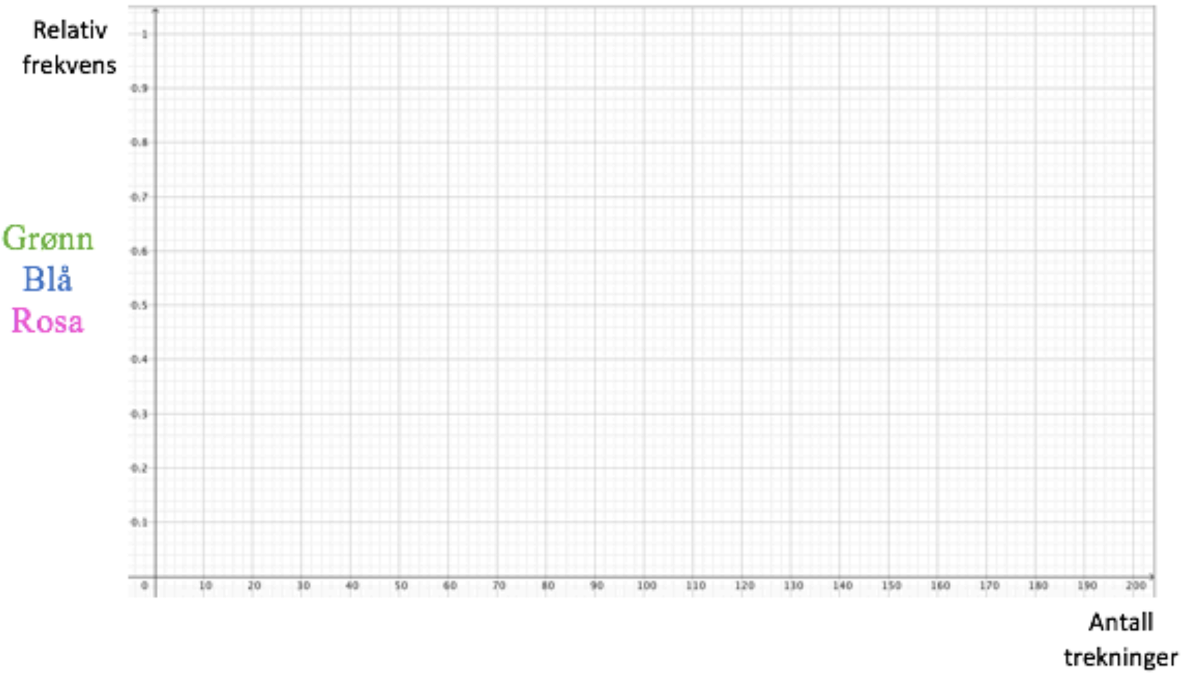
a) Fyll inn i tabellen etter de 10 første trekningene

Farge	Antall	Relativ frekvens	Totalt
Grønn		$\frac{\square}{10} = 0,$	10
Blå		$\frac{\square}{10} = 0,$	10
Rosa		$\frac{\square}{10} = 0,$	10

Figur 6.Oppgave a

Videre i oppgave c, d og e ble elevene bedt om å fortsette trekningen av kuler og notere ned det foreløpige antallet og den relative frekvensen. Hensikten med dette var å få elevene til å studere hvordan den relative frekvensen endret seg etterhvert som de gjorde flere trekninger. I de siste 100 trekningene i oppgave f (figur 7) skulle elevene også for hver tjuende trekning plotte inn verdien for den relative frekvensen for de tre forskjellige fargene i en graf slik at de fikk tre ulike kurver som representerte endringen av den relative frekvensen. Tanken bak dette var at formodentlig begynte elevene å observere at den relative frekvensen begynte å nærme seg en bestemt verdi og at de kunne se sammenhengen mellom denne verdien og antall kuler av hver farge. Altså at de ser at dersom den relative frekvensen nærmer seg 0,4, samsvarer dette med at det er 2 kuler av den tilhørende fargen, og at verdien 0,2 tilsvarer 1 kule.

f) Til slutt skal dere gjøre 100 trekninger til. For hver tjuende trekning fyller dere inn i et punkt i grafen for hver av de tre fargene for den relative frekvensen. Inkluder punktene av de relative frekvensene som du fant fra 10, 20, 50 og 100 trekninger i grafen. Trekk så en linje fra punkt til punkt. (Husk å dele summen av f.eks grønne på det totale antallet. Altså først 120, så 140, så 160, 180 og til slutt 200)



Farge	Antall (totalt)	Relativ frekvens	Totalt
Grønn		$\frac{\square}{200} = 0,$	200
Blå		$\frac{\square}{200} = 0,$	200
Rosa		$\frac{\square}{200} = 0,$	200

Ser den relative frekvensen ut til å nærme seg en bestemt verdi? Hva tror du den hadde blitt dersom du hadde gjort trekninger i det uendelige, og hva betyr denne verdien? Hvor mange kuler tror dere det er av hver sort? Kan dere være helt sikre?

Begrunn

Figur 7. Oppgave f

4.3.3.2 Miljø for formulering

I løpet av oppgavene b til e skulle elevene diskutere innad i gruppen hvordan den relative frekvensen endres og skrive ned det de diskuterte. Noe jeg presiserte innledningsvis var at det viktigste ikke var om svarene de skrev ned var korrekte, men at de diskuterte innad i gruppene, la fram meningene sine og skrev de ned. Allerede i oppgave b (figur 8), etter bare 10 trekninger, ble det spurt om de hadde noe informasjon om hvor mange kuler det kunne være av de ulike fargene. Elevene kunne tidlig gjøre seg opp tanker og hypoteser om hvor mange det var, og diskutere dette med hverandre innad i gruppen og etterhvert som de gjorde flere trekninger se om det stemte. Hensikten her var at elevene skulle se at 10 trekninger ikke nødvendigvis trenger å si så mye om hvor mange det er av hver farge, da det er noe tilfeldig hvordan fordelingen er etter så få trekninger. Målet var at de etterhvert skulle se at strategien om å trekke flere og flere skulle gi de en større indikasjon på hvordan fordelingen var.

b) Ut ifra trekningene du nå har gjort. Har du noe mer informasjon om hvor mange det kan være av de ulike sortene? Hvorfor/Hvorfor ikke?

Begrunn:

Figur 8. Oppgave b

4.3.3.3 Miljø for validering

I valideringssituasjonen skulle elevene prøve å forklare et fenomen eller verifisere en formodning. Dette har jeg forsøkt å legge til rette for på den måten at jeg i oppgave e og f, henholdsvis etter 100 og 200 trekninger, spør hvor mange kuler de tror det er og forklare hvor sikre de kan være på det. Dessuten skulle de i oppgave f diskutere om den relative frekvensen ser ut til å nærme seg en bestemt verdi, hva denne verdien betyr, og koble dette opp mot hvor mange kuler det er av hver sort. Hensikten min med disse oppgavene var å la elevene forklare hvordan de tenker seg fram til konklusjonen på hvor mange kuler det er og begrunne det. I oppgave g spør jeg i tillegg om de kan koble en sammenheng mellom den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge. Dette omhandler definisjonen av store talls lov fra den epistemologiske analysen.

Etter alle har gjort 200 trekninger ønsker jeg å legge fram samtlige gruppers resultater i fellesskap så elevene kan studere forskjellen på deres resultat etter 200 trekninger og det totale resultatet som vil bli etter 1600 trekninger ettersom det blir 8 grupper. Dette ønsket jeg å legge opp til at elevene skulle få reflektere rundt og svare på hva de tenker om. Kan man konkludere noe helt sikkert?

Dessuten ønsket jeg å få frem i fellesskap hva elevene tenkte om problemstillingene gitt i ekstraoppgavene (figur 9). Dette er de oppgavene som tar for seg de vanligste misoppfatningene knyttet til store talls lov, så jeg var nysgjerrig på om det at de nettopp hadde gjennomført denne oppgaven kom til å hjelpe dem til å resonnere og begrunne svarene korrekt. Hypotesen min her var at noen av gruppene fortsatt ikke kom til å ha fått helt taket på det, men at andre nok har skjønt det. Målet er at elevene skjønner det etter vi har snakket om de i plenum.

Ekstraoppgaver:

h) Gitt at dere har trukket 6 grønne kuler på rad, øker da sannsynligheten for at det vil komme en blå kule i neste trekning, siden antallet vil jevne seg ut i det lange løp?

Begrunn:

i) Er det like stor sannsynlighet å trekke 7 grønne kuler på 10 trekninger som å trekke 70 grønne kuler på 100 trekninger? Diskuter i gruppa og skriv ned begrunnelse på hvorfor/hvorfor ikke.

Begrunn:

Figur 9. Ekstraoppgaver

4.4 Implementering

I det følgende kommer jeg til å gjøre rede for hvilke forventninger jeg hadde a priori om hva som skulle skje under realiseringen (devolusjon, regulering og institusjonalisering) av eksperimentet. Dette vil senere sammenlignes med a posteriori analyser.

4.4.1 Devolusjon

I devolusjonen skulle den adidaktiske situasjonen og problemet elevene får ansvar for å løse presenteres. Jeg ønsket å starte undervisningssituasjonen med å forklare hvordan opplegget var tenkt gjennomført, og informere om den didaktiske kontrakten. Ettersom et viktig poeng med devolusjonen er at læreren skal overføre ansvaret for å løse problemet til elevene hadde jeg forsøkt å designe en situasjon i oppgaven som elevene kunne relatere til, dette for at de forhåpentligvis lettere ville ta eierskap til situasjonen og problemet. Enkelte av de gjensidige forpliktelsene som ligger i den didaktiske kontrakten ba jeg faglæreren informere klassen om. De ble fortalt at jeg skulle gjennomføre et prosjekt, og at de kom til å bli delt inn i grupper på 4 som de skulle samarbeide i. Jeg hadde også et ønske om å informere elevene om at tanken i den adidaktiske situasjonen var at de skal samarbeide og diskutere innad i gruppene, og bruke det adidaktiske miljøet de hadde til rådighet. Men at dersom noe var utydelig kunne de spørre meg som lærer. Ellers forventet jeg at elevene skulle følge oppgaven og den informasjonen som ble gitt i oppgaveteksten.

Ettersom jeg ikke hadde noe særlig kjennskap til forkunnskapene til elevene, siden jeg ikke har møtt dem tidligere, ønsket jeg under devolusjonen å gå gjennom og tydeliggjøre uttrykket *relativ frekvens* fra oppgaveteksten i fellesskap. Det er naturlig at de kan ha blitt introdusert for begrepet i tidligere arbeid med sannsynlighet og statistikk, men jeg kunne forestille meg at elevene hadde hatt problemer med å forstå uttrykket med tanke på at det å beregne og gjøre greie for relativ frekvens ikke er et kompetansemål før i 2P-Y (Utdanningsdirektoratet, 2016). Så ved å forklare det på forhånd sikret jeg at mangel på forkunnskap ikke skulle hindre ønsket progresjon. Jeg ser for meg at dersom jeg ikke hadde gjort dette måtte jeg gått rundt i gruppene i de (tiltenkte) adidaktiske fasene og forklart hva som menes. Måten jeg planla å forklare begrepet relativ frekvens på var ved å vise til et eksempel fra Lysø (2010, s.110). Her gjøres observasjoner av biler med partallsregistreringsnummer som kjører fordi. Man studerer antall partall opp mot totalt antall biler og finner andelen partall, som da er det samme som den relative frekvensen partall.

4.4.2 Regulering

I aksjons-, formulerings- og valideringssituasjonen vil hensikten for meg som lærer være å håndtere utviklingen av miljøet. Jeg burde være forberedt på muligheten av at progresjonen i arbeidet med å løse oppgaven ikke ble som ønsket og at enkelte reguleringer måtte gjøres. Jeg presiserte før jeg delte ut oppgavene og utstyret at jeg under oppgaveløsningen ønsket å involvere meg så lite som mulig, men at dersom jeg opplevde at noen fikk problemer eller var usikre på hva en oppgave spurte om, kom jeg til å forklare dette. Rollen min som lærer kunne komme til å endres underveis, så det var viktig at jeg var fleksibel og så an situasjoner hva som var gunstig å gjøre. I aksjonssituasjonen forventet jeg at det materielle miljøet (oppgaveheftet og flaskene) ville gi tilstrekkelig feedback for å sikre ønsket progresjon for elevene i oppgaven. I formulerings- og valideringssituasjonen la jeg til rette for at de ulike gruppene kunne synliggjøre sine resultat og svar for resten av klassen, samt samtale med hele klassen om hvilke oppfatninger de forskjellige gruppene har.

4.4.3 Institusjonalisering

Ettersom målet i institusjonaliseringen av kunnskapen var å generalisere kunnskapen elevene jobbet med i problemløsningen til å kunne bruke den i andre settinger eller situasjoner (Strømskag, 2017b), ønsket jeg å gjøre dette. Etter elevene hadde gjennomført oppgaveheftet prøvde jeg å få til en klasseromdiskusjon rundt hvilke kontekster de så for seg at store talls lov kunne brukes i det hverdagslige liv, og trekke fram eventuelle situasjoner det brukes som ikke ble nevnt. På denne måten får elevene kontekstualisert målkunnskapen.

Utover det hadde jeg en intensjon om å ta opp og diskutere enkelte vanlige misoppfatninger knyttet til store talls lov (Tversky og Kahneman, 1976). Jeg ønsket å få frem at den fordelingen man finner i et stort utvalg ikke nødvendigvis vil gjenspeiles og representeres i et mye mindre utvalg. Eller at dersom man har gjort mange trekninger på rad der resultatet blir det samme, betyr ikke det at sannsynligheten for at resultatet i neste trekning er annerledes øker. Dette er fordi denne typen trekning ikke er deterministisk.

Når det gjelder forventninger jeg hadde til elevenes progresjon av kunnskapen som kjennetegner store talls lov så jeg for meg at denne skulle skje gradvis. Tanken var at elevene gjennom eksempelet mitt i devolusjonen skulle bli introdusert og oppnå forståelse av hva relativ frekvens innebærer. Da dette er et essensielt uttrykk for å forstå matematikken bak “De store talls lov” mener jeg at det er hensiktsmessig å gjennomgå eksempelet. Videre var målet at de første oppgavene skulle stimulere elevene til å oppdage at den relative frekvensen kan svinge stort i begynnelsen når det er blitt gjort få trekninger. Hensikten med dette var at elevene skal innse at det er nødvendig å gjøre flere trekninger før man kan begynne å se sammenhengen mellom andelen av en bestemt farge (relativ frekvens), og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge/antallet kuler av hver farge. Dette bidrar til at progresjonen av målkunnskapen opprettholdes.

Til slutt var forventningen min at etter alle trekningene var gjennomført, skulle elevene ha et bilde på endringen i relativ frekvens opp til 200 trekninger gjennom både grafen, prosessen og resultatet. Målet var at dette kunne gjøre at elevene ser de ønskede sammenhengene og er i stand til å svare med sikkerhet på hvor mange kuler det er av hver farge i flasken, og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge. Her er det verdt å igjen nevne som i den epistemologiske analysen at den relative frekvensen egentlig bare er en tilnærmet verdi, et estimat for sannsynligheten for utfallet, men at vi i skolesammenheng nøyer oss med å gi tilnærmede sannsynligheter når vi anvender store talls lov. Men dess større observasjonen er, dess riktigere verdi for sannsynligheten vil du få (Lysø, 2010). Etter oppgavene var altså intensjonen og forventningen min at elevene skal ha oppnådd den tilsiktede målkunnskapen om "De store talls lov".

5 A posteriori analyse

I følgende kapittel kommer jeg til å legge fram funnene fra denne studien. Gjennom hele analyseprosessen har jeg fokusert på faktorer som bidrar til å svare på forskningsspørsmålet mitt, altså hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer og hvilke faktorer muliggjør at elevene utvikler kunnskap om store talls lov. Først kommer et delkapittel med kommentarer om hvordan realiseringen i klasserommet gikk, etterfulgt av to deler; en del hvor jeg fokuserer på hindrende faktorer og en del hvor jeg tar for meg muliggjørende faktorer i den designede undervisningssituasjonen med tanke på progresjon av kunnskap om store talls lov. Kommentarer og drøfting av funnene kommer i et senere kapittel.

5.1 Realisering i klasserommet – a posteriori refleksjon

I dette avsnittet vil jeg kort si noe om tanker jeg gjorde meg like etter realiseringen av opplegget. Jeg var litt usikker på hvordan det ville slå ut at jeg valgte å gjennomføre eksperimentet i en hel klasse bestående av 28 elever, om det muligens var i overkant mange. Fordelen med dette var at det resulterte i mer innsamlet datamateriale, samt at flere elever fikk mulighet til å komme med sine synspunkt i helklassediskusjonen. Ulempen med at de var så mange var at de forskjellige gruppene ble noe påvirket av hvor langt de andre hadde kommet, og at dette kunne oppleves forstyrrende. Antallet gjorde at det ble mindre tid for meg til å gå rundt til den enkelte gruppe for å se hvordan det gikk, samt skrive notater fra prosessen. Dessuten så jeg i ettertid at det var såpass med (faglig) støy i klasserommet, at dette gjorde at jeg ikke hadde mulighet til å høre den ene gruppen som ble filmet siden de snakket så lavt.

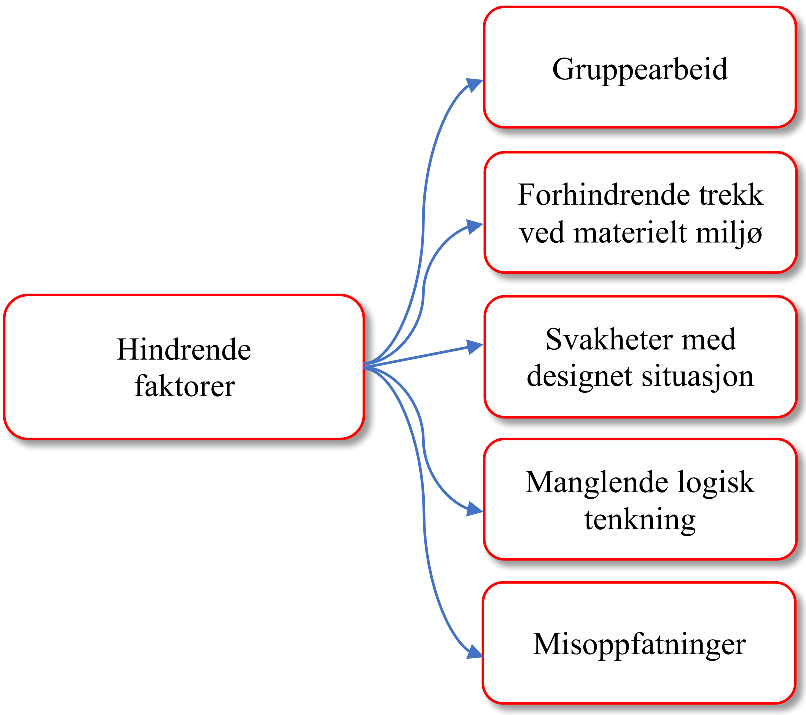
Jeg oppdaget tidlig at elevene ivrig forsøkte å "jukse" ved å se gjennom teipen og bunnen på reagensrøret og på den måten se hvor mange det var av hver farge. Heldigvis hadde jeg forutsett at dette kunne skje, og var dermed godt forberedt og hadde sikret utstyret på en god måte. I tillegg noterte jeg meg tidlig at oppgaven virket til å fenge elevene og at de tidlig tok eierskap til oppgaven, ettersom gruppene tidlig uttrykte et ønske om og en motivasjon for å finne resultatet av hvor mange kuler det var av hver farge i boksen.

Det virket som at flere av gruppene gikk litt fort fram og ikke alltid leste oppgavene nøye. Dette resulterte i at flere måtte gjøre trekninger på nytt, etter de skjønte hvor mange de faktisk skulle gjøre, og i tillegg førte det til at såpass mange spurte hva de skulle gjøre på oppgave f at jeg så det som hensiktsmessig å forklare den i plenum.

Tidsbruken til gruppene varierte overraskende mye. Noen av gruppene brukte vesentlig lengre tid enn andre, men de fleste gruppene mente det var tilstrekkelig med tid til å gjennomføre opplegget. Det var bare de gruppene som måtte gjøre trekninger om igjen som fikk dårligere tid.

5.2 Hindrende faktorer

I følgende delkapittel kommer jeg til å ta for meg fem episoder jeg fant som forhindrende faktorer for at elevene oppnådde progresjon av den tiltenkte målkunnskapen (gruppearbeid, hindrende trekk ved materielt miljø, svakheter med designet situasjon, manglende logisk tenkning og misoppfatninger). Figur 10 viser en oversikt over disse hindrende trekkene ved undervisningssituasjonen med et flytskjema.



Figur 10. Oversikt over hindrende trekk ved undervisningssituasjonen

5.2.1 Gruppearbeid

Det første funnet jeg ønsker å legge fram er en hindrende faktor for enkelte elever i progresjon av kunnskapen som følge av gruppearbeid. Etter å ha lest gjennom datamaterialet identifiserte jeg to situasjoner hvor en på gruppen tok seg av utregningen og besvarelsen av oppgavene, mens de andre på gruppen bare gjennomførte trekningene. To utdrag som indikerer dette er fra Gruppe 1:

(Jonas regner sammen og skriver inn i oppgave e, mens Maren og Thea sitter på telefonen)

90. Thea	Har du telt gjennom riktig [].
91. Jonas	Ja det [].

140. Thea	Vi mangler et par.

(Sluttfører trekningene)

141.Thea	Ferdig?
142. Maren	Jepp
143. Thea	Da må vi pluss på de her. (Viser tidligere trekninger)
144. Maren	Du var god på å regne ut, var du ikke det?
145. Jonas	Sure.

[O_G1]

5.2.2 Forhindrende trekk ved materielt miljø

Neste funn med tanke på hindring i ønsket progresjon av målkunnskapen var en situasjon som oppsto som følge av at elevene ble så opptatt av selve trekningen at de ikke fikk med seg når de hadde gjennomført antallet oppgaven spurte om. Første episode var fra oppgave e, hvor Gruppe 1 hadde gjort 50 trekninger, og skulle gjøre 50 trekninger til:

68. Maren Okay, rosa, rosa, grønn, (...) hvor mange har vi nå?
69. Jonas Eh
70. Maren 62 tror jeg
71. Thea 62?

(Jonas teller opp)

72. Jonas 62 ja
73. Thea Hva gjør vi da da?
74. Maren Vi må gjøre det på nytt da, vi kan ikke bare stryke vekk én liksom.
75. Maren Okay, men jeg kan ta en strek for hver gang så får vi hver runde ordentlig.
76. Maren (Til lærer) Vi tok for mange vi skjønner du.

[O_G1]

Dette var ikke eneste gangen det skulle gå litt fort i svingene for denne gruppen. Her fra da de skulle til å begynne på oppgave f:

(Maren og Thea leter fram farger og ser på grafen)

103. Maren Gjøre 100 til da, greit. Skal vi bare begynne?

(Maren skriver ned i sitt eget kladdeark de fargene hun ser. Noterer ikke ned for hver tjuende trekning)

104. Maren 64 trekninger. 23 igjen. Litt kjedelig.

(Noen minutter senere)

105. Jonas Oi. For hver 20 skulle vi tatt en strek.

106. Maren Hm?

107. Jonas <u>For hver tjuende trekning fyller dere inn i et punkt i grafen for hver av de tre fargene for den relative frekvensen.</u>

108. Thea Aaah...

109. Maren Vi må jo gjøre det på nytt da. Okay, vil du fylle ut for hvert tjuende?

110. Jonas Ja

111. Maren Ah, så irriterende.

[O_G1]

Disse forsinkelsene gjorde at tiden gikk litt fra denne ene gruppen, og de rakk ikke regne ut den relative frekvensen for hver tjuende trekning mellom 100 og 200. I dialogen jeg hadde med gruppen underveis foreslo jeg derfor at de bare trekker linja der den endte opp så de ser totalen, slik at de rekker å gjøre de siste oppgavene. Jeg valgte altså å bryte den adidaktiske situasjonen og ba elevene hoppe over store deler av den oppgaven. Her kommer det også fram at de ikke leser teksten godt nok, men bare setter i gang:

134. Lærer Har dere fått gjort flere trekninger etter 100 nå?

135. Maren Vi holder på. Men så er det vi som ikke leser teksten da, for vi bare, gjør 100 trekninger

136. Lærer Ja okay, men dersom dere har gjort det, så bare lag den bare slik at dere

ser hvor den ender opp. Ser totalen. For da vet dere jo ikke hvordan det var etter 120, men ja bare plott inn der, den totale. Også tegner dere en strek på 200. For dersom dere ikke har skrevet opp underveis 120, 140, 160, så vet jo dere ikke helt akkurat hvordan det var, så bare skriv det etter den totale

137. Maren	Vi er litt fjern

[O_G1]

Under valideringssituasjonen, hvor læreren går gjennom de ulike resultatene i fellesskap og elevene sammenligner resultatene sine med hverandre bekrefter Thea for Mari at selve trekningen var deres største fokus:

177. Maren	Det var ikke så lett å holde kontrollen føler jeg
178. Thea	Nei vi burde latt folk[] Jeg ble så opptatt av å snu.
179. Maren	Mhm

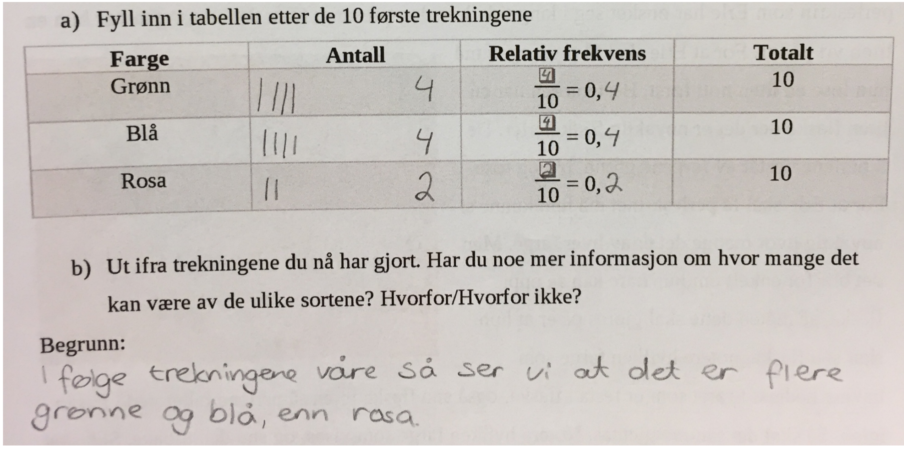
[O_G1]

5.2.3 Svakheter med den designede situasjonen

Notatene jeg skrev under timen, observasjonen av elevene og oppgaveheftet viser at det blir snakket, diskutert og reflektert rundt selve målkunnskapen "De store talls lov" i liten grad. Det ble ikke laget en spesifikk oppgave om dette, og da ble det heller ikke pratet særlig mye om heller. Resultatet av dette var at formuleringssituasjonen ikke ble gjennomført slik det var tenkt. Dette kan for enkelte elever ha vært et hinder i progresjonen av den tilsiktede målkunnskapen. Et eksempel på hvordan en slik oppgave kunne sett ut, og noen tanker rundt dette kommer i neste kapittel.

5.2.4 Manglende logisk tenkning

Et annet funn jeg hadde omhandler det som fra innledningen blir karakterisert som logisk tenkning. Disse funnene er fra Gruppe 2 og Gruppe 4 sine besvarelser på oppgave b. Det viser seg at flere av gruppene kommer med ganske bastante antagelser etter bare 10 trekninger som de ikke nødvendigvis kan vite så mye om:



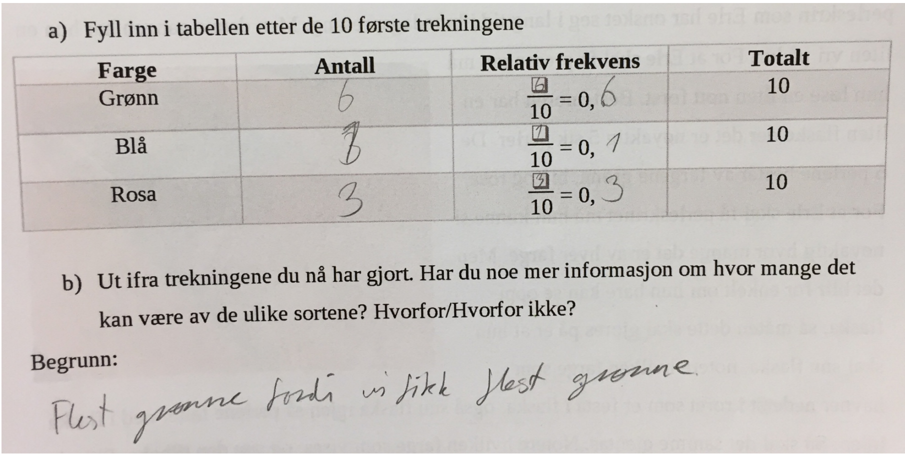
a) Fyll inn i tabellen etter de 10 første trekningene

Farge	Antall	Relativ frekvens	Totalt
Grønn	|||| 4	$\frac{4}{10} = 0,4$	10
Blå	|||| 4	$\frac{4}{10} = 0,4$	10
Rosa	|| 2	$\frac{2}{10} = 0,2$	10

b) Ut ifra trekningene du nå har gjort. Har du noe mer informasjon om hvor mange det kan være av de ulike sortene? Hvorfor/Hvorfor ikke?

Begrunn:
I følge trekningene våre så ser vi at det er flere grønne og blå, enn rosa.

Figur 11. Gruppe 2 sin skriftlige besvarelse på oppgave b



a) Fyll inn i tabellen etter de 10 første trekningene

Farge	Antall	Relativ frekvens	Totalt
Grønn	6	$\frac{6}{10} = 0,6$	10
Blå	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	10
Rosa	3	$\frac{3}{10} = 0,3$	10

b) Ut ifra trekningene du nå har gjort. Har du noe mer informasjon om hvor mange det kan være av de ulike sortene? Hvorfor/Hvorfor ikke?

Begrunn:
Flest grønne fordi vi fikk flest grønne

Figur 12. Gruppe 4 sin skriftlige besvarelse på oppgave b

5.2.5 Misoppfatninger

I pilotprosjektet jeg gjennomførte i fjor og i den epistemologiske analysen ble jeg gjort oppmerksom på at misoppfatninger preger elever sitt syn på sannsynlighet. Dette kan føre til en begrensning av forståelsen som gjør at elever kommer med mangelfulle eller gale begrunnelser i resonnementene sine. Ettersom typiske misoppfatninger er såpass vanlige, ønsket jeg å synliggjøre de misoppfatningene som kan knyttes opp til store talls lov. Disse problemstillingene ble gitt som tilleggsoppgaver (oppgave h og i). Dette er hva som kom fram under helklassesamtalen i institusjonaliseringen:

207. Lærer	(...) <u>Dersom dere har trukket 6 grønne kuler på rad.</u> Det kan godt være at noen gjorde, sant? <u>Øker da sannsynligheten for at det vil komme en blå kule i neste trekning?</u> Er det noen som har en mening om det?
208. Elev	Ehm, sannsynligheten øker jo ikke, men det er jo en femtedels

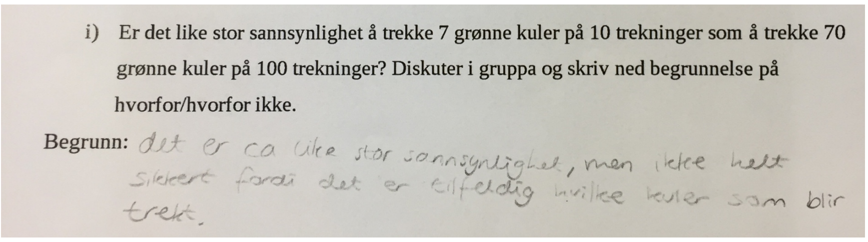
sannsynlighet for å trekke blå, så det er jo egentlig hver femte da.

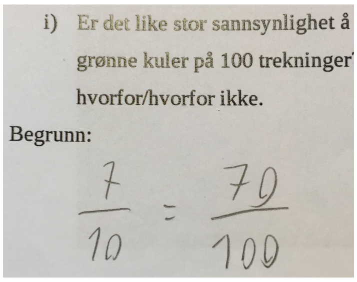
209. Lærer Mhm, men hvorfor øker ikke sannsynligheten?

210. Elev Fordi hver gang du vender den boksen, så er sannsynligheten for at det skal komme en blå like stor hver gang. Men greia er at det er veldig liten sannsynlighet for å få 6 grønne på rad, så det er enda større sjanse for at den rekken kommer til å brytes opp.

[O_H]

Utover dette viste det seg at ikke alle elevene hadde skjønt dette med at man ikke kan estimere sannsynligheten for noe basert på hvordan dette utfallet sammenfaller med den totale populasjonen, uavhengig av størrelsen på utvalget. Som jeg pekte på i den didaktiske analysen med tidligere forskning viste det seg at også enkelte av elevene i dette eksperimentet opplevde det uklart at den fordelingen man finner i en hel populasjon ikke nødvendigvis gjenspeiles og representeres i et mye mindre utvalg, selv etter erfaringer med dette i trekningene de gjorde. Dette kom fram i svar på oppgave i fra oppgaveheftet. Her er svarene fra Gruppe 2 og Gruppe 4:





Figur 13. Gruppe 2 og 4 sine besvarelser på oppgave i

Disse besvarelsene indikerer at elevene tenker at det er like stor sannsynlighet for at 70 av 100 kuler er grønne som at 7 av 10 kuler er grønne, til tross for at det etter 100 trekninger er et vesentlig større utvalg. Men det var grupper som skjønte at det kunne svinge mer i et lite utvalg. De andre gruppene som svarte på oppgaven i heftet begrunnet korrekt, og i et av intervjuene kommer det fram en god forståelse av hvorfor det er slik:

243. Lærer Skilte resultatet deres mye fra resten av klassa, og fra totalen i klassa?

244.Tom Vi hadde vel ganske spot on

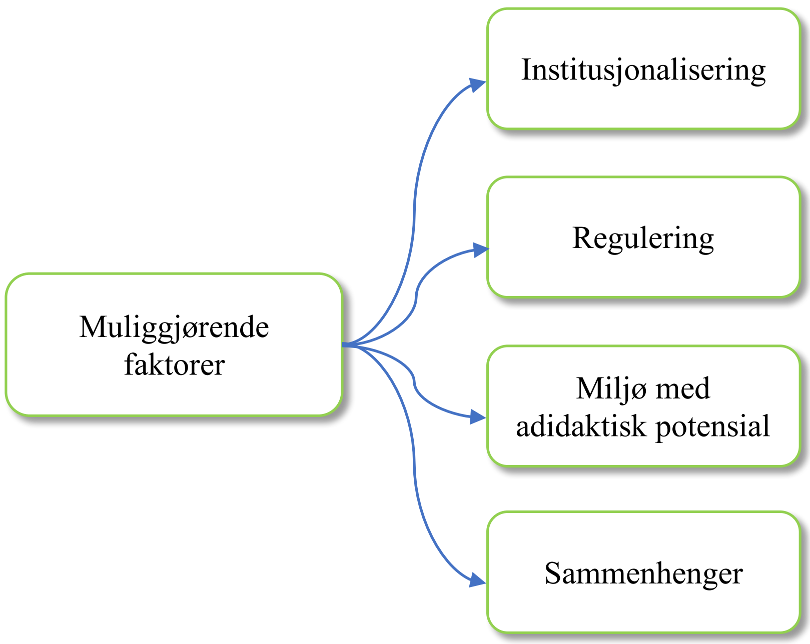
245. Petter Men i starten var det vel litt sånn, når vi fikk veldig mye av en farge

246. Erling	Ja vi fikk veldig mye grønt da.
247. Petter	_Da skilte det seg ut. Men det jevna seg ut etterhvert.
248. Lærer	Ja. Men hva tror dere er grunnen til at det jevner seg ut når dere gjorde flere trekninger, men at det skilte seg veldig fra starten?
249.Tom	Samme som 7 av 10 og 70 av 100[]. At det er større sannsynlighet for å trekke én farge mer enn 10 farge annerledes. Så det vil jo si at sjansen for å få dem det er flest av øker bare mer og mer utfra hvor mange trekninger man tar.

[I_G3_05.11.2019]

5.3 Muliggjørende faktorer

I følgende kapittel kommer jeg til å presentere fire episoder som beskriver muliggjørende faktorer for elevenes progresjon innenfor den tilsiktede målkunnskapen (institusjonalisering, regulering, miljø med adidaktisk potensial og sammenhenger). Figur 14 viser en oversikt over disse muliggjørende trekkene ved undervisningssituasjonen med et flytskjema.



Figur 14. Oversikt over muliggjørende trekk ved undervisningssituasjonen

5.3.1 Institusjonalisering

Det første funnet jeg ønsker å synliggjøre kom som en følge av gode forberedelser. Ettersom relativ frekvens var et sentralt begrep i oppgavene, tenkte jeg det var hensiktsmessig å gå grundig gjennom. Derfor hadde jeg forberedt meg på å gå gjennom og tydeliggjøre uttrykket "relativ frekvens" i fellesskap under devolusjonen. Dette responderte elevene bra på og så ut til å få en god forståelse av ut fra måten de hadde løst oppgavene på. Flere uttrykte seg positivt til at jeg gikk gjennom begrepet på forhånd:

285. Lærer	Hvilke deler av oppgavene opplevde dere som mest utfordrende, og hvorfor?
286. Petter	Kanskje å forstå begrepet relativ frekvens. For det var ukjent begrep for meg da.
287. Lærer	Mhm, hjalp det da at jeg tok den gjennomgangen på forhånd? Eller var det, altså, klarte dere å se relasjonen mellom
288. Petter	_Ja dersom jeg hadde hoppet rett i det så hadde jeg begynt å lure hva er relativ frekvens, så det var bra med gjennomgang.

[I_G3_05.11.2019]

425. Lærer	Hjalp det, altså relativ frekvens er jo et uttrykk dere sikkert ikke hadde hørt før. Hjalp det at jeg gikk gjennom det på forhånd tror dere?
426. Pål	Ja, det hjalp ganske mye.
427. Ane	Ja.
428. Lærer	Dere klarte å se sammenhenger mellom det eksempelet jeg viste, selv om det var et helt annet eksempel, så hjalp det for å
429. Pål	_Mhm

[I_G2_05.11.2019]

5.3.2 Regulering

Underveis i de (tiltenkte) adidaktiske fasene (aksjons-, formulerings- og valideringssituasjonene) oppstod situasjoner som gjorde at jeg som lærer kunne muliggjøre progresjonen av kunnskapen hos eleven. Det var blant annet en anledning hvor Gruppe 1 skulle gjøre 50 nye trekninger, men ender opp med å gjøre for mange, og kommer ikke fram til en måte å løse det på:

77. Maren	Vi tok for mange vi skjønner du
78. Lærer	Hvor mange?
79. Maren	62, så vi må gjøre det på nytt. Fordi vi glemte å telle.
80. Lærer	Åja, jaja. Men jeg skjønner ikke, at dere gjorde 62?
81. Maren	Nei, vi skulle ta
82. Lærer	Åja sånn ja. Jaja, det dere eventuelt kan gjøre da. Det er bare å ta talla fra de 50 første, de 50 som dere gjorde. Også skal dere jo gjøre.. Eh, fleire etterpå, så da kan dere bruke de 12 neste, som de neste trekningene liksom. Skjønte dere?
83. Maren	Hvordan skal vi vite hvilke 12 vi skal ta da?
84. Lærer	Det er veldig godt spørsmål, hmm. Eeh, ja det det er et godt spørsmål. Bare ta 12 trekninger dere, istedenfor 50 også på en måte
85. Jonas	_Så tar vi bort de som blir trukket?
86. Lærer	Ja. Eller det blir jo ikke helt riktig det heller da men. Bare ta 62, bare skriv at dere tok 62, også deler dere på 62 det er det enkleste. Bare liksom istedenfor delt på 50, så skriver dere delt på 62, det går helt fint. Ja, eller var det her når dere gjorde 30 eller var det når dere gjorde 50? Åja, ja det var der ja. Så da bare skriver dere 112 istedenfor. Sant, for da har dere tatt 50+62. Så skriver dere delt på 112. Så går det heilt fint. Og da trenger dere ikke gjøre, da kan dere liksom.. Etterpå da, så skal dere jo. Ja, det går helt fint.
87. Maren	Resten gjør vi bare samme, sånn.
88. Lærer	Ja, mhm, da er det bare å fortsette som vanlig.
89. Thea	Ja.
90. Lærer	Supert.

[O_G1]

Det som skjedde her var at gruppen hadde gjort 62 trekninger i stedet for 50. Dette gjorde at de hadde utført til sammen 112 trekninger, og ikke 100. Tiden begynte å bli knapp, så da begynte på nytt med nye trekninger, valgte jeg å bryte den adidaktiske situasjonen og se om det fantes muligheter for å slippe å måtte gjøre alle 50 trekningene på nytt. Jeg foreslo først at de bare tar de 50 første trekningene og sparer de 12 siste til neste trekning. Men dette innser vi blir et problem da det ikke er mulig å avgjøre hva som var de 12 siste trekningene siden de talte opp antall farger ved å sette streker etterhvert som de fikk fargen. Etter et forslag om å trekke 12 nye og ta bort de, kommer jeg på at det er bedre at de bare bruker de 62 trekningene som de hadde gjort. For å finne den relative frekvensen nå, trengs det bare å dele på 112 i stedet for 100.

En annen episode var under valideringen, da de forskjellige gruppene skulle sammenligne svarene sine med resten av klassen. Tanken bak dette var at jeg skulle legge sammen alle 8 gruppene sine trekninger og se på den totale relative frekvensen, slik at elevene også kunne sammenligne sine svar med totalen. Mens jeg synliggjorde alle 8 gruppene sine svar på tavla kom det fram at den ene gruppen hadde gjort en feil som gjorde at resultatet deres ikke var helt pålitelig:

155. Lærer	(...) Så vi kan begynne med den fremste gruppa her, hvor mange grønne fikk dere?
156. Gruppe	Vi fikk 80.
157. Lærer	Hvor mange blå?
158. Gruppe	49
159. Lærer	Hvor mange rosa?
160. Gruppe	56
161. Lærer	Men, eh blir det her 200?
162. Gruppe	Det var det vi ikke skjønte helt.
163. Lærer	Okay, men da tror jeg vi venter litt med de tallene fordi det er litt usikkerhet i datamateriale. Så jeg tror vi avventer de litt. For da må det vel ha skjedd et eller annet rart.

[O_H]

Det kan være flere grunner til at denne gruppen ikke fikk 200 til sammen. Om de hadde vært sikker på at grunnen var at de hadde gjort for få trekninger hadde det ikke vært noe problem å inkludere det i totalen, litt som forrige situasjon. Men de trodde de hadde gjort 200 trekninger, og da kan de ha glemt mange av en farge, så jeg besluttet at datamaterialet ikke var sikkert nok til at vi skulle ta det med i den totale utregningen. Her valgte jeg å tilpasse dette og bare inkludere 7 av gruppene sine resultater slik at jeg deler antallet farger på 1400 i stedet for 1600.

Utover dette var det en situasjon hvor jeg så det hensiktsmessig å tilpasse opplegget ved å få oppmerksomheten til klassen. Det var overraskende mange spørsmål rundt oppgaven med grafen og hva de skulle gjøre, selv om det etter hva jeg kunne forstå sto tydelig i oppgaveteksten. Men for å øke sjansen for at alle gjorde som de skulle, valgte jeg å forklare den oppgaven i fellesskap så de fikk høre det i tillegg til å lese oppgaveteksten.

328. Lærer	Var det noe med oppgaveteksten som opplevdes som uklar eller utydelig?
329. Hanne	Nei
330. Trine	_Det var bare på grafen da, vi tulla litt
331. Hanne	Ja, grafen mest
332. Trine	Men det var egentlig bare fordi jeg tror ikke vi leste helt ordentlig først, men vi forstod det etterhvert.
333. Lærer	Ja, hjalp det at jeg gikk gjennom litt sånn før den oppgaven, jeg vet ikke om dere hadde kommet til den oppgaven før jeg gjorde det eller om dere hadde begynt men, hjalp det at jeg gikk gjennom og forklarte veldig spesifikt hva
334. Trine	_Ja det hjalp
335. Hanne	Mhm

[I_G4_05.11.2019]

5.3.3 Miljø med adidaktisk potensial

Etter å ha lest gjennom datamaterialet fant jeg situasjoner som indikerer at elevene gjennom samarbeid oppnår progresjon i målkunnskapen ved å løse oppgavene. De gjør seg opp tanker og skriver hypoteser om hvor mange kuler det er av hver farge.

27. Jonas	<u>Ut ifra trekningene du nå har gjort. Har du noe mer informasjon om hvor mange det kan være av de ulike sortene? Hvorfor/Hvorfor ikke?</u>
28. Maren	Altså det ser ut som det er mer rosa i hvert fall, for det var jo fem rosa og to blå.

29. Thea _Mhm

30. Maren Så kanskje at det er to rosa og ehm, eller så er det tre rosa og én grønn og én blå, eller to rosa, to grønn og én blå. Jeg tror mest det er rosa da

31. Thea Ja, vi kan skrive det da

(Jonas skriver ned)

32. Jonas 3-1-1, altså 3 rosa, 1 grønn og 1 blå, eller 2-2-1?

33. Maren Det går an skrive da, fordi det ser ut som det, fordi det er ganske likt mellom blå og grønn

34. Jonas _Så 3-1-1

35. Maren _Ja, eller 2-2-1. Bare skriv begge. At det enten er det eller det.

[O_G1]

Her ser vi at elevene på Gruppe 1 diskuterer hvor mange det er av hver farge etter de 10 første trekningene. De fikk 5 rosa, 3 grønne og 2 blå. Maren uttrykker at hun tror det er flest rosa siden det er den fargen som har kommet flest ganger. Basert på trekningene deres lager de hypoteser om hvor mange det er. Enten, 3-1-1, eller 2-2-1. Oppgavene videre gjør at gruppen kan validere hypotesene og se om de stemmer. Dess flere trekninger de gjør, dess mer bestemt blir de på at hypotesen om at det er 2 rosa, 2 grønne og 1 blå stemmer. Her etter 112 trekninger:

91. Jonas <u>Kan du si noe om sammenhengen mellom relativ frekvens og antall kuler av hver farge? Hvor sikre er dere på hvor mange kuler det er av hver farge?</u>

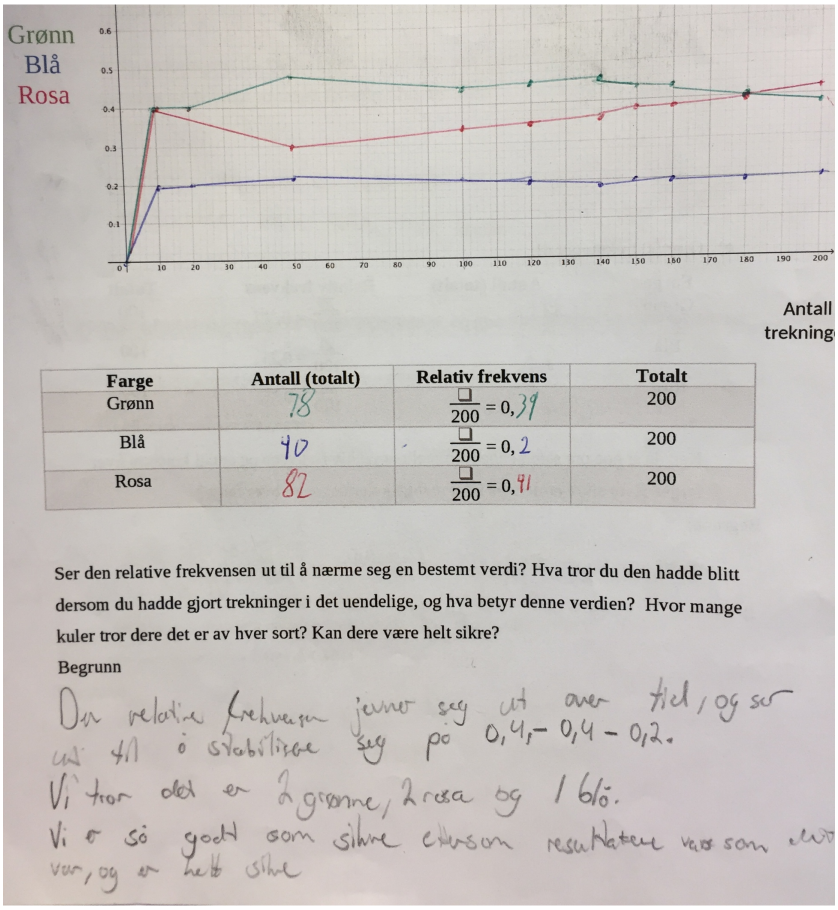
92. Thea Jeg tipper det er 2 grønne, 2 rosa og 1 blå

93. Jonas Grønn og rosa er veldig likt, mens blå er mindre

94. Maren Ja. Si at vi tror det er 2 grønn og 2 rosa, fordi antallet er ganske likt.

[O_G1]

Etter det har blitt gjort mange trekninger, argumenteres det altså her for at det må være 2 rosa og 2 grønne fordi det totale antallet med disse fargene er ganske likt. Blå er vesentlig mindre, derfor må det være 1 av den. Miljøet i oppgaven videre synliggjør at den relative frekvensen jevner seg ut med flere trekninger. Etter 100 trekninger blir elevene bedt om å tegne opp en graf for den relative frekvensen (oppgave f), og etter dette er det ingen av gruppene som svarer noe annet enn at det må være 2 rosa, 2 grønne og 1 blå. Figur 15 viser Gruppe 3 sitt svar på oppgave f:



Farge	Antall (totalt)	Relativ frekvens	Totalt
Grønn	78	$\frac{\square}{200}$ = 0,39	200
Blå	40	$\frac{\square}{200}$ = 0,2	200
Rosa	82	$\frac{\square}{200}$ = 0,41	200

Ser den relative frekvensen ut til å nærme seg en bestemt verdi? Hva tror du den hadde blitt dersom du hadde gjort trekninger i det uendelige, og hva betyr denne verdien? Hvor mange kuler tror dere det er av hver sort? Kan dere være helt sikre?

Begrunn

Den relative frekvensen jevner seg ut over tid, og ser ut til å stabilisere seg på 0,4 – 0,4 – 0,2.

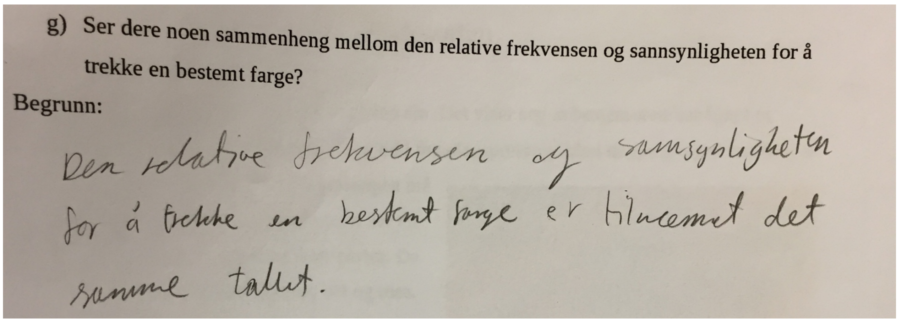
Vi tror det er 2 grønne, 2 rosa og 1 blå.

Vi er så godt som sikre ettersom resultatene var som de var, og er helt sikre

Figur 15. Gruppe 3 sin besvarelse på oppgave f

5.3.4 Sammenheng mellom relativ frekvens, sannsynlighet og antall kuler

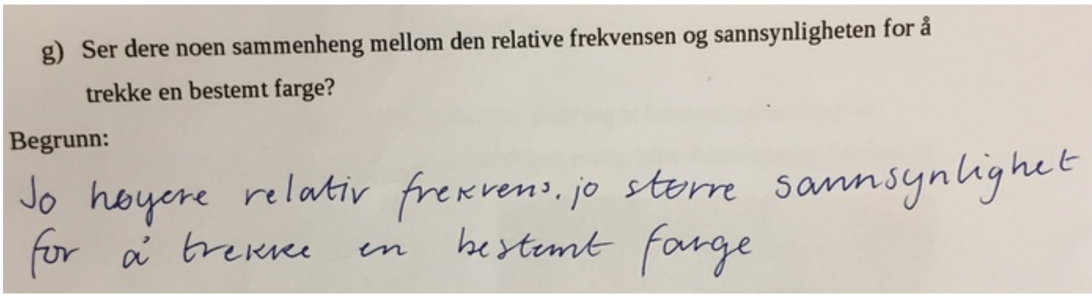
I oppgave g skulle elevene diskutere og skrive ned om de så noen sammenheng mellom den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge. Interessante funn viser her flere tilfeller på at elevene ser ut til å ha forstått denne koblingen. Figur 16 viser hva Gruppe 4 og 7 konkluderte med:



g) Ser dere noen sammenheng mellom den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge?

Begrunn:

Den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge er tilnærmet det samme tallet.



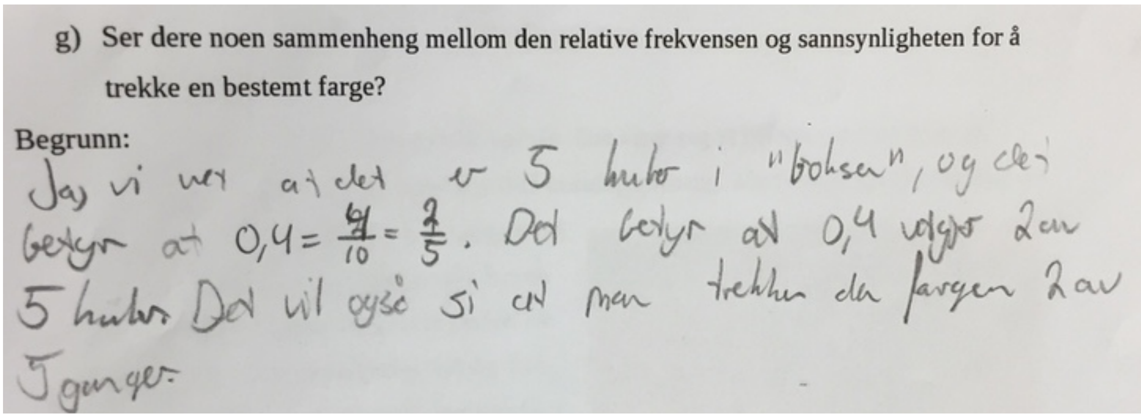
g) Ser dere noen sammenheng mellom den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge?

Begrunn:

Jo høyere relativ frekvens, jo større sannsynlighet for å trekke en bestemt farge

Figur 16. Gruppe 4 og 7 sine svar på oppgave g

Utover denne generelle koblingen mellom relativ frekvens og sannsynlighet kommer det fram flere spesifikke koblinger fra akkurat denne oppgaven. I figur 17 uttrykker Gruppe 3 hvordan koblingen mellom den relative frekvensen og antallet kuler i boksen er:



g) Ser dere noen sammenheng mellom den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge?

Begrunn:

Ja, vi vet at det er 5 kuler i "boksen", og det betyr at $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Det betyr at 0,4 utgjør 2 av 5 kuler. Det vil også si at man trekker den fargen 2 av 5 ganger.

Figur 17. Gruppe 3 sin besvarelse på oppgave g

I helklassediskusjonen i valideringssituasjonen spør jeg om hvorfor de mener det er 2 rosa, 2 grønne og 1 blå. En elev svarer at det i totalen er omtrent likt antall grønt og rosa, og sirka halvparten blå, derfor stemmer det overens med hypotesen om at det er dobbelt så mange rosa og grønne kuler som blå, altså 2-2-1. Videre da jeg spør om de ser sammenhengen mellom de relative frekvensene på 0,4, 0,4 og 0,2 som de har kommet fram til, og antallet kuler i flasken så kommer det følgende svar fra en elev:

206. Elev	Da er det 4/10 som blir forkortet til 2/5
207. Lærer	Ja, helt sant, sant? 0,4 er lik 4/10 som forkortes ned til 2/5. (...)

[O_H]

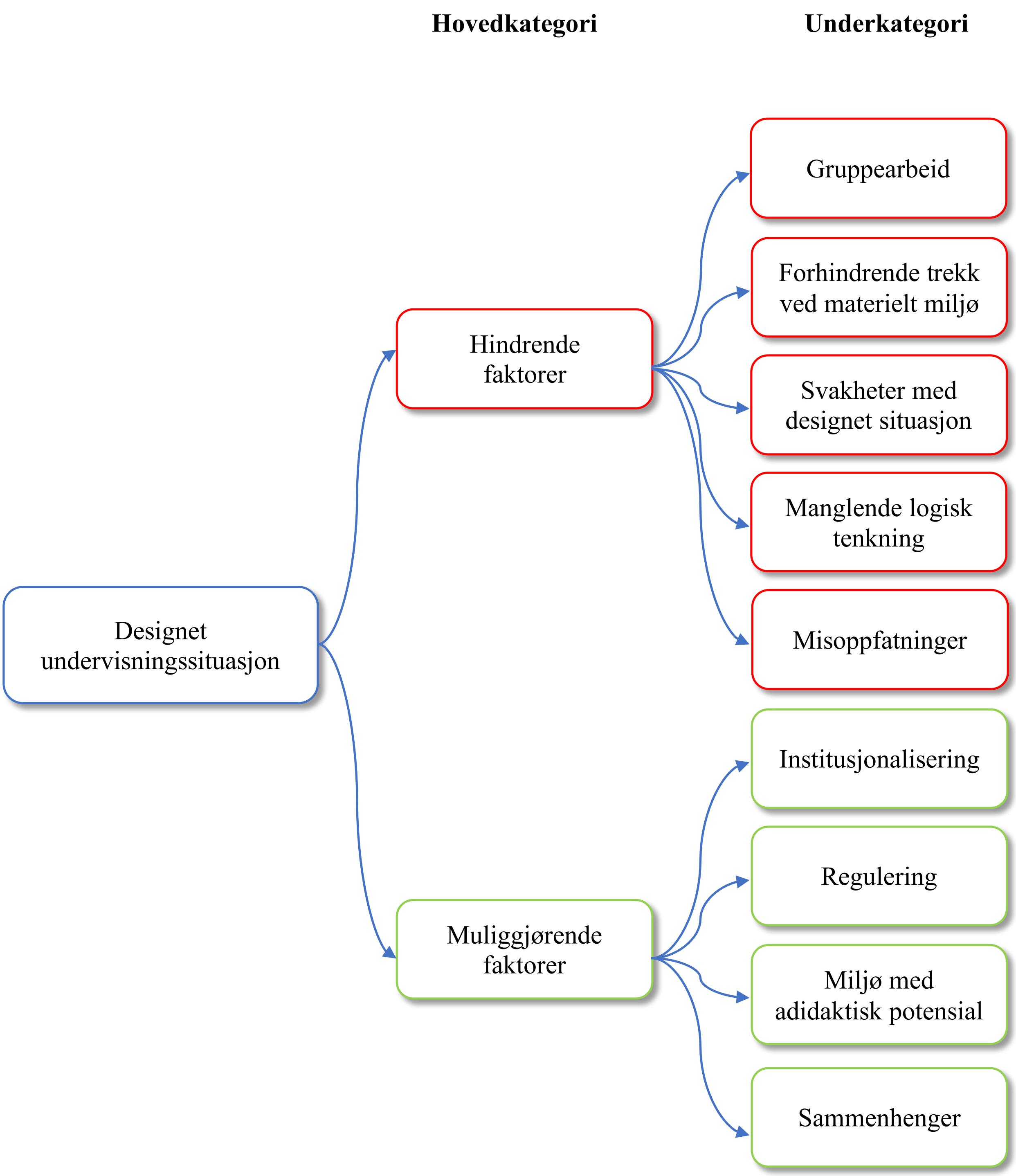
Her ble samme begrunnelse synliggjort som i figur 17, på hvordan en relativ frekvens på 0,4 kan knyttes opp mot 2 av 5 kuler. En annen interessant observasjon var det at Gruppe 2 hadde noe avvik fra 0,2 på blå, men ikke nok til at de var i tvil om fordelingen av antall kuler:

401. Lærer	Skilte resultatet deres mye fra det totale resultatet når vi la sammen resultatet til de forskjellige gruppene, husker dere det?
402. Ane	Det var på én farge det var litt annerledes husker jeg, var det blå vi hadde litt annerledes på?
403. Pål	Ja litt. Det var vel ganske likt, men ja det gikk litt lengre ned men (Viser til grafen), du så jo at det var det samme da.
404. Lærer	Det skilte seg ikke nok til at dere var i tvil om hvor mange kuler det var?
405. Ane	Nei.

[I_G2_05.11.2019]

6 Oppsummering av funn

Hensikten med prosjektet mitt har vært å teste validiteten til undervisningssituasjonen jeg designet der elever fra en 1T-klasse skulle utvikle kunnskap om "De store talls lov". Derfor har forskningsspørsmålet mitt vært: "*Hvilke faktorer ved den designede undervisningssituasjonen hindrer og muliggjør at elevene utvikler kunnskap om store talls lov?*" En validering av undervisningssituasjonen kommer i neste kapittel. Dette er en sammenligning av a priori og a posteriori analyser. Her kommer en oppsummering av de identifiserte funnene jeg la fram i forrige kapittel. Flytskjemaet i figur 18 viser ulike kategorier fra gjennomføringen jeg har funnet at kan påvirke muligheten elevene har for å oppnå målkunnskapen. De to hovedkategoriene (hindrende faktorer og muliggjørende faktorer), er delt inn i henholdsvis fem og fire underkategorier. Episoder jeg identifiserte som hindrende faktorer for at elevene oppnådde den tilsiktede målkunnskapen karakteriserte jeg som aspekter ved gruppearbeid, materielt miljø, den designede situasjonen, logisk tenkning og misoppfatninger. Episoder som muliggjør oppnåelse av målkunnskapen har jeg karakterisert som institusjonalisering, regulering, miljø med adidaktisk potensial og sammenhenger. Relasjonen mellom hovedkategoriene og underkategoriene kommer fram i figur 18.



Figur 18. Flytskjema over hovedkategoriene og underkategoriene av faktorer som påvirker kunnskapsutviklingen hos elevene

7 Drøfting (sammenligning av a priori og a posteriori analyser)

I følgende kapittel kommer jeg til å drøfte funnene fra denne studien. Denne drøftingen kommer til å basere seg på en sammenligning av a priori og a posteriori analyser, som vil fungere som en validering av forskningsprosjektet. Valideringen går altså ut på å diskutere relasjonen mellom intensjonen og resultatet med den designede situasjonen. Fokuset i drøftingen vil være på hvordan jeg opplever at de ulike episodene fra resultatet påvirker elevene sine muligheter til å oppnå progresjon av kunnskapen som kjennetegner store talls lov. Først kommer jeg til å kommentere funnene som ble identifisert som hindrende faktorer ved undervisningssituasjonen for oppnåelse av målkunnskapen, så kommer en diskusjon av situasjoner som be identifisert til å være muliggjørende faktorer ved undervisningssituasjonen.

7.1 Diskusjon av forhindrende faktorer ved undervisningssituasjonen

I følgende delkapittel kommer jeg til å drøfte episodene som beskriver hindrende faktorer for at elevene skal oppnå progresjon med tanke på å nå den tiltenkte målkunnskapen.

7.1.1 Gruppearbeid

Noe av hensikten med å dele elevene inn i grupper var at alle skulle involvere seg i oppgaven. Dette var til å begynne med stort sett tilfelle hos alle gruppene, da de fordelte arbeidsoppgaver innad i gruppen. Men etterhvert som de jobbet seg gjennom oppgavesettet var det en tendens at noen tok seg av utregningen og besvarelsen av oppgavene, mens de andre på gruppen bare gjennomførte trekningene. Ettersom jeg hadde sett for meg at elevene skulle diskutere og sammen finne fram til svar på oppgavene, førte dette til at gruppesamarbeidet enkelte ganger ble et hinder i å tilegne seg målkunnskapen for de elevene som ikke tok del i utregningene og besvarelsene. Samtalene i ytringene 90-91 og 140-145 kan tyde på at Maren og Thea fraskriver seg ansvaret med utregningene og legger det over på Jonas. Dette illustrerer hvordan gruppearbeidet potensielt kan være et hinder for at Maren og Thea oppnår målkunnskapen. På spørsmål om hva gruppene synes om det å jobbe i grupper var de fleste positive, og det blir påpekt at det er viktig å fordele oppgaver når man driver gruppesamarbeid.

289. Lærer	Hvilke erfaringer har dere med gruppearbeid i matematikk fra før?
290. Petter	At det kan ofte bli sånn det er en som tar hovedansvaret da, at det er viktig å fordele oppgavene likt egentlig.

[I_G3_05.11.2019]

7.1.2 Forhindrende trekk ved materielt miljø

I a priori analysen ga jeg uttrykk for at jeg hadde forsøkt å lage en situasjon som var meningsfull for elevene og som de skulle ta eierskap til. Dette vil jeg si lyktes, da alle jeg snakket med både under og i etterkant av realiseringen uttalte seg positiv til oppgaven. Det som derimot viste seg, som jeg ikke helt hadde forventet eller forutsett i a priori analysen, var at elevene kunne bli så opphengt i trekkingen at de ikke fikk med seg når de hadde gjort så mange trekninger som oppgaven spurte om. Første episode var fra oppgave e, hvor Gruppe 1 gjorde for mange trekninger. Hvordan vi løste dette kommer jeg tilbake til i kapitlet for muliggjørende faktorer, men enten sto det ikke tydelig nok i oppgaveteksten hva de skulle gjøre, eller så leste de ikke oppgaven godt nok. Fra resultatet ser vi at gruppen også i oppgave f går for fort fram og ikke får med seg før etter de har gjort de 100 siste trekningene at de egentlig skulle ha ført opp den relative frekvensen i grafen for hver tjuende trekning.

Dette tolker jeg dithen at elevene blir så ivrige med hva de skal gjøre rent praktisk med trekninger og fargelegging av graf, at de glemmer å lese oppgaven nøye nok til å få med seg hva de skal gjøre underveis. At dette skulle bli en hindring for elevene hadde jeg ikke forutsett og jeg vil påstå at det gjorde at fokuset på intensjonen med oppgaven forsvant litt som følge av dette. Situasjonen førte til at elevene fikk dårligere tid, og ble et hinder for å oppnå utvikling av målkunnskapen. Det at fokuset på å snu flasken og trekke kuler ble større enn fokus på selve matematikken med tanke på målkunnskapen mener jeg indikerer et avvik fra en av antagelse jeg gjorde i a priori analysen om at det materielle miljøet (oppgaveheftet og flaskene) ville gi tilstrekkelig feedback for å sikre ønsket progresjon for elevene i oppgaven.

At Thea ikke leste oppgaveteksten, selv om det ble sagt i starten at de måtte lese oppgavene nøye, gjorde at Thea brøt den didaktiske kontrakten. Det adidaktiske miljøet hos gruppen ble svekket som en følge av at Thea brøt reglene for å operere i situasjonen. Dette gjorde at elevenes progresjon ble forhindret.

7.1.3 Svakheter med den designede situasjonen

Da jeg designet oppgavene fokuserte jeg på å lage oppgaver som var slik at de la til rette for diskusjon elevene seg i mellom og at målkunnskapen skulle bli lettere tilgjengelig for alle gjennom de adidaktiske fasene. Men sett i ettertid ble nok ikke elevene utfordret på å formulere eller reflektere rundt målkunnskapen i ønsket grad. Dette tror jeg skyldes delvis at jeg ikke var påpasselig nok med å lage en oppgave som spurte spesifikt om dette. Det førte til at det var mangel på rom for å formulere målkunnskapen. Da gruppene ikke ble stimulert til å diskutere og snakke like mye om matematikken som jeg hadde sett for meg, ble ikke formuleringssituasjonen gjennomført helt slik det var tenkt. Dette kan for enkelte ha vært et hinder i å utvikle den tilsiktede målkunnskapen. Fra den didaktiske analysen var et viktig funn i eksperimentet til Brousseau (2002) at elevene fikk øvd på matematisk vokabular og at de snakket matematikk. Elevene fikk i aller høyeste grad snakket og diskutert matematikk under dette opplegget også, men ikke så mye om selve matematikken innenfor "De store talls lov" som intensjonen min var. Øvrige resultat indikerer at de aller fleste gruppene hadde en god forståelse av hva store talls lov innebærer til slutt ettersom de klarte å knytte den relative frekvensen opp mot antall kuler av hver farge, men faktum at elevene ikke fikk diskutert og snakket innad i gruppene om formulering av målkunnskapen tror jeg kan ha bidratt til en hindring av utvikling av progresjonen av kunnskapen.

Dersom jeg skulle laget en oppgave der intensjonen var at elevene skulle komme fram til formuleringer av målkunnskapen av store talls lov, hadde jeg nok fokusert på at jeg ikke var ute etter et bestemt svar, men at oppgaven la til rette for at elevene kunne diskutere seg imellom og komme fram til ulike setninger rundt oppdagelsene de hadde gjort i løpet av oppgavene. Ved å la elevene synliggjøre dette innad i gruppen, men også for de andre gruppene, tror jeg det kunne bidratt til at de hadde blitt enda mer bevisst på hva de faktisk hadde oppdaget gjennom dette forsøket. Men de hadde vært avhengig av oppdagelsene knyttet til trekningene for å kunne svare på dette, så jeg tenker det ville vært naturlig å legge denne oppgaven inn etter de hadde tegnet opp grafene av den relative frekvensen og funnet sammenhengen mellom den og antall kuler. Figur 19 viser et forslag til en Oppgave h (ekstraoppgavene h og i hadde da blitt i og j):

h) Diskuter i gruppa hva resultatet dere har kommet fram til nå egentlig innebærer. Formuler noen setninger som sier noe om sammenhengen mellom utviklingen av andelen av en bestemt farge og sannsynligheten for å trekke denne fargen.

Figur 19. Forslag til en ny oppgave h

Med en slik oppgave sørger jeg for at elevene må uttrykke seg muntlig og diskutere en formulering og forhåpentligvis sammen kommet fram til noe som kan minne om den tilsiktede målkunnskapen. Ved å spørre om sammenhengen mellom utviklingen av andelen håper jeg at de ville tatt med momentet at det må gjøres mange forsøk, siden andelen først stabiliserer seg ved å gjøre mange forsøk. Og ettersom de har skjønt at en relativ frekvens på 0,4 betyr at det er $\frac{2}{5}$ sannsynlighet for å trekke grønn i forsøket de gjorde, er forventningen at de skal kunne si mer generelt at den relative frekvensen, eller andelen, etter mange forsøk vil være lik sannsynligheten for hendelsen.

Om en slik oppgave hadde blitt inkludert i oppgaveheftet hadde det blitt et miljø for formulering, og jeg hadde i tillegg hatt mulighet til å la elevene forklare sine forskjellige formuleringer til hverandre og lagt til rette for enda et moment til valideringssituasjonen.

7.1.4 Manglende logisk tenkning

Intensjonen min med de første oppgavene var å se hvilke tanker elevene hadde angående hvilken informasjon de har fått om hvor mange kuler det er av hver farge tidlig i trekningene. Forventningen min her var at de kom til å gjøre seg opp en mening om antallet, men at de ville være klar på at de slett ikke kunne være sikre på antallet ettersom de hadde gjort så få trekninger. Jeg trodde de ville være tydelige på at 10 trekninger ikke nødvendigvis gir så mye info ettersom det kan være litt tilfeldig. Men besvarelsene til Gruppe 2 og 4 (figur 11 og 12) viser at gruppene kommer med ganske bastante antagelser allerede i oppgave b.

Begrunnelsene disse gruppene bruker bærer preg av det Borovcnik og Peard (1996) karakteriserer som logisk tenkning. Elevene noterer ned resultatet av de 10 første trekningene og drar en slutning om at fordi de trakk flest grønne, må det være flest antall grønne kuler. Gruppe 2 som hevdet at det er flere blå og grønne enn rosa fikk etterhvert som de gjorde flere trekninger erfare at slutningen de tok etter de første 10 trekningene ikke stemte. Det var også andre grupper som påstod at de så ut fra de første trekningene at det måtte være 2 grønne, 2 rosa og 1 blå. At elever så tidlig gjør seg opp en så sterk antagelse kan være med å begrense utviklingen av den målkunnskapen det er tenkt at de skal sitte igjen med. For det kan være riktig svar, men gale resonneringer til hvorfor det er slik. På den andre siden kan det at Gruppe 2 først svarer at det er flere blå og grønne basert på de første 10 trekningene gjøre at de får en aha-opplevelse når de etter mange trekninger innser at dette ikke stemmer. Så på den måten kan det faktisk bidra til å øke forståelsen og progresjonen av målkunnskapen.

7.1.5 Misoppfatninger

Hypotesen min fra den a priori analysen var at elevene ikke nødvendigvis hadde fått helt grepet om misoppfatningene fra den epistemologiske analysen som kan knyttes opp mot store talls lov, selv etter å ha gjennomført dette forsøket der de potensielt har erfart noen lunde tilsvarende situasjoner. Den første misoppfatningen som viser seg at elevene fortsatt har går på det Tversky og Kahneman (1996) karakteriserer som tilfeldig fordeling. I helklassesamtalen under institusjonaliseringen kom det fram i ytringene 207-210 at en elev forklarer at etter å ha trukket 6 grønne kuler på rad, øker ikke sannsynligheten for at det vil komme en blå kule i neste trekning med: "*fordi hver gang du vender den boksen, så er sannsynligheten for at det skal komme en blå like stor hver gang. Men greia er at det er veldig liten sannsynlighet for å få 6 grønne på rad, så det er enda større sjanse for at den rekken kommer til å brytes opp.*"

Dette tolker jeg som at eleven egentlig har forstått at sjansen for å få blå er like stor for hver trekning, men at når han skal begrunne det så skorter det noe i resonneringen. Eleven sier at det er lite sannsynlig å få 6 grønne på rad, noe som stemmer. Men da det først hadde blitt det (som også var tilfelle hos flere av gruppene under forsøket), uttrykker eleven at det er større sjanse for at rekken brytes opp. Dette tyder på at noen ikke helt har forstått hva uavhengige hendelser innebærer. Misoppfatninger som dette kan være et hinder i utviklingen av forståelse rundt den tilsiktede målkunnskapen på den måten at dersom elevene tenker at de har fått en sekvens på for eksempel 6 like farger, er det større sannsynlighet for en annen farge fordi store talls lov sier at det vil "jevne seg ut" i det lange løp. Dette blir en gal oppfatning av tilfeldig fordeling. Det vil jevne seg ut, ikke nødvendigvis på de første trekningene etter en slik sekvens, men i det lange løp. Jo flere trekninger man gjør, jo mindre vil 6 like farger ha å si for utslaget på totalen.

Besvarelsene fra a posteriori analysen, synliggjort i figur 13, viser at elever også etter å ha gjennomført dette forsøket har misoppfatninger rundt at man ikke tar hensyn til utvalgsstørrelse når man vurderer sannsynlighet. Fra a priori analysen hadde jeg sett for meg at noen elever fortsatt ville ha denne misoppfatningen, til tross for at de nettopp hadde gjennomført et forsøk som kunne vise at det ikke nødvendigvis var slik. Dette mener jeg kan være et hinder for at elevene oppnår full forståelse rundt den tilsiktede målkunnskapen. Men det var også grupper som skjønte at det kunne svinge mer i et lite utvalg. I intervjuet med en gruppe (ytring 243-249) viser en elev forståelse av at det skal mindre til for at det blir trukket få kuler som avviker fra "normalen", enn at det blir trukket mange som avviker fra "normalen".

7.2 Diskusjon av muliggjørende faktorer ved undervisningssituasjonen

I følgende kapittel kommer jeg til å drøfte episodene som beskriver muliggjørende faktorer for at elevene kunne utvikle kunnskap om den tilsiktede målkunnskapen.

7.2.1 Institusjonalisering

Et viktig mål jeg satte meg i a priori analysen var at oppgavene skulle være tydelig formulert slik at elevene ikke skulle møte potensielle hindringer som en følge av dårlig formulerte oppgaver. Et viktig aspekt her var at alle uttrykk burde være forståelige ut fra forkunnskapene til elevene. Derfor hadde jeg forberedt meg på å gå gjennom og tydeliggjøre uttrykket "relativ frekvens" i fellesskap under devolusjonen. A posteriori analysen viser at elevene synes det var nyttig. Både analyse av datamaterialet og samtaler med elevene underveis og etter opplegget indikerte at det var smart å gå gjennom dette begrepet på forhånd ettersom det var nytt for de aller fleste, og kunne være vanskelig å skjønne bare ut ifra oppgaveheftet.

Det at jeg på forhånd gjennom den epistemologiske analysen hadde blitt bevisst på hvilke matematiske prosesser elevene gikk gjennom underveis i opplegget mener jeg også bidrog til at jeg lettere kunne gi elevene hjelp som muliggjorde progresjon i målkunnskapen. Dette gjorde at jeg kunne tilpasse både oppgavesettet som la til grunn de adidaktiske fasene, men også som hjalp meg til å være godt forberedt på eventuelle reguleringer (som jeg skal snakke mer om i neste avsnitt), og tilpasninger i hele undervisningssituasjonen. Jeg hadde et mål om at elevene gradvis skulle oppnå progresjon i kunnskapen som kjennetegner store talls lov, og dette indikerer flere av svarene til elevene. Elevene virker til å se at de må gjøre mange trekninger før de kan uttale seg sikkert om hvor mange kuler det er av hver farge. Til slutt ser de også sammenhengen mellom den relative frekvensen og antallet kuler av hver farge, samt sannsynligheten for å trekke en bestemt farge. Dette viser viktigheten av god planlegging og forberedelser gjennom en epistemologisk og didaktisk analyse.

7.2.2 Regulering

Noe jeg la vekt på fra a priori analysen var at jeg under de tiltenkte adidaktiske fasene (aksjons-, formulerings- og valideringssituasjonene) skulle håndtere utviklingen av miljøet. Dersom det oppstod uventede situasjoner som gjorde at progresjonen i arbeidet med å løse oppgaven ikke gikk som planlagt, var jeg klar på at enkelte reguleringer måtte gjøres. Nettopp dette skjedde ved en anledning i aksjonssituasjonen hvor Gruppe 1 skulle gjøre 50 nye trekninger, men endte opp med å gjøre for mange, og kom ikke fram til en måte å løse det på. Situasjonen er beskrevet i a posteriori analysen, og jeg endte opp med å bryte den adidaktiske situasjonen for at elevene ikke skulle begynne på nytt med trekningene ettersom det ikke var tid til det. Gjennom samtalen (ytring 77-90) med elevene blir vi enige om at de kan operere med 112 trekninger i stedet for 100. Dette sørger for at det tydeliggjøres for elevene at det ikke må være et bestemt totalt antall, men at man til en hver tid kan finne den relative frekvensen uansett hvor mange trekninger som er gjort. Imidlertid gjør denne reguleringen av meg som lærer at denne aksjonssituasjonen ender opp med å bli en didaktisk situasjon, og ikke en adidaktisk situasjon som det var tenkt. Likevel vil jeg si at reguleringen bidrog til å muliggjøre progresjon av kunnskapen, og de innså at de ikke trengte å gjøre alle trekningene på nytt.

Den andre episoden som ble synliggjort i a posteriori analysen var en episode under valideringssituasjonen, da de forskjellige gruppene skulle sammenligne svarene sine med resten av klassen. Målet med dette var at jeg skulle legge sammen alle 8 gruppene sine trekninger og se på den totale relative frekvensen, slik at elevene også kunne sammenligne sine svar med totalen. Mens jeg synliggjorde alle 8 gruppene sine svar på tavla kom det fram at den ene gruppen hadde gjort en feil som gjorde at resultatet deres ikke var pålitelig. Derfor valgte jeg å tilpasse dette ved å kun inkludere 7 av gruppene sine resultater. Det kan være flere grunner til at denne gruppen ikke fikk 200 til sammen. Om de hadde visst grunnen var at de hadde gjort for få trekninger, så hadde det ikke vært noe problem å inkludere det i totalen, litt som forrige situasjon. Men de trodde de hadde gjort 200 trekninger, og da kan de ha glemt mange av en farge, så jeg besluttet at datamaterialet ikke var sikkert nok til at vi skulle ta det med i den totale utregningen.

Utover dette var det situasjonen hvor jeg så det hensiktsmessig å forklare oppgaven som inneholdt grafen. På forhånd hadde jeg ikke sett for meg at det kom til å bli mange spørsmål om hva de skulle gjøre ettersom jeg trodde det sto tydelig nok i oppgaven. Men da det begynte å komme ganske mange spørsmål om oppgaven fra flere av gruppene valgte jeg likevel å forklare den i fellesskap for å øke sjansen for at elevene skjønte hva de skulle gjøre. Datamaterialet indikerer at for de aller fleste gruppene bidrog dette til at oppgaven ble forstått. Jeg la dermed til rette for å ivareta progresjonen i kunnskapen ved regulering. Samtidig viste det seg, som tidligere nevnt, at den ene gruppen likevel gjorde alle 100 trekningene uten å notere den relative frekvensen for hver tjuende trekning. Lærdommen er at en beskjed ikke nødvendigvis er forstått selv om den er blitt sagt.

7.2.3 Miljø med adidaktisk potensial

Fra a priori analysen var målet med de første oppgavene i oppgaveheftet at elevene skulle diskutere innad i gruppen hvordan den relative frekvensen endrer seg etterhvert, og gjøre seg opp tanker og skrive en hypotese på hvor mange kuler det var av hver farge. Resultatene fra a posteriori analysen viser at Gruppe 1 diskuterer hvor mange det er av hver farge etter de 10 første trekningene. De lager hypoteser på at det enten er 3 rosa, 1 grønn og 1 blå, eller 2 rosa, 2 grønne og 1 blå kule, basert på at de trakk 5 rosa, 3 grønne og 2 blå. Videre validerer gruppene hypotesene og ser om de stemmer. Etterhvert som de gjør flere trekninger indikerer ytringene deres at de blir mer og mer sikre på at hypotesen om 2-2-1 stemmer. Argumentasjonen som blir brukt for at det må være 2 rosa og 2 grønne er at det totale antallet med disse fargene er ganske likt. Blå er vesentlig mindre, derfor må det være 1 av den. Ettersom miljøet i oppgaven videre synliggjør at den relative frekvensen jevner seg ut med flere trekninger kan dette tyde på at elevene får tilstrekkelig feedback og stimuli til å utvikle den ønskede kunnskapen om store talls lov gjennom oppgavene. Det er et spennende funn at etter de siste 100 trekningene er det ingen av gruppene som svarer noe annet enn at det må være 2 rosa, 2 grønne og 1 blå. Dette indikerer at det å få en grafisk framstilling av endringen av den relative frekvensen, gjør elevene sikrere på at hypotesene stemmer.

7.2.4 Sammenheng mellom relativ frekvens, sannsynlighet og antall kuler

Målet mitt for oppgave g var at elevene etter å ha gjort alle 200 trekningene og fylt ut grafen, skulle klare å se koblingen mellom den relative frekvensen, sannsynligheten for å trekke en bestemt farge, samt hvor mange kuler det ville si at det var av hver farge. Fra a posteriori analysen kommer det fram flere tilfeller på at elevene ser ut til å ha forstått denne koblingen. Gruppe 4 sin besvarelse, at den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge er tilnærmet det samme tallet, samsvarer i høy grad med det Lysø (2010) sin teori som kommer fram i den epistemologiske analysen om at vi i skolematematikken nøyer oss med å gi tilnærmede sannsynligheter når vi anvender store talls lov. Dette viser at elevene gjennom de adidaktiske fasene har kommet frem til deler av målkunnskapen og at oppgavene dermed har vært en muliggjørende faktor i undervisningssituasjonen med tanke på å sikre ønsket progresjon av kunnskapen som kjennetegner store talls lov. Gruppe 7 sin besvarelse peker på en annen sammenheng, nemlig at jo høyere den relative frekvensen er, jo større sannsynlighet er det for å trekke den fargen. Her har elevene funnet en direkte sammenheng mellom relativ frekvens og sannsynlighet som samsvarer med det jeg har funnet i a priori analyse.

Utover denne generelle koblingen mellom relativ frekvens og sannsynlighet kommer det fram i a posteriori analysen flere spesifikke koblinger fra akkurat denne oppgaven. I figur 17 har Gruppe 3 uttrykt hvordan koblingen mellom den relative frekvensen og antallet kuler i boksen er. De uttrykker at en relativ frekvens på 0,4 utgjør 2 av 5 kuler, ettersom $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Svaret som blir gitt i ytring 208 fra helklassediskusjonen i valideringssituasjonen peker på det samme, noe som sammen med de skriftlige svarene indikerer at elevene ser den ønskede sammenhengen mellom relativ frekvens, sannsynlighet og antall kuler i flasken. Dette mener jeg er faktorer som muliggjør oppnåelse av målkunnskapen knyttet til store talls lov. I observasjonen fra intervjuet med Gruppe 2 der det kommer fram at de hadde noe avvik fra en relativ frekvens på 0,2 på blå (den var 0,245) var dette likevel ikke nok til at de var i tvil om antall kuler. Det indikerer at ettersom elevene visste at det var 5 kuler i boksen, kunne resultatet etter 200 trekninger vike noe fra den teoretiske sannsynligheten, og likevel gi et godt svar på hvor mange kuler det var av hver farge i boksen.

8 Avslutning

Dette eksperimentet er en gjennomføring av en designet undervisningssituasjon og kan være nyttig for lærere som ønsker inspirasjon og økt innsikt i designutvikling og implementering av undervisningssituasjoner med store talls lov som målkunnskap. Jeg har i arbeidet med dette prosjektet funnet både hindrende og muliggjørende trekk ved undervisningssituasjonen for at elevene skulle oppnå kunnskap om store talls lov. Jeg har blant annet erfart at misoppfatninger knyttet til sannsynlighetsregning fremdeles preger elever i skolen, slik blant andre Tversky og Kahneman (1974) forfekter. Derfor mener jeg at man som lærer burde være ekstra oppmerksom på disse typiske misoppfatningene i sin undervisning av sannsynlighetsregning. Ved å være godt forberedt, for eksempel ved å gjøre en a priori analyse, kan man sørge for at man er bevisst på hva elevene finner utfordrende og dermed være i stand til å hjelpe de med arbeidet videre på en god måte.

Gjennom prosessen med dette prosjektet har jeg oppdaget at en lærer kan tilegne seg viktige didaktiske verktøy ved å studere målkunnskapens natur. I den epistemologiske analysen jeg gjorde ble jeg bevisstgjort på hvilke matematiske prosesser elevene må gjennom for å kunne tilegne seg målkunnskapen om store talls lov. Dette fører til at jeg kan utvikle oppgaver som gir et potensial for elevene til å lære den tiltenkte målkunnskapen. Dessuten sørger det for at jeg som lærer er godt forberedt til utviklingen av undervisningssituasjonen og kan tilpasse økta videre ettersom hvordan jeg ser elevene responderer på opplegget.

Teorien for didaktiske situasjoner (TDS), som dette prosjektet er inspirert fra, er et teoretisk rammeverk som synliggjør ulike didaktiske fenomen som forekommer i en undervisningssituasjon der hensikten er at elevene skal tilegne seg en bestemt målkunnskap. Det legger til rette for at man som lærer kan validere undervisningssituasjonen, altså sammenligne a priori og a posteriori analyser, og dermed planlegge, designe, realisere, analysere og evaluere egen undervisning på en grundig og solid måte. Jeg er overbevist om at en slik prosess vil bidra til å bedre kvaliteten på undervisningen. Selvfølgelig vil dette kreve både tid og ressurser for en lærer. Men etter å ha erfart og evaluert i dette eksperimentet hvordan et slikt opplegg ble tatt imot og gjennomført av elevene, er jeg overbevist om at det er verdt det. Et slikt fokus på undervisningen legger i større grad opp til at elevene finner ut av matematiske sammenhenger selv, og i samspill med medelever. Det at elevene selv står for de matematiske oppdagelsene er noe Strømskag (2017b) sitt instruksjonsdesign i matematikk legger til rette for. Jeg tror det kan bidra til en mer motiverende matematikkundervisning enn hva den tradisjonelle tavleundervisningen gjør.

Slik de nye læreplanene er forespeilet, vil sannsynlighetsregning i hovedsak forekomme i matematikk programfag for samfunnsfag, S1 (Utdanningsdirektoratet, 2019). Jeg mener statistikk og sannsynlighetsregning er et tema som burde inngå i flere av matematikkemnene i videregående ettersom det er et helt sentralt tema innenfor forskning. Uansett har dette prosjektet bidratt til å gi innsikt i hvordan en undervisningssituasjon innenfor sannsynlighetsregning kan designes. Akkurat i dette opplegget så jeg det mest hensiktsmessig, basert på forkunnskaper til elevene, å ha i en 1T-klasse. Men med noen tilpasninger og modelleringer kunne et lignende opplegg vært gjennomført i ungdomsskolen også.

Dette prosjektet har vist at Strømskag (2017b) sitt instruksjonsdesign i matematikk kan brukes som en ressurs for å skape adidaktiske situasjoner som stimulerer elevene til å samarbeide ved å diskutere matematikk for å oppnå læring og komme fram til en tilsiktet målkunnskap. Ettersom muntlige ferdigheter, som innebærer å skape mening gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk, er en av de grunnleggende ferdighetene innenfor matematikk, mener jeg TDS kan fungere som et godt verktøy for å legge til rette for god undervisning i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Med litt bedre tid enn det jeg hadde til dette prosjektet tenker jeg at det kunne vært interessant å utvide det i en retning der man kunne gått mer i dybden på hvordan progresjonen til elevene var med tanke på store talls lov. Potensialet og relevansen av å dra inn simulering ved hjelp av dataverktøy og konfidensintervall i et eksperiment som dette er stort. Dette hadde nok krevd litt mer tid, men da kunne man ha laget et opplegg som ikke hadde vært like styrt som det mitt var. Dermed kunne undervisningssituasjonen blitt enda mer undersøkende, og elevene kunne fått flere innfallsvinkler på målkunnskapen og mulighet til å studere flere aspekter ved store talls lov. Jeg tenker også at det vil være fullt mulig å bruke TDS i andre temaer innenfor matematikk. Det kan også tenkes at det kunne la seg gjøre å lage et TDS-opplegg der målkunnskapen var bevegelsesligningene i fysikk. På den måten utvider man bruksområdet til TDS også til andre fag.

Referanseliste

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: The case of didactical engineering. I A. Bikner.Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Red.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (s. 467–496). Dordrecht: Springer.

Artigue, M., Haspekian, M., & Corbin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Red.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (s. 47–65). Berlin: Springer.

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. I A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 4, s. 239–287). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk. Oslo: Læringssenteret.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Red. & Overs.). Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G., Brousseau N., & Warfield V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 363–411.

Calderhead, J. (1981). Stimulated recall: A method for research on teaching. *The British Journal of Educational Psychology, 51*, 211–217.

Denzin, N. K. (1997). Triangulation in Educational Research. I J. P. Keeves (Red.), *Educational Research, Methodology, and Measurement: An international Handbook* (2. utg.) (s. 318–322. Oxford: Elsevier.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 96–105

Margolinas, C., & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France: an insider´s and outsider´s view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education*, 47, 893–903.

Brousseau, G., Brousseau N., & Warfield V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior 20* (2002), 363–411.

Gal, I (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. I G. A. Jones (Red.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.* (s. 39–63). New York: Springer US.

https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/0-387-24530-8_3.pdf

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*(1), 59–98.

Lysø, K. O. (2005). *Sannsynlighetsregning – en fagdidaktisk innføring* (1. utg.). Bergen: Caspar Forlag.

Lysø, K. O. (2010). *Matematiske sammenhenger: Statistikk og sannsynlighetsregning* (2. utg.). Bergen: Caspar Forlag.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., & Moen, T. (2009). *Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen. En metodebok for lærere, studenter og forskere.* Oslo: Universitetsforlaget.

Renze, J., & Weisstein, E. (2019). *Law of Large Numbers*. Hentet 25.11.19 fra http://mathworld.wolfram.com/LawofLargeNumbers.html

Robson, C., & McCartan, K. (2016). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings* (4.utg.). Chichester: Wiley.

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 124–137). Oslo: Universitetsforlaget.

Strømskag, H. (2017a). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet. *Nordic Studies in Mathematics Education, 22*(2), 71–91.

Strømskag, H (2017b). A methodology for instructional design in mathematics – with the generic and epistemic student at the centre. *ZDM Mathematics Education, 49*, 909–921..

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis (3. utg).* Oslo: Gyldendals Akademisk.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science, 185* (4157), 1124–1131

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet 12.11.19 fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag: MAT1-04: Kompetansemål etter 1T*. Hentet 24.09.19 fra

https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-1t-%E2%80%93-vg1-studieforebuande-utdanningsprogram

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04): Kompetansemål etter 10.årssteget*. Hentet 24.09.19 fra

https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Utdanningsdirektoratet. (2016) *Læreplan I matematikk fellesfag 2P-Y.* Hentet 13.12.19 fra http://www.udir.no/kl06/MAT6-03/Hele/Kompetansemaal/kompetansemaal-etter-2p-y

Utdanningsdirektoratet. (2019) *Læreplan i matematikk programfag for samfunnsfag.* Hentet 07.12.19 fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=693

Utdanningsdirektoratet. (2019) *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05).* Hentet 25.11.19 fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Vedlegg A

Intervjuguide

Spørsmålene som vil stilles vil være koblet opp mot oppgaveteksten og situasjonen som designes. Fokuset for intervjuet vil være på hva som har vært katalysatorer for at elevene utvikler ønsket kunnskap, og hva som har vært hindringer.

Det vil være et gruppeintervju med en gruppe som har samarbeidet gjennom hele undervisningsopplegget.

Stimulated recall:

Vil ha med materiale (oppgavetekst, konkretiseringsmateriell, løsninger) →og snakker og reflekterer med elevene ut fra det.

Ønsker spesifikt å spørre om de ulike fasene i undervisningsopplegget:
- Devolusjonen

- Aksjonsfasen
    - Hvordan startet dere å arbeide med oppgavene?
    - Hadde dere en bestemt plan, eller bare satte dere i gang med å prøve noe?

- Formuleringsfasen

- Valideringsfasen
    - Hvilken erfaring har du med å rettferdiggjøre formler og uttrykk?

-Institusjonaliseringsfasen

Generelle spørsmål:

- Fortell meg om oppgaven. Hva gikk den ut på?

- Var det noe med oppgaveteksten som opplevdes som uklar?

- Opplevde dere at det var for mye tekst? Hvordan kunne i så fall dette vært løst?

- Har dere løst lignende oppgaver i matematikk tidligere?
    - Hvis nei; hvordan opplevde dere denne metoden?
    - Hvis ja; Husket dere dette mens dere arbeidet med disse oppgavene?
      Brukte du dette mens du løste denne oppgaven? Hvordan da?

- Var det noen gang underveis at dere sto fast, eller følte at strategien dere utviklet ville ta for lang tid?

- Hvilke matematiske temaer mener dere at dere har jobbet med i dag?

- Følte dere at det var greit med tid på oppgavene?

- Hvis nei; Kunne dere tenkt dere å bruke lengre tid på et slikt undervisningsopplegg? Opplevde dere at tiden ble en hindring for utviklingen?

- Hvilke deler av oppgavene opplevde dere som mest utfordrende? Hvorfor?

- Hvilke erfaringer har du/dere med gruppesamarbeid i matematikk? Følte du det hjalp å samarbeide med medelever?

- Følte du oppgaven hadde en hensikt og mening?

Struktur: Intervjuet vil være strukturert med oppvarmingsspørsmål, refleksjonsspørsmål og avrundingsspørsmål.

Underveistolkninger: Dersom jeg underveis er usikker på hva elevene mener, vil jeg stille spørsmål av typen:

- Kan jeg forstå deg dithen at du mener at... ?

- Hvis jeg forstår deg riktig nå, mener du at... ?

- Jeg prøver å få tak i hva du sier; er det slik at du mener at... ?

- Jeg må prøve å oppsummere det du sier. Først sier du at..., og så sier du at... Er det riktigoppfattet?

Vedlegg B

Transkripsjonskoder:

Understreket tekst	Tekst resitert fra oppgaven de jobber med (Leser oppgaveteksten på nytt)
[]	Uartikulert eller ikke hørbar ytring
...	Pause (opp til 3 sekunder)
..	Liten nøling
_(understrek)	Avbrytelse
Kursiv	Trykk
(Tekst i parentes)	Redgjørelse for ikke-verbal handling, eller kommentar
(...)	Har hoppet over deler av ytringen

For å skille data fra observasjon og data fra intervju bruker jeg følgende notasjon:

[O_G1]	Utdrag fra observasjon av Gruppe 1
[O_G2]	Utdrag fra observasjon av Gruppe 2
[I_G1_dato]	Utdrag fra intervju med Gruppe 2 og dato
[I_G2_dato]	Utdrag fra intervju med Gruppe 3 og dato
[I_G3_dato]	Utdrag fra intervju med Gruppe 4 og dato
[O_H]	Utdrag fra observasjon av helklassesamtale

Vedlegg C

Meldeskjema for behandling av personopplysninger about:blank

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering **Prosjekttittel** Masteroppgave **Referansenummer** 964549

Registrert

10.09.2019 av Audun Grøtta Giske - audungg@stud.ntnu.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet NTNU / Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk (IE) / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Heidi Strømskag, heidi.stromskag@ntnu.no, tlf: 98441839

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Audun Grøtta Giske, audungg@stud.ntnu.no, tlf: 48034771

Prosjektperiode

23.09.2019 - 01.04.2020

Status

24.09.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

24.09.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 24.09.2019, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.04.2020.

LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål

- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Karin Lillevold Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg D

Audun Grøtta Giske
Klæbuveien 157b
48034771, audungg@stud.ntnu.no Trondheim, 25.10.2019

Til 1T-elever og foresatte ved Byåsen Vgs

Anmodning om tillatelse til video-/lydopptak av undervisning/intervju og innsamling av elevbesvarelser/tekster.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. Denne høsten skal jeg gjennomføre min masteroppgave, og skal i den sammenheng utvikle og gjennomføre et eksperiment i matematikkundervisning. Eksperimentet handler i korte trekk om at elevene skal lære en tilsiktet målkunnskap gjennom å aktiviseres av en situasjon. Målet med eksperimentet er å utvikle mer kunnskap og forståelse for hvordan matematikkundervisning kan legges opp med et økt fokus på adidaktiske situasjoner (elevarbeid uten hjelp fra lærer). Gjennom dette eksperimentet ønsker jeg altså å finne svar på hva som er katalysator for at elevene utvikler ønsket kunnskap, og hva som oppleves som hindringer.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å gjøre videoopptak av undervisningssekvenser og intervju med et utvalg av 3-4 grupper med 2-3 frivillige elever per gruppe. Derfor ber jeg om deres tillatelse til å kunne gjøre videoopptak og lydopptak, samt samle inn tekster skrevet av de frivillige elevene i 1T ved Byåsen Vgs. De som ikke ønsker å delta i forskningsprosjektet har vanlig undervisning med lærer. Gjennomføringen av opplegget vil ta 2-3 skoletimer. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse så lenge studien pågår uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Opptakene vil kun bli sett og hørt av meg, og eventuelt min veileder. Institutt for Matematiske Fag (v/Heidi Strømskag) er ansvarlig for prosjektet. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 1.april 2020 (etter sensurdato). Rettigheter du som deltaker i forskningsprosjektet har er: å få innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, å få rettet og slettet personopplysninger om deg, samt få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger. Kontaktopplysninger til NTNUs personvernombud: ntnu.no/ansatte/thomas.helgesen

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer). Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villig til å være med på det. Jeg ber dere om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å være med på prosjektet i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen Audun Grøtta Giske

Samtykke til deltakelse i studien

Som del av min masteroppgave gjennom lektorutdanningen ved NTNU ber jeg om tillatelse til å samtale deg/barnet ditt (foresattes underskrift dersom barnet er under 16 år), og gjøre video- og lydopptak der du/barnet ditt er med og kopiere/bruke tekster skrevet av deg/barnet ditt.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Elev:

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg gir tillatelse.

Dato: ....

Elevens navn (trykkbokstaver): ....

Elevens underskrift: ....

☐ Jeg gir ikke tillatelse. (Trenger ikke underskrift)

Foresatt (dersom barnet er under 16):

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg gir tillatelse.

Dato: ....

Elevens navn (trykkbokstaver): ....

Foresattes underskrift: ....

☐ Jeg gir ikke tillatelse. (Trenger ikke underskrift)

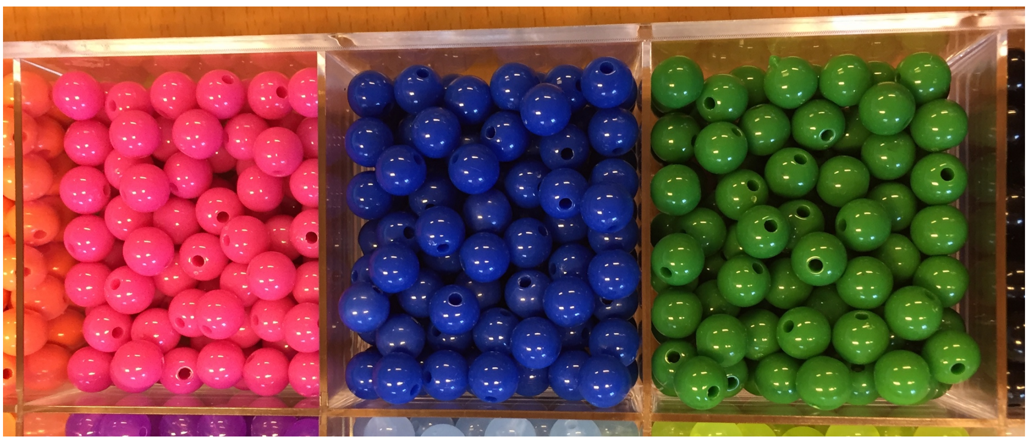
Vennligst returner svarslippen til lærer så snart som mulig. Tusen takk!

Vedlegg E

Perleporten

Jenta Erle Perle er på besøk hos bestemoren sin. Det viser seg at bestemoren har kjøpt et perleskrin som Erle har ønsket seg i lang tid i bursdagspresang. Men denne gangen har hun en liten vri på lur. For at Erle skal få presangen må hun løse en liten nøtt først. Bestemoren har en liten flaske der det er nøyaktig 5 stk perler. De 5 perlene består av fargene grønn, blå og rosa. For at Erle skal få perleskrinet må hun kunne si nøyaktig hvor mange det er av hver farge. Men det blir for enkelt om hun bare kan se oppi flaska, så måten dette skal gjøres på er at hun skal snu flaska, notere hvilken farge som havner nederst i røret som er festa i flaska, også snu flaska igjen så perlene faller ned i flaska igjen. Så skal det samme gjentas. Notere hvilken farge som vises, og snu den tilbake. Slik skal hun holde på helt til hun kan fortelle bestemor akkurat hvor mange av de 5 perlene som er grønn, blå og rosa.

Erle er ikke helt sikker på hvordan hun skal gå fram for å finne en løsning på problemet, derfor har gruppen deres fått i oppgave å forsøke å finne ut av hvordan Erle kan gjøre en rimelig antagelse på hvor mange perler det er av hver farge i flaska.



Som et første steg i problemløsninga tipser bestemor Erle om å gjøre 10 trekninger for å komme i gang og studere nærmere sammenhengen mellom antall grønn, blå og rosa, den relative frekvensen (andelen) og totalen.

a) Fyll inn i tabellen etter de 10 første trekningene

Farge	**Antall**	**Relativ frekvens**	**Totalt**
Grønn		$\frac{}{10} = 0,$	10
Blå		$\frac{}{10} = 0,$	10
Rosa		$\frac{}{10} = 0,$	10

b) Ut ifra trekningene du nå har gjort. Har du noe mer informasjon om hvor mange det kan være av de ulike sortene? Hvorfor/Hvorfor ikke?

Begrunn:

c) Behold resultatet fra de 10 første trekningene, og gjør 10 nye trekninger. (Eks: Dersom du trakk 5 grønne i stad, og 4 grønne nå skal du skrive 9 under antall grønne, og $\frac{9}{20} = 0{,}45$ under relativ frekvens)

Farge	**Antall (totalt)**	**Relativ frekvens**	**Totalt**
Grønn		$\frac{}{20} = 0,$	20
Blå		$\frac{}{20} = 0,$	20
Rosa		$\frac{}{20} = 0,$	20

Hvordan endres den relative frekvensen? Hva er summen av de tre relative frekvensene? Hva betyr dette?

Begrunn:

d) Gjør 30 nye trekninger.

Farge	Antall (totalt)	Relativ frekvens	Totalt
Grønn		$\frac{}{50} = 0,$	50
Blå		$\frac{}{50} = 0,$	50
Rosa		$\frac{}{50} = 0,$	50

Hva vil du si om endringen i relativ frekvens?

Begrunn:

e) Gjør 50 trekninger til.

Farge	Antall (totalt)	Relativ frekvens	Totalt
Grønn		$\frac{}{100} = 0,$	100
Blå		$\frac{}{100} = 0,$	100
Rosa		$\frac{}{100} = 0,$	100

Kan du si noe om sammenhengen mellom relativ frekvens og antall kuler av hver farge?

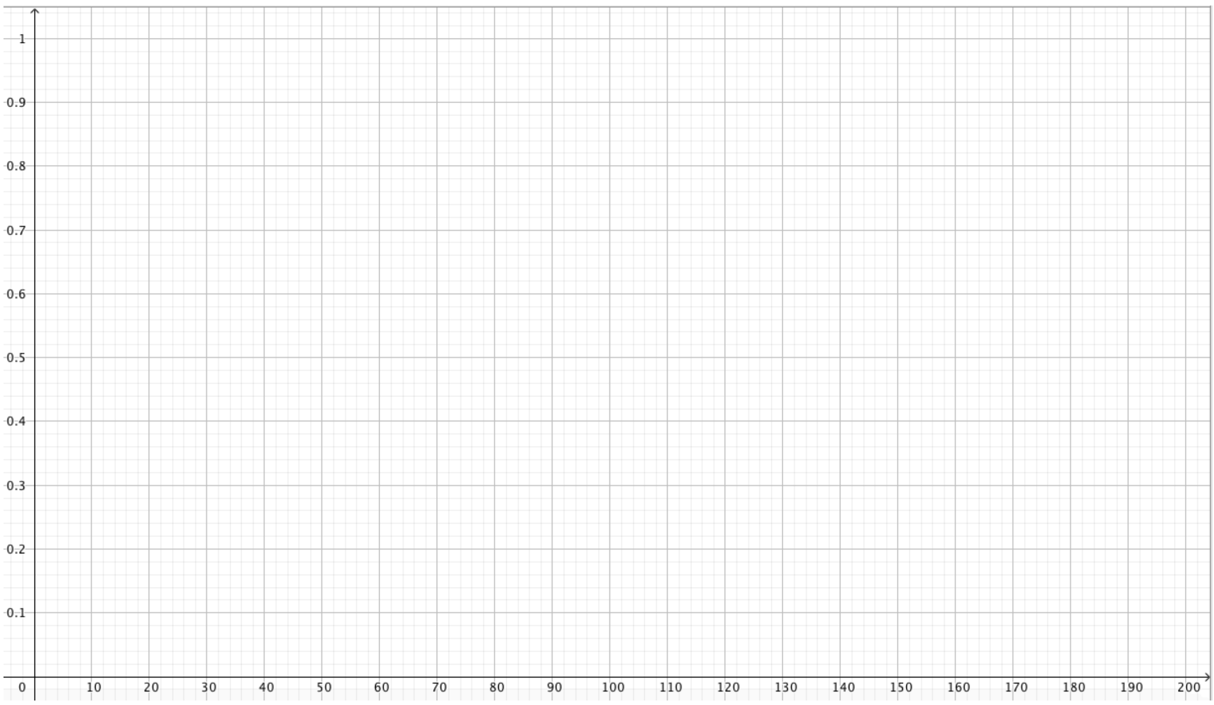
Hvor sikre er dere på hvor mange kuler det er av hver farge?

Begrunn:

f) Til slutt skal dere gjøre 100 trekninger til. For hver tjuende trekning fyller dere inn i et punkt i grafen for hver av de tre fargene for den relative frekvensen. Inkluder punktene av de relative frekvensene som du fant fra 10, 20, 50 og 100 trekninger i grafen. Trekk så en linje fra punkt til punkt. (Husk å dele summen av f.eks grønne på det totale antallet. Altså først 120, så 140, så 160, 180 og til slutt 200)

Relativ frekvens

Grønn
Blå
Rosa



Antall trekninger

Farge	Antall (totalt)	Relativ frekvens	Totalt
Grønn		$\frac{\quad}{200} = 0,$	200
Blå		$\frac{\quad}{200} = 0,$	200
Rosa		$\frac{\quad}{200} = 0,$	200

Ser den relative frekvensen ut til å nærme seg en bestemt verdi? Hva tror du den hadde blitt dersom du hadde gjort trekninger i det uendelige, og hva betyr denne verdien? Hvor mange kuler tror dere det er av hver sort? Kan dere være helt sikre?

Begrunn

g) Ser dere noen sammenheng mellom den relative frekvensen og sannsynligheten for å trekke en bestemt farge?

Begrunn:

Ekstraoppgaver:

h) Gitt at dere har trukket 6 grønne kuler på rad, øker da sannsynligheten for at det vil komme en blå kule i neste trekning, siden antallet vil jevne seg ut i det lange løp?

Begrunn:

i) Er det like stor sannsynlighet å trekke 7 grønne kuler på 10 trekninger som å trekke 70 grønne kuler på 100 trekninger? Diskuter i gruppa og skriv ned begrunnelse på hvorfor/hvorfor ikke.

Begrunn: