Katrine Thorsen Aarre

Modellering i matematikk

- en studie av et læringsforløp på 9.trinn

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5. -10. trinn
Veileder: Iveta Kohanova, Per Gunnar Østerlie
Mai 2019

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Katrine Thorsen Aarre

Modellering i matematikk

- en studie av et læringsforløp på 9.trinn

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5. -10. trinn
Veileder: Iveta Kohanova, Per Gunnar Østerlie
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på tre år med videreutdanning. Det har vært tre lærerike, utfordrende og spennende år som har gitt meg som lærer masse påfyll som jeg kan ta med tilbake i klasserommet og forhåpentligvis gjøre meg til en enda bedre lærer. Det har til tider vært krevende å bevege seg utenfor komfortsonen, men ny kunnskap og nye innspill fra både lærere og medstudenter gjør forhåpentligvis til at både jeg og framtidige elever vil ha god nytte av denne utfordringen.

På veien har det vært mange som har støttet og hjulpet meg og som fortjener en takk. Aller først må jeg takke de flotte elevene som stilte opp så jeg fikk gjennomført denne studien. Tusen takk til veilederne mine, Per Gunnar Østerlie og Iveta Kohanova, som har vært gode støttespillere underveis i prosessen, med sine konstruktive råd og kommentarer. Studiegruppa mi fortjener en stor takk. Spesielt Siv, Monica og Johanne – dere har vært supre, med gode samtaler, kollokviegrupper og lunsjavtaler gjennom hele studiet. Videre vil jeg rette en kjempestor takk til min venninne, Marthe som har lest, kommentert og støttet meg gjennom skrivinga. Det har vært en uvurderlig hjelp og støtte! Jeg vil også takke ledelsen på Sjetne skole som har prioritert videreutdanning, og kolleger som har vært nysgjerrig og støttende gjennom prosessen.

Til slutt må jeg gi den største takken til familien min. Kjære Are – tusen takk for at du har holdt ut og gitt plass til skriving og frustrasjon gjennom studietiden. Signe og Guro skal nå få tilbake mammaen sin, som ikke trenger å bruke hele tiden bak skjermen. Neste år skal jeg også være med i alpinbakken!

Trondheim, Mai 2019

Katrine Thorsen Aarre

Innhold

Forord....1
1 Innledning....4
1.1 Bakgrunn for oppgaven....4
1.2 Hva er modellering?....5
1.3 Formålet med oppgaven og forskningsspørsmål....5
1.4 Oppgavens oppbygging....6
2 Modellering i skolen....7
2.1 Når bør man jobbe med matematisk modellering?....7
2.2 Hvorfor bør vi jobbe med matematisk modellering?....8
3 Teori....10
3.1 Ulike tilnærminger til modellering....10
3.2 Klassifisering av modelleringsbegrepet....10
3.2.1 Definisjon på matematisk modellering....12
3.3 Modeller for matematisk modellering....13
3.3.1 Voskogluos modelleringssyklus....14
3.3.2 Blum og Leiss modelleringssyklus....15
3.4 Rammeverk for denne studien....17
3.5 Blokader i en modelleringsprosess....17
3.6 Funksjoner....18
3.6.1 Funksjoner i ungdomsskolen....20
3.7 Oppsummering....21
4 Metode....22
4.1 Kvalitativ forskning....22
4.2 Utvalg og forberedelse....23
4.3 Pilotundersøkelse....23
4.4 Begrunnelse for valg av oppgave....24
4.5 Undervisningssituasjonen....26
4.6 Observasjon....27
4.7 Datamateriale....28
4.8 Analysemetode....28
4.9 Reliabilitet og validitet....29
4.10 Etiske betraktninger....30
4.11 Oppsummering....31
5 Analyse av modelleringsoppgave....32
5.1 Forskerens møte med førerkortoppgaven....32

5.2 Analyse av samtalen med utgangspunkt i modelleringssyklusen 35
5.3 Gruppe 1 sitt andre møte med oppgaven 42
5.4 Blokader i modelleringsoppgaven 44
5.5 Bruk av funksjoner i modelleringsoppgaven 46
5.6 Oppsummering 50
6 Drøfting 51
6.1 Sammenligning av forskerens og informantenes møte med oppgaven. 51
6.2 Hvilken modelleringssyklus kan man finne i elevers arbeid med modellering i matematikk med vekt på funksjoner på 9.trinn? 53
6.2.1 Gruppe 1 sitt møte med førerkortoppgaven 53
6.2.2 Gruppe 2 sitt møte med førerkortoppgaven 56
6.3 Hvilke blokader kan elevene møte i arbeidet med matematisk modellering? 57
6.4 Kan et modelleringsopplegg i matematikk være en introduksjon til temaet funksjoner på 9.trinn? 60
6.4 Oppsummering 62
7 Sammendrag og konklusjon 63
7.1 Konklusjon 63
7.2 Studiens plass i forskningsfeltet og videre forskning 64
7.3 Avslutning 65
Kilder 66
Vedlegg 1: Samtykkeerklæring 68
Vedlegg 2: Godkjennelse fra Norsk senter for forskningsdata (NSD) 71

1 Innledning

«Matematikk er nyttig - det er opplest og vedtatt – og helt sant. Mange av matematikkens geometriske figurer, funksjoner, spennende ideer og nyttige strukturer har faktisk oppstått for å løse praktiske problemer. Men det er en hake ved det hele, nemlig skjøten mellom den virkelige verden og matematikkens presisjon» (Lorentzen, 2012, s. 40).

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Å få elevene til å forstå hva man skal bruke matematikk til, kan mange ganger være utfordrende. «Hva skal jeg bruke dette til?» er et spørsmål de fleste lærere har hørt i sin yrkeskarriere. I mitt masterprosjekt har det vært viktig for meg å forske innenfor et emne som både vil være relevant for elevene mine og som vil bidra til at jeg utvikler meg som matematikklærer og forsker på egen praksis. Derfor har jeg valgt å ta utgangspunkt i modellering som tema i min masteroppgave, der jeg vil se på hvordan elever jobber med modelleringsoppgaver. Jeg anser modellering for å være et relevant tema fordi jeg som matematikklærer møter elever på ungdomsskolen som ofte lurer på når de skal få bruk for det de lærer i matematikktimen. I tillegg vil modellering være en del av et kjerneelement i matematikk i den nye læreplanen "Fagfornyelsen". Utdanningsdirektoratet presenterer kjerneelementet som følger:

> ***"Modellering og anvendelser***
> *Elevene skal ha innsikt i hvordan matematikk brukes i dagligliv, samfunnsliv, vitenskap og teknologi. Det innebærer å ta en problemstilling fra virkeligheten, omformulere den til en matematisk modell og tolke modellen i lys av den opprinnelige situasjonen. Elevene bør få innsikt i hvordan modeller kan anvendes i nye situasjoner. Kritisk tenkning er viktig å utvikle i slike sammenhenger." (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15)*

Formålet med masterprosjektet mitt er å utvikle kunnskap om hvordan en god modelleringsoppgave kan se ut og hvilke forståelser elevene gir uttrykk for når de jobber med modellering. Jeg forsker innenfor et konstruktivistisk paradigme, der kunnskap oppfattes som en konstruksjon av forståelse og mening skapt i møtet mellom mennesker i sosial samhandling innenfor dette paradigmet (Postholm, 2010, s. 21 f.). I dette masterprosjektet skal elevene jobbe i grupper og løse en modelleringsoppgave i fellesskap.

1.2 Hva er modellering?

Det finnes mange måter å tilnærme seg modellering på, men felles for alle er at det dreier seg om sammenhengen mellom to verdener, den matematiske og den virkelige verden. Schou, Skott, Jess og Hansen (2008) sier at situasjonene gjerne skal eksemplifisere at matematikk skal benyttes i reelle omverdenssituasjoner av en viss viktighet, og at det må dreie seg om situasjoner elever kan forholde seg til og se betydningen av. Niss, Blum og Galbrait (2007) refererer til modellering som en prosess. Prosessen innebærer å strukturere oppgaven, bestemme en passende matematisk retning, og å flette sammen en passende overgang fra den ekstra - matematiske verden til den matematiske verden. Videre handler det om å arbeide matematisk samt å tolke og evaluere konklusjonen med tanke på oppgaven. Her skiller forfatterne mellom den ekstramatematiske verden og den virkelige verden ved at i den ekstramatematiske verden gjelder bare den delen av den virkelige verden som er interessant i den konteksten oppgaven spør etter. Blum og Ferri (2011) sier at modellering er en oversettelse fra den matematiske verden til virkeligheten, og med virkeligheten menes resten av verden utenfor matematikken

1.3 Formålet med oppgaven og forskningsspørsmål

Av internasjonal forskning finnes det mye å velge mellom, blant annet Blum og Ferri (2011) som undersøker ulike modelleringsoppgaver på tyske 15- åringer, men det finnes lite norsk forskning på området modellering. Blum og Ferri sier også at elever over hele verden har problemer med å løse modelleringsoppgaver og de ser på hva elever synes er vanskelig i en modelleringsprosess.

Min forskningsinteresse vil være rettet mot 9. trinnselever i en norsk ungdomsskole. Hensikten med denne oppgaven er å studere hvordan en modelleringsoppgave kan se ut og finne mer ut hvilke læringsruter elever bruker når de arbeider med modelleringsoppgaver. Jeg er interessert i å vite mer om hvordan elever forholder seg til oppgaver der det ikke er gitt hvilken matematikk de skal bruke for å svare på oppgaven, og hvordan elever tenker underveis mens de løser en oppgave som er hentet fra den virkelige verden. Jeg finner det utfordrende å koble modellering til spesielt tema innenfor matematikken, og dette gjør meg nysgjerrig på om det er mulig å designe og gjennomføre en modelleringsprosess knyttet til det matematiske temaet *funksjoner*. Min overordnede problemstilling er: *Hvordan jobber elever på 9.trinn med modelleringsoppgaver i matematikk?*

For å kunne belyse problemstillingen har jeg valgt å bryte den ned til følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilken modelleringssyklus kan man finne i elevers arbeid med modellering i matematikk med vekt på funksjoner på 9.trinn?
2. Hvilke blokader kan elevene møte i arbeidet med modellering?
3. Kan et modelleringsopplegg i matematikk være en introduksjon til temaet funksjoner på 9.trinn?

Blum og Leiss (2007)har laget en modelleringssyklus som ser på hvordan elever arbeider med modelleringsoppgaver, i en sjutrinnsmodell. I denne modelleringssyklusen beveger de seg mellom den virkelige verden og den matematiske verden. Det er denne modellen jeg vil legge til grunn i min analyse av elevenes læringsruter. Med begrepet læringsruter mener jeg de ulike stegene man tar når man forflytter seg i sjutrinnsmodellen, kalt «modellingrouts» av forfatterne. I denne studien vil jeg observere to grupper med elever på 9.trinn, når de arbeider med en modelleringsoppgave.

1.4 Oppgavens oppbygging

Denne masteroppgaven vil bestå av sju kapitler. Jeg vil starte med å presentere hvordan matematisk modellering kan møte skolen, mens jeg i teorikapitlet vil presentere relevant teori om modellering, og rammeverket jeg vil bruke for analyse. I kapittel fire, som er metodekapitlet, søker jeg å fremstille forskningsprosessen så transparent som mulig. Det innebærer at jeg grundig og etterprøvbart beskriver forskningsdesign, kontekst og datamateriale. Der vil jeg også presentere mitt valg av modelleringsoppgave, for slik å synliggjøre min forforståelse av oppgaven og hvilke valg jeg har tatt underveis i prosessen. Kapittel fem inneholder analyser av datamaterialet og tar primært utgangspunkt i de to elevgruppene som har jobbet med modelleringsoppgaven. I kapittel seks drøftes sentrale funn fra analysene i lys av presentert teori og de tre forskningsspørsmålene som er utledet av problemstillingen. Kapittel sju inneholder noen avsluttende betraktninger omkring prosjektet og forslag til videre forskning.

2 Modellering i skolen

Ludvigsenutvalgets NOU 2014:7 (2014) viser til at matematikkfaget har vært i endring helt siden den første læreplanen i 1939. Siden faget het regning og kun dreide seg om tallforståelse, har stadig nye elementer kommet til. I 1974 ble navnet endret til matematikk, og da ble også algebra, statistikk og funksjoner en del av opplæringen. I læreplanen M87 ble matematikk også tillagt funksjonen som et redskapsfag særlig for kjemi og fysikk, og videre i L97 ble matematikken knyttet mer til dagliglivet. I Kunnskapsløftet fra 2006 ble matematikken i dagliglivet ivaretatt ved at det ble lagt inn i andre hovedområder og fokuset var praktiske, relevante og dagligdagse problemstillinger. Skolen, som verden rundt seg, er i konstant endring og fra høsten 2020 skal ny læreplan igjen tas i bruk. Læreplanen er enda under utvikling, men kjerneelementene for matematikk er slått fast til å være *utforsking og problemløsing, modellering og anvendelser, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering og til slutt matematiske kunnskapsområder.* Dermed får modellering en mer sentral plass i den norske læreplanen skolen, enn det har hatt i tidligere læreplaner.

2.1 Når bør man jobbe med matematisk modellering?

Å arbeide med matematisk modellering i grunnskolen stiller store krav til virkeligheten og de virkelige situasjonene som elevene skal møte. I de situasjoner fra virkeligheten som du kan bruke, bør matematikken benyttes med en viss viktighet. Dessuten må det dreie seg om situasjoner som elever ser betydningen av å forholde seg til, såkalte autentiske situasjoner.

Å bruke modellering i den matematiske undervisningen er en trend i tiden. Noen skoler i Nederland og Australia har vært tidlig ute med å inkludere obligatoriske modelleringskomponenter i kompetansemålene, og i Norge blir dette som sagt underlagt «modellering og anvendelse» som et av 5 kjerneelement i matematikk i den nye læreplanen «fagfornyelsen» fra høsten 2020. For at matematisk modellering skal bli en viktig del av oppnådd kompetanse, mener Blum (1993) det er noen viktige forhold en må ta hensyn til. Det er viktig å se på målene i matematikkundervisningen i forhold til rollen til matematisk modellering. Dessuten er rekkevidden til de matematiske temaene med modelleringsinnhold mange, og de områdene matematiske modelleringseksempler er hentet fra, uendelige. Man må derfor vurdere hvilke sammenhenger en vil bruke modellering. Her kan man møte noen motsetninger, og en kan vurdere om modelleringsoppgaven skal knyttes til global eller lokal kontekst, om oppgavene skal være åpne eller lukkede, relevant eller irrelevant for elevene og så videre. Man må altså hele tiden vurdere hvordan tilnærmingene til organisering av matematikkens læreplanmål og modellering skal foregå. Valgene kan bestå i om arbeidet med læreplanmålene skal foregå separert, blandet eller integrert med matematiske modelleringsoppgaver.

Niss et al (2007) drøfter hvorfor matematisk modellering er viktig og hvorfor det er hensiktsmessig å bruke modellering. På den ene siden anvender vi matematisk modellering for å lære matematikk, og de argumenterer for det potensiale «modellering og anvendelse» har som hjelpemiddel for å lære elevene matematikk som fag. Her argumenteres det for elever at matematikk faktisk blir brukt utenfor klasserommet av mange ulike grunner og hensikter, og slik både viser det oss et rikere bilde av matematikkens rolle og hjelper oss med å finne mening og forslag til tolkning av matematiske enheter og aktiviteter. Dessuten vil denne måten å arbeide på kunne skape større motivasjon for elevene og gi et større engasjement for å studere matematikk. På den andre siden er det viktig å lære matematikk for å anvende matematikk og for å bygge matematiske modeller. Her vil målet med å lære matematikk være å utruste elevene med evnen til å se matematikken utenfor seg selv, og argumentere med det faktum at den utvendige bruken av matematikk alltid er springer ut av matematiske modeller og modellering.

2.2 Hvorfor bør vi jobbe med matematisk modellering?

Det er gode argumenter for at vi bør jobbe med matematisk modellering i klasserommet. Blum (1993) har kategorisert argumentene i fire ulike kategorier. Første argumentskategori er *pragmatiske argument*, der han sier at undervisning i matematikk først og fremst har som formål å lære elever å løse problemer og utfordringer fra den virkelige verden, og her kan matematisk modellering være et viktig hjelpemiddel. Den andre kategorien er *formative argument*, som utvikler seg fra at elevene er usikre i matematikk, til at elevene skaffer seg kvalifikasjoner i faget., Det kan for eksempel handle om å takle problemer, ha nye holdninger til faget, eller å være åpne til nye utfordringer innenfor matematikken. Her kan matematisk modellering være et viktig bidrag. Det tredje argumentet er *kulturelle argument*. Elevene skulle blitt lært matematikk som en kilde til refleksjon i stedet for et omfattende og balansert bilde av matematikken som en vitenskap og en del av menneskets historie og kultur. Matematisk modelleringer er et viktig trekk i menneskelig intelligens på samme måte som historie og praksis, og matematisk modellering kan dermed være med på å fremme disse aspektene. Den siste kategorien er *psykologiske argument* der matematiske innhold motiveres ved passende modelleringsoppgaver, og kan slik kanskje bidra til faglig utvikling i faget og at elever får en mer positiv holdning til matematikkfaget. På generelt grunnlag sier Blum også si at det alltid har vært klager på at matematikk kan virke meningsløst for elvene, og at matematikk kun er å manipulere formler og symboler. Modellering kan være en faktor som gir mer mening inn i matematikktimene, slik at elevene ser nytten av å lære matematikk.

Mens Blum (1993) først og fremst argumenterer for bruk av modellering i klasserommet og læring av matematikk, argumenterer Maaß (2010) for modellering sett opp mot dagliglivet. Hun sier at modellering kan hjelpe elever til å bli i stand til å bruke matematikken både i dagliglivet og i yrkeslivet, og som aktiv samfunnsborger vil det hjelpe elever å forstå verden rundt seg og kritisk vurdere matematisk informasjon i samfunnet. Elever vil også utvikle problemløsningskompetanse og vil være bedre i stand til å kommunisere ved hjelp av matematikk. Dessuten vil de få en større innsikt i nytteverdien av matematikk, og de vil lettere være i stand til å forstå det matematiske innholdet. Blum (2015) hevder at modelleringsoppgaver kan være med på å hjelpe elever til å få en mer positiv holdning til matematikkfaget. Dette synes jeg er en spennende tanke, og som lærer har jeg selv møtt ulike holdninger til matematikk i klasserommet. Min erfaring er at å vinkle matematikken til noe elevene kan bruke i dagliglivet, gjerne gjør dem mer motiverte til å lære matematikk.

3 Teori

I dette kapitlet vil jeg gjøre rede for hva som ligger i begrepet modellering og begrunne valg av rammeverk i denne masterstudien. Jeg vil også redegjøre for utfordringer med å bruke modelleringsoppgaver i grunnskolen, og hva som kjennetegner en god modelleringsoppgave. Siden denne studien skal se etter bruk av funksjoner i modelleringsoppgaven, vil kapitlet avsluttes med teori om funksjoner og dens plass i norsk skole.

3.1 Ulike tilnærminger til modellering

Ordene modellering og modeller er begreper som blir brukt i mange ulike sammenhenger. I andre fag i skolen sier vi at vi modellerer når læreren viser hvordan for eksempel en fagtekst i naturfag skal skrives, og en slik tekst som læreren viser fra kalles en modelltekst. Ordet *modell* blir brukt i ulike sammenhenger, vi snakker om en modell på en catwalk som viser klær, eller for eksempel en modell av et atom og molekyler i naturfag på skolen. Nasjonalt senter for skriveopplæring og skriveforskning beskriver modellering som et virkemiddel i skriveopplæringen der de tar utgangspunkt i en tekst, der elevene kan gjenkjenne for eksempel sjangertrekk i en spesiell sjangertype. Denne teksten blir da omtalt som en modelltekst. (Skrivesenteret, 2019)

Innenfor matematikken brukes ordene i en annen kontekst og i min oppgave velger jeg å skille mellom matematisk modellering og modellering. Det finnes ulike tilnærminger til matematiske modeller og modellering. Fellesnevneren er at matematisk modellering dreier seg om sammenhengen mellom to adskilte verdener, en matematisk verden og virkeligheten.

3.2 Klassifisering av modelleringsbegrepet

Kaiser og Sriraman (2006) har laget en oversiktlig tabell der de har klassifisert bruksområdene til modellering og de ulike perspektivene for modellering.

I kolonne helt til venstre finner man navn på ulike modelleringsretninger, mens den neste kolonnen beskriver målet med modelleringen. Videre finner man tilnærminger til tidligere retninger innenfor modellering, og siste kolonne beskriver bakgrunnen til modelleringsretningen.

Navn på retningen	**Målet med modelleringen**	**Tilnærminger til tidligere retninger**	**Bakgrunn**
Realistisk eller anvendt modellering	Pragmatiske – funksjonelle mål, som for eksempel å forstå og løse spørsmål fra den virkelige verden og fremme modelleringskompetanse	Pragmatiske tilnærminger som Pollak	Anglosaksisk pragmatiske og anvendt matematikk
Kontekstuell modellering	Fagrelaterte og psykologiske mål som for eksempel å løse problemstillinger fra den virkelige verden	Informasjonsbehandlings - metoder som fører til systemtilnærminger	Amerikanske problemløsningsdebatter, hverdagspraksis og psykologiske eksperimenter
Undervisnings - modellering skiller mellom a) didaktisk modellering b) konseptuell modellering	Pedagogiske og fagrelaterte mål: a)Strukturere og fremme læringsprosesser b)Introduksjon og utvikling av konseptet	Integrerende perspektiver (Blum og Niss) og videre utvikling av det vitenskapelig - humanistiske tilnærmingen	Didaktiske - og læringsteorier
Sosialkritisk modellering	Pedagogiske mål som kritisk forståelse rundt verden rundt oss	Frigjørende perspektiv	Sosio- – kritisk tilnærming i politisk sosiologi
Epistemologisk eller teoretisk modellering	Teoriorienterte mål som for eksempel promotering av didaktisk teori	Vitenskapelig – humanistisk perspektiv som «tidlig» Freudenthal	Romansk epistemologi
Kognitiv modellering	*Forskningsmål*: a) analyser av de kognitive prosesser som skjer i en modelleringsprosess, og forståelse av de kognitive prosessene *Psykologiske mål* b) Fremming av matematiske tankeprosesser ved å bruke modeller som mentale bilder eller psykologiske bilder eller ved å legge vekt på modellering som en mental prosess som abstraksjon og generalisering		Kognitiv psykologi

Figur 1: Tabell over klassifisering av perspektiver av modellering (min oversettelse)

I denne studien skal jeg se på hvordan elever arbeider med modelleringsoppgaver. Min forskningsinteresse ligger i å studere hvordan man kan strukturere og fremme læringsprosesser i arbeid med modellering, og kategorien undervisningsmodellering vil derfor være særlig relevant i min studie. Kognitiv modellering, som Kaiser og Sriraman (2006) klassifiserer som et metaperspektiv, vil også bidra med relevante perspektiv i prosjektet.

3.2.1 Definisjon på matematisk modellering

Niss et al. (2007) beskriver begrepet *matematisk modell* som det å lage en modell av den virkelige verden for å beskrive et problem som kan være både konkret og abstrakt. En matematisk modell består av et tema av interesse fra den ekstra-matematiske verden der du kartlegger fra den ekstra-matematiske til den matematiske verden. Her skiller forfatterne den virkelige verden fra den ekstra-matematiske verden ved at den ekstra – matematiske verden dreier seg kun om den delen av den virkelige verden der matematikken blir brukt. Problemer, relasjoner, fenomener, antakelser, spørsmål etc. fra den ekstra-matematiske verden blir oversatt til objekter, relasjoner, fenomener, antakelser, spørsmål etc. i den matematiske verden. Matematiske diskusjoner, manipulasjoner og slutninger blir gjort og resultatet blir oversatt og tolket til den ekstra - matematiske verdenen, og man får en konklusjon for det formålet man ønsker. Denne modelleringssyklusen kan tas i bruk flere ganger for å validere og evaluere modellen til konklusjonen er tilfredsstillende sett i sammenheng med hensikten av modellkonstruksjonen (Niss et al., 2007).

Blum (1993) sin definisjon av matematisk modellering skiller seg noe fra Niss et al. (2007), ved at den ikke skiller mellom den virkelige verden og den ekstra - matematiske verden. Blum hevder at du må ha en situasjon fra den virkelige verden, der han definerer den virkelige verden som resten av verden utenfor den matematiske. Videre blir denne situasjonen forenklet, strukturert og gjort mer presis av problemløseren. Dermed lages det *en modell* av situasjonen. Modellen skal gi et virkelig bilde av en objektiv, eksisterende virkelighet. Videre bør modellen matematiseres, altså oversettes til matematikk og resulteres i en matematisk modell fra den originale situasjonen. Prosessen utvikles ved at du velger passende matematiske metoder for å få et matematisk resultat. Dette resultatet må oversettes tilbake til den virkelige verden og tolkes i forhold til den originale situasjonen.

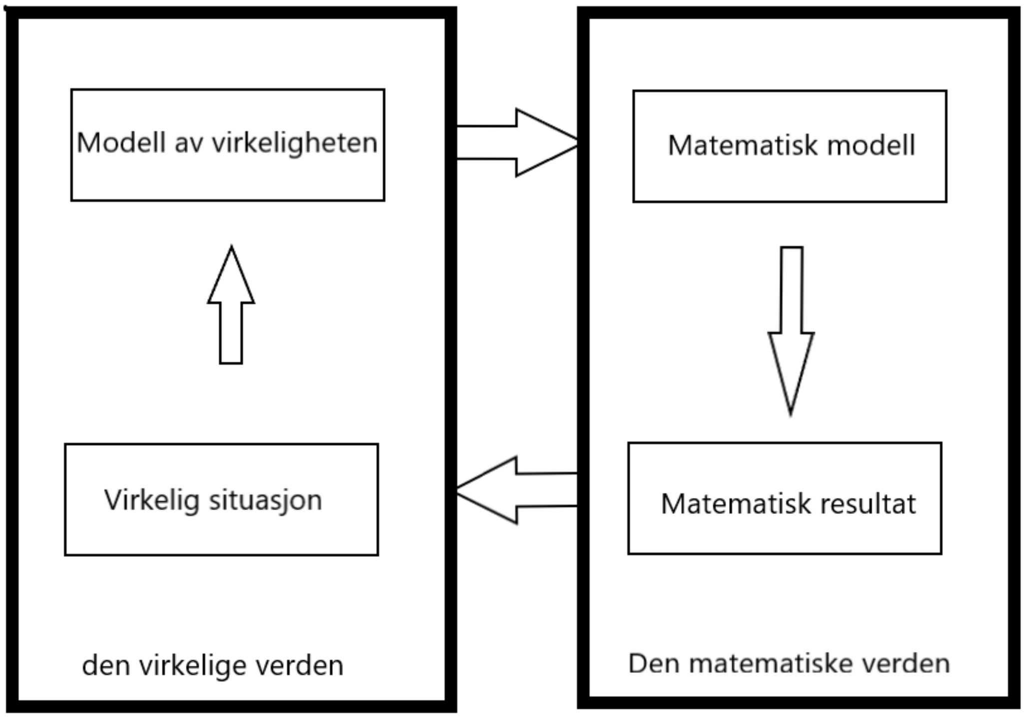
Niss et al. (2007) beskriver det matematiske modelleringsbegrepet ved at de begynner med å avklare noen spørsmål om begrep, som å forenkle, strukturere, gjøre situasjoner mer presise og så videre. Niss et al. Hevder at ofte er oppgavene man modellerer mer praktiske, der man kan tolke oppgaven i ulike retninger. Videre blir oppgaven matematisert, der man tar problemet fra en virkelig verden og oversatt til den matematiske verden gjennom matematiske modeller. Oppgaven løses i den matematiske verden, gjennom teoretisk matematikk. Videre vil det matematiske resultatet bli oversatt tilbake til den virkelige verden og tolket i samsvar med det originale virkelige problemets kontekst. Oppgaven må valideres ved å sjekke at det tolkede matematiske resultatet er logisk og kompatibelt i forhold til den informasjonen som ble gitt i utgangspunktet. I tillegg må modellen evalueres gjennom å se om løsningen er nyttig for sin hensikt. Til slutt må man se om løsningen er satt opp mot det originale problemet, og om det er relevant kommunisert med andre

Schou (2008) presenterer en annen måte å tolke begrepet modellering på. Han beskriver modellbegrepet som at elever tar et problem fra virkeligheten og lager en modell som beskriver hvordan problemet kan løses. Dette omtales som en modell av et konkret problem. Uttrykket kan utvikles til ikke bare å gjelde for den ene situasjonen eller problemet, men også gjelde liknende problem. Dermed utvikles modellen fra å fungere som en *modell av* problemet til å bli en *modell for* liknende situasjoner (Schou, 2008). Denne formen for modellering er mye smalere enn Blum og Niss et al., da dette først og fremst handler om å lage en modell for situasjoner som kan fungere i andre liknende situasjoner, og da blir modellen først og fremst kun en matematisk modell av en situasjon.

I denne studien har jeg også lagt Blum (1993) og videreutviklingen av Niss et al. (2007) sine definisjoner av modellering til grunn for forståelsen av modellering, ut ifra et pragmatisk syn der disse definisjonene danner et godt utgangspunkt for å forstå matematikk ut fra et problem tatt fra virkeligheten.

3.3 Modeller for matematisk modellering

Det er laget forskjellige modeller for å forklare elevenes kognitive prosesser når de jobber med modelleringsoppgaver for å svare på oppgaver. I artikkelen til Haines og Crouch (2010) og Perrenet, Zwaneveld og EsoE (2012) presenteres flere ulike modelleringsmodeller, og jeg velger å ta utgangspunkt i disse artiklene for å presentere noen modeller. De ulike modellene er blitt utviklet siden 1970-årene og utgangspunktet for videre utvikling av modelleringssykluser er vist i figur 2.

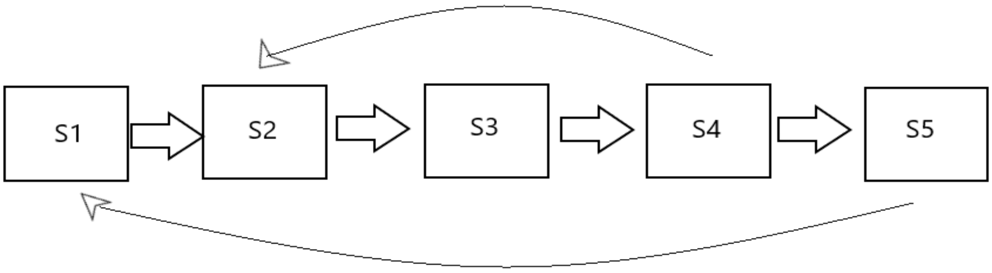


Figur 2: modelleringssyklus

Syklusen i figur 2 er laget av Blum (1993) og beskriver hvordan man beveger seg mellom den virkelige verden og den matematiske verden. Modellen starter og slutter med et virkelighetsproblem, og den viser overgangen mellom den virkelige verden og den matematiske verden.

3.3.1 Voskogluos modelleringssyklus

Et annet eksempel på en modelleringssykus er utarbeidet av Voskogluo (2007). Voskoglou beskriver matematisk modellering som en stokatisk prosess, og det kommer an på hvordan elevene oversetter sammenhengen mellom de ulike stadiene.

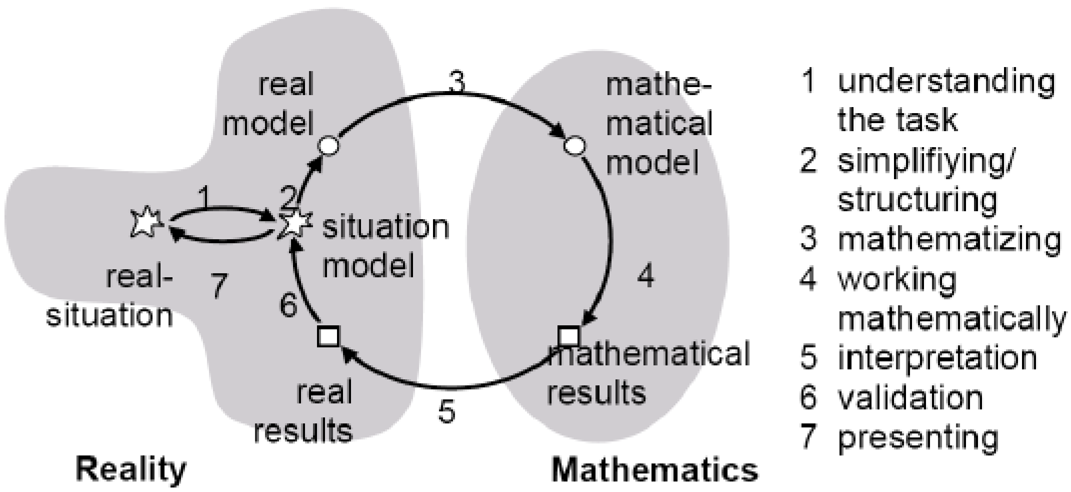


Figur 3: Voskoglous modelleringsyklus

Hver firkant i denne modellen beskriver hvert steg i en modelleringsprosess, og overgangen til et nytt steg avhenger av hvordan du løste forrige stadium. I S1- stadiet analyseres problemet, og man prøver å finne begrensninger og krav til oppgaven. S2 dreier seg om matematisering, der man formulerer den virkelige situasjonen slik at man er klar for å konstruere en matematisk modell. I S3 vil man løse modellen matematisk, og i S4 blir problemet validert, ved at man går tilbake til S2 for å reprodusere modellen eller sjekke at den fungerer ut ifra de forhold som gjelder. S5 vil relatere det matematiske resultatet tilbake til det virkelige problemet som man startet med i S1. Denne modellen skiller ikke like tydelig mellom den virkelige og den matematiske verdenen, slik som modellen til eksempelvis Blum gjør.

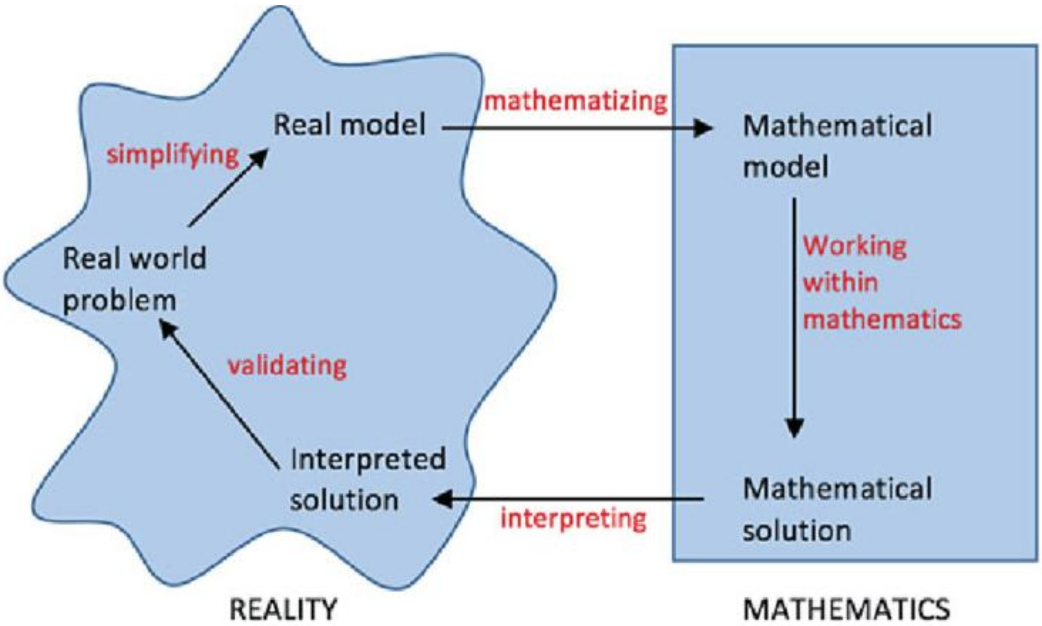
3.3.2 Blum og Leiss modelleringssyklus

Blum og Leiss (2007) har videreutviklet modellen til Blum (1993) og gått mer detaljert inn i prosessen.



Figur 4: Blum og Leiss sin modelleringssyklus

Vi ser av modellen at Blum og Leiss også skiller den virkelige og den matematiske verden fra hverandre, illustrert gjennom de to grå feltene holdes adskilt. Modelleringssyklusen er blitt mer detaljert, ved at vi går mer inn på sju steg Blum og Leiss mener elever jobber innenfor gjennom modelleringsprosessen. Prosessen er ikke lineær, altså følger ikke elevene nødvendigvis rutene i samme retning slik pila i figuren viser, og alle steg er en kognitiv prosess. Begrepene eller modelleringsrutene (modellingroutes) i modellen beskriver hvor elevene er i prosessen, mens tallene 1-7 beskriver hvilke arbeidssituasjoner elever er i underveis. Modelleringssyklusen starter i en virkelig situasjon, der elevene må sette seg inn i hva oppgaven handler om og forstå oppgaven (1) for å lage en modell av situasjonen. Videre må de strukturere og forenkle (2) for å lage en virkelighetsnær modell, og her må det gjøres antakelser slik at problemet kan løses. I denne prosessen må man velge hva som er relevant(e) fakta, og hva en ikke tar med videre i arbeidet med oppgaven. Videre beveger man seg over fra den virkelige verden over til den matematiske, der man matematiserer (3), altså oversetter det virkelige problemet til et matematisk problem. Resultatet er neste modelleringsrute, altså en matematisk modell av situasjonen. Her må man ta tak i den matematiske modellen og arbeide matematisk (4) for å lage et matematisk resultat. Dette resultatet må oversettes til den virkelige verden igjen for å tolke (5) dette opp mot det virkelige problemet. Oppgaven må valideres (6), der løsningen eller løsningene må vurderes opp mot situasjonsmodellen. Er det noen faktorer som ikke er med som må vurderes, eller er det faktorer som kan droppes? Til slutt må man legge fram resultatet (7) og se at man svarer på det oppgaven spør om. Det kan være naturlig at man går fram og tilbake mellom modelleringsrutene, eller hopper over en rute i arbeidet med en modelleringsoppgave.



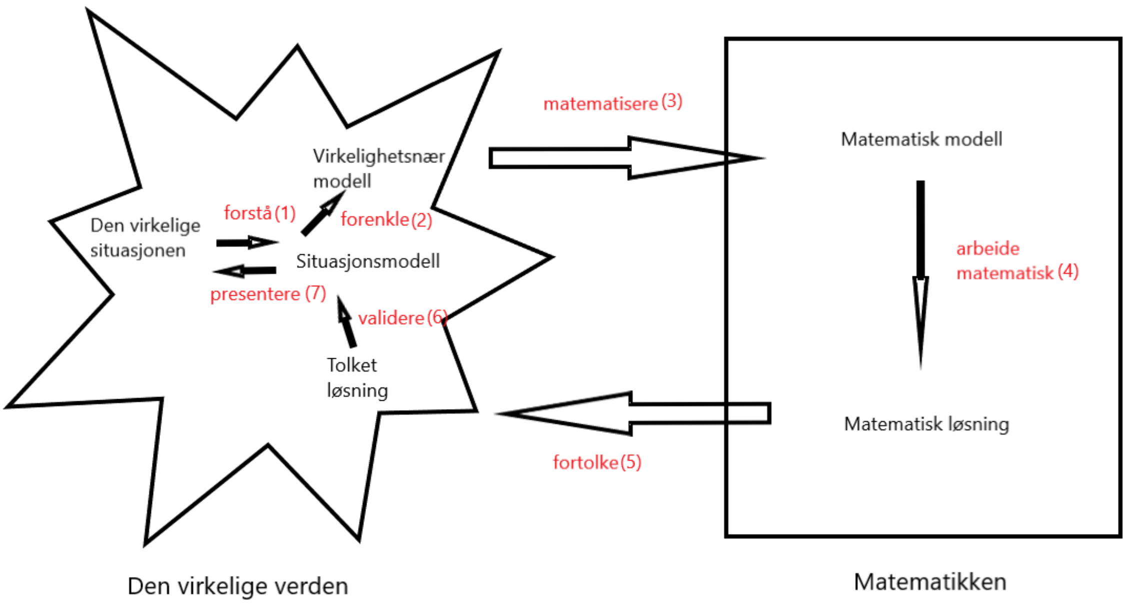
Figur 5: Maaß sin modelleringssyklus

Maaß (2010) har videreutviklet Blum, Galbraith, Henn og Niss (2007) sin modelleringssyklus i den forstand at hun har markert at den virkelige verden er litt mer uklar i kantene, mens den matematiske verden er strammere, markert med et rektangel. Blum og Leiss (2007) har en grå skygge i bakgrunnen for å markere og skille de to verdenene. Maaß (2010) bruker samme begrep, men har valgt å navngi overgangene i figuren, i stedet for nummering og forklaring på utsiden.

3.4 Rammeverk for denne studien

I denne studien har jeg valgt å ta utgangspunkt i Blum og Leiss (2007) og (Maaß, 2010) sin modell og kombinert disse. Jeg har valgt å oversette og tolke begrepene til min en egen skisse av en modelleringssyklus. Jeg har tatt et pragmatisk valg av modell til modelleringssyklusen, da de andre modellene også kan brukes. Samtidig har denne modellen flere modelleringsruter, og jeg mener derfor at den er bedre egnet til å studere mer i detalj hvordan elevene jobber i en modelleringssyklus. På den måten kan det være lettere å se hva elevene lykkes med og hvor de møter blokader.

Jeg har valgt å sette nummer i parentes for lettere å finne fram i modellen og teksten og vil referere til tallene i Blum og Leiss (2007)sin modell (figur 4). De har plassert tall i figuren, mens teksten er satt utenfor syklusen. Det er denne modellen som jeg vil legge til grunn som mitt rammeverk i denne studien.



Figur 6: Min redigerte overstettelse av modelleringssyklusene

3.5 Blokader i en modelleringsprosess

Flere studier har vist at hvert steg i en modelleringsprosess kan føre til en såkalt kognitiv barriere hos elevene (Blum, 2015), der elever blir stående fast. Dette kaller Blum for en blokade eller en «rød flagg-situasjon». I denne studien velger jeg å bruke begrepet blokade. I denne sammenhengen vil modelleringssyklusen være et godt hjelpemiddel for å analysere hvor elevene får blokader, og hva læreren kan gjøre for å hjelpe elevene videre. Tallene i modelleringssyklusen vil henvise til stegene jeg bruker for å beskrive hvilke blokader elever kan møte.

Blum (2015) og Schaap, Vos og Goedhart (2011) har gjennomført modelleringsoppgaver på elever og funnet eksempler på ulike blokader, og jeg vil gjengi eksempler på blokader på de ulike rutene i modelleringssyklusen som elevene kan møte i en modelleringsprosess. Det første eksemplet jeg viser til er steg 1 i modelleringssyklusen; «å forstå situasjonen». Dette kan for mange elever bli en blokade, da det å forstå en oppgave kan være ei utfordring for noen. Videre kan det å trekke essensen ut av selve oppgaveformuleringen være en utfordring, og da kan man finne en blokade i sammenhengen «forenkle situasjonen». Elevene gjør noen feilaktige antakelser, som vil hindre dem å komme videre i modelleringsprosessen. De viser også til en blokade i overgangen mellom den virkelige og den matematiske verden når elevene skal «matematisere», der det å ikke kunne konvertere spesielle kunnskaper i den virkelige verden til et matematisk uttrykk kan skape en blokade. De viser også til at det å «validere» løsningen er en ny vanlig blokade. Et eksempel på dette kan være: «Hvor mange busser trenger vi til 450 soldater, når det er plass til 36 soldater i hver buss?» Populære svar er 12.5 busser, eller 12 busser og 18 til overs, uten å sjekke at svaret kan stemme i virkeligheten. Kanskje er det evnen til å validere den matematiske løsningen som er fraværende hos de fleste elevene? (Blum, 2015) (Schaap et al., 2011)

3.6 Funksjoner

I denne studien søker jeg å knytte modellering til læreplanmålene elevene har i grunnskolen, og jeg har helt spesifikt valgt å knytte en modelleringsoppgave til temaet funksjoner. Funksjoner blir i læreboka *«Faktor 10»* (Hjardar, Pedersen & Jerner, 2015) definert som «enhver verdi av x gir en og bare en verdi av y». Forenklet sier boka også at «en funksjon viser sammenhengen mellom en eller flere verdier». Egenskapen til funksjoner er at det kan uttrykkes på ulike måter, både algebraisk, gjennom tabeller og grafisk, der særlig grafisk og algebraisk er to veldig ulike måter som sammen uttrykker og definerer funksjoner (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990).

Funksjonsbegrepet har fra 1700-tallet til utover 1800-tallet endret seg fra å være en kurve som beskriver bevegelse til et analytisk uttrykk ved bruk av variabler og konstanter som representerer sammenhengen mellom to variabler, der grafen ikke har noen «skarpe kanter». I dag er funksjonsbegrepet videreutviklet og blir beskrevet som en univalent sammenheng mellom to enheter. Altså, er en funksjon f(x) fra A til B er definert som enhver delmengde av A, vil det finnes én og bare én B, som gjør at a og b er elementer i f(x). Andre essensielle egenskaper hos en funksjon er vilkårlighet og entydighet. Vilkårlighet til en funksjon trenger ikke å bli definert som noe objektivt, og det trenger ikke å være et tall. Entydigheten sier at for hvert element i oppgaven, finnes det bare ett element i området (Even, 1993), som det blir sagt i læreboka til elevene – for hver verdi av x finnes bare en verdi av y.

«The Harvard Calculus Project (HCP)» har også definert 3 ulike representasjoner innenfor funksjoner. Grafer, tabeller og funksjonsuttrykk kan alle tre være representasjoner som kan brukes som utgangspunkt for å analysere funksjoner. I tillegg har de foreslått å legge til en fjerde representasjon, som dreier seg om at elever i samtale forklarer hverandre om funksjoner (Cramer, 2003). Det er ulike tilnærmingsmåter for få elever til å forstå ulike funksjoner, og det er ikke funnet en bevist bedre måte å tilnærme seg funksjoner på enn annen. Læreren kan nærme seg funksjoner gjennom graf, gjennom funksjonsuttrykk eller gjennom koordinatpunkt i et koordinatsystem. Det er derfor opp til læreren å legge til rette for at elevene opplever mestring i temaet (Leinhardt et al., 1990).

Duval (2006) sier at matematikk alltid foregår i en representasjonell kontekst, og et objekt kan ikke undersøkes uten at det finnes en eller annen form for representasjon. De fleste tema i matematikken har flere ulike representasjoner, og funksjoner er en av dem. Det er forventet av elevene at de kan bevege seg mellom de ulike representasjonene, og dette kan være kognitivt vanskelig. Overgangene mellom de ulike representasjonene, eller transformasjonene som Duval kaller det, er nødvendig for å representere alle matematiske objekter, som for eksempel funksjoner. Transformasjoner mellom representasjoner er et grunnleggende trekk for all matematikk. Det er derfor viktig at elever kan å ta i bruk flere ulike representasjoner. Duval skiller mellom to ulike typer transformasjoner mellom representasjoner. *Behandling* kan beskrives som endring av en representasjon innenfor samme system. Eksempel på det kan være at man fra å ha to punkter for å tegne en graf, finner fire punkter. *Omdanning* er litt mer komplisert, fordi det matematiske objektet skal gjenkjennes i ulike representasjoner. Omdanning handler først og fremst om at representasjonen endres uten at objektet endres. Eksempel på dette kan da være at man transformerer en tabell over til en graf eller til et funksjonsuttrykk (Duval, 2006).

Janvier (1987) har sett på representasjoner innenfor funksjoner og navngir overgangen mellom de fire ulike representasjonene verbal beskrivelse, graf, funksjonsuttrykk og tabell. Janvier kaller disse overgangene for oversettelsesaksjoner.

Til / **Fra**	**Verbal Situasjon**	**Tabell**	**Graf**	**Funksjonsuttrykk**
Verbal Situasjon		Måle	Skissere	Modellere
Tabell	Lese		Plotte	Tilpasning
Graf	Tolke	Lese av		Kurve tilpasning
Funksjonsuttrykk	Parameter gjenkjennelse	Beregne	Skissere	

Figur 7: Janvier (1987) Oversettelsesaksjoner (min oversettelse)

I tabellen i figur 7 viser Janvier til hvilke representasjoner som brukes om funksjoner, og de ulike overgangsaksjonene som hører sammen. Eksempel på dette kan være at når elevene går fra representasjonen verbal situasjon til graf, må de finne de ulike variablene, som beskriver x og y – ledd på grafen.

I denne studien vil jeg bruke disse representasjonene og oversettelsesaksjonene som utgangspunkt i møtet med elevenes modelleringsoppgave, for å se om de bruker funksjoner når de skal løse oppgaven.

3.6.1 Funksjoner i ungdomsskolen

I Norge blir begrepet funksjoner nevnt i læreplanen i matematikk først på ungdomstrinnet. Etter 10.trinn skal elevene kunne:

- *lage funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, med og utan digitale verktøy, beskrive og tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekstar*
- *identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjonar og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane (Utdanningsdiraktoratet, 2013)*

Selv om funksjoner ikke er eksplisitt uttrykt som læreplanmål før etter 10. årstrinn, skal elevene likevel ha jobbet med funksjoner før ungdomsskolen. Allerede på småtrinnet har elevene plottet punkt i et koordinatsystem, laget tabeller til diagrammer og lest av koordinater i kart. På mellomtrinnet skal elevene ha jobbet med å beskrive plassering og flytting i rutenett, på kart og i koordinatsystem, samt brukt koordinater til å beregne avstander parallelt med aksene i et koordinatsystem. Dette kan ses på som tidlige møter med funksjoner.

3.7 Oppsummering

I dette kapitlet har jeg forklart hva modellering er og vist ulike forståelser og tilnærminger til begrepet matematisk modellering. Jeg har også beskrevet ulike typer modelleringssykluser og presentert mitt rammeverk for denne studien. Jeg har beskrevet hvorfor det er viktig å modellere i matematikken og prøvd å beskrive når det kan være lurt å bruke matematisk modellering. Til slutt har jeg definert hva en funksjon er og hvordan norske elever blir presentert for funksjoner gjennom læreplanen i matematikk.

4 Metode

I denne studien ser jeg ser på hvordan en modelleringsoppgave med vekt på funksjoner kan se ut, og jeg vil i tillegg se på hvilke modelleringsruter elevene vil følge i arbeidet med en modelleringsoppgave, og hvilke blokader de eventuelt møter i dette arbeidet. Jeg vil også se etter hvordan elevene har i bruk funksjoner gjennom å studere elevenes samtaler og løsningsforslag.

Dette kapitlet handler om de metodiske valgene jeg har tatt i forskningsprosjektet. Jeg vil gjøre rede for mitt forskningsdesign og valg av kvalitativt forskningstilnærming, sett i lys av problemstilling og studiets formål. Deretter vil jeg presentere forberedelser til mitt prosjekt, og beskrive hvordan det påvirket mitt prosjektdesign. Jeg vil også analysere min oppgave og drøfte hvilke valg jeg gjorde underveis i oppgavedesignet. Avslutningsvis vil jeg se på etiske hensyn jeg har tatt i arbeidet med elever og prosjektet.

4.1 Kvalitativ forskning

Den kvalitative forskningen er en situert aktivitet, som foregår i samspill med omgivelsene. I kvalitativ metode legges det vekt på nærhet og observasjon av et fåtall studieobjekter i sine naturlige omgivelser (Ringdal 2007). I følge Postholm (2005) innebærer kvalitativ forskning at en forsker på prosesser og problemer i en virkelig setting. For å se på hvordan elever jobber med modelleringsoppgavene vil jeg derfor velge en kvalitativ forskning for å finne ut mer om hvilke læringsruter elevene følger når de jobber med modelleringsoppgaven i dette studiet. Jeg ønsker å gå i dybden på temaet modellering og ønsker dermed å se og tolke elevenes måte å løse en modelleringsoppgave på. I den kvalitative forskningen vil virkeligheten skapes eller konstrueres av de som deltar i studien. Derfor er det viktig å prøve å tolke og forstå virkeligheten til elevene som er med i studien.

I kvalitativ forskning kan det være vanskelig å skille det som skjer fra hverandre. Valsiner, Van der Veer og Jaan (2000) bruker begrepne "aktivitet" og "dialog". Disse henger sammen på denne måten at man alltid må se aktivitet og dialog i samspill med hverandre. Når elever diskuterer en matematikkoppgave, kan man ikke bare ta utgangspunkt i dialogen, men man må se aktiviteten i den konteksten den foregår. Aktivitetene elevene gjør vil også være ledsaget av hvordan dialogen går (Postholm, 2005). Dette vil være viktig å ha fokus på i min studie av hvordan elever jobber med modelleringsoppgaver. Når jeg skal studere hvordan elevene jobber med modelleringsoppgaver, må jeg se på sammenhengen mellom samtalen til elevene og notatene de gjør underveis.

4.2 Utvalg og forberedelse

Min forskningsinteresse ligger først og fremst hos ungdomstrinnselevenes møte med modelleringsoppgaver i matematikk. Derfor tok jeg kontakt med en lærer på 9.trinn på en 1 – 10. skole. Skolen har ca. 600 elever, jevnt fordelt på alle trinn og den ligger i et veletablert boområde sentralt i Trøndelag. Jeg har ikke kjennskap til elevene på dette trinnet fra før, og har derfor ingen sensitive opplysninger om elever og miljøet i klassen. Både lærer og elever responderte positivt på å delta i prosjektet. At valget falt på å jobbe med 9.trinn handler om at de enda ikke har startet med temaet funksjoner i form av representasjonene funksjonsuttrykk og graf, men at det er et tema de møter senere dette skoleåret. Elevene hadde gått ca 3 måneder i 9.trinn da de deltok på prosjektet. Det var læreren som informerte elevene om prosjektet, mens jeg som forsker tok kontakt med foreldre via e-post med ønske om godkjennelse for å delta på forskningen. For å ufarliggjøre prosjektet var jeg i tillegg inne for å informere gruppa om hva som skulle skje og svare på eventuelle spørsmål fra elevene noen dager før gjennomføringen. Alle elever som er brukt som informanter har skriftlig godkjent at de ønsker å delta (vedlegg 1). Hele trinnet gjennomførte oppgaven, men jeg har valgt å følge to grupper på tre elever hver via observasjon med lydopptaker og filmkamera, som er godkjent via Norsk senter for forskningsdata (NSD) (vedlegg 2). Filmkameraet filmet arket elevene noterte på, og ikke elevene. Elevene som ble valgt ut er tilfeldig valgt, og de er satt sammen i gruppe av læreren som kjenner klassen etter prinsippet om at de klarer å samarbeide og er interesserte i å løse oppgaven.

4.3 Pilotundersøkelse

Før selve datainnsamlingen fant jeg det hensiktsmessig å gjennomføre en pilotundersøkelse for å se om oppgaven ga svar på de problemstillingene jeg hadde og om elevene var i stand til å løse oppgaven. Jeg testet dette på en gruppe elever som jeg selv har undervist, som på dette tidspunktet gikk på 10.trinn. Elevene fikk selv velge hvem de skulle jobbe sammen med, men måtte arbeide i grupper på tre til fire elever. Oppgavetypen var litt løsere, da elevene selv skulle velge tre kjøreskoler i hjembyen og sammenligne disse. Jeg erfarte at elevene brukte lang tid på å finne de tre kjøreskolene, og at de brukte uhensiktsmessig lang tid på å søke opp tre kjøreskoler de skulle arbeide med, derfor valgte jeg å plukke ut tre kjøreskoler for elevene da jeg gjennomførte selve prosjektet på 9.trinn. Siden piloten ble gjennomført på 10. trinn, hadde de større kjennskap til temaet funksjoner, og klarte derfor å løse oppgaven greit. Jeg merket stort engasjement i klasserommet over et tema de syntes var relevant for dem i det daglige, siden mange allerede var i gang med å ta trafikalt grunnkurs. Samtidig kan jeg ikke se bort ifra at noe engasjement kommer av at jeg er matematikklæreren til vanlig, og at de derfor viser engasjement for å gjøre læreren fornøyd.

4.4 Begrunnelse for valg av oppgave

Å lage en god modelleringsoppgave for elevene kan være utfordrende, og i denne oppgaven har jeg valgt å ta utgangspunkt i Lesh, Cramer, Doerr, Post og Zawojewski (2003) som har arbeidet fram seks prinsipper for hva en god modelleringsoppgave skal være. Disse kriteriene arbeidet de fram gjennom en tiukers studie der de så på problemløsning av oppgaver fra virkeligheten og hvilken matematisk resonnering som er nyttig å bruke, og hvilke forståelser og ferdigheter som er nødvendige for å lykkes i slike situasjoner.

Det første prinsippet er *prinsippet om meningsfullhet*. Spørsmål man som lærer må stille seg er om dette virkelig kan skje i virkeligheten? Vil oppgaven gi mening for elevene i sammenheng med hvor de er i kunnskapsnivå og erfaring? Vil elevene ta oppgaven seriøst og gå sine egne veier, eller vil de løse oppgaven på den måten de tror læreren ønsker de skal løse den.

Det neste prinsippet er *modellkonstruksjonsprinsippet.* Ser elevene et behov for å lage en modell for å løse oppgaven? Er oppgaven laget slik at elevene må konstruere, modifisere, utvide, manipulere, reorganisere og kontrollere modellen for å løse oppgaven? Oppgaven bør også være laget slik at fokuset blir på underliggende mønster og matematiske regler heller enn overfladiske problem.

Det tredje prinsippet kalles *selvevalueringsprinspippet*. Er kriteriene i oppgaven laget slik at elevene kan vurdere nyttigheten av å bruke alternative måter å gi respons på? Vil elevene være i stand til å vurdere seg selv om deres respons er god nok? Og til sist, for hvilke grunner trenger vi disse resultatene?

Det fjerde prinsippet er *modelldokumentprinspippet*. Vil responsen elevene gir kunne vise hvordan de har tenkt underveis i oppgaven, som mål, mulige løsningsforslag og liknende. Vil det komme fram hvilken matematikk, som matematiske objekt, sammenhenger, mønster, de har brukt i arbeidet med oppgaven?

Det femte prinsippet er prinsippet om *enkle prototyper*. Er oppgaven så enkel som mulig, men finnes det likevel et behov for å lage en modell for å løse oppgaven? Vil løsningen kreve en nyttig prototype, som kan brukes i andre liknende situasjoner? Vil arbeidet med oppgaven kreve en historie som er forklarende eller gi mening i en tilsvarende lik situasjon?

Det siste prinsippet er *generaliseringsprinsippet*. Gir begrepsverktøyene som er laget kan brukes i bare denne ene sammenhengen eller kan den generaliseres og oversettes til andre liknende situasjoner? Elevene bør bli utfordret til å ikke bare lage en modell for den oppgaven de er gitt, men også lage modeller som kan være delelige og gjenbrukbare i andre sammenhenger.
Ut fra disse prinsippene har jeg valgt å gi elevene følgende modelleringsoppgave som utgangspunkt til min forskningsoppgave.

«Førerkort

For å kjøre bil trenger du førerkort. I Norge må man være 18 år for å kunne kjøre opp, men man kan starte øvelseskjøring fra man er 16 år og har det trafikale grunnkurset. I hjembyen din har du mange kjøreskoler å velge i, og det varierer litt hvor mye det koster å kjøre opp. June og Henrik er begge 15 år og har allerede begynt å spare til å ta lappen, men lurer på hvor mye de egentlig trenger å spare for å ha råd til dette.

Kan dere hjelpe June og Henrik? Sammenlign priser i selskapene Franks kjøreskole trafikkskole, Kula trafikkskole og Tut og kjør trafikkskole. Finn ut hvor mye det koster å ta lappen i dag ut ifra om du trenger for eksempel 10, 15, 20 eller flere kjøretimer. Lag en oversikt som viser hvor mye det koster å ta førerkort i dag. Vis det gjerne i et koordinatsystem.»

Ut ifra det *meningsfulle prinsippet* skal alle elever ta et valg om å kjøre opp til bil, og i en alder av 15 år vil de fleste begynne å prøvekjøre og ta førerkortet de nærmeste årene. Hvor mye et førerkort koster og hvilke kjøreskoler som er billigst er dermed veldig betydningsfullt for elevene. Videre trenger de å lage en modell for å klare å løse oppgaven, siden de skal sammenligne ulike kjøreskoler for å kunne presentere de ulike prisene på kjøreskolene, og dermed oppfylles prinsippet om *modellkonstruksjon*. *Selvevalueringsprinsippet* blir ivaretatt ved at elevene må vurdere hvilken kjøreskole som er billigst og siden det er flere kjøreskoler de skal sammenligne, må de vurdere om resultatene de finner er logiske og om de er relevante for det de skal finne ut av. I denne sammenhengen er det relevant for elevene, å finne svar på spørsmål ettersom de innen kort tid vil søke denne informasjonen når de selv skal starte med oppkjøringen. Prinsippet om *enkle prototyper* blir ivaretatt ved at de å lage en modell for å finne ut hvor mye et førerkort koster, i første omgang kan overføres til andre kjøreskoler som ikke er nevnt i oppgaven. Videre kan prototypen brukes i andre sammenhenger der elevene for eksempel skal sammenligne priser på andre tjenester de trenger. Dette henger tett sammen med *generaliseringsprinsippet,* der de begrepene elevene lærer om funksjoner kan tas med over i liknende kontekster.

4.5 Undervisningssituasjonen

Undervisningsopplegget ble gjennomført i en helt vanlig timeplanfestet matematikktime på trinnet. Elevene hadde ikke jobbet med matematiske modelleringsoppgaver før, men virket engasjerte og interesserte i å arbeide godt med oppgaven. Både jeg som forsker og deres faste lærer var tilstede og hilste på klassen, og jeg opplevde at det var en god stemning i rommet. Elevene ble satt i grupper på tre og tre elever, og de to gruppene som var valgt ut ble plassert på grupperom for å skjerme for forstyrrelser utenfra. Elevene fikk utdelt oppgavearket og et blankt ark som de kunne notere på underveis. Vi gjennomgikk hvordan lyd og videoopptakerne fungerte, og satte elevene i gang med arbeidet.

Siden elevene ikke har stor kjennskap til arbeidet med å lage funksjonsuttrykk, valgte jeg å gi elevene noen hint i tillegg til oppgavearket for å hjelpe dem videre om de ble stående fast. Derfor la jeg også ut tre ulike ledetråder som elevene kunne ta i bruk om de ønsket det. Disse hintene var «tips: hvilke utgifter er faste og hvilke utgifter varierer på en skole? (hva må du betale uansett, og hva kan du spare på?», «tips: går det an å sette dette inn i et koordinatsystem? Kanskje bruke geogebra?». Disse hintene kunne elevene ta i bruk når de selv måtte ønske det. I tillegg forelå et eksempel fra geogebra på hvordan et funksjonsuttrykk og en graf kunne se ut. Elevene fikk informasjon om at det lå tips framme, men ingen av gruppene valgte å bruke disse på eget initiativ. Læreren tok i bruk eksemplet fra geogebra for å hjelpe elevene på vei på noen av gruppene.

Elevene hadde en skoletime på 60 minutter til rådighet til å svare på oppgaven, men i praksis jobbet de i 45 minutter, da litt av tiden gikk bort til å forklare og sette i gang timen. De fikk bruke PC som hjelpemiddel for å finne de opplysningene de trengte, og begge gruppene valgte å ha to PCer til rådighet. Elevene valgte også selv framgangsmåte for å løse oppgaven. Både jeg som forsker og læreren i rommet var tilgjengelig for elevene og svarte på spørsmål og trådde støttende til om det var behov for det. Elevene fikk avslutte når de følte de hadde svart på oppgaven eller ikke kom lengre. Begge gruppene valgte å bruke hele tiden de hadde til rådighet på arbeidet.

I tillegg valgte jeg å utfordre den ene gruppa litt mer i ettertid. Jeg møtte elevene i gruppe 1, og de fikk en times undervisning av meg om temaet funksjoner, med fokuset på representasjonene funksjonsuttrykk og graf. Videre fikk de se oppgaven sin igjen, og de fikk arbeide videre for å se om de kunne svare mer utdypende på noen deler av oppgaven. De tre elevene brukte ca 20 minutter på dette arbeidet. I denne økta ble bare gruppe 1 med fordi gruppe 2 ikke var tilgjengelig på det tidspunktet.

4.6 Observasjon

Observasjon er mye mer enn å se på noe. Det er ofte å se og notere systematisk mennesker, situasjoner, artefakter, hendelser og lignende. Det mest karakteristiske med observasjon som forskningsmetode er at det gir undersøkeren mulighet til å få førstehåndsopplysninger om forskningsobjekt i sitt naturlige element, noe som kan bidra til en mer autentisk forskning. (Cohen, Manion & Morrison, 2018). På denne måten kan observasjon som metode mer valid, ettersom førstehåndsdata som blir samlet kan avsløre dagligdagse rutiner og aktiviteter og du kan se på dagligdagse hendelser, både verbalt, non - verbalt og psykisk. Ofte kan en observatør se situasjoner og rutiner i et nytt lys, som ellers ville blitt oversett. Observasjonen kan være både av fakta, som antall elever i et klasserom, eller stoler rundt et bord, eller det kan være arrangementer eller spesielle hendelser eller adferd i et klasserom. Eksempel på dette kan være hvordan en lærer starter opp en undervisningsøkt, eller hvordan elever tar imot beskjeder. I denne studien vil observasjon være viktig fordi vi ønsker førstehåndsopplysningen om hvordan elever jobber med matematiske modelleringsoppgaver, der elevene jobber i sitt naturlige miljø.

Som observatør kan man ta flere roller, og Cohen et al. (2018) bruker en firedeling i sin kategorisering, med en glidende overgang fra den ene til den andre kategorien. På den ene siden er det en fullverdig deltaker, der forskeren er en del av gruppa og rollen som observatør ikke er kjent for gruppa. Videre er det en deltaker som observatør, der rollen som medlem av gruppa er som observatør. Observatøren har innsideinformasjon, men kan mangle noe av objektiviteten og må dessuten tenke over konfidensialiteten i arbeidet slik at data blir behandlet med respekt. Observatøren som deltaker er ikke medlem i gruppa, men kan delta litt i periferien, og rollen som observatør er klar og åpenbar for alle, samtidig så diskre som mulig. Den fullstendige observatøren vil kun observere og er løsrevet fra gruppa. I store grupper trenger ikke de som blir observert å vite hvem som er observatøren(Cohen et al., 2018). I denne studien vil min rolle som observatør ikke være som medlem av gruppa, men en som vil være tilstede i rommet og være tilgjengelig for spørsmål og betraktinger om elevene vil føle behov for dette. Elevene er hele tiden klar over min rolle som observatør, og formålet med studiet. Samtidig blir det elevene sier og gjør tatt opp på taleopptaker eller video, så det er ikke forskeren som er tilstede som gjør selve observasjonen av oppgaveløsningen.

4.7 Datamateriale

Observasjon og skriftlige besvarelser både for hånd og på PC, utgjør datamateriale i denne studien. Den ene gruppa ble filmet med et filmkamera. Kameraet filmet arket elevene noterte på, slik at datamaterialet er samtalen mellom elevene, arket de noterte på og innlevert fil som ble produsert på det interaktive programmet «geogebra». På den andre gruppa ble det tatt lydopptak. Datamaterialet til denne gruppa er lydfila samt notatark og «geogebra»- fil. Elevene satt på et skjermet rom, slik at de ikke ble forstyrret i arbeidet, og jeg som både forsker og lærer var innom gruppene for å se til at alt var greit og hjalp de videre om noe var vanskelig eller uklart. Elevene jobbet med oppgaven i ca 45 minutter, og jeg opplevde at de hadde god tid til å svare på oppgaven. Samtaleopptakene ble i ettertid transkribert. Dette mener jeg var hensiktsmessig, da jeg vil anta at elevene hadde vært mer påvirket av at en person skulle sitte og notere mens de jobbet. I tillegg kan forskeren i ettertid høre samtalene flere ganger for å få med flere nyanser i samtalen. Den andre gangen forskeren møtte gruppe 2, ble det tatt lydopptak.

4.8 Analysemetode

Jeg har i analysen av datamaterialet tatt utgangspunkt i min modelleringssyklus (figur 5), som er videreutviklet fra Blum og Ferri (2006). Jeg har valgt å analysere datamaterialet i tre deler, for å skille hvert enkelt forskningsspørsmål i analysen. Den første delen handler om å gjenkjenne hvordan elevene beveger seg mellom de ulike modelleringsrutene i syklusen, den andre delen handler om å finne blokader i elevenes arbeid, mens jeg i den tredje delen av analysen ser etter hvordan elever har brukt funksjoner i arbeidet med førerkortoppgaven.

For å gjøre det lettere for leseren å følge, har jeg valgt å bruke fargekoder vist i tabellen under. Jeg velger å bruke fargekoder i teksten, slik at leseren lettere kan kjenne igjen de ulike overgangene mellom modelleringsrutene fra modellen som er presentert i teorikapitlet underveis i analysen (figur 6). Følgende fargekoder er brukt:

Forstå
Forenkle
Matematisere
Arbeide matematisk
Fortolke
Validere
Presentere

Figur 8: Tabell over fargekoder i transkripsjonen

I transkripsjonen har jeg valgt å bruke nummerering på linjene, slik at leseren skal være i stand til å følge hvor elevene er i samtalen og hvordan teksten som jeg har tolket forflytter seg mellom modelleringsrutene i syklusen. Eksempel på dette er som vist under.

15 Per: Her har vi kjøretimer, inkludert det oblgatoriske. For vi skal finne ut hvor mye det koster å ta lappen ut ifra om vi trenger 10, 15, 20 eller flere kjøretimer.

16Jørgen: Hmm

17Per: Så skal vi ta å lage en oversikt da.

18Ingunn: Men her fant jeg en priskalkultator! 680 kr timen

19Per: Åja, vent da, her er det 880 kr timen

20Ingunn: åja. Men da kan jeg skrive opp det her (begynner å notere på arket foran seg de ulike prisene, systematisere arket med å lage kolonner for hver kjøreskole)

I samtalen over ser vi at jeg har markert linjene i transkripsjonen med samme farge som forenkle i figur nr. 8, altså har jeg tolket samtalen mellom Per, Jørgen og Ingunn som at de jobber med å *forenkle* oppgaven. I første del av analysen, følger vi to grupper, og jeg har valgt å sette dem ved siden av hverandre i en tabell, slik at det blir lettere å følge hvilken gruppe som sier hva.

4.9 Reliabilitet og validitet

Kan vi stole på de funnene vi finner i denne studien? Som forsker er dette et viktig spørsmål å stille seg underveis i arbeidet. Ringdal (2013) sier at reliabiliteten går ut på om man faktisk måler det man skal måle. Halvorsen (2008) sier også at med reliabilitet kan det også menes hvor pålitelig undersøkelsen er. I kvalitativ forskning, der man benytter seg av tekstdata er det viktig at man må være saklig og pålitelig i sin bruk av metodene for datainnsamling og analyse. Målet må være å unngå feilkilder, og gjøre resultatene pålitelige og bekreftbare. Tilnærmingsmåten er viktig her, og i denne undersøkelsen har det vært viktig at elevene som er informanter har følt seg trygge nok i observasjonssituasjonen, slik at de har svart det de tror i oppgaven, og ikke det de tror læreren vil ha. Samtidig er det ikke sikkert at resultatet nødvendigvis kan generalisere, selv om det kan være overførbart til andre situasjoner. (Halvorsen, 2008)

Måler denne studien det den er ment å måle? I kvalitativ forskning kan validitet vurderes på to måter, av forskeren selv eller av informantene. Det siste er mer aktuelt i undersøkelser der det legges mest vekt på begreper og informantenes begrepsbruk. (Ringdal, 2013) I denne studien er det forskeren som må vurdere studiens validitet. Det er også viktig å se elevenes besvarelser og diskusjoner i en sammenheng, og dermed beskrive arbeidet på en grundig måte. Dessuten er har det vært nyttig å gjennomføre en pilotundersøkelse for å forsikre seg om at metoden man velger å bruke gir svar på det den er ment å finne svar på.

4.10 Etiske betraktninger

Til slutt i dette kapitlet vil jeg se på noen etiske hensyn en forsker må ta i et forskningsprosjekt. Når man skal observere elever, er det en del betraktninger en må gjøre seg. Det er viktig at alle som er med i observasjonen er informert og har takket ja til å delta på observasjonen og at de er kjent med hva som skal observeres. I tilfeller der barn er involvert, må foreldre være godt informert. Dilemmaet en forsker kan stå overfor er tilfeller der du har skjult observasjon. På den ene siden kan du få tilgang til informasjon som kun er tilgjengelig når de som blir observert ikke er klar over det. På den andre siden står prinsippet om informasjon høyt, og deltakerne kan føle at deres private sfære blir invadert. Dette er viktig å diskutere på forhånd og ta et klart standpunkt til. I denne studien er det en åpen observasjon, der alle informantene er godt informert på forhånd, der alle deltakerne når som helst har anledning til å trekke seg fra prosjektet.

Det er også viktig å ta hensyn til anonymiteten til elevene i studien. Derfor har jeg valgt å gi alle informanter og kjøreskolene fiktive navn og navnet på skolen er ikke nevnt, for å ivareta anonymiseringen til elevene. Jeg har også oppbevart lydfiler på ekstern harddisk etter forskrifter fra NTNU og NDS, og disse vil bli slettet når dette studiet er ferdig.

4.11 Oppsummering

I kapittel fire har jeg gjort rede for de metodene jeg har benyttet meg av i denne studien. Denne redegjørelsen har jeg gjort for å forklare hvordan jeg har arbeidet med analysekapitlet som kommer i kapittel fem, og for å gjøre undersøkelsen transparent og troverdig for leseren.

5 Analyse av modelleringsoppgave.

I dette kapitlet vil jeg presentere en tredelt analyse av gruppesamtalene. Samtalene blir tolket i lys av min modelleringssyklus som er utarbeidet med utgangspunkt i Blum og Leiss (2007) og Maaß (2010) sin modelleringssirkel. I analysen vil jeg se på hvordan elevene jobber med modellering ved hjelp av modelleringssyklusen, og jeg vil studere hvordan de forflytter seg mellom modelleringsrutene. Jeg vil også rette oppmerksomheten mot hvilke blokader elevene møter, og hvordan de eventuelt klarer å løse disse blokadene. Til slutt vil jeg se etter hvordan elevene bruker funksjoner i arbeidet, som et utgangspunkt for å finne ut om det går an å bruke modellering som introduksjon til temaet funksjoner.

5.1 Forskerens møte med førerkortoppgaven.

Siden jeg på forhånd har tenkt at studiens oppgavedesign kan være en introduksjon til temaet funksjoner, har jeg som forsker noen har jeg som forsker noen forventninger til hvordan elevene vil løse modelleringsoppgaven. Jeg har forventninger om at jeg finner spor av funksjoner i elevenes arbeid, og ettersom mitt syn på modelleringsoppgaven vil påvirke analysene jeg gjør på elevenes arbeid med den, vil jeg i det følgende kapitlet presentere hvordan jeg som forsker ville løst førerkortoppgaven, før jeg presenterer elevenes møte med den samme oppgaven.

Min tolkning til løsning av oppgaven er å lage en tabell over prisene på førerkort hos de ulike kjøreskolene, som vist i tabellen under. Først har jeg laget en tabell over de faste utgiftene jeg fant på de ulike kjøreskolene i tillegg til prisen per kjøretime. De faste utgiftene er regnet ut av de samme utgiftene på de ulike skolene, som teorikurs, trinnvurdering og sikkerhetskurs. Det er også regnet med leie av bil, og utgifter for oppkjøringa, noe som er likt på alle kjøreskolene.

Flere av kjøreskolene opererer med ulike pakker elevene på kjøreskolene kan kjøpe. Du kan for eksempel kjøpe en 10- timers kjøretimepakke på noen skoler. Jeg har valgt å se bort i fra dette, da det utgjør en prisforskjell på 100 kroner pr 10 kjøretimer, og vanskeliggjør prosessen med å lage funksjonsutrykk for prisen på et førerkort.

Utgifter på de ulike trafikkskolene:

Kjøreskole	Faste utgifter	Pris kjøretime
Kula	18030kr	660 kr
Tut og kjør	17610 kr	640 kr
Franks kjøreskole	21670 kr	680 kr

Videre har jeg vist prisene i en tabell, som oversiktlig viser hvor mye det koster for et førerkort, avhengig av hvor mange kjøretimer du trenger:

Antall kjøretimer	Kula trafikkskole	Franks kjøreskole trafikkskole	Tut og kjør trafikkskole
5	3300 + 18030 = 21330 kr	3400 + 21670= 25070 kr	3200 + 17610 = 20810 kr
10	6600 + 18030 = 24630 kr	28470 kr	24010 kr
15	9900 + 18030 = 27900 kr	31870 kr	27210 kr
20	13200 + 18030 = 31230 kr	35270 kr	30410 kr
25	16500+ 18030 = 34530kr	38670 kr	33610 kr

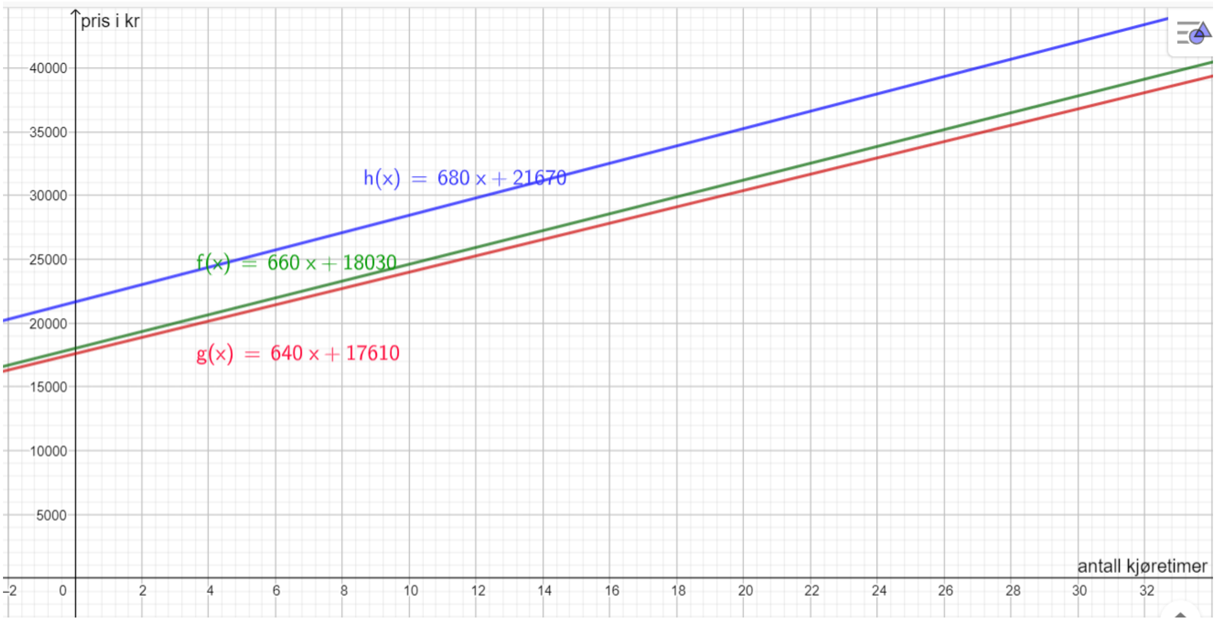
For å sammenligne prisene i et koordinatsystem, velger jeg å lage et funksjonsutrykk for prisene på kjøreskolene:

Kula: $f(x)= 660x +18030$

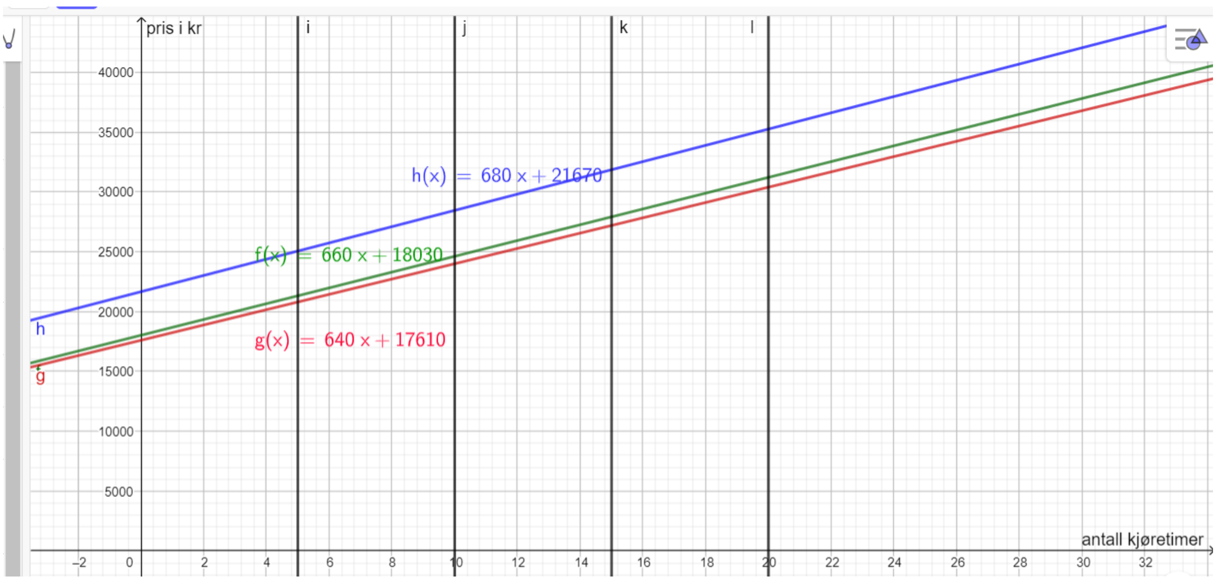
Tut og kjør: $g(x) = 640x + 17610$

Franks kjøreskole: $h(x) = 680x + 21670$

Siden oppgaven spør etter å vise en oversikt i et koordinatsystem, har jeg satt funksjonsuttrykkene inn i geogebra:



Ved å se på grafene vil man tydelig se at «Franks kjøreskole», representert med blå graf, er den dyreste kjøreskolen uansett hvor mange kjøretimer du trenger, og at den ligger betydelig over de andre kjøreskolene i pris. «Tut og kjør» er billigst, her representert med rød graf. «Tut og kjør» og «Kula trafikkskole» har ikke så stor prisforskjell ved lite kjøretimer. Avstanden mellom grafene til «Kula» og «Tut og kjør» øker ved flere kjøretimer. Dette forteller oss at jo dess flere kjøretimer du trenger, jo mer penger er det å tjene på å velge «Tut og kjør» trafikkskole.



For vise enda å bedre prisene for hver femte time, slik oppgaven spør etter, har jeg valgt å legge inn linjer for x = 5, 10, 15 og 20. Da er det lettere å lese av akkurat ved de ulike x-verdiene hvilken kjøreskole som er billigst av de ulikt antall kjøretimene.

5.2 Analyse av samtalen med utgangspunkt i modelleringssyklusen

I dette kapitlet vil jeg presentere elevenes arbeid. Analysen tar utgangspunkt i to ulike grupper, på tre elever hver. Gruppene er nummerert 1 og 2, der kolonne en er gruppe 1 og kolonne to er gruppe 2 for å skille gruppene fra hverandre. Gruppe 1 består av elevene Per, Ingunn og Jørgen, mens gruppe 2 består av Lars, Emma og Henrik. Alle navnene i oppgaven er fiktive. Modellen som er ligger til grunn for denne analysen er figur 6 s. 14.

I første møte med elevene har de akkurat fått utdelt oppgaven, og en elev er i gang med å lese oppgaven høyt for hverandre.

Gruppe 1:	Gruppe 2
1 Per: leser oppgaven *2 Ingunn: Jeg kan sjekke Franks kjøreskole jeg, så kan du ta Kula, så kan Jørgen ta Tut og kjør. Har vi lagt koordinatsystem før?* *3 Per: Vi gjorde det i 5. tror jeg, men jeg husker jo ikke mye ut av det* *4 Ingunn: Hva var det de skulle gjøre, ta lappen?* *Per: de skal spare til å ta lappen* *5 Ingunn: til bil?* *6 Per: Ja til bil. Det står bare førerkort da, men jeg regner med det er bil.* *Leser oppgaven en gang til*	1Lars: Leser oppgaven 2 Emma: ja 3 Henrik: Kan du gjenta? 4 Emma: Men da må vi først finne ut kanskje hvor mye det koster på hver enkelt da 5 Lars: Ja vi gjør det, så kan noen lage et koordinatsystem imens. Jeg tar Kula da 6 Henrik: Da tar jeg Tut og kjør.. Ehmm Trafikalt grunnkurs koster 2300. 7 Emma: På Tut og kjør? Ok, vent da (noterer) 8 Lars: Hvor mange kjøretimer trenger man egentlig? 9 Henrik: På Kula, hva koster trafikalt grunnkurs 10 Lars: Bare trafikalt? 11 Henrik: Vi tar det først. Trafikalt grunnkurs på Franks kjøreskole er 2490 12 Lars: så det er 190 mer 13 Emma: Vent da, (noterer ned tallene)

I den første dialogen arbeider elevene i gruppe 1 med å forstå oppgaven. De diskuterer hva oppgaven spør etter, og hvordan de skal gå fram for å *forstå* oppgaven. Gruppa tar tak i den virkelige oppgaven, og lager seg en forståelse av situasjonen, altså en situasjonsmodell. Begge gruppene må lese oppgaven flere ganger, men gruppe 2 går mer direkte til verks med å innhente priser -, samt lage en oversikt over, ulike priser enn gruppe 1. Elevene på gruppe 2 lager en virkelighetsnær modell av problemet ved *å forenkle* uten å tolke oppgaven i fellesskap først. Vi ser også at de er innom å *arbeide matematisk* når de sammenligner priser og, Lars kommenterer at Franks kjøreskole trafikkskole koster 190 kroner mer enn «Tut og kjør». Gruppa beveger seg tidlig mellom den virkelige og den matematiske verden.

I dette samtaleutdraget er elevene i gang med å løse oppgaven, og vi ser at de prøver å forenkle:

8 Ingunn: Her står det supertilbud, med 8 kjøretimer. Men jeg skjønner ikke, det skulle vært sånn der diagram! *9 Jørgen: Å sånn ja, (Ingunn og Jørgen studerer priser på samme skjerm)* *10 Per: Ok. Skal vi heller gå for kjøretimer, ingenting annet?* *11 Ingunn: Ja det virker sånn.* *12 Per: I så fall gjør det det her litt lettere* *13 Jørgen: Hvor mye koster det å kjøre opp, skal det også være med?* *14 Ingunn: Det virker sånn.* *15 Per: Her har vi kjøretimer, inkludert det obligatoriske. For vi skal finne ut hvor mye det koster å ta lappen ut ifra om vi trenger 10, 15, 20 eller flere kjøretimer.* *16 Jørgen: Hmm* *17 Per: Så skal vi ta å lage en oversikt da.* 18 Ingunn: Men her fant jeg en priskalkulator! 680 kr timen 19 Per: Åja, vent da, her er det 880 kr timen *20 Ingunn: Åja. Men da kan jeg skrive opp det her (begynner å notere på arket foran seg de ulike prisene, systematisere arket med å lage kolonner for hver kjøreskole)* *21 Per: Men var det ikke mengderabatt også da?* *22 Jørgen: Jo det var det på Franks kjøreskole i hvert fall* *23 Per: Vent litt, det er mulig å få det billigere (henviser til Ingunn som noterer ned, og regner etter timesprisen.) Det er mulig å spare 40 kroner om du kjøper en pakke på 10 timer.*	*9 Henrik: På Kula, hva koster trafikalt grunnkurs* *10 Lars: Bare trafikalt?* *11Henrik: Vi tar det først. Trafikalt grunnkurs på Franks kjøreskole er 2490* *12 Lars: så det er 190 mer* *13 Emma: Vent da, (noterer ned tallene)* *14Lars: På Kula er det trafikalt grunnkurs inkludert førstehjelp 1500* *15Henrik: Det var billig!* *16 Emma: på hvilken* *17 Lars: Kula, der er det 1500 pluss at det er førstehjelp* *18 Emma: ok, (noterer ned alle resultatene) På Franks kjøreskole var det mye?* *19 Henrik: På Franks kjøreskole var det 2400 med mørkekjøring* *20 Lars: så det finnes kanskje at man bare kan ta trafikalt grunnkurs* *21 Emma: Og på Tut og kjør var det?* *22 Lars:* 2300. *Hvorfor er det så dyrt der da?* *23 Emma: Var det noe pluss der?* *24 Henrik: eeee, nei…*

De tre elevene i gruppe 1 diskuterer fram og tilbake hvordan de skal løse oppgaven, og avgjøre hvilke opplysninger de trenger for å få oversikten over oppgaven. De begynner å lage *en modell av situasjonen* ved å *forenkle situasjonen (2)* til en *virkelighetsnær modell.* Samtidig begynner de å flytte seg over til den matematiske verden når de begynner å regne på om det lønner seg å kjøpe pakker på 10 kjøretimer i stedet for å kjøpe en og en time. Gruppe 2 velger å strukturere oppgaven sin annerledes. De tar ett steg om gangen, og dermed *forenkler* de også situasjonen, ved at de først bare sjekker prisen på trafikalt grunnkurs. De innhenter prisene fra de tre kjøreskolene og skriver de inn i et skjema de har laget på et eget ark. Lars og

Emma begynner å bevege seg over i den matematiske verdenen, der Lars *matematiserer*, mens Emma noterer ned tallene og dermed *arbeider matematisk*. Videre *matematiserer* de når de prøver å lage en modell for prisen på et førerkort, med de svarene de finner på hjemmesiden. Lars sier han synes det var dyrt på den ene kjøreskolen, og lurer på om det er noe de har glemt. Samtalen forteller at gruppe 2 er på vei fra den virkelige verden til den matematiske verden.

Arbeidet til de to gruppene går etter hvert i hver sin retning:

25 Jørgen: Tut og kjør koster det 640 kr pr kjøretime *26 Ingunn: såpass billig ja, få se (Ingunn noterer ned tallene i kolonner på arket og regner ut hvor mye det koster for 10, 15, 20 kjøretimer)* *27 Jørgen: Vent, hvor mange kjøretimer skal du ha.* *28 Per: (Peker på arket) Hva har du regnet her?* *29 Ingunn: Jeg regnet ut hvor mye det koster for antall kjøretimer, se her 10, 15 og 20 timer*	*51 Emma: Men hvor mye er det pr kjøretime liksom?* *52 Lars: kjøretime kr 660* *53 Emma: På Kula?* *54 Lars: ja* *55 Emma: Hvor mye på Tut og kjør og Franks kjøreskole?* *56 Henrik: 640* *57 Emma: 640? På Tut og kjør eller Franks kjøreskole?* *58 Henrik: Tut og kjør* *59 Emma: og på Franks kjøreskole*

De to gruppene angriper oppgaven på ulike måter. Selv om elevene jobber i grupper, kan vi se at elevene innad i gruppen beveger seg i ulikt tempo mellom de forskjellige rutene i modelleringssyklusen. I gruppe 1 kan vi se at mens Jørgen fortsatt *prøver å forstå* oppgaven, har Ingunn allerede beveget seg over til den matematiske verden. Hun setter opp regnestykker og gjør om tallene hun finner på hjemmesiden, altså *matematiserer (3)*. Videre *arbeider Ingunn matematisk (4)* ved at hun regner ut hvor mye det koster for ulike kjøretimer. Hun tar med Jørgen over til den matematiske verden ved å forklare hva hun har gjort. I gruppe 2 jobber elevene mer sammen. De leter etter det samme på hver sin kjøreskoles hjemmeside-, og går stegene sammen. Emma noterer, mens de to guttene på gruppa finner informasjonen de trenger underveis. Guttene i gruppe 2 velger å gå tilbake til den virkelige verden som de var på vei ut ifra tidligere, og de bruker tid på å finne den informasjonen de trenger for å svare på oppgaven. Jeg velger å sette dette under å *lage en situasjonsmodell*, gjennom å *forenkle og strukturere* oppgaven. Emma, som har tatt rollen som skriver, arbeider i den matematiske verdenen.

32 Ingunn: Men dette er kjøretimer da, er det mer vi trenger? Se her her står det en hel der greier.. *33 Jørgen: vet ikke… (leser på hjemmesiden) skal vi se… trinnvurdering, sikkerhetskurs, det er flere ting her som en må ha..* *34 Ingunn: Men burde jeg ta tatt den her summen og totalprisa hele pakka?* *35 Jørgen: ja og fjerna alt her her (peker på notatene)* *36 Ingunn: Og plussa på kjøretimer her i stedet? Hadde det vært enklere?*	60 Lars: Hvordan skal vi gjøre dette da? 61 Emma: Vi må finne ut hva som er høyest priset da 62 Henrik: det står ikke noe på Franks kjøreskole. På 3 kvelder står det 1150, 1 kveld førstehjelp 750 1 kveld mørkekjøring 1420, men det står ikke noe om kjøretimer 63 Emma: Ja for det står ikke pris på kjøretime, er det inkludert i grunnkurset da? 64 Lars: Nei det kan ikke være det.

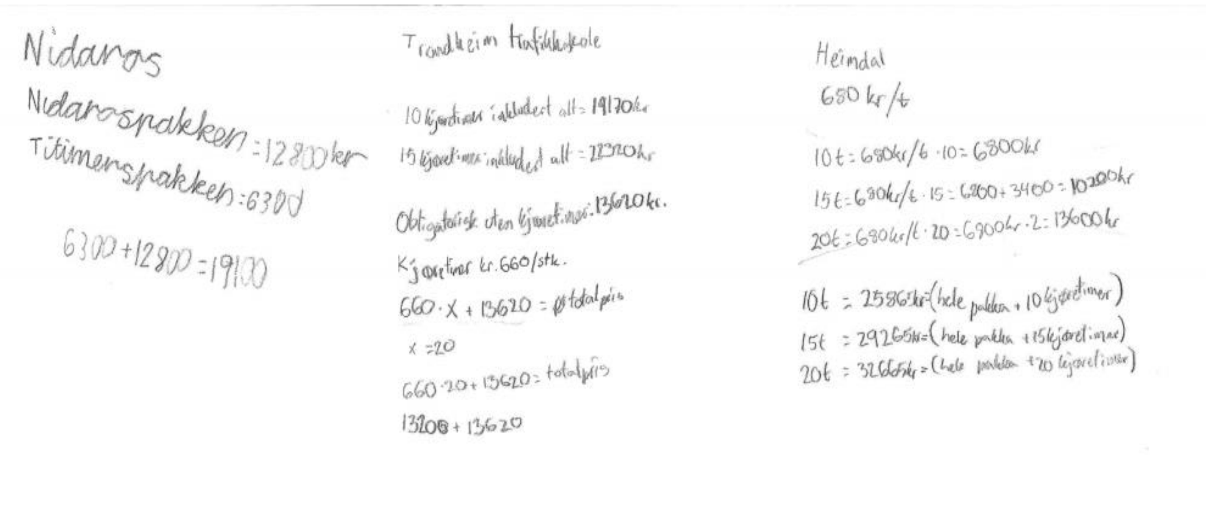
I diskusjonen mellom elevene velger gruppe 1 å gå tilbake til oppgaveteksten for å sjekke om de har med alt oppgaven krever, og dermed hopper de tilbake igjen til den virkelige verden. Ved at Jørgen leser fra hjemmesiden hva vi trenger for å ta førerkort, og gjennom at Ingunn prøver å sette opp en modell for å regne ut prisen for billigst mulig førerkort, *forstår* og *forenkler* de samtidig. Gruppe 2 jobber også med å *forenkle*, gjennom å finne ut hvilke opplysninger de trenger for å svare på hvor mye et førerkort koster. For å komme videre i oppgaven er det viktig at gruppa er enige om hvordan de skal forstå både oppgaveteksten og de opplysningene de trenger, noe de avklarer i samtalen over.

45 Ingunn: Men dere, Vi må finne ut det her, skal vi ha totalsummen eller bare kjøretimer? *46 Per: De sier bare kjøretimer da* *47 Ingunn: de sier jo ikke det. Det står hvor mye det koster å ta lappen* *48 Jørgen: Med så og så mange kjøretimer*	

Selv om elevene har vært innom den matematiske verden, hopper de tilbake til den virkelige verden for *å forstå* og tolke oppgaven igjen. I gruppe 1 er de usikre på hvilke variabler de skal regne med i oppgaven og elevene er usikre på hvordan de skal tolke og forenkle oppgaven. Her jobber elevene med *å forenkle* ved å finne ut hvordan de skal lage en *modell av virkeligheten*, som vil gjøre det lettere for elevene å arbeide videre. Læreren kommer innom og bekrefter det elevene er usikre på, slik at de kan gå videre med oppgaveløsningen.

Å arbeide matematisk:

82 Per: Så har du Tut og kjørpakka som er 12000, og 10 kjøretimer *83 Jørgen: ja vi må ha med Tut og kjørpakka også* *84 Per: ja for det er alt annet enn kjøretimene* *85 Ingunn: Akkurat nå driver Jørgen og regner ut ulike priser på kalkulatoren, det er ganske mange tall* *86 Jørgen: Det er veldig mange tall! Skal vi se, vi regner sammen alle de tingene som de må ha for å ta lappen. Det blir 19300 da når du plusser sammen de ulike prisene, så må man legge til kjøretimene etterpå. For 10 kjøretimer kan man ta den 10-timerspakken.*	*91 Emma: Ok. Men hvor mye er det ca for alt da?* *92 Lars: 22320 på Kula. Det er med 15 kjøretimer* *93 Henrik: 29265 på Franks kjøreskole* *94 Emma: og på Tut og kjør?* *95 Henrik: Vi må ta kjøretime som er 640 ganger 15 som er 9600, og så 640 +3780+ 1200 +7200 +1500 475 + 12800 + 6300* *96 Lars: 44145 oi, det kan ikke være riktig!!*


Nidaros
Nidarospakken: 12800 kr
Titimerspakken: 6300
6300 + 12800 = 19100

Trondheim trafikkskole
10 kjøretimer inkludert alt = 19170 kr
15 kjøretimer inkludert alt = 22320 kr
Obligatorisk uten kjøretimer: 13620 kr.
Kjøretimer kr. 660/stk.
660 · x + 13620 = ~~ø~~ totalpris
x = 20
660 · 20 + 13620 = totalpris
13200 + 13620

Heimdal
680 kr/t
10t = 680kr/t · 10 = 6800kr
15t = 680kr/t · 15 = 6800 + 3400 = 10200kr
20t = 680kr/t · 20 = 6800kr · 2 = 13600kr
10t = 25865kr = (hele pakken + 10 kjøretimer)
15t = 29265kr = (hele pakken + 15 kjøretimer)
20t = 32665kr = (hele pakken + 20 kjøretimer)

Figur 9: Notatarket til gruppe 1

Gruppe 1 bruker tid på å regne ut de ulike prisene for hver enkelt kjøreskole, og de ser at forskjellen på prisen på de ulike kjøreskolene er avhengig av hvor mange kjøreskoler de trenger. Elevene i denne gruppa har laget en modell av virkeligheten, og de forflyttet seg over til den matematiske verden, og *arbeider matematisk* - både når de summerer de ulike faste utgiftene, og når de legger til kjøretimene etterpå. Dette ser vi også på notatarket i figur nr 9. Selve regnestykkene de har regnet har de ikke notert på arket, men vi ser at de har regnet ut hvor mye det koster på de ulike kjøreskolene ved 5, 10, 15 og 20 kjøretimer. Dette understreker at de har *arbeidet matematisk*. Elevene i gruppe 2 summerer de ulike beløpene der de finner ut hva de trenger for å ta lappen, der Henrik gir tallene til Lars, som adderer dem. Gruppe 2 har også gjort et valg ved at de sammenligner prisene på de ulike kjøreskolene når de bruker 15 kjøretimer for å ta lappen. De *arbeider også matematisk* gjennom samtalen når de summerer de ulike konstantene de er blitt enige om at de trenger for å svare på oppgaven. Dette gjør de i fellesskap og samarbeidet godt for å summere de konstantene de trenger.

I samtalen under begynner elevene i begge gruppene å nærme seg et svar:

125 Ingunn: OK. Da har jeg tatt.. oi.. jeg mistenker at jeg har gjort noe feil.kanskje . Jeg har tatt også lagt sammen det jeg mener er obligatorisk.. nei vent… jeg har glemt å lagt til kjøretimer Jeg har muligens tatt feil, i såfall er obligatoriske greier uten kjøretimer kr 13620.	96 Lars: 44145 oi, det kan ikke være riktig!! 97 Henrik: Kan det være riktig? 98 Lars: Nei det kan ikke være riktig 99 Emma: 44135. ca hvor mye det koster for å kjøre opp på Tut og kjør 100 Lars. Det står at 10 kjøretimer blir 6300. Åååå -En 10timerspakke. Da har vi med alt for mange kjøretimer

I gruppe 1 summerer Ingunn alle tallene hun finner på hjemmesiden til en av kjøreskolene, parallelt med at hun sammenligner svaret med de andre kjøreskolene hun allerede har svaret på. Når hun regner ut svaret, *arbeider hun matematisk*, samtidig som hun *fortolker* svaret for å se om hun synes svaret er logisk sammenlignet med de andre svarene hun allerede har funnet. Det er tydelig at hun stusser over tallene hun har fått, og hun finner selv ut hva hvilken feil som gjør at tallene hennes ikke stemmer. Ingunn beveger seg kontinuerlig fram og tilbake mellom den matematiske og den virkelige verden, og hun ser på den matematiske løsningen og den tolkede løsningen opp mot situasjonsmodellen. Siden hun finner at svaret på regnestykkene de har jobbet med er feil, må hun tilbake til å *arbeide matematisk* for å finne et nytt svar. Lars i gruppe 2 *fortolker* også svaret han får. Tallet 44 145, som han får til svar når han summerer alle utgiftene han må ut med for å betale for førerkortet, synes han at ikke kan være riktig siden det ligger så høyt. Han oppdager ganske fort at han har tatt med både kjøretimer i en kjøreskolepakke og enkelttimer i summeringen. Lars går fram og tilbake mellom den matematiske verden og den virkelige verden, og veksler slik mellom *å arbeide matematisk* og å *fortolke* svaret.

Elevene i begge gruppene har laget formler for prisene på kjøreskolen og lagt det inn i det interaktive programmet «geogebra». I dialogen under diskuterer de resultatene de får fram på grafen, og de *fortolker* grafene de har laget for å vurdere hvilken kjøreskole som er billigst

178 Jørgen: Du må zoome ut enda mer da. Her ser vi da at på lengre tid så vil.. hvilken farge er hva? *179 Per: lilla er Franks kjøreskole. Den grønne er Kula* *180 Jørgen: ok. Over lang tid vil den lilla bli billigst.* *181 Ingunn: Er lilla billigst i starten?* *182 Jørgen: nei da er det billigst med grønn* *183 Ingunn: Når blir det billigere da?.* *184 Per: på minus kjøretimer.. det hørtes veldig rart ut. Nei vent litt, nei det er riktig* *185 Ingunn: Tok du med kjøretimene?* *186 Per: Jaja* *187 Jørgen: Kanskje den ene er billigst hele tiden?* *188 Per: jaja, Kula er billigst, men om vi tar med 10timerspakka blir det litt billigere hos Tut og kjør, men det er vanskeligere å integrere inn i formelen.*	*173 Emma: Vi har ikke noe skjæringspunkt* *174 Lars: Det kommer sikkert når du lager en til* *175 Henrik: jeg skal ikke lage en til* *176 Emma: Du må jo lage 3* *177 Henrik: ja jeg skal lage en til da* *178 Henrik: vi har fortsatt ingen skjæringspunkt* *179 Lars: Men hvor ble det av den grønne da? Jo den er under den røde tror jeg* *180 Emma: Er det akkurat like mye? Tror ikke det hjelper å gå bortover, når de er parallelle* *181 Lærer: ferdig?* *182 Emma: Men de krasjer ikke* *183 Lærer: nei det er ikke sikkert det. Jo det ligger langt oppi her, men så mange kjøretimer bruker dere kanskje ikke likevel* *184 Lars: oi! Nei tror ikke det* *185 Lærer: men hvilken kjøreskole ville dere anbefalt da?* *186 Emma: Kula, for de er billigst på alt, og de har inkludert førstehjelp i trafikalt grunnkurs, så du trenger ikke betale mer på den. Selvfølgelig Tut og kjør er billig, men det er ikke inkludert noe ekstra der. Og Franks kjøreskole er bare dyrt hele veien.*

Etter hvert som gruppe 1 har fortolket svarene, *validerer* de resultatene ved å diskutere om det går an at grafene stemmer. Siden den ene grafen ligger over den andre, og skjæringspunktet ligger ved negative kjøretimer, blir de usikre. Per ser likevel at det stemmer når han ser at «Kula kjøreskole» er billigst hele veien. Gruppe 2 diskuterer de hvor det ble av den grønne grafen, ettersom begge grafene ligger oppå hverandre. De prøver å forstå hva det betyr, og de konkluderer med at det må bety at prisen på begge kjøreskolene er den samme. Vi ser dermed at elevene i begge gruppene gjennom å fortolke resultatet *forflytter seg fra den matematiske til den virkelige verden*. De *validerer* også resultatet ved å sammenligne grafene de har fått med de tallene de har regnet med i oppgaven.

Oppgaven som elevene fikk gikk ut på å vise hvor mye det kostet å ta lappen ut ifra om de trengte å bruke 5, 10, 15, 20 eller flere kjøretimer, og det viste seg at begge gruppene klarte å presentere et svar på oppgaven i løpet av den første økta på 45 minutter. Begge gruppene valgte imidlertid å presentere resultatet elevene presenterte en tabell, noe som gjorde det litt vanskelig å se hva som var den billigste løsningen.

5.3 Gruppe 1 sitt andre møte med oppgaven

I mitt andre møte med Per, Ingunn og Jørgen, har de fått undervisning i å lage funksjonsuttrykk ut ifra hva som er konstant og hva som varierer i en oppgave. Etter undervisningsøkta fikk de utlevert arbeidet sitt fra første økt, med spørsmål om de ville klare å lage funksjonsuttrykk av tallene de hadde funnet. I transkripsjonsutdragene i del 2, forsetter nummereringa, slik den slapp i del 1.

I første samtalesekvens arbeider elevene med å lage et funksjonsutrykk:

193 Jørgen: Ja vi kan ta Franks kjøreskole

194 Ingunn: Så hvis vi tar det som er summen her, 25865, minus da 6800 da får vi vel

195 Jørgen: Du må huske på at det er kjøretimer da

196 Ingunn: ja

197 Per: skriv det ned på arket da.

…….

205 Ingunn: Ok. Så da er 19065 fast pris da. Skal vi prøve å sette det inn i sånn greier? Kan du Jørgen skrive

206 Jørgen: ok. Skal vi se, hva var det jeg kal skrive

207 Ingunn: Skal vi ta denne først da, skal vi se. 660 x + 13620. Blir det ikke det?

208 Jørgen: jo. Skal vi se. 660x + 3 2 0? Nei..

209 Ingunn: nei 13620.

I samtalen over ser vi at Ingunn sier at 19065 er fast pris, etter at hun har regnet regnestykket 25865 – 6800. Her ser vi at elevene *arbeider matematisk*, da de regner regnestykker. De jobber hele veien i den matematiske verden, og de arbeider med å finne ut hvor mye de faste kostnadene er, altså det som er konstante utgifter. I tillegg ser de på hva som varierer, og de ser at det er 660 kr pr kjøretime, som de kaller 660x. De blir dermed enige om at funksjonsuttrykket må være 660x + 13620 for å forklare prisen på den ene kjøreskolen. I denne samtalen ser vi at elevene først og fremst arbeider med transformasjon mellom representasjoner ved å *omdanne* en verbal situasjon til funksjonsuttrykk.

Videre finner de også et funksjonsuttrykk for prisen på den neste kjøreskolen:

218 Ingunn: skal vi se – neste graf. Skal vi se 680 x

219 Jørgen: 680 x

220 Ingunn: pluss, hva var det da?

221 Per: 19065.

222 Jørgen 19065. Skal vi se, da skal vi trykke på skjerm

Elevene holder seg fortsatt i den matematiske verden, og de *arbeider matematisk* for å lage et funksjonsuttrykk for den neste kjøreskolens pris på førerkort. De arbeidet systematisk og de gjør samme prosedyre med den andre trafikkskolen som de gjorde med den første.

Mens elevene samtaler, arbeider de videre i programmet «geogebra», og i uttraget under ser vi at elevene har satt de to funksjonsuttrykkene inn i programmet:

225 Ingunn: vi har litt teknisk trøbbel, vi vet ikke helt hvordan dette funker. Jeg tror ikke at skjæringspunktet skal være minus da?

226 Jørgen: Nei det tror ikke jeg heller. Eeehmm

227 Per: Har dere brukt den der skjæringspunktgreia?

228 Jørgen: nei.. for skjæringspunktet var negativt

229 Ingunn. Kan jeg låne? Det virket så rart?

230 Jørgen: det kan ikke vært negativt, vi må ha gjort en feil?

I samtalen over har jobber elevene med å *fortolke* resultatet de har fått. De to grafene elevene fikk, krysset ikke hverandre, noe som forvirrer elevene. Denne forvirringen indikerer at elevene ikke har operasjonalisert transformasjonen mellom representasjonene funksjonsuttrykk og graf. Elevene skjønner ikke helt hvorfor grafene ikke krysser hverandre og går derfor ut ifra at de har gjort noe feil. I samtalen har de beveget seg fra den matematiske verden og over til den virkelige verden igjen. De fortolker svaret ved å bevege seg fra den matematiske løsningen til den fortolkede løsningen.

Elevene har en lang samtale, der de diskuterer løsningen over. De prøver å skrive funksjonsuttrykket på ulike måter, men de får samme svar uansett, uten at de helt klarer å forklare resultatet:

299 Lærer. Hvordan går det?

300 Per: Ganske dårlig, vi fikk et negativt svar

301 Lærer: det er ikke så rart det

302 Ingunn: Så det er riktig? Vi har strevd med det her lenge nå

303 Lærer: skal vi se.. Dere ser at denne grafen har så stort konstantledd, altså prisen er så stor i utgangspunktet her, mye mer enn den andre. Dessuten er det jo dyrere hver time. Da blir den jo alltid dyrere hver time, og da vil de to grafene aldri krysse

304 Jørgen: å ja

305 Per: Vi kan jo legge inn bensinprisene for å reise dit for å jevne det opp kanskje?

306 Lærer: hvilken kjøreskole ville dere valgt da?

307 Jørgen: Den som er nærmest

308 Per: Den grå, Kula trafikkskole. Og kjøper man busskort, vil den som er lengst unna bli billigst uansett.

Elevene har ikke klart å slå seg til ro med svaret de har funnet, og de er sikre på at svaret de har kommet fram til er feil. De arbeider fortsatt med å validere svaret. Når læreren spør om hvordan det har gått, svarer de at det har gått dårlig. Vi kan se ut ifra figur 12 s 48 se at de egentlig har løst oppgaven, og funnet grafer som beskriver prisen på førerkortet etter hvor mange kjøretimer som trengs for å ta det.

5.4 Blokader i modelleringsoppgaven

Å jobbe med en modelleringsoppgave handler om å jobbe seg gjennom eventuelle blokader. En blokade kan være et sted i modelleringssyklusen der elevene blir stående litt fast-, og ikke er helt sikre på hvordan de skal komme seg videre. Det kan også handle om at elevene gjør noen feil antakelser som fører dem til feil svar, eller som gjør at de ikke kommer seg videre i modelleringssyklusen. I det følgende vil jeg presentere noen samtalefrekvenser der elevene møter det jeg vil karakterisere som blokader i prosessen med å løse oppgaven de har fått.

Den første blokkeringen gruppe 1 møter handler om *å forenkle* oppgaven:

92 Jørgen: Men hva gjelder i pakken egentlig

93 Per: I Tut og kjørpakken må vel alt det obligatoriske være, det sikkerhetskurset her er vel ikke nødvendig da eller?

94 Jørgen: Vet ikke?

95 Per: Det står ikke noe om det, hmmm ja vel..

(.....)

108 Ingunn: Jeg tar og legger til alle de der tingene som er nødvendig som en må betale for. Her står sikkerhetspakke vei.

109 Per: Om den ikke står i pakken er det neppe nødvendig å ta det med

110 Jørgen: ehmm, det er vanskelig å vite hva som skal være med eller ikke.

111 Ingunn: Jeg skjønner ikke, om sikkerhetspakke vei er det samme som den sikkerhetspakken fra den andre kjøreskolen

Her kan vi se at elevene i gruppe 1 diskuterer hva man egentlig trenger for å kjøre opp. Elevene er usikre på hva som skal regnes med for å ta et førerkort, og de klarer dermed ikke å komme seg videre i oppgaven. Usikkerheten og mangelen på kunnskap blir en blokade for dem. Per argumenterer for at det kun må være det som er obligatorisk som er nødvendig å ta med i regnestykket, men verken Jørgen eller Ingunn klarer helt å stole på den argumentasjonen, og de prøver hver for seg å finne ut av problemet. Denne blokaden kan være litt vanskelig å plassere, fordi det både handler om *å lage en forenklet modell av virkeligheten*, samtidig som det stopper elevene i *å arbeide matematisk* for å finne prisen på de ulike kjøreskolene. Det som likevel gjør at vi finner en blokade er usikkerheten omkring hva som er obligatorisk og ikke for å ta et førerkort, og jeg vil derfor plassere blokaden under kategorien *forenkle en modell*.

Gruppe 2 opplever også en blokade, og her ser vi at de jobber med *å forenkle* oppgaven:

26 Henrik: Jeg forsto egentlig veldig lite av det her.

27 Lars: Jeg også. Men la oss si at jeg skal ha 10 kjøretimer da… Men til meg er det sånn at om jeg tar trafikalt grunnkurs og har 10 kjøretimer og tar trafikalt grunnkurs vil det koste 8300. Men det høres ikke riktig ut

28 Emma: Det var ikke så dyrt nei

29 Lars: Her står det tilbud klasse B, det er forskjellige klasser her. Åååå, jeg forstår ikke

30 Emma: Men det der er jo en pakke, da inneholder den forskjellige ting da..

31 Henrik: Her er det ikke delt opp i timer, men dager. 6 dager

32 Emma: Men skal vi spørre om hjelp

Elevene i gruppe 2 møter en annen blokade når de skal finne rett informasjon for å løse oppgaven. I prosessen med å forstå oppgaven, og å lage en situasjonsmodell, kreves det at elevene søker opp informasjon på nettstedene til de ulike trafikkskolene. Her må de prøve å finne ut hva som trengs for å ta et førerkort, og dette virker veldig forvirrende for elevene fordi de ikke skjønner hvilken informasjon de skal bruke. Elevene blir stående fast og det fører til en blokade som gjør at de ikke klarer å finne ut hvor mye et førerkort koster. Elevene i gruppe 2 møter altså blokaden når de skal *forenkle oppgaven*.

En ny blokade oppstår hos gruppe 1 i prosessen *å matematisere*:

131 Ingunn: Ja, men her er summen for det for det som er obligatorisk, så må vi legge til kjøretimer, kjøretimer kr 660 per stykk. Hvordan skal vi skrive et uttrykk av det her?

132 Jørgen: Hvis hele pakka da er x? Altså at vi tar 10 t pluss x

133 Ingunn: Hvis hele pakka er x… x= 13620 + 660 y? Ble litt rart det også

134 Per: ja.

135 Ingunn: Vi vet ikke helt hvordan vi skal sette opp et sånt stykke

136 Lærer: Nei! Har dere sett noe på faste utgifter? Hva er det de må betale?

Elevene i gruppe 1 møter en blokade når de skal matematisere i overgangen fra virkelighetsnær modell til matematisk modell. De prøver å lage et matematisk utrykk av modellen sin, men ser at det ikke helt stemmer, og Ingunn utrykker at «det ble litt rart da». Elevene erkjenner at de ikke får det til, og de må spørre lærer om hjelp. Det at de ikke greier å lage et funksjonsuttrykk stopper dem i det videre arbeidet med å fullføre oppgaven.

I andre møte med gruppe 2 oppstår også en blokade i arbeidet med *å validere*:

279 Jørgen: ok. Skal vi bare slette det vi har her.

280 Ingunn: ja vi fikk samme svaret. Men vi burde kanskje skrevet ned det vi fikk til svar et sted her.

281 Jørgen: -166065

282 Per: Vent litt, kan det hende at vi begynte på feil sånn derre, her står det 25x + den der summen man får i utgangspunktet.

283 Jørgen. Vi startet med feil tall!! Gjorde vi ikke det? prisen skal vi slutte med, ikke starte med.

284 Per: ja vi må bytte om de to tallene

285 Ingunn: åååå

286 Per: 680 x ok… (skriver på PC). Nei vent det blir jo det samme..

287 Ingunn: vi prøver likevel.

288 Jørgen: skal vi se 660..

289 Ingunn: gjør du ikke bare akkurat det samme som du gjorde isted nå?

290 Jørgen: jo det er akkurat det samme.

291 Per: så vi hadde det denne veien?

292 Jørgen: ja

293 Ingunn: men skal vi ikke prøve…

294 Per: Det blir det samme uansett. Jaja.

Elevene har laget et funksjonsutrykk, som forklarer prisen for et førerkort, men de er helt sikre på at de må ha gjort noe feil siden de ikke får et positivt skjæringspunkt mellom grafene. I samtalen over prøver de å snu om på funksjonsuttrykket, slik at konstantleddet skal komme sist, for å se om det har noen betydning, men de ser raskt at det blir akkurat det samme. Egentlig har de gjort oppgaven riktig, men de klarer ikke å forstå dette når de *validerer* svarene, siden de er helt sikre på at de skulle ha fått et skjæringspunkt som er positivt. Elevene klarer ikke å komme seg ut av blokaden på egen hånd, og det kan se ut til at de gir opp å finne ut av problemet.

5.5 Bruk av funksjoner i modelleringsoppgaven

I dette delkapitlet vil jeg se etter om elevene har tatt i bruk noen form for funksjoner og representasjoner innenfor funksjonsbegrepet. Jeg vil se etter dette for å se om bruken av representasjoner kan være et utgangspunkt til videre arbeid med temaet funksjoner. Disse representasjonene kan være funksjonsuttrykk, tabell, graf eller en verbal situasjon. Jeg vil ta utgangspunkt i Janvier (1987) sin tabell der han kartlegger transformasjonene mellom ulike representasjoner når elever jobber med funksjoner.

I første samtale med gruppe 1 ser vi at elevene prøver å lage et funksjonsuttrykk:

136 Lærer: Nei! Har dere sett noe på faste utgifter? Hva er det de må betale?

140 Lærer: Enn hvis det er 10 timer da?

141 Ingunn: DA blir det 10 ganger 660

142 Lærer: 5 timer da?

143 Per: Da blir det 5 ganger 660

144 Lærer: enn hvis det er x antall timer da?

145 Jørgen: Da blir det jo 660 ganger x

146 Lærer: Hvordan kan du sette opp det? Kan dere sette opp et uttrykk med x?

147 Per: det må jo bli 660 ganger x da + det obligatoriske

148 Ingunn: Så uttrykket må bli 660 ganger x + det obligatoriske altså 660x + 13620 = hele pakka.

Elevene har ikke tidligere jobbet med representasjonen funksjonsuttrykk, men ved hjelp av lærer klarer de å se på hva som er de faste utgiftene, altså de obligatoriske konstantene du trenger for å kjøre opp, som er 13620 kr i dette eksemplet. Videre finner de ut at det som vil variere er hvor mange kjøretimer de trenger, og de klarer etter hvert å uttrykke dette ved 660 ganger x. De lager uttrykket 13620 + 660x, og de finner dermed et funksjonsuttrykk som forteller hvor mye det vil koste å ta førerkort på den aktuelle kjøreskolen.

I kommende utdrag fra samtalen til gruppe 2 ser vi at læreren må tre støttende inn for å vise vei for elevene. Lærerens spørsmål hjelper elevene å forstå litt mer av hvordan man kan lage et funksjonsuttrykk.

73 Lærer: (...) Her står det 680 kr per time. Kan du gi meg et uttrykk for hvor mye dette koster? For det står det at det koster 680 for 1 time, hvor mye er det da for 10 timer, hvilket regnestykke blir det?

74 Henrik og Emma (samtidig): 680 ganger10

75 Lærer: hva med 15 timer da?

76 Henrik: 680 ganger 15

77 Lærer: Hva om en ikke vet hvor mange timer en trenger da? For eksempel x antall timer?

78 Emma: 680 ganger x.

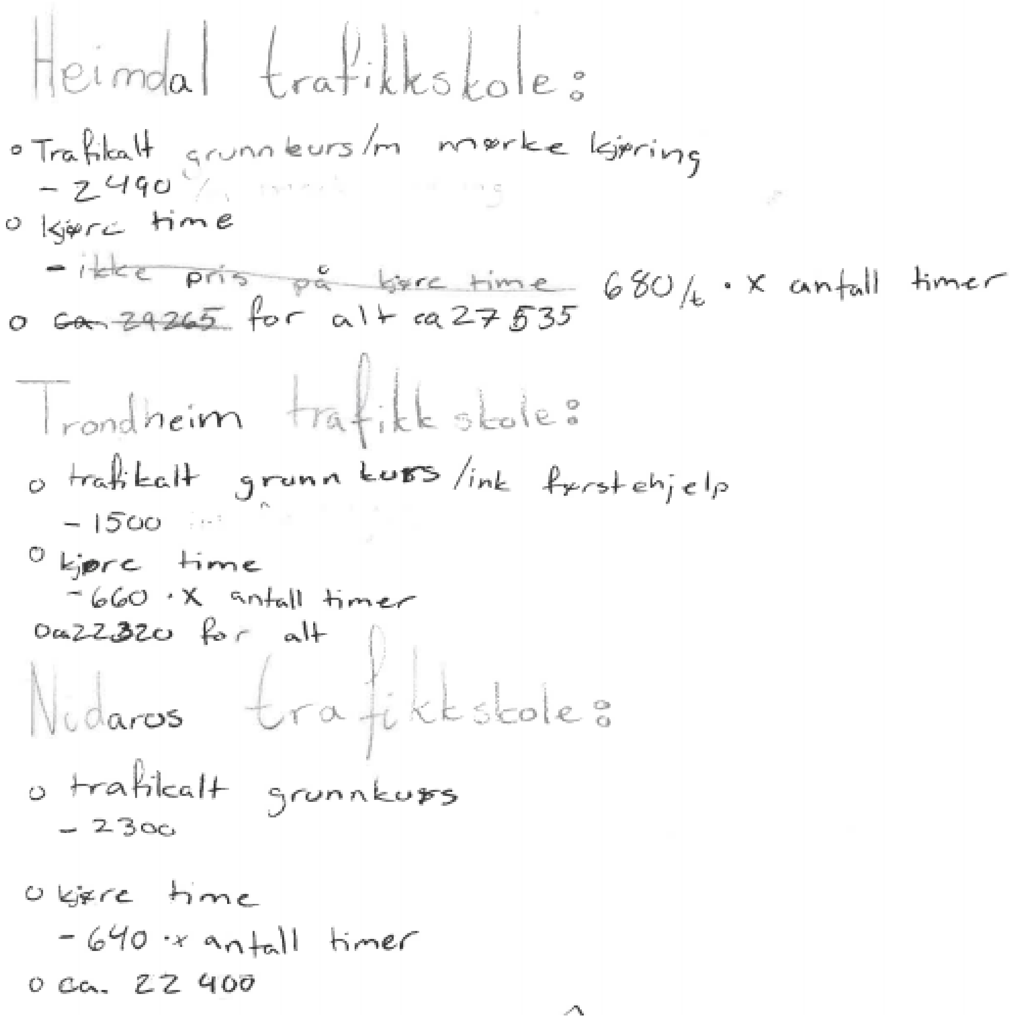
79 Lærer: får du til et sånt uttrykk på alle?

80 Emma: Ja, eller ikke 680 da, da blir det 660 ganger x og 640 ganger x, for det er forskjellige priser på hver

81 Lærer: Så det trafikale grunnkurset her, det må du ta uansett hvor mange kjøretimer du trenger. Hva gjør du med dem?

82 Emma: Det må vi plusse på.

I gruppe 2 prøver elevene å lage et funksjonsuttrykk slik at de kan lage en graf i geogebra. Læreren prøver å veilede elevene gjennom prosessen ved å stille spørsmål om hvilke regnestykker som må regnes for å finne de ulike prisene som det er spurt etter i oppgaveteksten. Ved hjelp av spørsmålene «hvor mye er det for 10 timer»?, «hva med 15 timer?» og «hva om en ikke vet hvor mange timer?», klarer elevene å utarbeide et funksjonsuttrykk for hvor mye det vil koste for x antall kjøretimer på de ulike kjøreskolene. Emma ser også at uttrykket må variere ut ifra hvor mye hver enkelt kjøreskole tar betalt når hun sier at det ikke blir 680 ganger x, men 660 ganger x og 640 ganger x. Representasjonen *funksjonsuttrykk* blir her brukt for å uttrykke hvor mye elevene må betale for å ta lappen.


Heimdal trafikkskole:
- Trafikalt grunnkurs/m mørke kjøring
  - 2490
- kjøre time
  - ~~ikke pris på kjøre time~~ 680/t · x antall timer
- ~~ca 24265~~ for alt ca 27535

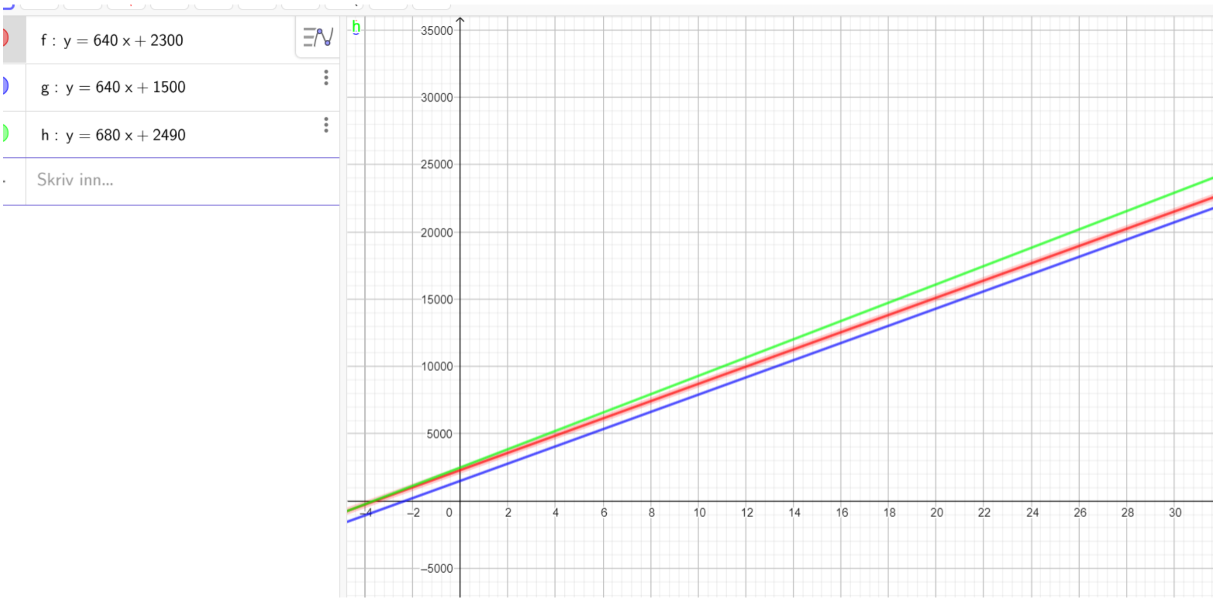
Trondheim trafikk skole:
- trafikalt grunnkurs /ink førstehjelp
  - 1500
- kjøre time
  - 660 · x antall timer
- ca 22320 for alt

Nidaros trafikkskole:
- trafikalt grunnkurs
  - 2300
- kjøre time
  - 640 · x antall timer
- ca. 22 400

Figur 10: bilde av notatene til elevene i gruppe 2

På bildet i figur 10 kan vi se hvordan elevene har arbeidet med opplysningene de har funnet på hjemmesidene til de ulike trafikkskolene. Notatene til gruppe 2, vist i bildet på figur 10 viser at de har laget en skjematisk oversikt over de tre trafikkskolene, der de har notert det de mener er viktig for å finne ut hvor mye det koster for et førerkort. Vi ser at de har funnet pris på trafikalt grunnkurs og hvor mye det koster for en kjøretime på de ulike kjøreskolene. Vi ser også at de har startet på å lage et funksjonsuttrykk med uttrykkene «660 * x antall timer». Her kan vi anta at antall timer er skrevet for å fortelle hva x står for. Vi ser også at de ikke har skrevet et fullstendig uttrykk for hvor mye de må betale for et førerkort, siden de ikke har tatt med andre utgifter enn antall kjøretimer. Her har elevene beveget seg mellom representasjonene verbal situasjon og tabell, gjennom overgangsaksjonen som Janvier (1987) kaller å måle.

Gruppe 2 prøver å lage en graf i geogebra:



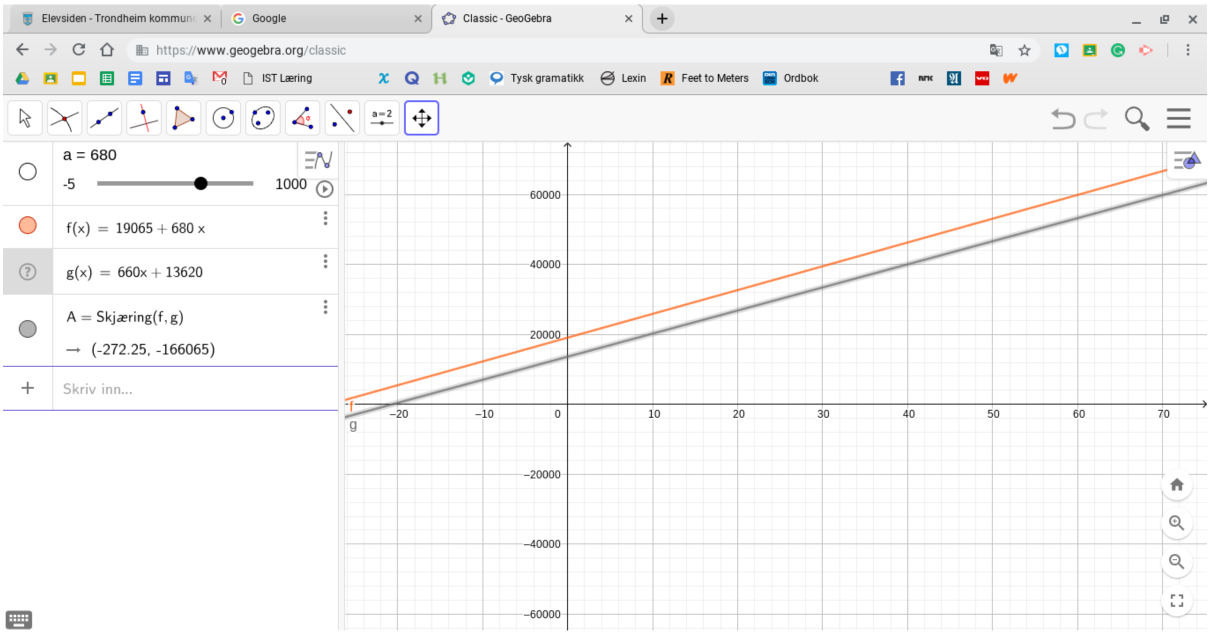
Figur 11: utsnitt av grafer i geogebra til gruppe 2

186 Lærer: men hvilken kjøreskole ville dere anbefalt da?

187 Emma: Kula, for de er billigst på alt, og de har inkludert førstehjelp i trafikalt grunnkurs, så du trenger ikke betale mer på den. Selvfølgelig Tut og kjør er billig, men det er ikke inkludert noe ekstra der. Og Franks kjøreskole er bare dyrt hele veien.

I arbeidet med å presentere prisene på de ulike kjøreskolene, prøvde elevene i gruppe 2 å sette inn funksjonsuttrykkene de lagde i det «geogebra». Vi ser av bildet i figur 11 at de har laget en graf ut ifra funksjonsuttrykkene som ble laget for å beskrive pris på kjøretimer og trafikalt grunnkurs. Dette programmet har elevene lite kjennskap til fra før, men de klarer å markere grafene slik at leseren ser hvilken graf som er hvilken trafikkskole. Selv om elevene ikke har klart å få med alle de faste utgiftene som må være tilstede for å kunne kjøre opp, fungerer funksjonsuttrykket og grafen for å se hvordan prisene forandrer seg etter hvor mange kjøretimer eleven trenger for å kjøre opp. Elevene har ikke klart å svare på oppgaven i programmet. Likevel kan de, ifølge Emma forklare hvilken trafikkskole hun vil anbefale ut ifra de tallene de har kommet fram til underveis i arbeidet. Elevene arbeider her i overgangsaksjonen *skissere*, da de går fra representasjonen tabell til representasjonen graf.

Etter andre møte med gruppe 1 klarte de å lage et funksjonsuttrykk som de presenterte i geogebra:



Figur 12: utsnitt fra geogebra som gruppe 1 har utarbeidet i andre samtale

I figur 12 har elevene i gruppe 1 lagt inn funksjonsuttrykkene i geogebra og laget grafene. Vi ser funksjonsuttrykkene i algebrafeltet, og grafen i grafikkfeltet. Denne figuren viser at elevene har jobbet med *å skissere*, da de har gått fra funksjonsuttrykk til graf.

5.6 Oppsummering

I dette kapitlet har jeg analysert hvordan elevene arbeider med en modelleringsoppgave. De viser at de er innom alle rutene i modelleringssyklusen som er utgangspunktet for denne analysen, men ikke nødvendigvis i en fast rekkefølge. Hvordan de har beveget seg mellom de ulike modelleringsrutene er ikke likt for de to gruppene vi har fulgt gjennom deres arbeid med førerkortoppgaven, og det er et tema jeg vil se mer på neste kapittel. Videre har vi sett at elevene har møtt flere blokader i arbeidet med oppgaven, og vi har sett hvordan de har arbeidet seg gjennom blokadene.

6 Drøfting

I dette kapitlet vil jeg starte med å sammenligne elevenes møte med oppgaven med løsningsforslaget som jeg som forsker presenterte i kapittel 5.1. Videre vil jeg drøfte mine funn opp mot problemstillingen «Hvordan jobber elever på 9.trinn med modelleringsoppgaver i matematikk?» Dette drøftingskapitlet blir delt opp i tre ulike deler, der jeg vil diskutere de tre forskningsspørsmålene i hver sin del.

6.1 Sammenligning av forskerens og informantenes møte med oppgaven.

Å møte en modelleringsoppgave som forsker og å møte en modelleringsoppgave som elev har to forskjellige utgangspunkt. Som forsker med førerkort, har jeg en forforståelse og erfaring med meg inn i oppgaven som hjelper meg å vite hvor mye et førerkort vil koste, og hvilke deler som trengs for å kunne kjøre opp. Målet for arbeidet med modelleringsoppgaven var derfor at elevene skulle danne seg et bilde på hva som kreves for å ta et førerkort, og hvor mye det koster. Målet var også at de skulle finne ut om det var forskjeller på pris på de ulike kjøreskolene, og denne forskjellen skulle de presentere for noen som ikke hadde arbeidet med oppgaven. Oppgaveteksten som elevene fikk lød slik: «Finn ut hvor mye det koster å ta lappen i dag ut ifra om du trenger for eksempel 10, 15, 20 eller flere kjøretimer. Lag en oversikt som viser hvor mye det koster å ta førerkort i dag. Vis det gjerne i et koordinatsystem».

Med denne oppgavebestillingen ville jeg også se etter om det er de samme kjøreskolene som er billigst uavhengig av og om den som skal kjøre opp trenger mange eller få kjøretimer.

Et annet mål for modelleringsoppgaven var at elevene skulle bruke representasjoner innenfor funksjoner i oppgaven. Oppgaven skulle være en introduksjon til temaet funksjoner, og jeg hadde derfor ikke en forventning om at elevene skulle klare å presentere svarene i et koordinatsystem. Likevel valgte jeg å spørre etter det i oppgaven, slik at elevene ble ledet i den retningen. Slik kan kanskje oppgaven være et bakteppe til videre arbeid med funksjoner, og elevene kan se nytten av å lære de ulike representasjonene når de ser hvordan de kan bruke det i hverdagslivet.

Elevene skulle finne prisen for førerkortet ved 5, 10, 15 eller 20 kjøretimer. I utgangspunktet skal dette hjelpe elevene til å se at prisen forandrer seg etter hvor mange kjøretimer de trenger. Kanskje hadde elevene kommet dit selv, og kanskje har dette fungert som en begrensning for hvordan elevene har løst oppgaven. En modelleringsoppgave skal jo i utgangspunktet ikke ha noen føringer, så i denne studien kan man ikke se bort i fra at elevene hadde valgt en annen retning om disse premissene ikke var lagt.

I møtet med oppgaven, måtte elevene bruke hjemmesidene til de ulike kjøreskolene for å finne priser. Som forsker synes jeg synes det gikk greit å navigere meg fram på hjemmesidene, og finne fram til de tallene jeg trengte. Elevene opplevde derimot dette som vanskelig, kanskje først og fremst fordi de ikke visste hva som skulle til for å få et førerkort. Oppgaven burde kanskje ha vært designet slik at de konstantene elevene skulle bruke var nevnt eksplisitt, som et ledd i å hjelpe elevene på vei? På den andre siden kan dette har blitt for styrende for elevenes løsning av oppgaven. Elevene kunne ha funnet de opplysningene de hadde fått opplyst at de trengte, uten at de hadde behøvd å reflektere noe mer over hva de trenger eller ikke for å få førerkortet.

I elevsamtalene hører vi at elevene diskuterer seg imellom at det vil lønne seg å kjøpe pakkeløsninger for det obligatoriske på veien mot førerkortet. Om de har valgt disse pakkene, dobbeltsjekket de at pakkene bestod av det samme, og eventuelt adderte til det samme på alle kjøreskolene. Det fantes også 10 timerspakker på kjøretimer, noe de diskuterte hvordan skulle legges inn i modellen for prisen på førerkortet. De ble enige om å legge vekk 10timerspakkene i funksjonsuttrykket, fordi det vanskeliggjorde arbeidet, og heller tilføye dette som en merknad ved presentasjonen av prisene. Pengene du sparte på å velge en kjøretimepakke, var så liten at det ikke gjorde noen forskjell på hvilken kjøreskole som var billigst.

Begge elevgruppene i denne studien velger å sette opp en form for tabell for å sammenligne tallene fra de ulike kjøreskolene. Dette fungerer godt som et svar på oppgaven, siden en modelleringsoppgave beskrives som en oppgave der elevene selv skal velge framgangsmåte, og prøve å lage en forenklet modell av virkeligheten som de skal løse matematisk. Tabellen fremstår altså som en forenklet modell av virkeligheten.

Jeg valgte å utfordre elevene på at den tabellen de hadde lagd kanskje ikke var så oversiktlig, og at det derfor ikke ville være så lett for noen utenforstående å raskt kunne se hvilken kjøreskole som var billigst. Da jeg som forsker løste oppgaven, valgte jeg å lage funksjonsuttrykk av prisene, og videre framstille uttrykkene i et koordinatsystem. En modelleringsoppgave skal i utgangspunktet løses av elevene, og det ligger i oppgavens natur at de selv skal finne ut hvordan de skal løse oppgaven. I arbeidet med denne oppgaven ble de likevel utfordret av lærer eller forsker på å lage et funksjonsuttrykk og sette dette inn i et koordinatsystem i form av en graf. Elevene ble påvirket av voksne på hvordan de løste oppgaven. Dette kan være en utfordring, fordi en modelleringsoppgave kan være med på å påvirke at elevene selv skal se hva de trenger å lære og bli motiverte til å lære. Samtidig sto elevene fast, i en blokade, slik at læreren var med på å hjelpe dem videre. Elevene så at dette var læring de hadde bruk for, og var også mottakelige for å lære.

Gruppe 2 klarte ikke å komme i mål med å lage et funksjonsuttrykk for hele prisen, og fremstille dette som en graf. De tok utgangspunkt i at det eneste du trenger for å ta et førerkort er trafikalt grunnkurs og eventuelle kjøretimer. De fikk hjelp av lærer med å lage et funksjonsuttrykk, og dette kan ha påvirket resultatet de fikk.

Gruppe 1 fikk en time undervisning om representasjonene funksjonsuttrykk og graf før de arbeidet med oppgaven en gang til. Dette kan ha påvirket resultatet, fordi de fikk en slags oppskrift på hvordan de kunne presentere dataene i oppgaven i et koordinatsystem. Elevene valgte å bare se på to kjøreskoler i stedet for tre, og de klarte å lage både funksjonsuttrykk og en graf. Stigningstallet på funksjonsutrykkene er felles for gruppe 2 og meg, men konstantleddene er forskjellige. Elevene har ikke notert ned hvilke konstanter de har valgt å ha med, noe som gjør det vanskelig å etterprøve om tallene stemmer. Samtidig er ikke svaret det viktigste i denne oppgaven, men veien elevene tok for å finne svaret.

6.2 Hvilken modelleringssyklus kan man finne i elevers arbeid med modellering i matematikk med vekt på funksjoner på 9.trinn?

I denne delen av diskusjonen vil jeg se om jeg finner noe mønster i elevenes arbeid i møtet med en modelleringsoppgave. Modelleringssyklusen jeg har tatt utgangspunkt i (figur 5), har et fast mønster, men Blum og Leiss (2007) uttaler at elever ikke nødvendigvis følger denne syklusen lineært. Hvordan er mønsteret i modelleringssyklusen til elevene som har deltatt i denne studien?

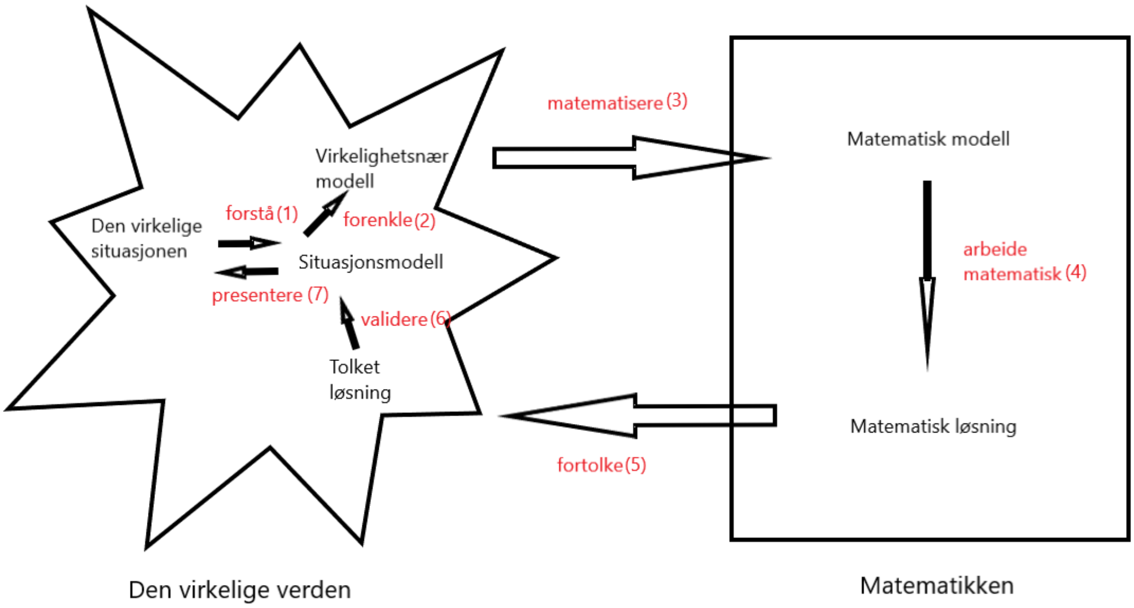
6.2.1 Gruppe 1 sitt møte med førerkortoppgaven

Elevene følger mønsteret i modelleringssyklusen i starten idet de begynner å forstå oppgaven (1). I det å forstå oppgaven legger jeg at elevene også tolker oppgaven. De begynner å diskutere hva oppgaven spør etter og danner seg en forståelse av hva de skal prøve å finne ut av. Ut fra samtalen til elevene virker det som de raskt danner seg et bilde av hvordan de kan løse oppgaven, og de beveger seg over til neste modelleringsrute. Elevene følger mønsteret i modelleringssyklusen fra å forstå oppgaven (1) – til å forenkle situasjonen (2). Det ser ut til at elevene opplever det som krevende å forenkle situasjonen (2) fordi det skaper diskusjoner i gruppa når de skal lage en virkelighetsnær modell. Samtalene om hva som trengs for å ta et førerkort, gjør at de går tilbake til å forstå oppgaven (1), for slik å sikre seg at de har forstått oppgaven riktig. Oppgaven viser seg å være krevende, så elevene fordeler kjøreskolene mellom seg for å finne opplysninger de trenger i teksten. De arbeider seg over til den matematiske verden i ulikt tempo gjennom å matematisere (3) og videre til å arbeide matematisk (4). Mens de arbeider matematisk (4), velger de å gå tilbake til å forstå (1) oppgaven, og de ser igjen etter om de har forstått oppgaven riktig. De arbeider fram og tilbake mellom å forenkle ved å lage en virkelighetsnær modell og å forstå oppgaven. Dette gjør de ved å diskutere hva som er nødvendig å ta på en kjøreskole for å ta lappen. Schaap et al. (2011) sier at det å lage en virkelighetsnær modell ofte er det som elevene opplever som vanskelig, og dette kommer tydelig fram i samtalen til elevene i gruppe 1. Likevel kommer de fram til en virkelighetsnær modell, arbeider og går over til den matematiske verden når de matematiserer og arbeider matematisk.

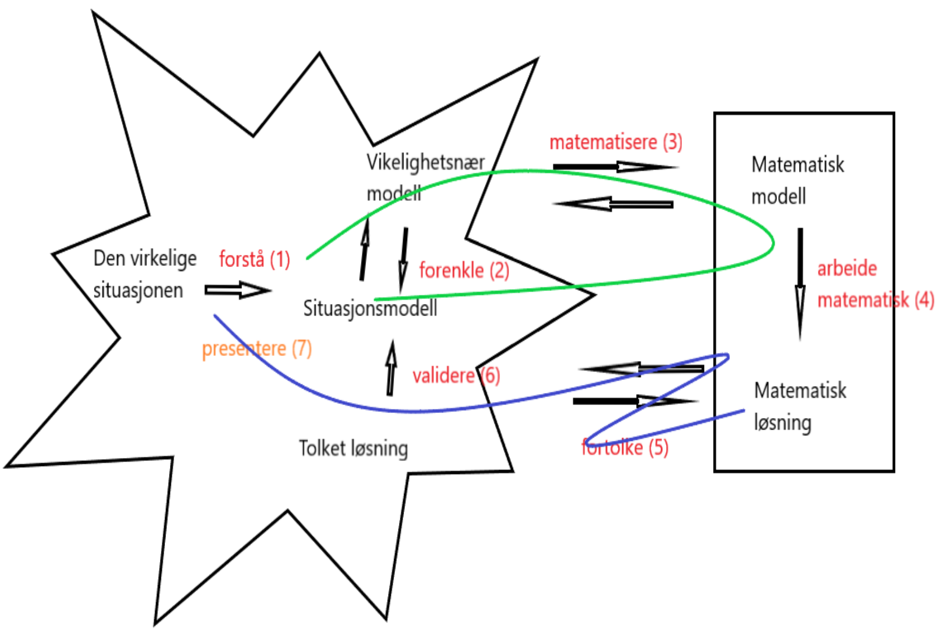
Det kan også diskuteres om elevene i gruppe 1 kom fram til en virkelighetsnær modell. Jeg vil argumentere for at de kom fram til en modell gjennom at de fant alle de ulike konstantene som man må ta for å ta lappen, som for eksempel teorikurs, sikkerhetskurs og leie av bil på førerprøven. Da de hadde tatt de valgene på hvilke konstanter de skulle ha med, brukte de samme modell ved de to andre kjøreskolene. Dette kan kalles en virkelighetsnær modell. På den andre siden kan ikke denne virkelighetsnære modellen gjøres universell, men kun brukes i tilsvarende sammenhenger som denne oppgaven.

Etter hvert som gruppa har laget en virkelighetsnær modell går de videre til å arbeide matematisk (4) igjen. De arbeider systematisk med en og en kjøreskole, og de fyller inn på oppgavearket fram til de har arbeidet matematisk (4) og fått en matematisk løsning av alle prisene på kjøreskolene. De følger igjen syklusen der de fortolker (5) og validerer (6) svarene sine. Dette stemmer godt med Blum og Ferri (2011) som hevder at det er naturlig at elevene ikke følger syklusen i et fast mønster fra modelleringsrute til modelleringsrute.

I arbeidet med oppgaven i gruppe 1 synes jeg at det dukker opp et mønster i syklusen til elevene, som skiller seg litt ut fra den opprinnelige modelleringssyklusen. Blum og Ferri (2011) hevder som sagt at elevene ikke nødvendigvis følger syklusen nøyaktig. For å synliggjøre elevenes mønster i denne studien, har jeg valg å legge inn en grønn kurve, som skal illustrere at elevene arbeider innenfor modellen, men med en del av gangen. I tillegg har jeg latt pilene gå begge veier ved enkelte overganger, ettersom elevene jobbet fram og tilbake mellom disse overgangene. I figurene på side 53 kan vi se de to modelleringssyklusene, slik at det er lettere å se hvordan modelleringssyklusene til elevene i denne studien er, sammenlignet med opprinnelige modelleringssyklus.



Figur 6: Min redigerte overstettelse av modelleringssyklusene



Figur 13: Modelleringssyklus som beskriver elevenes modelleringsmønster

I starten av arbeidet arbeider elevene mellom de fire modelleringsrutene vist i figur 13. De arbeider en stund med å forstå og forenkle situasjonen i den virkelige verden. De går flere ganger fram og tilbake mellom disse to stadiene og modelleringsrutene «situasjonsmodell» og «en virkelighetsnær modell». Etter hvert beveger de seg over i den matematiske verden ved å matematisere (3) og de arbeider godt matematisk (4) når de vet hvilke tall de skal arbeide med. De følger ikke modelleringssyklusen hele veien, men går rett fra den matematiske modellen til situasjonsmodellen underveis i arbeidet. Jeg har valgt å legge inn ei grønn linje som beskriver elevenes mønster i arbeidet. Denne linja følger de flere ganger, helt til at elevene er trygge på at de har fått med seg de opplysningene de trenger for å svare på oppgaven.

Etter hvert som de er trygge på at de har fått med de riktige opplysningene arbeider de videre i syklusen. De forlater den grønne linja, og beveger seg videre i syklusen, illustrert med blå linje. De går flere ganger fram og tilbake mellom matematisk løsning og tolket løsning, men etter at de bestemmer seg for en matematisk løsning, går de ikke tilbake til modelleringsrutene som følger grønn linje i figur 13. Det er kanskje naturlig at de ikke trenger å gå tilbake til modelleringsrutene som følger grønn linje i syklusen, men samtidig ser vi at elevene i begge gruppene ikke validerer svarene opp mot sin situasjonsmodell. De validerer oppgaven først og fremst mot at de har svart på det oppgaven spør etter, ikke om svaret passer til situasjonsmodellen.

I arbeidet med oppgaven stopper elevene med arbeidet før de kommer til å presentere (7) resultatet. Derfor har jeg markert det med annen farge i figur 13. Elevene legger ikke fram resultatet og ser om de svarer på det oppgaven spør om direkte, men kanskje kan noe av valideringa av oppgaven regnes som at de legger fram resultatet. Det er tydelig at elevene ser seg ferdig med oppgaven når de har klart å finne et svar. Hvorfor elevene sjekker at de har svart på det oppgaven om, har jeg ikke et entydig svar på, men en årsak kan være at de ikke er vant til å sjekke svaret opp mot hva oppgaven spør etter eller om svaret er logisk ut ifra de tallene de har fått. Dessuten gav denne gruppa uttrykk for at de var usikre på om de hadde gjort oppgaven riktig ettersom de ikke fant skjæringspunkt på grafen. Da de fikk bekreftet at de hadde gjort funksjonsuttrykket riktig, mente de kanskje at det var en god nok sjekk og at de følgelig var ferdige med oppgaven.

6.2.2 Gruppe 2 sitt møte med førerkortoppgaven

Gruppe 2 følger ikke helt samme mønster som gruppe 1, men mye er også likt. De starter, som gruppe 1, med å forstå oppgaven (1) og går videre med å forenkle (2) til en virkelighetsnær modell. Den virkelighetsnære modellen blir matematisert (3) til en matematisk modell. De starter med å arbeide matematisk (4), men velger å gå tilbake til den virkelighetsnære modellen, ved at de sjekker at de har forstått oppgaven riktig og tatt med alle opplysninger de trenger for å finne ut hvor mye det koster for et førerkort. Elevene går fram og tilbake mellom å forenkle og arbeide matematisk flere ganger. Etter hvert som de er trygge på at de har fått med alle opplysninger, arbeider de matematisk i den matematiske verden og går videre til å fortolke resultatene i den virkelige verden. De beveger seg også her fram og tilbake mellom den matematiske og den virkelige verden gjennom at de arbeider matematisk og fortolker resultatene.

I arbeidet til gruppe 2 ser vi det samme mønsteret som gruppe 1, ved at elevene først arbeider mellom de ulike modelleringsrutene vist som den grønne linja i figur 13. Når de først har bestemt seg for hvilke konstanter og variabler de tar med i den matematiske modellen, og arbeider matematisk, arbeider de videre til den blå linja i syklusen i figur 13. De arbeider matematisk (4) og fortolker (5) resultatet. Å validere (6) resultatet er litt vanskelig, da de ikke validerer svarene opp mot situasjonsmodellen, og sjekker at de faktisk har svart på det oppgaven spør etter.

Heller ikke gruppe 2 har presentert (7) oppgaven. Gruppe 2 jobbet bare med oppgaven i en time, og dette kan være noe av grunnen til at de ikke har presentert svarene opp mot oppgaveteksten. Blum (2015) viser også til at validering og presentasjon av oppgaven ofte er fraværende hos eleven, og ved videre arbeid med temaet bør dette være et fokusområde. Kanskje elevene ikke er vant til å sjekke resultatet de får på matematikkoppgaver? Er det sånn at så lenge de får et svar på regnestykket, så er de fornøyde?

Begge gruppene brukte tiden de hadde til rådighet da de arbeidet med oppgaven for første gang. Det er et tydelig tegn at begge gruppene brukte mesteparten av tiden i den virkelige verden. Dette er illustrert ved at figuren som representerer den virkelige verden er gjort større, mens rektanglet som representer den matematiske verden er gjort mindre. Dette kan forklares med at det i denne modelleringsoppgaven var det krevende å finne konstantene ved førerkort som de trengte, og det å forstå og forenkle oppgaven opplevdes følgelig som krevende for elevene.

6.3 Hvilke blokader kan elevene møte i arbeidet med matematisk modellering?

Målet med oppgaven elevene fikk var først og fremt å presentere hvor mye det koster for et førerkort på de ulike kjøreskolene. Siden denne modelleringsoppgaven er en introduksjon til videre arbeid med temaet funksjoner, var målet til elevene å lage en valgfri presentasjon over hva det koster for førerkort på de ulike kjøreskolene, og det trengte ikke å være en presentasjon som inneholdt funksjonsuttrykk og presentere sammenligningen i grafer. Det var også på forhånd forventet at elevene skulle møte blokader i arbeidet med å løse oppgaven, og det blir derfor viktig å se på hvilke blokader elevene møtte.

Både gruppe 1 og gruppe 2 møtte blokader da de skulle *forenkle* oppgaven. Schaap et al. (2011) sier dette er en vanlig blokade hos mange elever, da elevene ofte kan være usikre på hvilke opplysninger de trenger for å løse oppgaven, og derfor forventer hint eller forklaringer i teksten for å svare på oppgaven:

«A blockage in picking up the problem statement, caused by an impending formulation of the problem text, overlooking essential parts in the problem text, or expecting hints, guidelines and necessary datain the problem text» (Schaap et al., 2011)

Elevene kan altså gjøre feil antakelser, slik at det fører til en blokade. Dette stemmer godt med elevene i denne studiens møte med oppgaven. De bruker mye tid på å finne ut hvilke opplysninger de trenger, og de velger å spørre om hjelp for å komme videre. Kanskje er dette svakheten til førerkortoppgaven, da det ikke gir seg selv hvilke opplysninger elevene trenger, og dermed er oppgaven med på å lage en blokade for elevene? De ulike kjøreskolene, som elevene bruker som kilde, informerer også om prisen på ulike måter på hjemmesiden sin. Dermed blir elevene usikre, noe som fører til en blokade. I forskerens løsning av oppgaven framsto ikke dette som en blokade, da det i utgangspunktet var greit å navigere mellom de ulike prisene. Dette har kanskje sammenheng med at forskeren selv har førerkortet, og vet hva som er obligatorisk og ikke for å kjøre opp for bil. Dette er derfor en viktig pekepinn når elevene skal arbeide med modelleringsoppgaver. Begrep og opplysninger som læreren og andre kan ta som en selvfølge, er ikke nødvendigvis det for elevene. Dette kan føre til forvirring, og at elevene gir opp i arbeidet med å løse en oppgave. Samtidig skal modellering i matematikken være et supplement til å utvikle elevene til selvstendige samfunnsborgere, der de møter matematiske utfordringer utenfor klasserommet (Blum & Leiss, 2007). Problemstillingen i denne studien kan således være et godt eksempel på et slikt supplement.

Begge gruppene i studien møter som tidligere sagt en blokade når de matematiserer. De arbeider med å lage funksjonsuttrykk, noe de ikke har arbeidet med før. Dette kan være et resultat av at denne modelleringsoppgaven er lagt i forkant av arbeidet med funksjoner på 9.trinn, og dermed har elevene ikke kunnskap nok om temaet for å løse oppgaven. Sammenlignet med Niss et al. (2007) beskrivelser av to motpoler i synet på når man bør jobbe med modelleringsoppgaver, er oppgaven i denne studien gitt i forkant av at elevene skal arbeide med funksjoner. Her kan elevene se nytten av å lære om oversettelsesaksjonene i temaet funksjoner for å klare å løse oppgaven. På den andre siden kan blokaden føre til at elevene blir motløse, noe som argumenterer for den andre motpolen. Hvis elevene først hadde arbeidet med temaet, er kanskje sjansen større for at de hadde klart å lage et funksjonsuttrykk. Skal det å lære matematikk gjøre elevene i stand til å løse hverdagsproblemer, eller er hverdagsproblemer grunn til å lære matematikk? I denne studien ligger først og fremst et hverdagsproblem til grunn for å lære matematikk, og studien vil være et argument for å starte et tema i matematikken med en modelleringsoppgave, for slik å skape nysgjerrighet hos eleven.

Gruppe 1 møter en blokade i arbeidet med å validere resultatet sitt. De har laget et funksjonsuttrykk, men stoler ikke på at dette er riktig siden grafene ikke krysser hverandre. Blokaden handler om at de ikke klarer å tolke resultatet og dermed validere at det de har gjort er riktig. De har kun hatt en kort gjennomgang i temaet å lage funksjonsutrykk, og klarte å lage dette ut ifra den kunnskapen de hadde, men har ikke nok erfaring i å tolke en graf. Igjen vil argumentet at førerkortoppgaven ble gjennomført uten at elevene hadde stor kjennskap til temaet funksjoner, og dermed har sannsynligvis ikke elevene nok kunnskap om temaet til å svare på oppgaven.

Even (1990) sier at det å forstå begrepene i den ene representasjonen innenfor funksjoner gjør ikke at du nødvendigvis ikke forstår begrepene innenfor en annen representasjon. Dette kan være en av årsakene til en blokade, siden elevene ikke har mye erfaring i arbeidet med funksjoner fra før. Elevene må forstå begrepene innenfor en annen representasjon og være i stand til å gjøre overgangsaksjonene, og dette må læreren arbeide med elevene for at elevene skal beherske. I denne studien har ikke elevene kommet så langt i sin læring om funksjoner, siden det er en introduksjon av temaet.

Det er mange likhetstrekk mellom forskerens tolkning og elevenes måte å løse oppgaven på. Likevel ser vi at elevene møter flere blokader underveis i arbeidet, som forskeren ikke møtte. Elevenes første blokade ved å forenkle oppgaven, var en blokade som læreren ikke forutså. De andre blokadene var ikke overraskende, og handler om å matematisere og å validere oppgaven. Begge disse blokadene handler om at elevene ikke har arbeidet med temaet funksjoner og dermed ikke har nok kunnskap og erfaring til å klare å komme seg ut av blokaden på egen hånd.

6.4 Kan et modelleringsopplegg i matematikk være en introduksjon til temaet funksjoner på 9.trinn?

Det er viktig at en modelleringsoppgave tar utgangspunkt i et problem fra virkeligheten som elevene kan kjenne seg igjen i. Temaet for oppgaven bør være et problem som elevene ønsker å finne ut av og som dermed motiverer dem for videre arbeid. Å måle om elevene synes oppgaven er motiverende kan være vanskelig, men elevenes engasjement i timen og ikke minst etter timen, kan være en pekepinn på om elevene finner oppgaven motiverende. I dette prosjektet virket det som at elevene opplevde oppgaven som meningsfull. Det var stort engasjement rundt oppgaven, og dette fortsatte også etter at timen var ferdig. I samtalesekvensen under arbeider gruppe 2 videre med modelleringsoppgaven etter at timen er avsluttet:

189 Lars: Men det er mange som tar Franks kjøreskole da

190 Lærer: hvorfor det?

191Henrik: Fordi det er nærme

192 Lærer: Så det er en faktor også, som vi ikke vurderer nå.

193 Henrik: Ja det er viktig at den ligger nærme, avstand er viktig.

194 Emma: Ja for man må jo ta bussen til byen for å finne de trafikkskolene der, og da må man betale bussbilletten også

195 Lærer: Kanskje man må plusse på bussbilletten da?

196 Henrik: Ja det er 25 kr

197 Emma: Men vi blir jo ungdom/voksen på den tida, og da blir det dyrere

198 Lærer: så man må plusse på bussbilletten også da, på hver time da eller?

199 Emma: ja

200 Lars: Hvis man skal til Tut og kjør, forbrenner man kalorier på å gå.

201 Lærer: Men er ikke det bare bra da?

202 Alle: jo

203 Lars: Det er jo bra å gå

204 Lærer: men dere ser at det er mange faktorer å ta hensyn til når man skal bestemme hvor man skal kjøre opp

205 Emma: Ja!

I samtalen over begynner elevene å dra inn flere andre faktorer som påvirker hvilken kjøreskole man velger når man skal ta et førerkort. Pris er tydeligvis bare en av dem, tid og avstand fra hjemmet er også to faktorer elevene opplever som viktig. Dette viser et engasjement rundt oppgaven som elevene tar med seg etter timen, og oppgaven ser ut til å oppleves som meningsfull for elevene. Samtidig kan man ikke utelukke at elevene er lojale til de oppgavene de får utlevert, og løser oppgaven godt og nøye fordi læreren har sagt at de skal gjøre det.

I elevenes løsningsforslag kan vi se at elevene har brukt flere ulike representasjoner i arbeidet med å løse førerkortoppgaven. Begge gruppene starter med å prøve å lage en form for tabell for å sammenligne prisene til de ulike kjøreskolene. De viser kompetanse på det nivå som Duval (2006) kaller behandling. Når de har funnet ut prisen for kjøreskolen for 5 kjøretimer, klarer de å regne ut prisen for andre kjøreskoler. Dette kan være et godt utgangspunkt for videre arbeid med funksjoner, da det å lage tabeller for å sammenligne tall er noe elevene kan fra før. Førerkortoppgaven plasseres i kategorien verbal situasjon og elevene viser at de klarer transformasjonen fra en verbal situasjon til tabell, altså å måle (Janvier, 1987). Det er viktig å presisere at tabellen elevene presenterer ikke er helt i mål, og at den med fordel kan videreutvikles. Å skille variablene x og y er eksempelvis en fordel for elevene, slik at de kan se sammenhengen mellom tabellen, funksjonsuttrykk og graf. Det å arbeide med transformasjoner blir også sett på som kognitivt vanskelig (Duval, 2006), og krever mer tid enn det som er brukt i denne studien.

Elevene viser også at de klarer å lage funksjonsuttrykk etter hvert. Gruppe 2 har ikke med alle konstantene de trenger for å lage et korrekt funksjonsutrykk, ettersom de har tatt utgangspunkt i trafikalt grunnkurs og kjøretimeprisene. Likevel er det et funksjonsutrykk å ta utgangspunkt i, da det er samme utgangspunkt i alle de tre funksjonsutrykkene. Vi ser også at ingen av gruppene klarte å lage funksjonsuttrykk uten en kort forklaring av læreren først.

Gruppe 1 hadde også en undervisningstime om funksjoner med fokus på funksjonsutrykk og graf. Her har de arbeidet med fokus på omdannelsesprosesser (Duval, 2006) mellom disse to representasjonene. Etter denne timen klarte de å lage et funksjonsuttrykk for prisen på førerkortet ved to av kjøreskolene. De plasserte også funksjonsuttrykket inn i geogebra og fikk dermed til å lage graf. Samtalen viste imidlertid at forståelsen for grafen og funksjonsutrykket ikke var helt tilstede, men likevel viser dette at oppgaven er et godt utgangspunkt for videre arbeid med temaet. Ingen av gruppene begynte med å lage et funksjonsuttrykk før læreren etterspurte dette. Lærerens inngripen påvirket dermed hvordan elevene angrep oppgaven videre. På den ene siden får vi dermed ikke se hvordan elevene videre hadde løst oppgaven, samtidig som det hører med til lærerrollen å veilede elevene i riktig retning (Blum & Ferri, 2011). Elevene var mottakelig for veiledning, og de klarte derfor å komme seg videre i oppgaven.

6.4 Oppsummering

I dette kapitlet har jeg synliggjort hvilke funn jeg har gjort i arbeidet med en modelleringsoppgave på 9.trinn. I analysene av elevenes samtaler ser vi at elevene arbeider innenfor alle de sju trinnene i modelleringssyklusen med utgangspunkt i Blum og Leiss (2007). De følger ikke et fast mønster, men de hopper fram og tilbake mellom modelleringsrutene. Det som er særlig verdt å merke seg i denne studien er at elevene deler syklusen i to, ved at de først arbeider i en del av syklusen, før de tar steget over i nye modelleringsruter. Fra de går over til den andre delen av syklusen, ser de seg ikke tilbake.

Elevene bruker mange elementer fra funksjoner i oppgaven. De arbeider innenfor representasjonene verbal situasjon, tabell, graf og funksjonsuttrykk, selv om det er stor forskjell på hvordan de tolker de ulike representasjonene. I lys av Niss et al. (2007) sine motpoler i synet på når man kan bruke modellering, kan denne oppgaven representere et eksempel på en oppgave som kan brukes i starten av et tema om funksjoner.

Elevene har møtt flere blokader i arbeidet med modelleringsoppgaven. Noen av disse blokadene kan også ses på som et utgangspunkt for videre arbeid med temaet funksjoner og viser dermed at modellering kan egne seg å bruke som en start på temaet.

7 Sammendrag og konklusjon

Formålet med denne masteroppgaven var å få kunnskap om og innsikt i hvordan noen elever på 9.trinn arbeider med en modelleringsoppgave med vekt på funksjoner. For å få denne innsikten har jeg studert og presentert to gruppers arbeide med en modelleringsoppgave som en introduksjon til temaet funksjoner. I denne fremstillingen har vi fulgt elevenes modelleringssyklus, og vi har sett på hvilke blokader de har møtt underveis i arbeidet.

7.1 Konklusjon

I min studie med problemstillingen «hvordan jobber elever på 9.trinn med modelleringsoppgaver i matematikk?», har jeg sett nærmere på hvordan modelleringsoppgave kan få innpass i et norsk klasserom. For å kunne nærme meg et bredt og nyansert svar på problemstillingen, valgte jeg å bryte den ned i tre forskningsspørsmål.

Det første forskningsspørsmålet jeg ville studere på «Hvilken modelleringssyklus kan man finne i elevers arbeid med modellering i matematikk med vekt på funksjoner på 9.trinn?» Elevene i denne studien var innenfor alle rutene i modelleringssyklusen bortsett fra presentasjon, men fulgte ikke en fast syklus gjennom arbeidet med å løse modelleringsoppgaven. De arbeidet mest med å forstå og forenkle oppgaven, og de gikk flere ganger fram og tilbake mellom de to modelleringsrutene «en virkelighetsnær modell» og «en forenklet modell». Begge gruppene i denne studien arbeidet mest i den virkelige verden, men de klarte også å bevege seg mellom den matematiske og den virkelige verden på en god måte.

Det andre forskningsspørsmålet ville jeg se på «Hvilke blokader kan elevene møte i arbeidet med modellering?». Siden denne studien ser på hvordan elever jobber med en modelleringsoppgave som skal fungere som en introduksjon til temaet funksjoner på 9. trinn, var det naturlig at det ville oppstå blokader hos elevene. Elevene møtte blokader flere steder i modelleringssyklusen, både når de skulle forstå og forenkle oppgaven, når de skulle matematisere og når de skulle validere oppgaven. Dette er gode utgangspunkt for videre arbeid med temaet, og Schaap et al. (2011) mener blokader kan brukes i undervisningen som metakognitive aktiviteter. Med fokus på å reflektere rundt og å se på muligheter til å fjerne blokadene, vil det hjelpe elevene til å se på hva de trenger å lære for å arbeide videre i modelleringsprosessen. På denne måten kan modelleringsoppgaver kan være motiverende selv om de også kan oppleves som krevende for elevene.

Det tredje og siste forskningsspørsmålet jeg stilte, lød slik: «Kan et modelleringsopplegg i matematikk være en introduksjon til temaet funksjoner på 9.trinn?» Jeg mener jeg kan svare «ja» på dette spørsmålet. Oppgaven som elevene jobbet med, dannet flere utgangspunkt for å arbeide videre med funksjoner, ettersom elevene prøvde seg på mange ulike representasjoner innenfor temaet funksjoner. Dessuten tar modelleringsoppgaven utgangspunkt i en situasjon fra virkeligheten, som elevene vil kjenne seg igjen i. Å kjøre opp for bil er noe de fleste 15åringer har et forhold til, men de er ikke nødvendigvis kjent med hvor mye oppkjøringen vil koste. Å arbeide seg gjennom en modelleringssyklus gjør at elevene vil se at de vil få bruk or å lære mer om funksjoner, og slik vil de kunne få økt motivasjon for å arbeide videre med temaet. Dette underbygger også Blum (1993) sitt argument for å jobbe med matematisk modellering. Han fremhever nettopp det pragmatiske argumentet om at undervisning i matematikk først og fremst skal lære elever å løse problemer og utfordringer fra den virkelige verden, og det psykologiske argumentet der passende modelleringsoppgaver kan bidra til faglig utvikling og mer positiv holdning til faget.

7.2 Studiens plass i forskningsfeltet og videre forskning

Tidlig i arbeidet om modellering fant jeg noe forskning på modellering og modelleringsoppgaver. Samtidig var alt hentet fra utlandet, og lite var knyttet til et spesielt tema innenfor matematikken. Det jeg ønsket å studere var om det lot seg gjøre å knytte modelleringsoppgaver til et tema i matematikken på ungdomsskolen, slikt at modellering kan bli en naturlig del av undervisningen og ikke bare en «happening» som skjer innimellom for å krydre matematikktimene. Fra egen undervisning har jeg opplevd at funksjoner er et tema som elever opplever som vanskelig, og denne studien kan tjene som et eksempel på hvordan lærere kan designe liknende undervisningsopplegg i egne klasserom. Studien viser også hvordan temaet funksjoner kan knyttes til elevenes hverdag med et tema som elevene er interessert i. Siden «modellering og anvendelse» er et av kjerneelementene i den nye læreplanen, Fagfornyelsen fra 2020, kan denne studien bidra med kunnskap om hvordan elever i den norske ungdomsskolen faktisk arbeider med modellering.

Denne studien bygger på arbeidet til to grupper på til sammen seks elever, og deres løsningsforslag på en modelleringsoppgave. Elevene var 9.trinnselever, og de hadde ikke arbeidet med modelleringsoppgaver før. De hadde heller ikke mye erfaring med temaet funksjoner. Videre forskning på dette feltet kan rettes mot hvordan elever kan arbeide med løsningen av en tilsvarende oppgave *i etterkant* av arbeidet med for eksempel temaet funksjoner i matematikken. Et annet forslag kan være å forske på hvordan elever på andre trinn i skolen arbeider med modelleringsoppgaver.

Elevene som er informanter i denne studien har lite erfaring med modelleringsoppgaver fra før. Det hadde det også vært interessant og studert hvordan elever med større modelleringskompetanse hadde løst samme oppgave. Hadde disse elevene hatt samme modelleringssyklus?

7.3 Avslutning

Å arbeide med denne studien har gitt meg mange nye og interessante innspill i arbeidet med modellering i klasserommet. Å prøve å gjøre skjøten mellom det virkelige livet og matematikken minst mulig bør være et mål i alle klasserom, og modelleringsoppgaver kan være et av svarene på å nå dette målet. Utfordringen kan være å finne tema som er interessante for ungdomsskoleelever, samtidig som det kan knyttet til læreplanmål i matematikk. Ved å bruke en modelleringsoppgave som en introduksjon til et tema i matematikken, kan man også få en innsikt i hva elevene opplever som vanskelig, der elevene møter blokader. Dette gir gode utgangspunkt til matematiske samtaler i klasserommet, samtidig som at elevene ser nytteverdien i å lære matematikk. I denne studien arbeidet elevene spesielt med å finne ut hvor mye et førerkort koster, noe som viser seg veldig relevant. Adresseavisa 09.05.19 siterer Erica på 17 år om prisen på førerkort: *«På forhånd hadde jeg planlagt å øvelseskjøre masse for å slippe å betale så mye. Jeg hadde ikke peiling på kostnadene, men sjekket prisene og regnet ut sånn cirka hva jeg kunne forvente å måtte betale»(Andersen, 2019)*

Kilder

Andersen, E. R. (2019, 09.05.2019). Erica Aakre Olsen betaler 25.000 kroner for lappen. Slik får du førerkortet billigst mulig. *Adresseavisen*. Hentet fra https://www.adressa.no

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. I *Teaching and learning mathematics in context, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications* (s. 3 -14). New York: Ellis Horwood.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (s. 73-96): Springer.

Blum, W. & Ferri, R. B. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? . I *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (bd. 1, s. 15-30). Dordrecht: Dordrecht: Springer Netherlands.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education : The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12) : education, engineering and economics*. Chichester: Horwood Publishing.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (Eighth edition. utg.). London, England ;,New York, New Yok: Routledge.

Cramer, K. (2003). Using a Translation Model for Curriculum Development and Classroom Instruction. I R. Lesh & H. M. Doerr (Red.), *Beyond constructivism : models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. London: Lawrence Earlbaum.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational studies in mathematics, 21*(6), 521-544.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for research in mathematics education*, 94-116.

Haines, C. & Crouch, R. (2010). Remarks on a modeling cycle and interprenting behaviours. I R. Lesh, M. International Conference on the Teaching of Mathematical & Applications (Red.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies : ICTMA 13*. New York ; London: Springer.

Halvorsen, K. (2008). *Å forske på samfunnet : en innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg. utg.). Oslo: Cappelen akademisk forl.

Hjardar, E., Pedersen, J.-E. & Jerner, L. (2015). *Faktor : 10 : Grunnbok* (Bokmål[utg.]. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. *This book stems from a symposium organized by CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'' Apprentissage et le Développement en Education) of Université du Quebec à Montréal.*: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*, 38*(3), 302-310.

Kunnskapsdepartementet. (2018). *Kjerneelementer i fag*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research, 60*(1), 1-64.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. & Zawojewski, J. S. (2003). Model Development Sequences. I *Beyond Constructivism; Models and Modeling Perspectives on Mathematics Preblem Solving, Learning and Teaching* (s. 35- 58). London: Lawrence Earlbaum.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism : models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. London: Lawrence Earlbaum.

Lorentzen, L. (2012). *Hva er matematikk*. Oslo: Universitetsforlaget.

Maaß, K. J. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311.

Niss, M., Blum, W. & Galbrait, P. (2007). Introduction. I *Modelling and applications in mathematics education : The 14th ICMI Study New ICMI study series* (bd. 10). New York: Springer.

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole : et kunnskapsgrunnlag*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e22a715fa374474581a8c58288edc161/no/pdfs/nou201420140007000dddpdfs.pdf

Perrenet, J. C., Zwaneveld, B. & EsoE. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(6), 3-21.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforl.

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold : samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (3. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. I *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 137-146). Springer.

Schou, J. (2008). *Matematik for lærerstuderende : Omega : 4.-10. klassetrin*. Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.

Schou, J., Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. C. (2008). *Matematik for lærerstuderende : Omega : 4.-10. klassetrin*. Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.

Skrivesenteret. (2019). Rammer for skriving. Hentet 03.03.2019 fra http://www.skrivesenteret.no/ressurser/rammer-for-skriving-1/

Utdanningsdiraktoratet. (2013). *Læreplan i matematikk*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/finn-lareplan/lareplan/?kode=MAT1-04

Valsiner, J., Van der Veer, R. & Jaan, V. (2000). *The social mind: Construction of the idea* Cambridge University Press.

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet «Hvordan jobber elever med modelleringsoppgaver i matematikk»?

Til foresatte for elever på 9. trinn ved [redacted]

Jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt på skolen til ditt barn. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

I min masterstudie vil jeg se på hvordan elever arbeider med modelleringsoppgaver i matematikk. I den forbindelse skal jeg ha en designstudie, der jeg skal gjennomføre et undervisningsopplegg i en ungdomsskoleklasse. I ettertid blir samtalene til elevene i undervisningen analysert, for å prøve å kjenne igjen læringsbaner og modelleringsstrukturer i klasserommet. Opplegget blir gjennomført i en skoletime, ca 60 minutter.

Resultatene av studien vil bli brukt i en masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Utvalget til undersøkelsen er tilfeldige elever på ungdomsskolen, og jeg ønsker derfor å bruke 9.trinnselever for å ha data til masteroppgaven.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du det blir tatt lyd – og bildeopptak av undervisningssekvensen.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan ditt barn når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Katrine Thorsen Aarre og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.

Deltakerne skal ikke kunne gjenkjennes i publikasjon, både navn og skole vil være fiktivt.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes i juni 2019. Etter dette vil opptak bli slettet.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU ILU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no)/Mari-Ann Igland (mari.a.igland@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Iveta Kohanova Katrine Thorsen Aarre

Prosjektansvarlig Student

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Hvordan jobber elever med modelleringsoppgaver i matematikk?» og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i undervisningsøkta
- ☐ å delta i samtale om temaet i etterkant ved behov.

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. juni 2019

Navn på barn……………………………………………………

Vedlegg 2: Godkjennelse fra Norsk senter for forskningsdata (NSD)

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 826410 er nå vurdert av NSD. Følgende vurdering er gitt:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD, den 25.09.18. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.06.19.

LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER NSD finner at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER De registrerte vil ha følgende rettigheter i prosjektet: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). Rettighetene etter art. 15-20 gjelder så lenge den registrerte er mulig å identifisere i datamaterialet. NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon. OPPFØLGING AV PROSJEKTET NSD vil følge opp behandlingen ved planlagt prosjektslutt for å avklare om behandlingen er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD:

Kjersti Haugstvedt

Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden