Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Tor Arne Johannessen

Generalisering av figurmønstre

En studie av utfordringer på femtetrinn og forslag til undervisningssekvens

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5. -10
Veileder: Kirsti Rø
Mai 2019

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Tor Arne Johannessen

Generalisering av figurmønstre

En studie av utfordringer på femtetrinn og forslag til undervisningssekvens

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5. -10
Veileder: Kirsti Rø
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Masteroppgaven tar utgangspunkt i at algebra kan være nyttig å innføre på barnetrinnet. I undersøkelsen min har jeg undersøkt hvilke utfordringer en gruppe femtetrinnselever støtte på i arbeid med generalisering av figurmønstre og tatt for meg hvordan man som lærer kan utforme en undervisningssekvens som hjelper elever i arbeidet med generaliseringer.

Forskningstilnærmingen er basert på trekk fra designforskningen, en type forskning som har som mål å utvikle gode løsninger på et konkret problem i en gitt kontekst. Undervisningssekvensen er utformet ut fra et teoribasert rammeverk og består av tre undervisningsøkter. Undersøkelsen bygger på deltagende observasjon av åtte elever i en undervisningssekvens på totalt tre timer, der fokuset var på arbeid med figurmønstre og å finne ut hvilke utfordringer elevene støtte på. Datamaterialet består av lyd- og videoopptak, og jeg gjennomførte en kvalitativ analyse av det med bruk av åpen koding og kategorisering.

Resultatene fra studien indikerer at utfordringene elever kan støte på i arbeid med generaliseringsoppgaver i hovedsak kan deles inn i tre overordnede nivåer: oppfattelsesnivået, verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået. Disse nivåene er delvis overlappende. Jeg fant også at elevene i arbeidet med figurmønstre utviklet de algebraiske ferdighetene sine underveis i undervisningssekvensen. De begynte å bruke fagspesifikke begreper og begynte å innse at symboler kan stå for variabler. Denne innsikten ga dem et innblikk i at det er sammenheng mellom aritmetikk og algebra.

Det å introdusere algebra relativt tidlig på barnetrinnet kan være avgjørende for at elevene lykkes med algebra på lang sikt, og det er viktig at lærere kan identifisere hvilke utfordringer elevene støter på underveis. Da blir det langt enklere å utforme undervisningssekvenser som støtter elevene i arbeidet.

Forord

Masterstudien min ble gjennomført våren 2019 og avslutter to år som masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU. Gjennom arbeidet har en rekke personer bidratt med hjelp og støtte.

En stor takk går til veilederen min, Kirsti Rø, som har bidratt med ærlige, konstruktive og nyttige tilbakemeldinger underveis. Det har betydd mye å ha en så grundig og dyktig fagperson som veileder.

Jeg vil også takke rektor ved Ila skole, som har gitt meg muligheten til å sjonglere studier og undervisning, samt lærerne på femtetrinn som har latt meg låne elevene deres. Disse elevene fortjener også en takk for at de ble med på prosjektet med godt humør og stort engasjement. Tusen takk også til Merete Hårstad, som observerte undervisningsøktene mine og var en verdifull samtalepartner i prosessen.

Takk også til familien min, som har gitt meg rom når jeg trengte det og et klapp på skulderen, og til min gode venn Morten Mæhre for korrekturlesing og konstruktive innspill.

Trondheim, mai 2019

Tor Arne Johannessen

1. Innhold

1. Innledning

Bakgrunn for masteroppgaven

Algebra kan være utfordrende for mange elever. Resultater fra TIMSS-undersøkelsen (Trends in International Mathematics and Science Study) i matematikk i 2015 viser at matematikkprestasjonene til norske elever på niendetrinn er middels gode i europeisk sammenheng, men at prestasjonene i algebra er svake (Utdanningsdirektoratet, 2016). Utkastet til ny læreplan i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2018) tar konsekvensen av dette og sier at elevene bør «oppdage sammenhengene og strukturene selv og ikke bare bli presentert for en ferdig løsning. Dette kan foregå gjennom å utforske med tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter å formalisere ved bruk av algebra og hensiktsmessige representasjoner. Dette kjerneelementet må ses i sammenheng med kunnskapsområdene tall og algebra, siden algebraisk tenking er en viktig framgangsmåte og forutsetning for abstraksjon og generalisering.»

Flere elever får sitt første møte med algebra på ungdomstrinnet (Strachota, Knuth & Blanton, 2018), og dette kan skape store utfordringer og frustrasjoner. Jeg arbeider selv på barnetrinnet og har erfart at elever ofte er flinke til å utføre regneoperasjoner, men kan ha utfordringer med å generalisere i matematikken. Jeg ønsker derfor å bidra til at elever kan utvikle kunnskaper og ferdigheter som er relevante og gir et godt grunnlag i algebra før de begynner på ungdomsskolen.

Den gjeldende læreplanens kompetansemål viser hva det forventes at elever på barnetrinnet skal kunne på algebraområdet. Etter andretrinnet skal elevene for eksempel kunne «kjenne att, eksperimentere med, beskrive og vidareføre strukturar i talmønster» Videre står det etter fjerde årstrinn at elevene skal kunne «bruke matematiske symbol og uttrykksmåtar for å uttrykkje matematiske samanhengar i oppgåveløysing», og etter sjuendetrinn at de skal kunne «utforske og beskrive strukturar og forandringar i geometriske mønster og talmønster med figurar, ord og formlar» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Kort oppsummert skal altså elevene utforske og beskrive matematiske sammenhenger, strukturer og mønstre og etterhvert uttrykke disse med et matematisk symbolspråk.

Når det da er mange elever som ikke når disse kompetansemålene, blir spørsmålet hvilke utfordringer de møter i arbeidet med algebraiske aktiviteter, samt hva lærere kan gjøre for å legge til rette for undervisning som på best mulig måte bidrar til at elevene klarer å nå målene.

Tidligere forskning og egne forskningsspørsmål

I flere land blir elevenes møte med algebra utsatt til ungdomstrinnet, noe som bidrar til at flere elever mislykkes med å utvikle hensiktsmessige ferdigheter og strategier for å tenke mer abstrakt (Mason, 2008). Ifølge Dienes (1961) tar det lang tid for elever å forstå overgangen fra små, kjente tall til ethvert tall. Overgangen til ungdomstrinnet kan derimot blir lettere dersom lærere starter med algebratilnærming på lavere trinn. Warren (2006) foreslår at algebraiske aktiviteter innføres, med hensiktsmessig støtte fra læreren, allerede tidlig i utdanningsløpet, ettersom dette kan bidra til at overgangen fra aritmetikk til algebra blir lettere for elevene. Blanton og Kaput (2011) understreker også betydningen av å gi barn muligheten til å begynne å bruke symbolske representasjoner så tidlig som mulig, slik at de for eksempel får erfaring med at symboler kan representere variabler. Dermed får de bedre forutsetning for å utforske mer komplekse begreper senere i skolegangen. Algebra bør derfor være en sentral del av undervisningen for elever på barnetrinnet.

Algebra er en omfattende del av matematikken, men ett område av algebra knyttes til figurmønstre. Et figurmønster er en geometrisk representasjon av en tallrekke som forandrer seg etter et bestemt mønster (Karlsen, 2014). I flere land, blant annet i Storbritannia, USA og Australia, anbefaler læreplanene at elevene får mulighet til å jobbe med oppgaver som omfatter generalisering av mønstre, ettersom visuelle geometriske representasjoner bidrar til at elevene enklere ser sammenhenger og dermed kan utforme generelle matematisk uttrykk (Kaput, 2008).

Tilnærming og metode

Ettersom figurmønstre trekkes frem som en aktuell tilnærming til tidlig algebra, ønsker jeg gjennom denne studien å ta utgangspunkt i slike mønstre for å utforske hvilke utfordringer som kan oppstå når elever arbeider med oppgaver der de skal generalisere. I stedet for å få et øyeblikksbilde av hva som skjer på et gitt tidspunkt i arbeidet med en figurmønsteroppgave, ønsker jeg å se hva som skjer underveis i en undervisningssekvens. Med undervisningssekvens menes i det følgende en samling av undervisningsøkter – i denne studien tre økter – med tilhørende forarbeid, underveisanalyser og revisjoner.

Gjennom studien vil jeg, med bakgrunn i relevant teori, utvikle en undervisningssekvens og kartlegge og analysere de utfordringene elevene støter på i arbeidet med å generalisere og verbalt begrunne et voksende figurmønster. Undervisningssekvensen baserer seg på prinsippet om hypotetiske læringsbaner, definert av Simon (1995), som består av de tre komponentene *læringsmål*, *læringsaktiviteter* og *den antatte* *læringsprosessen*. Det legges opp til at elevene skal få erfaring med å observere, gjøre antagelser, generalisere, bruke symboler og begrunne i generaliseringsoppgavene de arbeider med – prosesser som Kieran, Pang, Schifter og Ng (2016) omtaler som kjerneaktiviteter i algebra.

Med bakgrunn i teori om hvilke utfordringer elever kan støte på og hvilke tiltak som kan støtte dem i arbeidet, har jeg valgt følgende forskningsspørsmål:

> *Hvilke utfordringer kan femtetrinnselever møte i arbeid med generalisering av figurmønstre?*
>
> *Hvordan kan en undervisningssekvens støtte en gruppe femtetrinnselevers arbeid med generalisering av figurmønstre?*

For å svare på forskningsspørsmålene er det nødvendig å observere og analysere hvordan elever jobber med generalisering av figurmønstre. På den måten kan jeg få innsikt i hvilke utfordringer elevene kan møte i undervisningssituasjonene. Jeg har valgt å bruke trekk ved designforskning som struktur for hvordan forskningsprosjektet skal gjennomføres. I oppgavens teoridel har jeg utarbeidet et teoribasert rammeverk som trekker frem noen av utfordringene som elever kan støte på i arbeid med figurmønstre, og dette danner utgangspunktet for den hypotetiske læringsbanen, der tre læringsmål defineres. Disse er retningsgivende for valget av figurmønstre og oppgaver. Gjennomføringen av undervisningssekvensen gir en mulighet til å undersøke hvordan noen elever på femtetrinn kan støttes i forbindelse med læringsaktivitetene og utvikle innsikt og kunnskap om generalisering.

Jeg har gjennomført undersøkelsen i grupper á fire elever på femtetrinn. Dataene ble innhentet gjennom observasjoner, lyd- og videoopptak og elevbesvarelser. For å få mening ut av datamaterialet, valgte jeg å gjennomføre åpen koding og kategorisering (Nilssen, 2012) av elevenes utfordringer i gjennomføringen av undervisningssekvensen. Analysene av dataene gir innsikt i hvilke utfordringer som oppsto i arbeidet med generaliseringsoppgavene og et innblikk i hvordan undervisningssekvensen kan justeres og forbedres. På bakgrunn av dette utvikles det et forslag til en bearbeidet undervisningssekvens som i større grad skal støtte og legge til rette for at elever på barnetrinnet kan lykkes med å generalisere figurmønstre.

Oppbygning av oppgaven

Masteroppgaven er strukturert i fem hovedkapitler: teori, metode, føranalyse, analyse, diskusjon og avsluttende refleksjoner. Det første kapittelet redegjør for begreper og det teoretiske bakteppet som danner grunnlaget for analysen av datamaterialet og ellers er relevant for studien min. Algebrabegrepet tydeliggjøres, og ideen bak tidlig algebra forklares. Deretter blir elevers utfordringer med algebra forklart. På bakgrunn av teorien utarbeider jeg et rammeverk som gir oversikt over utfordringer elevene kan møte i arbeidet med generalisering av figurmønstre. Dette teoretisk forankrede rammeverket gir føringer for valg av oppgaver og tiltak som inngår i design av en undervisningssekvens.

I metodekapittelet tar jeg utgangspunkt i forskningsspørsmålene mine og argumenterer for hvorfor det er hensiktsmessig å benytte trekk fra designforskingen som metodetilnærming for denne studien. Jeg forklarer hvordan jeg bruker elementer fra denne forskningstilnærmingen til å utvikle en undervisningssekvens som støtter elevene på veien mot å generalisere figurmønstre. Til slutt i kapittelet gjør jeg rede for forskningsobjektene og diskuterer datainnhenting, analyse og forskningsprosjektets etiske betraktninger og gyldighet.

I føranalysen beskriver jeg valgene og refleksjonene som styrer designet av undervisningssekvensen. I denne delen klargjøres de faglige læringsmålene, og jeg kommer med argumenter og begrunnelser for oppgaver, valg og tiltak som styrer utformingen av undervisningssekvensen. Den praktiske gjennomføringen baseres på prinsipper fra hypotetiske læringsbaner og det teoretisk utarbeidete rammeverket.

I analysekapittelet blir en gjennomføring av undervisningssekvensen på femtetrinn analysert, der fokuset ligger på elevutfordringer i arbeidet med generalisering av figurmønstre og tiltak som kan være til hjelp for elevene. Analysene tar utgangspunkt i en åpen koding av datamaterialet. Utfordringene blir kategorisert, og kategoriene blir holdt opp mot det teoretisk utarbeidete rammeverket.

I diskusjonskapittelet reflekterer jeg rundt analysene, med basis i rammeverket. De ulike utfordringsnivåene drøftes ytterligere, og jeg foreslår et revidert rammeverk. Undervisningsøktene blir deretter oppsummert, og jeg drøfter og diskuterer funnene fra analysen. Dette munner ut i konsekvenser for videre undervisning og et forslag til en bearbeidet undervisningssekvens. I tillegg blir analyseresultatene sett i sammenheng med tidligere forskning. Til slutt kommer jeg med noen refleksjoner rundt hvordan undervisning basert på tidlig algebra kan tilrettelegges for elever på barnetrinnet.

2. Teori

Algebrabegrepet og algebra i skolen

Det kan være vanskelig og omfattende å forklare hva algebra er, spesielt hvis man har en forventning om en enkel, entydig definisjon (Lins & Kaput, 2004, s. 48). Kaput (2008), som er en foregangsperson innenfor algebraforskningen, tar utgangspunkt i to ulike aspekter for å beskrive hva algebra er. Det ene er at algebra er noe vi stifter bekjentskap med som en del av kulturarven vår – i form av å registrere systemer og mønstre på en matematisk måte – og denne grenen av matematikken har sitt eget språk (symbolspråket). For det andre handler algebra om tanker, resonnementer, refleksjoner og arbeidsmåter.

Kaput (2008) definerte tre grener av algebra i skolen. De er beskrevet på denne måten (Kaput, 2008, s. 11, egen oversettelse):

1. Algebra som studien av strukturer og systemer hentet ut fra beregninger og relasjoner, for eksempel algebra som generalisert aritmetikk og i kvantitativ tenkning.
2. Algebra som studien av funksjoner, relasjoner og samvariasjoner.
3. Algebra som anvendelsen av modellerende språk, både innenfor og utenfor matematikken.

Denne inndelingen viser at algebra er en integrert del av all matematikk og bør være en sentral del av undervisningen i skolen. Algebra er altså ikke et isolert fagområde, men heller en måte å tenke og løse problemer på som starter på barnetrinnet og varer ut hele skoleløpet (Kaput, 2008).

Kaput (2008) sitt syn på algebra ligger til grunn for flere av valgene jeg tar i denne studien og er avgjørende for valget av litteratur. En god del av teorien jeg bruker er knyttet til Kaputs prinsipper om tidlig algebra, og disse prinsippene sier blant annet at elever på barnetrinnet er i stand til å arbeide med symboler og variabler og relatere disse til aritmetikken. I tillegg vil valget av oppgaver være basert på at elevene i undersøkelsen får muligheten til å tenke, reflektere og resonnere rundt strukturen i ulike figurmønstre. Figurmønsteroppgaver består av matematiske følger av figurer, der hver av dem har et gitt posisjonsnummer. Elevene får her muligheten til å finne relasjoner i mønsteret og oppfordres til å finne en generell regel som beskriver mønsteret (English & Warren, 1998). De skal finne og generalisere dette forholdet og uttrykke det matematisk – enten med ord eller symboler. Tidlig algebra handler altså om å utforske funksjonsforhold, og figurmønsteroppgaver kan være godt egnet til dette formålet.

Tidlig algebra og figurmønstre

Blanton og Kaput (2011) beskriver essensen i tidlig algebra som å kunne generalisere matematiske ideer, kunne representere og begrunne generaliseringene på flere måter og resonnere rundt generaliseringene. Det handler om å gå fra det spesielle (aritmetikk) til det generelle. Mason (1996) mener at generalisering er selve kjernen i matematikk-undervisningen og at en matematikktime uten generaliseringsaktiviteter ikke kan regnes som ordentlig undervisning.

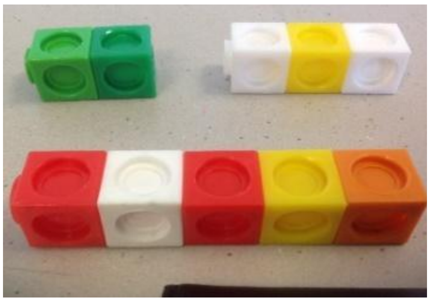
Ideen bak tidlig algebra er at elevene skal trene på å se etter regelmessigheter, relasjoner og egenskaper og handler ikke om *når* algebra skal innføres for elevene, men mer om *hva*, *hvordan* og *hvorfor*. Det dreier seg også om hvordan aritmetikk og algebra er relatert til hverandre. I tidlig algebra arbeides det med at elevene skal forstå situasjonene som beskriver operasjoner og symboler. Målet er ikke å dytte algebra fra ungdomsskolen og videregående ned i grunnskolen, og heller ikke å innføre det som et eget emne i matematikkundervisningen. Det er mer et spørsmål om å generalisere aritmetikken (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2000) og utvide den, slik at elevene forstår de grunnleggende strukturene og egenskapene og utvikler evnen til å identifisere, beskrive og analysere hvordan størrelser varierer i forhold til hverandre (Knuth, Stephens, Blanton & Gardiner, 2016). For eksempel kan en elev som skal løse oppgaven 17 + 18 ta tallet 17, legge til 3 på første ledd og trekke fra 3 fra andre ledd. Dermed blir det nye regnestykket 20 + 15, som er mer håndterlig. Eleven kan foreslå en generalisering ut fra dette: Når du legger til en sum på første ledd og trekker fra samme sum fra det andre leddet, får du samme resultat når du legger sammen de to tallene. Det symbolske uttrykket for forholdet blir da $(a + b) = (a + c) + (bc)$. Elevene skal først kunne uttrykke et slikt forhold med naturlig språk, og senere med et algebraisk språk, og etter hvert kan den algebraiske notasjonen, altså bruk av symboler for mengder og variabler, fungere som en støtte for matematiske resonnementer (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008).

Ideen bak tidlig algebra er å innføre algebraiske prinsipper tidligere enn det man tradisjonelt har gjort i skoleverket. Tanken er at aritmetikken inneholder mange elementer fra algebra, slik eksempelet over viser, uten at det nødvendigvis benyttes algebraisk notasjon. Ifølge Carraher et al. (2008) dreier algebra seg om generalisering innenfor alle matematiske emner, og algebra bør derfor ikke introduseres som et eget emne – og i alle fall ikke så sent som på ungdomstrinnet. Derimot bør algebra introduseres allerede ved begynneropplæringen i matematikk.

Tidlig algebra fokuserer i stor grad på å undersøke og utforske sammenhenger i matematikk, og da gjennom konkretiserings- og visualiseringsoppgaver, eller såkalte *figurmønstre*. Forskningen viser at unge elever kan gjenkjenne mønstre i mange forskjellige sammenhenger. For eksempel kan de identifisere hvordan gjentagende mønstre utvikler seg, og de kan finne generaliseringsuttrykk ut fra figurmønstre som vokser (Cooper & Warren, 2011).

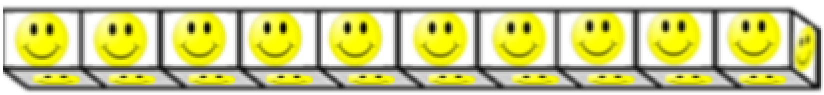
Når elevene skal utvikle forståelse av algebra gjennom mønsteraktiviteter, må de skifte fokus fra en konkret til en generell tilnærming via figurer, tegninger eller konkretiserings-materiell. Lannin (2005) påpeker at elevenes ferdigheter i algebraisk tenkning kan utvikles ved å bruke mønsteraktiviteter, slik at de får hjelp til å bruke det de vet fra før om aritmetikk til å utvikle algebraiske ideer, begreper og prosesser og matematisk kunnskap. Da må elevene først klare å gjenkjenne mønstre (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Warren & Cooper, 2008).

Et figurmønster er en geometrisk representasjon av en tallrekke som forandrer seg etter et bestemt mønster (Karlsen, 2014), altså en visuell representasjon av en situasjon. Måten et mønster er organisert på, kalles for mønsterets struktur (Liljedahl, 2004). I en av oppgavene i undersøkelsen min vil multikuber opptre som et figurmønster. Elevene skal sette sammen disse kubeformede klossene med ulike lengder etter hverandre. Rekken de lager skal hjelpe dem med å finne frem til et generelt uttrykk for hvor mange sideflater på kubene som ikke er i kontakt med andre sideflater – for *n* antall kuber. Målet med oppgaven er altså at de skal kunne uttrykke strukturen i mønsteret algebraisk. Figuren har en konstant og en numerisk verdi som stiger, og denne numeriske verdien bestemmes ut fra veksten i mønsteret. Denne situasjonen kan generaliseres på flere måter (omtales senere i teksten).



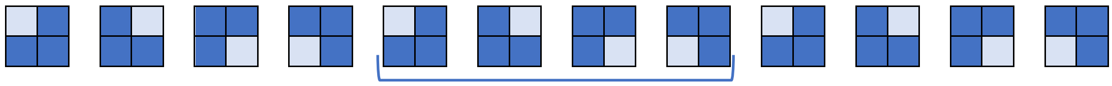
Figur 1 - Multikuber som visualisering

Dette kubeeksempelet vil heretter omtales som *The cube sticker problem*, slik det er beskrevet av Lannin (2005). Her settes klosser etter hverandre i en rekke, og det kan plasseres klistremerker (for eksempel smileansikter) på hver sideflate som ikke ligger inntil en annen (*Figur 2*). The cube sticker problem er utgangspunktet for flere av eksemplene som blir brukt senere i teorikapittelet og blir også grundigere analysert i metodekapittelet.



Figur 2 - Et figurmønster av en rad med 10 kuber

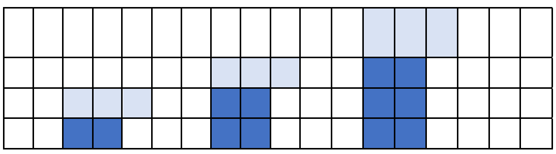
Det er i hovedsak to typer figurmønstre elevene møter tidlig i utdanningsløpet: gjentagende mønstre og voksende mønstre. Liljedahl (2004, s. 33) beskriver et gjentagende mønster slik: «the pattern has a cyclic structure that can be generated by the repeated application of a smaller portion of the pattern». Gjentagende mønster inneholder altså mindre sekvenser av like deler som repeteres. Den mindre delen kan variere i antall, kompleksitet, størrelse, fasong og retning, og kalles ofte for mønsterenheten. Dersom mønsterenheten er AB, vil mønsteret inneholde AB AB AB osv. Figur 3 viser et litt mer komplekst eksempel på et gjentagende mønster og mønsterenheten.



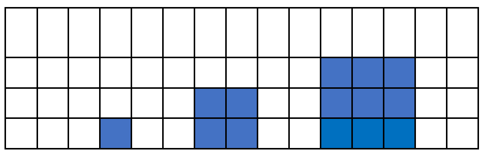
Figur 3 - Mønsterenhet

Vanligvis blir repeterende mønstre brukt til å finne sekvensen på ulike måter. Eksempler på dette er hvis eleven skal finne ut hva som blir neste del i mønsteret, hvilken del det er som gjentas og hvilken del det er som mangler. Disse aktivitetene blir vanligvis referert til som å finne et mønster ut fra et datasett som har én variabel (Blanton & Kaput, 2004), der variabelen er mønsterenheten. Arbeid med slike oppgaver gir elever erfaringer og muligheter til å identifisere og beskrive likheter og forskjeller i mønstre.

Alle typer mønstre kan bidra til at elever begynner å reflektere og resonnere rundt egenskaper i mønstrene, men voksende mønstre gir dem større mulighet til å se sammenhengen mellom to variabler. Backman og Attorps (2012) beskriver voksende mønstre som mønstre som avtar eller vokser systematisk. I realiteten innebærer det at et voksende mønster består av sekvenser av geometriske figurer der hver figur i mønsteret er avhengig av den forrige figuren og posisjonen den har i mønsteret. Hver figur i mønstersekvensen består av mindre komponenter som kan endre seg fra én posisjon til den neste i sekvensen på både en lineær og ikke-lineær måte. Hvis mønsteret vokser med et bestemt antall komponenter, vil det være en lineær sammenheng (Figur 5). Et eksempel på en ikke-lineær sammenheng er det kvadratiske mønsteret som vokser med neste oddetall (Figur 4).



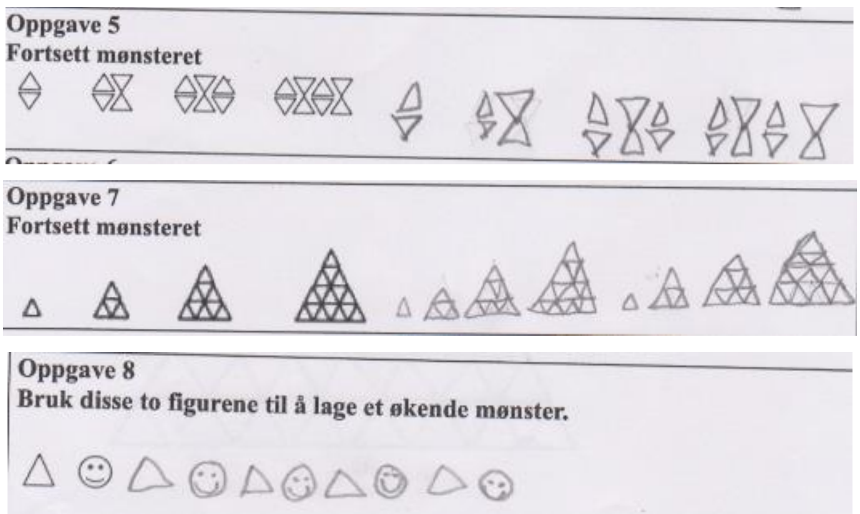
Figur 5 - Lineært mønster



Figur 4 - Kvadratisk mønster

Voksende mønstre inneholder vanligvis to variabler: Den uavhengige variabelen identifiserer posisjonen til figuren i mønsteret, koordinert i et tellesystem, mens den avhengige variabelen er de kvantifiserbare egenskapene ved komponentene i figurene, gitt posisjonen til figuren i mønsteret. Målet med oppgaver som inneholder voksende mønstre er at elevene skal analysere, beskrive og utvide et mønster og til slutt finne én eller flere generelle uttrykk for sammenhengene i mønsteret. Det å beskrive en sammenheng mellom mønsteret og posisjonen i mønsteret, kan altså kalles for en generalisering av figurmønsteret. Mønstrene skaper da en kontekst for elevene, slik at de ut fra strukturen i mønstrene kan generere algebrauttrykk. Det er imidlertid flere studier som viser at elever har problemer med å generalisere mønstre. Eksempelvis undersøkte Becker og Rivera (2005) hvordan niendetrinnselever klarte å generalisere ut i fra voksende mønstre og fant at de fleste elevene greide å utvide mønstrene, men at få av dem klarte å generalisere ved å bruke et algebraisk uttrykk.

Mange elever vil oppleve vanskeligheter med voksende figurmønster fordi de mangler bakgrunnskunnskaper og erfaringer med slike typer mønstre (Warren, 2005). Ifølge Rivera (2013) vil elever på barnetrinnet med lite erfaring med mønstre ofte se etter egenskaper som baserer seg på likheter i mønsteret, for eksempel kan de se på de første sekvensene av figurmønsteret som en gjentagende enhet. Hvis elevene får i oppgave å fortsette på et gitt mønster, vil da enkelte av dem behandle det voksende mønsteret som om det var et repeterende mønster. Et par eksempler (Figur 6) som illustrerer at elever kan se på gjentagende mønster som voksende mønster er hentet fra forundersøkelsen til denne studien.



Figur 6 - Eksempler på at elever tegner gjentagende mønstre i stedet for voksende

Det vil derfor være viktig å klargjøre for elevene hva det innebærer at et mønster er voksende og at et mønster er gjentagende, slik at de klarer å skille de to mønstertypene fra hverandre. Det vil bidra til at de i større grad vil fokusere på struktur og egenskaper som kjennetegner voksende mønstre framfor å fokusere på de repeterende egenskapene.

Generalisering av figurmønstre og elevers argumentasjon

Kaput og Blanton (2001) argumenterte for at undervisning i matematikk bør fokusere på å utvikle elevenes ferdigheter i å generalisere og uttrykke og begrunne generaliseringer. Når elever prøver å generalisere situasjoner, vil de kunne bruke forskjellige metoder og tilnærminger for å komme frem til numeriske beskrivelser av problemet. Disse kan enten være riktige eller gale. Elevene kan også benytte seg av mer enn én strategi i forsøket på å generalisere. Flere studier tar sikte på å forstå og kategorisere hvilke strategier elevene benytter i denne generaliseringen. Lannin (2005) har utarbeidet et rammeverk med en oversikt over strategier elevene bruker når de utleder numeriske generaliseringer fra et mønster (Tabell 1).

Tabell 1- Elevers strategier for å generalisere numeriske situasjoner

Strategi	Beskrivelse
Ikke-eksplisitt	
• Telling	Det blir tegnet et bilde eller laget en modell som representerer situasjonen. Eleven bruker dette til å telle de ønskede egenskapene. Et eksempel kan være at elevene i arbeid med The cube sticker problem lager en rad med kuber av en gitt lengde og teller hvor mange klistremerker som trengs.
• Rekursiv	Denne strategien bygger på at elevene bruker tidligere figurer i mønsteret for å bestemme etterfølgende figurer. For eksempel kan de uttrykke at hver gang man bruker en kube til, må man legge til 4 sider for å finne totalt antall klistremerker som trengs på overflaten av figuren.
Eksplisitt	
• Helhet-objekt	Her blir en del av en enhet brukt til å lage en større enhet ved å bruke multiplikasjon. Eleven kan forklare at det er 10 sideflater på to kuber; da vil det være 20 på 4 kuber. Dette er et eksempel på at en elev mislykkes med å justere for eventuell overtelling, fordi det tas ikke hensyn til at det er to klistremerker for mye.
• Prøve og feile	Strategien innebærer at eleven gjetter seg frem til en formel uten tanke på hvorfor eller om den vil fungere. Vanligvis innebærer dette eksperimentering med bruk av ulike regneoperasjoner og tall fra problemsituasjonen for å tilpasse disse til mønsteret.
• Kontekstuelt	Eleven konstruerer en formel basert på informasjonen som hentes ut av situasjonen. Her vil eleven se en sammenheng mellom figurmønsteret og generaliseringsuttrykket. Et eksempel kan være at en elev sier at alle klossene har 4 sideflater. I tillegg må man legge til 2, fordi det også er en sideflate på hver ende. Antallet sideflater som ikke er i kontakt med andre sideflater blir derfor 4 multiplisert med antallet klosser pluss 2 for de to endeflatene.

Lannin (2005) fokuserer på at det ikke er mulig å skille elevenes generaliseringer fra begrunnelsene deres og at disse aktivitetene må sees i sammenheng, fordi de er nært knyttet til hverandre. Begrunnelsen fungerer nemlig som et svar på i hvilken grad elevene har generalisert, og i hvilken grad de har funnet en akseptabel begrunnelse. Begrunnelsen blir sett på som gyldig hvis den kobler generaliseringen opp mot problemsituasjonen og er knyttet til visualiseringen av situasjonen.

Rekken av klosser vil fungere som visualisering i The cube sticker problem. For at læreren skal kunne fastslå hvordan elevene utvikler formlene og hvordan de beskriver generaliseringene sine, er det nødvendig at de begrunner valgene sine. For eksempel vil en elev som arbeider med The cube sticker problem kunne komme med utsagnet: «Ved å multiplisere antallet klosser med 4 og legge til 2, ser vi hvor mange flater som er dekket.» Begrunnelsene gir dermed læreren informasjon og innsikt i hvilke strategier elevene bruker, og med bakgrunn i denne informasjonen kan læreren eventuelt komme med tiltak for å rettlede elevene i det videre arbeidet.

Lannin (2005) deler elevenes begrunnelser inn i fem forskjellige nivåer, og disse nivåene viser en utvikling i evnen til å begrunne. Nivåene forklares på følgende måte: På det laveste nivået (0) foreligger det ingen begrunnelser. På nivå 1 henvises det til en ekstern autoritet, for eksempel en lærer eller lærebok. En elev kan for eksempel si at antallet klistremerker på en rekke av fire kuber er 18, fordi han hadde hørt at læreren hadde sagt det. På det neste nivået (2) viser elevene til empiriske eksempler. Egenskaper for enkelttilfellet vil da kunne representere egenskapene for mange eller alle tilfeller. Her vil elevene kunne si at generaliseringen stemmer fordi en del utvalgte enkelteksempler passer med det som generaliseres. I The cube sticker problem kan for eksempel en elev komme frem til en generalisering som kan beskrives med formelen $4 \cdot n + 2$ og mene at denne stemmer for alle verdier, siden den stemmer når det er 10 klosser i rekken. Elever på nivå 3 henviser derimot til et generisk eksempel. Det innebærer at det tas utgangs-punkt i en bestemt del av mønsteret og at formelen kan stemme i dette tilfellet, men i realiteten kan formelen benyttes for hele mønsteret. Et eksempel fra kubeproblemet kan være hvis en elev sier: «Det er antall kuber ganget med 4, fordi du har 4 på hver side. Pluss de to du har på endene. Da blir det 42 hvis lengden er 10». Her begrunnes strategien gjennom relasjoner mellom posisjonen og egenskaper i figurrekken. Det øverste nivået (4) er deduktiv argumentasjon. Da tas det ikke utgangspunkt i enkeltdeler av mønsteret. Her er begrunnelsene til eleven i større grad løsrevet fra figuren, og det benyttes generelle uttrykk til å støtte begrunnelsene. Et eksempel på deduktiv argumentasjon kan være: «Siden en rekke av kuber har fire sidekanter så vil 4-tallet tilsvare antallet sider på kubene, mens symbolet n vil representere lengden av antallet kubber. I tillegg vil det være en konstant 2 som illustrerer de to endekantene på kuberekken. Da vil formelen $4 \cdot n + 2$ uttrykke sammenhengen mellom antallet kuber og antallet klistremerker for enhver kubelengde».

Elevers utfordringer i arbeid med generalisering av figurmønstre

Generalisering er en avgjørende komponent i matematisk aktivitet, men oppfattes som vanskelig for elever å lykkes med og krevende for lærere å støtte effektivt (Ellis, 2011), og flere faktorer kan påvirke i hvilken grad elevene klarer generalisere et mønster. Lee (1996) har identifisert flere utfordringer underveis i generaliseringsprosessen og fant at det var vanlig at disse utfordringene gjentok seg når elevene arbeidet med de ulike aktivitetene. Disse utfordringene deler hun inn i tre nivåer: *oppfattelsesnivået*, *verbaliseringsnivået* og *symboliseringsnivået*. Hvert nivå har sine kjennetegn, men det er glidende overganger mellom de ulike nivåene. Siden jeg designer et undervisnings-opplegg som i hovedsak har til hensikt å hjelpe femtetrinnselever til å generalisere ut fra visuelt voksende mønstre, vil disse nivåene være et nyttig utgangspunkt for planleggingen av undervisningsdesignet. Sammen med annen relevant teori og egne erfaringer fra læreryrket danner Lees nivåer grunnlaget for undervisningsdesignet som presenteres nærmere i kapittel 4. Jeg vil i det følgende gjøre rede for de tre ulike nivåene og knytte dem opp mot relevant teori. Deretter vil jeg ta for meg konsekvensene disse har for matematikkundervisningen, før jeg til slutt beskriver analyseredskapet jeg benytter i analysen av gjennomføringen av undervisningssekvensen.

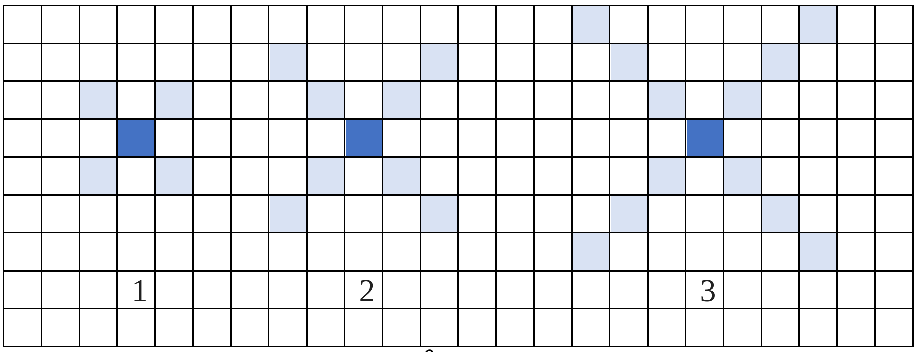
Utfordringer knyttet til oppfattelsesnivået

Noen av utfordringene Lee (1996) identifiserer er knyttet til oppfattelsesnivået og omfatter hvordan elever ser og tolker et mønster. Det er mange måter å se eller strukturere noe på, og mønsteroppfatning er derfor individuelt. I The Cube Sticker Problem kan for eksempel en elev se figurmønsteret som bestående av to endekuber med fem klistremerker og (n-2) kuber med fire klistremerker. En annen elev kan se på mønsteret som en kuberekke av n kuber med fire sidekanter og to endekanter. Det handler om det Mason (1996) beskriver som «seeing a generality through the particular and seeing the particular in the general». Når eleven finner et mønster, er dette første skritt mot å se en sammenheng, og elevene kan tenke ulikt når de leter etter denne sammenhengen: Det kan variere hvordan de dekomponerer figurmønstrene til mindre deler. Selv om de ser en sammenheng, er det likevel ikke selvsagt at de kommer frem til en generalisering.

Ifølge Lee (1996) er ikke problemet om elevene klarer å se et mønster, men om de klarer å se et mønster som er algebraisk nyttig – altså at det de har oppfattet er til hjelp for dem når de skal uttrykke et mønster algebraisk. Det handler om å kunne finne en sammenheng mellom de to samvarierende mengdene som strukturen i et mønster kan representere. I tillegg påpeker Lee at når elever oppfatter et mønster på en bestemt måte, er det ofte vanskelig for dem å endre disse oppfatningen og å se mønsteret på nye måter. Derfor bør elevene trene på å utvikle fleksibilitet, slik at de kan se mønsteret på flere måter og dermed klarer å legge bort de metodene som ikke fører frem. Elevene trenger støtte og hjelp til dette, for å kunne utforske mønsteret og produsere et uttrykk som matematisk oversetter den underliggende strukturen i mønsteret (Barbosa & Vale, 2015). Et eksempel er hvis elevene bruker en rekursiv strategi for finne posisjon 10 i The Cube Sticker Problem. Denne tilnærmingen vil ikke fungere for å finne et uttrykket for ethvert tilfelle. Da kan det være nødvendig for læreren å hjelpe dem til å fokusere på hvordan kubemønsteret er oppbygd, slik at de kan se sammenhengen mellom antallet kuber og antallet klistremerker plassert på overflaten.

Elevene kan uttrykke generaliseringene sine på flere forskjellige måter, og i hvilken grad de klarer å generalisere vil åpenbart være avhengig av vanskelighetsgraden på oppgavene (Rivera, 2018). Designet av oppgavene, som for eksempel strukturen i figurmønsteret, vil kunne påvirke hvilke strategier elevene bruker og om de lykkes med å komme frem til en generalisering. Sasman, Olivier og Linchevski (1999)skiller mellom *transparente* og *ikke-transparente* figurmønstre. Transparente figurmønstre beskrives som mønstre der det er mulig å se generaliseringen ut fra strukturen i figurmønsteret. Elevene må kunne dele opp figurmønstrene i mindre deler for å klare å finne strukturen og sammenhengene og dermed se et matematisk nyttig mønster (Duval, 1998). Et eksempel på et transparent mønster er kryssmønsteret som er vist i Figur 7. I dette mønsteret er det flere ekvivalente algebraiske uttrykk som kan utrykke mønsteret, avhengig av hvordan figuren dekomponeres.

En måte å se mønsteret på, kan være: Kvadratet i sentrum er konstant for hver posisjon, og hver «stråle» har like mange kvadrater som den tilhørende posisjonen. Dette gir generaliseringsformelen: $g(n) = 4 \cdot n + 1$, der $g(n)$ angir antall kvadrater for en figur nummer n.

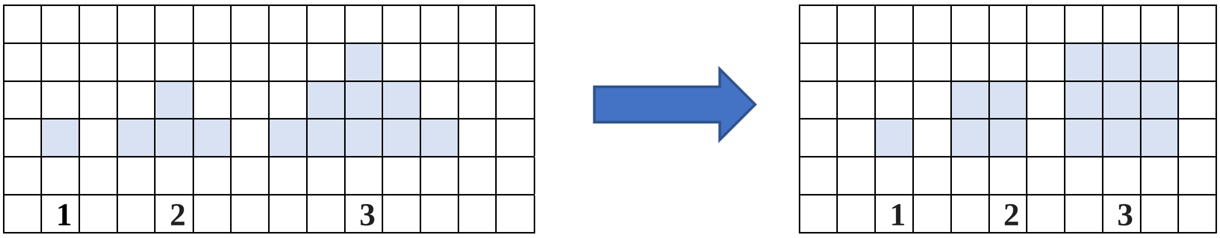


Figur 7 - Et eksempel på et transparent figurmønster

I ikke-transparente figurmønstre er det vanskeligere å oppdage generaliseringen som ligger til grunn ved bare å observere figurene i sekvensen. I disse tilfellene kan læreren støtte elevene ved å på forhånd tenke ut mulige strategier som kan hjelpe elevene med å dekomponere mønsteret. For eksempel kan det være hensiktsmessig å oppfordre elevene til å dele opp figurene i mindre deler og se etter deler som endrer seg eller er konstante.

Rivera, Knott og Evitts (2007) anbefaler å oppmuntre elever til å manipulere og omdanne mønstrene til enklere former som gjør det enklere for dem å se strukturen i mønsteret. Et eksempel på dette er vist i

Figur 8, der et pyramidemønster kan omformes til et kvadratisk figurmønster som består av $n \cdot n$ kvadratiske enheter. I det siste mønsteret vil det bli enklere for elevene å se at sammenhengen mellom posisjonen, n, i mønsteret og antallet små kvadrater, k(n), tilsvarer kvadratet av posisjonen: $k(n) = n^2$



Figur 8 – Det å endre plasseringen på brikkene i mønsteret kan bidra til at det blir enklere å se sammenhengen mellom posisjonen og antallet brikker.

En annen viktig faktor ved oppgaven som kan påvirke generaliseringen, er hvilke inngangsverdier som velges for den uavhengige variabelen i generaliseringsoppgaven. Warren og Cooper (2008) anbefaler å øke inngangsverdiene gradvis, for da har elevene mulighet til å se og snakke om sammenhengene i mønsteret for økende posisjoner. I tillegg legger Cooper og Warren (2011) og Britt og Irwin (2011) vekt på at elever bør arbeide med kvasigeneralisering før de begynner å generalisere med bruk av symboler. Dette innebærer at elevene jobber med store tall som eksempler på ethvert tall før de kommer frem til generalisering gjennom språk eller symboler (Cooper & Warren, 2011). Argumentasjonen er at det å jobbe med store tall som eksempler på ethvert tall i vesentlig grad vil bidra til at elevene oppfatter strukturen i figurmønsteret, slik at de i større grad klarer å uttrykke generaliseringen muntlig og ved hjelp av symboler.

Becker og Rivera (2006) skiller mellom numerisk og figurativ generalisering. Hvilken tilnærming som blir brukt har betydning for hvorvidt elevene lykkes med generaliseringene sine. Elever som i hovedsak ser etter numeriske tilnærminger for å komme frem til et mønster vil ofte bruke kjente verdier fra oppgaven og egne utregnede verdier utledet fra disse. Elevene kan benytte ulike prøve-og-feile-strategier, der de forsøker å tilpasse tall og verdier fra figurmønsteret til en generell formel. Elever som bruker disse strategiene aktivt, har liten eller ingen forståelse for relasjonen mellom figurmønsteret og regneoperasjonene de benytter (Becker & Rivera, 2006). De kan samtidig ha liten erfaring med hvor viktig det er å observere egenskapene til strukturen i mønsteret. Ifølge Barbosa og Vale (2015) kan dette skyldes at mange elever assosierer matematikk med det å manipulere tall, talluttrykk og algoritmer. Elever som anvender en numerisk tilnærming ser ofte ikke hva koeffisienten og konstanten i et figurmønster representerer. I kubeeksempelet vil derfor disse elevene ha vanskeligheter med å komme frem til en generell formel for antallet flater uttrykt som en funksjon av *n* antall kuber, fordi de ikke ser sammenhengen mellom kubene og den matematiske formelen de skal utforme. Derimot vil elever som fokuserer mer på det geometriske mønsteret i større grad se sammenhengen i figuren, og for dem har variablene flere funksjoner enn å være plassholdere (Ely & Adams, 2012). De er nærmere å forstå hva en variabel og en koeffisient kan stå for enn de elevene som kun bruker en numerisk tilnærming. Et eksempel kan være at en elev som tar utgangspunkt i det samme kubeeksempelet generaliserer og kommer frem til formelen $S(n) = 2 + 4 \cdot n$, etter å ha forstått at 2 beskriver de to endene av kuberekken og dermed representerer konstanten i generaliseringsuttrykket, samt at $4 \cdot n$ tilsvarer de fire sidekantene på kubene som ikke ligger inntil en annen kube. Den numeriske og den figurative tilnærmingen viser to forskjellige generaliseringsstrategier, der elevene som bruker den figurative metoden har størst forutsetning for å se sammenhengen mellom strukturen i figurmønsteret og det algebraiske uttrykket.

Utfordringer knyttet til verbaliseringsnivået

En annen utfordring Lee (1996) fant i studien sin var knyttet til verbaliseringsnivået og omhandler hvorvidt elevene muntlig klarer å uttrykke mønsteret presist. Warren (2006) hevder at bruk av det naturlige språket for å beskrive en generalisering av et figurmønster er en nødvendig forutsetning for å kunne utvikle en hensiktsmessig algebraisk notasjonsstrategi. Et lignende funn er gjort av MacGregor og Stacey (1995), som antyder at korrekte muntlige beskrivelser har større sannsynlighet for å føre til korrekte algebraiske uttrykk, og at elever som finner en korrekt generalisering vanligvis mestrer å uttrykke dette forholdet verbalt. I en senere artikkel av de samme forfatterne Stacey og Macgregor (2001) påpeker de også betydningen av å ha en fase der elevene har mulighet til å uttrykke seg verbalt i prosessen med å gjenkjenne en regel og uttrykke den algebraisk. Det innebærer at elevene bør få muligheten til å uttrykke sammen-hengene i mønsteret muntlig før de begynner å oversette disse sammenhengene til en algebraisk skriftlig notasjon. Utfordringer knyttet til verbaliseringsnivået vil derfor være viktig å ta hensyn til for læreren. Når elever uttrykker og beskriver strukturen i et mønster muntlig, har læreren mulighet til å få innsikt i hvordan de ser på mønsteret. Da vil det bli lettere å veilede dem og stille oppklarende spørsmål som kan lede dem i riktig retning.

Ifølge Warren (2005) har flere elever utfordringer med å beskrive mønstrene muntlig på en tydelig og presis måte, noe hun mener kan skyldes at flere elever ikke har utviklet et hensiktsmessig fagspesifikt ordforråd for å kunne uttrykke sammenhengene i mønsteret. Ifølge Marzano og Pickering (2005) kan et fagspesifikt ordforråd beskrives som ord som tradisjonelt brukes i faglige samtaler og undervisning og som er avgjørende for å forstå innholdet som skal læres. Språket i matematikk kan være spesielt krevende for elevene, fordi det er komplekst, innholdsbetinget og svært abstrakt (Kouba, 1989). De fagspesifikke begrepene i arbeid med figurmønster kan for eksempel være *voksende mønster*, *rader*, *kolonner*, *formel* og *variabel*, og i generaliseringsoppgaver kan det være vanskelig for elevene å skifte fra et uformelt språk til et mer formelt matematikkspråk. Læreren spiller en viktig rolle når det gjelder å hjelpe dem med å utvikle det matematiske ordforrådet, og Schleppegrell (2007) foreslår at læreren oppfordrer og oppmuntrer elevene til å bruke fagspesifikke begreper i diskusjoner og oppgaver. Dermed vil elevene kontinuerlig bevisstgjøres på de ulike begrepene og når og hvordan de brukes.

For at elever skal opparbeide seg ferdigheter i å bruke fagspesifikke begreper er det nødvendig at læreren planlegger hvordan og i hvilken rekkefølge begrepene skal undervises og hvordan de fagspesifikke begrepene skal forklares og defineres for elevene. Når et nytt emne eller begrep skal innføres, er det viktig å velge problemer og begreper som elevene har et forhold til eller har informasjon om fra før. Vacca og Vacca (2005) mener at når problemer og utfordringer knyttet til et tema er diskutert og planlagt, må læreren avgjøre om de sentrale begrepene skal introduseres før eller etter at elevene har begynt å utforske det matematiske innholdet. For eksempel når ord som *voksende mønster, rad, kolonne, formel/funksjon* og *variabel* skal innføres i tilknytning til generaliseringsaktivitetene i dette forsøket, må det tas i betraktning hvorvidt elevene klarer å jobbe med og løse generaliseringsoppgaven før begrepene har blitt introdusert. Hvis de klarer det, kan det være lønnsomt å innføre begrepene i etterkant. Hvis problemet eller oppgaven derimot ikke kan løses av elevene uten kjennskap til begrepene, bør de beskrives og forklares på en slik måte at elevene får nok kunnskaper om dem til å støtte opp om den nye læringen.

Warren (2005) foreslår tre andre tiltak lærerne bør anvende for å utvikle språket til elevene, slik at de lettere klarer å uttrykke og beskrive mønsteret muntlig. For det første anbefaler hun at forholdet mellom mønstrene og posisjonen er tydelig/eksplisitt, fordi slike typer mønstre hjelper elever til verbalt å beskrive sammenhengen mellom mønsteret og posisjonen i mønsteret. Det innebærer at det er en tydelig sammenheng mellom mønsteret og posisjonen. Mønstrene elevene arbeider med, bør også være transparente. For det andre vil det være hensiktsmessig å bruke konkretiserings-materiell, siden dette kan hjelpe elevene med å snakke om mønsteret og fastslå hvordan mønsteret ser ut for en gitt posisjon. Hvis elevene skal finne ut hvordan et mønster ser ut i posisjon åtte, kan de bruke brikker for å lage det åttende trinnet. Dette kan stimulere til samtaler mellom elevene om hvor mange og hvilke brikker de skal bruke for å lage mønsteret i den gitte situasjonen. For det tredje bør læreren stille spørsmål og komme med kommentarer som rettleder elevene til å fokusere på mønsteret i forhold til posisjonen i mønsteret. I denne sammenhengen er det viktig for læreren å fokusere på hvordan man uttrykker seg muntlig når mønsteret omtales.

Det verbale språket er også viktig når elevene skal begrunne generaliseringene sine (Warren, Miller & Cooper, 2013), men elever har gjerne vansker med å begrunne dem på en tilstrekkelig måte. Lannin (2005) fant at elever sjelden begrunner generaliseringene sine, ettersom de fokuserer for mye på verdiene de bruker i oppgaven fremfor de generelle relasjonene i mønstrene. Mange elever tror at hvis de kommer med noen talleksempler (selv ett eller to) som illustrerer generaliseringen, er det en tilstrekkelig begrunnelse (Radford, 1996), men det er ikke før elevene bruker generiske eksempler – der de beskriver generaliseringene ut fra delene av mønsteret – at det kan regnes som en matematisk gyldig begrunnelse. Det er derfor ønskelig å få elevene til å begrunne generaliseringene sine på dette nivået. I utgangspunktet kan begrunnelsen være både skriftlig og muntlig, men siden jeg i denne studien stort sett har fokusert på de muntlige samtalene mellom elevene, er det de muntlige begrunnelsene deres som blir omtalt.

Generalisering og begrunnelse omtales som viktige elementer i algebra, og Blanton og Kaput (2002) argumenterer for det på følgende måte: «Justification in any form is a significant part of algebraic reasoning, because it includes a habit of mind whereby one naturally questions and conjectures in order to establish a generalization» (s. 24). De mener altså at begrunnelsen bør være en viktig del av generaliseringen, fordi den bidrar til at elevene stiller spørsmål og reflekterer rundt hvorfor de bruker generaliseringsstrategiene sine og hvorfor de gjelder for alle eller tilsvarende tilfeller. I matematikkundervisningen bør læreren oppmuntre elevene til å dele strategier med hverandre og diskutere fordeler og ulemper ved bruk av ulike strategier. Ifølge Ellis (2011) er begrunnelser en måte å støtte generalisering på, og lærere bør konsekvent be elevene om å begrunne generaliseringene sine ved at de forklarer hvorfor formelen kan gjelde for alle tilfeller, og ikke bare det spesifikke eksempelet.

Utfordringer knyttet til symboliseringsnivået

Det siste nivået som Lee (1996) omtaler, er utfordringer knyttet til symboliseringsnivået og omfatter vansker elevene kan oppleve når de skal overføre de matematiske sammenhengene i figurmønsteret til algebraiske symboler i form av en matematisk formel. De skal altså resonnere seg frem til et algebraisk uttrykk ut fra figurmønsteret som ligger til grunn for oppgaven ved å se sammenhengen mellom den uavhengige og den avhengige variabelen, altså figurens posisjon og antall komponenter i figuren.

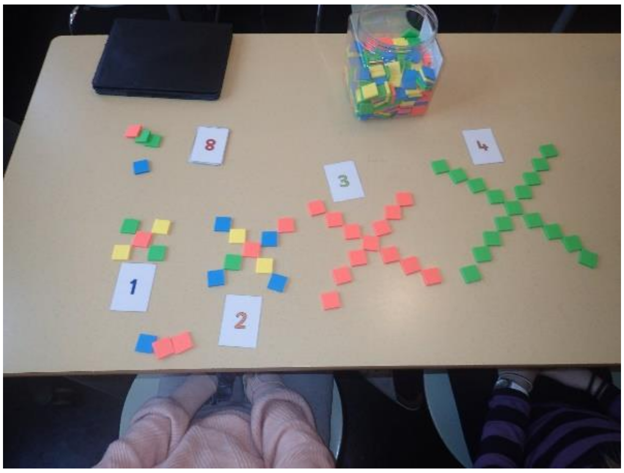
Her kan det være utfordrende å beskrive funksjonsrelasjonen i et mønster med et symbolspråk (Johansen, 2011). Elevene må ta utgangspunkt i den muntlige beskrivelsen av strukturen i figurmønsteret og prøve å transformere innholdet i det muntlige språket over til symbolnivået (Duval, 2006). Dette kan spesielt være vanskelig for elever som ikke har jobbet så mye med symbolbruk tidligere. Tilnærmingen var da også ny for de fleste av femtetrinnselevene i min studie.

For at elevene skal klare å komme frem til en algebraisk beskrivelse av mønsteret må de ha erfaring med symboler. Tradisjonelt er elevenes første møte med et symbol ofte enkle ligninger der den ukjente representerer et ukjent tall. I situasjoner knyttet til voksende figurmønstre, vil symbolene vanligvis representere mengder som endrer seg, symbolet vil altså representere en variabel (Ely & Adams, 2012). I det tidligere nevnte kubeeksemplet vil for eksempel antall klistremerker representere den avhengige variabelen, mens antallet kuber er den uavhengige variabelen. Denne overgangen fra et symbol som et ukjent tall til et symbol som en varierende mengde kan være vanskelig for elever å mestre. Wagner og Kieran (1989) beskriver det på følgende måte:

> «Another idea that seems difficult for students to apprehend fully is the notion that a single symbol can represent many quantities at the same time. In the case of variables, students work first with (single-valued) unknowns and with expressions, in which only one value at a time can be substituted, so it is not surprising that the leap to relational variables is cognitively exactly that—a leap, not a small step.» (s. 222-223)

Det å forstå at et symbol kan representere flere verdier, kan altså være et stort mentalt sprang for elevene. Gardella og Tong (2002) argumenterer for at symboler ikke bør innføres før elevene har innsikt i matematikken de representerer. English og Warren (1998) anbefaler å gi elevene erfaring i å beskrive sammenhengen i mønsteret numerisk og verbalt, før læreren gradvis viser hvordan disse verbale og numeriske uttrykkene kan oversettes til algebrasymboler. Det er derfor viktig i undervisningen å klargjøre hva en variabel er, hvordan den kan uttrykkes i form av en bokstav eller et annet symbol, og hvordan dette danner grunnlaget for å beskrive en formel ut fra strukturen i mønsteret.

For at elevene skal se en sammenheng mellom den uavhengige og den avhengige variabelen i et voksende mønster må posisjonen – uttrykt som den uavhengige variabelen – være tydelig og meningsfull for dem. Elever som ikke greier å sette en merkelapp på den uavhengige variabelen, vil måtte fokusere på en rekursiv tilnærming, fordi de ikke vil ha variabelen eller posisjonen som referanse til å skape en funksjons-sammenheng. For at de skal få en indikasjon på at posisjonen er viktig, kan de for eksempel bruke posisjonskort (Figur 9) til å merke hvilken figur som hører til hvilken posisjon.



Figur 9 - Posisjonskort

Beatty og Moss (2006) er blant dem som har påpekt at slike posisjonskort både kan brukes til å merke den uavhengige variabelen og å skape oppmerksomhet rundt den. Warren og Cooper (2008) gjennomførte et forskningsprosjekt på barnetrinnet der elevene selv skulle lage det fysiske mønsteret og plassere posisjonskort på hvert trinn i mønsteret. Forskerne fant at slike kort hjelper elevene til å begynne å lete etter en sammenheng mellom posisjonen og antallet brikker på den tilhørende figursekvensen. Elevene i prosjektet hadde tidligere brukt en rekursiv tilnærming til å beskrive veksten i mønsteret, men posisjonskortene hjalp dem med å identifisere en eksplisitt sammenheng mellom posisjonen og generaliseringsuttrykket.

Oppsummering og noen konsekvenser for matematikkundervisningen

Arbeid med figurmønstre beskrives av Kaput (2008) som en viktig måte å tilnærme seg algebra på. Sammenhengene elevene finner kan utrykkes symbolsk i form av en eller flere ekvivalente generaliseringsformler. Femtetrinnselevene i denne studien får da muligheten til å generalisere, representere, begrunne og resonnere rundt strukturen og de matematiske sammenhengene i mønsteroppgavene. Blanton, Levi, Crites, Dougherty og Zbiek (2011) omtaler dette som de fire algebraiske kjerneaktivitetene. I arbeidet med disse aktivitetene vil imidlertid elevene oppleve utfordringer på flere nivåer, for eksempel fordi de vil møte situasjoner, oppgaver, tankemåter og strategier som de ikke har hatt så mye erfaringer med tidligere. Dette stiller krav til at det blir utarbeidet undervisning som støtter elevene i generaliseringsarbeidet.

Kaput (1999) utfordrer lærerne til å gjøre algebra tilgjengelig for flest mulig elever, og da å finne undervisningssituasjoner som legger til rette for at elevene får innsikt i og utvikler ferdigheter i arbeidet med å generalisere, representere, begrunne og resonnere. Jeg ønsker derfor å utvikle et undervisningsopplegg som er basert på forslag og prinsipper fra relevant forskningslitteratur, og som ivaretar utfordringene på oppfattelses-, verbaliserings-, og symboliseringsnivået. Det krever blant annet kunnskap om elevene og deres faglige bakgrunn, egnetheten til ulike oppgaver, hvilke strategier elevene mest sannsynlig vil anvende og hva målet for undervisningen skal være. Alle disse momentene må det tas hensyn til i planleggingen av undervisningen, og jeg vil presentere dem i detalj i kapittel 4.

Lærerens rolle underveis i undervisningen vil også være avgjørende for om elevene lykkes i generaliseringsarbeidet. Læreren må ta i bruk de pedagogiske virkemidlene som forskningslitteraturen anbefaler og som legger til rette for algebraiske resonnementer og hensiktsmessige strategier. Det kan hjelpe elevene i generaliseringsarbeidet om læreren introduserer posisjonskort, konkretiseringsmateriell og fagspesifikke begreper, samt fokuserer på å dekomponere mønstrene i mindre deler og å etablere strategier for å identifisere sammenhenger mellom posisjon og avhengig variabel. Læreren har altså en avgjørende rolle når elevene skal utvikle algebraiske ferdigheter, og Carraher og Schliemann (2018) beskriver det på følgende måte:

> Although children may be capable of learning algebra from an early age, realizing this potential is not a simple matter of unleashing their capabilities. Algebra draws on ways of reasoning, kinds of problem situations, and systems of representation (notation, graphs, number line diagrams, certain ways of formulating relations in spoken language) that a child will generally not learn about, much less invent, on her own. (s. 134)

De mener altså at elever i liten grad vil klare å utvikle tilstrekkelige algebraiske ferdigheter uten stødig og kyndig hjelp fra læreren i arbeidet med generaliseringsoppgavene, siden det finnes så mange faktorer – eksempelvis selve oppgaveformuleringen, sammenhengene, det matematiske språket og de fagspesifikke begrepene – som de antageligvis ikke vil finne ut av på egen hånd.

Analyseredskap

Jeg har tatt utgangspunkt i de tre nivåene av utfordringer som Lee (1996) skisserer og går her mer i dybden for å finne ut hva som ligger i dem, siden Lee ikke presiserer hva de konkret omfatter. På bakgrunn av teorien jeg har presentert tidligere, har jeg laget en oversikt over hvilke teoretisk forankrede utfordringer som kan oppstå når elever skal generalisere ut fra mønsteraktiviteter (Tabell 2).

Tabell 2 - Utfordringer elever kan møte i arbeidet med mønsteraktiviteter.

Utfordringer knyttet til	Kort beskrivelse av utfordringene, med eksempler
Oppfattelsesnivået	
• Å se et algebraisk nyttig mønster (se f. eks. Lee (1996))	Elever klarer å se et mønster, men det trenger ikke å være algebraisk nyttig. Et eksempel er hvis elevene bruker en rekursiv strategi i arbeidet med et mønster. Denne strategien vil ikke fungere for å kunne uttrykke ethvert tilfelle.
• Å bruke numeriske tilnærminger, framfor figurative strategier (Becker & Rivera, 2006)	Elevene kan benytte ulike prøve-og-feile-strategier, der de forsøker å tilpasse tall og verdier fra figurmønsteret til en generell formel
Verbaliseringsnivået	
• Å uttrykke mønsteret presist (Warren, 2005)	Elever har vansker med å beskrive et mønster tydelig. For eksempel kan en elev beskrive kryssmønsteret (Figur 7) for posisjon 10 som: Det er 40 brikker pluss 1 brikke. Her er det ingen beskrivelse av hvordan mønsteret ser ut.
• Å begrunne generaliseringene tilstrekkelig (se f. eks. Lannin, 2005)	Elevene kan ha vansker med å begrunne generaliseringene, og mange bruker utilstrekkelige begrunnelser. I The cube sticker problem kan for eksempel en elev si at formelen $4 \cdot n + 2$ stemmer for alle verdier, fordi den gjør det for ti klosser i rekken.
Symboliseringsnivået	
• Å innse at et symbol kan representere mange verdier (se for eksempel Wagner og Kieran (1989))	Elever kan ha vanskeligheter med at et symbol kan representere flere verdier. I The cube sticker problem kan for eksempel en elev si at formelen for enhver kube er $4 \cdot n + T$, og der T alltid er 2 (endene på kuben.
• Å bruke symboler for å beskrive den matematiske operasjonen (se f. eks. Johansen, 2011)	Elever kan ha vansker med å beskrive funksjonsrelasjonen i mønsteret med algebraiske symboler. De skriver formelen på feil måte, selv om de har beskrevet den muntlig rett.

Tabellen har fungert som et utgangspunkt ved planlegging og design av undervisningen på femtetrinn. Den gir meg informasjon om hvilke utfordringer elevene kan støte på, og med slik informasjon er det også lettere å foreslå tiltak som kan hjelpe elevene i arbeidet med generaliseringsaktivitetene. Den vil også, sammen med rammeverkene til Lannin (2005) om generaliseringsstrategier og begrunnelser, fungere som et rammeverk når jeg analyserer gjennomføringen av undervisningssekvensen.

I studien vil jeg videre sammenligne og sammenstille utfordringene fra det egenkomponerte, teoribaserte rammeverket med de utfordringer jeg finner fra analysene av datamaterialet mitt, for å se om det finnes nyanser eller andre utfordringer som kommer frem i analysen og som kan brukes til å videreutvikle og justere rammeverket. Analyseprosessen er nærmere beskrevet i siste del av kapittel 5.

3. Metodologi

I dette kapittelet vil jeg beskrive forskningsmetodologien som gjør det mulig å kunne svare på forskningsspørsmålene i studien. Først vil jeg ta utgangspunkt i forskningsspørsmålene og argumentere for hvorfor designforskning er en hensiktsmessig tilnærming. Deretter vil jeg gå i dybden på hva som kjennetegner designforskning og forklare hvordan jeg vil bruke elementer fra denne forskningstilnærmingen som utgangspunkt for å utvikle en undervisningssekvens som støtter elevene i arbeidet med å generalisere figurmønstre. Videre gjør jeg rede for valget av forskningsobjekter, før jeg tar for meg forskningsprosjektets etiske betraktninger og gyldighet, datainnhenting og -analyse og diskuterer til slutt de metodiske utfordringene.

Flere forskere, blant andre Amiel og Reeves (2008) og Burkhardt (2006), hevder at designforskning er en langsiktig forskningstilnærming som inneholder flere runder med design, utvikling og revidering. Selv om designforskning danner utgangspunktet for forskningsstudiene min og jeg har benyttet flere karakteristiske trekk fra denne metodologien, gjorde rammevilkårene for denne studien det vanskelig å få gjennomført og optimalisert undervisningssekvensene med redesign og ny utprøving av designet. Med bakgrunn i disse synspunktene på hva designforskning er, velger jeg derfor å moderere metodologien i studien min til å være *en metodologi som er basert på trekk fra designforskningen*. De trekkene som jeg bruker fra denne forskningstilnærmingen blir omtalt senere i dette kapittelet.

Forskningsspørsmålets konsekvenser for valg av metoder for datainnhenting

Målet med studien er å kunne svare på de to forskningsspørsmålene som ble presentert i innledningskapittelet:

- Hvilke utfordringer møter en gruppe femtetrinnselever i arbeid med generalisering av figurmønstre?
- Hvordan kan en undervisningssekvens støtte en gruppe femtetrinnselevers arbeid med generalisering av figurmønstre?

For å kunne svare på det første forskningsspørsmålet er det først nødvendig å observere og analysere hvordan elevene jobber med generalisering av figurmønstre med forankring i relevant teori og rammeverket som er presentert i Tabell 2 - Utfordringer elever kan møte i arbeidet med mønsteraktiviteter. Deretter gjennomfører jeg en empirisk undersøkelse for å få mer innsikt i utfordringene til elevene og ser funnene opp mot det teoretiske rammeverket. Deretter utvikles det, ut fra datamaterialet fra studien, kategorier som beskriver utfordringene. Nærhet til situasjonene som oppstår vil være en fordel når disse kategoriene skal utvikles. Utfordringene belyses opp mot rammeverket for å se om det finnes nyanser eller momenter som det ikke er tatt hensyn til i rammeverket.

Det andre forskningsspørsmålet krever et prediktivt eller rådgivende svar i form av føringer og retningslinjer for hvordan generaliseringen av figurmønstrene kan oppnås. «Hvordan»-spørsmålet legger ikke føringer på om man finner den beste undervisnings-sekvensen, så lenge man finner en sekvens som fungerer, men det krever at sekvensen består av gjennomarbeidede og velbegrunnede retningslinjer for hvordan undervisningen av figurmønstrene skal fungere. Funn fra analysene vil også kunne vise i hvilken grad undervisningssekvensen er egnet til å støtte elevene i arbeidet med generalisering av figurmønstre og danne grunnlaget for revideringer av undervisningssekvensen.

Jeg ønsket å designe en undervisningssekvens som virket motiverende og som samtidig var teori- og forskningsbasert og kunne videreutvikles. En slik undervisningssekvens innebærer at læreren kan samhandle med elevene, rettlede dem og gripe inn ved behov i situasjoner som kan oppstå. Læreren har mulighet til å observere, evaluere og forbedre grunnlaget for undervisningssekvensen. Dette krever en metodologi eller tilnærming som er praksisnær, besvarer forskningsspørsmålene og tar hensyn til at en rekke faktorer kan påvirke undervisningen. Videre vil jeg derfor gå nærmere inn på hvordan jeg kan legge til rette for en tilnærming som ivaretar de mange faktorene som kan påvirke undervisningssekvensen.

Designforskning som metodologi

Flere forskere har ønsket seg en forskningstilnærming som kan ivareta komplekse problemer knyttet til undervisning (Plomp & Nieveen, 2010), slik at det ikke blir for stor avstand mellom forskningen og undervisningshverdagen. Reeves (2006) argumenterer for at i stedet for å gjennomføre flere sammenlignbare studier der det skal undersøkes om metode A er bedre enn metode B i en gitt kontekst, er det bedre å bruke designforskning, der målet er å utvikle en optimal løsning på et konkret problem i en konkret kontekst. I tillegg argumenterer Van den Akker (1999) for at flere tradisjonelle forskningstilnærminger – som for eksempel eksperimenter, spørreundersøkelser og korrelasjonsstudier med vekt på beskrivelse – i liten grad gir resultater som er nyttige for å håndtere design- og utviklingsproblemer knyttet til undervisning. Et beskrivende spørsmål er for eksempel det første forskningsspørsmålet mitt: *Hvilke utfordringer møter en gruppe femtetrinnselever i arbeid med generalisering av figurmønstre?* Slike spørsmål kan gi kunnskap om *hva* som skjer underveis i undervisningssekvensen, men gir lite kunnskap om *hvordan* elevene har kommet seg dit. Argyris (1996) legger vekt på at det også er nødvendig med kunnskap om hvordan man kan endre noe i en ønsket retning. Under betingelse X og ved bruk av undervisningstilnærming Y, er det sannsynlig at elevene vil lære Z (Van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006).

I denne studien vil betingelsene være knyttet til at deltakerne i studien består av to små grupper med fire elever i hver gruppe, og der alle har liten erfaring med å generalisere figurmønstre. Å arbeide med en liten gruppe skaper andre forutsetninger enn hvis studien hadde foregått i klasserom med langt flere elever, siden læreren da kan være tettere på elevene og har større mulighet til å veilede dem i den ønskede retningen, og det er større mulighet til å kommentere og stille spørsmål som bidrar til at elevene må reflektere og resonnere. I tillegg er undervisningen i denne studien designet med utgangspunkt i at elevene har begrensede kunnskaper og erfaringer med generaliseringer av figurmønstre, så elever som har bedre innsikt i temaet vil ikke ha det samme faglige utbyttet av undervisningssekvensen.

Før jeg går videre med hva designforskning er, kan det være nyttig å klargjøre hva ordet *design* innebærer, fordi det kan ha forskjellige betydninger i ulike sammenhenger. Mintrop (2016) knytter design opp mot forbedringer i skolen og beskriver det som en rekke aktiviteter som tar utgangspunkt i eksisterende kunnskap, oppfatninger, holdninger eller rutiner, og der målet er utvikling av ny praksis. Det er denne beskrivelsen av design som vil bli brukt i denne teksten.

Grunnlaget for designet av undervisningssekvensen er progresjon og vanskelighetsgrad på oppgaver, konkretiseringsmateriell, fokus på muntlig aktivitet og tiltak fra læreren underveis i undervisningen. Målet er en naturlig progresjon, slik at elevene blir motiverte og føler mestring på veien mot å uttrykke en generalisering ut fra et figurmønster. Det er et mål at elevene tar med seg erfaringene og innsikten de oppnår gjennom arbeidet inn i andre oppgaver og situasjoner med algebraisk innhold.

I designforskning er design og forskning sammenflettet: designet er forskningsbasert, og forskningen er designbasert. Utgangspunktet er at undervisning er et komplekst, interaktivt system som består av flere elementer av ulike typer og nivåer Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer og Schauble (2003). Det betyr at mange faktorer spiller inn, for eksempel elevenes tidligere kunnskaper, erfaringer og holdninger; gruppestørrelsen; tilgjengelige ressurser; samarbeidsklimaet blant elever og lærere; hvor transparente oppgavene er osv. Noen av disse faktorene kan læreren påvirke, mens andre er det vanskelig å endre på. Designforskning vil ideelt sett gi større innsikt i denne læringsøkologien. Denne innsikten kan man oppnå ved å designe elementene og vurdere underveis hvordan disse fungerer sammen, samt delta aktivt for å støtte opp om elevenes læring. Designelementene vil i denne studien for eksempel være aktivitetene og oppgavene, diskusjoner og refleksjoner rundt oppgavene, hvilket konkretiseringsmateriell som benyttes og lærerens handlinger i undervisningsøktene. Forskningsdesignet vil bestå av sammensatte læringssituasjoner, og elementene vil bli sett i sammenheng og ikke som enkeltelementer som påvirker hvordan elevene lærer. Designet er førende for undervisningssekvensen i studien min, der designet vil utvikles og perfeksjoneres med grunnlag i teori, prinsipper fra tidligere forskning og egne erfaringer.

I studien min ønsker jeg å få mer kunnskap om hvordan elever arbeider med mønsteroppgaver og hvilke utfordringer som kan oppstå underveis i arbeidet med denne typen oppgaver. Jeg ønsker også å få innsikt i hvordan det teoribaserte undervisningsdesignet fungerer og hvilke endringer i designet av undervisningssekvensen det kan være nødvendig å gjøre for å videreutvikle designet. Plomp og Nieveen (2010, s. 9) definerte designforskning i undervisningsøyemed som «en systematisk studie for å designe, utvikle og evaluere pedagogiske inngrep», mens McKenney og Reeves (2012) beskriver designforskning knyttet til undervisning som en blanding av vitenskapelige undersøkelser med systematisk utvikling og implementering av løsninger på undervisningsutfordringer. Et av målene med studien min er å tilrettelegge for design av en best mulig undervisningssekvens ut fra innsikt i de ulike prosessene og utfordringene læreren og elevene kan støte på underveis.

Selve undervisningssekvensen fokuserer på generalisering av figurmønstre, der elever på mellomtrinnet skal få erfaring med å uttrykke strukturer i mønstre symbolsk. For at de skal klare dette, kreves det at ulike faktorer og problemstillinger beskrives og evalueres underveis i prosjektet. Det kan for eksempel handle om å finne ut hvilke bakgrunns-kunnskaper elevene har, hvordan de generaliserer og begrunner generaliseringene sine, hvilke utfordringer de støter på i generaliseringsprosessen og hvordan det legges til rette for at de skal mestre arbeidsaktivitetene i undervisningsopplegget. Undervisningen må planlegges med tanke på hvilke fagspesifikke begreper elevene bør kunne, hvilke faglige delmål som vil få elevene i den ønskede faglige retningen og hvilke aktiviteter og hjelpemidler som vil støtte dem i prosessen. Disse tiltakene vil bli grundigere beskrevet i føranalysen av undervisningsopplegget (kapittel 4). I tillegg vil elevenes generaliserings-strategier og begrunnelser være avgjørende for hvilke valg og tiltak læreren utfører for å støtte elevene i læringsprosessen. De mange faktorene viser hvor omfattende, krevende og utfordrende det kan være å designe en undervisningssekvens som ivaretar og legger til rette for at elevene utvikler ferdigheter i generalisering.

Kjennetegnene ved designforskning

Cobb et al. (2003) beskriver fem kjennetegn ved designforskning. Alle disse kjennetegnene trenger ikke nødvendigvis å være til stede (Phillips, 2006) og kan uttrykkes på følgende måte:

1. <u>Designforskning genererer teori</u>

Målet med designforskning er å generere teorier om læringsprosessen og hvordan læringsprosessen kan støttes. Definisjonen Plomp og Nieveen (2010) bruker på designforskning handler om å fokusere på å utforme og utvikle undervisning og samtidig få innsikt i hva som skjer i undervisningsprosessen, og på bakgrunn av dette forbedre deler av undervisningen. I studien min er hensikten at en lærer skal kunne utvikle et velfungerende undervisningsopplegg knyttet til tidlig algebra, figurmønstre og generalisering, og i tillegg få innsikt i hvilke strategier og begrunnelser elevene benytter når de jobber med figurmønstre og hvordan man som lærer kan støtte, veilede og legge til rette for at elevene velger hensiktsmessige strategier som kan hjelpe dem med å generalisere. Det å generere teori vil i studien min derfor bety å ta utgangspunkt i det definerte rammeverket og utvikle en teori om utfordringene i en undervisningssekvens om generalisering av figurmønstre og om hvilke tiltak som kan være hensiktsmessige.

2. <u>Designforskning er intervensjonell</u>

I flere forskningstilnærminger vil det å endre på en situasjon og det å forstå den være atskilte faktorer. I designforskning vil de derimot bli sett på som gjensidige faktorer. Hvis man ønsker å endre på noe, må man forstå det, og hvis man ønsker å forstå noe, må man endre på det (Bakker, 2004). Designforskning handler altså ikke bare om å teste om noe fungerer, men også å undersøke hvordan intervensjoner kan bidra til å støtte opp om elevenes læring. Som uttrykket antyder, griper intervensjonsstudier inn i hva som naturlig skjer. I designforskning må forskerne kontinuerlig gjøre valg ut fra antagelser , selv om det innebærer at noen aspekter ved læringsmiljøet endres underveis eller etter en undervisningsøkt (Bakker & van Eerde, 2015).

Undervisningsintervensjonene inkluderer prosesser, taktikker eller sekvenser som støtter læring og undervisning (McKenney & Reeves, 2012, s. 40). Hensikten med studien min er å undersøke potensialet for pedagogiske forbedringer ved å studere undervisningen. Undervisningsdesignet blir utviklet med bakgrunn i empiriske og teoretiske resultater fra tidligere forskning og danner grunnlaget for begrunnelsene og valgene som blir gjort både før, underveis og etter undervisningsøkten. I studien min vil implementeringen av undervisningssekvensen være intervensjonen, og jeg vil analysere gjennomføringen av den med utgangspunkt i rammeverket.

3. <u>Designforskning er prospektiv og reflekterende</u>

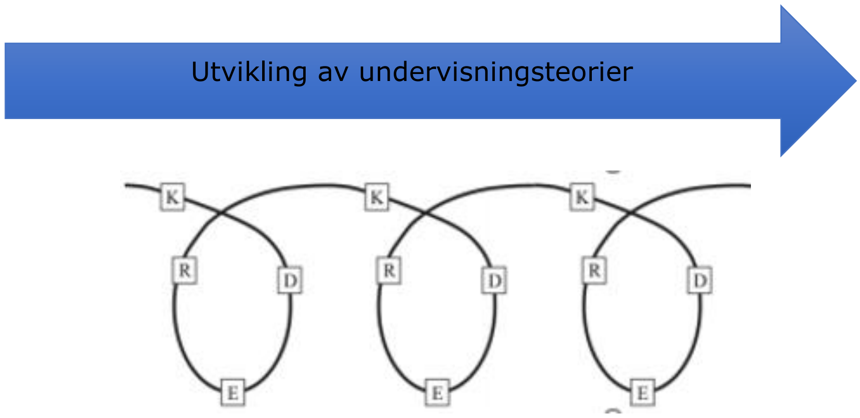
Det tredje kjennetegnet bygger på de to første og innebærer at metoder i forskningen er både prospektive og reflekterende. I prospektive studier følges deltakerne fremover i tid, mens man i retrospektive studier ser tilbake på hvordan deltakerne har kommet dit de befinner seg. Ved for eksempel å utforme hypoteser om hvordan ulike hjelpemidler eller aktiviteter vil påvirke læringsprosessen til elevene, blir forskerne konfrontert med antagelsene sine når de observerer den reelle læringsprosessen. Refleksjoner og analyser underveis og etter en undervisningsøkt kan bidra til at den neste økten endres i forhold til den opprinnelige planen. Et eksempel: Før den første undervisningsøkten som dannet grunnlaget for masteroppgaven min, designet jeg ulike aktiviteter og oppgaver som skulle klargjøre forskjellen mellom repeterende og voksende mønstre basert på teori og erfaringer andre forskere hadde med temaet. Underveis og etterpå evaluerte jeg hvordan oppgavene og aktivitetene fungerte og kom frem til forbedringer og justeringer som kunne bidra til at elevene i enda større grad ville lykkes med å se forskjellen mellom de to mønstertypene.

4. <u>Designforskning er pragmatisk</u>

Det fjerde kjennetegnet på designforskning er at den skal være praktisk nyttig og hensiktsmessig for lærere – «the theory must do real work» (Cobb et al., 2003). Teoriene som produseres er nært knyttet til hvilke aktiviteter og oppgaver elevene og lærerne gjennomfører, og man må være klar over at de er laget under spesifikke omstendigheter og til et spesifikt tema. Det er derfor viktig at betingelsene og konteksten blir beskrevet grundig, slik at prosjektet blir mest mulig transparent. Teoriene bør være såpass generelle at de kan brukes i andre klasserom og på andre skoler, slik at de kan overføres til andre liknende situasjoner. I studien min foreslår jeg derfor konkrete tiltak til forbedringer av undervisningssekvensen om generalisering av figurmønstre, basert på erfaringer fra undervisningssekvensen og bakenforliggende teori.

5. <u>Designforskning er ofte syklisk</u>

Et annet trekk ved designforskning er at den består av flere gjentagende prosesser, såkalte *sykluser*. Designforskning følger en syklisk prosess med design, eksperimentering, analyse og revidering (Van den Akker et al., 2006). Denne prosesstankegangen gjør at det er mulig for forskerne å prøve å forstå og forbedre tiltakene underveis i prosessen. Det er vanlig å skille mellom *makrosykluser* og *mikrosykluser*. Syklusene vil bli grundigere forklart senere, men i korte trekk består en makrosyklus av tre faser: forberedelse og design, gjennomføring av undervisningsstudien og retrospektiv analyse. Den retrospektive analysen kan igjen føre til en ny makrosyklus, som starter med en ny forberedelses- og designfase (Cobb & Gravemeijer, 2006). De sykliske egenskapene kan også relateres til mikrosykluser. Slike sykluser refererer til problemer og aktiviteter underveis i en undervisningsøkt. Det er for eksempel mulig å se på en undervisningsøkt som en mikrosyklus. Utgangspunktet for studien min er at det skal være tre undervisningsøkter. Hver av disse vil da danne en mikrosyklus med forberedelse, gjennomføring og analyse, og samlet vil de danne en makrosyklus, som vist i Figur 10.



Figur 10 - Sykliske prosesser av kunnskap (K), design (D), eksperiment (E) og refleksjoner (R), og som danner ny kunnskap.

Basert på den nåværende kunnskapen (K) vil det lages et design for undervisningsøkten (D). Deretter gjennomføres oppgaver og aktiviteter i eksperimentet (E), som gir grunnlag for refleksjoner rundt undervisningen. Dette munner ut i ny kunnskap som kan brukes til å justere eller endre neste undervisningsøkt. I studien min vil jeg gjennomføre tre undervisningsøkter som hver utgjør én mikrosyklus og samlet blir én undervisningssekvens, altså en makrosyklus.

Fasene i en makrosyklus med basis i hypotetiske læringsbaner

Cobb og Gravemeijer (2006) og Bakker (2018) beskriver de tre fasene som kjennetegner designforskningsprosjekter innenfor en makrosyklus på følgende måte:

1. En forberedelsesfase
2. En eksperimenterende fase
3. En retrospektiv analysefase

Før jeg går grundigere inn på hver enkelt av de tre fasene, vil jeg beskrive *hypotetiske læringsbaner*, som kan være et viktig instrument i alle fasene ved et forskningsdesign, og som har ulik funksjon i hver fase (Van Eerde, 2013). En hypotetisk læringsbane kan være nyttig for å strukturere, organisere og diskutere matematikkunnskap og undervisningsopplegg, og som forskningsinstrument er den egnet til å behandle skillet mellom undervisningsteorien som skal utformes og selve undervisningsopplegget (Bakker & van Eerde, 2015). Jeg derfor har valgt å ta utgangspunkt i hypotetiske læringsbaner, som veileder forskeren og læreren om hvordan undervisningsopplegget kan gjennomføres. Simon (1995) definerer dem slik:

> The hypothetical learning trajectory is made up of three components: the learning goal that defines the direction, the learning activities, and the hypothetical learning process— a prediction of how the students' thinking and understanding will evolve in the context of the learning activities. (s. 136)

Kort oppsummert tar den hypotetiske læringsbanen i studien min utgangspunkt i tre komponenter:

- Læringsmålene som viser retningen.
- Oppgaver og figurmønstre som skal lede elevene mot læringsmålene.
- Hypoteser om hvordan elevene vil møte utfordringene og utvikle mer innsikt i generalisering av figurmønstre.

Hypotetiske læringsbaner har ulike funksjoner i de tre fasene som kjennetegner en makrosyklus og fungerer som en plan for forskningsprosjektet, men underveis i forskningsprosjektet kan planen revideres hvis det dukker opp uforutsette omstendigheter.

I forberedelsesfasen bestemmer man hva som skal designes, med bakgrunn i relevant teori. Her blir også målet med forskningsprosjektet og tilhørende forskningsspørsmål klargjort. I denne fasen blir det utformet og utviklet en plan for undervisningssekvensene i studien min. Planen består av antagelser rundt en mulig læringsprosess og hva som eventuelt kan støtte opp om denne læringsprosessen, og den blir nærmere beskrevet i føranalysen. Hensikten er å få innsikt i hvordan elevene håndterer utfordringer på oppfattelses-, verbaliserings- og symboliseringsnivå når de planlagte (men reviderbare) aktivitetene brukes i undervisningen.

I forberedelsesfasen vil jeg utvikle en plan for hvordan undervisningssekvensen skal se ut, med bakgrunn i den hypotetiske læringsbanen, og dette vil munne ut i et design av en undervisningssekvens. Designet skal beskrive hvilke aktiviteter, læringsmiljøer, oppgaver og hjelpemidler som benyttes. Det defineres hvilken rolle læreren skal ha i arbeidet med læringsaktivitetene og antagelser om hva som kan skje under undervisningsaktivitetene med bakgrunn i teori og egne erfaringer.

I den eksperimentelle fasen skal hypotetiske læringsbaner fungere som en rettleder for forskeren og læreren i forskningsprosjektet, og i denne studien vil læreren og forskeren være samme person. Hypotetiske læringsbaner viser hva det skal fokuseres på i undervisningen, i diskusjonene og i observasjonene av elevenes arbeid med figurmønstrene. Det kan være nødvendig for læreren og forskeren å tilpasse de hypotetiske læringsbanene eller aktivitetene underveis eller før den neste økten.

Endringer kan kreves, fordi det kan oppstå uforutsette hendelser i klasserommet, som for eksempel at eleven tar i bruk strategier som er lite hensiktsmessige, eller at aktivitetene eller oppgavene er for vanskelige. Denne typen tilpasninger blir ofte ikke akseptert i andre forskningstilnærminger, men i designforskning vil slike endringer i de hypotetiske læringsbanene tillates for å skape optimale betingelser for at elevene skal nå de ønskede læringsmålene.

Den retrospektive analysen danner grunnlaget for forberedelsen av en eventuelt ny undervisningssekvens, og analysen kan basere seg på ulike typer informasjon, som for eksempel lyd- og videoopptak eller transkripsjoner av disse. Antagelsen om hvordan elevene vil reagere og handle i undervisningsaktivitetene, kan da sammenholdes med de konkrete observasjonene. En slik analyse av samspillet mellom den hypotetiske læringsbanen som utvikler seg og de empiriske observasjonene danner et grunnlag både for videreutvikling av undervisningssekvensen og for mer inngående innsikt i elevers utfordringer i arbeid med generalisering av figurmønstre.

Bakker og van Eerde (2015) beskriver at tanken bak å utvikle en hypotetisk læringsbane ikke er å designe den perfekte undervisningssekvensen, men å skape resultater basert på empiri som andre kan tilpasse til sine egne situasjoner og omgivelser. Etter den retrospektive analysen min viste det seg for eksempel at undervisningssekvensen måtte endres, og jeg utarbeidet derfor et forslag til en ny undervisningssekvens (nærmere beskrevet i diskusjonskapittelet). Siden studien min baserer seg på bare én makrosyklus, vil det kreves videre utprøving og analyse av undervisningssekvensen før designet kan forbedres og videreutvikles.

Utvalg

Med bakgrunn i at jeg jobber på en barneskole, bestemte jeg tidlig at jeg skulle gjennomføre forskningen på barnetrinnet. Det var hensiktsmessig å benytte den skolen jeg selv arbeidet på, på grunn av enklere tilgang til elever, undervisningsrom, konkretiseringsmateriell og annet nødvendig utstyr. Skolen er en sentrumsnær byskole med cirka 450 elever. Siden kompetansemålene i matematikk først etter sjuendetrinn (Utdanningsdirektoratet, 2013) uttrykker at elevene skal kunne utforske og beskrive strukturer og forandringer i geometriske mønstre og tallmønstre med figurer, ord og formler, var det naturlig å benytte et av de tre øverste trinnene. Valget falt på femtetrinn, siden jeg ikke kjenner elevene på trinnet spesielt godt og derfor kunne møte dem uten antagelser om de matematiske ferdighetene deres. I tillegg ønsket jeg å se hvordan undervisningsopplegget fungerte for de yngste elevene på mellomtrinnet, fordi jeg antok at disse elevene hadde mindre erfaringer og innsikt i arbeidet med figurmønstre enn sjette- og sjuendetrinnselevene, samtidig som de potensielt kunne ha noe innsikt i algebraisk notasjon i form av enklere ligninger.

Jeg valgte å gjennomføre undersøkelsen i to grupper á fire elever. Valget av to grupper skyldtes at jeg da fikk et overkommelig datamateriale og hadde mulighet til å gjennomføre samme undervisningsøkt for begge gruppene på samme dag. Grunnen til at det var fire elever på hver gruppe var at da kunne to og to elever være samarbeids-partnere, noe de ifølge lærerne på trinnet var vant til i skolehverdagen. Ønsket var at arbeidssituasjonen skulle være mest mulig lik den normale skoledagen deres. Omstendighetene var likevel annerledes enn den ordinære klasseromsundervisningen til elevene. Det begrensede antallet elever ga meg større mulighet til å observere og følge resonnementene deres i arbeidet med oppgavene, slik at det var lettere å komme med innspill og oppklarende spørsmål som kunne støtte dem i arbeidet med oppgavene. På den annen side gir valget av liten gruppe noen utfordringer, noe jeg vil komme tilbake til.

Først skulle parene jobbe med en oppgave parallelt, før parene skulle forklare og begrunne funnene sine muntlig for hverandre, slik at de fikk innsikt i det andre parets tilnærminger til oppgavene og kunne reflektere rundt det andre parets funn. God kommunikasjon var en sentral del generaliseringsoppgavene, fordi det var viktig at elevene fikk mulighet til å forklare hvordan de tenkte når de resonnerte og diskuterte. Kontaktlærerne plukket derfor ut åtte elever som var muntlig aktive i timene og som frivillig meldte seg til studien i samtykke med foreldrene. Det ble ikke stilt krav til hvordan de behersket matematikkfaget. Studien min baserte seg på en gruppe A som bestod av tre jenter og en gutt, og en gruppe B som bestod av to gutter og to jenter.

Forskningsetikk

Det er ifølge Erickson (1986) to etiske grunnprinsipper som bør ivaretas i forskning. For det første er det viktig at informantene får informasjon om formålet med studien og oversikt over aktivitetene de skal delta i. For det andre må de få innsikt i hvordan anonymiteten deres blir ivaretatt.

I forkant av prosjektet informerte jeg både elever og lærere på det aktuelle trinnet muntlig om prosjektet. Der ble det gjort rede for at jeg ønsket å gjennomføre forskning som skulle benyttes i masterstudiet mitt, og at jeg derfor trengte en del elever som kunne bidra. Elevene fikk beskjed om at det var frivillig å delta, at de skulle jobbe med ulike figurmønstre i matematikk, og at de som deltok kom til å være anonyme i presentasjonen av forskningsresultatene. Elevene som ønsket å delta fikk et informasjonsskriv med en samtykkeerklæring, slik at de sammen med foreldre eller foresatte kunne avgjøre om det var aktuelt for dem å delta i forskningsprosjektet.

Skrivet (vedlegg 1) var godkjent av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD) for behandling av personopplysninger. Jeg informerte også om at jeg hadde rekruttert en lærer som tidligere hadde jobbet som matematikklærer på trinnet til å observere undervisningsøktene. Dette kunne gjøre øktene tryggere for elevene, siden de ikke hadde arbeidet med meg tidligere.

Siden det bare var et fåtall av de elevene som ønsket å være med som fikk mulighet til å delta, bestemte jeg i samråd med de andre kontaktlærerne at jeg skulle gjennomføre undervisningsopplegget for resten av trinnet senere. På den måten kunne også de andre elevene på trinnet få tilgang til den samme undervisningen.

Den første undervisningsøkten startet med en kort felles gjennomgang, der bakgrunn, innhold og anonymitet ble avklart. Spesielt ble det i denne oppstartsekvensen fokusert på at det var en anonym undersøkelse, så jeg forsikret elevene om at navn og skole ville bli anonymisert, og at video- og lydopptakene kun ville bli brukt av meg. Jeg påpekte at hensikten med opptakene var at det kunne bli vanskelig å huske samtalene og forklaringene deres i etterkant. I tillegg forklarte jeg at resonnementene deres ville ha like stor betydning enten de var riktige eller gale under arbeidet med oppgavene knyttet til generalisering av figurmønstre.

Datainnhenting og analyse

Under samtlige undervisningsøkter brukte jeg observasjon med lyd- og videoopptak. Videoopptakene brukte jeg for at jeg også ønsket å ha muligheten til å se ansiktsuttrykk, kroppsspråk og andre gester som kunne støtte og utfylle analysene av samtalene. For eksempel pekte elevene ofte på figurer og oppgaver og sa: «Her må vi …» o.l. Videoopptakene gjorde at jeg da kunne se hva de snakket om.

Jeg valgte selv å være lærer i forskningsprosjektet, fordi det kan være tidkrevende og vanskelig å videreformidle og instruere en annen lærer og sørge for at teori, prinsipper og mål for undervisningsøktene blir tydelige. I tillegg er det også lettere å endre og utvikle praksis i undervisningen dersom det oppstår utfordringer underveis når man selv kan gjøre endringene direkte uten å gå via en annen part. Jeg fikk en arbeidskollega til å observere og skrive korte notater og analyser i en observasjonslogg fra hver av undervisningsøktene. Dette for å kunne diskutere situasjoner og inntrykk som var interessante å ta tak i med tanke på å gjøre undervisningen bedre for elevene. Disse diskusjonene ble gjennomført etter hver økt og ble tatt opp som lydfiler.

Under gjennomføringen av undervisningsøktene valgte jeg å fungere som deltagende observatør. I en slik sammenheng er læreren en del av gruppen som studeres, og elevene vet at de blir observert (Gold, 1958). Jeg kunne sjonglere mellom å observere og delta, og jeg hadde førstegangstilgang til datamaterialet. Det var naturlig å velge denne tilnærmingen, siden jeg måtte interagere med elevene og konteksten underveis for å kunne observere, evaluere og forbedre undervisningsøktene i tillegg til å støtte elevene underveis i undervisningen. Samtidig har deltagende observasjon noen utfordringer, og jeg vil gjøre rede for dem senere i dette kapittelet.

Etter hver økt ble elevenes skriftlige arbeid samlet inn, og lydopptakene av hver av gruppenes samtaler ble transkribert. I denne prosessen ble elevene anonymisert med navn. Disse transkriberingene ble gjennomgått i sammenheng med de skriftlige arbeidene til elevene, og dette utgjorde grunnlaget for analysen av datamaterialet. Med en kommunikasjon som var strukturert i tekstform på denne måten, ble det enklere å få en oversikt over og forståelse for det som ble gjort i undervisningsøkten.

For å redusere og få mening ut av datamaterialet fra gjennomføringen av undervisningssekvensen valgte jeg å gjennomføre åpen koding og kategorisering. Ifølge Nilssen (2012) er åpen koding å identifisere, kode, klassifisere og sette navn på de viktigste mønstrene i en nøye gjennomgang av materialet. For denne studien innebærer koding å sette navn på situasjoner og ytringer som ble funnet i datamaterialet, med mål om å kunne beskrive elevenes arbeid og utfordringene femtetrinnselevene møtte i løpet av undervisningssekvensen.

Jeg prøvde i dette arbeidet å legge til side de teoretisk forankrede utfordringene som er beskrevet i Tabell 2, for slik å kunne unngå at analysen min i for stor grad ble farget av det teoretiske rammeverket som var utgangspunkt for planleggingen og utviklingen av undervisningssekvensen. Jeg gjorde dette for ikke å overse nyanser og detaljer i elevenes arbeid. Samtidig er dette krevende, og åpen koding og kategorisering vil derfor ikke kunne være helt teorifri. I tillegg så jeg at det var nødvendig å gå tilbake til teorien for å finne mening i deler av datamaterialet. For eksempel måtte jeg bruke Becker og Rivera (2005) sine generaliseringsstrategier som utgangspunkt for å beskrive enkelte av elevenes utfordringer i generaliseringen av figurmønstrene.

I arbeidet med datamaterialet startet jeg først med å lese grundig gjennom transkripsjonene flere ganger og noterte, stilte spørsmål og prøvde å sette ord på utfordringene jeg identifiserte ut fra analysematerialet. I tillegg gikk jeg tilbake til et par enkeltepisoder i videopptakene for å se om det var noe elevene viste eller gjorde som kunne støtte, eller gi merverdi til, funnene fra transkripsjonene. Det var for eksempel vanskelig å se kun ut fra transkripsjonene i hvilken grad elevene brukte posisjonskortene. Derfor trengte jeg videomaterialet for å se om de pekte eller brukte kortene aktivt for å underbygge argumenter i forklaringene sine. Videre prøvde jeg å finne momenter fra forskjellige situasjoner i datamaterialet for å se om de hadde noe til felles, slik at jeg kunne plassere dem innenfor samme kategori. På bakgrunn av dette arbeidet, delte jeg utfordringene inn i ulike kategorier og kom frem til seks kategorier som jeg mente kunne beskrive utfordringene fra datamaterialet mitt:

- Utfordringer knyttet til å oppfatte strukturen i mønstre.
- Utfordringer med å se sammenhengen mellom uavhengig variabel (posisjon) og avhengig variabel (mengde) i mønstre.
- Utfordringer med å beskrive mønstre.
- Utfordringer med å begrunne generaliseringene.
- Utfordringer med å innse at symboler kan representere flere verdier.
- Utfordringer med å representere den matematiske operasjonen med algebraiske symboler.

Som analyseverktøy tar jeg utgangspunkt i det egenutviklete rammeverket og rammeverket til Lannin (2005) for generaliseringsstrategier og begrunnelser. Jeg bruker disse teoriene for å analysere femtetrinnselevenes utfordringer i generaliseringsarbeidet for å få innsikt i hva som gir opphav til dem.

Metodiske utfordringer

Kvale og Brinkmann (2009) bruker begrepene reliabilitet, validitet og generaliserbarhet for å beskrive hva som kjennetegner kvalitativ forskning. Reliabilitet dreier seg om hvor pålitelige resultatene i en studie er, og man kan oppnå høy reliabilitet ved å gjøre analysene så åpne og gjennomsiktige som mulig, slik at resultatene kan reproduseres av andre. I en undervisningssekvens er det mange faktorer som spiller inn, og så mange som mulig av disse må beskrives, slik at andre kan rekonstruere dem.

Validitet kan deles opp i intern og ekstern validitet, der intern validitet er i hvor stor grad funnene i en konkret studie underbygges av data av god kvalitet og hvorvidt man måler det man har satt seg fore å måle. Ekstern validitet handler om hvorvidt funnene også har overføringsverdi til andre sammenhenger, altså at man kan generalisere ut fra dem (Calder, Phillips & Tybout, 1982), og hvis undervisningsaktivitetene og tiltakene i en studie kan overføres til andre lignende, er det et tegn på generaliserbarhet (Bakker & van Eerde, 2015). Det er imidlertid problematisk å generalisere ut fra to relativt små elevgrupper og den spesifikke konteksten som ligger til grunn, men Bakker (2018, s. 109) hevder at i stedet for å generalisere fra et utvalg til en populasjon, vil designforskning prøve å oppnå teoretisk generalisering – altså innsikt i hvordan ulike prosesser eller mekanismer kan hjelpe andre til å oppnå lignende resultater i andre sammenhenger.

En annen utfordring ved validiteten er de forskjellige rollene forskeren kan ha. Rollen min i forskningsprosjektet var todelt: Jeg skulle både fungere som lærer for undervisningsøktene og være forsker som skulle planlegge og evaluere øktene. Jeg måttet derfor sjonglere mellom å lede, designe, gjennomføre og evaluere prosjektet. Det kan stilles spørsmål om det er mulig å balansere de to rollene og om man klarer å bevare objektiviteten som forsker når man er såpass involvert i alle fasene. Hvis man for eksempel skal rettlede elevene og stille oppklarende spørsmål og samtidig observere og notere det som skjer i undervisningsøktene, kan det bidra til at man mister forskerfokuset. Derfor er det av avgjørende betydning at man har lyd- og videoopptak som kan analyseres i ettertid og som eventuelt kan gjennomgås uavhengig av andre forskere. For å imøtekomme behovet for å se nyansene i undervisningsøktene og evalueringen av dem fikk jeg også en arbeidskollega til å observere og skrive korte notater og analyser i en observasjonslogg fra hver av undervisningsøktene.

Med tanke på generaliserbarhet kreves det at en lærer tar hensyn til sine spesifikke omstendigheter dersom undervisningssekvensen i studien skal gjennomføres i andre settinger, for eksempel i hel klasse. Resultatene fra studien min må med andre ord presenteres på en slik måte at andre kan tilpasse dem til sine forhold og kontekster. For eksempel gir settingen med små grupper færre forstyrrelser som kan stjele fokus fra arbeidet, og da kan en lærer i større grad gi oppmerksomhet til den enkelte elev. Elevene i studien min var også over gjennomsnittet muntlig sterke, slik at det som tidligere nevnt skulle bli enklest mulig å registrere hvordan elevene resonnerte underveis, mens de var relativt gjennomsnittlige når det gjaldt matematisk nivå.

Forskningen min ble planlagt og gjennomført basert på de teoretisk forankrede utfordringene elevene kunne møte og tiltak som ble foreslått i litteraturen. Valgene var kompromisser av flere vurderinger og hensyn, for eksempel utvalg, teorier og design av oppgaver. Bakgrunnen for valget av oppgaver, prosedyrer og teorier som benyttes, blir presentert i føranalysen. I hvilken grad disse fungerer eller ikke, blir tatt opp i analysen og diskusjonen. Jeg har forsøkt å gjøre forskningen så transparent og tydelig som mulig, slik at det er mulig å spore og rekonstruere studien.

Et av kjennetegnene til designforskning, er at den av natur er syklisk. Designforskning med kun én makrosyklus er ikke optimalt for å utvikle en best mulig undervisnings-sekvens, ettersom det ved flere sykluser er større muligheter til å forbedre undervisningsdesignet. Ideelt sett skulle jeg hatt mulighet til å prøve ut undervisnings-sekvensen i andre elevgrupper, men på grunn av begrensinger i tid og tilgang til elever ble ikke dette gjort. Flere sykluser ville også gitt meg en større datamengde for å kunne analysere elevenes arbeid og utfordringene deres. Hvis det derimot blir gjennomført kun én syklus i et forskningsprosjekt, kan selve ideene fra forskningsprosjektet likevel benyttes av andre senere (Bakker, 2018). Pool og Laubscher (2016) argumenterer også for at designforskningsprosjekter med begrensede tidsrammer – som for eksempel masteroppgaver – fint kan baseres på få sykluser, så lenge designforskningenes prinsipper blir fulgt og bidrar til forbedring av praksis og gir en merverdi til forskningen. For min del innebærer det at jeg i lys av gjennomføringen av undervisningsøktene foreslår en videre utvikling av undervisningssekvensen, med andre ord hvordan en eventuell ny makrosyklus kan se ut. Derfor mener jeg at gjennomføring av én makrosyklus gjør det mulig å kunne besvare forskningsspørsmålene mine.

Gjennom studien min får jeg både en teoretisk og en praktisk innsikt i hvilke utfordringer elever kan støte på i arbeid med generaliseringsoppgaver. I tillegg får jeg observert de ulike tiltakene og vurdert hvordan de fungerer. På bakgrunn av disse vurderingene kommer jeg med et forslag til en forbedret versjon av undervisningssekvensen og rammeverket.

4. Føranalyse av undervisningssekvensen

I dette kapittelet vil jeg beskrive forberedelsesfasen, som omfatter hvilke valg og refleksjoner som ligger til grunn for undervisningssekvensen. Her blir de faglige læringsmålene klargjort, og jeg kommer med argumenter og begrunnelser for oppgavene, valgene og tiltakene som gjennomføres for å støtte elevene i undervisningsøktene. Den praktiske gjennomføringen av undervisningssekvensen er basert på hypotetiske læringsbaner. Målet med forberedelsesfasen er å finne et så godt utgangspunkt som mulig for å gi elever på barnetrinnet bedre innsikt i algebra.

En stor andel av forskningen på utvikling av tidlig algebraisk tenkning fokuserer på generaliseringsprosessen – en prosess som er sentral i all matematisk aktivitet (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005). En underkategori av den generaliseringsorienterte forskningen er relatert til numerisk og geometrisk mønstergeneralisering (Moss & McNab, 2011).

Som redegjort for i teorikapittelet har kjernefokuset i nyere forskning på tidlig algebra vært matematiske sammenhenger, mønstre og aritmetiske strukturer (Kieran et al., 2016). Spesielt har vekten ligget på argumentasjonsprosessene som brukes av elever i alderen 6-12 år, når de begynner å konstruere disse sammenhengene, mønstrene og strukturene. Disse sentrale prosessene handler blant annet om å observere, gjøre antagelser, generalisere, bruke symboler og begrunne (Kieran et al., 2016). Det er disse prosessene jeg ønsker at femtetrinnselevene skal få erfaring med og utvikle. I stedet for å la elevene arbeide med aritmetikk og algebra som to separate områder, ønsker jeg altså at de skal gis oppgaver som kombinerer aritmetikk med algebraiske resonnementer.

Videre sier læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013) at elevene etter sjuendetrinn skal kunne: «utforske og beskrive strukturar og forandringar i geometriske mønster og talmønster med figurar, ord og formlar». På bakgrunn av beskrivelsen fra læreplanen og kjerneprosessene i tidlig algebra, har jeg utarbeidet læringsmål som jeg ønsker at elevene skal arbeide mot. Målet for undervisningssekvensen er altså at elevene skal:

- kunne beskrive strukturer og forandringer i repeterende og voksende mønstre med ord og figurer;
- bruke matematiske symboler og variabler for å uttrykke matematiske sammenhenger;
- generalisere et voksende figurmønster med både ord og algebraiske uttrykk og begrunne denne generaliseringen.

Det første læringsmålet er sentralt for å gi elevene en felles oppfattelse av hva voksende mønstre er, og for at de skal kunne skille dem fra repeterende mønstre. Det er viktig at de på forhånd har kjennskap til hvilken mønstertype de skal generalisere for. Da kan de se at arbeidet med voksende mønstre krever en annen tilnærming enn når de jobber med for eksempel repeterende mønstre, mer konkret en eksplisitt tilnærming, som innebærer å oppdage at mønsteret kan lede til en direkte formel som vil fungere for et hvilket som helst nummer i rekken (Mason, 1996).

Det andre læringsmålet er relevant fordi algebra på barnetrinnet har tradisjonelt handlet om bokstavregning (Warren, 2003), der elevene skal finne et konkret tall som erstatning for et bokstavsymbol – for eksempel i ligningen $x + 8 = 12$. Elevene må også bli kjent med at symboler ikke bare kan representere enkeltverdier, men også variable tall, for dette danner grunnlaget for arbeid med strukturer, mønstre og relasjoner. De skal erfare at algebra både handler om å finne ukjente størrelser, å kunne uttrykke sammenheng mellom størrelsene og å kunne generalisere disse sammenhengene. Usiskin (1988) fremhever at elever må mestre å bruke matematiske symboler og variabler for å kunne beskrive generaliseringer symbolsk.

Det tredje læringsmålet er viktig for mest mulig effektivt å kunne støtte elevene i å finne et matematisk nyttig mønster, slik at de kan utvikle effektive generaliseringsstrategier. En slik støtte vil i dette forskningsprosjektet omfatte valg av oppgaver og konkretiseringsmateriell, elevenes samarbeid i små grupper og lærerens proaktive rolle. Den proaktive rollen innebærer å introdusere arbeidsoppgavene, organisere gruppearbeidet, fremheve og fokusere på viktige temaer i diskusjonen og få elevene til å delta aktivt i arbeidet med oppgaver og diskusjoner.

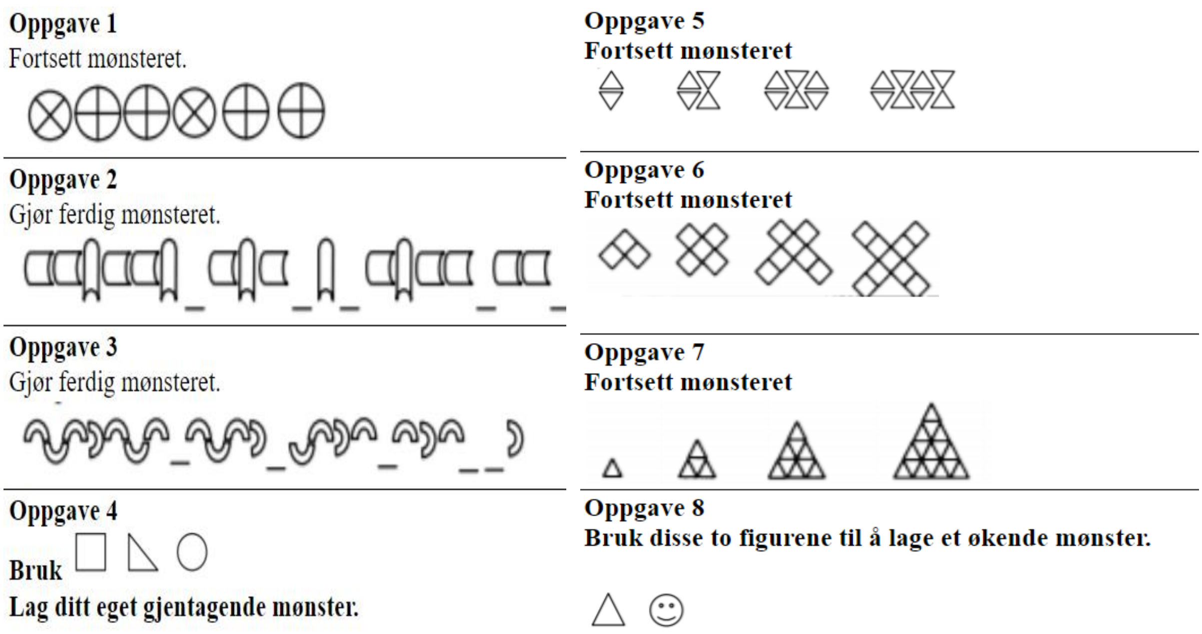
På bakgrunn av forskningsspørsmålene og læringsmålene designer jeg en undervisnings-sekvens for å støtte femtetrinnselevers utvikling av generaliseringsferdigheter i arbeid med voksende mønstre. Undervisningssekvensen tar utgangspunkt i utfordringene som er presentert i teorikapittelet, egne erfaringer og en førtest utført på samtlige femtetrinnselever på skolen der undersøkelsen ble gjennomført.

Selve undervisningssekvensen består av tre undervisningsøkter og beskriver hvilke aktiviteter, læringsmiljøer, oppgaver og hjelpemidler som blir benyttet, og selve planen er i form av en hypotetisk læringsbane. Den hypotetiske læringsbanen kan, som tidligere beskrevet, omfatte læringsmål som viser retningen og bestå av aktiviteter og problemer som skal få elevene i riktig retning, samt av antagelser om hvordan elevene vil utvikle innsikt og kunnskap i forbindelse med læringsaktivitetene (Simon, 1995). Dette gir grunnlaget for en antatt læringsprosess der jeg prøver å forutsi hvordan elever tilegner seg kunnskap når undervisningsaktivitetene blir brukt i klasserommet. Jeg formulerer antagelser om hvordan elevene lærer og tilegner seg kunnskap og definerer hvilken rolle læreren bør ha i arbeidet med læringsaktivitetene med bakgrunn i teori og egne erfaringer og refleksjoner. I tillegg blir det foreslått tiltak som kan støtte og veilede elevene frem mot læringsmålene. Før jeg går nærmere inn på dette, vil jeg derimot kort redegjøre for førtesten. Den hadde til hensikt å gi meg informasjon om hvilke bakgrunnskunnskaper elevene på femtetrinnet hadde om figurmønstre i matematikk.

Førtesten

For bedre å kunne kartlegge og tilrettelegge for undervisning er det nyttig å kjenne til elevenes forkunnskaper (Munthe, 2013). Jeg gjennomførte derfor en førtest på femtetrinnet for å kartlegge hvilke forkunnskaper elevene hadde om repeterende og voksende mønstre. En hypotese var at de hadde kjennskap til repeterende mønstre, men lite kjennskap til voksende mønster. Testen besto av åtte oppgaver hentet fra Warren og Cooper (2008), som hun brukte for å få innsikt i hva australske elever kunne om voksende og repeterende mønstre.

Resultatene fra førtesten skulle gi meg informasjon om ferdigheter og kunnskaper elevene hadde fra før om de to mønstertypene og gjorde det enklere å planlegge og tilpasse den første undervisningsøkten til elevenes nivå. Figur 11 presenterer spørsmålene i testen. De fire første oppgavene skulle gi meg et innblikk i hva elevene mestret fra før, altså hvilken erfaring de hadde med gjentagende mønstre, og de fire siste skulle gi meg tilsvarende informasjon om voksende mønstre.



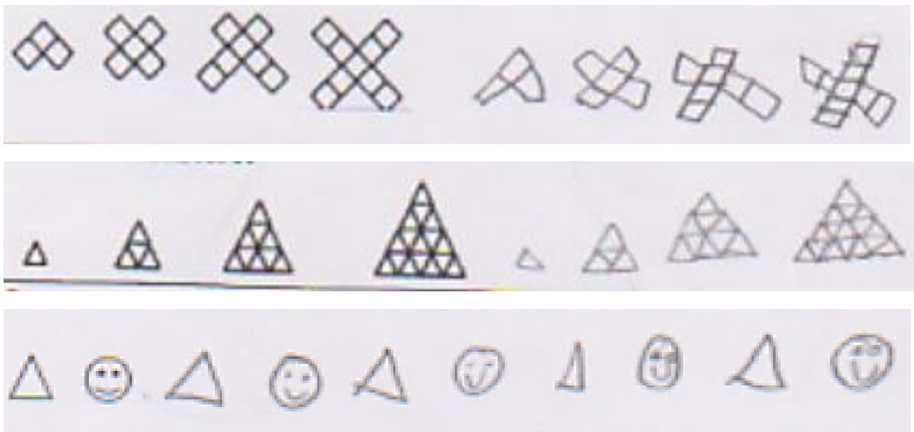
Figur 11 - Beskrivelse av oppgavene om gjentagende og voksende mønstre

Frekvensen fra besvarelsene er presentert i Tabell 3

Tabell 3 - Responsen fra spørsmålene om repeterende og voksende mønster

	Repeterende mønster					Økende mønster			
	1	2	3	4		5	6	7	8
Feil	4	4	17	10		27	35	39	43
Riktig	45	46	31	40		23	12	10	6
Ingen svar	1	0	2	0		0	3	1	1

Tabell 3 viser at det er betydelig forskjell på resultatene fra oppgavene som tar for seg repeterende mønstre og oppgavene om voksende mønstre. Majoriteten av elevene på trinnet hadde vansker med å løse oppgaver som var knyttet til et voksende mønster. Tre eksempler fra tre forskjellige elever indikerer dette (*Figur 12*).



Figur 12 - Elever ser på et voksende mønster som et repeterende mønster

En samtale med kontaktlærerne på trinnet bekreftet at voksende mønstre ikke hadde blitt prioritert så langt. Erfaringene deres med mønstre var i stor grad knyttet til gjentagende mønstre, symmetri og arbeid med oppgaver der de skulle finne de neste sekvensene i enkle tallrekker. Begrepene *repeterende mønster* og *voksende mønster* var ikke innført eller brukt tidligere på trinnet. Med bakgrunn i resultatene fra førtesten var derfor et av ønskene med den første undervisningsøkten at de åtte elevene fra femtetrinnet skal få muligheten til å bli bedre kjent med de to mønstertypene, klare å skille dem fra hverandre og beskrive dem muntlig. En slik innføring er nødvendig for at elever skal kunne nå det første læringsmålet.

Beskrivelse av undervisningsøktene

I alle tre undervisningsøktene hadde elevene tilgang til blyant og papir og konkretiseringsmateriell i form av ulike mønsterbrikker, kvadratiske tellebrikker eller multikuber, som skulle fungere som visuelle hjelpemidler og bidra til bedre samtaler mellom elevene (Warren, 2005). Varigheten på øktene var omtrent én klokketime. Elevene skulle jobbe med oppgavene på egen hånd, før de deretter samarbeidet om dem. Slik fikk de sjansen til å tenke og resonnere rundt oppgavene på forhånd, for så å delta mer aktivt i diskusjonen etterpå. Jeg valgte også å gjennomføre en plenumssamtale etter hver oppgave, fordi muntlige samtaler og diskusjoner kan bidra til å utvikle elevenes resonneringsferdigheter (Schleppegrell, 2007). Gjennom diskusjoner vil elevene kunne teste ut ideer, samt høre andre elevers ideer og innlemme disse i sine egne.

Beskrivelse av første undervisningsøkt

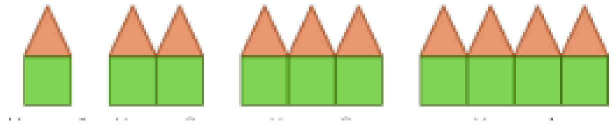
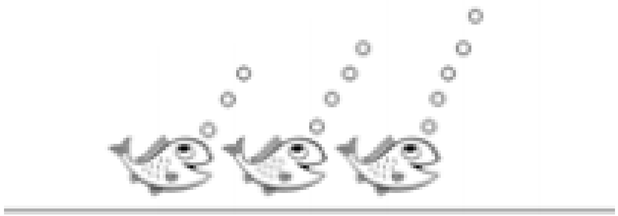
Førtesten viste altså at flere elever ikke hadde en klar oppfatning av hva et voksende mønster er, og ønsket med den første økten var derfor at de skulle få erfaringer med voksende mønstre og bli kjent med egenskaper knyttet til dem, samt få bedre innsikt i hva som kjennetegner henholdsvis repeterende og voksende mønstre. Fokuset på den første undervisningsøkten ble dermed at elevene skulle trene på å se og tolke repeterende og voksende mønstre og på å uttrykke muntlig hva de så i disse mønstrene Lee (1996). I tillegg var målet at de skulle begynne å bruke begrepene aktivt i samtalene rundt oppgavene for å utvikle det matematiske ordforrådet sitt (Schleppegrell, 2007).

Ideen med den første oppgaven (Tabell 4) var å gi elevene en åpen oppgave der de kunne lage sine egne mønstre, slik at jeg skulle få et innblikk i hva de forbandt med et mønster. Oppgaven skulle gi meg mer innsikt i hvordan elevene tolket og beskrev mønstrene de laget. Ved å se hvilke mønstertyper femtetrinnselevene laget og i etterkant høre hvordan de beskrev hvordan mønstrene var og endret seg, kunne jeg få et hensiktsmessig utgangspunkt for å innføre begrepet *repeterende mønster*, og eventuelt også *voksende mønster*. Jeg antok at de fleste ville tegne eller konstruere et repeterende mønster.

I oppgave to og tre ønsket jeg å skifte fokus fra repeterende mønstre til voksende mønstre. Warren et al. (2013) anbefaler at elevene først får arbeide med oppgaver der de kan kopiere, utvide og identifisere hvordan enkle voksende mønstre utvikler seg, for dette vil kunne gi dem bedre ferdigheter i arbeidet med voksende mønstre. For å ivareta dette ble to oppgaver av disse forskerne brukt som utgangspunkt for undervisningsøkten. Oppgavene beskrives i Tabell 4. I tillegg er figurmønstrene i disse oppgavene enkle og transparente, dvs. at det er lett å identifisere en sammenheng mellom posisjonen og antall komponenter som figuren består av (Sasman et al., 1999).

Oppgavene var av en slik art at elevene burde kunne klare å beskrive hvordan mønstrene vokser, ettersom de øker med henholdsvis ett «hus» og én «boble» for hver ny posisjon i sekvensen. En av hensiktene med oppgave 2 og 3 var at elevene skulle kunne erfare at voksende mønstre vokser systematisk. I oppgave 3 kunne det imidlertid hende at enkelte elever på trinnet ville begynne å tegne de tre fiskene på nytt igjen som et gjentagende mønster. Her kunne det derfor bli nødvendig å stille oppklarende spørsmål som ville hjelpe elevene til å reflektere rundt hvorvidt de hadde tegnet et økende mønster. Begrepet *voksende mønster* måtte i så fall presenteres og tydeliggjøres, understøttet av momenter fra oppgavene, og at elevene dermed skulle klare å beskrive hva som skiller gjentagende mønstre fra voksende mønstre.

Tabell 4 - Beskrivelse av oppgavetekstene i undervisningsøkt 1

Nr.	Beskrivelse av oppgavene
1	Tegn et mønster eller lag ditt eget mønster ved hjelp av brikkene.
2	Kopier dette voksende mønsteret enten med brikker eller tegning. Hvordan vokser mønsteret? 
3	Fortsett dette voksende mønsteret. Beskriv hvordan det vokser. 
4	Samarbeid to og to. a) Tegn eller lag deres egne voksende mønster. b) Forklar hvordan mønsteret deres vokser.

I den fjerde oppgaven skulle elevene samarbeide om å lage voksende mønstre, og de skulle trene på å beskrive endringene muntlig. En slik åpen oppgave ville gi læreren en mulighet til å se om elevene hadde opparbeidet seg tilstrekkelige ferdigheter i å utvikle egne voksende figurmønstre og komme med innspill eller spørsmål for å klargjøre sammenhengene i mønstrene, samt korrigere eventuelle misforståelser knyttet til dem. Jeg antok at elevene i denne oppgaven ville begynne å resonnere rundt hvilke brikker de skulle bruke og hvordan mønsteret ville øke. Jeg forventet også at flere elever ville lage et voksende mønster som bare økte med én enhet, siden dette gjaldt for de to forrige mønsteroppgavene. I så fall ville jeg utfordre elevene til å lage et mønster som økte med flere enheter.

Beskrivelse av andre undervisningsøkt

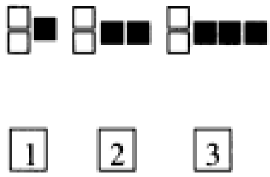
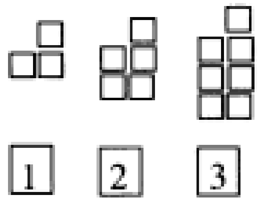
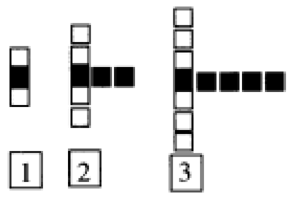
Arbeid med gjentagende mønster på barnetrinnet innebærer ofte at elever skal kopiere og fortsette mønstre ved å identifisere den gjentagende delen i mønsteret. Dette betyr at elevene kun trenger å ha fokus på hvordan sekvensen endrer seg innenfor selve mønsteret. I et visuelt voksende mønster vil dette fokuset endre seg, fordi elevene må finne en sammenheng mellom mønsteret og posisjonen i mønsteret. (Warren & Cooper, 2008) beskriver at mange elever har problemer med denne tilnærmingen og at det er to hovedgrunner til dette. Den ene grunnen er at elever mangler et tilstrekkelig og hensiktsmessig språk til å beskrive sammenhengene i mønsteret (utfordringer knyttet til verbaliseringsnivået). Den andre er at elever har en tendens til å bruke en additiv strategi, dvs. en rekursiv tilnærming der de bruker den tidligere figuren for å bestemme den etterfølgende (utfordringer knyttet til oppfattelsesnivået). På bakgrunn av dette var et mål med denne økten å utvikle de språklige ferdighetene til elevene ved å innføre fagspesifikke begreper som *rader*, *kolonner* og *posisjon*, samt å oppmuntre elevene til å anvende disse begrepene aktivt når de skulle beskrive og begrunne mønstrene de arbeidet med. Disse begrepene valgte jeg å innføre før elevene begynte å utforske figurmønstrene, siden det var ønskelig at de skulle anvende begrepene underveis for å få trening i å uttrykke og beskrive mønstrene mer presist.

Et annet mål med denne økten er å hjelpe elevene med å identifisere mulige sammenhenger mellom posisjonen (uavhengig variabel) og antallet brikker i figurmønsteret (avhengig variabel), slik at de i større grad skulle begynne å uttrykke denne sammenhengen muntlig.

For å jobbe mot disse målene tok jeg utgangspunkt i tre oppgaver fra Warren og Cooper (2008). Disse oppgavene ble valgt fordi mønstrene i dem er lineært voksende, og det er en naturlig progresjon i oppgavenes vanskelighetsgrad. I den første oppgaven er det en tydelig sammenheng mellom posisjonstallet og figurmønsteret, mens denne sammenhengen blir gradvis vanskeligere å identifisere i de to neste oppgavene. Elevene får også litt hjelp til å dekomponere figurmønstrene i to av oppgavene, ved at kvadratene er fargelagt svarte og hvite. Oppgavene er beskrevet i tabell 5.

Jeg valgte å bruke lave posisjonsverdier (posisjon 5 og 9) i hver av de tre oppgavene, slik at elevene kunne finne figurmønsteret for en gitt posisjon ved bruk av konkretiseringsbrikker, telling og rekursive strategier. På den måten fikk de muligheten til å bli kjent med mønsteret. I den siste deloppgaven på hver oppgave ville det imidlertid bli vanskeligere for elevene å bruke slike strategier, for her skulle de finne antallet brikker for posisjon 20 uten å bruke brikkene. Dette krever såkalt fjerngeneralisering, altså at det må utarbeides en regel for å uttrykke figurmønsteret for den gitte posisjonen (Barbosa & Vale, 2015).

Tabell 5 - Oppgaver til undervisningsøkt 2

	Deloppgave	
1	Samarbeid to og to. a) Lag mønsteret som på tegningen. Sett på posisjonskortene. b) Lag posisjon 5 og 9 i mønstrene. c) Forklar hvordan mønstrene vokser. d) Hvordan kan dere finne ut hvor mange brikker det er i posisjon 20 uten å lage mønsteret	
2	Samarbeid to og to. a) Lag mønsteret som på tegningen. Sett på posisjonskortene. b) Lag posisjon 5 og 9 i mønstrene. c) Forklar hvordan mønstrene vokser. d) Hvordan kan dere finne ut hvor mange brikker det er i posisjon 20 uten å lage mønsteret	
3	Samarbeid to og to. a) Lag mønsteret som på tegningen. Sett på posisjonskortene. b) Lag posisjon 5 og 9 i mønstrene. c) Forklar hvordan mønstrene vokser. d) Hvordan kan dere finne ut hvor mange brikker det er i posisjon 20 uten å lage mønsteret?	

I den første oppgaven er det et transparent figurmønster, i den forstand at mønsteret er dekomponert i svarte og hvite brikker, og der antallet hvite brikker er konstant og de svarte brikkene følger posisjonstallet. I denne oppgaven blir elevene oppfordret til å gjenskape mønsteret med tellebrikkene og navngi hver figur med et passende posisjonskort, og de skal bruke sammenhengen i mønsteret til å forklare hvordan mønsteret ser ut i andre posisjoner. Hensikten med å bruke posisjonskort er ifølge Beatty og Moss (2006) å skape oppmerksomhet rundt posisjonen (den uavhengige variabelen), slik at elevene opplever at posisjonen er viktig og starter med å lete etter en sammenheng mellom posisjonen og antallet brikker i figurmønsteret. Her har også læreren en viktig rolle når det gjelder å få elevene til å fokusere på sammenhengen mellom posisjon og mønster.

Oppgave 2 har samme spørsmålsstilling som den forrige oppgaven, men figurmønsteret er litt mer krevende, siden det ikke er like lett å se sammenhengen mellom posisjonen og mønsteret. Her må elevene selv dekomponere figurmønsteret i en konstant og en varierende del, ettersom mønsteret består av kun hvite brikker. En annen forskjell fra det første mønsteret er at det i denne oppgaven er flere muligheter til å beskrive figurmønsteret med utgangspunkt i posisjonen: En aktuell beskrivelse er at den første kolonnen tilsvarer posisjonstallet, mens den andre kolonnen har én brikke mer enn den første. Dermed vil antallet brikker kunne uttrykkes som $f(p) = p + (p + 1)$. En annen tilnærming kan være å identifisere at antallet rader med to brikker er det samme som posisjonstallet, addert med konstanten 1: $g(p) = 2p + 1$.

Jeg regnet med at elevene ville finne figurmønsteret til posisjon 5 og 9 ganske raskt, for det er et én-til-én-forhold mellom de hvite brikkene og posisjonen. Det kunne hende at de ville velge en rekursiv strategi for å komme frem til figurmønsteret for de gitte posisjonene. Derimot ville dette være en lite egnet strategi i oppgave 2 d), der elevene skulle finne antall brikker i posisjon 20.

I oppgave 2 var det viktig å støtte femtetrinnselevene så de ville fokusere på funksjonssammenhengen i mønsteret, i tillegg til å få dem til å bruke fagbegrepet *posisjon* aktivt i beskrivelsene sine. Hvis det viste seg at de greide dette, ville jeg også utfordre dem til å beskrive sammenhengen mellom antallet brikker og posisjonstallet ved å bruke kolonne- og radbegrepet når de skulle finne antallet brikker i posisjon 20. Det er viktig at både elever og lærere trener på å beskrive denne sammenhengen med et så presist språk som mulig, og i oppgave 2 kan læreren i plenumssamtalen i stedet for å si: «Mønsteret vokser med én tellebrikke» heller si: «Antallet rader med to brikker er alltid det samme som posisjonstallet» og slik uttrykke sammenhengen i mønsteret tydeligere.

Oppgave 3 er en enda større utfordring, selv om elevene fokuserer på relasjonen mellom posisjonen og figurmønsteret. For det første må elevene her dekomponere mønsteret i to deler. Riktignok får de hjelp til dette av oppgaven, ved at enkelte brikker i figurmønsteret er farget hvite og andre svarte. De hvite brikkene (h) antar jeg at elevene vil gjenkjenne som to kolonner med like mange rader som posisjonen, $h(p) = 2p$, etter litt arbeid med oppgaven. De svarte brikkene kan derimot skape større utfordringer for dem, siden de er plassert i en rekke i figurmønsteret. Når brikkene er plassert slik, er det ikke så lett å beskrive sammenhengen mellom posisjonen og figurmønsteret. Elevene vil kunne se at i posisjon 3 er det tre brikker under og tre brikker over den svarte rekken, og da vil de kunne resonnere seg frem til at det i posisjon 20 er tjue brikker under og tjue brikker over. Derimot er ikke sammenhengen i de svarte brikkene like åpenbar, og denne delen av mønsteret vil derfor være ikke-transparent for de fleste elever. Da kan det bli nødvendig å oppmuntre elevene til å manipulere og omdanne mønsteret for de svarte brikken til enklere former som kan gjøre det enklere for dem å se strukturen i mønsteret (Rivera & Becker, 2007), slik at de kan komme frem til for eksempel figurmønsteret i Figur *13* for de svarte brikkene. Dette mønsteret vil antageligvis være mer transparent for dem. En beskrivelse kan være at antallet svarte brikker (s) tilsvarer to rader med samme antall brikker som posisjonstallet, minus én brikke, $s(p) = 2p - 1$.

Figur 13 - Brikkene kan flyttes på, slik at det blir lettere å se sammenhengen mellom posisjonstallet og antallet brikker

Jeg velger likevel å bruke oppgaven, fordi det vil være en fin erfaring for elevene å se at i enkelte tilfeller kan det være hensiktsmessig å omorganisere mønsteret for å få et visuelt tydeligere bilde av sammenhengen mellom den uavhengige og den avhengige variabelen.

Beskrivelse av tredje undervisningsøkt

Elevene i undersøkelsen hadde ikke tidligere jobbet med symboler og variabler, og erfaringene deres var stort sett begrenset til å finne x som ukjent i enkle ligninger og problemløsningsoppgaver. Hensikten med den siste undervisningsøkten var derfor at de skulle få erfare og bli kjent med symboler og ukjente verdier i form av variabler (det andre læringsmålet). De skulle få prøve seg på en oppgave der de hadde mulighet til å overføre de matematiske sammenhengene i figurmønsteret til algebraiske symboler i form av en matematisk formel. I tillegg var fokuset for denne økten at elevene skulle få mer trening i å begrunne valgene sine underveis i arbeidet med oppgavene, fordi dette kunne bidra til at de ville stille spørsmål og reflektere rundt hvorfor de hadde brukt de aktuelle generaliseringsstrategiene.

Jeg valgte The cube sticker problem (Lannin, 2005), fordi denne oppgaven har et innhold som er lett forståelig for elevene, og oppgavene er utformet med naturlig progresjon, slik at overgangen fra antall klistremerker ved et gitt antall kuber til den generelle formelen blir enklere. Konteksten rundt oppgaven blir beskrevet for elevene på følgende måte:

Ved å sette kubeformede klosser etter hverandre, vil det bli laget en rekke med klosser. Det kan brukes en klistremerkemaskin til å plassere smileansikter på klossene i rekken. Maskinen plasserer nøyaktig ett klistremerke på hver sideflate som ikke ligger inntil en annen sideflate på en annen kloss. De ytterste sideflatene på hver kloss må ha et klistremerke, så en rekke av klosser med lengde 2 vil trenge 10 klistremerker.

Figur 14 - Elevene bruker multikubene som visuelt hjelpemiddel

Elevene hadde altså tilgang til multikuber som kunne bidra til å skape en visuell oppfattelse av situasjonen, og disse kubene kunne de bruke aktivt til å resonnere rundt problemstillinger i deloppgavene. Elevene fikk en skriftlig oppgavetekst som består av fire deloppgaver:

Tabell 6 - Oppgavetekst for The Cube Sticker Problem

	Deloppgave
1	Hvor mange klistremerker vil dere trenge for å lage en rekke med lengde 1 til 10? Forklar hvordan dere bestemte disse verdiene.
2	Hvor mange klistremerker vil dere trenge til en rekke med lengde 20? Hva med lengde 50? Forklar hvordan dere bestemte disse verdiene.
3	Se for dere at en bestemt rekke trenger 150 klistremerker. Hva er lengden på denne rekken? Forklar hvordan dere har funnet svaret.
4	Forklar hvordan dere kan finne antall klistremerker som trengs for enhver rekke med klosser. Skriv en formel som kan brukes til å finne svaret på dette.

I den første deloppgaven skulle elevene altså finne antallet klistremerker for en lengde fra 1 til 10. Da hadde de muligheten til å bli kjent med figurmønsteret. Antagelsen min var at elevene i den første deloppgaven ville bruke kubene som utgangspunkt og telle seg oppover, eller at de ville gjenkjenne en økning fra én figur til den neste og bruke dette til å regne seg fram til antall klistremerker som trengtes til hver figur – altså en rekursiv strategi (jf. Lannin, 2005). Begge disse strategiene vil fungere greit for lave verdier av den uavhengige variabelen og kan være hensiktsmessige når elevene skal utforske mønsteret.

I den andre oppgaven skulle elevene finne antallet klistremerker for 20 og 50 kuber. I en slik oppgave vil nok mange elever skifte strategi, fordi de skjønner at telling eller rekursive strategier er lite effektive. Jeg antok at noen elever ville bruke helhet-objekt-strategien på rekken med 20 kuber, siden det er lett å tenke at man bare kan doble svaret på antallet klistremerker for 10 kuber. Da er det viktig at læreren ber elevene om å ta utgangspunkt i figurmønsteret og begrunne, ut fra strukturen i mønsteret, hvordan de har kommet frem til svaret sitt, slik at de selv har mulighet til å finne ut hvorfor helhet-objekt-strategien ikke fungerer i dette tilfellet.

Oppgave 3 ble valgt fordi den ville vise hvorvidt elevene bruker figurmønsteret aktivt. Uten å forstå mønsteret, ville oppgaven bli svært vanskelig å løse. Denne oppgaven kunne potensielt bli utfordrende for enkelte elever, ettersom den stiller større krav til regneferdigheter. De måtte dividere antallet klistremerker på sidekantene på 4 for å finne antall kuber og altså jobbe seg «motsatt vei». Alternativt ville de kunne bruke multiplikasjon, men dette ville kreve at de i større grad måtte forholde seg til kubene. Jeg antok at elevene enten ville bruke en kontekstuell tilnærming, der enkelte ville klare å resonnere seg frem til et svar som er nært knyttet til figurmønsteret, eller en prøve-og-feile-strategi, der de prøvde seg frem med ulike regneoperasjoner.

I siste oppgave er elevene avhengige av å bruke en kontekstuell tilnærming for å komme i mål. Planen er at elevene først skal beskrive sammenhengen i mønsteret numerisk (for eksempel $4 \cdot 100 + 2$) og verbalt (for eksempel «det er fire sideflater, som må ganges med de hundre kubene, pluss de to endeflatene»), før læreren gradvis viser hvordan disse verbale og numeriske uttrykkene kan oversettes til algebraens symbolske språk (English & Warren, 1998) ved å bruke mønsteret som modell for forklaringen.

Når elevene har klart å beskrive og begrunne et matematisk nyttig mønster muntlig ut fra kubemønsteret, er det hensiktsmessig å la dem beskrive hva som er konstant og hva som varierer. Hvis de ser at antall klistremerker på endene av kubene er konstant og at antall klistremerker på sidene vil variere i forhold til antall kuber, vil det være lettere å forklare at det er mulig å bruke bokstaver eller andre former for symboler for å representere antallet kuber. Elevene skal se at den uavhengige variabelen, i form av et symbol eller en bokstav, representerer posisjonen i generaliseringsuttrykkene til mønsteret for The Cube Sticker Problem. I den forbindelse er det naturlig å innføre de fagspesifikke begrepene *uavhengig variabel* og *formel* for å utvikle begrepsapparatet til elevene. Da vil de kunne beskrive mønstre tydeligere, selv om dette ikke er avgjørende for hvorvidt de lykkes med å løse en oppgave.

Her følger noen uttrykk som elevene potensielt kunne komme frem til i oppgave 4, skrevet matematisk ut fra aktuelle resonnementer:

k(a) er antallet klistremerker på kubene, og a er antallet kuber

i)	$k(a) = a \cdot 4 + 2$	«Det er fire sideflater med klistremerker på hver kube, og det er en rekke av *a* kuber. I tillegg er det to klistremerker på endeflatene.»
ii)	$k(a) = 4 \cdot a + 2$	«Det er fire sideflater med *a* klistremerker, og to klistremerker på endeflatene.»
iii)	$k(a) = 4(a - 2) + 10$	«Det er fire klistremerker på (*a* - 2) kuber som ikke har endeflater, og 5 + 5 = 10 på kubene med endeflater.»
iv)	$k(a) = 6 \cdot a - 2(a - 1)$	«Det er seks flater med klistremerker på hver kube, så det forsvinner to klistremerker for hver kube som settes sammen med en annen, siden det ikke er klistremerker på sideflatene som ligger inntil en annen sideflate.»

De tre første generaliseringene antok jeg ville være mest aktuelle, fordi elevene trolig ville bruke figurmønsteret aktivt ved resonneringen og begrunnelsen av generaliseringene. Jeg antok at i) ville bli brukt av flest elever, fordi jeg regnet med at flertallet ville komme til å telle antallet sidekanter og endekanter i oppgave 1, og da ville de ta med seg denne fremgangsmåten inn i generaliseringsoppgaven også.

5. Analyse av gjennomføring av undervisningssekvensen

I dette kapittelet vil gjennomføringen av undervisningssekvensen bli analysert, med spesielt fokus på elevutfordringer i arbeidet med generalisering av figurmønstre (jf. forskningsspørsmål 1). Her vil jeg også belyse hva elevene mestret underveis etter veiledning fra læreren (jf. forskningsspørsmål 2). Analysene i dette kapittelet vil danne grunnlaget for diskusjonen (kapittel 6).

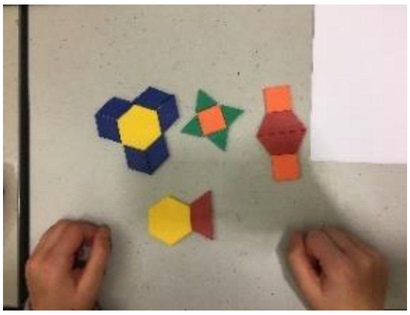
Analysene tar utgangspunkt i en åpen koding av datamaterialet. Åpen koding utgjør første del av en kvalitativ dataanalyse, og det er her forskeren går gjennom innhentede data og bryter ned og klassifiserer informasjonen for å kode eller navngi hver kategori uten å knytte dataene opp mot tidligere kategoriseringer (Seidel, 1998). Datamaterialet mitt er lyd- og videoopptakene fra undervisningssekvensen. Ut fra dette materialet kategoriserer jeg de utfordringene elevene støtte på i arbeidet med mønsteroppgavene. I diskusjonen (kapittel 6) vurderes kategoriene opp mot det teoretisk utarbeidede rammeverket.

Det første underkapittelet er ikke direkte knyttet til identifiserte utfordringer i elevenes arbeid og er også i liten grad relatert til generaliseringsprosessen av figurmønstre. Dette fordi hensikten med den første undervisningsøkten først og fremst var å introdusere elevene for voksende mønstre. De påfølgende underkapitlene tar for seg de to etterfølgende undervisningsøktene, som blir analysert med utgangspunkt i koder og kategorier og holdt opp mot det teoretiske rammeverket. Analysen av hele undervisningssekvensen er basert på datamaterialet fra to grupper á fire elever, der de to elevgruppene gjennomførte det samme undervisningsopplegget suksessivt på samme dag.

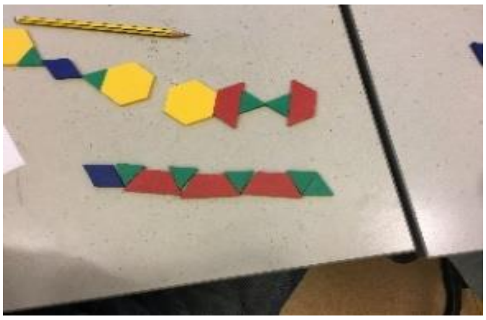
Elevene blir i det følgende anonymisert som Are, Birgit, Cecilie og Dina (gruppe A) og Elin, Finn, Gard og Hanne (gruppe B). Kommentarene til elevene og læreren som er gjengitt, er nummert for å gjøre det enklere å henvise til enkeltsetninger som belyses i teksten.

Elevenes beskrivelser av voksende mønstre med ord og figurer

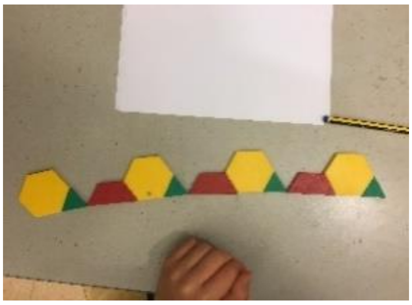
I den første oppgaven skulle elevene lage og presentere et selvvalgt mønster. Ut fra mønstrene de produserte, virket det som om de fleste elevene knyttet begrepet *mønster* til symmetri eller repeterende mønstre (se Figur 1-4).



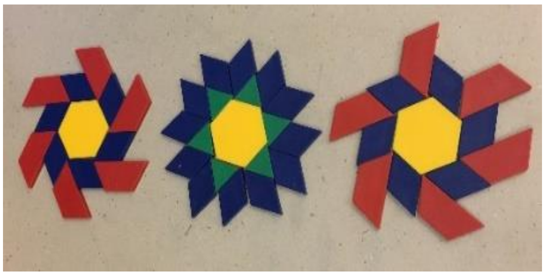
Figur 15 - Figurer som viser speiling og rotasjonssymmetri



Figur 16 - Figurer som viser speilingssymmetri og repeterende mønstre



Figur 17 - Figur som viser repeterende mønster



Figur 18 - Figurer som viser et repeterende mønster

Ingen av elevene på de to gruppene kom med eksempler på voksende mønstre. For å tydeliggjøre hva repeterende mønster og senere voksende mønster (i oppgave 2) er, prøvde læreren (se linje 5) å beskrive hva som kjennetegner et repeterende mønster:

1 Dina: Jeg tenkte på en fugl. Her er vingene, og det er veldig lett å lage vingene ved å legge dem slik (Figur 15).

2 Cecilie: Når jeg ser på mønsteret mitt, så tenker jeg blomster (Figur 17)

3 Lærer: Hvorfor tenker du på det som et mønster?

4 Cecilie: Jeg tenker annenhver. Det er et mønster nedover.

5 Lærer: Det er et mønster som gjentar seg selv, eller repeterer seg selv. Deler av mønsteret kommer igjen og igjen. Det mønsteret og det mønsteret (*peker på to mønstre*) kalles et repeterende eller gjentagende mønster, fordi enkelte deler kommer igjen.

6 Lærer: Flott! Så var det neste person. Kan du fortelle hvorfor det er et mønster?

7 Birgit: Jeg tenkte at det var et nebb. Så ville jeg ikke bare ha gul og grønn. Så da tok jeg en rød også. Så fortsatte jeg.

8 Lærer: Hvis du skal forklare mønsteret ditt, du, da?

9 Birgit: Det er gult, grønt og rødt. Så gult, grønt, rødt. (Figur 16)

10 Lærer: Husker du hva jeg kalte en slik type mønster?

11 Cecilie: (*Litt nølende*). Gjentagende mønster eller repeterende mønster.

Læreren ga her en beskrivelse av hva et repeterende mønster var i etterkant av oppgaven og følger dermed forslaget fra Vacca og Vacca (2005) om at hvis elevene klarer å gjennomføre en oppgave uten at begrepet er introdusert, er det ofte hensiktsmessig å innføre begrepet i etterkant og knytte det direkte til det elevene har arbeidet med. Den samme strategien ble benyttet ved innføring av begrepet *voksende mønster* i oppgave 2, ved at læreren først lot elevene arbeide med mønsteret og forklare for hverandre hvordan det vokste, før denne beskrivelsen ble brukt som utgangspunkt for å introdusere begrepet:

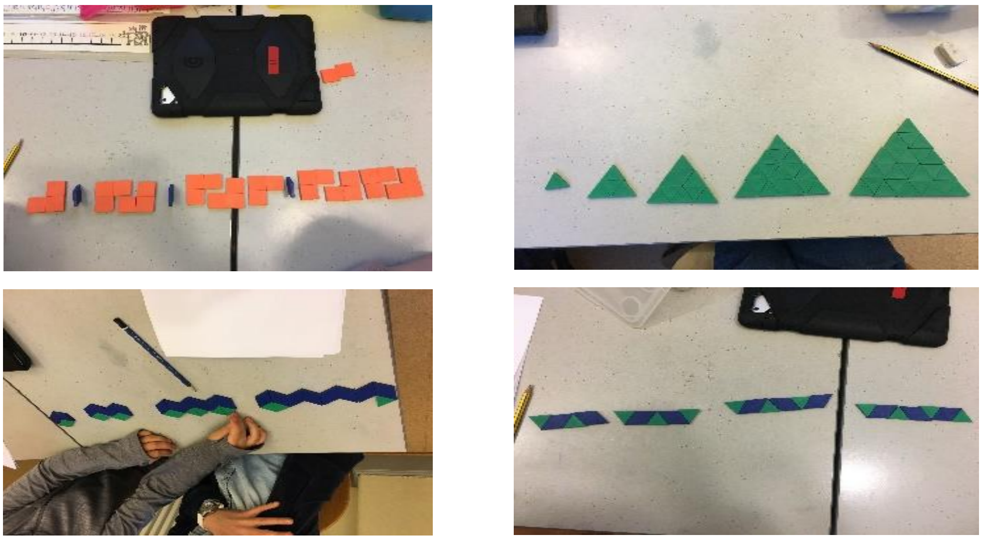
12 Lærer: Som dere tidligere sa til meg, økte mønsteret med ett hus – eller enda mer nøyaktig, ett kvadrat og én likesidet trekant – for hver ny figur. Mønstre som øker på en bestemt måte, kalles for voksende eller økende mønstre.

I tillegg oppfordret læreren elevene til å bruke begrepene aktivt i arbeidet med oppgavene og til å forklare innholdet i dem.

En elev beskrev forskjellen på et voksende mønster og et repeterende mønster på følgende måte:

13 Are: Et repeterende mønster er en type mønster som tar det samme om og om igjen, mens et voksende mønster er at det blir flere og flere.

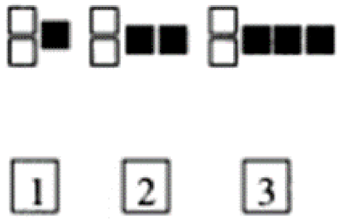
En antagelse om at elevene etter hvert forsto hva begrepene innebærer ble forsterket av at alle elevene klarte å lage voksende mønstre i oppgave 4 (Figur 19). Ingen laget et repeterende mønster i denne oppgaven.



Figur 19 - Figurer av ulike typer voksende mønstre

Utfordringer knyttet til å oppfatte strukturen i mønstre

I den første oppgaven i andre undervisningsøkt skulle elevene finne hvor mange brikker det var i posisjon 5, 9 og 20 på et transparent mønster (Figur 20).



Figur 20 - Figur fra oppgave 1

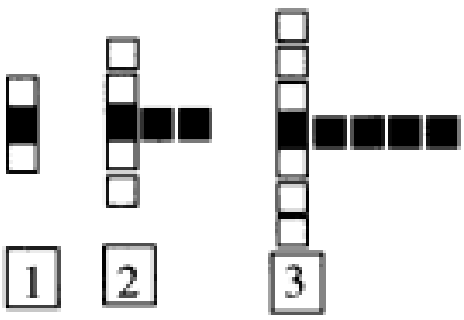
I dette mønsteret er det en tydelig sammenheng mellom posisjonen og brikkene, fordi posisjonstallet har samme verdi som antallet svarte brikker, mens antallet hvite brikker er konstant.

To elever som jobbet med denne oppgaven, kom med følgende kommentarer:

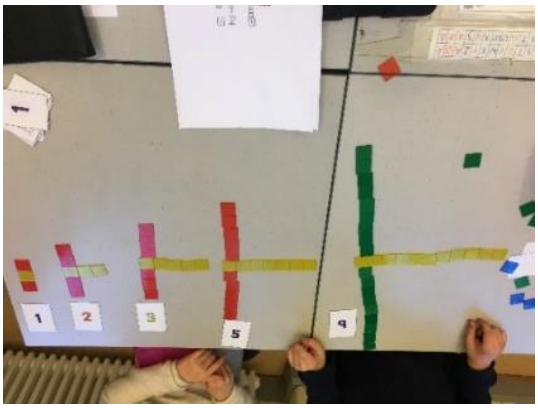
14 Hanne: Dette var lett. Det vil være like mange brikker som posisjon, pluss 2 ekstra.
15 Gard: Ja, på plass 5 er det 5 brikker. Og på 9 er det 9. Da bli det 20 på 20. Vi må også plusse på de hvite

Denne samtalen indikerer at elevene klarer å beskrive strukturen i mønsteret. De knytter antallet brikker til posisjonen (linje 15).

Senere i samme undervisningsøkt skulle elevene, i oppgave 3, finne de samme posisjonene for et annet mønster (Figur 21). Dette ble mer krevende for dem.



Figur 21 - Figurmønsteret i oppgave 3



Figur 22 - Elever jobber med figurmønsteret i oppgave 3

Elevene forsto at de måtte dekomponere mønsteret i to delmønstre, antagelig med bakgrunn i hvordan figurmønsteret i oppgaven var delt opp i svarte og hvite brikker. De fant en sammenheng mellom posisjonen og antall brikker og klarte å plassere riktig antall av de vertikale røde/grønne brikkene (*Figur 22*), som representerte de hvite brikkene (*Figur 21*), da de laget figurer for posisjon fem og ni. De resonnerte seg frem til en sammenheng som tilsvarer funksjonsuttrykket h(p) = 2p, der h(p) er antallet hvite brikker og p er posisjonstallet. Følgende kommentar fra Birgit illustrerer funnet deres:

16 Birgit: Det er én på hver side. Det er det samme som posisjonen. Det ble to på hver side i posisjon to. Vi fant ut at posisjonen er like mye som det strekker seg ut fra den gule. Man dobler posisjonen.

De horisontale gule brikkene skapte derimot vansker for elevene, fordi de ikke så noen sammenheng mellom mønsteret og posisjonen. De klarte bare å beskrive mønsteret på en rekursiv måte. Et eksempel på dette er vist i følgende uttalelse fra en av elevene i gruppe B:

17 Gard: Guri Malla, ja! Den startet med én og vokser med to hver gang.

Det var denne tilnærmingen, i kombinasjon med at de glemte å ta med økningen av to brikker fra posisjon 3 til 4, som gjorde at de ikke fant de riktige verdiene for posisjon 5 og 9 (Figur 22). Dette kommer frem når Eline beskriver hvordan de kom frem til antallet brikker:

18 Eline: I posisjon 3 er det da 5. Da blir det i neste 7 (*peker på posisjon 5*), og hvis vi plusser på 2, 4, 6, 8 brikker (*teller på fingrene*), så får vi svaret.

Selv om elevene til slutt kom frem til rett antall brikker for posisjon fem og ni ved å bruke en rekursiv strategi, var ikke denne strategien hensiktsmessig for å nå målet for økten, ettersom den ikke kan brukes til å beskrive relasjonen mellom den uavhengige variabelen og den avhengige. Det var imidlertid ikke lett å oppdage sammenhengen som kunne føre til en generalisering ved bare å observere de svarte brikkene i dette mønsteret (Figur 21). For elevene fungerte dette mønsteret som et ikke-transparent mønster, fordi de ikke greide å relatere posisjonen til antallet svarte brikker i posisjonen. Læreren måtte derfor følge rådet til Rivera og Becker (Rivera & Becker, 2007) om å oppmuntre elevene til å transformere mønstrene til enklere former, slik at det ble lettere for dem å se sammenhengen mellom posisjonen og antallet svarte brikker i figurmønsteret. Læreren ba derfor elevene om å rydde bort alle de andre brikkene, slik at fokuset skulle være kun på de svarte brikkene. Elevene i gruppe A kom da relativt fort frem til to forslag på antall brikker mens de holdt på å reorganisere brikkene i mønsteret. De beskrev dem på følgende måte:

19 Birgit: Man tar den forrige posisjonen og plusser på den posisjonen du er på.
20 Cecilie Vi tar posisjonen pluss posisjonen minus én.

Elevene i gruppe A hadde altså funnet to ulike måter å se strukturen av svarte brikker på, som med symboler kan uttrykkes som $s_1(p) = (p - 1) + p$ og $s_2(p) = p + p - 1$. Gruppe B hadde vansker med å dekomponere strukturen, selv om de prøvde å reorganisere brikkene, ettersom de ikke laget figurmønstre som tok hensyn til posisjonen. Elevene prøvde ved hjelp av brikkene å lage figurer som var formet som kryss, trekanter og andre figurformer. Læreren måtte da gripe inn og gi dem hint om at de måtte prøve å relatere mønstrene til posisjonen i mønsteret, slik at det ble lettere å finne en funksjonssammenheng. Etter en del forsøk la de brikkene i to rekker (Figur 23), og en av elevene kom med følgende kommentar:

21 Eline: Se. Det er en brikke for lite for å få to hele rekker. Og rekkene er like lange som posisjonen.

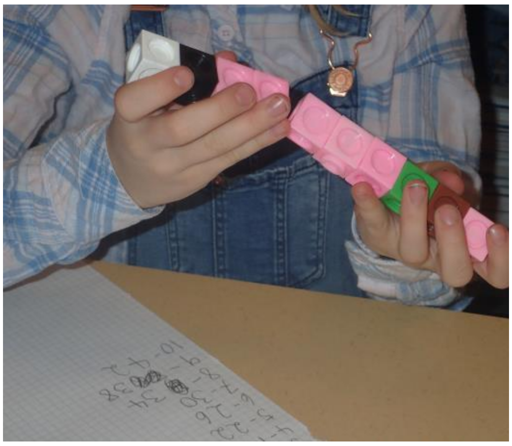
Figur 23

De klarte til slutt å plassere brikkene, slik at de så at antallet brikker var det samme som det dobbelte av posisjonen minus én. Eline fant i linje 21 en sammenheng mellom antallet brikker og posisjonen i mønsteret etter at elevene hadde omrokert på brikkene.

Eksemplene over viser utfordringer knyttet til oppfattelsesnivået. Figurmønstrenes utforming har en god del å si for hvorvidt elevene lykkes med å se en sammenheng mellom posisjonen og antallet brikker. I den første oppgaven greide de å finne en sammenheng, mens i oppgave 3 hadde de vansker med å se et algebraisk nyttig mønster. I henhold til eksemplene kan dette skyldes at de ikke klarte å oppfatte strukturen i mønsteret, selv om de brukte en eksplisitt tilnærming. For disse elevene ble ikke figurmønsteret transparent nok på grunn av plasseringen av brikkene i figurmønsteret. I tillegg hadde de ikke erfaring nok til å prøve å endre mønsteret på egen hånd, og læreren måtte derfor bidra med støtte.

Utfordringer med å se sammenhengen mellom uavhengig variabel (posisjon) og avhengig variabel (mengde) i mønstre

I undervisningssekvensen er det flere eksempler på utfordringer knyttet til å se sammenhengen mellom posisjon og struktur. Noen ganger greide elevene å korrigere og skifte strategi på egen hånd, mens andre ganger greide de det ikke. Eksempler på begge tilnærmingene er beskrevet i de kommende avsnittene.



Figur 24 - En elev bygger en kuberekke og skriver ned sammenhengen mellom antall kuber og klistremerker

I den første deloppgaven i The cube sticker problem brukte samtlige elever først tellestrategier ved at de telte antallet sider på kubene, samtidig som de satte sammen kubene og skrev ned en oversikt over sammenhengen mellom antallet kuber og antallet klistremerker (Figur 24). Strategiene endret seg derimot underveis i oppgaven, da de fant ut at den tidligere figuren bestemte den etterfølgende figuren, og dette brukte de til å regne ut antallet sideflater for de neste figurene. Et eksempel på dette er hentet fra en samtale fra gruppe A, der Birgit kom med en kommentar til to av de andre elevene da hun så at de telte alle sidene på en kube med lengde fem:

22	Birgit:	Kan jeg gi dere et tips? Dere må finne ut mønsteret – ikke bare tell!
23	Cecilie	Å ja, vi bare plusser på 4 for hver gang. Da går det mye fortere!

Dermed begynte elevene å bruke en rekursiv strategi, der de adderte 4 for hver nye kloss i rekken, og de innså at dette var en mer effektiv strategi enn tellestrategien. En slik endring i strategi er i overenstemmelse med funnene til Lannin, Barker og Townsend (2006), som sier at elever ønsker å være effektive, og dette kan ha betydning for hvilken generaliseringsstrategi de velger.

I den andre deloppgaven skulle elevene finne antallet klistremerker på henholdsvis 20 og 50 kuber. Dette bidro til at de skiftet til andre strategier. Alle elevene i gruppe A startet med å benytte seg av det Lannin (2005) omtalte som helhet-objekt-strategien for å finne antallet klistremerker på en rekke med 20 kuber. De doblet antallet klistremerker på en kube av 10 klosser for å finne ut hvor mange klistremerker det var i en kuberekke med lengde 20. I linjene nedenfor følger et utdrag av samtalen der læreren prøvde å få elevene til å vurdere om denne strategien var hensiktsmessig:

24	Gard:	Vi må bare doble tierkuben. Det blir 84.
25	Lærer:	Er dere sikre på det?

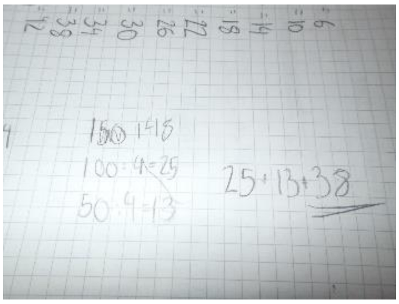
26	Alle:	(*I kor*) Ja.
27	Lærer:	Kan dere forklare meg hvorfor det blir slik?
28	Gard:	Ja, fordi i tieren ble svaret 42. Siden det er tjue, så kan vi bare doble det.
29	Lærer:	Kan dere sjekke det ved å bygge to rekker med klosser og sette dem sammen?
30	Eline:	Det blir 40 på de to her (*peker på to sidekanter*). Så blir det pluss 40 … 80.
31	Gard:	Og 81 og 82.
32	Hanne:	82?
33	Eline:	Hvorfor ble det 82 i stedet for 84?
34	Hanne:	Å, ja! Hvis man putter på kuber på den ene enden, så kommer det en ny ende. Da går de to endene i midten bort. Så derfor må man ta bort to klistremerker.

Elevenes strategi bygget på at de tok utgangspunkt i antallet kuber de hadde funnet for posisjon 10 i figurmønsteret, før de multipliserte dette antallet med proporsjonalitets-faktoren 2 for å bestemme antallet kuber i posisjon 20 i figurrekken. Ytringene deres kan dermed oversettes til funksjonsuttrykket f (a · *n*) = a f(*n*), der a representerer forholdstallet mellom de to posisjonene, og som i dette tilfellet er 2 (linje 28). Hvis denne strategien skulle vært gyldig, måtte konstantleddet i funksjonen vært 0, slik at funksjonen f(*n*) blir en proporsjonal funksjon, men siden endeflatene i figurmønsteret er konstante, vil ikke helhet-objekt-strategien føre frem. Valget av strategi indikerte at elevene ikke hadde forholdt seg til strukturen i figurmønsteret, men i stedet til relasjonene mellom tallverdiene. Det kan også tyde på at elevene brukte numerisk generalisering (Becker & Rivera, 2006).

Etter at læreren ba elevene om å ta i bruk figurmønsteret for å forklare svarene sine (linje 29) ved å bygge to kuber som kunne settes sammen, innså de at det første svaret deres ikke stemte. De forsto etter hvert at de hadde glemt å ta hensyn til at det var to endekanter som ble borte da de to rekkene av kuber ble satt sammen (linje 34).

En annen tilnærming som skapte utfordringer, var da to elever i gruppe B skulle begynne med deloppgave 3 i The cube sticker problem. De startet med å finne svaret ved hjelp av regning (Figur 25).

35	Are:	Vent. Det er fire sider på hver. Da må vi ta 150 og dele på fire
36	Birgit:	Ja, det blir 100 delt på 4. Det er 25.
37	Are:	Ja, og 50 delt på 4. Blir ikke det 13?
38	Lærer:	Er dere sikre på det?



Figur 25 - En elev prøver å regne ut hvor mange kuber det blir med 150 klistremerker

Elevene forsto at de måtte forlate de første strategiene, men så foreløpig ikke sammenhengen mellom konteksten og tallsekvensene som fremkom av antallet kuber i rekken. De greide ikke å se hvordan de skulle inkludere endeflatene i utregningene sine, fordi de dividerte 150 på 4 først (Figur 25). De begynte med flere numeriske tilnærminger som ikke ga resultater, og dette skapte frustrasjoner hos dem. De brukte blant annet prøve-og-feile-metoden, fordi de forsøkte å tilpasse verdiene til oppgaven ved å bruke at 50 delt på 4 er 13. Læreren måtte til slutt gi et hint i retning av den geometriske figuren:

39	Lærer:	Kan dere se på kuben og snakke sammen om hvordan dere tenkte i forrige oppgave?
40	Are:	Vi har glemt å tenke på at vi ikke skal dele 50 på 4. For 50, da inkluderer det disse her også (*peker på endekantene på en rekke av kuber*).

Dermed begynte elevene å bruke kubene igjen, og etter en stund innså Are at de hadde glemt å ta hensyn til endeflatene på kubene. Dette bidro til de til slutt kom i mål med oppgaven og kunne starte på den siste oppgaven, der de skulle generalisere. Utdragene over viser at elevene hadde utfordringer med oppfattelsesnivået. De fant ikke en sammenheng mellom posisjonen og antall kuber i figurmønsteret, fordi de brukte strategier som ikke fokuserer på denne sammenhengen. De anvendte tellestrategi, numerisk strategi, helhet-objekt-strategi og rekursiv strategi. Dette er strategier som vil skape problemer for elever hvis de skal kunne uttrykke en generell regel for ethvert tilfelle, fordi de ikke oppfatter sammenhengen mellom den uavhengige og den avhengige variabelen, altså posisjon og antall klistremerker.

Utfordringer med å beskrive mønstre

Før den første oppgaven i andre undervisningsøkt ble ordene *kolonne* og *rad* introdusert, og elevene fikk mulighet til å lage figurer med forskjellige antall rader og kolonner, før de skulle beskrive hva som var rad 1, rad 2, kolonne 1, kolonne 2 osv. Her var det en utfordring for en del elever å skulle beskrive nummeringen av radene fra øverst til nederst. Flere elever nummererte radene motsatt vei. Birgit i gruppe A beskrev utfordringen på følgende måte:

41	Birgit:	Men i en kinosal begynner jo alltid radene nederst!

Begrepet «rad» var tydeligvis noe hun forbandt med plasseringen av rekker av stoler i en kinosal, og disse nummereres alltid fra nederst til øverst. Læreren måtte derfor klargjøre forskjellen på nummereringen av radene i en kinosal kontra nummereringen i en tabell eller et regneark, slik at alle elevene i de etterfølgende oppgavene hadde samme oppfatning av nummereringen av rader når de skulle prate om dem.

I den første oppgaven i denne undervisningsøkten skulle elevene beskrive et mønster med funksjonsrelasjonen f(p) = 2 + p. Denne oppgaven var ment å være det mest transparente mønsteret, siden det var to hvite brikker som illustrerte konstanten (2) i funksjonen og like mange svarte brikker som variabelen p (posisjonstallet). Læreren innledet oppgaven med å beskrive kort hva posisjonen var:

42	Lærer:	Nå skal jeg lære dere hva posisjon er, og det ordet bør dere bruke for å vise hvor i mønsteret dere er. Hvor i mønsteret figuren eller bildet er, kalles for posisjonen. Det første bildet viser posisjon 1. Det neste bildet viser posisjon 2 ...

I tillegg ble posisjonskort innført før elevene begynte å jobbe med oppgaven for å forsterke fokuset på at posisjonen er viktig for videre å kunne finne sammenhengen i mønsteret. Nedenfor følger et utdrag fra samtalene etter at to elever hadde plassert de fire første posisjonene med gule og røde brikker:

43	Finn:	Hvis mønsteret går oppover og oppover, så vil det samme skje med posisjonene. Så 9 er 9, 5 er 5 og 20 er 20.
44	Lærer:	Hva med de røde brikkene, da?
45	Eline:	De røde brikkene skal alltid være 2 for å følge mønsteret.

Finn oppfattet sammenhengen i mønsteret, men klarte bare delvis å uttrykke det med matematiske begreper. Han brukte ordet «oppover» i beskrivelsen sin fremfor «øker» eller «vokser», som ville beskrevet situasjonen mer presist. Han brukte imidlertid posisjonsbegrepet for å beskrive endringene, noe som viser at han prøvde å bruke begrepene som læreren hadde innført tidligere i økten.

En annen situasjon som illustrerer at elevene hadde utfordringer med å beskrive mønsteret er hentet fra en samtale mellom to elever og læreren:

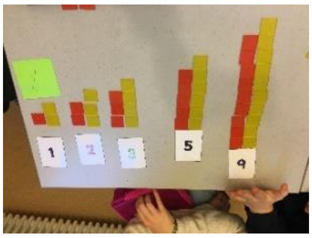
46	Lærer:	Kan du beskrive mønsteret?
47	Cecilie:	Ja, det er 11 brikker på plass 5, mens det er 19 på 9!
48	Lærer:	Kan dere prøve å være litt mer nøyaktige? Bruk for eksempel «posisjon».
49	Dina:	Hm, ja. I posisjon 5 er det 5 pluss 6. Og i posisjon 9 er det 9 pluss 10.
50	Lærer:	Det ble bedre, men kan dere prøve å bruke både «kolonne» og «posisjon», for da er det enda enklere å vite hvordan dere tenker. Dere husker hva en kolonne er?
51	Dina:	Ja, jeg skal prøve ... Ja, den første kolonnen har samme tall som posisjonen, mens den andre kolonnen er én mer enn den første. Hvis posisjonen er 9, blir det 9 + 10 = 19.

I linje 47 beskrev Cecilie mønsteret med kun tallverdier og valgte riktige tallverdier for hver posisjon, men uttrykte ikke sammenhengene mellom dem. Etter et oppfølgingsspørsmål fra læreren om å bruke posisjonsbegrepet i forklaringene, ble beskrivelsene av mønsteret noe mer presist, og Dina relaterte videre tallverdiene til hvordan hun regnet ut antallet brikker til posisjonen.

Læreren ba til slutt elevene om å bruke kolonnebegrepet, og da uttrykte Dina sammenhengen ved at hun i linje 51 knyttet kolonnestørrelsen til posisjonen. Samtalene som er gjengitt ovenfor, viser at elevene ikke klarte å beskrive mønstrene presist. Dette viste seg blant annet ved at enkelte elever kun bruke tallverdier (linje 47) i beskrivelsen av figurmønsteret.

I den neste oppgaven i samme undervisningsøkt var fortsatt hensikten at elevene skulle bruke posisjonsbegrepet aktivt når de beskrev sammenhengene i figurmønstrene muntlig, og de skulle plassere tilhørende posisjonskort til hver figur i figurmønsteret (Figur 26).

52	Lærer:	Kan dere beskrive mønsteret i forhold til posisjonen deres?
53	Gard:	Jeg vet det! Vel, det er noe jeg må sjekke. Her er det 10 på nierplassen. Bør det ikke kanskje være 9 her, da? (*peker på kolonnen med gule brikker, se Figur 26*). Vent litt, jeg ser noe! Rød har alltid like mange brikker som posisjonen. Posisjon 5 har fem røde (*peker på posisjonskort 5*). Posisjon 3 har tre røde (*peker på posisjonskort 3*). Da må det i posisjon 9 være ni røde. Siden gul er akkurat én mer enn rød, må den være én mer. Den første kolonnen er alltid det samme som posisjonen sin.
54	Lærer	Det var en bra observasjon, og det er fint at du bruker «posisjon» og «kolonne» når du beskriver sammenhengen i mønsteret ditt!



Figur 26 - Elevene plasserer posisjonskort under hver figur i figurmønsteret

I linje 53 pekte Gard på posisjonskortet da han uttrykte at han så sammenhengen mellom antall brikker og den tilhørende posisjonen. I tillegg benyttet han posisjonsbegrepet da han beskrev sammenhengen mellom posisjonen i mønsteret og antallet brikker i kolonnen (linje 44), og han anvendte kolonnebegrepet da han forklarte hvor mange røde brikker det var i forhold til posisjonsnummeret. Disse eksemplene illustrerer hvordan elevene etter hvert begynte å ta i bruk begreper som det var arbeidet med på forhånd. Læreren oppmuntret elevene underveis til å bruke slike begreper (linje 54) i situasjoner, slik at de skulle bli inspirert til å utvikle det matematiske ordforrådet sitt (Schleppegrell, 2007). Det å ha kjennskap til matematiske begreper vil være nyttig når elever skal uttrykke generelle regler for sammenhengen mellom den uavhengige og den avhengige variabelen, siden de da kan de beskrive mønstre mest mulig presist.

Utfordringer med å begrunne generaliseringene

To tilnærminger gjorde seg gjeldende da elevene begrunnet generaliseringene sine muntlig i arbeidet med The cube sticker problem. Den ene tilnærmingen var det bare én elev som beskrev:

55 Finn: Lengden unntatt endene ganget med 4 pluss 10.

Dette tilsvarer at det er fire klistremerker på (a - 2) kuber som ikke har endeflater, samt 5 + 5 klistremerker på kubene med endeflater. Funksjonsuttrykket ville da ha blitt $k(a) = 4(a - 2) + 10$. Resonnementet til flertallet av elevene var imidlertid at det var fire sideflater med klistremerker på a kuber og to klistremerker på endeflatene. Dette vil tilsvare funksjonsuttrykket $k(a) = a \cdot 4 + 2$.

Dina begrunnet forklaringen sin slik:

56 Dina: Man må ta tallet ganger 4, fordi du har fire sider. Pluss de to endene. Hvis lengden er 20, da blir det 82.

Dina brukte her et generisk eksempel. Dina tok utgangspunkt i en bestemt del av mønsteret og forklarte at regelen stemte i dette tilfellet, og hun relaterte dette til hvor mange sideflater og endeflater det var på kubene.

Cecilie brukte et empirisk eksempel med større tall og med en litt annen tilnærming:

57 Cecilie: Har du 50 klosser, da er det 50 ganget med 4 pluss 2. Det er 102, og det stemmer.

Her knyttet ikke Cecilie uttrykket opp mot det som uttrykket representerer i figurmønsteret. Hun mente at generaliseringen stemte fordi dette konkrete talleksempelet passet med det hun hadde funnet. Dette er et eksempel på at en elev har lite erfaring med å begrunne og derfor ikke vet hva som kreves for at en begrunnelse skal være gyldig. Dette er i tråd med Lannin (2005), som fant at elever sjelden begrunner generaliseringene sine, ettersom de fokuserer for mye på verdiene de bruker i oppgaven fremfor de generelle sammenhengene i mønstrene.

Utfordringer med å innse at symboler kan representere flere verdier

I arbeid med oppgave 4 i undervisningsøkt 3 kom det tydelig frem i begge gruppene at elevene ikke visste hva en formel var. Ingen av dem skjønte hva de skulle gjøre når de skulle finne antall klistremerker som trengs for enhver rekke med klosser og skrive en formel som kunne brukes til å uttrykke dette (linje 58-60). Læreren måtte derfor klargjøre hva en formel var, og at det var mulig å bruke et symbol som illustrerte antallet klosser i rekken av kuber. Denne klargjøringen er illustrert i linje (61, 63 og 67) nedenfor. Det handler om at flere elever hadde utfordringer med overgangen fra å forestille seg et symbol som et ukjent tall til å se at et symbol kan representere flere verdier:

58	Dina:	Hæ! Det her forsto jeg ingenting av.
59	Are:	Hva er en formel?
60	Cecilie:	Er det abrakadabra?
61	Lærer:	En formel er på en måte en regel. Dere laget jo tidligere i oppgaven en regel for å finne ut antallet klistremerker på kuben. Hva var den?
62	Birgit:	Ja, man tar tallet ganget med fire pluss to.
63	Lærer:	Da har dere regelen. For å lage en formel ut av regelen kan dere bruke en bokstav eller et annet symbol i regelen for det tallet som kan variere, før dere vet hvilket tall dere skal bruke.
64	Cecilie:	Kan for eksempel en formel være x?
65	Lærer:	Det kan være x, men hva finner dere ofte når dere jobber med x? Får dere mange tall?
66	Cecilie:	Nei, man får ett bestemt tall, men man vet ikke hva tallet er før man har regnet det ut.
67	Lærer:	Når man lager en formel, kan x-en variere. Dere kan for eksempel sette inn tallene 10, 50 eller 200 for x-verdien. Når x-verdien varierer, kaller vi det for en variabel.

I linje 63 er begynnelsen på denne innføringen beskrevet, da læreren prøvde å gi elevene innsikt i hva en formel er og at denne kan uttrykkes ved hjelp av en variabel i form av en bokstav eller et symbol.

Selv om læreren forklarte at et symbol kunne representere flere verdier, var ikke dette innlysende for alle elevene. Et eksempel illustrerer dette:

68	Are:	Vi kan jo bruke T for toppene (*peker på begge endene av en kube*). Da blir formelen $K \cdot 4 + T$.
69	Lærer:	Hvorfor det?
70	Are:	For T vil jo være 2!

Dette kan tyde på at Are hadde vansker med å se at et enkelt symbol kan representere flere verdier og ikke bare én bestemt verdi. Slik han så det, var endeflatene, som han kalte toppene (T), en konstant (2). Trolig hadde han ikke forstått at det ikke er hensiktsmessig å bruke et symbol for en konstant, men var likevel på vei mot en forståelse av at et symbol også kan representere en variabel, idet han brukte K for antall kuber.

Etter at elevene hadde øvd på å begrunne og beskrive sammenhengene i mønsteret både muntlig og med algebraiske symboler i formler, spurte læreren om hva som ville skje med formelen hvis kubene ble byttet ut med et rett prisme med seks sidekanter. Da svarte Cecilie:

71	Cecilie:	Det er bare å ta lengde ganger seks pluss to. Toeren forandrer seg egentlig aldri når man bruker denne formelen. Det er bare sidene som forandrer seg hvis tallet på sidene forandres. Hvis det er seks sider, så blir tallet foran posisjonen 6 og ikke 4.

Her viste eleven at hun så en sammenheng mellom figurmønsteret og generaliseringsuttrykket og forklarte at hvis situasjonen endrer seg, vil også formelen endre seg. I tillegg forsto hun at firetallet i formelen ($k(a) = 4a + 2$) kan byttes ut med en annen verdi og begrunnet det med at hvis kuben ble byttet ut med en figur som hadde seks sidekanter, ville koeffisienten endre seg til 6.

Mens blant andre Are hadde en utfordring med overgangen fra verbaliseringsnivået til symboliseringsnivået, hadde Cecilie kommet et hakk videre. Elever kan altså befinne seg på ulikt nivå, der enkelte fortsatt ser på et symbol som noe som representerer en bestemt tallverdi, mens andre kan ha begynt å forstå at et symbol også kan representere en variabel.

Utfordringer med å representere den matematiske operasjonen med algebraiske symboler

Denne kategorien er knyttet til utfordringene elevene har med å beskrive algebrauttrykk med symboler. Selv om elevene har innsett at et symbol kan representere en variabel, er det ikke gitt at de klarer å utforme et algebraisk uttrykk. De klarer å presentere uttrykket – altså sammenhengen mellom den uavhengige og den avhengige variabelen – verbalt, men ikke overføre det til et symbolspråk eller en formel.

I tredje undervisningsøkt opplevde elevene utfordringer med hvilke symboler de skulle bruke for variabelen og hvordan de skulle skrive sammenhengen med symboler. Dialogen mellom to elever og læreren illustrerer dette:

72	Eline	Det blir K gange 4.
73	Finn:	Hvorfor tar vi akkurat K?
74	Eline:	Det kunne vært alt mulig, men vi tar K, for det handler om kuber.
75	Finn	Men vi skal jo finne hvor mange klistremerker det trengs. Da blir det K = K gange 4!
76	Eline:	Vi burde ikke ta k der, fordi da blir det K gange 4 = K. Det er jo to forskjellige K-er. Burde vi ikke ta L for lengden på den første istedenfor? Da blir det L gange 4 = K. Og under må vi skrive K pluss 2.
77	Finn:	Da skriver vi det!
78	Lærer:	Stemmer formlene deres?
79	Eline:	Jeg burde egentlig ikke ha k der, for det er ikke det endelige klistremerkesvaret. Det tenker jeg. Da må vi skrive det på en annen måte.
80	Finn:	Jeg tror min er rett!

I denne samtalen startet elevene med å reflektere rundt hvilke symboler det ville være naturlig for dem å bruke. De hadde innsett at de måtte bruke symboler og ikke tall. I begynnelsen fokuserte de i stor grad på å finne hensiktsmessige symboler som skulle representere den uavhengige og den avhengige variabelen (linje 74-76), fremfor å kunne uttrykke de matematiske operasjonene. De beskrev først antall klistremerker i rekken av kuber som *K ganget med 4* (linje 72) og tok dermed ikke hensyn til de to endeflatene før læreren kommenterte det senere.

Etter hvert oppdaget Eline enda en utfordring. Hun så at de hadde brukt symbolet K både for antall kuber og antall klistremerker (linje 76). Dersom elevene hadde brukt det samme symbolet for to forskjellige variabler, ville de ikke ha klart å beskrive generaliseringsuttrykket symbolsk, selv om de hadde beskrevet det riktig muntlig. Eline foreslo å endre symbolet for den uavhengige variabelen fra K til L for lengden av kuberekken, slik at de ikke skulle blande sammen antall klistremerker og antall kuber. Eline og Finn skrev strukturen i figurmønsteret med symboler på to forskjellige måter:

Eline:		Finn:
$L \cdot 4 = K$	og	$L \cdot 4 = K + 2$
$K + 2 =$		

Figur 27

Eline mente deretter at K-symbolet, slik hun hadde skrevet det på papiret, ikke representerte det endelige antallet klistremerker. Hun prøvde derfor å innføre variabelen S for å beskrive antallet sidekanter på rekken av kuber, slik at hun fikk to uttrykk som illustrerte sammenhengen i figurmønsteret: $L \cdot 4 = S$ og $S + 2 = K$. Denne sammenhengen representerer strukturen i mønsteret, men Eline innså ikke at hun ikke hadde trengt å bruke S-symbolet. Hun hadde klart å resonnere seg frem til en beskrivelse av sammenhengen, men klarte foreløpig ikke å uttrykke den i én generaliseringsformel.

Finn så derimot ikke at han brukte symbolet for K feil, for han tok ikke hensyn til at de to endekantene må være en del av uttrykket for K. I tillegg hadde Finn vansker med å se at han brukte likhetstegnet sitt feil. Det kan skyldes at han kun så på likhetstegnet som et skille mellom spørsmålet og svaret og ikke tok hensyn til at det skal være ekvivalens mellom høyre og venstre side av uttrykket, slik Kieran (1981) beskriver som en utfordring for mange elever.

Utfordringene som er beskrevet ovenfor viser at elevene muntlig klarte å beskrive strukturen i figurmønsteret, men at de slet mer med å transformere det muntlige språket til symbolnivå, som beskrevet av (Duval, 2006).

6. Diskusjon og avsluttende refleksjoner

I denne delen vil jeg drøfte resultatene som er kommet frem i analysen. Dette munner ut i noen konsekvenser for videre undervisning og et forslag til en ny undervisningssekvens. I tillegg blir analyseresultatene sett i sammenheng med det teoretisk forankrede rammeverket. Til slutt kommer jeg med noen generelle betraktninger rundt hvordan undervisning basert på tidlig algebra kan tilrettelegges og refleksjoner rundt en eventuell revidering av rammeverket. Diskusjonen og betraktningene blir sett i sammenheng med de to forskningsspørsmålene som jeg har prøvd å undersøke og besvare gjennom denne studien:

> *Hvilke utfordringer kan femtetrinnselever møte i arbeid med generalisering av figurmønstre?*
>
> *Hvordan kan en undervisningssekvens støtte en gruppe femtetrinnselevers arbeid med generalisering av figurmønstre?*

Formålet med undersøkelsen min var å finne ut mer om generaliseringsprosessen til elever som arbeider med figurmønstre. Litteratursøket antydet at elever kan støte på utfordringer på ulike nivåer underveis i arbeidet med generaliseringsaktiviteter, og at det kan være hensiktsmessig å strukturere disse utfordringene i henholdsvis oppfattelses-, verbaliserings- og symboliseringsnivået (Lee (1996), og refleksjonene mine rundt disse utfordringene følger denne inndelingen.

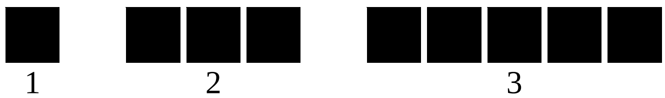
Oppfattelsesnivået

Å gjenkjenne mønstre blir sett på som viktig for algebraisk tenking, fordi det utvikler elevenes generaliseringsferdigheter ved at de får trening i å se etter egenskaper, uttrykke regler og sammenhenger og til slutt vise disse sammenhengene ved bruk av symboler (Radford, 2008). For at det skal foregå en generalisering må elevene innse at sammenhengen gjelder for en vilkårlig figur i figurmønsteret og ikke bare for de første par figurene.

En utfordring er at elever har en tendens til å resonnere rekursivt (Lannin et al., 2006). De ser etter hva som kan forlenge et mønster eller hva som gjentar seg tidligere i figursekvensen for å forutsi hva det neste elementet kommer til å bli. Denne tilnærmingen brukte flere av elevene på femtetrinnet i førundersøkelsen, der over halvparten ikke klarte å finne det neste trinnet i figurfølgen med utgangspunkt i enkle voksende mønstre (Tabell 3). Flesteparten av dem laget også et repeterende mønster da de skulle lage sitt eget voksende mønster. De var trolig ikke kjent med forskjellen på disse, slik at de derfor behandlet begge mønstrene som repeterende. Som tidligere nevnt hadde elevene begrensede erfaringer med voksende mønstre og hadde utfordringer knyttet til å oppfatte strukturen.

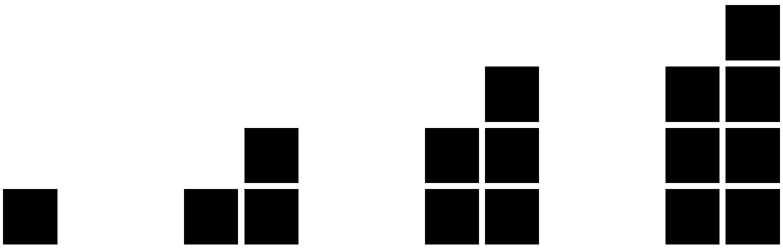
Den rekursive strategien som hadde fungert for elevene ved arbeid med repeterende figurmønstre, ville ikke nødvendigvis hjelpe dem i arbeidet med voksende mønstre, for der må man fokusere på sammenhengen mellom posisjon og antall komponenter for å kunne generalisere. Derfor er det viktig at egenskapene til og forskjellene mellom de to mønstertypene blir klargjort og arbeidet med på forhånd. Undervisningen på barnetrinnet bør derfor gjøre elevene kjent med at det finnes forskjellige typer mønstre og at disse krever ulike tilnærminger. Det bør legges til rette for oppgaver der elevene får jobbet med både repeterende og voksende mønstre.

Da elevene lette etter regelmessigheter i figurmønsteret i oppgave 3 i andre undervisningsøkt, viste det seg at de slet med å dekomponere strukturen i deler av dette mønsteret. De hadde problemer med å oppfatte hvordan de svarte brikkene i figurmønsteret var organisert (Figur 28).



Figur 28 - Strukturen til figurmønsteret i oppgave 3 i andre undervisningsøkt

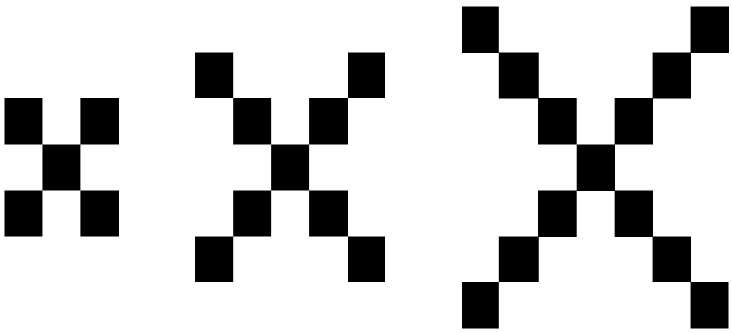
Denne delen av mønsteret var ikke transparent nok til at elevene umiddelbart så sammenhengen mellom posisjonen i figurmønsteret og hvordan brikkene i figurmønsteret var plassert, og de strevde dermed med å utforme en regel for dette forholdet. Da de innså at den eksplisitte tilnærmingen ikke førte frem, valgte flere av dem å bruke en rekursiv tilnærming. Strategien fungerte, ettersom de i første omgang skulle finne antallet brikker i posisjon 8 av mønsteret. Derimot var det ikke i samsvar med hensikten bak disse oppgavene at elevene skulle bruke en rekursiv strategi, ettersom ønsket var at elevene skulle fokusere på å relatere posisjonstallet til antallet brikker i posisjonen. For at elevene skal kunne oppfatte denne sammenhengen er det en fordel å dekomponere og gjenoppbygge figurmønsteret (Kieran, 2018; Radford, 2010). Jeg ba derfor elevene om å omorganisere brikkene i figurmønsteret, og dette bidro til at de klarte å komme frem til et nytt mønster (Figur 29), der det var en tydeligere sammenheng mellom strukturen og posisjonen. Denne visuelle endringen bidro til at elevene så sammenhengen, og på bakgrunn av det klarte de å formulere muntlige regler som beskrev strukturen i mønsteret. I denne oppgaven var konkretiseringsmateriellet – i form av tellebrikker og posisjonskort – avgjørende for at elevene lyktes, sammen med oppklarende spørsmål fra læreren.



1 2 3 4

Figur 29 - Brikkene etter at de ble reorganisert

Oppgave 3 i andre økt var altså generelt ganske krevende for elevene, tatt i betraktning den begrensede erfaringen de hadde med slike oppgaver. I denne oppgaven kan det være mer hensiktsmessig å velge en annen mønstertype som i større grad bidrar til at elevene bruker en eksplisitt tilnærming uten at de må endre på brikkene i figurmønsteret. Rivera (2018) har i den forbindelse sammenlignet i hvilken grad 19 tredjetrinnselever lyktes med å finne sammenhengen mellom antall brikker og posisjonene 4, 5, 10 og 100 for fem ulike mønstertyper. Det mønsteret der flest elever fant sammenhengen mellom mønsterstrukturen og posisjon 100, var kryssmønsteret:



1 2 3

Figur 30 - Kryssmønster

I undersøkelsen til Rivera (2018) greide 14 av 19 elever å beskrive sammenhengen for denne posisjonen. Dette mønsteret virker derfor å være bedre egnet for elever som ikke har spesielt mye erfaring med voksende mønstre fra før enn mønsteret som opprinnelig ble brukt i oppgave 3 i andre undervisningsøkt, fordi det er mer transparent. Elevene trenger ikke å endre på plasseringen av brikkene og får dermed hjelp til å oppfatte mønsterstrukturen.

Til tross for at den opprinnelige oppgaven var vanskelig for femtetrinnselevene, opplevde jeg at den ga dem et innblikk i hva arbeid med voksende figurmønstre kan innebære. For det første fikk de erfaring med at i enkelte mønstre kan det være lønnsomt å omorganisere brikkene for å få et klarere bilde av strukturen i mønsteret. For det andre fikk de erfaring med at det samme mønsteret kan oppfattes og beskrives på flere måter. Oppgaven bidro til diskusjon og refleksjon, men samlet sett mener jeg likevel at denne oppgaven kom litt for tidlig for de fleste elevene. Valget av eksempler og oppgaver er av avgjørende betydning for hvorvidt elever klarer å oppfatte et algebraisk nyttig mønster.

Da elevene skulle finne hvor mange klistremerker de trengte for å lage en rekke kuber med lengde fra 1 til 10 i The cube sticker problem, begynte samtlige med en eller annen form for tellestrategi. Denne strategien anbefaler Lannin (2003) som et startpunkt for å få en visuell oppfattelse av oppgaven og det geometriske skjemaet (her i form av multikuber), men det kan bli vanskelig for elevene å finne antall klistremerker for lange rekker av klosser når de skal telle seg oppover. Flere av elevene gikk da også raskt bort fra denne strategien og over på en rekursiv strategi uten at læreren trengte å nevne det da de forsto at det var en sammenheng mellom antall kuber og antall sideflater.

Mange elever prøvde å doble antall klistremerker da de skulle gå fra posisjon 10 til 20, altså en helhet-objekt-strategi. Da kan det bli utfordrende å lage en regel eller et uttrykk for enhver lengde av klossene (Lannin, 2005), spesielt hvis lengden av rekkene ikke bare er hele multiplikasjoner av 10. De hadde brukt en numerisk tilnærming fremfor en figurativ og prøvde å tilpasse tall og verdier fra mønsteret til en generell regel, noe Barbosa og Vale (2015) mener kan skyldes at matematikk for mange elever handler om å manipulere tall, talluttrykk og algoritmer. Jeg ledet derfor oppmerksomheten til elevene fra å tenke tallverdier og over til figurmønsteret og ba dem om å sjekke om svaret deres ble riktig ut fra mønsteret. Da de så på det større mønsteret og brukte kubene aktivt, klarte de å resonnere seg frem til at det første forslaget deres ikke stemte. Det endrede fokuset kan ha bidratt til at elevene ikke brukte helhet-objekt-strategien i de etterfølgende generaliseringsoppgavene.

Prøve-og-feile-strategien skapte problemer for to elever i oppgave 3 i The cube sticker problem, ettersom de var mer opptatt av å sette opp et regnestykke enn å bruke kubene. De så dermed ikke en sammenheng mellom figurmønsteret og regelen, og det ble det vanskelig for dem å generalisere. Becker og Rivera (2005) sier at elever som mislykkes med å generalisere ofte starter med en numerisk tilnærming. De prøver å generalisere ut fra tallene eller verdiene i oppgaven. Det er derfor viktig å lede elevene mot sammenhengen mellom figurer og regnestrategier, for eksempel ved å legge til rette for resonnering rundt regneoperasjonene. Jeg henviste da tilbake til figurmønsteret, altså den visuelle fremstillingen, og oppfordret dem til å bruke det mer aktivt. Dette bidro til at de forsto at de måtte ta hensyn til endene på kubene og subtrahere 2 fra 150 for å finne samlet antall klistremerker på de fire sideflatene.

For at elevene skal kunne oppfatte strukturen i mønstre og se sammenhengen mellom avhengige og uavhengige variabler er det viktig at læreren retter fokuset til elevene mot mønsteret og forklarer at de må ta utgangspunkt i det for å komme i mål med oppgaveløsingen. Warren og Cooper (2008) anbefaler dessuten at man starter med lave inngangsverdier og gir elevene mulighet til å snakke om sammenhengene i mønsteret for gradvis økende posisjoner. Det første fokuset i undervisningssekvensen bør derfor være selve mønsteret, og ikke på tall eller formler. I en innlæringsfase der elever skal fokusere på sammenhengen mellom avhengig og uavhengig variabel kan det være en fordel å ikke gi dem for krevende strukturer å jobbe med. Figurmønstrene bør være såpass transparente at de ser sammenhengen ganske fort, slik at ikke den rekursive strategien blir den mest effektive for dem.

Verbaliseringsnivået

Elevene i studien min brukte først ord som for eksempel «oppover» i stedet for «vokser», «plass» i stedet for «posisjon» osv. I henhold til Warren (2006) er bruken av et naturlig språk en nødvendig forutsetning for at elevene senere skal kunne utvikle en hensiktsmessig algebraisk notasjonsstrategi. De matematiske begrepene som blir innført må kunne knyttes til noe de forstår fra før. Som tidligere nevnt, beskrev noen av elevene mønsteret med riktige tallverdier for hver posisjon. De brukte derimot ikke posisjonsbegrepet i forklaringene sine før læreren ba dem om det, men klarte da å relatere tallverdiene til antall brikker i posisjonen. Utfordringen er at hvis elevene bruker tallene fra en konkret oppgave i stedet for relevante matematiske begreper når de resonnerer, blir det vanskelig å gå fra det spesielle til det generelle, altså å kunne generalisere. Som påpekt i føranalysen er det derfor en fordel om læreren introduserer fagspesifikke begreper i forkant av oppgaveløsingen og kontinuerlig minner elevene på å bruke disse begrepene aktivt (Schleppegrell, 2007). Når læreren eksempelvis innfører og fokuserer på posisjonsbegrepet, forsterker det inntrykket av at *posisjon* er sentralt for å oppfatte strukturen i mønstrene. Dette kan bidra til at elevene i større grad fokuserer på sammenhengen mellom den avhengige og den uavhengige variabelen og dermed klarer å uttrykke den matematisk – enten med ord eller symboler.

Selv om flere av elevene i starten hadde vansker med å bruke fagbegrepene som ble innført, virket det som det som om de var innstilt på å bruke dem aktivt (jamfør samtaleeksemplene i analysen). Læreren korrigerte elevene, og elevene korrigerte også hverandre, underveis i prosessen. Et eksempel på det var da den ene eleven sa at det var *15 brikker på plass 8* og en annen elev påpekte at de var i *posisjon 8*. Enkelte elever benyttet posisjonsbegrepet i den siste undervisningsøkten også, der de omtalte en rekke av 10 kuber som *posisjon 10* i figurmønsteret. De hadde forstått at de kunne bruke begrepet også i andre, lignende situasjoner. Det er altså sentralt at læreren klarer å oversette elevenes hverdagsbegreper til fagspesifikke begreper, samt at læreren motsatt klarer å definere begrepene med ord og uttrykk som elevene kjenner fra før. Det er også en fordel om elevene får oppgaver som legger opp til at de kan diskutere og reflektere rundt de matematiske begrepene, prosessene og ideene, slik at de kan utvikle et hensiktsmessig begrepsvokabular.

(Mason et al., 2005) forklarer at når en elev uttrykker hva hun eller han ser i mønsteret, vil det utløse refleksjoner rundt trekkene og egenskapene til mønsteret. Dette kan bidra til at både eleven selv og andre elever oppdager sammenhengen mellom for eksempel posisjon og antall brikker. Mason et al. påpeker videre at det å si høyt hva man ser er en funksjonell fremgangsmåte for å finne mening i mønstre. En arbeidsform som kan være hensiktsmessig i så måte, er par- eller gruppearbeid. Da får elevene muligheten til å uttrykke resonnementene sine verbalt. Elevene i studien min snakket sammen om oppgavene de fikk (jf. samtaleutdragene som er gjengitt i analysekapittelet), og de hjalp hverandre med å bruke de riktige begrepene og å beskrive mønstrene. Den muntlige aktiviteten bidro også til at jeg i større grad kunne forstå hvordan de beskrev generaliseringene sine. Samtidig var elevene i studien min i utgangspunktet muntlig aktive elever. Et viktig perspektiv er at elever som sliter med å forstå noe, heller ikke alltid klarer å uttrykke det verbalt. Læreren må derfor for det første etablere et undervisningsmiljø som føles trygt, og for det andre forklare elevene at de ikke skal komme frem til ett riktig svar, slik de kanskje er vant til, men sammen resonnere ut fra gitte mønstre.

I The cube sticker problem begrunnet elevene generaliseringene sine på to måter: med generiske eksempler og empiriske eksempler (jf. analysekapittelet), slik også studien til Lannin (2005) viste. En av grunnene til at elevene brukte empiriske eksempler, kan være at de var mest vant til disse fra tidligere undervisning. Lærere bruker ofte eksempler for å illustrere ulike formler eller regler. Dette kan bidra til at elevene får for lite trening i å utforme gyldige begrunnelser og får en oppfatning av at det å vise til konkrete regneeksempler er tilstrekkelig for å begrunne hvorfor noe gjelder generelt. Elevene bør få muligheten til å diskutere og resonnere rundt ulike typer begrunnelser – både gyldige og ikke gyldige – for å få mer innsikt i hva begrunnelser er og reflektere rundt andre elevers begrunnelser. På den måten kan man skape en forventning hos elevene om at alle generaliseringer må begrunnes tilstrekkelig. Når elever blir bedt om å relatere regelen de har funnet til figurmønsteret, vil et slikt krav kunne lede dem til å undersøke mønsteret grundigere, slik at de får større innsikt i sammenhengen mellom generaliseringsregelen og figurmønsteret. (Blanton & Kaput, 2002, s. 25) hevder at begrunnelser i enhver form er en sentral del av å kunne resonnere algebraisk, ettersom elevene da blir vant til å stille spørsmål og formulere antagelser med tanke på å kunne generalisere.

Symboliseringsnivået

Selv om mange elever klarer å oppfatte et mønster i tidlig alder, er det stor overgang fra å kjenne igjen mønstre til å kunne beskrive dem matematisk, for eksempel ved hjelp av algebraiske symboler (Lannin, 2005; Moss & McNab, 2011). En utfordring kan blant annet være at elevene antar at et symbol kun kan representere én verdi, og i studien sa da også femtetrinnseleven Cecilie tydelig fra om at hun var vant til at et symbol sto for et bestemt tall. Et eksempel fra analysen indikerer også dette, da Are ville bruke symbolet T for de to endeflatene på kubene og mente at T alltid ville være 2. Dette hindret Are i å gå fra å uttrykke sammenhengen for generaliseringen muntlig til å angi den som en regel, fordi han trodde at den ukjente (symbolet) bare kunne være én verdi.

På barneskolen møter elevene vanligvis lineære ligninger av typen x + 2 = 10, der symbolet står for kun én ukjent verdi. Algoritmer og løsningsprosedyrer er en viktig del av undervisningspraksisen. Mange elever som mestrer å utføre symbolske regneoperasjoner, altså å sette inn symboler som for eksempel x eller y for ukjente verdier, ikke klarer å relatere operasjonene til en kontekst som skal beskrive algebraiske operasjoner (Schoenfeld, 1988). For å skape bedre forutsetninger for elevene vil det derfor være viktig å vri undervisningen mot at de får flere erfaringer med problemløsningssituasjoner og andre tidlige algebraopplevelser, fordi slike aktiviteter er utformet for å skape forståelse for generalisert aritmetikk (Blanton & Kaput, 2005). Et viktig moment i arbeidet med figurmønstre og generalisering blir da at elevene gjøres kjent med variabler og etter hvert kan uttrykke sammenhenger ved hjelp av symboler.

En annen utfordring er at elever kan tolke et symbol som en forkortelse for et objekt. For eksempel valgte elevene i studien som regel første bokstav i et ord som symbol for hele ordet eller begrepet (som *K* for *klistremerker* og *L* for *lengde*). Barn lærer tidlig å knytte den første bokstaven i et ord til hele ordet, for eksempel *a* for *ape* og *b* for *bie*, der bokstavene/symbolene blir en merkelapp for ordene. Dette er også utbredt i innenfor matematikkfaget, der for eksempel bokstaven g brukes for *gram*, m for *meter* osv. Slike eksempler og situasjoner kan bidra til at elevene oppfatter og anvender variabler som et objekt (McNeil et al., 2010), og MacGregor og Stacey (1997) fant at denne misoppfattelsen var utbredt hos elever som hadde fått opplæring i at symboler kunne representere forkortede ord. Selv om elevene i denne undersøkelsen prøvde å tilpasse symbolene til objektene, som nevnt ovenfor, virket det som om de innså at symbolene representerte varierende mengder.

De fleste av elevene i denne undersøkelsen hadde i liten grad arbeidet med matematiske symboler før og trengte derfor en kort innføring i symbol- og formelbegrepet, jamfør da

Cecilie spurte om hva en formel er (linje 59 i samtaleutdragene). Arbeid med mønsteroppgaver gir læreren en anledning til å innføre begrepene *symbol* og *variabel* og bidra til at elevene får en oppfatning av hva en variabel representerer. Det er imidlertid avgjørende at læreren klarer å forklare variabelbegrepet til elevene, ellers kan generaliseringen av formelen bli langt vanskeligere. I The cube sticker problem innebærer dette at elevene utforsker figurmønsteret såpass godt at de kan uttrykke en regel for sammenhengen mellom antallet kuber og antallet klistremerker muntlig. Når elevene har oppnådd denne innsikten, skjønner de at antallet kuber varierer i henhold til hvor lang kuberekken er. Da har de også en forutsetning for å innse at symbolet for kubeantallet kan kalles for en variabel.

Da elevene skulle velge symboler på egen hånd med utgangspunkt i mønsteret de arbeidet med, valgte Eline og Finn, som nevnt i analysekapittelet, samme symbol (K) for kuber og klistremerker (samtaleutdrag 72-76). Forskningen viser at mange elever har vansker med å relatere symbolske uttrykk til meningen de skal representere (MacGregor & Stacey, 1997), og femtetrinnselevenes arbeid med kubemønstre viste at det var store forskjeller på i hvilken grad elevene klarte å beskrive mønsteret med symboler. Prosessen fra å oppfatte mønsteret til å utforme en generaliseringsformel for det, ble en utfordring for enkelte elever. Samtaleutdragene mellom Eline og Finn fra analysekapittelet er eksempler på dette. Disse elevene innførte den ekstra variabelen S, glemte til tider å relatere symbolbruken til mønsteret og hadde vansker med å forstå hva likhetstegnet representerer. Det er grundig dokumentert at mange elever betrakter likhetstegnet som en markør for å utføre en utregning eller et symbol for at man nå skal skrive inn et svar (Kieran, 1981), og arbeid med figurmønstre kan være en inngangsport til å jobbe mer med ekvivalens, noe som kan være sentralt for at elevene skal klare å representere matematiske operasjoner algebraisk.

Til tross for utfordringene, viser et eksempel i analysen (linje 71 i samtaleutdragene) at elever på femtetrinn kan være klare for å se hvordan koeffisienten endrer seg i en lineær relasjon. En elev forsto at hvis kuben ble byttet ut med en figur som hadde seks sidekanter, ville koeffisienten endre seg til 6. Han innså også at i alle rette prismer vil konstanten være 2, siden dette tallet representerer de to figurendene. Her viser eleven at han har utviklet innsikt i hvordan fasongen på figuren kan gjenspeile den lineære sammenhengen i mønsteret. Hvis læreren også innfører andre typer prismer, som for eksempel er trekantet, femkantet eller sekskantet, vil det kunne bli et fint utgangspunkt for å resonnere rundt hvordan generaliseringene endrer seg i de ulike tilfellene.

Refleksjoner rundt funnene fra analysen holdt opp mot rammeverket

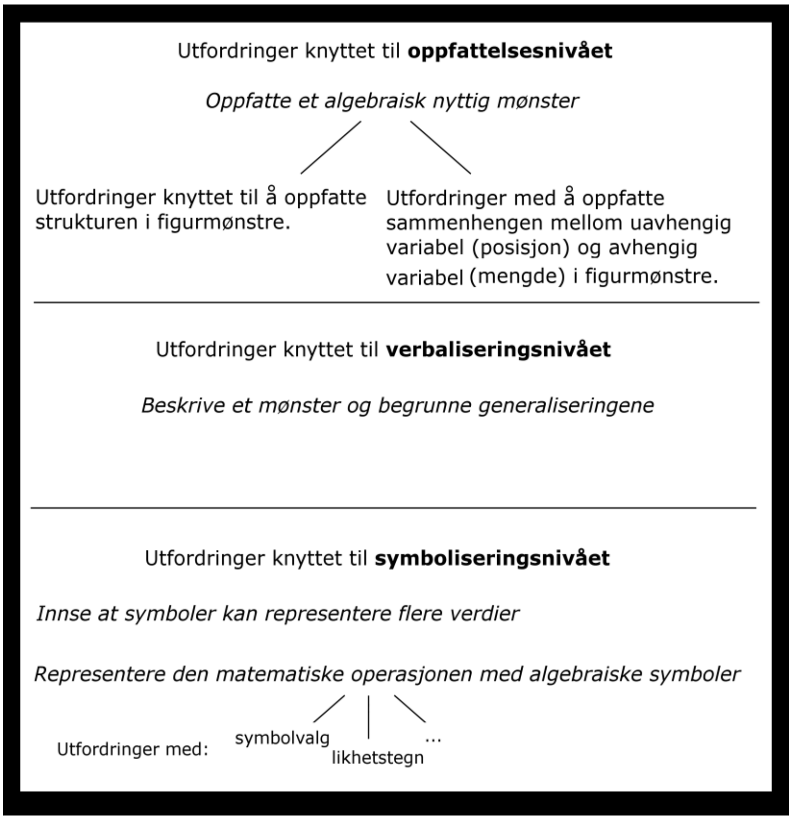
Ifølge det teoretiske rammeverket er en av utfordringene på oppfattelsesnivået at elever kan ha problemer med å se et matematisk nyttig mønster. Ut fra analysene i denne studien ser et element av dette ut til å være i hvilken grad de greide å oppfatte strukturen i mønstrene. Dette kom frem i arbeidet med den siste oppgaven i andre arbeidsøkt, der flere av elevene først prøvde å lete etter en sammenheng mellom posisjonen og strukturen på en del av mønsteret og mislyktes. De fleste var først innom en hensiktsmessig strategi, men strukturen i mønsteret og lave inngangsverdier gjorde at de skiftet til en rekursiv strategi.

En annen utfordring på oppfattelsesnivået som også virket å være viktig for om elevene så et algebraisk nyttig mønster, var i hvilken grad elevene klarer å fokusere på sammenhengen mellom posisjon og komponenter i mønsteret. Dette kan for eksempel være knyttet til om elevene benytter numeriske strategier fremfor figurative (Becker & Rivera, 2006) eller om de kan gjenkjenne når det er hensiktsmessig å bruke andre strategier. En rekursiv strategi kan for eksempel fungere godt for å bli kjent med et mønster, men den vil ikke være brukbar når elevene skal finne en generaliseringsregel for ethvert tilfelle. For å få elevene til å bli mer bevisst på hvilke strategier de bruker, samt når de fungerer eller ikke fungerer, vil det være viktig at elevene får flere forskjellige generaliseringsoppgaver der de har mulighet til å reflektere rundt fordelene og ulempene ved å bruke ulike strategier. Den numeriske strategien vil da inngå som en del av det å oppfatte en sammenheng mellom variablene. Dette leder frem mot at oppfattelsesnivået på overordnet plan handler om at elevene skal kunne oppfatte et algebraisk nyttig mønster, som igjen kan deles inn i utfordringer knyttet til å oppfatte strukturen i et mønster og utfordringer med å oppfatte sammenhengen mellom avhengig og uavhengig variabel.

På verbaliseringsnivået var en av utfordringene for elevene i undersøkelsen min å beskrive mønsteret presist nok til at andre kunne forstå det. For eksempel brukte de tall fra oppgavene til å beskrive mønstrene. Warren (2005) fokuserer spesielt på begrepsbruken til elever og sier at mange strever med å tydeliggjøre beskrivelsene sine, men når man begrunner en generalisering, må man i mange tilfeller også beskrive strukturen. Dette tyder på at utfordringer med å beskrive mønsteret og utfordringer med å begrunne generaliseringer tilstrekkelig overlapper og glir inn i hverandre, og det ser heller ikke ut til at det er utbredt i forskningsmiljøet å atskille disse teoretiske kategoriene. I arbeidet med analysematerialet var det også til tider vanskelig å skille kategoriene, slik at det ikke er naturlig å skille dem i et revidert rammeverk.

På symboliseringsnivået var de teoretiske kategoriene i rammeverket knyttet til utfordringer med at elevene hadde vansker med å innse at et symbol kunne representere flere verdier og det å klare å bruke symboler for å beskrive den matematiske operasjonen, og disse kategoriene var sammenfallende med funnene i undersøkelsen min. Symboliseringsnivået utgjorde ikke bare den største utfordringen for elevene – det inneholdt også flest delutfordringer. Når elevene skulle representere matematiske operasjoner med algebraiske symboler, støtte de på utfordringer med å velge symboler, forstå likhetstegnet osv. Kanskje kan det derfor være hensiktsmessig å dele opp denne kategorien i flere underkategorier.

Et revidert rammeverk kan for eksempel se ut som i Figur 31. De ulike nivåene i rammeverket vil ofte være sammenfiltret eller overlappe hverandre. Blant annet kan oppfattelsen av et mønster (oppfattelsesnivået) påvirke hvordan elevene uttrykker sammenhengen i det (verbaliseringsnivået) og motsatt. Derfor vil det ikke være vanntette skott mellom utfordringsnivåene. Når læreren analyserer utfordringene til konkrete elever eller elevgrupper, kan det derfor i enkelte situasjoner være vanskelig å plassere dem i en bestemt kategori. Det viktigste er imidlertid at læreren tar hensyn til elevenes spesifikke utfordringer i designet av undervisningssekvensen.



Figur 31 - Oppdatert rammeverk

Oppsummering av undervisningsøktene og forslag til videre utvikling av undervisningssekvensen

Bakker og van Eerde (2015) beskriver at designforskning kan være en utfordrende forskningstilnærming, men at denne tilnærmingen kan gi belønning i form av bedre undervisningsresultater og større innsikt i et gitt emne. Basert på et utvalg prinsipper fra denne forskningstilnærmingen (som omtalt i metodedelen) var et mål med denne studien å få kunnskap om og innsikt i hvilke utfordringer elever kunne støte på underveis i prosessen frem mot å generalisere et figurmønster ved bruk av algebraiske symboler. På bakgrunn av den oppnådde innsikten ønsket jeg å designe et undervisningsopplegg som i best mulig grad vil ta hensyn til elevenes utfordringer og bidra til at de kan utvikle kunnskaper, erfaringer og strategier som kan gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra enklere for dem.

Med basis i et revidert rammeverk (Figur 31) har jeg registrert elevenes utfordringer i arbeid med generalisering av figurmønstre. I dette avsnittet ser jeg på hvilke konsekvenser denne innsikten vil ha for undervisningssekvensen og kommer frem til enkelte endringer som jeg mener vil utvikle og forbedre den. Det reviderte undervisningsdesignet er presentert i Tabell 7, som innlemmer forandringene jeg foreslår i forhold til det originale undervisningsdesignet. Grunnlaget for disse endringene er beskrevet i de neste avsnittene.

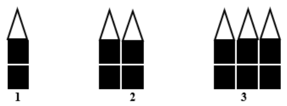
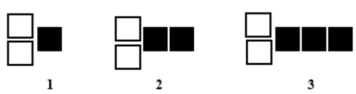
I den første undervisningsøkten var oppgavene utformet på en slik måte at elevene hadde mulighet til å bli kjent med hva voksende mønstre var, og på grunnlag av dette skulle de identifisere og beskrive hvordan mønstrene endret seg. Den siste oppgaven var veldig åpen, siden elevene selv kunne velge hvordan det voksende figurmønsteret skulle se ut og hvilke typer brikker mønsteret skulle bestå av. Enkelte av mønstrene som elevene laget var av en slik karakter at det var vanskelig for dem å beskrive hvordan mønstrene økte. Et eksempel på dette var da to elever laget et mønster bestående av to ulike brikker, der antallet brikker av hver type endret seg kun for annenhver posisjon (Figur 18). En slik utforming gjør det vanskeligere å beskrive mønsteret i sammenheng med posisjonen, derfor vil jeg ta bort denne muligheten, ved at elevene kun kan velge en type brikke når de skal lage mønsteret sitt.

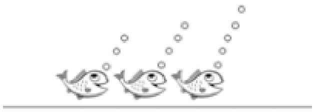
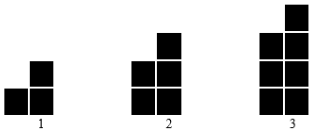
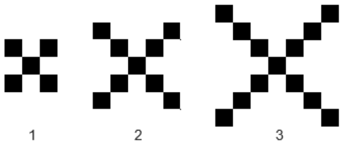
Et annet moment i den første økten var at oppgavene la opp til at den voksende egenskapen til mønsteret var i fokus. Dette gjorde at elevene forklarte hvordan mønstrene økte fra posisjon til posisjon i stedet for å fokusere på sammenhengene i mønstrene. De opprinnelige oppgavene var altså utformet på en måte som la opp til at elevene i stor grad valgte en rekursiv strategi, en strategi som er hensiktsmessig å bruke for lave inngangsverdier. For at elevene skal få et innblikk i hva som skal skje i den andre økten, ønsker jeg heller å avslutte den første økten med en oppgave der de må lage et mønster der de må ta hensyn til at det skal være en sammenheng mellom antallet brikker og hvilken posisjon figuren har i figurrekken. Et forslag til endring av oppgaven er presentert i Tabell 7.

Som forklart i diskusjonskapittelet, ville jeg i den andre undervisningsøkten ha byttet ut den siste figurmønsteroppgaven med et kryssmønster (Figur 30). Dette mønsteret er mer transparent og passer bedre for elever som har begrensede erfaringer med å finne relasjonen mellom posisjon og struktur.

Den siste undervisningsøkten velger jeg å beholde som den er, ettersom problemsituasjonen gir elevene muligheter til å resonnere rundt symbolbruk og sammenhengen mellom den avhengige og den uavhengige variabelen. I tillegg fungerte The cube sticker problem godt for å tydeliggjøre for læreren hvilke strategier elevene brukte (tellestrategi, numerisk strategi, rekursiv strategi, helhet-objekt-strategi) og bevisstgjøre elevene på hvilke strategier som var hensiktsmessige. Det var riktignok nødvendig å hjelpe elevene med å forstå at det er viktig å se uttrykkene i sammenheng med det geometriske mønsteret, men dette vil nok være nødvendig samme hvilket mønster elevene jobber med når det er første gang de skal generalisere et mønster.

Tabell 7 - Designet av den reviderte undervisningssekvensen

Oppg.	Undervisningsøkt 1	Undervisningsøkt 2	Undervisningsøkt 3
1	Tegn et mønster eller lag ditt eget mønster ved hjelp av brikkene.	Lærer introduserer kolonne og rad. Etterpå lager elevene figurer med forskjellige antall rader og kolonner og nummeret på radene. Lærer forklarer hva posisjonen i et mønster og innfører posisjonskort	Hvor mange klistremerker vil dere trenge for å lage en rekke med lengde 1 til 10? Forklar hvordan dere bestemte disse verdiene.
2	Kopier dette voksende mønsteret enten med brikker eller tegning. Hvordan vokser mønsteret?  	a) Lag mønsteret som på tegningen. Sett på posisjonskortene. b) Finn posisjon 5 og 9 i mønstrene. c) Forklar hvordan mønstrene vokser i forhold til posisjonen.  	Hvor mange klistremerker vil dere trenge til en rekke med lengde 20? Hva med lengde 50? Forklar hvordan dere bestemte disse verdiene.

3	Fortsett dette voksende mønsteret. Beskriv hvordan det vokser. 	Bruker samme spørsmål som i 2a), 2b) og 2 c). 	Se for dere at en bestemt rekke trenger 150 klistremerker. Hva er lengden på denne rekken? Forklar hvordan dere har funnet svaret.
4	Samarbeid to og to. Bruk bare én type brikker. Lag to voksende mønster der det er en sammenheng mellom antallet brikker og hvilket nummer det er i figurrekken	Bruker samme spørsmål som i 2a), 2b) og 2c) 	Forklar hvordan dere kan finne antall klistremerker som trengs for enhver rekke med klosser. Skriv en formel som kan brukes til å finne svaret på dette.

Avsluttende refleksjoner

I denne studien ble figurmønstre brukt som en inngang til tidlig algebra. Det ble utarbeidet og designet et undervisningsopplegg som omfattet flere generaliseringsoppgaver som elevene skulle jobbe med frem mot målet om å generalisere et mønster ved hjelp av algebraiske symboler.

Elever har en naturlig tilbøyelighet til å legge merke til og diskutere regelmessighetene de oppfatter i sammenheng med figurmønstre. Disse egenskapene danner grunnlaget for å kunne konstruere, utprøve og videre begrunne generaliseringer. I undersøkelsen min oppdaget for eksempel Cecilie (linje 71 i samtaleutdragene) at figurformen er avgjørende for det matematiske uttrykket.

Arbeid med figurmønstre gir også læreren mulighet til å styre og tilpasse hva fokuset for undervisningsøkten skal være ut fra hvilke erfaringer elevene har med slike oppgavetyper. Ved lavere årstrinn kan for eksempel målet være å finne et mønster og reflektere, begrunne og resonnere rundt dette, der læreren motiverer elevene til å bruke generiske eksempel som begrunnelse (som i linje 56 i samtaleutdragene). Senere kan elevene trene på finne sammenhengen mellom uavhengige og avhengige variabler ut fra ulike typer mønstre med varierende vanskelighetsgrad. For eldre elever med mer erfaring i å jobbe med generaliseringsoppgaver kan fokuset for eksempel være deduktiv argumentasjon, finne flere ekvivalente generaliseringer av samme mønster eller å knytte egenskaper ved mønsteret til lineære grafer.

Figurmønsteroppgaver skal ifølge Lannin et al. (2006) fremme et bredt spekter av strategier, og oppgavene bør inneholde situasjoner som både oppfordrer til rekursiv og eksplisitt argumentasjon. I studien min fikk elevene mulighet til å bruke ulike strategier og konstruere regler som representerer strukturen i mønsteret, og det bidro til at de opparbeidet seg erfaringer med å reflektere rundt fordeler og begrensinger ved enkelte av strategiene. De opplevde blant annet at rekursiv strategi og helhet-objekt-strategien ikke alltid er hensiktsmessig å bruke. Undersøkelsen viser at elever ofte bruker empiriske eksempler når de begrunner og verifiserer påstandene sine. Dette er ikke en tilstrekkelig form for begrunnelse, og det er derfor viktig å legge til rette for oppgaver, samtaler og undervisning som oppfordrer elever til å utvikle en forståelse for generalitet og til å begrunne mer generelt.

I arbeidet med ulike typer generaliseringsoppgaver vil de fleste elever møte utfordringer i tilknytning til oppfattelses-, verbaliserings- og symboliseringsnivået i større eller mindre grad, samme hvor mye man som lærer legger til rette for at elevene skal lykkes med å generalisere. Dette er ikke problematisk i seg selv, fordi målet ikke bør være å redusere utfordringene mest mulig. Målet bør heller være å legge til rette for en undervisning der flest mulig elever opplever både utfordringer og mestringsfølelse i arbeidet med generaliseringsoppgavene, og da må man ta hensyn til den enkelte elev. Her kan det da være greit å støtte seg til et rammeverk som kartlegger utfordringene. Lærerens tilrettelegging og tiltak er avgjørende for i hvilken grad elevene utvikler algebraisk tenkning. Læreren må utforme aktiviteter som utfordrer elevene, gi utfyllende forklaringer og stille veiledende spørsmål som krever at elevene reflekterer rundt observasjonene (Kieran et al., 2016). For å ivareta dette aspektet tok jeg i studien min utgangspunkt i en føranalyse, der jeg designet en undervisningssekvens ut fra faglige læringsmål og elevenes utgangspunkt. Med basis i det opprinnelige rammeverket ble de ulike øktene tilpasset ut fra elevenes utfordringer.

Studien viser at elevene på femtetrinnet var i stand til å lære grunnleggende algebraiske strategier og tilegne seg ferdigheter i algebra. Elevene utvikler derimot ikke algebraiske ferdigheter uten at de får tilstrekkelig hjelp og støtte i undervisningen (Kieran et al., 2016), og de trenger tid og muligheter til å utvikle dem. I undervisningssekvensen min var det spesielt viktig å se hvilke utfordringer elevene hadde på ulike nivåer og håndtere disse underveis i undervisningsøktene. For eksempel trengte elevene mer innsikt i at et symbol kan representere en variabel, og dette poenget ble tatt opp både i plenum og underveis i oppgaveløsingen.

Elever trenger øving i å reflektere i arbeidet med figurmønstre, men det er viktig at også læreren stiller spørsmål ved og tenker gjennom egen undervisning – både før, under og etter at den er gjennomført. Refleksjonene bør i stor grad basere seg på inntrykk og observasjoner fra undervisningsøktene og sees i lys av forskning på tidlig algebra. Dette aspektet ivaretok jeg ved å ta utgangspunkt i relevant teori da jeg designet undervisningssekvensen, samt å be en kollega om å observere undervisningen og fungere som samtalepartner underveis. Jacobs, Lamb og Philipp (2010) mener at observasjon er en viktig del av undervisningen, og dette krever god oppmerksomhet, kunnskap om hva som skal observeres i situasjonen og at man kan reagere hensiktsmessig mens man underviser. I samtalene med kollegaen min kom det for eksempel frem at mønsterstrukturen i en av oppgavene var lite transparent (jf. diskusjonskapittelet) og derfor bør byttes ut.

Når lærere skal legge til rette for undervisning som skal støtte generalisering, er det flere momenter som avgjør i hvilken grad elevene får et positivt utbytte av undervisningen. Valg av oppgaver, hensiktsmessige figurmønstre, konkretiseringsmateriell (for eksempel posisjonskort) og klare mål for undervisningsøkten kan bidra til å støtte elevene i arbeidet. I tillegg er det viktig at læreren deltar aktivt med veiledning og spørsmål som fremmer refleksjon, begrunnelse og generalisering. I første oppgave i undervisningsøkt 1, da elevene skulle tegne sine egne mønstre, ble for eksempel elevene bedt om å fortelle hvorfor det de hadde tegnet var et mønster. Dette ble brukt som en innfallsvinkel til å snakke om hva som kjennetegner ulike mønstertyper.

Studien min viser at elevene i arbeidet med figurmønstre utviklet de algebraiske ferdighetene sine underveis i undervisningssekvensen. Elevene begynte å bruke begreper som de tidligere ikke hadde vært borti. Dette er i overenstemmelse med ønsket om at elever skal se nytte i å bruke fagspesifikke begreper, slik at det blir enklere for dem å generalisere ut fra mønstre. Oppgavene bidro til at enkelte elever begynte å se på variabler som dynamiske størrelser, og denne innsikten kan gjøre overgangen til formell algebra enklere for elever. De får et innblikk i at det er en sammenheng mellom aritmetikk og algebra. Det å introdusere tidlig algebra på barnetrinnet kan være den mest avgjørende faktoren for at elevene skal lykkes med algebra på lang sikt (Knuth et al., 2016).

7. **Litteraturliste**

Amiel, T., & Reeves, T. C. (2008). Design-based research and educational technology: Rethinking technology and the research agenda. *Journal of educational technology and society, 11*(4), 29-40.

Argyris, C. (1996). Actionable knowledge: design causality in the service of consequential theory. *The Journal of Applied Behavioral Science, 32*(4), 390-406. https://doi.org/10.1177/0021886396324004

Backman, K., & Attorps, I. (2012). Teaching mathematics in the pre-school context. *US-China Education Review B, 1*, 1-16.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrech: CD Beta Press.

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. London: Routledge.

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Red.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: examples of methodology and methods* (s. 429-466). Dordrecht: Springer Netherlands.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57-70.

Beatty, R., & Moss, J. (2006). Multiple vs. numeric approaches to developing functional understanding through patterns–affordances and limitations for Grade 4 students. I S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Red.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 87-94): Merida. Citeseer.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. I H. L. Chick & J. L. Vincent (Red.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 121-128). Melbourne.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders’ figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. I H. L. Chick & J. L. Vincent (Red.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (s. 95-101).

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2002). Developing elementary teachers’ algebra “eyes and ears”: Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice. *annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA*.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. I M. Jonsen Hoines & A. Fuglestad (Red.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (s. 135-142). Bergen

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 412-446.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (s. 5-23). Berlin: Springer.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* . Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 137-159). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Burkhardt, H. (2006). From design research to large scale impact. I J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 121-150). London: Routledge:

Calder, B. J., Phillips, L. W., & Tybout, A. M. (1982). The concept of external validity. *Journal of Consumer Research, 9*(3), 240-244. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/2488620

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (s. 107-138). Springer.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. *The twenty-second annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education*.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2006). Design research from a learning design perspective. I J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 29-63). London: Routledge.

Cohen, L. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early algebraization* (s. 187-214). Berlin: Springer.

Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review, 31*(3), 281-301.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. I C. Mammana & V. Villani (Red.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21century* (s. 37-52). Dodrecht: Springer.

Duval, R. (2006). a cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345.

Ely, R., & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 19-38.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/27970471

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. I M. Wittrock (Red.), *Handbook of research on teaching* (bd. 3, s. 119-161). New York: MacMillan.

Gardella, F. J., & Tong, V. (2002). Linguistic considerations in the acquisition and teaching of mathematics. *WORD, 53*(2), 185-195. https://doi.org/10.1080/00437956.2002.11432527

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223. https://doi.org/10.2307/2573808

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/20720130

Johansen, K. (2011). *Transformeringsprosesser i algebra: En case studie om elevers generaliseringsarbeid med figurmønsteroppgaver på 7. trinn* (Mastergradsavhandling, Avdeling for lærer og tolkeutdanning). Høgskolen i Sør-Trøndelag, Trondheim.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding IE. Fennema & T. A. Romberg (Red.), *Mathematics Classroom Promote Understandiing* (s. 133-155). New York: Routledge.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? . I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in early years* (s. 5-17). New York: Routledge.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (s. 344-352).

Karlsen, L. (2014). *Tenk det!: utforskning, forståelse og samarbeid-elever som tenker sjæl i matematikk*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics, 12*(3), 317-326.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 79-105). Cham: Springer International Publishing.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Cham: Springer International Publishing, Cham.

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. & Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan, 97*(6), 65-68. https://doi.org/10.1177/0031721716636877

Kouba, V. L. (1989). Common and Uncommon Ground in Mathematics and Science Terminology. *School Science and Mathematics, 89*(7), 598-606.

Kunnskapsdepartementet. (2018). *Fornyer innholdet i skolen* (132-18). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(7), 342-349.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lannin, J. K., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 87-106). Dordrecht: Springer Netherlands.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics, 26*(3), 24-42.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. I K. Stacey, H. L. Chick & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (s. 45-70). Dordrecht: Springer.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Sudents' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational studies in mathematics, 33*(1), 1-19.

Marzano, R. J., & Pickering, D. J. (2005). *Building academic vocabulary: Teacher's manual*. Alexandria: Association for Supervision and Curriculum Development.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Springer Netherlands.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. I J. J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 79-116). New York: Routledge.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: SAGE.

McKenney, S. E., & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. London: Routledge.

McNeil, N. M., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A. C., Asquith, P., Knuth, E. J. & Alibali, M. W. (2010). A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology, 102*(3), 625-634. https://doi.org/10.1037/a0019105

Mintrop, R. (2016). *Design-Based School Improvement: A Practical Guide for Education Leaders*. Cambridge: Harvard Education Press.

Moss, J., & McNab, L. S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 277-301). Berlin: Springer

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/bf03217544

Munthe, E. (2013). Planlegging av undervisning. I R. J. Krumsvik & R. Säljö (Red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning: En antologi* (s. 203-227). Bergen: Fagbokforlaget.

Nilssen, V. L. (2012). *Praktisk-pedagogisk utdanning - en antologi.* Bergen: Universitetsforlaget.

Phillips, D. (2006). Assessing the quality of design research proposals. I J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Red.), *Educational design research*. London: Routledge.

Plomp, T., & Nieveen, N. M. (2010). *An introduction to educational design research: Proceedings of the seminar conducted at the East China Normal University, Shanghai (PR China), November 23-26, 2007* Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO).

Pool, J., & Laubscher, D. (2016). Design-based research: Is this a suitable methodology for short-term projects? *Educational Media International, 53*(1), 42-52. https://doi.org/10.1080/09523987.2016.1189246

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 107-111). Dordrecht: Springer Netherlands.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics, 30*(2), 2-7. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/20749442

Reeves, T. C. (2006). Design research from a techology perspective. I J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 52-66). London: Routledge.

Rivera, F. D. (2013). Graded pattern generalization processing of elementary students (ages 6 through 10 years). I *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics* (s. 111-150). London:Springer.

Rivera, F. D. (2018). Pattern generalization processing of elementary students: Cognitive factors affecting the development of exact mathematical structures. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9). https://doi.org/10.29333/ejmste/92554

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 140-155.

Rivera, F. D., Knott, L., & Evitts, T. A. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *The Mathematics Teacher, 101*(1), 69-75. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/20876033

Sasman, M. C., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students'generalisation thinking processes. I O. Zaslavsky (Red.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 161 - 168). Haifa.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & Writing Quarterly, 23*(2), 139-159. https://doi.org/10.1080/10573560601158461

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*(2), 145-166. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2302_5

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Red.), *Perspectives on school algebra* (s. 141-153). London: Springer.

Strachota, S., Knuth, E. & Blanton, M. (2018). Cycles of Generalizing Activities in the Classroom. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (s. 351-378). Cham: Springer International Publishing.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 8-19.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/mat1-04

Utdanningsdirektoratet. (2016). Hovedresultater fra TIMSS 2015. Hentet 09. mai 2019 fra https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hovedresultater.pdf

Vacca, R. T., & Vacca, J. L. (2005). *Content area reading: Literacy and learning across the curriculum* (8. utg.). Boston: Pearson.

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. I J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen & T. Plomp (Red.), *Design Approaches and Tools in Education and Training* (s. 1-14). Dordrecht: Springer Netherlands.

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (2006). *Educational design research*. London: Routledge.

Van Eerde, D. (2013). Design: Looking into the heart of mathematics education. I Zulkardi (Red.) In Zulkardi (Red.) *Proceeding of the First South East Asia Design/ Development Research (SEA-DR) International Conference* (s. 1-11). Palembang

Wagner, S., & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. *Research issues in the learning and teaching of algebra, 4*, 220-237.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137. https://doi.org/10.1007/bf03217374

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 305-312.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. I S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 377-384): Merida. ERIC.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational studies in mathematics, 67*(2), 171-185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Warren, E., Miller, J. & Cooper, T. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

8. Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv til foreldre

Vil barnet ditt delta i forskningsprosjektet «Matematisk generalisering»?

Til foreldre og foresatte for elever på 5. trinn ved Ila skole
Hei, jeg heter Tor Arne Johannessen og jobber som lærer ved Ila skole. Dette året er jeg også masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et forskningsprosjekt knyttet til masteroppgaven i matematikkdidaktikk. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for barnet ditt.

Formål
I løpet av høsten vil jeg gjennomføre en undersøkelse som er knyttet til tidlig algebra og generalisering. Hensikten er å finne ut hvilke strategier elever benytter når de jobber med visuelt voksende mønster og hvordan disse mønstrene kan hjelpe dem med å komme frem til en generalisering av mønsteret. I tillegg ønsker jeg å finne ut hvordan jeg som lærer kan støtte dem best mulig i dette arbeidet. I den sammenheng ønsker jeg å bruke elever fra 5. trinn på Ila skole for å få datamateriale til prosjektet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får 5. trinnselever spørsmål om å delta?
Grunnen til at jeg valgte 5. trinnselever til studiet mitt var at jeg ønsket at de liten grad hadde jobbet med voksende mønsteroppgaver tidligere, og at jeg tror elever i den aldersgruppen vil like å jobbe med slike oppgaver. I tillegg vil oppgavene dekke følgende kompetansemål fra læreplanen:

Elevene skal kunne utforske og beskrive strukturar og forandringar i geometriske mønster og talmønster med figurar, ord og formlar

Hva innebærer det for deg å delta?
Prosjektet vil bestå av tre undervisningsøkter på omtrent 1 time hver, og jeg trenger omtrent 10 elever fra trinnet. Elevene vil få oppgaver og problemstillinger som de skal jobbe med i små grupper på 2-4 deltakere, der de reflekterer og begrunner valgene de gjør i oppgavene sine. Læreren skal fungere som en veileder som hjelper dem i læringsprosessen. For å kunne analysere læringsepisodene i etterkant vil jeg bruke notater, elevbesvarelser og lyd- og videoopptak. Resultatene av studien vil bli brukt i masteroppgaven min ved NTNU.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet, og hvis barnet deltar, kan samtykket trekkes tilbake uten videre begrunnelse. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for eleven hvis han/hun ikke vil delta eller senere velger å trekke seg.

Personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker opplysninger dine
Opplysningene vil bare bli brukt til formålene som er fortalt om i dette skrivet. Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt og i samsvar med personvernreglene.

- Jeg, veiledere og medstudenter vil ha tilgang til å diskutere datamaterialet (elevtekster og transkripsjon). Videoene vil ikke bli vist til medstudenter eller veiledere.
- Jeg kommer til å oppbevare lyd -og videoopptak i et låst skap, og alt av det skriftlige datamaterialet blir anonymisert.

- Navn vil aldri bli nevnt, men deltakeren kan kjenne igjen tegninger eller skrift hvis det kommer med i oppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes i midten av juni. Da vil lyd- og videoopptak fra prosjektet bli slettet. Skriftlige dokumenter vil bli makulert.

Dine rettigheter
Så lenge eleven kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om eleven,
- å få rettet feilaktige personopplysninger om eleven,
- å få slettet personopplysninger om eleven,
- å få utlevert en kopi av elevens personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av personopplysningene.

Hva gir oss rett til å behandle elevens personopplysninger?
Vi behandler elevens personopplysninger basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Lærer/student Tor Arne Johannessen (tor-arne.johannesen@ou.trondheim.kommune.no)
- Veileder Kirsti Rø ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning (kirsti.ro@ntnu.no)
- Kursansvarlige ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no) /Mari-Ann Igland (mari.a.igland@ntnu.no)
- Personvernombud ved NTNU: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på e-post (personverntjenester@nsd.no) eller tlf. 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Forsker/veileder Student

-- --

Samtykkeerklæring

Elevens navn: ....

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Matematisk generalisering og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at:

- barnet mitt kan delta i matematikkundersøkelsen;
- opplysninger om barnet kan behandles frem til prosjektet er avsluttet i midten av juni 2019.

Signatur

NTNU

Kunnskap for en bedre verden