Rø, Valenta, Langfeldt, Ødegaard

Felles faglig planlegging for god matematikkundervisning

I de siste årene har det ifølge Mosvold, Fauskanger og Wæge (2018) skjedd en dreining i matematikkdidaktisk forskning på lærere og lærerstudenter: fra fokus på lærerkompetanse, hva som kjennetegner den, og hvordan den er satt sammen, til fokus på det lærere gjør, deres undervisningsoppgaver og -praksiser. De refererer blant annet til Grossman, Hammerness og McDonald (2009), som argumenterer for at undervisningen i lærerutdanningen bør sentreres rundt noen sentrale undervisningspraksiser. Eksempler kan være å få frem og gi respons til elevenes resonnering og å vurdere elevenes forståelse. Med utgangspunkt i NCTM (2014) forstår vi i denne studien sentrale undervisningspraksiser som praksiser som har vesentlig innflytelse på elevers læring, og som fremmer dyp forståelse i matematikk. Dette betegner vi som *praksiser for god matematikkundervisning*. Gjennom arbeid med og utvikling av slike praksiser får lærerstudentene så mulighet til å fordype seg i viktige matematiske ideer og fagdidaktiske prinsipper. Et spørsmål er da hvilke arbeidsformer i lærerutdanningen som kan støtte utvikling av praksiser for god matematikkundervisning.

Kirsti Rø
Institutt for lærerutdanning, NTNU
kirsti.ro@ntnu.no

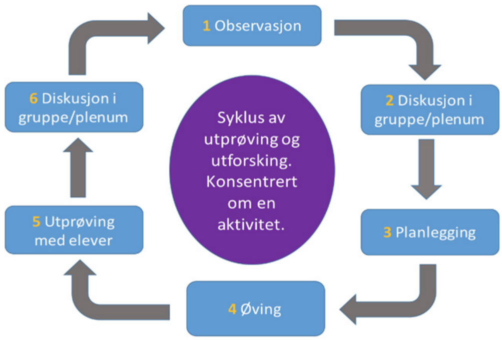
Anita Valenta
Institutt for lærerutdanning, NTNU
anita.valenta@ntnu.no

Marit Buset Langfeldt
Institutt for lærerutdanning, NTNU
marit.b.langfeldt@ntnu.no

Reidun Persdatter Ødegaard
Institutt for lærerutdanning, NTNU
reidunp@ntnu.no

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer i retningslinjene: www.caspar.no/nivaa1

Vi har jobbet med både grunnskolelærerstudenter og lærere i videreutdanning i *en syklus av utforskning og utprøving* (figur 1) som tilnærming til å arbeide med undervisningspraksiser i matematikk (Lampert, Beasley, Ghousseini, Kazemi & Franke, 2010). Syklusen er også brukt av Matematikksenteret i et pågående etterutdanningsprosjekt *Mestre ambisiøs matematikkundervisning* (MAM). En gruppe lærere eller lærerstudenter arbeider sammen med en lærerutdanner om å planlegge en undervis-



1. Observasjon av en gitt aktivitet med elever, ev. på film
2. Diskusjon om aktiviteten
3. Studenter planlegger en lignende aktivitet med elever
4. Studenter øver på aktiviteten i gruppa gjennom rollespill
5. Studenter prøver ut aktiviteten med en elevgruppe, andre observerer og bidrar ved behov
6. Diskusjon

Figur 1: Syklus for utforsking og utprøving (oversatt og tilpasset fra Lampert et al., 2013, s. 229).

ningsøkt, de øver på planen i rollespill før den gjennomføres med en gruppe elever, og gjennomføringen diskuteres til slutt. Arbeidet er konsentrert rundt en utvalgt matematisk aktivitet som gir muligheter for å utvikle undervisningspraksiser og lærerkompetanse, og som kan gi opplevelser av mestring for nybegynnere.

Mosvold et al. (2018) trekker frem at matematikkundervisning er så kompleks at viktige undervisningspraksiser kan bli lite synlige for lærerstudenter eller lærere som vil utvikle egen undervisning. Syklusen presentert i figur 1 er eksempel på en arbeidsmåte i lærerutdanningen hvor kompleksiteten i matematikkundervisningen delvis kan reduseres (Grossman, Compton, Igra, Ronfeldt, Shahan & Williamson, 2009). Det er fordi den gir muligheter til å øve mer isolert på bestemte praksiser, med utgangspunkt i noen spesifikke undervisningsaktiviteter (f.eks. kvikkbilder, oppgavestrenger) og avgrensede faglige mål. Tidligere studier har undersøkt implementering av syklusen i etterutdanning for matematikklærere (f.eks. Fauskanger & Bjuland, 2019) og det som kalles øving i syklusen (punkt 4) i lærerutdanning (Lampert et al., 2013). Studiene viser at syklusen gir rike muligheter til å arbeide med viktige prinsipper og undervisningspraksiser. Vår undersøkelse fokuserer på det tredje leddet i syklusen, *felles faglig planlegging* (FFP), hvor matematikklærerstudenter og en lærerutdanner samarbeider om å planlegge undervisning i detalj slik at den leder mot et faglig mål og samtidig tar utgangspunkt i elevers resonnement og innspill. I tråd med tidligere studier nevnt ovenfor undersøker vi hvilke muligheter FFP gir i grunnskolelærerutdanningen, og vi har følgende forskningsspørsmål:

> Hva snakker lærerstudenter og en lærerutdanner om under felles faglig planlegging, og hvor, i det som sies, finnes det muligheter for arbeid med praksiser for god matematikkundervisning?

Datamaterialet består av videoopptak av tre økter med FFP. Aktiviteten som planlegges, skulle gjennomføres på 6. trinn. I den kvalitative analysen identifiserer vi hva en lærerutdanner og en gruppe lærerstudenter samtaler om i planleggingen. Dette studeres i lys av et rammeverk av praksiser for god matematikkundervisning (NCTM, 2014) for å få innsikt i muligheter for arbeid med slike praksiser. Det teoretiske rammeverket presenteres i neste delkapittel.

Praksiser for god matematikkundervisning

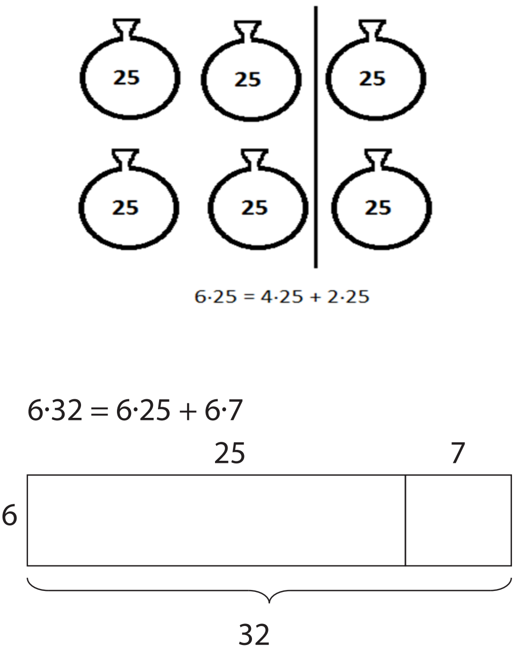
NCTM (2014) presenterer et rammeverk med åtte praksiser for god matematikkundervisning som er ment å representere undervisningspraksiser med stor betydning for elevers læring: (1) etablere tydelige faglige mål, (2) implementere oppgaver som fremmer resonnering og problemløsning, (3) bruke og binde sammen matematiske representasjoner, (4) legge til rette for meningsfylt matematisk diskurs, (5) stille målbevisste spørsmål, (6) bygge prosedyrekunnskap med utgangspunkt i begrepsforståelse, (7) støtte produktivt strev og (8) hente frem og bruke dokumentasjon på elevers læring. Denne artikkelen går nærmere inn på et utvalg av praksisene som NCTM legger vekt på. Utvalget er gjort med utgangspunkt i vår analyse, som viser at de fem første praksisene for god matematikkundervisning er mest relevante for diskusjonene som finner sted i FFP.

For å knytte de ulike praksisene for god matematikkundervisning til vår undersøkelse gjør vi rede for rammene for FFP i vår implementering av syklusen for utforsking og utprøving i lærerutdanningen. FFP tar utgangspunkt i et formulert faglig mål og en valgt oppgave, hvor oppgaven kan brukes på ulike måter avhengig av valg som tas i planleggingen. Planleggingen skal resultere i et undervisningsopplegg i form av en matematisk samtale. I vår studie planlegger studentene og lærerutdanneren undervisning med utgangspunkt i en *oppgavestreng* i multiplikasjon, se figur 2 for oppgaven og det tilhørende faglige målet. Oppgavestrengen er her en sekvens med relaterte regnestykker (f.eks. $6\cdot 7$, $6\cdot 25$ og $6\cdot 32$) som er designet for å engasjere elever i en undervisningssamtale om en regnestrategi som blir fremhevet gjennom strengen (f.eks. at $6\cdot 32 = 6\cdot 7 + 6\cdot 25$).

Regnestrategien, som baserer seg på at multiplikasjon er distrubutiv over addisjon, er sentral i aktiviteten og kan tas opp og begrunnes på ulike måter under arbeid med oppgavestrengen. På 6. trinn kan det være hensiktsmessig at strategien begrunnes med utgangspunkt i en modell for multiplikasjon, enten en modell med like grupper eller en arealmodell for multiplikasjon som vist i figur 3 (for mer om modeller

$6\cdot 7$ $6\cdot 25$ $6\cdot 32$	Faglig mål: fremheve og begrunne regnestrategien i multiplikasjon som baserer seg på å dele opp et av tallene (distributiv egenskap)

Figur 2: Oppgavestrengen og det faglige målet som var utgangspunkt for FFP.



Figur 3: 'Like grupper'-modell (knyttet til $6\cdot 25$) og arealmodell for multiplikasjon (knyttet til $6\cdot 32$).

for multiplikasjon, se f.eks. Greer, 1992). Med dette som bakteppe går vi nærmere inn på de fem praksisene for god matematikkundervisning fra NCTM (2014) som er relevante for FFP i vår undersøkelse.

Etablere tydelige faglige mål

Den første praksisen som fremheves i NCTM (2014), er å etablere tydelige faglige mål. Ifølge NCTM bør et faglig mål være tilpasset klassen og progresjonen, det bør være knyttet til «big ideas» i matematikk (se f.eks. Charles, 2005) og være beskrevet på et nivå som er slik at det kan være førende for alle valg en lærer gjør: valg av oppgaver, spørsmål, arbeidsform, representasjoner og respons på elevers innspill. Et faglig mål skal ifølge Wiliam (2011) beskrive tydelig hvilke matematiske begreper og ideer elevene skal forstå bedre som et resultat av undervisningen, og eventuelt prosedyrer som elevene skal beherske. Uten klare faglige mål vil aktivitetene være uten retning, og alle spørsmål, oppgaver og arbeidsformer vil være like gode eller dårlige. I vår studie er det faglige målet gitt på forhånd, med utgangspunkt i en valgt aktivitet. Det kan diskuteres om målet presentert i figur 2 kunne vært mer presist formulert. Vi kan likevel undersøke om FFP gir studentene muligheter til å vurdere ulike valg som kan tas i undervisningen når det gjelder å fremme læringsmålet og gi en tydelig retning til aktiviteten. Eventuelle uklarheter i målformuleringen kan også tas opp i FFP.

Implementere oppgaver som fremmer resonnering og problemløsning

Ifølge NCTM (2014) kjennetegnes god matematikkundervisning av elevers arbeid med oppgaver som tillater varierte fremgangsmåter, og som fremmer resonnering og problemløsning. Matematikkoppgavers ulike muligheter for læring knyttes i NCTM til Stein og Smiths (1998) studie av oppgaver og deres kognitive krav. Oppgaver som stiller lave kognitive krav, fremmer memorering av fakta eller formler, eksakt reproduksjon av noe elevene har arbeidet med før, eller prosedyrer som ikke blir knyttet til underliggende begreper og sammenhenger. Oppgaver som stiller høye kognitive krav, kjennetegnes derimot av at de fokuserer på utvikling av bedre forståelse for matematiske begreper og ideer, og de krever at elevene utforsker relasjoner og utvikler prosedyrer og strategier. Siden matematisk kompetanse innebærer mye mer enn å huske fakta og å kunne følge en bestemt prosedyre, er det nødvendig at oppgaver med høye kognitive krav er sentrale. Studien til Stein, Grover og Henningsen (1996) viser også at oppgaver som er ment å skulle stille høye kognitive krav, i flere tilfeller reduseres i kompleksitet i undervisning. I FFP er oppgaven gitt på forhånd, men hvordan den implementeres i undervisning, er altså avgjørende for om den blir en oppgave med lave eller høye kognitive krav. Selv om vi ikke studerer gjennomføringen av undervisningen, kan vi undersøke muligheter FFP gir for å planlegge en oppgave som stiller høye kognitive krav, gjennom eksempelvis diskusjoner om ulike strategier i multiplikasjon og begrunnelser for strategiene.

Bruke og binde sammen matematiske representasjoner

Med representasjoner i matematikk menes de forskjellige uttrykksformene som brukes (både muntlige og skriftlige), som symboler, tegninger, regnefortellinger, naturlig språk, konkreter, diagrammer og tabeller. Ifølge NCTM (2014) innebærer god matematikkundervisning fokus på forståelse og bruk av varierte representasjoner. Tilsvarende hevder Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) og Brizuela og Earnest (2008) at begrepsforståelse kjennetegnes ved å kunne representere et matematisk objekt (f.eks. multiplikasjon eller brøk) på flere ulike måter, og at evnen til å bruke ulike typer representasjoner og å kunne veksle mellom dem etter behov er vesentlig i problemløsning og resonnering. Samtidig viser blant andre studien til Stylianou (2010) at representasjoner ofte spiller en perifer rolle i matematikkundervisningen. Oppgavestrengen brukt i vår undersøkelse har til hensikt å fremheve og begrunne en regnestrategi i multiplikasjon. Vi undersøker om FFP gir muligheter til å diskutere hensiktsmessige representasjoner for det gitte læringsmålet, deres sterke og svake sider, og hvordan representasjoner kan støtte elevenes resonnering i multiplikasjon. Eksempler på bruk av modeller i arbeid med oppgavestrengen er gitt i figur 3.

Legge til rette for en meningsfylt matematisk diskurs

En meningsfull matematisk diskurs innebærer utveksling av ideer og resonnement gjennom klasseromsdiskusjoner og andre former for verbal, visuell og skriftlig kommunikasjon, hvor elevene gis muligheter til å vise sin forståelse og konstruere overbevisende argumenter (NCTM, 2014). Ifølge NTCM er den matematiske diskursen elevene deltar i i klasserommet, viktig både for hva de lærer i matematikk og hva de lærer *om* matematikk. I en matematisk diskurs der det legges vekt på resonnering og begrunnelse, vil elevene ikke bare lære å resonnere matematisk, men de vil også lære at det er en viktig del av matematisk arbeid. For å fremme elevers læring i matematikk er en diskurs der man diskuterer matematiske ideer, sammenligner fremgangsmåter og argumenter, viktig. Elever må få mulighet til å komme med egne innspill, men også lære å lytte til andres resonnementer og vurdere dem (Hufferd-Ackles, Fuson & Sherin, 2004). Læreren har en viktig rolle i å lede undervisning i retning av et tydelig faglig mål gjennom å bygge på elevenes resonnementer. Studier har likevel vist at kommunikasjon i matematikklasserommet ofte er kjennetegnet av en prosedyrebundet diskurs, hvor det blir lagt liten vekt på å forklare hvordan man har tenkt, eller i fellesskap å arbeide seg videre fra en feil antakelse og komme til enighet om en matematisk idé (Drageset, 2014). Vi undersøker om planleggingen tar opp mulige grep læreren kan gjøre for å utvikle en meningsfylt diskurs, med mål om å få tilgang på, velge blant og fremheve elevers strategier, med blikk på det gitte faglige målet. Slike grep kan være å bestemme rekkefølgen på spørsmål som stilles, vurdere ordlyden på spørsmålene og gjøre antakelser om elevers respons.

Stille målbevisste spørsmål

God matematikkundervisning avhenger ifølge NCTM (2014) av spørsmål som oppmuntrer elever til å uttrykke og reflektere over tenkningen sin. NCTM henviser til Chapin, O'Connor og Anderson (2009), som drøfter ulike grep en lærer kan bruke for å lede produktive matematiske samtaler og legge til rette for matematisk forståelse og resonnering. Noen grep kan være å hjelpe elever til å klargjøre sine egne tanker og hjelpe dem til å lytte til hverandre gjennom å be dem utdype egne resonnementer eller gjenta andres. Andre grep kan være å støtte elevenes utvikling av matematisk resonnement ved å gi dem tid og ro til å tenke. I FFP planlegges undervisningen i detalj, og vi undersøker om diskusjonene handler om instrukser for elevenes kommunikasjon og utforming av målbevisste spørsmål.

Metode

Studentene som deltar i studien, er førsteårsstudenter ved grunnskolelærerutdanningen for trinn 1–7. Datamaterialet er samlet inn i forbindelse med undervisning i det obligatoriske emnet Matematikk 1. Emnet er fordelt over tre semestre: siste semester i 1. studieår og begge semestrene i 2. studieår. I løpet av første del av emnet deltok alle studentene i én gjennomføring av en syklus av utforsking og utprøving (figur 1) på en barneskole. På forhånd hadde studentene arbeidet med modeller for multiplikasjon og divisjon, resonnering knyttet til regnestrategier og egenskaper ved operasjonene, og samtaletrekk en lærer kan bruke for å støtte produktive matematiske diskusjoner (se Chapin et al., 2009).

Vi undersøker FFP av en undervisningsøkt på om lag 25 minutter på 6. trinn, med utgangspunkt i den tidligere presenterte oppgavestrengen i multiplikasjon (figur 2). Datamaterialet består av videoopptak av tre økter med FFP i ulike grupper (gruppe 1, 2 og 3), hver med en varighet på om lag 90 minutter. Hver gruppe bestod av åtte til ti lærerstudenter og en lærerutdanner i matematikk, Jo, som hadde rollen som veileder. Jo deltok i alle de tre planleggingssamtalene som inngår i datamaterialet. Han har arbeidet i lærerutdanning i 15 år, har erfaring

	Kode	Beskrivelse	Eksempler fra data
Matematisk innhold - utsagn som omhandler det faglige innholdet i aktiviteten, uten en eksplisitt henvisning til elever eller undervisningen	Læringsmål	Eksplisitte eller implisitte henvisninger til læringsmålet	«Er det noen av dere andre som har tenkt noe på hvordan distributiv egenskap kommer til uttrykk i det her?»
	Regnestrategier	Ulike strategier som kan brukes i de ulike delene av oppgaven	«Det var jo den 6 ganger 20 og 6 ganger 5, men så har jeg vært inne på litt halvering-dobling, da, med 3 ganger 50.»
	Sammenligning av regnestrategier	Relasjoner mellom ulike strategier	«På hvilken måte kan tre ganger 64 oppleves som lettere enn seks ganger 32?»
	Begrunnelse	Begrunnelser for ulike strategier brukt på enkelteksempler eller generelt	«Vi deler opp mengden, og så regner vi ut hver for seg, og så legger vi sammen de regnestykkene.»
Tilgjengeliggjøring av matematisk innhold - utsagn som omhandler hvordan det gitte matematiske innholdet kan gjøres tilgjengelig for elevene i undervisningen	Sekvensering av spørsmål og respons	Hva som skal sies til elevene, og i hvilken rekkefølge det skal sies	«Kanskje man skal spørre elevene om de har jobbet med modeller i … eller er det litt utafor?»
	Representasjoner	Bruk av ulike modeller/ illustrasjoner og regnefortellinger	«Ja sånn som S6 sier da, at posemodellen viser mer direkte, da kan man jo telle posene. Du kan jo telle rutene i arealmodellen og, men det er mer gjentatt addisjon i posemodellen.»
	Bruk av tavla	Hva som skal skrives på tavla, når, hvor og hvordan	«Så hvis at en elev sier seks ganger 32, det blir jo om man da tegner opp nye sirkler med 32 i hver, eller om man lar den ene (mumler) da blir det jo som at vi tar ut to kroner av hver.»

Tabell 1, del 1: Koder og kategorier med beskrivelser og eksempler fra data.

med forskning og utvikling i lærerutdanning og har undervist i skolen. Studentene hadde fått utdelt oppgavestrengen og målet for undervisningssamtalen. Aktiviteten skulle planlegges i fellesskap, og mot slutten av planleggingen ble det bestemt ved loddtrekning hvem som skulle gjennomføre undervisningen på vegne av gruppa. Selve gjennomføringen av undervisningssekvensen, som fant sted samme dag, er ikke en del av denne undersøkelsen.

De tre gruppenes FFP ble filmet, og opptakene ble transkribert. Én av planleggingssamtalene ble analysert av hver av forfatterne i form av åpen koding (Miles & Huberman, 1994). Kodingen ble guidet av første del av forskningsspørsmålet. Hensikten var å identifisere hva gruppa snakker om i planleggingen av en undervisningssekvens, for videre å kunne undersøke hvor det finnes muligheter i FFP for arbeid med praksiser for god matematikkunder-

	Kode	Beskrivelse	Eksempler fra data
Elevers strategier og forkunnskaper – utsagn som omhandler forventninger om hva elevene kan si eller oppleve som lett eller vanskelig	Elevers regnestrategier	Strategier som kan tenkes at elever kommer med i arbeid med de ulike delspørsmålene	«Og da vil en elev som har skjønt, som har gjort det, si at 'ja men det blir jo seks ganger sju pluss seks ganger 25 blir jo seks ganger 30.'»
	Elevers forkunnskaper	Matematiske ideer/fremgangsmåter elever kjenner til fra før	«I sjette klasse har de jo holdt på med areal. Og da ville jeg jo si at man kan jo gjerne bruke en arealmodell da.»
	Elevers utfordringer	Utfordringer elever kan oppleve knyttet til f.eks. spørsmål eller representasjoner	«Jeg tror det er vanskelig for dem å svare på det, der tror jeg de trenger deres hjelp.»
Normer og rammer for læringssamtalen – utsagn som omhandler generell tilrettelegging av elevers deltakelse og resonnering (ikke tett knyttet til det matematiske innholdet)	Kommunikasjons-grep	Spørsmål og grep (av generell natur) som kan bidra til elevers resonnering	«Kanskje vi skal spørre klassen om det er noen som har tenkt annerledes? Også gir man beskjed: 'Tenk litt selv. Snakk med sidemannen.'»
	Instrukser for lærings samtalen	Rammer for hva som er viktig under samtalen	«Må kanskje si at de skal tenke på måten de gjør det på. Ikke at de nødvendigvis skal fokusere på hva svaret er.»
	Tale- og tenketegn	Tegn elevene kan vise når de er ferdig med å tenke, og tegn for når de ønsker å si noe.	«Det her (rekker opp hånda) kan være forstyrrende, altså at de kan på en måte gi et sånn her, nå har jeg tenkt ferdig-tegn (legger knoken på brystet) på et eller annet vis, og så kan man etterpå spørre hvem vil svare.»
	Relasjon med elever	Etablering av en grei relasjon med elevene	«Det å forklare at vi er lærerstudenter, at vi er her for å lære (...), det kan hende det blir lettere for dem det, og da kan vi relatere oss til dem og dm kan relatere seg litt til oss.»

Tabell 1, del 2: Koder og kategorier med beskrivelser og eksempler fra data.

visning. De ulike versjonene av den åpne kodingen av utsagnene ble sammenlignet og kontrastert, før vi i fellesskap ble enige om et felles sett med koder og overordnede tematiske kategorier. Kodene ble deretter benyttet i analyser av de to gjenværende planleggingssamtalene, og justert, utvidet og endret etter behov. Den samlede analyseprosessen ledet til fire kategorier og tilhørende koder, presentert med eksempler i tabell 1.

Resultater

I dette avsnittet presenterer vi resultatene fra undersøkelsen med utgangspunkt i data fra gruppe 2. Gruppe 2 er valgt ut grunnet færre forstyrrelser og større grad av flyt i samtalen sammenlignet med gruppe 1 og 3. De samme kodene og kategoriene vist i tabell 1 er identifisert i alle de tre gruppenes FFP, og resultatene fra gruppe 2 skiller seg derfor ikke ut. Tabell 2

Utsagn nr.	Matematisk innhold	Tilgjengeliggjøring av matematisk innhold	Elevers strategier og forkunnskaper	Normer og rammer for læringssamtalen
1–48	Læringsmål Regnestrategier Sammenligning av strategier		Elevers regnestrategier Elevers forkunnskaper	
49–136	Læringsmål	Sekvensering: $6 \cdot 7$ og $6 \cdot 25$ Bruk av tavla	Elevers regnestrategier Elevers forkunnskaper	Tale- og tenketegn Kommunikasjonsgrep Instrukser Relasjon
137–186	Begrunnelse ($6 \cdot 25$) Læringsmål	Representasjoner Bruk av tavla	Elevers forkunnskaper Elevers utfordringer	
187–217	Begrunnelse ($6 \cdot 32$) Læringsmål	Sekvensering: $6 \cdot 32$ Representasjoner Bruk av tavla	Elevers regnestrategier	
211–235	Læringsmål Begrunnelse (generell)	Sekvensering		Kommunikasjonsgrep

Tabell 2: Koding av utsagn i FFP i gruppe 2.

gir en oversikt over kodingen av utsagnene til gruppe 2, og grønn markering indikerer de mest fremtredende kodene i datamaterialet.

Som tabellen viser, veksler FFP i gruppe 2 hovedsakelig mellom kategoriene *matematisk innhold* og *tilgjengeliggjøring av matematisk innhold*. Kategoriene *elevers strategier og forkunnskaper* samt *normer og rammer for læringssamtalen* tas opp underveis i diskusjoner om de to første. Lignende tendenser finnes også for de andre gruppene, men rekkefølgen på det som diskuteres, varierer i de ulike gruppene. Denne artikkelen fokuserer i fortsettelsen på de mest fremtredende diskusjonene i alle tre FFP-øktene, om matematisk innhold og tilgjengeliggjøring av matematisk innhold. Med støtte i utdrag fra datamaterialet fra gruppe 2 gjør vi så rede for muligheter for arbeid med praksiser for god matematikkundervisning som oppstår her.

Matematisk innhold

I en del av FFP-øktene diskuteres det faglige innholdet i aktiviteten uten en eksplisitt henvisning til elever eller undervisningen som skal gjennomføres. Under presenterer vi eksempler på utsagn som omhandler matematisk innhold, og vi viser muligheter for arbeid med to praksiser for god matematikkundervisning som oppstår her: *etablere tydelige faglige mål* og *implementere oppgaver som fremmer resonnering og problemløsning*.

Slik det kommer frem i tabell 2, tar Jo opp *læringsmålet* for aktiviteten gjennom hele FFP-økten. Planleggingen starter med at Jo peker på hva målet er, og ber studentene ta stilling til hva det innebærer for arbeid med oppgavestrengen (studentene er markert med S1–S4):

10 Jo Ja. Er det noen av dere andre som har tenkt noe på hvordan distributiv egenskap kommer til uttrykk i det her?

Et annet eksempel er nedenfor, i diskusjonen om ulike retninger undervisningssamtalen kan ta etter at det første regnestykket i oppgavestrengen er presentert for elevene:

83 Jo Hvilken funksjon har det her regnestykket i forhold til målet? Hvorfor har vi det der? (peker på arket) Er det der tyngden i samtalen ligger?

Det faglige målet tas også opp avslutningsvis, hvor Jo ber studentene vurdere om den planlagte undervisningsøkta svarer til det gitte målet:

218 Jo Ja. Okei. Og hvis det her nå da har skjedd i løpet av den her samtalen, kan vi da si at vi har nådd målet?

Selv om målet er gitt på forhånd, og studentene dermed ikke er med i utarbeidingen og vurderingen av hva som kan være et egnet læringsmål, viser utsagnene ovenfor at Jo gir studentene flere muligheter til å vurdere hvordan læringsmålet kan fremmes og gi retning til aktiviteten. Jo henviser til læringsmålet gjentatte ganger, han retter oppmerksomheten mot den matematiske ideen (at multiplikasjon er distributiv med hensyn til addisjon) som elevene skal forstå bedre som resultat av undervisning (utsagn 10), og ber studentene ta stilling til om alle spørsmål eller utregninger i arbeid med oppgavestrengen er like viktige (utsagn 83). Slik svarer utsagnene til Jo til en fremheving av praksisen å *etablere tydelige faglige* mål slik den presenteres av NCTM (2014).

Videre kommer det frem i tabell 2 at FFP-økten inneholder diskusjoner om både *regnestrategier*, *sammenligning av regnestrategier* og *begrunnelser*. Utsagnene under viser at studentene kommer med flere mulige strategier for å regne ut $6 \cdot 25$:

23 S4 Jeg starta først med å gange 6 ganger 5, og så 6 ganger 10, nei, 6 ganger 20.
27 S2 25 pluss 25 er 50, (J: Mhm) og 50 pluss 50 er 100 (J: Mhm), da har vi brukt opp fire av dem (J: Mhm), så da legger vi på 50 til da så vi vet at vi har to igjen.
39 S1 Det var jo den 6 ganger 20 og 6 ganger 5, men så har jeg vært inne på halvering-dobling, da, med 3 ganger 50.

Regnestrategiene sammenlignes også underveis i samtalen:

44 S1 (…) det er jo tilbake på halvering dobling, da, for (…) i mitt hode er tre ganger 64 nesten lettere å jobbe med, for det er færre multiplikasjoner (…)
45 Jo På hvilken måte kan tre ganger 64 oppleves som lettere enn seks ganger 32?
46 S1 For da er det jo seks ganger, og det er jo flere prosesser enn tre ganger 64, for da har du løst (…) 64 ganger to, da er det bare å legge til en til.
47 Jo Ja, så hvis du (…) tenker egentlig at man faller ned på et tidspunkt på noen form for gjentatt addisjon her, så er tre ganger 64 mer overkommelig enn seks ganger 32. Det er det du mener?

I utdragene over diskuteres oppgavestrengen med muligheter for ulike løsningsstrategier og vurdering av hvilke som kan være hensiktsmessige («i mitt hode er tre ganger 64 nesten lettere å jobbe med» i utsagn 44), til forskjell fra å skulle knytte regnestykkene til memorering av fakta eller bruk av bestemte prosedyrer. Resonnering i multiplikasjon blir også vektlagt i arbeidet med å *begrunne* regnestrategiene, med utgangspunkt i en modell. Diskusjonen går etter hvert i retning av å begrunne likheten $6 \cdot 25 = 6 \cdot 20 + 6 \cdot 5$, med utgangspunkt i like grupper (6 poser med 25 drops i hver, tilsvarende som i figur 3):

159	S3	Rett og slett dele opp, og hvis man har de posene med 25 i da, så er det jo veldig enkelt å se for seg at man tar ut fra ene posen, og så putter det i en ny pose, og da tar du ut fem stykker, og så sitter du igjen med 20 drops i hver pose, og de seks av posene, og så har du seks poser med fem i hver, det er veldig enkelt å visualisere da.

I diskusjonene om mulige regnestrategier, om deres sterke og svake sider og hvordan de kan begrunnes, arbeider studentene med planlegging av en undervisning som baserer seg på elevenes egne strategier og resonnementer i arbeid med oppgaven, og hvor det brukes modeller til å støtte elevenes forståelse av strategiene. Det legges vekt på at regnestrategien skal begrunnes og generaliseres ut fra ulike måter å tenke multiplikasjon på, her eksemplifisert med en modell med like grupper. I siste del av planleggingen diskuterer studentene hvordan *begrunnelsen* kan generaliseres (utsagn 230 og 231 nedenfor). Generalisering av en regnestrategi med støtte i en modell gir elevene muligheter til å utvikle dyp kunnskap både i og om matematikk, slik NCTM (2014) fremhever som viktig. Utsagnene indikerer derfor at studentene planlegger en oppgave med høye kognitive krav, og da en *oppgave som fremmer resonnering og problemløsning.*

230	S1	Ehm, går ikke det an å begrunne det med at den mengden du fordeler, altså totalen, vil alltid, altså det er viktig at det alltid er det samme, og at du fordeler den mengden i like mange deler.
231	S2	Vi deler opp mengden, og så regner vi ut hver for seg, og så legger vi sammen de regnestykkene.

Tilgjengeliggjøring av matematisk innhold

Som det går frem av tabell 2, handler også store deler av FFP om hvordan det matematiske innholdet i oppgaven kan gjøres tilgjengelig for elevene i undervisningen. I den følgende analysen viser vi hvordan det legges til rette for tre praksiser for god matematikkundervisning: *legge til rette for en meningsfylt matematisk diskurs*, *stille målbevisste spørsmål* og *bruke og binde sammen matematiske representasjoner.*

Koden *sekvensering av spørsmål og respons* markerer diskusjoner om rekkefølgen på og ordlyden av spørsmål og utsagn til elevene, og som er tett knyttet til det matematiske innholdet i oppgaven. I utsagnene nedenfor vurderes det i hvilken grad studentene skal legge vekt på den første oppgaven ($6 \cdot 7$), og hvilke spørsmål de skal stille:

84	S1	Hva med bare å presentere (…) det første regnestykket som en slags oppvarming. Bare en sånn rask igangsetter.
89	Jo	Ja. Okei. Hvis vi får det riktige svaret med en gang på seks ganger sju, så skriver vi da bare opp det (skriver på arket) og går videre, eller skal vi gjøre noe annet?

Et annet eksempel er en diskusjon om når og hvordan generalisering av den gitte strategien kan fremheves for elevene:

221	S1	I og med at vi har to forskjellige eksempler, så går det an å spørre dem om de tror eller tenker om det her fungerer for alle tall.
222	Jo	Og så sier de ja.

223 S1 Også da eventuelt spørre hvorfor eller hva vi har lært som gjør at de blir …

Utsagnene om sekvensering kan knyttes til praksisen *legge til rette for en meningsfylt matematisk diskurs*, da Jo og studentene tar opp hvordan en som lærer kan knytte sammen elevenes innspill og målet for undervisningen. Her fokuseres samtalen mot det gitte faglige målet ved at regnestykkene i strengen gis ulike roller i undervisningen. Det første regnestykket betraktes som en igangsetter (utsagn 84). De neste regnestykkene krever at ulike strategier tas frem, sammenlignes og begrunnes, og diskusjonen i utsagnene 221–223 tar opp hvordan generalisering av en regnestrategi kan inkluderes i undervisningssekvensen. Det planlegges en undervisning hvor tida skal brukes på det som er utfordrende: fremheving av regnestrategien og en begrunnelse for hvorfor den er gyldig. Å legge til rette for en meningsfylt matematisk diskurs henger også sammen med å *stille målbevisste spørsmål i klasserommet*. Eksemplene fra datamaterialet viser at FFP gir rom for å planlegge slike spørsmål i detalj, tett fulgt av antakelser om elevers mulige svar.

Studentene ønsker at elevene skal begrunne regnestrategiene sine med utgangspunkt i en modell. Diskusjoner rundt ulike modeller og regnefortellinger er kodet som *representasjoner*, og utsagnene under er hentet fra slike diskusjoner:

158 S2 Ja sånn som Student 6 sier da, at posemodellen viser mer direkte, da kan man jo telle posene. Du kan jo telle rutene i arealmodellen og, men det er mer gjentatt ad-disjon i den posemodellen.

160 S2 (…) hvis man har de posene med 25 i da, så er det jo veldig enkelt å se for seg at man tar ut fra den ene posen, og så putter det i en ny pose. Og da tar du ut fem stykker, og så sitter du igjen med 20 drops i hver pose (…), og så har du seks poser med fem i hver, det er veldig enkelt å visualisere da.

Videre dreier Jo diskusjonen mot spørsmål om hvordan en gitt representasjon kan bringes inn i samtalen:

173 Jo Men målet nå er at vi på en eller annen måte får introdusert posemodellen. Da tenker jeg at det blir litt kritisk å gjette på hva eleven faktisk sier for noe, om du kan ta tak i det elevene sier, for å tegne og synliggjøre det. Hvis ikke (…), må vi faktisk ta å introdusere en regnefortelling som vi kan argumentere gjennom.

Bruk av representasjonen knyttes videre til *bruk av tavla*:

193 S3 Hvis vi har lagt de posene med seks ganger 25 hver da, så kunne vi bare lagt sju kroner i hver pose da, det er jo å vise det.

194 Jo Jeg tror det er et lurt moment at vi lar de posene være på tavla, ja, sånn at vi kan benytte oss av dem (…)

Sterke sider ved ulike representasjoner i matematikk og deres hensiktsmessighet for det gitte faglige målet tas opp i planleggingen. Dette skjer for eksempel i utsagn 158, der studenten uttrykker fordeler med 'like-grupper'-modellen, og i utsagn 160, om hvordan produktet $6 \cdot 25$ kan uttrykkes som 6 poser med 25 drops i hver pose. Jo ber videre studentene ta stilling til hvordan representasjonene kan bringes inn i samtalen og presenteres på tavla, med utgangspunkt i elevenes resonnement («målet her nå er at vi på en aller annen måte får introdusert posemodellen», utsagn 173). Diskusjonene favner spørsmål om hvordan modeller støtter elevers resonnering i multiplikasjon, hvordan man som lærer kan fremme bruk av modeller, og hvordan man tydelig kan bruke dem (for eksempel på tavla) i undervisning (utsagn 193 og 194). Med andre ord fremheves undervisningspraksisen *å bruke og binde sammen matematiske representasjoner* i flere faser av FFP og med ulike innfallsvinkler.

Diskusjon

I denne studien har vi stilt forskningsspørsmålet: Hva snakker lærerstudenter og en lærerutdanner om under FFP, og hvor, i det som sies, finnes det muligheter for arbeid med praksiser for god matematikkundervisning? Vi identifiserte at det i FFP snakkes om fire temaer: matematisk innhold i aktiviteten som planlegges, tilgjengeliggjøringen av matematisk innhold, elevers strategier og forkunnskaper, og normer og rammer for læringssamtalen. Videre har vi vist at det i tilknytning til de to mest fremtredende tematiske kategoriene (matematisk innhold, tilgjengeliggjøring av matematisk innhold) blir mulig å arbeide med fem praksiser for god matematikkundervisning. De to øvrige kategoriene gir ytterligere muligheter, og FFP ser dermed ut til å være en egnet arena for læring og mestring av viktige undervisningspraksiser i matematikk.

Som utgangspunkt for studien har vi etterspurt arbeidsformer i lærerutdanningen som svarer til dreiningen i forskning og i nasjonale retningslinjer fra utvikling av lærerkompetanse til mestring av undervisningspraksiser (jf. Mosvold et al., 2018). Vi har også søkt innsikt i måter å redusere kompleksiteten i matematikkundervisning på, som gir lærerstudenter muligheter til å øve mer isolert på bestemte praksiser. I vårt arbeid med syklusen for utforsking og utprøving er kompleksiteten i undervisningen redusert ved at studentene har et på forhånd formulert faglig mål å navigere etter i sin planlegging av en oppgavestreng. Med andre ord velger ikke studentene oppgaven selv, og de får heller ikke mulighet til selv å formulere og avgrense et faglig mål for en kort undervisningsøkt. I FFP legges det derimot vekt på at lærerstudentene skal gå i dybden på detaljer ved implementering av en gitt oppgave, for eksempel i form av diskusjoner om «hvilket spørsmål skal vi stille her» og «hva kan være neste steg i samtalen». Studentene har gjennom arbeid med detaljene fått mulighet til å gå i dybden på sentrale matematiske ideer og fagdidaktiske prinsipper, som sammenligning av strategier i multiplikasjon og drøfting av sterke og svake sider med ulike representasjoner i matematikk. Med andre ord gir FFP, som del av en syklus for utforsking og utprøving, mulighet til å diskutere detaljer som er nødvendige for læring av viktige undervisningspraksiser, uten at studentene må ta inn over seg alle andre aspekter ved undervisning i skolen.

Selv om vår undersøkelse viser muligheter FFP gir for arbeid med viktige undervisningspraksiser i lærerutdanningen, har studien noen begrensninger. Vi har analysert tre planleggingssamtaler med samme lærerutdanner som veileder, og han setter naturligvis sitt preg på samtalen og resultatene av undersøkelsen gjennom å lede diskusjonene inn mot noen utvalgte aspekter ved matematikkundervisning. Vår undersøkelse viser likevel hvordan FFP kan foregå, og hvilke muligheter som finnes i arbeidsformen. Med bakgrunn i resultatene fra studien tilrår vi en implementering av FFP i lærerutdanningen, innenfor de praktiske og organisatoriske rammene som finnes. Det at den planlagte aktiviteten gjennomføres med elever senere samme dag, kan også påvirke hva som diskuteres og hvordan. Eksempelvis kan studentene, med visshet om at undervisningen skal gjennomføres, finne det nødvendig å formulere konkrete spørsmål og bestemme i detalj hvordan figurer skal presenteres på tavla. Slik kan blant annet diskusjoner om tilgjengeliggjøring av matematisk innhold tvinges frem. Det gjenstår derfor å undersøke om de samme mulighetene for arbeid med praksiser for god matematikkundervisning finnes i FFP gjennomført på campus, uten etterfølgende undervisning med elever i skolen. Arbeidsformen er både ressurskrevende og praktisk utfordrende for lærerutdanningen. FFP gjennomført ved campus, for en tenkt undervisningsøkt, vil være enklere å implementere.

Referanser

Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the «best deal» problem. I J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (red.), Algebra in early grades (s. 273–301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). Classroom discussions. Using math talk to help students learn. Sausalito, CA: Math Solutions.

Charles, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. Journal of Mathematics Education Leadership, 7(1) 9–24.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions – a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. Educational Studies in Mathematics, 85(2), 281–304.

Fauskanger, J., & Bjuland, R. (2019). Learning ambitious teaching of multiplicative properties
through a cycle of enactment and investigation. Mathematics Teacher Education and
Development Journal, 1, 125–144.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. I D. Grouws (red.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (s. 276–296). New York: Macmillan.

Grossman, P., Hammerness, K. & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. Teachers and Teaching: theory and practice, 15(2), 273–289.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. & Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. Teachers College Record, 111(9), 2055–2100.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C. & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. Journal for Research in Mathematics Education, 35(2),81–116.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Washington, National Research Council, DC: National Academy Press.

Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E. & Franke, M. (2010). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. I M. K. Stein & L. Kucan (red.), Instructional explanations in the discipline (s. 129–141). New York, NY: Springer.

Lampert, M., Franke, M. L., Kazemi, E., Ghousseini, H., Turrou, A. C., Beasley, H., Cunard, A. & Crowe, K. (2013). Keeping it complex: Using rehearsals to support novice teacher learning of ambitious teaching. Journal of Teacher Education, 64(3) 226–243

Mosvold, R., Fauskanger, J. & Wæge, K. (2018). Fra undervisningskunnskap i matematikk til kjernepraksiser. Uniped, 41(04), 401–411.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). Qualitative data analysis: An expanded sourcebook. Thousand Oaks, CA: Sage.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Grover, B. J. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. American Educational Research Journal, 33(2), 455–88.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. Mathematics teaching in the middle school, 3(4), 268–275.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 13(4), 325–343.

Wiliam, D. (2011). Embedded formative assessment. Bloomington, Ind.: Solution Tree Press.