Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Astrid Hågensen Kleven

Tegning som verktøy i matematikk

En kvalitativ undersøkelse av 23 elevers bruk av tegning i problemløsing

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Benedikte Grimeland og Heidi Dahl
Mai 2019

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Astrid Hågensen Kleven

Tegning som verktøy i matematikk

En kvalitativ undersøkelse av 23 elevers bruk av tegning i problemløsing

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 1.-7. trinn
Veileder: Benedikte Grimeland og Heidi Dahl
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Med oppgaven som nå ligger foran meg, avsluttes mine fem år som lærerstudent. De to siste årene som masterstudent har vært både spennende, krevende og lærerike.

Valg av tema til oppgaven falt på barns bruk av tegning i matematikk. Personlig synes jeg det er spennende, samtidig som det er relevant for lærere i barneskolen. Det kan være nyttig å være bevisst på hvordan tegning kan være et verktøy – både for lærere og for elevene som lager tegningene. Prosessen har vært preget av både opp- og nedturer, men alt i alt er jeg stolt over, og fornøyd med, oppgaven min.

Jeg føler det er på sin plass å takke personene som på hver sin måte har bidratt slik at innleveringen av masteroppgaven er en realitet. De første jeg ønsker å takke er veilederne mine; Benedikte Grimeland og Heidi Dahl – takk for gode tilbakemeldinger og nyttige veiledninger og samtaler underveis. Videre vil jeg takke de ansatte på de to skolene som tok meg imot. Dere var positive fra start til slutt, og det betyr mye for meg. Takk til de 23 elevene som deltok i studien, uten dere ville det ikke vært en studie, og jeg håper dere sitter igjen med en like positiv opplevelse som meg. Til slutt vil jeg takke familien min, kjæresten min og gode venner – som både leser korrektur, bidrar med oppmuntrende ord og som stadig løser problemløsingsoppgaver sammen med meg.

Trondheim, mai 2019

Astrid Hågensen Kleven

Sammendrag

Studien fokuserte på barns bruk av tegning som et verktøy i matematikk. Hensikten med studien var å si noe om hvordan tredjeklassinger bruker tegning som en matematisk representasjon til problemløsing i matematikk. Studiens forskningsspørsmål var: *Hvordan bruker tredjeklassinger tegning i problemløsingssituasjoner?*

Den metodologiske tilnærmingen til oppgaven er kvalitativ. Studien består av intervju og observasjon av 23 tredjeklassinger fra to forskjellige skoler i en mellomstor kommune. Elevene løste tre problemløsingsoppgaver i små grupper på 2-4 elever. Det ble samlet inn totalt 54 elevtegninger og gjennomført 8 gruppeintervju, hvor det ble gjort lydopptak og transkripsjoner. Underveis i oppgaveløsingen ble elevene stilt metakognitive spørsmål som: "Kan du fortelle meg hva du tenkte her?» og «Hva betyr denne delen av tegningen?».

Da datamaterialet skulle analyseres ble det tatt utgangspunkt i allerede eksisterende teorier om barns bruk av tegning, utarbeidet av blant andre Saundry og Nicol (2006), Rellensmann et. al (2017) og Woleck (2001). Det ble sett på elementer knyttet til tegningenes utseende, bruken av tegning, samt prosessen bak å skape tegningene. De ulike kategoriene for bruk av tegning som ble funnet i datamaterialet var tegning som støtte for system, aktiv bruk av tegning, tegning som narrativ og visualisering. Når det kom til hvordan tegningene så ut, så jeg nærmere på grad av detaljer i tegningene, i form av piktografiske og ikoniske tegninger og hvorvidt elevene brukte farger i sine besvarelser.

Resultatene mine viser at elevene brukte tegning som et verktøy for å løse matematiske problem. Flere brukte tegning på samme måte som de ville brukt konkretiseringsmaterialer, om det hadde vært tilgjengelig. Andre elever brukte tegning som et bilde for å holde oversikt over elementene i oppgaven, og brukte tegningen til å telle og sjekke egne løsninger. Elevene brukte også tegning som et kommunikasjonsverktøy, hvor tegningen lot elevene vise hvordan de har tenkt, samt gjorde det mulig for dem å reflektere rundt egen og andres løsningsprosess og kommunisere den med andre. Funnene mine viser at tegning kan være et nyttig verktøy for elevene, gitt at elevene har kunnskap knyttet til og erfaringer med hvordan de skal bruke tegning i matematikk.

Abstract

This study focuses on how children use drawing in mathematics. The purpose of the study was to assess the use of drawing as a mathematical representation of problem-solving by children between the age of 7 and 8 years old. The research question guiding this study was: How do third graders use drawing in problem-solving situations? A qualitative method has been used, and 23 children from two separate schools were interviewed and observed. The students were given three problem-solving tasks in small groups consisting of 2-4 children. A total of 54 student drawings were collected and 8 group interviews were carried out. During the problem-solving process, the children were given metacognitive questions such as “Can you tell me what you were thinking here?”, “What is the meaning behind this part of the drawing?” The interviews were recorded and transcribed afterwards.

To determine how the children used drawing in mathematics, theories about children’s drawing in mathematics by Saundry and Nicol (2006), Rellensmann et. Al (2017) and Woleck (2001) amongst others, were used. I studied both elements of how they used the drawing, and how the drawing looked. The different categories that were found were: Drawing as system support, drawing as a manipulative, drawing as a narrative and visualization. When it comes to what the drawing looked like, pictograms, iconic drawings and the use of colour were studied.

The results show that the children used drawing as a tool for solving mathematical problems. Multiple children used drawing the same way they would have used physical manipulatives, if they had been available. The study also shows that children used drawing as a picture for keeping track of the elements of the problem, and to systematically test possible solutions. Furthermore, the findings show that the children used drawing as a tool for communicating with other children or adults. Their drawing provides an opportunity to reflect around their own process and their product. The study shows that drawing can be a useful tool for children, given that children have experiences with using drawing as a tool for learning

Innhold

Figuroversikt

Tabelloversikt

1. Innledning

Temaet for oppgaven min er bruk av tegning i matematikk, der fokuset sentreres rundt hvordan 23 barn på tredje trinn bruker tegning i problemløsingssituasjoner. Tegning i matematikk er et forskningsområde som har økt i popularitet de siste årene, men det betyr ikke at det på noen måte er forsket ferdig på feltet. Tvert imot finner forskere stadig nye problemstillinger knyttet til tegning i matematikk. Saundry og Nicol (2006, s. 62) presenterte i sin artikkel et ønske om at deres studie skal bidra til at flere ønsker å forske på representasjoner av matematisk tenking for å fylle det de kaller et "tomrom" angående barns matematiske resonnering. Jeg håper jeg etter studien har funnet ut noe om hvordan tredjeklassinger bruker tegning, samt om tegninger virker å være nyttige verktøy for elevene eller ikke.

1.1 Bakgrunn og formål

Tegning er en populær aktivitet hos de fleste unge barn. Mange barn liker å tegne og tegner med ulike hensikter - både hjemme, i lek og i skolesammenheng (Papandreou, 2014). Tegneutviklingen skjer som en naturlig del av barns utvikling og starter lenge før elevene begynner på skolen. Å tegne kommer naturlig for de fleste barn, men skillet mellom å tegne fordi det er gøy og å tegne for å kommunisere noe med andre er ofte stort og overgangen fra det å tegne i fritidssammenheng, til å tegne i skolesammenheng er noe flere forskere mener lærere har for lite kunnskap om (Bakar, 2017; Woleck, 2001).

Tegning er en av barns tidligste representasjoner i matematikk. Barna bruker tegning for å bringe ideene eller tankene sine til overflaten og gjør at de kan kommunisere tankene sine med andre (Woleck, 2001). Et problem som blir presentert i den nåværende forskningen er det som presenteres som et «tomrom» når det kommer til forskning på det som ifølge noen er barns viktigste måter å resonnere og kommunisere på i matematikk; tegning (Saundry & Nicol, 2006; Woleck, 2001). De hevder vi vet for lite om barns måter å uttrykke seg ved bruk av tegning på, og å bruke egne representasjoner til å kommunisere i matematikk og fordi flere forskere antyder at det er et positivt forhold mellom tegning og evnen til å løse problemløsingsoppgaver (K. M. Edens & Potter, 2001, s. 217) kan det være verd å se nærmere på.

Et «problem» er noe som ofte forbindes med noe som er negativt. Ser vi nærmere på betydningen av ordet i seg selv kommer det fra det latinske ordet *proballein* og betyr egentlig «noe som bør drøftes» (Eide & Eide, 2018, s. 92). Matematisk problemløsing er en aktivitet som består av flere prosesser: identifisering av problemet, en tolkning av hva som må gjøres, valg og bruk av en strategi for å løse problemet og til slutt vurdering av løsningens gyldighet (Saundry & Nicol, 2006). Lærerens oppgave er å støtte elever i prosessen, og valg av strategi blir ofte særlig vektlagt hos lærere. Det å «lage en tegning» blir ofte presentert som en mulig strategi i problemløsingssituasjoner for de yngste barna, og jeg ønsker å se nærmere på hvorfor det blir presentert samt om det er en nyttig strategi eller ikke.

Når elevene starter på skolen forventes det at de etter hvert skal bevege seg fra en friere uttrykksform til mer standardiserte og konvensjonelle uttrykksformer og representasjoner i matematikk, som for eksempel matematiske symboler (Bobis & Way, 2018, s. 56). Tegning er en aktivitet og en representasjon barn har med seg fra barnehagen og som er kjent for de fra før. Tegning brukes en del det første året på skolen, men deretter blir det erstattet mer og mer av symboler. Saundry og Nicol (2006) og Woleck (2001) er noen av forskerne som hevder at tegning i matematikk er noe som har fått for lite oppmerksomhet forskningsmessig i årene som har gått og at det derfor mangler tilstrekkelige rammeverk for å undersøke problemet. Siden de gjorde sine undersøkelser har det kommet mye ny forskning, som er utfyllende på det som allerede eksisterer.

Flere forskere har hevdet at unge barn har problemer med å strukturere aritmetiske problem og da spesielt tekstoppgaver i matematikk (Papandreou, 2009; Van Essen & Hamaker, 1990). En mulig forklaring kan ifølge forskerne være at elevene mangler passende, generelle problemløsingsstrategier. Generelle problemløsingsstrategier er ifølge Van Essen og Hamaker (1990, s. 301) de strategiene elevene har for å planlegge og regulere egen løsningsprosess, samt strategiene for å analysere og utforske et problem i seg selv. Min hypotese er at elevenes matematiske tegninger kan fungere som et verktøy som lar de planlegge og regulere løsningsprosessen sin ved at den bidrar med en oversikt over elementene som er sentrale. Samtidig kan de ved hjelp av de visuelle egenskapene i en tegning utforske problemet på et nærmere nivå. Tegningene kan også være nyttige ved å de tilbyr et system for elevene, gitt at de vet hvordan de skal bruke tegningene.

Formålet med oppgaven min er å si noe om hvordan 23 tredjeklassinger bruker tegning i problemløsingssituasjoner i matematikk. Ved å se nærmere på problemløsingsstrategier hos barn håper jeg å si noe om tegningens funksjon og samtidig vise hvordan man kan analysere barns tegninger med den hensikt å si noe om matematikken som ligger i tegningene. Håpet er at studien også kan si noe om hvorvidt tegning er en nyttig strategi eller ikke, og hvordan det eventuelt kan legges til rette slik at tegning kan bli nyttig.

Å lære seg å gjenkjenne det pedagogiske potensialet som ligger i tegneaktiviteter for barn, er ifølge Bobis og Way (2018) en ferdighet det er verdt for alle lærere å tilegne seg. Ved å se nærmere på teorier om bruk av tegning kan lærere og lærerstudenter få kunnskap om hvordan de kan legge opp undervisningen og aktivitetene slik at det støtter elevene i deres prosess med å skape egne representasjoner, samt lære hvordan elevene kan bruke egne representasjoner til å bedre forstå standardiserte representasjoner, modeller eller algoritmer i matematikk. Det er mye forskning på feltet som antyder at det er en positiv kobling mellom tegning og evnen til å løse problemløsingsoppgaver. Flere forskere finner at de barna som velger å tegne, løser oppgaver mer presist og løser mer komplekse oppgaver korrekt enn de som ikke tegner (Bakar, Way & Bobis, 2016; K. Edens & Potter, 2007). På den andre siden trekker K. M. Edens og Potter (2001, s. 217) frem at det er tegn til det de kaller et «positivt forhold» mellom tegning og korrekte matematiske svar (akademisk oppnåelse), men at det ikke finnes konkrete bevis på at det ene fører til det andre.

1.2 Forskningsspørsmål og aktualisering

Problemet jeg har valgt å se nærmere å i min studie, som forskere mener vi har for lite kunnskap om, er hvordan barn uttrykker seg ved bruk av tegning i matematikk og hvordan de bruker egne representasjoner til å kommunisere egne tanker med andre. Problemstillingen som ble komponert ut fra problemområdet mitt er: *Hvordan bruker 23 tredjeklassinger tegning i problemløsingssituasjoner?*

Et argument for å se nærmere på elevers bruk av tegning i matematikk er at forskningen som allerede finnes på feltet plasserer seg i en annen skolekontekst enn hva jeg befinner meg i; den norske skolekonteksten. Ulike læreplaner vil legge ulike føringer både for type undervisning og fokus i skolen. Derfor det både er interessant og aktuelt å se nærmere på tegning i den norske skolen for å kunne si noe mer om hvordan det blir brukt og hvilken hensikt det kan ha for elevers læring.

1.3 Oversikt over oppgaven

Det første jeg ønsker å gjøre er å presentere det teoretiske bakteppet for mine undersøkelser. Teori om problemløsing i matematikk og matematiske representasjoner på et mer generelt nivå blir presentert først, før jeg ser på tegning som en spesifikk form for representasjon. Videre presenteres teorier om barns bruk om tegning, der blant annet Saundry og Nicol, Woleck og Rellensmann, Schukajlow og Leopold har gjort forskning og skrevet artikler som er relevante for mitt forskningsspørsmål. Det finnes flere forskere som har sagt noe om det. Jeg har valgt ovennevnte forskere fordi de har forsket på barn i lignende alder som mine informanter, samt at flere av de har laget rammeverk for å analysere barns tegninger.

Datamaterialet til studien består av intervju og observasjon av 23 elever i tredje klasse som løste tre problemløsende oppgaver i matematikk. Datamaterialet ble kategorisert etter hvordan tegningene ble brukt til problemløsing, eller hvordan de representerte problemløsing hos elevene. I hovedsak deles datamaterialet i hovedkategoriene: tegning *av* problemløsing og tegning *for* problemløsing, og i analysen oppstod det flere underkategorier med spesifikke måter å bruke tegning på. Samtidig så jeg på tegningens utseende, da med et spesielt fokus på mengden detaljer og bruk av farger i tegningene. Ut fra analysen av det innsamlede datamaterialet kommer jeg vil å drøfte funnene mine opp mot teori, før jeg til slutt kommer med noen konklusjoner og forsøker å gi svar på problemstillingen min. Jeg avslutter med å si noe om hvilken betydning funnene mine kan ha for praksis, før jeg kommer med noen forslag til videre forskning på feltet.

2. Teori

Studien min omhandler barns bruk av tegning til å løse problemløsningsoppgaver i matematikk. Før jeg vil gå inn på det ønsker jeg å si noe generelt om hva problemløsingsoppgaver i matematikk kan være. Jeg kommer også til å si noe om bakgrunnen for valg av det teoretiske perspektivet, samt noe om representasjoner i matematikk; da spesielt tegning. Til slutt vil jeg se på tidligere forskning om barns bruk av tegning i matematikk, som vil være rammeverket mitt og grunnlaget for min analyse av datamaterialet.

2.1 Bakgrunn for valg av teoretisk perspektiv

Til mitt teoretiske perspektiv har jeg valgt å fokusere på noe av den nyere forskningen, fordi det finnes mye oppdatert forskning på feltet. Det meste av teorien om tegning jeg har valgt å benytte, er fra etter årtusenskiftet. Rammeverket som omhandler barns bruk av tegning i matematikk blir stadig mer utfylt, da det er flere og flere som forsker på barn og tegning i matematikk.

2.2 Problemløsing i matematikk

Problemløsing er et begrep som brukes mye i barneskolematematikk, men som ofte ikke forklares. I min oppgave er definisjonen hentet fra Mason og Davis (1991), som sier at en oppgave er en problemløsingsoppgave hvis den som skal løse oppgaven ikke umiddelbart vet hvordan han/hun skal løse oppgaven. Mason og Davis (1991) skriver videre at det ikke er oppgaven i seg selv som avgjør om det er en problemløsingsoppgave, men hvem oppgaven presenteres for. En divisjonsoppgave vil for eksempel være en problemløsningsoppgave på første og andre trinn, hvor elevene ikke har lært divisjon, men vil ikke være en problemløsingsoppgave på sjette eller sjuende trinn, hvor elevene er kjent med regneoperasjonen og har metoder for å løse divisjonsoppgaver. Når man snakker om problemløsingsoppgaver er det også naturlig at man snakker om problemløsings*strategier*. Flere forskere hevder at unge barn har problemer med å strukturere aritmetiske problem og da spesielt tekstoppgaver i matematikk (Papandreou, 2009; Van Essen & Hamaker, 1990). En av grunnene kan være at elevene mangler generelle problemløsingsstrategier. Generelle problemløsingsstrategier er ifølge Van Essen og Hamaker (1990, s. 301) definert som elevenes strategier for å planlegge og regulere egen løsningsprosess og generelle heuristiske strategier for å analysere og utforske et problem i seg selv. Selv om problemløsing ikke er et nytt forskningsfelt, har ikke tegning som en strategi for problemløsing blitt utforsket til det fulle hevder blant andre Soundy og Drucker (2009).

2.3 Matematiske representasjoner

Matematikk er spesielt på den måten at det kun er tilgjengelig for oss gjennom representasjoner. Matematikk består av ideer du verken kan se eller ta på, og måtene vi representerer de matematiske ideene vil da være avgjørende for om vi får tilgang til matematikken som ligger bak representasjonen eller ikke. En representasjon er ikke et statisk produkt, men heller noe som fanger prosessen bak å skape et matematisk begrep eller forhold (Steele, 2008; Woleck, 2001). Representasjoner i matematikk kan være matematiske symboler, fysiske objekter, som konkretiseringsmateriale eller modeller, formelle diagrammer, muntlig språk eller en tegning (Bobis & Way, 2018).

Barns representasjoner i matematikk oppstår naturlig, som en del av deres liv. Både tegninger, matematiske symboler, skrift, digitale produksjoner og muntlig språk eksempler på representasjoner i matematikk (Bobis & Way, 2018; Woleck, 2001). Barns representasjoner i matematikk er den måten barn viser sine tolkninger og sin forståelse av matematiske begreper, både skriftlig og muntlig (Johns, 2015). For å skape forståelse i matematikk er det viktig at sentrale aspekter i matematikken blir gjort eksplisitt for elevene. Spesielt de første årene på skolen hvor elevene i større grad møter konvensjonelle, formelle og symbolske representasjoner enn hva de er vant med fra tidligere. I løpet av de første årene på skolen forventes det at elevene skal tilegne seg mer formelle representasjoner gjennom økt bruk av symboler, konvensjonelle strukturer og et mer formelt matematisk språk (Bobis & Way, 2018). I formelle representasjoner legges det matematiske modeller eller uttrykksformer som i større grad er abstrahert fra virkeligheten, hvor den største abstraksjonen går fra virkelighet til symboler. En formell representasjon i matematikk er en representasjon som er anerkjent av matematikersamfunnet, og kan være for eksempel grafer, tabeller og matematiske symboler. Hvis overgangen fra de uformelle til de formelle representasjonene ikke skjer gradvis, kan matematikken brått gå fra å være noe som er virkelighetsnært og realistisk, til å bli noe fjernt og abstrakt og mye av forståelsen kan da gå tapt. Matematikkoppgaver med tilknytning til virkeligheten, og ofte problemløsende oppgaver, blir da presentert som en mulig måte å introdusere nye tema på for å bevare tilknytningen til virkeligheten. Carpenter, Ansell, Franke, Fennema og Weisbeck (1993) argumenterer for at elever bør bli introdusert for problemer som inneholder multiplikasjon og divisjon allerede fra barnehagen av, og mener at ved å la elevene møte oppgaver som for dem er problemløsende, vil problemløsingsprosessen bli en meningsskapingsprosess og elevene vil heletiden forsøke å finne logiske forklaringer eller forklaringer som holder i «den virkelige verden».

> "If from an early age children are taught to approach problem solving as an effort to make sense out of problem situations, they may come to believe that learning and doing mathematics involves the solution of problems in ways that always make sense" (Carpenter et al., 1993, s. 440).

Etter hvert som lærere veileder elever inn i en verden av symbolsystemer i matematikken, må de samtidig forsikre seg som at de ulike representasjonene, som tegning og muntlig språk, blir vektlagt i like stor grad som symbolene (Soundy & Drucker, 2009). På den måten vil elevene ha en større bredde i sitt repertoar av representasjoner og ha flere å spille på senere. Representasjoner i matematikk gjør det mulig å bevare, reflektere rundt og senere ta opp igjen prosessene og tenkingen i matematikk. På tross av at representasjoner er et bredt spekter, er det ikke alt som har vært et like stort fokusområde for forskning. Det har ifølge Woleck (2001, s. 215) vært lite forskning på det som kanskje er et av de viktigste kommunikasjonsverktøyene og representasjonene for de yngste matematikerne; tegning.

2.3.1 Tegning

Tegninger i matematikk blir ofte kalt visuelle representasjoner eller bare representasjoner (Thom & McGarvey, 2015). Tegning er en naturlig del av barns uttrykksmåter og er i utvikling lenge før elevene starter på skolen som seksåringer. Likevel ser vi at det oppstår et tydelig skille i overgangen mellom barnehage og skole, hvor tegning går fra å være noe selvskapt; uten nødvendigvis å ha en spesiell funksjon, til å skulle representere noe faglig, som eksempelvis matematikk. Tegning i barnehage er ofte en spontan aktivitet, hvor motivasjon til å tegne kommer fra barnet selv. Derfor tolker uttalelsen til Bakar et al. (2016) om at tegning er noe *selvskapt* til å bety at initiativet kommer fra barnet selv, og at tegningen ikke nødvendigvis har en hensikt eller et tilsiktet mål. Overgangen fra å tegne uten et mål, til å tegne fordi man blir oppfordret til det er en overgang som er vanskelig for mange elever, og som flere forskere mener vi har for lite kunnskap om (Bakar, 2017; Woleck, 2001).

Barn møter matematiske ideer gjennom opplevelsene sine. De får eksempelvis en idé om hva divisjon kan være gjennom å dele godteri med en venn. De mentale bildene barn danner seg ved å løse oppgaver i realistiske kontekster lar seg, naturlig nok, enklere tegne enn skrives direkte ned. Tegning ligger mye nærmere prosessen som foregår inne i hodene deres enn matematiske symboler gjør. «Drawing can be a window into the mind of a child» (Woleck, 2001, s. 215). Tegningen blir barnets måte å bringe ideene, eller tankene sine til overflaten, og gjør det mulig for barnet å kommunisere tankene sine med andre. Tegninger eller bilder som representasjoner fungerer er et verktøy som lar barna oppdage og uttrykke meningene sine og fungerer på en måte som *plassholdere* for tanker, og gjør det mulig for dem å fange prosessen underveis når de arbeider, uten at de blir overveldet av resten av problemet. Hun sier at elevers tegninger er «springbrett for å snakke om matematikk» og at tegningene tilbyr elevene en mulighet for å dele sine tanker rundt matematikk og stille spørsmål ved egen og andres løsningsprosess (Woleck, 2001, s. 217).

I skolekontekst blir ofte barns tegninger sett på som et hjelpemiddel for å introdusere måter som kanskje har større status i meningsskapingsprosesser i matematikklasserom; det skriftlige og de konvensjonelle symbolene. Tegninger vil da fungere som ressurser for skriving og ikke som en ressurs i seg selv (Soundy & Drucker, 2009). Tegninger, sammen med tekst kan både tilføye og klargjøre verbal kommunikasjon samtidig som det i enkelte tilfeller kan kommunisere klarere enn verbal kommunikasjon alene (K. M. Edens & Potter, 2001). Hvis et barn oppdager at tegningen deres ikke er forståelig for andre, eller hvis de mener den grafiske representasjonen ikke er god nok, eller nøyaktig nok, vil de spontant legge til enten skriftlige eller muntlige forklaringer for å være sikker på at de får frem poenget (Papandreou, 2014). Barn bruker ofte muntlig språk, tegning og andre uttrykksformer simultant for å bedre kommunikasjonsprosessen. De yngste elevenes skriftlige og muntlige uttrykk er en del av prosessen – skriftlig arbeid alene kan vanskelig fange alle aspekter ved elevenes tenking i matematikk. Derfor er muntlig kommunikasjon også viktig. Tegningene elevene lager kan fortelle oss noe om deres forståelse for ulike tema og begreper i matematikken (Westenskow, Moyer-Packenham, Anderson-Pence, Shumway & Jordan, 2014). Tegninger kan derfor være et godt utgangspunkt for å snakke om forståelse og eventuelle misoppfatninger elevene kan ha.

2.4 Tidligere forskning om bruk av tegning i matematikk

Som nevnt har forskere tidligere kommet frem til at unge barn har problemer med å strukturere tekstoppgaver i matematikk, hvor mangel på generelle problemløsingsstrategier blir presentert som en mulig forklaring på problemet (Papandreou, 2009; Van Essen & Hamaker, 1990). Van Essen og Hamaker (1990, s. 301) har i sin studie sett på om det å lage en tegning kunne være et mulig verktøy for elevene, som lot de planlegge og regulere løsningsprosessen sin, samtidig som det var en strategi som gjorde at det matematiske problemet i seg selv lettere lot seg analysere og utforske. De fant i sin studie at det å tegne er en strategi for å analysere en oppgave, fordi overgangen fra et verbalt format til et piktografisk, billedlig format krever at eleven setter seg inn i hva som er problemets kjerne. Papandreou (2009) fant det samme og hevder at hvis elever oppfordres til å lage tegninger av matematiske problem vil de kunne attribuere mening til problemet og derfor reflektere rundt det. Produksjonen av en tegning bidrar derfor til å løse oppgaven.

Hvis tegning er så fantastisk, hvorfor blir det ikke da brukt av alle? Bakar et al. (2016) hevder at en av grunnene kan være at tegning ikke har spesielt høy status i matematikklasserom, og at den lave forekomsten av tegning i klasserommene kan komme av at tegning ikke blir relatert til matematikk. Videre hevder de at flere elever ser på tegning som en aktivitet som bare skal utføres av en lærer, da de ser på det som «for vanskelig» å lage egne tegninger og ikke ser nytten av å ta i bruk tegninger i matematikk. K. M. Edens og Potter (2001, s. 215) hevder at tegning og andre «kunstaktiviteter» ikke blir sett på som et gyldig instruksjonsverktøy, men heller en *gøy* kontekst hvor ingen ekte læring finner sted. Woleck (2001) hevder at til tross for at tegning er et viktig medium for barn, hvor de kan oppdage og uttrykke mening, har barns tegninger som et verktøy for å representere og kommunisere matematikk fått lite oppmerksomhet. Soundy og Drucker (2009) hevder på sin side at det endelig er et skifte på vei inn i skolen hvor lærere ikke lenger vektlegger symboler og skriftspråk for å være overordnet alle symbolsystemer og måter å kommunisere på faglig på, og at tegning har fått en større og viktigere rolle nå enn den har hatt tidligere.

2.5 Rammeverk for å analysere bruk av tegning

Skillet mellom tegning *av* problemløsing og tegning *for* problemløsing er hentet fra Saundry og Nicol (2006), som forteller noe om hvordan barn bruker tegning i matematikk. Tegning *for* problemløsing handler om at tegningen blir brukt for å løse et problem. Tegningen kan bli brukt på ulike måter, men når tegningen blir brukt *for* problemløsing, ser vi på tegningen som både en prosess og et produkt (Saundry & Nicol, 2006, s. 57). Tegning *av* problemløsing på den andre siden, er når tegningen blir produsert etter oppgaven er løst. Den fungerer da som et verktøy for å vise hva man har tenkt, eller kommunisere løsningen sin med andre.

2.5.1 Tegning for problemløsing

Tegning for problemløsing innebærer som nevnt at tegningen blir brukt for å løse oppgaven. Elevene lager tegningen samtidig som de løser oppgaven og tegningen er en del av prosessen for å komme frem til svaret. Tegningen følger elevenes tankeprosess og synliggjør hvordan elevene ser for seg problemet i hodet.

Saundry og Nicol (2006) hevder tegning kan bli brukt som *konkretiseringsmateriale (manipulativ),* hvor elevene bruker tegningene sine aktivt for å løse et problem. Elevene har «bevegelse» i tegningene sine i den forstand at de bruker piler, sirkler eller linjer for å representere regneoperasjoner på samme måte som de ville gjort med fysiske konkretiseringsmaterialer om det hadde vært tilgjengelig (Saundry & Nicol, 2006, s. 60). Hvis oppgaven går på å dele epler på griser kan elevene sette streker mellom epler og griser for å symbolisere divisjon som regneoperasjon.

Den andre måten Saundry og Nicol (2006, s. 60) presenterer tegning kan brukes på, er som *støtte for system*. Tegningens funksjon er da å holde oversikt i oppgaven, og den blir brukt til å systematisk teste mulige løsninger eller for å holde oversikt over oppgavens elementer. Elevene kan bruke tegningen til å føre en elimineringsprosess ved at de systematisk sorterer elementene i oppgaven. Tegningen er essensiell for å holde oversikt og elevene som bruker tegningen på en slik måte bruker ofte tegningen for å telle og sjekke løsningene sine gjentatte ganger.

Woleck (2001, s. 216-217) hevder også barn kan bruke tegninger på samme måte som de ville brukt konkretiseringsmateriale. Elevene vil da bruke tegningen til å organisere og telle elementene i tegningen for å løse problemet. Videre skriver hun at tegningen i det tilfellet fungerer som plassholder for tanker, og lar elevene spille ut og skrive ned stegene underveis i prosessen, slik at de ikke blir overveldet av problemet i sin helhet.

Soundy og Drucker (2009) har også forsket på hvordan barn kan bruke tegning til å løse matematiske problem, hvor en av kategoriene de ser på er tegningen som en del av et *narrativ*. Tegningen blir en del av en fortelling elevene konstruerer ved hjelp av elementene som blir gitt i oppgaven. Forskerne hevder at elevene lager historier eller fortellinger som de spiller ut samtidig som de løser oppgaven. Elevene tar da ofte i bruk elementer som er kjent fra før i tillegg til de fra oppgaven. På den måten produserer elevene en original fortelling eller idé basert på en allerede eksisterende oppgave. Elevenes forkunnskaper og kreativitet kommer tydelig til syne, og elevenes evne til å skille mellom relevant og irrelevant informasjon blir gjort eksplisitt. Hvis elevene lager narrativer rundt tegneprosessen for å fange egen meningsskapingsprosess, vil historien i kombinasjon med tegningen gi innsikt i hvordan barnet forstår og tenker (Einarsdottir, Dockett & Perry, 2009).

Woleck (2001) fant i sin forskning at tegning ikke alltid er funksjonell som en representasjon for barn. Noen ganger bruker barna tegningen som en *dramatisk* representasjon for å følge essensen i deres matematiske arbeid. De vil da tegne seg selv som en del av problemløsingssituasjonen og vise hvordan de rent konkret har løst oppgaven. Eksemplet hun trekker frem er en elev som skal finne ut hvor mange kopper som behøves til en frokost med

22 barn, 1 lærer og 33 gjester. Eleven tegner seg selv pekende på en tallinje, som han hadde brukt for å telle videre på. Tegningen viser da det fysiske dramaet i hans arbeid. En dramatisk tegning kan være nyttig for elevene for å organisere tankene sine og beskrive for andre hva de har gjort.

2.5.2 Tegning av problemløsing

Tegning av problemløsing er når elevene lager tegningen etter de har løst problemet. De bruker andre fremgangsmåter for å finne svaret på oppgaven, men produserer tegninger i etterkant, da ofte for å kommunisere løsningen sin med andre. Selv om tegning av problemløsing blir sett på som noe som produseres i etterkant, trekker Saundry og Nicol (2006) frem at de artefaktene elevene produserer i arbeid med matematiske problem er en del av deres matematiske resonnering, og at de kan derfor ikke sees på separat fra hverandre.

En måte å bruke tegning på som går under tegning av problemløsing er *visualisering.* Saundry og Nicol (2006) trekker i sin studie frem at noen av elevene ikke tegner noe i det heletatt når de løser matematiske problem, men at de ser for seg eller visualiserer løsningsprosessen mentalt. Elevene bruker ofte tid til å «spille ut» en prosess for seg selv, og kan etter en visualiseringsprosess enten lage en tegning for å vise hvordan de har tenkt, eller de kan ta i bruk symboler eller muntlig språk. En vanlig respons hvis man spør en elev hvordan han/hun har kommet frem til svaret sitt, er at «de har tenkt seg frem til det». Informasjonen i oppgaven blir fortsatt prosessert som noe visuelt, selv om det ikke nødvendigvis kommer frem på papiret.

Det finnes forskere som har sett på *når* elevene produserer tegningene sine, og hvordan det kan henge sammen med hvorvidt elevene kommer frem til riktige svar på en oppgave eller ikke. Noen som har forsket på det er Csíkos, Szitányi og Kelemen (2012). De fant i sin studie at det var de som produserte tegningene *etter* de hadde løst problemet som var de *dyktigste* til å telle. Det samme fant Bakar et al. (2016) som så at de elevene som hadde automatisert telling ofte løste oppgaver ved hjelp av andre strategier først, også tegnet i etterkant for å dele løsningen sin med andre.

2.6 Rammeverk for analyse av detaljer i tegningene

En annen innfallsvinkel man kan ha til å se på barns tegninger, som flere forskere også har, er hvordan tegningene ser ut. Det er ulike elementer ved tegningen som kan være i fokus og en er *detaljrikdom* i representasjonen. Her ser man nærmere på i hvilken grad elevenes løsninger er sofistikerte med tanke på mengden detaljer og detaljenes relevans for oppgaven. Saundry og Nicol (2006, s. 57) har sett på hvordan barns tegninger i matematikk ser ut og hevder at mens noen elever tegner detaljerte, kunstneriske bilder bruker andre enkle, ikoniske representasjoner. Noen elever kan miste fokuset på hva som er viktig for å løse oppgaven da de fokuserer for mye på detaljene til at tegningen blir nyttig for å løse oppgaven. Når det er sagt er det ikke slik at detaljrike tegninger i seg selv fører til at elevene ikke greier å løse oppgaven, men hvis detaljene tar oppmerksomheten vekk fra det essensielle i oppgaven, kan svaret forsvinne i en mengde annen, irrelevant informasjon.

Bakar et al. (2016) velger i sin studie av barns tegninger i problemløsingssituasjoner å dele tegningene inn i to kategorier ut fra hvor mye detaljer det er i tegningene og hvordan detaljene er relatert til problemet eller ikke. Den ene er den *piktografiske* tegningen, som kjennetegnes av at den er realistisk i forhold til de objektene som blir presentert i oppgaven. Hvis oppgaven etterspør at elevene skal dele epler og personer vil elevene tegne enten bare epler/personer eller begge deler. De *ikoniske* tegningene på den andre siden består av ofte enkle streker og former skapt for å etterligne objektene i oppgaven, og mangler realismen eller tilknytningen vil virkeligheten man ser i de piktografiske tegningene. Rellensmann, Schukajlow og Leopold (2017) klassifiserer også barns tegninger ut fra hvor abstrakte de er, relatert til problemet og virkeligheten og bruker begrepene *situasjonstegning* og *matematisk tegning*. Situasjonstegningen avbilder problemets overflate og har et lavt nivå av abstraksjon. Den matematiske tegningen på den andre siden kjennetegnes av at den avbilder den matematiske strukturen i problemet, og har et høyt nivå av abstraksjon. En matematisk tegning viser bare løsningsrelevante elementer fra problemet, og ekskluderer det som ikke er relevant. En matematisk tegning vil være en ikonisk tegning, da abstraksjonsnivået er høyt. Etter hvert vil elevene ifølge Woleck (2001) forenkle tegningene hvis de blir bedt om å tegne det samme objektet flere ganger. Elevene vil da, etter de har fått erfaringer med å tegne, i større grad skille mellom hvilke detaljer som er relevante for oppgaven og hvilke som er overfladiske. Da vil elevene produsere mer sofistikerte, matematiske tegninger som lettere lar seg bruke for å løse problemløsingsoppgaver.

De ulike typene tegninger kan være til støtte for elevene, men på forskjellige steder i prosessen. En situasjonstegning kan hjelpe elevene til å bedre forstå problemet ved at den gir en måte å organisere informasjonen som blir gitt i oppgaven på. Rellensmann et al. (2017) sier at de situasjonsbaserte tegningene kan hjelpe elevene å løse problemene, men det kan også være et hinder da irrelevante detaljer kan komme i veien og ødelegge for en effektiv løsningsprosess. Til kontrast inneholder en matematisk tegning bare elementer som er relevante for problemet, men det kreves en større kompetanse og en mer sofistikert prosess for å produsere en slik tegning. I Csíkos et al. (2012) blir de to typene tegning henvist til som *informative* og *dekorative*, i Saundry og Nicol (2006) blir det beskrevet som ulik grad av *sofistikasjon* i elevenes tegninger. Da det finnes flere begreper som beskriver det samme, vil det videre i oppgaven bli brukt begrepene *piktografiske* og *ikoniske* tegninger for å beskrive de to typene.

Papandreou (2009) har sett nærmere på hvordan unge barn bruker tegning til å representere aritmetiske problemsituasjoner, og hvordan de kan bruke mer enn en representasjon samtidig. Hun fant i sin studie fire kategorier som på ulike måter viser visuelle representasjoner av et problem. Kategoriene hun fant var: bokstaver eller ord, piktogrammer, ikke-konvensjonelle symboler (ikoniske tegninger) og tall. Det første kategorien er *bokstaver eller ord*. Bokstavene eller ordene brukes ofte i kombinasjon med tall eller andre representasjoner, og brukes for å skille elementene i oppgaven fra hverandre. Hun skiller mellom bruk av enkle bokstaver, forkortelser, ord og fullstendige setninger. Papandreou (2009) bruker også begrepet *piktogrammer*, som flere andre forskere også gjør. Hun forklarer et piktogram som en tegning som er relatert til fortellingen i oppgaven, men ikke nødvendigvis til problemet. Videre presenterer hun de ikke-konvensjonelle symbolene, som i hennes forskning handler om bruk av prikker, tellestreker og sirkler, som alle er ikoniske tegn. Til slutt presenterer hun kategorien tall, hvor elevene kan bruke tall for å representere mengder eller grupper. Hun skiller mellom om det er elevenes eneste representasjon, eller om den brukes i kombinasjon med andre representasjoner. Papandreou (2009) gjør en mye mer detaljert inndeling, men fordi hun har forsket på barn mellom fire og seks år var det ikke alle kategoriene som var like relevante for min studie. Det ble derfor gjort et utvalg av de kategoriene som var mest relevante for studiens forskningsspørsmål.

Når det kommer til fargebruk i tegningene kan vi se på det som en del av det Saundry og Nicol (2006) beskriver som *grad av sofistikasjon* i tegningen. De vektlegger om fargene er relevant for å løse oppgaven eller ikke og om fargene er realistiske eller ikke.

3. Metodologi

Det er i hovedsak to strategiske tilnærminger til forskning, hvorav den ene er kvantitativ og den andre er kvalitativ. Valg av forskningsstrategi avhenger av forskningsfokus og forskningsspørsmål. I kapittelet som følger vil utvalg av informanter bli redegjort for, gjennomføring av datainnsamling og oppgavene som ble gitt til elevene vil bli gjennomgått, og jeg vil gå gjennom metode for analyse av datamaterialet. Avslutningsvis vil jeg presentere de metodologiske og etiske betraktningene for studien, og komme med noen kommentarer om studiens troverdighet.

Ordet metode kommer fra gresk og betyr opprinnelig *veien til målet* (Kvale & Brinkmann, 2009). Målet med studien er å kunne si noe om barns bruk av tegning til å løse problemløsingsoppgaver i matematikk. For å kunne nå målet har jeg valgt å benytte meg av en kvalitativ forskningsmetode. Kvalitative forskningsdesign holder ofte fokus på avgrensede enkeltmiljøer, i mitt tilfelle to tredjeklasser, hvor målet er å gi en helhetlig beskrivelse av hvilke prosesser og særtrekk som finnes i akkurat det miljøet (Repstad, 1998). Forskningsdesignet bygger på deltakende observasjoner og intervju med preg av en dynamisk samtale, slik kvalitative forskningsdesign ofte gjør (Befring, 2007).

Det er noen grunnleggende forutsetninger for kvalitativ forskning – en ontologisk og en epistemologisk. Den kvalitative metoden er meningssøkende og forklaringssøkende i den forstand at den ser på mennesker som meningsskapere som aktivt søker mening i ulike situasjoner (Cohen, Manion & Morrison, 2018; Nilssen, 2012). Den ontologiske forutsetningen for kvalitativ forskning er at det finnes mange virkeligheter. Med utgangspunkt i at det finnes mange virkeligheter, kan forskningen vår gi oss noen mulige svar, men aldri det ene riktige svaret da forskningen så sterk avhenger av den konteksten som er skapt med forskningsdeltakerne og forskeren (Nilssen, 2012).

En av kritikkene som rettes mot kvalitative forskningsmetoder er at funnene vil aldri la seg generalisere. Den epistemologiske forutsetningen for kvalitativ forskning sier at kunnskap konstrueres i møtet mellom den som forsker og den som deltar i forskningen. Av den grunn vil alle resultater avhenge av konteksten hvor forskningen har funnet sted. En annen kritikk som ofte rettes mot kvalitative forskningsdesign, er at den er *verdiladet* som følge av forskerens førforståelse. Forskerens tidligere erfaringer, kunnskap, meninger og det valgte teoretiske rammeverket påvirker prosessen som det å skape, analysere og drøfte datamateriale er (Nilssen, 2012). Mer om det vil jeg komme tilbake til under delkapittel **3.6**: Studiens troverdighet.

Som metoder for datainnsamling til studien, ble det valgt å benytte både intervju og observasjon. Jeg har til min studie valgt det Kvale og Brinkmann (2009) kaller *kvalitativt forskningsintervju.* I kvalitative forskningsintervju produseres kunnskap gjennom et sosialt samspill mellom den som intervjuer og den som blir intervjuet. Cohen et al. (2018) beskriver dette som et *informativt samtalebasert intervju* med en intervjuguide, og er en type intervju som kjennetegnes av at spørsmålene ikke er satt på forhånd, men at de oppstår løpende og blir stilt i den rekkefølgen som er naturlig for samtalen. Det er en semistrukturert intervjutype som gir den som intervjuer mulighet til å gjøre endringer og tilpasse spørsmålene underveis etter hva som naturlig kommer opp til diskusjon. Et kvalitativt intervju skal være helhetsorientert, men samtidig også fokusere på de enkelte tilfellene. Selv om kvalitative intervjuer ofte er mer dynamiske i den forstand at de lar seg endre underveis, er det ikke slik at de av den grunn er uplanlagte eller ustrukturerte. Tvert imot kreves det en god del planlegging for å gjennomføre et godt kvalitativt intervju (Repstad, 1998).

Min andre metode for datainnsamling er observasjon. Ved å observere i tillegg til den forskende samtalen, håper jeg å kunne si noe om elevenes ulike måter å uttrykke seg eller kommunisere på. Kroppsspråk og gester er to kommunikasjonsverktøy som ved tolkning kan gi mer informasjon enn tegning og språk alene. Observasjon har verdi som metode for datainnsamling fordi den viser den direkte interaksjonen mellom mennesker, og lar forskeren se hvordan forskningsdeltakerne opptrer i naturlige situasjoner (Repstad, 1998). Man skiller i all hovedsak mellom to typer observasjoner: deltakende og ikke-deltakende observasjon. Jeg valgte å gjennomføre deltakende observasjon under innsamlingen av data fordi jeg ønsket være en del av samtalen med elevene, og ha mulighet til å stille oppklarende spørsmål underveis.

Lydopptak underveis var helt nødvendig for meg for å kunne oppfatte alle uttalelsene fra elevene. På den måten kunne jeg fokusere mer på elevenes kroppsspråk eller gester som påvirket situasjonen, da jeg ikke behøvde å skrive ned hva elevene sa underveis. Jeg valgte lydopptak over videoopptak fordi jeg vurderte lydopptak og feltnotater som tilstrekkelig for å innhente ønsket informasjon, i og med at elevarbeidene skulle samles inn. I etterkant av lydopptakene ble intervjuene transkribert og slettet i tråd med retningslinjene. Når elever snakker om og rundt matematikk, kan det tidvis være vanskelig å forstå hva de prøver å fortelle. Selv om elevene tenker og resonnerer på en fornuftig måte, kan det være vanskelig for de å sette ord på tankene sine (Wæge, 2015). Jeg forsøkte derfor å stille så åpne spørsmål som mulig slik at elevene skulle føle det var naturlig å forklare, og at de kunne dele det de mente var relevant for sin oppgaveløsing. Mer om spørsmålene som ble stilt til elevene, vil jeg komme tilbake til i delkapittel **3.2** Gjennomføring av datainnsamling, under overskriften *intervjuguide*.

Jeg er klar over at en kvantitativ metode hvor jeg hadde sett på flere elever ville gitt et større grunnlag for å si noe generelt, og gitt meg muligheten til å generalisere funnene. Samtidig hadde ikke en kvantitativ metode vært spesielt hensiktsmessig, da jeg ønsket å si noe om hvordan elevene *brukte* tegningene til å løse problemer. Med tanke på studiens omfang ville det blitt for stort å sett på mange nok elever til å kunne gjennomføre noe kvantitativt. For å kunne si noe om hvordan elevene bruker tegningene de produserer, var det er nødvendig å være tilstede mens elevene løste oppgavene. Jeg tenker også det er nødvendig å gå i dybden i større grad enn hva en kvantitativ undersøkelse av en slik skala vil gi meg mulighet til. Hvis ønsket hadde vært å si noe mer generelt om elevene brukte tegning eller ikke, hadde det vært mer relevant å benytte en kvantitativ tilnærming, og da heller se på en større gruppe elever. Det var ikke et mål i seg selv å kunne generalisere funnene i oppgaven, da det er hvert enkelt av de spesielle tilfellene, og strategiene som finnes i klasserommet, som var interessante.

3.1 Kontekst og utvalg

Når man skal gjennomføre forskningsintervju, ønsker man seg gjerne en standard å se til både når det kommer til hvor mange man skal intervjue, og hvordan utvalget av informanter skal gjøres. Da det ikke finnes noen standard for dette, må man selv vurdere både hvor mange informanter som er hensiktsmessig å inkludere, og hvor mye datamateriale som er tilstrekkelig med tanke på studiens formål og forskningsspørsmål.

Deltakerne i studien var 23 tredjeklassinger fra et skoledistrikt i utkanten av en storby. Elevene går til daglig på to separate barneskoler, og det var tilnærmet likt antall gutter og jenter som deltok. Jeg valgte å gjennomføre datainnsamling med samtlige av elevene i de to klassene. Det ble gjort fordi det var få elever i hver klasse, og det var vanskelig for meg å forutse hvor mange av elevene som eventuelt ønsket å delta på studien, og som kom til å tegne i sine besvarelser da jeg ikke hadde noen relasjon til elevene i forkant. Jeg forventet ikke at alle elevene skulle tegne, og det var derfor viktig å ha så mange elevbesvarelser som mulig, slik at jeg til slutt satt igjen med flere enn én tegning det var mulig å si noe om i etterkant.

Mange samtaler gav meg mye datamateriale å analysere, men samtidig gav det meg også mange lydopptak å transkribere for å forsikre meg om at jeg hadde fått med meg det viktigste. For å sikre at bredden i bruk av tegning som representasjonsmåte ble synliggjort i dataene som ble valgt for å representere funnene mine, måtte transkripsjonene også inneholde så mange detaljer som mulig. Det ble gjort et utvalg i etterkant av datainnsamlingen basert på elevenes besvarelser, og hvorvidt det ville være mulig å analysere noe ut fra det elevene sa eller gjorde under innsamlingen. Det ble vektlagt å rette fokus mot de elevene som produserte noen tegninger, og som kunne forklare sine egne tanker underveis til studien.

3.2 Gjennomføring av datainnsamling

Datainnsamlingen fant sted på forskjellige dager på de to skolene. Da den ene klassen var flere elever (fire elever på den første skolen mot ni elever på den andre skolen), ble det satt av to dager på den første skolen og én dag på den andre. Det ble gjennomført totalt åtte gruppeintervju. Intervjuene ble gjennomført i ordinær skoletid på grupperom, eller bibliotek som enten var i direkte tilknytning til elevenes klasserom, eller i umiddelbar nærhet til klasserommet. Elevene ble hentet ut fra ordinær undervisning for å delta. Intervju er en sosial prosess, og jeg valgte i min studie å ta elevene ut i grupper bestående av to til fire elever. Jeg unngikk å ta ut elevene alene, da jeg på det tidspunktet ikke hadde en relasjon til elevene, samt ønsket de skulle føle seg trygge underveis. Gruppeintervju oppmuntrer ifølge Cohen et al. (2018) elevene til å bruke sitt eget språk, slik de er kjent med, noe som vi gi den som forsker en mer virkelighetsnær og ekte oppfatning av situasjonen. Å gruppeintervjue barn vil åpne for at elevene utfordrer hverandre og i større grad deltar i diskusjon, enn om de hadde vært alene med en lærer eller en forsker. De er viktig at barna oppfatter situasjonen som trygg og så lite formell som mulig. Mer om etiske betraktninger knyttet til intervju med barn vil jeg komme tilbake til i kapittel **3.5** Etiske betraktninger.

Det faglige temaet for samtalen er på forhånd satt til å omhandle elevenes bruk av tegninger de eventuelt produserer, og hvordan de bruker dem enten til å kommunisere med andre, eller for å løse oppgaven. En av styrkene ved å bruke et informativt samtalebasert intervju er at spørsmålene oppstår underveis, slik at den enkelte eleven vil få tilpassede spørsmål. Samtidig er det også svakheter ved å ikke ha fastsatt spørsmålene i forkant. Elevene vil kunne få ulike spørsmål, da situasjonene som oppstår mellom elev og forsker er unike. Det kan være vanskelig å sammenligne resultater fra samtalebaserte intervjuer på tvers av grupper, da hvordan forskeren har valgt å ordlegge seg kan påvirke elevenes respons og derfor være førende med tanke på deltakernes svar. Det ville samtidig føltes unaturlig å spørre en elev som ikke har tegnet, om tegningen var nyttig for hans eller hennes problemløsing.

Det ble gitt felles informasjon om studien til hele klassen på forhånd, før de ble tatt ut i grupper. På den måten kunne jeg forsikre meg om at alle fikk den samme informasjonen, noe som er med på å sørge for at de resultatene som kommer inn i større grad er pålitelige, og at de innsamlede elevarbeidene lar seg sammenligne på tvers av gruppene. Jeg fikk samtidig introdusert meg selv, fortalt kort om hva jeg studerer og hva jeg skal forske på i oppgaven min, uten å avsløre for mye om tematikken i oppgaven. Jeg valgte å si til elevene at jeg skulle se nærmere på hvordan de løste oppgaver, uten å nevne for dem at jeg var interessert i tegning. Jeg valgte bevisst å unngå å nevne ordet «tegning» da jeg ikke ønsket å legge opp til at elevene måtte tegne, men at de heller selv skulle velge hvordan de ville løse oppgavene.

Elevene ble plassert slik at jeg enkelt kunne se hva de tegnet uten å måtte flytte på meg. De ble også plassert slik at de ikke så hverandres tegninger så tydelig. Det var et bevisst valg da jeg ikke ønsket at elevene skulle herme etter hverandres tegninger. Jeg hadde med en egen notatbok og blyant, slik at jeg kunne gjøre små notater underveis på elevers gester, hvilken del av tegningen som ble tegnet først og når tegningen eventuelt ble fargelagt. I tillegg var det da en mulighet for å notere om det skjedde noe som ikke ble fanget opp på lydopptak. Elevene fikk koder, hvor jeg startet med eleven til venstre for meg som ble enten J1 eller G1 også ble gruppenummer lagt til, for eksempel J1G1 er den første jenta til venstre for meg på gruppe én. Elevene hadde tilgang til gråblyanter, fargeblyanter, linjaler, blanke kopiark og viskelær under oppgaveløsingen, men de ble ikke oppfordret til hva de skulle bruke. All bruk av andre materialer enn blyant og blanke kopiark fant sted på elevenes eget initiativ. Det ble satt av 40 minutter til hver gruppe for å løse de tre oppgavene. Først ble oppgavene lest høyt for elevene, det ble gjort fordi jeg på forhånd var klar over at enkelte av elevene opplevde vanskeligheter ved å lese, og målet var ikke at leseferdighetene skulle avgjøre om elevene fikk til oppgavene eller ikke. Etter oppgavene ble lest høyt fikk elevene bruke tid på å løse oppgaven og diskutere med hverandre. Hvor mye tid som ble satt av til hver oppgavene var avhengig av hvor lang tid gruppen brukte på å løse oppgavene. Elevene arbeidet alene på egne ark, men hadde mulighet til å diskutere med hverandre underveis om de ønsket det.

Intervjuguide

Når man gjennomfører et intervju er det et spørsmål som bør være hovedfokus for intervjuet: «Hva vil jeg vite?». Samtidig bør man også stille seg spørsmålet: «Hvordan skal jeg sørge for å få vite dette?». Ved å stille seg selv de spørsmålene, kan man legge opp intervjuet slik at man, i den grad det er mulig, tilrettelegger for at de svarene som kommer er gode og relevante for problemstillingen som skal drøftes. For å på best mulig måte forsikre meg om at spørsmålene jeg stiller elevene hjelper meg til å svare på forskningsspørsmålet mitt, ble det utformet en intervjuguide. Da det skulle velges spørsmål ble det tatt utgangspunkt i at formuleringene skulle ha et språk tilpasset elevenes nivå, oppmuntre dem til å forklare egne løsningsmetoder og strategier, samt ikke være ledende på noen måte. Det er ifølge Kvale og Brinkmann (2009) viktig å tilpasse innholdet og språket i spørsmålene etter alderen på de som blir intervjuet. I mitt tilfelle var det viktig at språket ble tilpasset en tredjeklassing. Det er viktig å tenke på hvilken type spørsmål som lar seg besvare av et barn i alderen syv til åtte år.

Edvard Befring (2007, s. 125) viser til Monica Dalen (2004) når han presenterer utfordringer knyttet til utforming av spørsmål til en intervjuguide. Den første utfordringen går ut på om spørsmålene klare og tydelige. Man må også tenke på om spørsmålene krever en spesiell kunnskap eller informasjon som elevene ikke har tilgang til. Videre må man forsikre seg om at spørsmålene ikke er ledende på noen måte, og at det er rom for at elevene har egne og kanskje utradisjonelle perspektiver. Helt til slutt må man være bevisst på om spørsmålene berører sensitiv informasjon, og om det derfor må tas hensyn til det. Spørsmålene baserer seg på elevenes tegninger eller deres tanker om oppgaven i seg selv, og var som følger:

- Hvordan tenkte du her?
- Hvordan kom du frem til dette svaret?
- Hva viser denne figuren i tegningen din?
- Hvorfor har du tegnet dette?
- Hvilket tall er dette?
- Brukte du tegningen til å løse oppgaven?
- Fant du tegningen nyttig for å løse oppgaven?
- Ville du tegnet om jeg gav deg andre tall også?

Figur 1: Spørsmål intervju

Intervju må utformes slik at informasjonen som blir samlet inn i størst mulig grad både er reliabel og valid. Det vil generelt styrke validiteten til et intervju hvis intervjusituasjonen blir gjennomført og tilrettelagt på forskningsdeltakernes premisser. Det innebærer at den som blir intervjuet får mulighet til å uttrykke seg på en fri og naturlig måte (Befring, 2007). Samtidig vil et intervju med preg av en strengere struktur gi mulighet til å luke ut flere feilfaktorer. Da det ble gjort et utvalg i etterkant av datainnsamlingen er det ikke sikkert at alle spørsmål vil være representert i funnene i oppgaven. Spørsmål hvor elevene ikke har svart, vil også være ekskludert fra det presenterte datamaterialet.

3.3 Oppgavene

Oppgavene intervjuet er basert på er enten hentet direkte fra, eller modifisert ut fra allerede eksisterende oppgaver. De to første oppgavene er hentet fra Saundry og Nicol (2006) og Woleck (2001). Den tredje og siste oppgaven ble jeg tipset om av en medstudent under gruppeveiledning, da hans sønn hadde fått oppgaven i hjemmelekse og den hadde åpnet for noen spennende diskusjoner. Oppgavene er alle *aritmetiske tekstoppgaver.* Aritmetiske tekstoppgaver er en underkategori av tekstoppgaver, hvor en eller flere kvantitative forhold blir beskrevet, og som krever et numerisk svar (Van Essen & Hamaker, 1990). I skolen blir ofte aritmetiske tekstoppgaver brukt for å kontekstualisere de matematiske strukturene, eller for å vise en sammenheng mellom det virkelige og det matematiske. I tillegg til å stille krav til matematisk forståelse, krever tekstoppgaver at elevene også klarer å skille mellom relevant og irrelevant informasjon, samt at de klarer å hente ut hva som er regneoperasjonen i oppgaven.

Når elevene produserer en tegning for et gitt problem er de avhengige av å forstå hvilke detaljer som er relatert til problemet, og hvilke som ikke er det. De må også forstå hvordan elementene relateres til hverandre. Samtidig som de fokuserer på relasjonen mellom elementene, er de avhengige av å kunne bryte ned mengden informasjon til noe som lar seg representere med en tegning. Allerede før man har begynt å lage en tegning, er det altså mye som skal stemme for at tegningen som blir produsert er nyttig for eleven. Hvis prosessen med å skape en tegning er for krevende for eleven, vil det kunne føre til at eleven blir overveldet og dermed gjør det dårligere enn om de ikke skulle tegnet (Rellensmann et al., 2017). Det er derfor viktig at en ikke pålegger noen å tegne, men behovet eller motivasjonen for å tegne må komme fra eleven selv.

Oppgave 1

12 barn skal dele 18 kjeks likt, hvor mange kjeks får hvert barn?

Oppgaven er hentet fra Saundry og Nicol (2006) og blir presentert som et «deleproblem» (*sharing problem*). Den ble valgt fordi det er en oppgave jeg har gjennomført med elever på tredje trinn tidligere i praksis, og som den gang førte til spennende samtaler med elevene. Oppgaven går ut på at 18 kjeks skal fordeles likt på 12 personer, noe som gir elevene brøk i svaret. Oppgaven klassifiseres som en problemløsingsoppgave fordi elevene ikke har lært noen fremgangsmåte for å løse divisjonsoppgaver, samt at de ikke får presentert noen mulige måter de kan løse oppgaven på. Når det kommer til elementene i oppgaven, menneskene og kjeksene, er det elementer som er kjent for elevene. Jeg går ut fra at elevene vet hvordan disse ser ut, og derfor være i stand til å tegne dem om de ønsker. Den første oppgaven er den eneste av oppgavene som bare har ett korrekt svar.

Oppgave 2

Ola har noen leker. Til sammen har lekene 16 hjul. Hvor mange leker har Ola? (Og hvilke leker er det?)

Oppgaven presenteres i Saundry og Nicol (2006), og blir presentert som en kombinasjonsoppgave. En lignende versjon av oppgaven presenteres også i Woleck (2001), og er der en åpen oppgave med flere mulige løsninger. Elevene skal i oppgaven finne ut hvilke kombinasjoner av leker som ville gi de 16 hjul. Da kombinasjonen av leketøy kan varieres, åpner oppgaven opp for ulike løsninger. Oppgaven ble valgt fordi jeg ønsket å se på om elevene tegnet alle detaljer i oppgaven, eller om de holdt seg til de elementene som var essensielle for å finne et svar.

Jeg ønsket også å se om elevene fant ett svar også sa seg fornøyde, eller om de på eget initiativ presenterte flere løsninger. Hvis noen elever kom frem til flere svar, eller om elevene i gruppen kom frem til ulike svar, var det en mulighet til å diskutere rundt om det alltid var ett svar som var «mest riktig», eller om vi kunne akseptere at oppgaven hadde flere mulige løsninger, og at alle løsningene var like riktige. Oppgave 2 er en problemløsingsoppgave fordi den heller ikke er presentert med noen klar fremgangsmåte for å løses, i likhet med oppgave 1. Elevene står fritt til å velge selv om de vil addere, multiplisere, dividere eller kombinere flere regneoperasjoner for å finne en løsning. Objektene i oppgaven, lekene, er noe jeg går ut fra at er kjent for elevene. Jeg regner også med at elevene har kjennskap til at leker kan ha ulikt antall hjul, og at de derfor vil komme frem til ulike løsninger.

Oppgave 3

En snegle har spist 17 blader på 4 dager. Hvor mange blader kan sneglen ha spist hver dag de siste fire dagene?

Oppgaven om snegla er en åpen oppgave hvor elevene selv komponerer ett eller flere svar de tenker passer. Her vil elevene kunne argumentere for egne svar, samtidig som de kanskje må beskrive for hverandre hva de forskjellige elementene i tegningene betyr, samt hvordan de eventuelt har kommet frem til svarene sine. Oppgave 3 er en problemløsingsoppgave fordi elevene ikke blir presentert med noen metode for å løse oppgaven. De står fritt til å velge hvordan de vil løse oppgaven, samtidig som oppgaven har flere mulige svar. Elevene kan for eksempel velge å dele ut ett og ett blad i fire grupper, og deretter stoppe når de er tomme. De kan også velge å ta flest mulig én dag og mindre eller ingen de andre dagene.

Før datainnsamlingen hadde jeg noen forventninger knyttet til hva elevene kunne komme til å svare og produsere av tegninger. På oppgave 1 forventet jeg at flere av elevene kom til å tegne både antall kjeks og personer uten å ha en plan for hva de skulle gjøre da de hadde tegnet de ulike elementene. Enkelte elever forventet jeg også at kom til å konkludere med at oppgaven ikke lot seg løse, da svaret ikke ville bli et helt tall. På oppgave 2 forventet jeg at noen elever kom til å tegne hele kjøretøy, mens andre elever kunn kom til å tegne det som var nødvendig for å besvare oppgaven, altså hjul. På oppgave 3 forventet jeg at enkelte av elevene kom til å tegne alle bladene og kanskje snegla i et piktografisk format, men da 17 er et ganske høyt antall forventet jeg her at noen av elevene ville lage ikoniske tegninger, med tellestreker eller tallsymboler istedenfor.

Jeg har som nevnt tidligere gjennomført *kjeksoppgaven* med tredjeklassinger tidligere i praksis, samlet inn data fra oppgaven og analysert det. Derfor forventet jeg også denne gangen at elevene kunne komme fram til lignende svar, uten at jeg skulle sammenligne løsningene den gangen med de jeg samlet inn nå. Den gangen var det mange som kom frem til at det måtte bli kjeks til overs, da det ikke var mulig at de fikk like mange hver. Jeg valgte å bruke oppgaver som allerede er testet ut i praksis, enten av meg selv, av andre forskere eller av medstudenter. Samtidig ønsket jeg også å bruke oppgaver som på en eller annen måte legger opp til at elevene skal bruke tegning til å løse problemet. En god problemløsingsoppgave kan brukes for å fastsette elevers forkunnskaper om et tema, samtidig som de kan fortelle oss noe om elevenes evne til å tenke og resonnere i matematikk (Charlesworth & Leali, 2012, s. 380). Jeg så på det som en fordel at to av oppgavene jeg valgte, har blitt brukt i tidligere studier. Dette kan tilsi at oppgavesvarene vil la seg analysere. Samtidig har det her også vært viktig for meg å ikke forvente de samme funnene som forskere har kommet frem til tidligere, da min studie plasseres i en annen skolekontekst og med andre elever.

3.4 Metode for analyse

Analyse av kvalitative data innebærer å organisere, gjøre rede for og forklare datamaterialet (Cohen et al., 2018). Det første jeg gjorde var å transkribere og anonymisere lydopptakene fra datainnsamlingen. Jeg noterte også fortløpende tanker og refleksjoner jeg gjorde underveis i innsamlingsprosessen. Ut fra de innsamlede elevarbeidene og transkripsjonene forsøkte jeg å kategorisere elevbesvarelsene etter det sammensatte rammeverket fra tidligere. For å muliggjøre en analyse av datamaterialet, må man starte med å transformere materialet til en form som lar seg analysere.

Transkripsjon er en abstraksjon og en fiksering av en samtale mellom to eller flere mennesker. Å transkribere betyr å transformere eller å endre noe fra en form til en annen. Kvale og Brinkmann (2009) hevder at transkripsjoner er svekkede og dekontekstualiserte gjengivelser av en samtale, fordi når det blir gjort lydopptak er intervjuet allerede abstrahert én gang – her mister man både kroppsspråk, kroppsholdning og gester. Når du da igjen setter deg ned for å transkribere lydopptaket, går det gjennom enda en abstraksjon. Da forsvinner både intonasjon og stemmeleie hos den som blir intervjuet. En transkripsjon vil derfor ikke være en nøyaktig gjengivelse av samtalen, men en form for abstraksjon av samtalen som har funnet sted. For meg var likevel helt nødvendig å gjøre lydopptak av intervjuene med elevene, fordi jeg da fikk mulighet til å konsentrere meg, om å følge med på elevenes tegninger, gester og kroppsspråk fremfor å fokusere på å skrive ned hva elevene sa.

3.4.1 Analyseverktøy

Jeg hadde et ønske om å vise tendensene i datamaterialet mitt før jeg gikk nærmere inn på kategoriene, og valgte derfor å lage en tabell som mitt første analyseverktøy. Tabeller kan være nyttige for datareduksjon og for datadisplay av kvalitative data (Cohen et al., 2018, s. 657).

	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Totalt
Brukte tegning				
Brukte ikke tegning				
Kom frem til svaret med tegning				
Kom frem til svaret uten tegning				
Støtte for system				
Aktiv bruk av tegning				
Narrativer				
Visualisering				
Piktografisk				
Ikonisk				
Farger				
Bruk av tall				
Bruk av skrift				
Fant mer enn én løsning				
Potensialet i tegningen				

Tabell 1 – Planlagt analysetabell

Målet med tabellen var å se hvor mange tegninger som passet i de ulike kategoriene, for å kunne gi en oversikt over all data til oppgaven, samtidig som den viser hvor hovedvekten av elevenes tegninger befinner seg. Tegningene ble sortert etter oppgave og systematisk bearbeidet. Det første jeg så på var detaljer i tegningene, hvor det ble sett på mengden detaljer i tegningene, hvordan detaljene var relatert til problemet, om tegningene var ikoniske eller piktografiske og om det var brukt farger eller ikke. Etter jeg hadde sett på detaljer ved tegningene, ble de delt inn etter gruppene fra intervjuet. Transkripsjonen skulle sammen med tegningen brukes for å avgjøre hvordan den ble *brukt* av eleven, og fungerte som et supplement som lot meg si noe om hvilke ord elevene brukte for å beskrive egne tegninger.

Tabellen ble deretter utfylt med antall tegninger som passet i hver av kategoriene. I en kolonne til høyre ble antall besvarelser på de tre oppgavene summert for å se hvor mange som eksempelvis brukte tegning som *støtte for system* totalt, eller hvor mange *ikoniske* besvarelser det var totalt. Tegningene ble kategorisert uavhengig av eleven som hadde laget tegningen. Hver elev har i utgangspunktet produsert tre tegninger, med unntak av et par elever som laget to tegninger på noen av oppgavene. Eleven kan plasseres i ulike kategorier for hver gang. Det er med andre ord tegningen som blir kategorisert, og ikke eleven. Oversikten på neste side viser hvilke spørsmål jeg stilte meg selv om tegningene, og hvilke elementer jeg så etter for å kunne gjennomføre kategoriseringen.

Kategori	**Beskrivelse av kategorien**
Brukte tegning	Eleven har produsert i større eller mindre grad en tegning bestående av noe annet enn tallsymboler og skrift.
Brukte ikke tegning	Eleven har i sin besvarelse tallsymboler, skrift eller et blankt ark. Eleven kan ha brukt konkretiseringsmaterialer, brukt fingrene til å telle eller andre strategier.
Kom frem til svaret med tegning	Eleven kom frem til det riktige, eventuelt et riktig svar og han/hun har tegnet.
Kom frem til svaret uten tegning	Eleven kom frem til riktig svar uten å tegne.
Støtte for system	Elevene bruker tegningen for å holde oversikt over elementene i oppgaven. Sorterer, teller og sjekker løsningene sine ved hjelp av tegningen.
Aktiv bruk av tegning/ Dramatisk	Tegningen blir produsert underveis i oppgaveløsingen. Inneholder tegningen en form for «bevegelse» med piler, sirkler, linjer eller avkryssing? Tegningen blir brukt på samme måte som konkretiseringsmateriale ville blitt brukt om det var tilgjengelig.
Narrativer	Eleven lager en fortelling som han/hun spiller ut i problemløsingen. Ofte preget av fantasi og kan inneholde elementer fra oppgaven, men også fra elevenes omverden. Elevene er ofte en del av egen løsningsprosess (de tegner seg selv om en del av problemet og viser hvordan de har løst det)
Visualisering	Eleven tegner etter han/hun har løst problemet eller skriver en symbolsk løsning på oppgaven. Svarer ofte at han/hun har løst oppgaven *i hodet* hvis han/hun blir spurt hvordan han/hun kom frem til svaret. Eleven tegner for å kommunisere med andre.
Piktografisk	Er elementene i oppgaven realistiske i forhold til elementene som presenteres i oppgaven?
Ikonisk	Forenklede tegninger bestående av tellestreker eller lignende. Også tegninger av elementer som ikke er nevnt i oppgavetekst.
Farger	Bruker eleven andre farger enn gråblyant? Har valgt å ikke skille mellom hvor mange farger elevene bruker, men minimum to farger telles som «bruk av farger».
Fant mer enn én løsning	Eleven har funnet flere svar på oppgavene hvor det er flere riktige svar. Gjelder oppgave 2 og oppgave 3.
Potensialet i tegningen	Var det mulig å bruke tegningen til å finne flere svar på oppgavene hvor det fantes flere svar? Kunne tegningen videreutvikles til å finne alle svar på oppgavene eller var den en blindvei?

Tabell 2 – Beskrivelse av de ulike kategoriene

Underveis i analysen ble jeg oppmerksom på noe jeg ikke hadde tenkt over i forkant av datainnsamlingen. Det viste seg at flere elever brukte tall eller bokstaver og ord i sine besvarelser. Derfor ble de to kategoriene om ord og tall, som presentert i Papandreou (2009), inkludert. Bruk av skrift og tall ble studert etter jeg hadde sett på både hvordan tegningene ble brukt og hvordan de så ut. Kategoriene ble inkludert da de tilføyer en annen dimensjon enn kategoriene som ble presentert tidligere, og jeg mente det ville være interessant å se på hvordan elevene eventuelt kombinerte flere enn én representasjon, og hvordan de eventuelt valgte å gjøre det.

Bruk av tall	Elevene inkluderer tall i løsningen sin. Definert i min oppgave til å inkludere de konvensjonelle tallsymbolene 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Bruk av skrift	Elevene inkluderer bokstaver eller ord i oppgaveløsningen sin. (Alt som ikke er tall)

Tabell 3 – Beskrivelse av de to nye kategoriene

Deretter forsøkte jeg å se etter sammenhenger på tvers av kategoriene. For eksempel så jeg på om det var en sammenheng mellom om elevene valg av piktografiske eller ikoniske tegninger, og hvorvidt de kom frem til ett eller flere riktige svar på oppgaven. Jeg forsøkte videre å undersøke hvordan de ulike kategoriene kom til syne på tvers av oppgavene, slik at jeg kunne sammenligne hvordan for eksempel *aktiv bruk av tegning* kanskje fremstod forskjellig på kjeksoppgaven og hjuloppgaven. Jeg forsøkte også å koble tallene i tabellen til notatene jeg hadde gjort meg tidligere knyttet til hvordan elevene brukte tegningen, om de brukte lang eller kort tid på tegningene, og om de snakket med de andre elevene underveis. Hver tegning ble tildelt en kode som fortalte noe om hvilken gruppe eleven var på, og hvilket kjønn eleven hadde. For eksempel J2G4 = jente nummer to, gruppe nummer fire, G2G1 = gutt nummer to gruppe nummer én og så videre. Slik kunne jeg også se om enkelte av måtene å bruke tegning på, skilte seg ut med tanke på hvilken gruppe eleven var på, eller hvilket kjønn eleven hadde.

I kategorien *potensial i tegningen* lå det om det var mulig for eleven å bruke tegningen til å finne flere svar på oppgaven, eller om tegningen kunne videreutvikles. Da oppgavene som ble gitt er problemløsingsoppgaver, er det å finne flere svar et tegn på at oppgaven kan klassifiseres som en problemløsingsoppgave. Det vil være større potensial for å finne flere løsninger dersom de 17 bladene er tegnet på en rekke før eleven deler inn i grupper etter dager, enn om de lager dagene som grupper først, for deretter å dele ut ett og ett blad.

Kategoriene for bruk, som analysen er strukturert etter, er tegning for problemløsing operasjonalisert med underkategoriene tegning som støtte for system, aktiv bruk av tegning og narrativer, og tegning av problemløsing operasjonalisert som visualisering. I tillegg ble tegningenes utseende studert, hvor fargebruk og grad av detaljer i form av ikoniske og piktografiske tegninger, var det mest sentrale. Helt til slutt ble bruk av skrift og tallsymboler, samt potensialet som ligger i elevenes tegninger sett nærmere på.

3.5 Metodekritiske og etiske betraktninger

Etiske og moralske vurderinger forteller oss noe om hva som er riktig og feil, akseptabel og uakseptabel, samt verdig og uverdig oppførsel i forskningssammenheng. Etikk kan derfor ses på som en viktig målestokk for å vurdere forskning (Befring, 2007). Forskningsetikk kan òg kalles fagetikk fordi den setter fokus på det arbeidet som utføres av de som har et profesjonelt vitenskapelig ansvar (Befring, 2007). Som forsker har man en spesiell plikt og et etisk ansvar for å være særlig oppmerksom hvis man arbeider med mennesker som er umyndige, eller som ikke alltid forstår hva det vil innebære å være deltakere i forskning; for eksempel små barn eller funksjonshemmede (Alver, 2001; Befring, 2007). Barn har krav og behov for vern når det kommer til forskning. For at forskning gjort med barn skal være etisk forsvarlig, kreves det at den som forsker evner å tilpasse metode og innhold for den aldersgruppen som skal delta (Kvale & Brinkmann, 2009). Både før, under og etter studier bør en gjøre noen etiske og moralske vurderinger med bakgrunn i det etiske ansvaret.

«Barn finner det ofte vanskelig å protestere, de innretter seg lettere etter forskerens ønsker og vil ikke alltid ha oversikt over konsekvensene av å gi informasjon» (Befring, 2007, s. 69).

Alver (2001) hevder en av grunnene til det kan være fordi barn er vant til å bli bestemt over av voksne, og har derfor ikke alltid samme mulighet til å trekke seg eller unngå å svare på spørsmål, selv om det kanskje er det de egentlig vil. Med den informasjonen i bakhodet, er det naturlig at jeg før jeg går i gang med forskningen, stiller spørsmålet: Er barnet i stand til å forstå hva det vil si å gi samtykke til å delta på min studie? I mitt tilfelle forsker jeg på bruk av tegning til problemløsing i matematikk, noe som ikke kan anses å være verken sensitiv informasjon eller personopplysninger som kan være ubehagelige for dem å dele. Likevel er det viktig at man viser respekt for elevenes integritet og autonomi, og forsøker å gjøre intervjuet til en positiv opplevelse for elevene.

Videre ønsker jeg nå å drøfte rundt det Kvale og Brinkmann (2009) kaller de fire usikkerhetsområdene knyttet til kvalitative intervju: Informert samtykke, fortrolighet, konsekvenser og forskerens rolle. «Det kan være grunn til å reflektere over muligheten til å si nei» (Nilssen, 2012, s. 147). Uavhengig av forskningsdeltakernes alder er det viktig at man som forsker får innhentet et informert samtykke. Det innebærer at de som deltar i forskningen skal informeres som forskningens formål, samt risikoer og fordeler som kan oppstå ved å delta i prosjektet. Det betyr også at de får informasjon om at det er frivillig å delta og at de når som helst kan trekke tilbake samtykket sitt, også etter datainnsamlingen har funnet sted (Befring, 2007; Kvale & Brinkmann, 2009). I tilfeller hvor forskningsdeltakerne er mindreårige, er det de foresatte som signerer på at informasjonen er mottatt og forstått. Når man forsker i en institusjon, som eksempelvis en skole, kan det oppstå spørsmål om hvem som skal gi samtykket. Kvale og Brinkmann (2009) hevder at hvis samtykket kommer fra en overordnet i institusjonen, kan det føre til at det legges press i større eller mindre grad på de som er underordnede om å delta. Et press om å delta kan også komme fra de foresatte, da det er de som signerer på samtykkeskjemaet. Jeg valgte i min studie å forske på små barn på syv til åtte år. Foreldre skal i slike tilfeller alltid gi samtykke på vegne av sine barn, da barn ikke alltid vet hva det er de sier ja til. Dette gjelder selv om jeg i min studie ikke behandlet personsensitive opplysninger. På tross av at samtykke er hentet inn hos foreldre er det viktig at også barna selv får rikelig med informasjon om både formålet med studien, hva dataene skal brukes til og ikke minst; at deres deltakelse er frivillig og at de kan trekke seg om de ønsker.

Forskningsdeltakere har rett til privatliv. Forskningsmateriale skal derfor anonymiseres og eventuelle identifiserende opplysninger skal oppbevares slik at det ikke er tilgjengelig for andre. Tiltakene gjøres for å sikre at informasjon fra forskningsprosjektet ikke skal havne på avveie, og føre til at bruken og formidlingen av informasjonen er til skade for de som deltar (Befring, 2007). Personidentifiserende opplysninger ble derfor lagret separat fra det innsamlede materialet. Et av dilemmaene som dukker opp når man ser nærmere på dette, er *hvilken informasjon som bør være tilgjengelig, og hvem den bør være tilgjengelig for.* Kvale og Brinkmann (2009) diskuterer i sin bok om intervju med barn bør være tilgjengelig for barnets lærer og eller foreldre. Hvis foreldre og lærere skal ha tilgang til intervjuene i etterkant, skal elevene være informert om dette på forhånd. Jeg valgte å ikke la foreldre eller lærere få tilgang til lydopptakene eller transkripsjonene av de elevene som deltok i min studie, fordi det ikke vil være relevant for dem å vite hva elevene svarte på de ulike oppgavene. Gjennom forskningen min har jeg vært nødt til å ta flere etiske hensyn, blant annet med tanke på personvern. *Norsk senter for forskningsdata,* NSD ble informert om prosjektet og godkjente prosjektet med de forbehold som ble gitt. Både elevene og skolene ble gitt fiktive navn i oppgaven i henhold til gjeldene regelverk.

Når Kvale og Brinkmann (2009) skriver om konsekvensene av en kvalitativ undersøkelse handler det både om eventuelle ulemper det kan medføre å delta, samt hvilke fordeler som kan forventes ved å delta i undersøkelsen. Fra et nytteperspektiv bør fordelene alltid veie tyngre enn eventuelle ulemper. Som forsker har man et ansvar for å reflektere rundt hva som eventuelt kan tenkes å være konsekvensene av å delta, både for de som deltar direkte, men også for gruppen de representerer. For å kunne ta de riktige hensynene ses det på som en fordel at den som gjennomfører intervjuene har inngående kjennskap til forskningsfeltet. Kvaliteten på den vitenskapelige kunnskapen avhenger av forskerens integritet. Betydningen av forskerens integritet kommer spesielt til syne i intervjusituasjoner, fordi den som intervjuer er selv det viktigste redskapet for å innhente informasjon fra forskningsdeltakerne. Forskerens kunnskap, erfaringer og ærlighet er avgjørende faktorer i intervjustudier (Kvale & Brinkmann, 2009).

På tidspunktet hvor datainnsamlingen fant sted var jeg en ukjent person for elevene som deltok. Det kan ses på som en fordel at jeg ikke kjente elevene fra før, fordi jeg ikke hadde noen fordommer om hvem som kom til å svare hva, hvem som ville komme med de mest interessante tilbakemeldingene og hvilke elever som ikke ville være interesserte i å delta i en diskusjon på forhånd. Dette kan ha ført til at jeg gikk mer åpen inn i innsamlingen. Samtidig er det viktig å presisere at jeg ikke har et nøytralt perspektiv, da jeg har med meg både forventninger og ønsker inn til datainnsamlingen. Jeg ønsket jo selvsagt på forhånd at i hvert fall noen av elevene skulle lage tegninger slik at jeg fikk noe jeg kunne analysere, samt også forventninger om at elevene hadde noe å si om egne tegninger.

Flere finner at det er en fordel hvis forskeren ikke blir assosiert med en lærer (Kvale & Brinkmann, 2009). Den som forsker må ikke få barnet til å tro at det bare finnes ett riktig svar på spørsmålene, og mener derfor det vil være en fordel om den som forsker kommer utenfra og blir presentert som en «ny» person uten tilknytting til læreren som allerede er i en klasse. Videre påpeker de at det å ikke bli assosiert med en lærer, er en fordel fordi eleven skal ha mulighet til å trekke tilbake samtykket sitt uten at dette har innvirkning på relasjonen eleven har til læreren, andre elever eller autoritetsfigurer i klassen.

Forskerens uavhengighet er også et sentralt tema i forskning, da den som forsker både kan bli påvirket av overordnede eller av forskningsdeltakerne. Hvis forskeren føler sterkere tilknytning til en av gruppene, er det fare for at han eller hun ser bort fra enkelte resultater, eller vektlegger noen funn på bekostning av en nøytral undersøkelse. Det er derfor viktig at man forsøker å stille seg så nøytral som mulig, og tenke over at man skal ta valg som best beskriver hva som faktisk ble funnet og hvordan det ble funnet. De fire usikkerhetsområdene knyttet til kvalitative intervjuer av Kvale og Brinkmann (2009) ble brukt som en ramme for undersøkelsene mine og som en etisk påminnelse for å bedrive god, nøytral forskning.

3.6 Studiens troverdighet

Validitet er sentralt i forskning, og dreier seg om hvorvidt en metode er egnet for å undersøke det den skal undersøke. Jeg ønsket å undersøke 23 tredjeklassingers bruk av tegning i problemløsing i matematikk. For å kunne si noe om det valgte jeg å la elevene løse tre problemsløsingsoppgaver. Da jeg skulle velge oppgaver var jeg bevisst på å velge oppgaver som ikke inneholdt mye fagterminologi eller var for lange. Jeg valgte også å lese oppgavene høyt for elevene. Dersom en oppgave består av mye og kanskje vanskelig tilgjengelig tekst eller begreper, vil det være oppgaver som i så stor grad stiller deltakernes leseferdigheter på prøve, at testen ikke har akseptabel validitet for å måle elevers strategier til å problemløse i matematikk (Befring, 2007).

Reliabilitet kan brukes som en samlebetegnelse for *avhengighet*, det å være *konsekvent (consistency)* og *overførbarhet* over tid, over instrumenter og over deltakere. For at en oppgave skal være reliabel må en annen forsker kunne gjøre undersøkelsene å få *lignende* svar. Svarene må altså nødvendigvis ikke være de samme, da kvalitativ forskning er av den natur at den aldri kan bli gjennomført på akkurat samme måte flere ganger. Det er vanskelig å si om en annen forsker ville fått de samme svarene som meg i sin studie. Forskere velger å fokusere på det de anser som interessant, og vil hele tiden holde fokus på det de anser for å være mest relevant og viktig. En annen forsker ville ikke nødvendigvis ha funnet det samme som meg, fordi vi velger forskjellige fokusområder og vektlegger forskjellig. Et annet tiltak som gjøres for å sikre en troverdig oppgave er å sørge for at oppgaven har *overførbarhet.* Det betyr dirkete om funnene fra forskningen kan anvendes på andre, lignende situasjoner. For å sikre dette, har jeg under gjennomføring av datainnsamling gitt en detaljert beskrivelse av gjennomføringen av datainnsamlingen, slik at den på enklest mulig måte skal la seg kopiere om ønskelig.

All forskning handler om en balansegang mellom nærhet og distanse, og i kvalitativ forskning spesielt, blir nærhet sett på som en stor fordel. Som forsker i mitt eget felt har jeg naturlig nok forsøkt å gjøre avstanden mellom meg selv og forskningsdeltakerne, elevene, så liten som mulig. Nilssen (2012) skriver at all kunnskap er relevant kunnskap. I tillegg til å samle inn datamateriale til oppgaven min, ble cirka halvparten av elevene observert ved en separat anledning, en temadag på skolen hvor fokuset var på matematikk. Kunnskapen jeg tilegnet meg den dagen går ut over det innsamlede og presenterte datamaterialet, og blir ikke brukt direkte i oppgaven på noe vis. Likevel er det viktig å redegjøre at det er kunnskap om elevene jeg har tilegnet meg som jeg ikke vil være i stand til å legge fra meg da datamaterialet skal analyseres.

Nilssen (2012, s. 143) viser til Lincoln og Guta (1985) når hun skriver om det å «ta funnene tilbake til kildene» som en måte å sikre troverdighet i en studie. Ved å la forskningsdeltakerne selv lese gjennom oppgaven, se på egne besvarelser eller lese transkripsjonene, kan de selv avgjøre hvor nøyaktig og troverdig det som blir presentert i den endelige oppgaven er. Det er imidlertid noen dilemma knyttet til å gjennomføre dette. Elevene kan ha glemt hva de sa første gang, de kan ha endret oppfatning eller de kan føle seg presset av overordnede eller medelever til å endre sin besvarelse. Det ble derfor tatt en avgjørelse om å ikke la elevene lese transkripsjonene eller oppgaven før den ble publisert.

Ved å forske på få elever, vil datamaterialet følgelig bli snevert. Jeg vil ikke kunne si noe om samtlige tredjeklassingers bruk av tegning, men jeg vil kunne si noe om et utvalg elevers bruk. Jeg mener fortsatt det er min beste mulighet, da det kreves at man går i dybden for å kunne si noe om hvordan tegninger blir brukt, fremfor om de blir brukt eller ikke.

4. Analyse

Slik det fremgår av metodekapittelet er forskningen min kvalitativ. Jeg har valgt å fokusere på 23 elever for å se hvordan de bruker tegning for å løse eller representere matematiske problem i problemløsing. Presentasjonen av datamaterialet er strukturert rundt rammeverket som ble presentert i teorikapittelet, hvor det skilles mellom om elevene bruker tegningen for å løse problemet eller for å representere problemet i etterkant. Detaljrikdom i tegningen, med fokus detaljrelevans, relasjon til virkelighet og bruk av farger blir også presentert.

For å gjøre datamaterialet oversiktlig ble det laget en tabell som viser en oversikt over det innsamlede datamaterialet. Tabell **4** nedenfor viser kategoriseringen av totalt 69 elevbesvarelser, hvorav 54 besto av en tegning.

	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Totalt
Brukte tegning	23	21	10	54
Brukte ikke tegning	0	2	13	15
Kom frem til svaret med tegning	10	19	10	39
Kom frem til svaret uten tegning	0	2	5	7
Støtte for system	6	17	6	29
Aktiv bruk av tegning	16	2	2	20
Narrativer	0	1	1	2
Visualisering	1	1	1	3
Piktografisk	17	21	6	44
Ikonisk	6	0	4	10
Farger	8	5	6	19
Bruk av tall	6	8	13	27
Bruk av skrift	9	4	10	23
Fant mer enn én løsning	X	3	4	7
Potensiale i tegningen	X	4	7	11

Tabell 4 – Oversikt over datamaterialet

I kolonnene kan en se antall typer tegninger på en oppgavene for seg og radene viser samme kategori, men på tvers av oppgave. Ulike farger ble benyttet for å skille de ulike kategoriene fra hverandre. Farger ble brukt for å skille mellom hva som var fokus i de ulike kategoriene. Hvis fokuset var på bruken av tegning da det ble kategorisert er ruten lys blå, om fokuset var på hvordan tegningen så ut, og hvilke elementer den inneholdt er ruten oransje, da de ble sett på om elevene brukte andre representasjoner sammen med, eller istedenfor tegning er ruten grønn og til slutt ble potensialet i tegningen eller om eleven kom frem til flere svar hvite rader i tabellen. Fargekodene vil være gjennomgående i hele oppgaven.

	Bruk av tegning
	Detaljer i tegningen
	Skrift eller tall
	Potensialet i tegningen

Figur 2 – Forklaring fargekoder i tabell

I tillegg til å si noe om forekomsten til de ulike måtene å bruke tegning på vil det i analysen være eleveksempler fra det innsamlede materialet som viser hvordan strategien eller bruken av tegningen kan komme til syne i elevers arbeid.

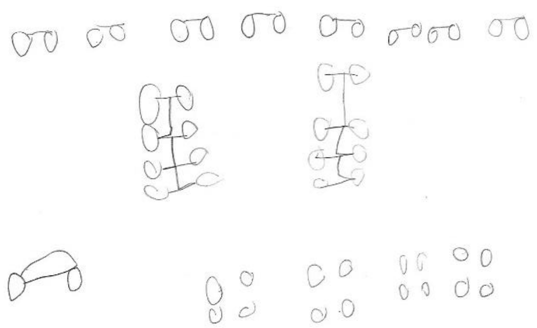
I første del av analysen ble det funnet fire hovedkategorier knyttet til hvordan tegningen blir brukt i datamaterialet: tegning som støtte for system, aktiv bruk av tegning, narrativer og visualisering. I del to av analysen ble det sett nærmere på hvordan tegningen så ut, hvor det ble funnet to kjennetegn jeg ønsker å gå nærmere inn på, det første er sofistikasjon i tegningen i form av ikoniske eller piktografiske tegninger og bruk av farger. Helt til slutt ble det sett på om elevene inkluderer bokstaver eller tall i sine besvarelser, samt potensialet som lå i tegningen med tanke på å bruke tegningen til å finne flere, eller alle løsningene på en oppgave.

4.1 Tegning for problemløsing

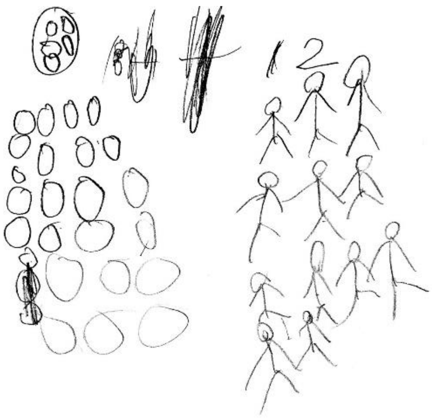
Som problemstillingen min tilsier, er jeg interessert i hvordan elever bruker tegninger i problemløsingssituasjoner. Hvis man sammenligner antall tegninger som ble laget for problemløsing med tegninger som ble laget av problemløsing hos elevene, var det en helt klar overvekt av tegninger som ble brukt for problemløsing. Elevene brukte altså i stor grad tegningen underveis i prosessen for å løse oppgaven. I tabell **4** (s.39) ser vi at elevene brukte tegningen enten som et verktøy for å løse problemet, eller for å holde oversikt over elementene i oppgaven. Under tegning for problemløsing ble det i datamaterialet funnet tre underkategorier: tegning som støtte for system, aktiv bruk av tegning og narrativer.

4.1.1 Tegning som støtte for system

Kategorien med høyest forekomst blant elevene i studien var tegning som *støtte for system*. Av totalt 54 tegninger ble 29 klassifisert som støtte for system. Som det følger noen eksempler på, brukte elevene tegningene for å holde oversikt over alle elementene i oppgaven samtidig som de systematisk testet ulike løsninger ved hjelp av tegningen. Som eksempler på tegning som støtte for system var det mange elevtegninger å velge mellom. De eksemplene som ble valgt, viser to måter tegning kan bli brukt som støtte for eleven.



Figur 3 – Støtte for system



Figur 4 – Støtte for system

Felles for begge besvarelsene var at tegningene viste et bilde på problemet, uten at det var noe handling i tegningene. De var stillbilder i den forstand at de ikke inneholdte piler, streker eller lignende som viste regneoperasjonene. Tegningene ble laget slik at de av elevene lot seg bruke til å telle og sjekke løsningene på.

Det første eksemplet jeg ønsker å si noe om er figur **3.** I tegningen kan vi se at «Simon» har kommet med tre svar på hjuloppgaven. Det første han gjorde var å tegne grupper på to og to hjul. Etter det talte han over alle hjulene ved å telle med toere: «to, fire, seks, åtte, ti, tolv, fjorten, seksten». Hans første løsning var at Ola hadde 8 motorsykler, med to hjul hver. Videre ble Simon spurt om han kunne flere løsninger på oppgaven, hvor han kom med to alternative løsninger til.

Forsker: Kan du finne et annet svar på oppgaven Simon?

Simon: Ja, han kan ha bil. Han kan ta to biler. Han kan ta to biler.

Forsker: Kan du vise meg det?

Simon tegner en bil hvor det vises to hjul

Simon: Det er vanskelig å tegne sånn at det vises to hjul på begge sider. Så jeg tegner bare sånn at det er fire hjul som vises, men ikke bilen.

Simon startet med å tegne en bil slik den ville sett ut fra siden, men da det bare var to hjul som var synlige, endret han representasjonen sin til å bare bestå av hjul, slik at vi kunne se alle fire hjulene på bilen. Etter han var ferdig med å tegne bilene, startet han på nytt å tegne hjul. Han tegnet 8 hjul og streker mellom hjulene for å vise at de hørte sammen.

Simon: Han kan også ha en lastebil.

Forsker: Hvor mange hjul har en lastebil da?

*Simon: Åtte. Så han kan, vent litt. *Simon tegner en lastebil med åtte hjul* Ehm, han kan faktisk ha to lastebiler.*

Simon telte hjulene på den første lastebilen to ganger, før han tegnet den andre lastebilen. Han endte på totalt tre alternative løsninger på oppgaven og brukte tegningen til å telle hjulene underveis, og sjekke at det stemte med det totale antallet hjul som skulle være 16 stykker. Til slutt ble Simon spurt om han brukte tegningen til å løse oppgaven, hvor han da svarte at han ikke helt forstod hva jeg mente med det. Han avsluttet samtalen med å fortelle at han brukte tegningen til å telle og til å se på hjulene.

Forsker: (...) Fikk du bruk for tegningen din når du skulle finne svaret?

Simon: Ehm, jeg kunne telle hjulene, men jeg vet ikke helt om jeg skjønner hva du mener? Brukte tegningen min? Til hva da?

Forsker: Når du for eksempel skulle finne flere svar på oppgaven?

Simon: Jeg kunne telle ja. Hvis det er det du mener. Se på hjulene og sånn.

Det andre eksemplet knyttet til støtte for system som bruk ble hentet fra den første oppgaven, kjeksproblemet. I figur **4** (s.41) kan vi se at «Peter» lager en oversikt over alle elementene i oppgaven og har tegnet 18 kjeks og 12 mennesker på hver sin side av arket. Eleven tegnet litt for mange kjeks til å starte med og hadde satt kryss over noen, samt forsøkt å viske ut noen av kjeksene. Selv om Peter hadde avbildet elementene i oppgaven korrekt klarte han ikke å finne løsningen på oppgaven – dette til tross for at han talte kjeksene og menneskene gjentatte ganger og forsøkte å se en sammenheng mellom de to elementene.

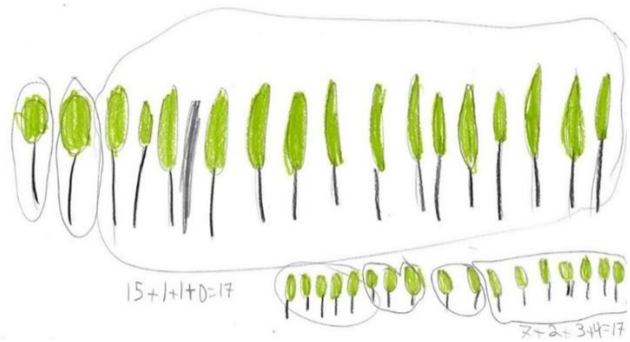
Peter: Så det er 12 unger som skal dele 18 kjeks. Hmm … jeg vet ikke helt om jeg skjønner. Fordi det går jo ikke.

Peter har kommet frem til at det ikke er mulig å løse oppgaven, og han kom heller ikke videre når jeg forsøkte å fortelle han at han kunnedele ut én kjeks til hver for å så se hvor langt han kom.

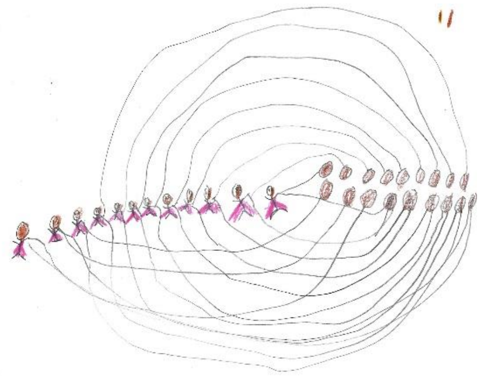
4.1.2 Aktiv bruk av tegning

Aktiv bruk av tegning, var sammen med støtte for system den kategorien som viste seg hyppigst i elevenes besvarelser. Av totalt 54 tegninger ble 20 tegninger kategorisert til å være aktiv bruk av tegning. Det vil si at elevene brukte piler, sirkler eller linjer for å representere regneoperasjoner. Tegningen ble brukt aktivt i prosessen med å løse oppgaven, slik konkretiseringsmateriale kunne blitt brukt om det hadde vært tilgjengelig. Vi kan si at elevenes tegninger inneholder bevegelse, fordi de symboliserer aktive handlinger. For å vise eksempler på hvordan aktiv bruk av tegning kom til syne i datamaterialet mitt ble det valgt å ta med to elevbesvarelser fra jentene «Ronja» og «Johanne».

Som vist i figur **5** nedenfor, har Ronja i snegleoppgaven valgt å tegne en piktografisk tegning av alle bladene. Hun startet med å tegne de 17 blader på en rekke. Hun begynte også å tegne et blad nummer 18 som nummer seks fra venstre, men da hun så over antallet hun hadde krotet hun bare over det.



Figur 5 – Aktiv bruk av tegning - snegleoppgave



Figur 6 – Aktiv bruk av tegning - kjeksoppgave

Ronja startet med å fordele bladene på tegningen vi ser øverst på arket hennes. Det første hun gjorde var å sette ring rundt 15 blader, deretter satte hun ring rundt ett og ett blad. Før det har hun kommet frem til at snegla har spist 17 blader den første dagen, og ingen de andre dagene.

Ronja: Eller nei, han spiste femten den første dagen!

Forsker: Ok Ronja, så han spiste femten på dag en, hvor mange spiste han på dag to da?

Ronja: Én!

Forsker: Og på dag 3?

Ronja: Én!

Forsker: På dag fire da?

Ronja: Ingen, fordi det var ingen igjen.

Ronja akseptere at snegla ikke må spise blader hver dag, men at null også var et godkjent svar. Som vi kan se i regnestykket i figur **5**, la hun også til 0: (15+1+1+0=17). På eget initiativ tegnet Ronja igjen opp 17 blader og begynte å fordele bladene på nytt.

Forsker: Ronja hva gjør du nå?

Ronja: Jeg tegner opp 17 blader en gang til.

Forsker: Hva skal du gjøre nå da?

Ronja: Dele ut på nytt!

Ronja tegnet 17 nye blader, fargela de og etterpå satte hun ring rundt de ulike gruppene. Hun startet til venstre og satte ring rundt syv blader. Så satte hun en ring rundt to, tre og til slutt fem blader. Jeg forsøkte å spørre henne hva hun gjorde, da hun allerede har funnet et svar på oppgaven.

Forsker: Finner du flere svar Ronja?

Ronja: Man kan lage mange svar! Det er bare å flytte de ringene rundt. Vi kan ta med en mer på mandag eller ta en mindre eller to. Så jeg kan lage mange svar til deg hvis du vil!

Forsker: Så fint Ronja.

Ronja: Skulle gått an også flytta ringene sånn at man ikke må lage 17 nye blader for hver gang da. Det blir mye fargelegging.

Ronja uttrykket at hun skulle ønske tegningen var interaktiv, slik at hun slapp å «tegne alle bladene på nytt». Hun poengterte også at det ble mye fargelegging hvis hun for hver løsning måtte lage 17 nye blader. Avslutningsvis ble Ronja spurt om hun synes tegningen var nyttig for å løse oppgaven, hvor hun bare svarte at hun laget grupper med den, uten å utdype noe utover det.

Forsker: Synes du tegningen var nyttig for å løse denne oppgaven da, brukte du den?

Ronja: Jeg laget grupper med den.

Som mitt andre eksempel, i figur **6** (s.44) ønsker jeg å presentere besvarelsen til Johanne. Som vi kan se brukte Johanne også tegningen aktivt for å *dele ut* kjeks til personene i oppgaven. Hun brukte tegningen på samme måte som det kan tenkes hun ville gjort om hun hadde hatt konkretiseringsmaterialer, som eksempelvis klosser tilgjengelig. Det første Johanne gjorde var å tegne de 12 barna på en rekke, deretter tegnet hun de 18 kjeksene til høyre for personene.

Hun startet med å dele ut én og én kjeks. Hun satte en strek fra en kjeks til en person mens hun snakket høyt med seg selv.

> *Johanne: Vær så god, vær så god, vær så god (...)*
>
> **Johanne setter strek fra kjeks til en person. Hun gjentar «vær så god» 12 ganger, til hver person har fått en kjeks hver**
>
> *Johanne: Men jeg har igjen en, to, tre, fire, fem, seks. Jeg har igjen seks kjekser! Det blir seks til overs.*

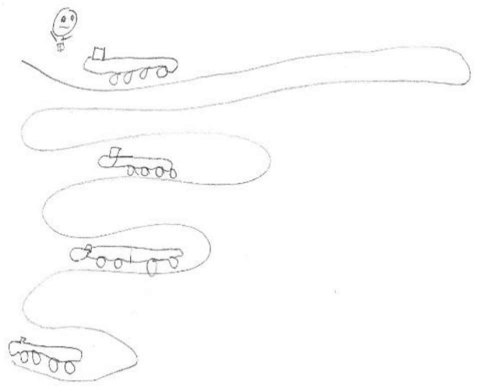
Videre forsøkte jeg å få Johanne til å si noe om hva som skjedde med de seks kjeksene som ble til overs etter hun hadde delt ut de 12 første.

> *Forsker: Ok Johanne, har vi nok til at de får en til hver?*
>
> *Johanne: Nei.*
>
> *Forsker: Hmm, men hva skal vi gjøre da?*
>
> *Johanne: Vi kan spise de selv da?*
>
> *Forsker: Men hva hvis vi skal dele de ut?*
>
> *Johanne: Dele den.*
>
> *Forsker: Hva skjer hvis vi deler den i to?*
>
> *Johanne: JAAAAA! Da får de en hel og en halv, fordi at vi kunne dele.*

Johanne fortalte videre at seks hele var det samme som tolv halve, og at alle derfor kunne få en halv kjeks til. Johanne fargela tegningen etter den var ferdig og fargela alle personene med rosa kjoler, fordi «alle er jenter» ifølge henne selv.

4.1.3 Narrativer

Når det kom til bruk av narrativer, fant jeg i mine data en elev, Johanne, som lagde narrativer på to av sine oppgaver. Johanne var opptatt av å formidle en historie samtidig som hun løste oppgavene. Hun tok i bruk både elementer fra oppgaven, og elementer fra egen fantasi. Som et eksempel på hvordan tegning kan være en del av et narrativ i problemløsing, presenteres to av Johannes besvarelser; hjuloppgaven og snegleoppgaven.



Figur 7 – Narrativer 1

Figur 8 – Narrativer 2

I figur **7** kan vi se Johannes besvarelse på den andre oppgaven, hjuloppgaven. Johanne var tidlig klar på hva hun ville tegne og startet med å tegne den lille gutten, Ola. Handlingen i oppgaven ble plassert på rommet til gutten hun tegnet, og hun fortalte samtidig at det var rotete på rommet hans.

Johanne: Jeg vil tegne tog!! Og togbane. Også trenger han togbane.

Forsker: Fint.

Johanne: Først så tegner jeg han, på det rotete rommet hans! Han roter masse, masse.

Johanne: Se hvor liten han er, og så stort hode.

(…)

Johanne: Se hvor masse togbane! Se på togbanen hans da! Toget skal gå sånn svosj, svosj, svosj.

Johanne følger togskinna med blyanten sin

Johanne: Det toget hans, det har gått helt ned og nå må han gå hjem, på togskinnene.

Johanne tegnet, som vi kan se i figur **7** (s.47), en lang togskinne som går over hele arket. Hun fulgte togskinnen med blyanten og forklarte hvordan toget bevegde seg på skinnene. Etter de to jentene på gruppen hadde tegnet en stund spurte jeg de om de om de har kommet frem til et svar. Johanne svarte da med å vise til hva som *skjedde* på tegningen sin, og svarte ikke på spørsmålet som ble stilt. Det ble gjort et valg om å ikke stille Johanne flere spørsmål om tegningen, men å isteden gå videre til neste oppgave.

> *Forsker: Ok, men hva kommer dere frem til da jenter?*
>
> *Johanne: Se på toget da, det går baklengs, *Johanne ler*. Ola kjører baklengs.*

I figur **8** (s.47) kan vi se Johannes tegning på snegleoppgaven. Hun startet med å tegne et stort epletre på midten av arket, så tegnet hun en sol i venstre hjørne. Hun fortale at hun hadde gitt snegla navnet «Lilla», at det var en fin dag ute, og at hun derfor måtte tegne en sol. Johanne delte ut ett og ett blad til «Lilla». Hun satte kryss over bladene etter hvert som hun hadde delt de ut.

> *Johanne: En på mandag, en på tirsdag, en på onsdag, en på torsdag, en på mandag (…) Jeg setter bare kryss over når jeg har sagt dagen.*
>
> *Forsker: Men hvor mange ble det hver dag nå da Johanne?*
>
> *Johanne: Jeg husker ikke. Men det er en mer på mandag.*

Da Johanne i etterkant ble spurt hvor mange blader det ble hver dag kunne hun ikke gi svaret, da hun ikke hadde holdt tellingen på hvor mange ganger hun hadde sagt de ulike ukedagene. Hun startet og avsluttet med mandag og kunne fortelle at det ble én mer på mandag, men at hun visste ikke hvor mange det ble hver dag. Hun tok en liten pause før hun startet å telle på nytt.

> *Johanne: Men jeg kan telle, vent litt. Også er det et lite menneske her også.*

Johanne: Lilla spiste 4 på mandag, 2 på, eeeh fredag, tirsdag spiste hun 3 og på resten av dagene spiste hun 8!

Johanne virket ikke å være så opptatt av hva svaret på oppgaven ble. Etter hun hadde tegnet ferdig og fargelagt tegningen sin spurte jeg henne om hun visste hvor mange det ble hver dag? Da svarte hun at hun ikke visste, men fortsatte å snakke om hvordan tegningen så ut og fortellingen om «*regnbuesnegla*». Konteksten i oppgaven var for Johanne og som det ofte er for de som bruker tegningen som et narrativ, sentral. Johanne stoppet opp flere ganger underveis for å fortelle at hun «visste hva som ville skje etterpå» i fortellingen. Da Johanne ble spurt av en annen elev på gruppa hvorfor hun tegnet epletre, da det ikke var viktig for oppgaven, svarte Johanne at det var viktig for hennes historie, og at hun derfor valgte å tegne det.

Johanne: Også skal det være litt epler i treet uansett.

Ida: Men det er jo ikke epler det handler om, det er jo blader.

Johanne: Men det her skal være et epletre.

Ida: Åja. Men det er jo ikke viktig for oppgaven?

Johanne: Men det er viktig for historien min Ida.

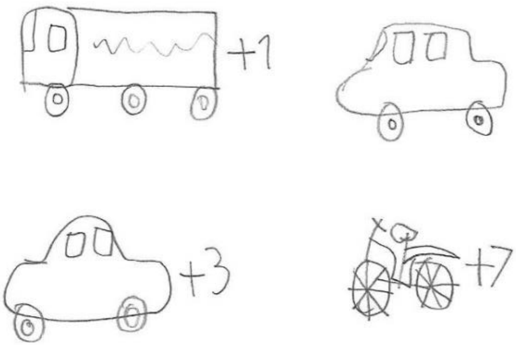
Johanne inkluderte både elementer fra oppgaven og elementer fra egen fantasi i tegningen sin, som er typisk for elever som lager narrativer. Som vi kan se på tegningene hennes var de piktografiske, som vil si at de var realistiske i forhold til de elementene som ble presentert i oppgaven, hun har til en viss grad brukt realistiske farger, hvis man ser bort fra regnbuesneglen.

4.2 Tegning av problemløsing

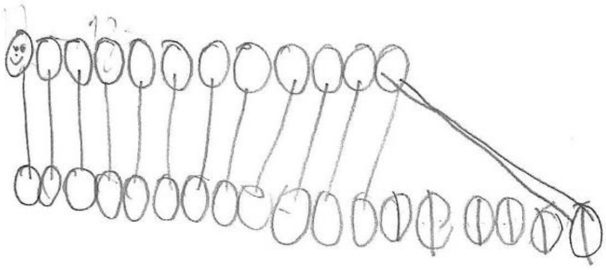
Selv om forskningsfokuset mitt i oppgaven har vært på elevers bruk av tegning *for* problemløsing, var det med tanke på å få vist frem bredden i funnene mine relevant å også presentere de elevene som tegnet *av* problemløsingen sin. Det vil si de elevene som valgte å tegne i etterkant av at de hadde løst oppgaven.

4.2.1 Visualisering

I mitt datamateriale ble det funnet bare én elev som valgt å bruke *visualisering*; «Mia». Mia valgte å løse oppgavene i hodet først og tegne i etterkant, for å kommunisere til meg hva hun hadde tenkt. For henne ble da tegningen ikke et verktøy for å løse problemet, men for å kommunisere hvordan hun hadde tenkt seg løsningen i hodet. For å vise hvordan visualisering kan komme til syne i en elevs arbeid, presenteres nå to besvarelser fra eleven Mia. Den første er på kjeksoppgaven, og den andre på hjuloppgaven.



Figur 9 – Visualisering - hjuloppgave



Figur 10 – Visualisering - kjeksoppgave

Jeg hadde akkurat presentert hjuloppgaven for elevene og forklart at de kan løse den slik de selv ønsket. Det første som ble gjort var å lese oppgaven høyt for elevene én gang. I figur **9** kan vi se Mias tegning i hjuloppgaven. Mia diskuterte med en gutt på gruppa «Ove» rett etter de hadde fått oppgaven.

> *Mia: Jeg tror jeg vet det. To lastebiler er jo 6 + 6. det blir 12. Også må du plusse på en vanlig bil attåt, så blir det jo det.*
>
> *Ove: Nei, men da blir det jo 18?*
>
> *Mia: Eeh, nei? 12 + 4, hva blir det?*
>
> *Ove: Det blir 16, ok …*

Det ble stille fra Mia en stund, hun stirret ut i luften og så ut til å telle på fingrene. Mia stoppet underveis i tegneprosessen for å forsikre seg om at jeg forsto hva hun hadde tegnet. Hun skrev tallsymboler og operasjonstegn for å vise meg at (+7) betydde det samme som å tegne 7 helt like sykler bak den hun allerede hadde tegnet. Ved å ikke tegne mer enn én av hver, sparte hun mye tid og ble raskt ferdig, selv om hun hadde løst oppgaven før hun startet å tegne.

> *Mia: Nå har jeg funnet det som går an.*
>
> *Forsker: Har du? Får jeg se?*
>
> *Mia: Skjønner du det her? Jeg skriver bare sånn at jeg liksom tar +1 og +7 jeg, for da slipper jeg å tegne alle liksom. Skjønner du?*
>
> *Forsker: Ja, det gjør jeg.*
>
> *Mia: Ehm, jeg kan forresten tegne flere. Jeg kan ta å tegne to motorsykler istedenfor en bil eller ja, bytte en bil mot 2 motorsykler.*

Videre forsøkte jeg å snakke med Mia om hvorvidt hun synes tegningene var nyttige for å løse oppgavene eller ikke, hvor Mia da fortalte meg at hun ikke behøvde tegningen for å løse oppgaven, men at hun lagde den for å vise meg hvordan hun hadde tenkt, eller kommet frem til svaret.

> *Forsker: Så bra du sier det, synes du tegningen hjalp deg å løse oppgaven da Mia?*
>
> *Mia: Hæ? Nei, jeg laga den jo etterpå.*
>
> *Forsker: Ok, men hvorfor tegnet du da?*
>
> *Mia: Jo, for at du skulle kunne se liksom, hva jeg har tenkt på og sånn.*

Mia tegnet ikke for sin egen del, men for å vise meg hva hun hadde tenkt. Tegningen ble for henne et verktøy som støttet kommunikasjon med meg, og gjorde det tydelig for meg hvordan hun hadde tenkt for å komme frem til svaret sitt.

I figur **10** (s.50) kan vi se Mias tegning på kjeksoppgaven. Mia hadde tidligere kommet frem til at det i hvert fall var nok kjeks til at alle kunne få én hver, så hun sa hun delte ut én kjeks til hver, og hun hadde da seks kjeks igjen. Hun arbeider så langt i hodet og arket er blankt.

Mia: Da blir det, da blir det, ehm, jeg vet hva det blir. Det blir 1 og en halv på hver.

Forsker: Hvordan tenker du når du sier det?

Mia: Jo fordi det blir det en hel på hver, også blir det en halv på hver. Fordi 6 + 6 blir 12. og da blir jo det de 6 som er til overs som vi må gjør til 12, hvis du skjønner?

Forsker: Ok, jeg ser du har tegnet noe, hva er det?

Mia: Jeg får ikke til å vise det på tegninga mi, men det er en og en halv på hver. Jeg fikk det i hodet.

Mia startet på en tegning etter hun hadde kommet frem til svaret på oppgaven, men gjorde ikke ferdig tegningen fordi hun ikke fikk til å vise hvordan hun tenkte. Hun var tydelig frustrert over at hun ikke fikk til å tegne svaret sitt, men hun forklarte muntlig hvordan hun hadde fått 12 deler fra 6 kjeks. Jeg spurte henne ikke om hun fant tegningen nyttig på denne oppgaven da hun allerede hadde uttrykket at hun ikke fikk til å bruke den.

4.3 Detaljer i tegningen

Når det kom til hvordan tegningene så ut, valgte jeg å se nærmere på detaljer i tegningene, om tegningene var piktografiske eller ikoniske, og om elevene brukte farger eller ikke. Det ble sett på grad av detaljer og bruk av farger fordi det kan henge sammen med om elevene finner tegningen nyttig eller ikke, og om de klarer å utnytte potensialet som ligger i tegningene. For eksempel har forskere tidligere funnet at irrelevante detaljer kan komme i veien og gjøre løsningsprosessen mindre effektiv (Rellensmann et al., 2017). De tre kategoriene som gikk på tegningenes utseende var piktografiske tegninger (realistisk i forhold til oppgaven), ikoniske tegninger (ikke-realistisk i forhold til oppgaven) og farger (bruk av mer enn én farge).

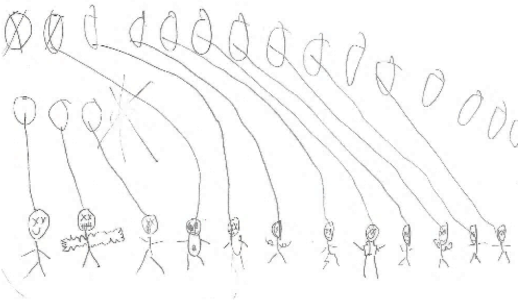
	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Totalt
Brukte tegning	23	21	10	54
Piktografisk	17	21	6	44
Ikonisk	6	0	4	10
Farger	8	5	6	19

Tabell 5 - Tabellutdrag detaljer i tegningen

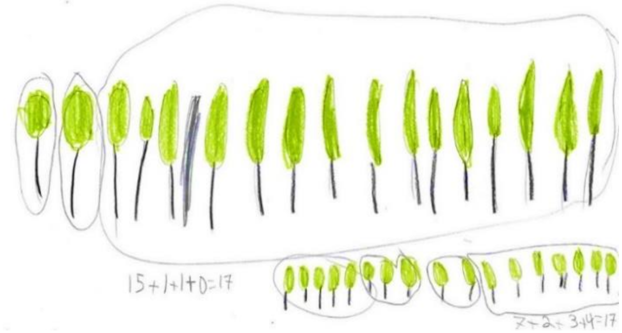
4.3.1 Piktografiske og ikoniske tegninger

I tabell **5** (s.52) ser vi en klar overvekt av piktografiske tegninger sammenlignet med ikoniske. Av 54 tegninger var 44 av tegningene piktografiske, mens bare 10 tegninger var ikoniske. Ser vi nærmere på de tre oppgavene for seg, kan vi se i tabell **5** (s.52) at samtlige av de 21 tegningene på oppgave 2 var piktografiske, mens på oppgave 1 var det 17 av 23 tegninger og på oppgave 3 var 6 av 10 tegninger piktografiske. Det vil da si at samtlige som tegnet på oppgave 2 laget en piktografisk tegning. Oppgave 2 handlet om Ola som hadde noen hjul på lekene sine, hvor elevene fikk i oppgave å finne ut hvor mange, og hvilke leker han hadde. Det kan være vanskelig å skille mellom en sirkel og et hjul, da flere av elevene ikke hadde tegnet detaljer nok til å kunne skille mellom de to. Jeg var derfor avhengig av å spørre elevene hva de hadde tegnet, og da svarte alle elevene at de hadde tegnet hjul.

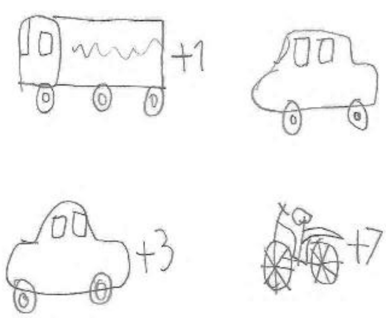
Piktogrammer, eller piktografiske tegninger er tegninger som er realistiske i den forstand at elementene er direkte knyttet til det som blir etterspurt i oppgaven. Nedenfor følger tre eksempler fra de innsamlede elevarbeidene og viser hvordan elevene tegnet piktografiske tegninger. Det ble bevisst valgt å ha med ett eksempel fra hver av de tre oppgavene, for å kunne se på eventuelle forskjeller mellom oppgavene.



Figur 11 – Piktografisk tegning 1



Figur 12 - Piktografisk tegning 2



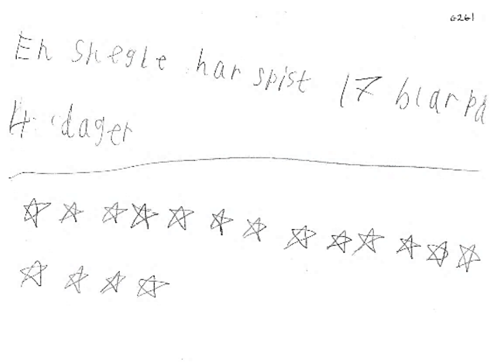
Figur 13 – Piktografisk tegning 3

Det første eleveksemplet jeg ønsker å si noe om, er figur **11** (s.53) som er hentet fra kjeksoppgaven. Eleven har tegnet kjeks på en rekke øverst og personer på en rekke nedenfor. Kjeksene ble delt ut én og én, med streker mellom kjeks og person. Den er et godt eksempel på hvordan en tegning kan bli brukt aktivt for å løse et problem. Eleven delte ut én kjeks til hver og sto igjen med 6 kjeks som ikke har strek mellom kjeks og person. Tegningen ble kategorisert som en piktografisk tegning fordi eleven har tegnet elementer som er realistiske i forhold til oppgaven. Tegningen har et lavt nivå av abstraksjon. Eleven har brukt relativt lite detaljer i sin tegning, men enkelte av personene på tegningen har elementer som skiller de fra hverandre.

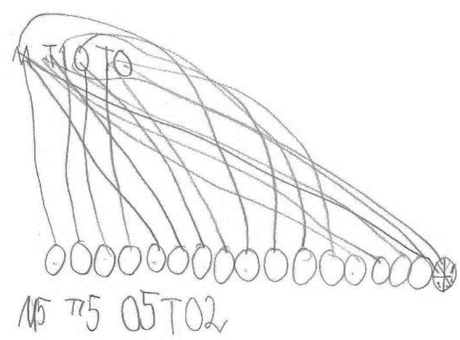
Det andre eksemplet jeg ønsker å si noe om er figur **12** (s.53). Igjen er dette en tegning som ble presentert tidligere i oppgaven som et eksempel på aktiv bruk av tegning. Tegningen er Ronjas besvarelse på snegleoppgaven. Hun har valgt å tegne alle 17 bladene og fargelegge hvert av bladene med to farger: grønn og brun. Deretter ble bladene gruppert etter hvilke som ble spist den første, andre, tredje og fjerde dagen. Tegningen er piktografisk fordi bladene er realistiske i forhold til de elementene som ble presentert i oppgaven. Bladene ble også fargelagt i realistiske farger.

Det tredje eksemplet jeg ønsker å si noe om, figur **13**, er det samme eksemplet som ble hentet frem i delkapittel **4.2.1** Visualisering. Mia har bare tegnet halvparten av hjulene på hver bil, altså slik vi ville sett bilen fra siden i virkeligheten. Eleven støttet seg her til virkeligheten fremfor å bruke tegningen til å *vise* hvor mange hjul det var på en bil. Hun stoppet underveis i tegneprosessen sin for å forsikre seg om jeg forsto at hun *visste* det var fire hjul på en bil, vi «ville bare ikke sett de når vi ser den fra siden».

Som sagt tidligere var det en tydelig overvekt av piktografiske tegninger, men av totalt 54 tegninger var det også 10 ikoniske. De ikoniske tegningene i datamaterialet var tegninger som ikke var knyttet til elementene i oppgaven, men som bestod av andre symboler som stjerner, tellestreker, prikker eller sirkler. Begge eksemplene fra datamaterialet er hentet fra snegleoppgaven og viser eksempler på hvordan to elever har brukt ikoniske tegninger for å representere problemet i oppgaven.



Figur 14 – Ikonisk tegning 1



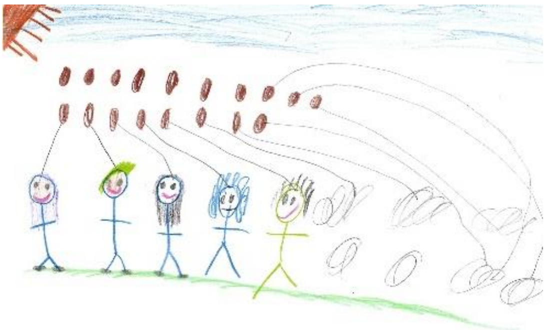
Figur 15 – Ikonisk tegning 2

På den første tegningen, figur **14**, ser vi en elev som har skrevet oppgaveteksten og løst oppgaven med skrift og stjerner som representasjoner for blader. Det var ikke mulig å lese en besvarelse ut fra elevens tegning, og eleven kom heller ikke frem til et svar på oppgaven, noe som var tilfellet på flere av de ikoniske tegningene av samme type.

Som et annet eksempel i figur **15**, har jeg valgt å inkludere er en oppgave hvor eleven brukte en ikonisk tegning og kom frem til et svar. Som vi kan se i tegningen var dagene skrevet som «M, Ti, O, To» og bladene var tegnet som sirkler på en rekke nedenfor. Eleven har satt streker mellom blader og dager for å dele ut ett og ett blad, noe om kan tyde på at eleven aktivt har brukt tegningen for å løse oppgaven. Eleven kom ikke frem til en løsning ved tegningen alene, men talte på fingrene i tillegg til å bruke strekene i tegningen.

4.3.2 Farger

Av det totale antall tegninger på 54 var det 19 tegninger med to eller flere farger. Som vi så i tabell **5** (s.52) var det 8 av 23 elever som brukte farger på oppgave 1, 5 av 23 på oppgave 2 og 6 av 23 på oppgave 3. Da antallet ikke var likt på de tre oppgavene, var det noen av elevene som brukte farger på bare én eller to av tegningene sine, og ikke alle tre. Ett eksempel fra hver av oppgavene blir presentert, og viser hvordan elever kan bruke farger i sine besvarelser.



Figur 17 – Farger 1

Figur 16 – Farger 2

Figur 18 – Farger 3

Den første tegningen jeg ønsker å si noe om som inneholdt farge er fra kjeksoppgaven. Som vi kan se i figur **16,** ble de fem første barna tegnet med mye detaljer – som hår, øyne og munn. Ser vi på de syv neste, ble de bare sirkler med gråblyant. Det kan tyde på at eleven underveis oppdaget at det tok lang tid å tegne alle personene med like mye detaljer, og derfor forenklet de underveis. Kjeksene er fargelagt brune og ble beskrevet som *sjokoladekjeks* av eleven selv. Handlingen foregikk ute hvor det var sol og tegningen ble fargelagt underveis i løsningsprosessen. Først ble ett barn tegnet, så ble det samme barnet fargelagt, før det neste barnet ble tegnet og fargelagt, og så videre.

Det andre eksemplet, figur **17** (s.56), viser en piktografisk tegning av tre biler og en traktor med fire hjul hver. Alle bilene har samme farge - grønn og rosa. Fargene var ikke realistiske i forhold til virkeligheten og tegningen ble fargelagt etter eleven hadde kommet frem til et svar. Hun har tegnet slik at man ser alle de fire hjulene på bilen, selv om bilen var tegnet fra siden.

Den tredje tegningen som presenteres knyttet til bruk av farger, kan vi se i figur **18** (s.56). Tegningen er Johannes tegning i snegleoppgaven. Johanne brukte alle fargene som var tilgjengelig for å lage «Regnbuesneglen». Tegningen ble fargelagt underveis i oppgaveløsingen og hun tok seg god tid til å fargelegge nøye. Hun brukte 22 minutter på denne ene tegningen alene, og totalt 40 minutter på de tre tegningene til sammen. I tillegg til å ta seg god tid til å fargelegge, gav hun også navn til snegla og lagde en fortelling om snegla, som fikk navnet Lilla, slik vi kunne lese i delkapittel **4.3.1** Narrativer.

Fordi tegningene ble kodet med kjønn og gruppenummer, kunne jeg gå tilbake til de innsamlede tegningene å se om det var noe mønster i bruk av farger og gruppenummer eller bruk av farger og kjønn. Jeg fant i mine data at alle de 19 tegningene som inneholdte to eller flere farger var produsert av jenter. Det var ingen tydelige tegn på at gruppenummer hadde spilt inn på om det ble brukt farger av elevene eller ikke.

4.4 Bruk av bokstaver eller ord og tall

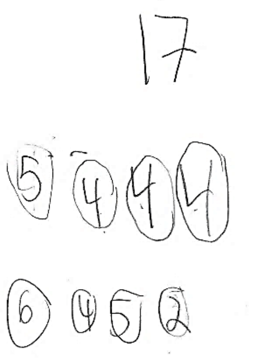
Etter de to første analysene ble det lagt merke til at flere av elevene brukte konvensjonelle tallsymboler og bokstaver eller ord i besvarelsene sine, enten alene eller sammen med en tegning. De to kategoriene samsvarer med to av kategoriene presentert i Papandreou (2009), og ble inkludert i oppgaven da ønsket var å si noe om potensialet som lå i tegningene og elevenes evner til å skifte mellom flere representasjoner, eller å bruke ulike representasjoner samtidig. Papandreou (2014) hevder at hvis et barn oppdager at tegningen deres ikke er forståelig for andre, eller hvis de selv mener tegningen ikke er god nok eller nøyaktig nok, vil elevene legge til skriftlige eller muntlige forklaringer for å forsikre seg om at innholdet er forståelig for mottakeren. Derfor ble også noen tilfeller hvor elevene brukte symboler, tekst eller tall for å kommunisere i tillegg til tegningen analysert nærmere.

De to kategoriene som ble inkludert fra Papandreou (2009) var *bokstaver eller ord* og *tall*. Kategoriene fikk navnene *bruk av tallsymboler* og *bruk av skrift*. I tillegg ble det valgt å ha med om elevene fant mer enn én løsning på oppgaven, hvis flere løsninger var en mulighet. Det har jeg valgt å ha med fordi jeg ønsket å se om elevene kunne akseptere at det var flere riktige svar på en oppgave og om de i så fall ville bruke den samme tegningen til å finne flere, eller alle svar.

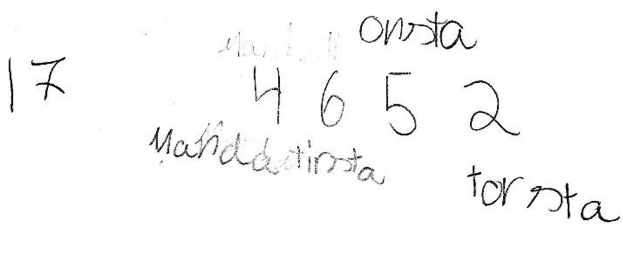
	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Totalt
Brukte tegning	23	21	10	54
Bruk av tall	6	8	13	27
Bruk av skrift	9	4	10	23
Fant mer enn én løsning	X	3	4	7
Potensiale i tegningen	X	4	7	11

Tabell 6 – De nye kategoriene

Bruk av tallsymboler ble klassifisert til å være konvensjonelle tallsymboler, 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9. Som vi kan se i tabell **6** ovenfor var det tallsymboler i 27 av de 54 tegningene, og skrift i 23 av 54 tegninger.



Figur 19 – Tallsymboler 1



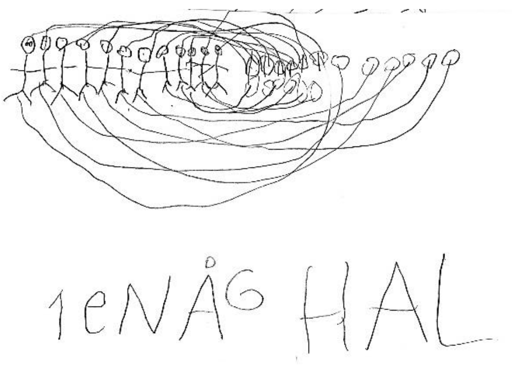
Figur 20 – Tallsymboler 2

På det første eksemplet i figur **19,** kan vi se at eleven har skrevet det totale antall blader snegla spiste øverst, og nedenfor kommer han med to eksempler på hvordan bladene kan fordeles på de ulike dagene. Eleven har valgt å markere de ulike dagene som sirkler rundt et antall. Tallene ble skrevet først og sirklene ble tegnet rundt etterpå. Han har valgt å bare bruke tall og har ikke inkludert skrift i sin besvarelse.

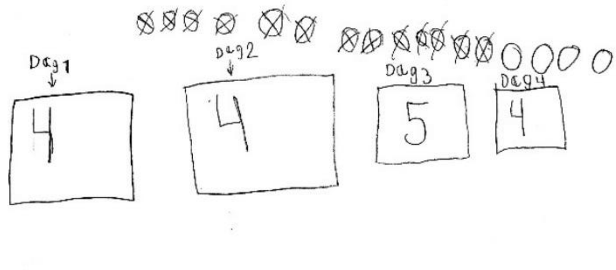
I figur **20** (s.58), som er det andre eksemplet på bruk av tall, kan vi se en elev som har brukt både bokstaver og tall samtidig. Eleven startet med å skrive «17» på arket før hun fordelte ulikt antall blader på de ulike dagene. Eleven har spesifisert at den første dagen var mandag i sin besvarelse. Bladene ble fordelt først og ukedagene ble tilført tegningen etter hun var ferdig med å fordele bladene.

Felles for begge besvarelsene var at det var mulig å lese elevenes svar ut fra det de hadde levert inn. Man må ikke ha vært til stede under problemløsingen for å tyde besvarelsene, men det kommer ikke frem i noen av besvarelsene at oppgaven handlet om snegler og blader. Slik utdraget i tabell **6** (s.58) viser, var det flest elever som brukte tallsymboler på snegleoppgaven, som begge mine eksempler ble hentet fra, selv om det ikke var like stor forskjell i antall elever mellom oppgavene som på enkelte av de andre kategoriene.

Teorien om at elevene brukte skrift sammen med tegningene sine ble hentet fra Papandreou (2009) og innebar bruk av bokstaver eller ord (alt som ikke var tall). Tabell **6** (s.58) viser at av de totalt 54 tegningene ble det brukt bokstaver eller ord på 23 tegninger. Eksemplene nedenfor viser hvordan to elever har brukt skrift i sin problemløsing. Noen av elevene skrev fullstendige setninger, andre brukte forkortelser eller enkeltord.



Figur 21 – Skrift 1



Figur 22 – Skrift 2

Det første eksemplet er hentet fra kjeksoppgaven og består av både en tegning og skrift. Som vi kan se i figur **21**, har eleven brukt streker til å dele ut én og én kjeks til hvert barn. Det var ikke mulig å lese ut et svar fra elevens tegning, men eleven har skrevet *en og en halv* med bokstaver under. Det skal nevnes at elevene ikke har lært brøk enda, noe som kan ha vært en av grunnene til at eleven her har valgt å skrive svaret med bokstaver. Hvis eleven ikke hadde brukt bokstaver sammen med tegningen hadde man vært avhengig av å ha vært tilstede, eller snakket med eleven for å finne ut om eleven hadde funnet svaret på oppgaven eller ikke, da det ikke eksplisitt kommer frem i tegningen alene.

Det andre eksemplet på bruk av skrift (figur **22**), er hentet fra snegleoppgaven og viser en elev som har brukt både en tegning, skrift og tall. Eleven har tegnet en ikonisk tegning som viser bladene som sirkler på en rekke. Sirklene ble krysset ut og telt og deretter plassert i riktig rute. Ut fra tegningen alene ville det ikke vært mulig å se om eleven hadde kommet frem til svar på oppgaven, men fordi eleven tar i bruk skrift og symboler kan man skille mellom de ulike dagene, og derfor også lese ut et svar. Hvis elevene bruker bokstavene og ord, brukes de ofte i kombinasjon med tall, slik vi ser i figur **20** og **22**.

4.5 Potensialet i tegningen

I tabell **6** (s.58) kan vi se at noen av elevene kom frem til flere enn ett svar på oppgavene hvor det fantes flere løsninger. Flere av elevenes tegninger var av den natur at de lar seg bruke til å finne flere svar på en oppgave. Ronjas besvarelse på oppgave 3, som også ble presentert som aktiv bruk av tegning i kapitel **4.1.2** (s.45), var en tegning av denne typen, da hun har tegnet alle bladene på en sammenhengende rekke. Ronja begynte på eget initiativ å lage en ny tegning da hun var ferdig med sin første. Slik vi kan se i utdraget fra intervjuet nedenfor uttrykker Ronja at hun skulle ønske hun kunne flytte ringene rundt bladene på tegningen slik at hun kunne lage nye grupper med annet antall blader.

Forsker: Finner du flere svar Ronja?

Ronja: Man kan lage mange svar! Det er bare å flytte de ringene rundt. Vi kan ta med en mer på mandag eller ta en mindre eller to. Så jeg kan lage mange svar til deg hvis du vil!

Forsker: Så fint Ronja.

Ronja: Skulle gått an også flytta ringene sånn at man ikke må lage 17 nye blader for hver gang da. Det blir mye fargelegging.

Ronja valgte å ikke bruke den samme tegningen til å finne flere svar, men lagde heller en ny tegning da hun skulle finne flere løsninger. Så selv om potensialet for å finne flere løsninger er til stede i tegningen, er det ikke sikkert elevene utnytter det potensialet, slik vi så vi Ronjas besvarelse.

5. Drøfting

Studiens problemstilling var: *Hvordan bruker 23 tredjeklassinger tegning i problemløsingssituasjoner?* Som analysen min har vist ble det blant forskningsdeltakerne funnet flere måter tegning kan brukes på til problemløsing, eller for å representere problemløsingen i etterkant. Tre kategorier for bruk av tegning *for* problemløsing og én kategori for tegning *av* problemløsing ble funnet. Eksemplene fra elevenes arbeid viste hvordan de ulike måtene å bruke tegning på, kan komme til syne i elevenes arbeid. I datamaterialet var det totalt 69 elevbesvarelser, hvor 54 av de bestod av en tegning. Av de 54 tegningene var det 39 som brukte tegningen som kom frem til svar og bare 7 elever som ikke brukte tegning som kom frem til svar. Ut fra det funnet alene, kan det tyde på at tegninger kan hjelpe elevene til å finne svaret på oppgaven og at det lønner seg å tegne, men jeg vil nå se nærmere på de ulike aspektene ved tegningene for å si noe mer konkret. I det følgende kapittel ønsker jeg å se på de forskjellige måtene jeg fant elevene brukte tegning på i mine data. Jeg ønsker nå å se på både de typiske funnene i undersøkelsen min, samt noen av de mer utypiske og drøfte hva funnene mine kan bety.

5.1 Tegning av problemløsing

Majoriteten av elevene produserte tegninger som ble kategorisert som *støtte for system.* Det vil si at tegningen ble brukt for å holde oversikt over elementene i oppgaven og for å telle på. Av 54 tegninger, ble 29 tegninger kategorisert som støtte for system. Ved å lage en tegning som viser alle elementer i oppgaven, kunne elevene bruke tegningen til å telle, teste flere mulige løsninger og sjekke løsningene sine. Tidlig i oppgaven ble det presentert en hypotese om at tegning kunne være et verktøy for elever som mangler generelle problemløsingsstrategier. Papandreou (2009) og Van Essen og Hamaker (1990) hevder at barn og unge har problemer med å strukturere tekstoppgaver i matematikk, og at en av grunnene kan være at elevene mangler strategier for å planlegge og regulere hvordan de skal løse problemet, samt analysere det matematiske problemet i seg selv. Ved lage en å systematisk tegning av problemet, som viser de viktigste elementene i oppgaven, kan kanskje elevene i større grad klare å holde oversikt over oppgaven, slik at den ikke virker så uoverkommelig. Samtidig bidrar også tegningen med et visuelt bilde som gjør at elevene kan forsikre seg om at de har inkludert alle elementer som er nødvendig for å løse oppgaven. Som vist i eleveksemplene i delkapittel **4.1.1** (s.41) i mine data, fant jeg at de fleste av elevene som brukte tegning som støtte for system kom frem til svaret på oppgaven, men flere av de inkluderte andre representasjoner, som skrift og tall, og flere benyttet seg også av andre «hjelpemidler» som det å telle på fingrene. Felles for elevbesvarelsene som ble kategorisert som støtte for system var at tegningene var «stillbilder» av problemet i oppgaven. Elevene hadde ikke tegnet inn streker eller piler eller sirkler for å representere regneoperasjoner, men tegningen viste et bilde på problemet.

Et annet funn var at elevene brukte tegningen aktivt for å løse problemet. Ved å inkludere streker, piler og sirkler kunne elevene bruke tegningen slik de ville brukt konkreter. Majoriteten av tegningene som ble klassifisert som *aktiv bruk av tegning*, tilhørte kjeksoppgaven, som er en oppgave hvor det foregår en aktiv handling. Oppgaven i seg selv krever at elevene «gjør noe» med kjeksene, slik at barna får kjeks, i og med at de 12 barna skal dele på 18 kjeks. Som eksempelet i figur **6** (s.44) viste, tegnet mange av elevene alle menneskene og alle kjeksene og deretter delte ut én og én kjeks til hver med å bruke piler eller streker. Mange av elevene kunne bruke tegningen til å da se hvor mye som ble «til overs» for å så finne ut hva man kunne gjøre det med de seks siste kjeksene. En oppstilling av elementene på denne måten gir elevene et oversiktlig «bilde» over oppgaven og det blir tydelig hvilke kjeks som er delt ut, og hvilke som ikke er det. Gjennom resonnering og bruk av tegning kom flere av elevene frem til svaret på oppgaven, men det skal sies at flere av elevene mistet oversikten over egen tegning og tok i bruk andre midler for å løse oppgaven, som for eksempel å telle på fingrene.

5.2 Ikoniske og Piktografiske tegninger

Videre ønsker jeg å drøfte nytten av enten *piktografiske* og/eller *ikoniske* tegninger. Som nevnt tidligere, er det ikke slik at elevene produserer tegninger som er enten/eller. I stor grad inneholder elevenes tegninger både ikoniske og piktografiske elementer, men ofte er det en hovedvekt av én av delene. I datamaterialet var det en helt klar overvekt av piktografiske tegninger, sammenlignet med ikoniske. Av totalt 54 tegninger ble 44 klassifisert som piktografiske.

De piktografiske aspektene ved en tegning er nyttige fordi de viser oppgavens realistiske kontekst. På den måten kan eleven gå tilbake til tegningen sin etter en stund, og i større grad huske hva oppgaven handlet om. En piktografisk tegning muliggjør også at elevene i større grad kan resonnere med bilder, det de ser for seg mens de løser oppgaven, noe som gjør at tegningen i stor grad vil være et bilde for hva elevene tenker. Samtidig er det også viktig å poengtere at de piktografiske aspektene ved en tegning, også kan være til hinder for elevene, da piktografiske tegninger kan være tidkrevende å lage. Elevene kan rote seg bort i irrelevante detaljer, slik at de ikke får frem det matematiske poenget i oppgaven. De piktografiske tegningene kan også begrense elevene i den forstand at de ikke ser hvordan tegningen deres kan brukes til å løse lignende problemer, hvor en slik tegning kan ha vært nyttig, da tegningen er så sterkt knyttet til den konteksten som ble gitt i oppgaven tidligere. Ser vi nærmere på en av elevenes besvarelser, Johanne kan vi se at hun laget en situasjonstegning, som hun spilte ut som et narrativ. Situasjonstegningen var i det tilfellet en piktografisk tegning som virket å hjelpe henne til å forstå problemet bedre og å organisere informasjonen som ble presentert. Selv om de situasjonsbaserte tegningene kan være til nytte for elevene trekker Rellensmann et al. (2017) frem at de også kan være et hinder for elevene, da detaljer som ikke er relevante for problemet kan komme i veien og ødelegge for en effektiv løsningsprosess. Igjen, som vi så på Johannes besvarelser, som uten tvil var de mest detaljerte, brukte hun 40 minutter sammenlignet med de andre gruppene som lå på cirka 20 minutter.

Det var ikke mange av elevene i studien som lagde ikoniske tegninger, men de ikoniske tegningene som ble produsert, virket som de *noen* ganger hjalp eleven til å løse problemet i oppgaven og andre ganger ikke. Andre elementer spiller også inn på om elevene klarer å løse oppgaven eller ikke, som for eksempel om de har en strategi for å bruke tegningen, og om tegningen avbilder de korrekte mengdene. I diskusjon med elevene kom det frem at elevene som lagde ikoniske tegninger hadde større problemer i etterkant med å huske hva oppgaven handlet om. De som hadde tegnet for eksempel stjerner på en rekke kunne ikke gå tilbake å fortelle hva oppgaven handlet om, på samme måte som de som tegnet piktografiske tegninger. Et annet positivt punkt knytet til ikoniske tegninger er at det er lettere å se hvordan en ikonisk tegning kan fungere som representasjon for flere problem, da elementene som er avbildet ikke er direkte knyttet til objektene eller elementene i oppgaven. Det kan gis en ny kontekst, men tegningen vil fortsatt være gyldig.

En av de mulige forklaringene på hvorfor elevene i så stor grad produserte piktografiske tegninger kan være at konteksten i oppgaven i stor grad er realistisk for eleven. Nærhet eller assosiasjoner til konteksten blir presentert som en mulig forklaring på det samme funnet hos Papandreou (2009) og det kan tenkes at det også i min studie kan være en av årsakene. Jeg er klar over at de elementene som ble presentert i oppgaven nok ikke var de beste for å skille mellom hva som var ikonisk og hva som var piktografisk, da det kan være vanskelig å skille mellom en sirkel og et hjul i mange tilfeller.

Da jeg i min analyse så på hvordan tegningene så ut, så jeg blant annet på fargebruk hos elevene. Når det kom til bruk av farger i elevens besvarelser var ikke oppgavene mine designet slik at elevene var *avhengige* av å bruke farger for å løse problemet. Jeg fant i mine data at bruk av farger i stor grad virket å ikke avhenge av oppgave eller personer, da fordelingen av fargebruk var ganske jevn og at ingen av elevene fargela på alle tre oppgavene. Det virket som det var til dels tilfeldig bruk av farger. Som nevnt tidligere var alle tegningene som inneholdt farger laget av jenter. De fleste av elevene, med noen unntak, fargela etter de hadde løst oppgaven.

5.3 Tegning som kommunikasjonsverktøy

Flere av funnene tyder på at elevene bruker tegningen som et *kommunikasjonsverktøy*. Mia visualiserte på alle oppgavene og tegnet etter hun hadde løst problemet. Da hun fikk spørsmål om hvorfor hun hadde tegnet svarte hun: *«(...) for at du skulle kunne se liksom, hva jeg har tenkt på og sånn.»* Bakar et al. (2016) fant i sin studie at de elevene som hadde kommet lengst i telleutviklingen sin, og som hadde automatisert telling ofte produserte tegninger etter de hadde funnet svaret. De brukte ofte andre metoder, eller strategier, for å komme frem til svaret, men tegnet for å dele løsningen sin. Det samsvarer med det jeg fant, hvor Mia var helt klar på at hun ikke behøvde tegningen for å løse oppgaven, på kjeksoppgaven laget hun også tegningen etter hun hadde løst oppgaven, men hun klarte ikke å vise svaret ved å bruke tegningen, så hun gav opp tegningen sin. *«Jeg får ikke til å vise det på tegninga mi, men det er en og en halv på hver. Jeg fikk det i hodet.»* Min oppfattelse er at Mia har kontroll på tallene og tallrekka, da hun regner seg frem til en og en halv i hodet og resonnerer rundt det.

Ved å bruke tegningen som et *narrativ* fikk også Johanne kommunisert noe. Hun kommuniserte til meg, en fortelling hun hadde laget om regnbuesneglen Lilla og om gutten Ola som hadde en lang togbane. For Johanne virket det som om hovedfokuset var å fortelle en historie, og ikke løse en matematikkoppgave. Hun laget detaljerte tegninger og fortellinger som hun brukte som svar på spørsmål. Enkelte spørsmål unngår hun også helt å svare på, men viser heller til noe «fint» eller «kult» som hun har tegnet. For Johanne kan tegningen ha vært nyttig for å løse oppgavene og et nyttig verktøy for kommunikasjon – selv om kommunikasjonen ikke var matematikkrelatert. Johannes prosess med å løse oppgavene var tidkrevende og hun brukte lang tid i forhold til hvor mye det virket som hun satt igjen med. Hun glemte fort svarene hun hadde kommet frem til og var heller ikke interessert i å skrive de ned på tegningen, slik at hun kunne bruke de senere, eller se tilbake på svarene i etterkant. Johanne delte ut de 17 bladene på fire dager og kom frem til at det var én mer på mandag, men da hun ikke gjorde jeg noen notater underveis, eller hadde et system for å holde oversikt, klarte hun ikke å komme med et svar.

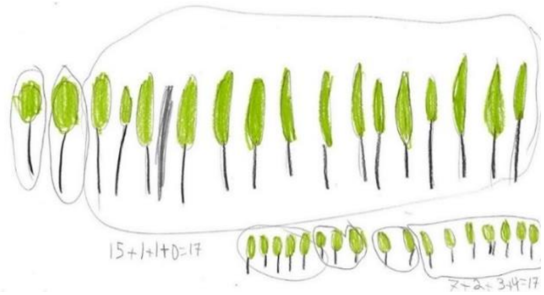
Jeg så på flere ulike måter å bruke tegning på. Derfor er det også naturlig å se på om det virker som om det er én type tegninger som er mer nyttige for å løse problemløsingsoppgaver enn andre. Hva kan man gjøre hvis tegningen ikke er nyttig for eleven? Og hvordan kan tegningen eventuelt bli nyttig? For det første må behovet for å tegne, eller ønske om å tegne komme fra eleven selv, med noen forbehold. Rellensmann et al. (2017) hevder at hvis det å lage en tegning er for krevende for eleven, vil det å pålegge en elev å lage en tegning føre til at eleven blir overveldet, og derfor gjør det dårligere enn om han/hun ikke skulle ha tegnet. Bakar et al. (2016, s. 91) fant i sin studie at barna ikke produserte spontane tegninger som en del av en matematisk aktivitet, men at det var fordi elevene ikke hadde *erfaringer* med å tegne, med den hensikt å representere noe matematisk. I min studie fant jeg på den andre siden at barna produserte tegninger spontant, spesielt da de ikke visste hvordan de skulle gå videre i oppgaven. Det kan tyde at elevene har tidligere erfaringer med å representere tanker i matematikk ved tegning, selv om det med min innsikt i hva elevene jeg forsket på har vært gjennom tidligere, ikke er mulig å si noe om. Rellensmann et al. (2017, s. 74) mener at instruksjonsoppgaver hvor elevene blir bedt om å lage en tegning er et nyttig verktøy for å støtte de i prosessen med å modellere i matematikk, men trekker samtidig frem at effektiviteten av slike aktiviteter vil avhenge av flere forutsetninger, blant annet elevenes strategier for å utnytte tegningen de har produsert.

Van Essen og Hamaker (1990) kom i sin studie frem til at elevene som ikke kom frem til riktig svar, eller som kom frem til feil svar hadde feil i tegningene sine, og at de elevene som kom frem til riktig svar hadde «korrekte» tegninger i den forstand at de avbildet korrekte mengder. «Ved å konstruere en modell eller en representasjon av et problem kan flere matematiske problemer løses direkte, gitt at de kritiske aspektene ved problemet er avbildet korrekt» hevder Carpenter et al. (1993, s. 428, min oversettelse). I min studie ble det produsert 23 tegninger på oppgave 1, noe som vil si at samtlige elever tegnet, på tross av det kom bare 10 av elevene frem til svaret på oppgaven. Flere av tegningene til elevene som ikke kom frem til riktig svar inneholdte det korrekte antall kjeks og personer, men elevene manglet en strategi for å *bruke* tegningen sin, som kan være en av årsakene til at de ikke kom frem til svaret. Elevene trenger altså ikke bare strategier for å lage tegninger, de må også vite hvordan de kan *bruke* tegningen, slik at den blir et nyttig verktøy.

5.4 Støtte elevene i videre arbeid med tegning

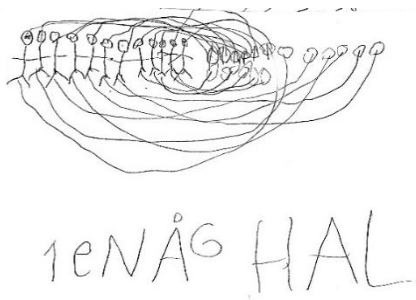
Overgangen til at tegning skal bli en matematisk representasjon skjer ikke naturlig, som en del av ordinær utvikling hos barn. Det krever «tilsiktet pedagogisk aktivitet» fra lærerens side (Bakar et al., 2016, s. 92). For eksempel kan man gi elevene mulighet til å reflektere rundt ulike tegninger for å avgjøre hva som var bra med tegningen og hva som var dårlig, de kan læres og oppfordres til å forklare og argumentere for egne produkter. Alt dette er tiltak som ifølge Bakar et al. (2016) vil være med på å utvikle elevenes representasjoner og strategier for bruk av ulike representasjoner. Et barn vil ikke automatisk se hvordan han/hun kan bruke tegningen til å telle og sjekke egne løsninger på, eller hvordan tegningen kan brukes til å dele ut. Eleven må møte problemer hvor det er hensiktsmessig å tegne, og hvor han/hun blir vist hvordan og hvorfor tegning kan være en god representasjon.

Som lærer kan man ta utgangspunkt i elevenes tegninger for å diskutere tema som kan være vanskelig i matematikk. For å ta et eksempel fra datamaterialet kan vi se tilbake på oppgaveløsingen til Ronja på snegleoppgaven. Da hun skulle finne flere svar på oppgaven tegnet hun 17 nye blader som hun delte inn i nye grupper. Hun uttrykket at: «*Skulle gått an også flytta ringene sånn at man ikke må lage 17 nye blader for hver gang (...)»*. Hun var klar over at man kunne lage mange svar, det var bare å «flytte ringene». Likevel valgte hun å lage en ny tegning, istedenfor å bruke den samme flere ganger. Som lærer kunne man her spurt Ronja om hun kunne brukt den samme tegningen til å finne flere svar, og kanskje samtidig vise henne et system for å finne alle mulige svar på oppgaven, om det hadde vært målet med oppgaven.



For at elevene skal se på tegning som nyttig i matematikk, må lærere også behandle tegning som nyttig i matematikk. Et godt utgangspunkt for å introdusere matematiske symboler til elevene kan være å la elevene tegne. Med tegning som representasjon kan elevene koble sammen betydningen av for eksempel en mengde, og det matematiske symbolet som tilhører mengden. Sagt med andre ord kan eleven «forstå det bedre» dersom de får tegne problemet i oppgaven. Tegningen fungerer da som en måte å forstå problemet på, hvor de vil forsøke å finne logiske forklaringer. Overgangen til symboler blir da «bedre» og mer meningsfylt. Dersom læreren presenterer en tekstoppgave for elevene, og skriver symboler for mengden fortløpende kan overgangen bli for stor, og hvis elevene ikke er gjennom en prosess for å tilegne symbolene mening, er det ikke sikkert de klarer å koble problemet i teksten til symbolene på tavla. Ved presentasjon av en tekstoppgave kan en mulig fremgangsmåte være å spørre elevene «Hvilken situasjon jobber vi med nå?», «Hva er problemet i oppgaven her?». Ved å få elevene til å resonnere rundt hva som er det faktiske problemet i oppgaven kan man unngå at elevene spør spørsmål som jeg hørte flere ganger under innsamlingen, «er det gange eller deling nå?», «skal vi skrive 12 delt på 18, eller 18 delt på 12?» For de elevene som spør om dette, handler tekstoppgaver om å lete etter tall og nøkkelord som: deler, mer, mindre, flere og så videre. For de elevene handler ikke tekstoppgaver om å forstå et problem, men snarere å løse problemet, og så gå videre. Carpenter et al. (1993) trekker frem bruk av problemløsingsoppgaver i undervisningen for å bevare matematikkens tilknytning til virkeligheten. Problemløsende oppgaver vil føre til at elevene vil søke mening, eller forklaringer med forankring i «den virkelige verden» og derfor behandle matematikk som noe med mening, og som skal forstås.

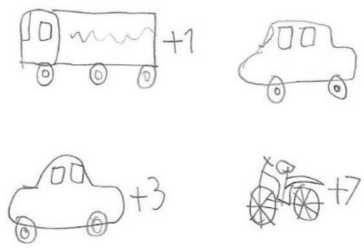
Noen av elevene jeg forsket på valgte å bruke bare skrift eller bare tall i sine besvarelser. Samtidig fant jeg også at flere av elevene brukte tall, bokstaver eller ord for å supplere informasjon knyttet til tegningen de hadde laget. Enkelte elever vil ifølge Bakar et al. (2016) og Papandreou (2009) subsidiere sine tegninger med skrift og eller symboler for å overkomme vanskelighetene ved å lage en realistisk nok tegning. 23 av 54 tegninger inneholdte ord eller bokstaver og at 27 av 54 tegninger inneholdte tallsymboler i mitt datamateriale, og at flere av elevenes svar ble subsidiert med tall eller bokstaver. Hvis vi ser på eleveksemplene som ble presentert i delkapittel **4.4** (s.57) kunne vi se at jeg var avhengig av at elevene brukte bokstaver eller ord i sine besvarelser for å kunne lese av tegningen å se hva elevene hadde kommet frem til. Slik tegningen ved siden av viser (figur **21** s. 59 i analysen) har eleven løst oppgaven aktivt med å sette streker fra kjeks til person, men oppgavens svar lar seg ikke lese ut fra tegningen alene. I flere av tilfellene i mine data var det slik at kombinasjonen av tekst og bilde kommuniserte klarere enn en av representasjonene alene, slik K. M. Edens og Potter (2001) hevder det gjør. I analysen i delkapittel **4.2.1** (s.50), under overskriften *visualisering*, så vi også et eksempel på at tallsymboler ble brukt til å subsidiere en tegning, og for å fortelle noe som tegningen ikke allerede gjorde.



Mia: Skjønner du det her? Jeg skriver bare sånn at jeg liksom tar +1 og +7 jeg, for da slipper jeg å tegne alle liksom. Skjønner du?

Forsker: Ja, det gjør jeg.

Mia: Ehm, jeg kan forresten tegne flere. Jeg kan ta å tegne to motorsykler istedenfor en bil eller ja, bytte en bil mot 2 motorsykler.



Mia forklarte selv at hun brukte tallene for å slippe å tegne flere av det samme kjøretøyet. Det er også viktig å legge til at Mia hadde visualisert seg frem til løsningen på oppgaven og tegningen ble produsert i etterkant av problemløsingen.

Jeg har sett på hvor vidt tegningene kan sies å være nyttige verktøy for problemløsing, hva som gjør at en tegning er nyttig eller ikke, samt hva som kan gjøres for at tegning skal bli et nyttig verktøy. Men da jeg spurte barna om de synes tegningene var nyttige fikk jeg tilbakemeldinger fra elevene som *«(…) Nei, jeg laga den jo etterpå»*, *«For at du skulle se hva jeg har tenkt»*, «*(…) Brukte tegningen min? til hva da?»*. Flere elever unngikk også å svare på spørsmålet helt eller trakk bare på skuldrene. I ettertid ser jeg at spørsmålet kan være vanskelig å svare på, da det krever en bevissthet rundt egen løsningsprosess elevene kanskje ikke har.

5.5 Metodediskusjon

I etterkant ønsker jeg at jeg hadde tatt meg tid til å gjennomføre et pilotprosjekt, slik at jeg kunne se hvordan elevene arbeidet og derfor vurdert om jeg skulle tatt ut noen elever i mindre grupper, eller forsikret meg om jeg fikk stilt *alle* elevene de ulike spørsmålene. Når man forsker på 23 elever og driver kvalitativ forskning må man før eller siden gjøre noen valg rundt hvor man vil fokusere, og da ble det slik at fokuset ble vendt mot de som tegnet, da det var fokus for studien min. Det betyr ikke at de som ikke tegnet hadde mindre interessante løsninger, og det kunne nok ha vært funnet mye spennende ved å se på de som ikke tegnet og deres fremgangsmåter også.

Overraskende mange av elevene brukte tegning selv om de ikke ble oppfordret til det i forkant. Av totalt 69 besvarelser bestod 54 av en tegning, og av de 54 som tegnet kom 41 frem til et svar, enten det eneste riktige eller et av de riktige svarene på oppgaven. Hvis vi sammenligner med de elevene som *ikke* brukte tegning ser vi at bare 7 elever kom frem til det riktige, eller et av de riktige svarene.

Da tegningene skulle kategoriseres etter detaljer i tegningen ble det slik at jeg på hjuloppgaven valgte å klassifisere alle de 21 tegningene på hjuloppgaven som piktografiske. Skillet mellom hva som er et hjul og hva som er en sirkel er liten, og noen av tegningene var forenklet i så stor grad at andre kanskje ville sagt de var ikoniske. Jeg støttet meg til transkripsjonene for å høre hva elevene *sa* om egen tegning, hvor alle beskrev det de hadde tegnet som hjul, det ble bestemt å lytte til hva elevene sa, og kategorisere deretter. I ettertid ser jeg at det kunne vært valgt en annen oppgavekontekst, hvor skillet mellom piktografisk og ikonisk ville vært større, og dermed også gjøre skillet mellom de piktografiske og ikoniske tegningene større.

Jeg valgte å gjennomføre mine undersøkelser i et lite geografisk område, noe som kan ha innvirkning på resultatene på studien min. I tillegg forsket jeg på to relativt små skoler, med få elever i hver klasse. Den tidligere forskningen på feltet, har funnet sted i en utenlandsk skolekontekst, og det er derfor naturlig å tenke at ulikhetene i min forskning og forskningen som ble presentert tidligere kan skyldes at ulike læreplaner legger andre føringer for undervisning og instruksjoner til lærere. Antall elever per gruppe og typen oppgave kan også ha virket inn på resultatene. En annen faktor som kan ha spilt inn på resultatene mine er at jeg er ukjent for elevene, og har ingen relasjon med dem. Som diskutert under etiske betraktninger i metodekapittelet kan det tenkes at en relasjon til elevene ville spilt inn på resultatet, selv om det ikke er mulig å si hvordan det ville spilt inn og i hvilken grad det ville slått ut på resultatene.

6. Konklusjon

Formålet med oppgaven min var å si noe om hvordan 23 tredjeklassinger brukte tegning i problemløsingssituasjoner i matematikk. Ved å se nærmere på problemløsingsstrategiene elevene brukte håpte jeg å si noe om tegningens funksjon i oppgaveløsingen og samtidig vise hvordan man kan analysere tegninger med den hensikt å si noe om matematikken som ligger i dem. Jeg mente i forkant av undersøkelsene og mener fortsatt at temaet både er viktig og relevant for matematikklærere i grunnskolen da flere forskere tidligere har funnet en positiv kobling mellom tegning og evnen til å løse problemløsingsoppgaver korrekt (Bakar et al., 2016; K. Edens & Potter, 2007).

I min studie så jeg at de elevene som tegnet kom i stor grad frem til riktig svar (41 av 54 riktige), men slik K. M. Edens og Potter (2001, s. 217) trekker frem i sin studie kan det tyde på at det er et «positivt forhold» mellom tegning og akademisk oppnåelse, men det ikke finnes konkrete bevis på at det ene fører til det andre. Flere av elevene i min undersøkelse produserte tegninger som inneholdte alle elementene de behøvde for å løse oppgaven, men kom likevel ikke frem til et svar eller det riktige svaret på oppgaven. En mulig forklaring kan være at elevene mangler erfaringer med å tegne for å representere matematikk, og dermed ikke klarer å utnytte tegningens potensiale.

Følgende forskningsspørsmål ble stilt: *Hvordan bruker 23 tredjeklassinger tegning i problemløsingssituasjoner?* Funnene mine viser at elevene bruker tegning som et verktøy for å løse problemet. De kan bruke tegningen på samme måte som de ville brukt *konkretiseringsmateriale* og «flytte» elementene ved hjelp av piler og streker som signaliserer bevegelse. Andre kan bruke tegningen som et bilde for å holde oversikt over elementene i oppgaven, slik at de kan bruke tegningen til å telle og sjekke egne løsninger.

De bruker også tegningen som et verktøy for å *kommunisere* løsningen sin med andre. De kan løse problemet i oppgaven ved hjelp av andre metoder, men bruke tegning for å vise hvordan de har tenkt, slik vi så Mia gjorde da hun visualiserte seg frem til svaret på hjuloppgaven. Andre igjen, er ikke så opptatt av å finne løsningen på oppgaven, men ser på tegningen som en mulighet for å formidle en historie, eller et *narrativ* om du vil. Som vi så eksempel på i

Johannes besvarelse, er hun mer opptatt av fortellingen som ligger i tegningen, fremfor det matematiske innholdet.

Mens noen av elevene holdt seg til en representasjon, og brukte enten tegning, skrift eller symboler, var det flere av elevene som også kombinerte to eller flere representasjoner i sine besvarelser. Flere av elevene brukte enten tall eller bokstaver i tillegg, som i flere tilfeller var med å avgjøre om elevenes svar lot seg lese av i tegningen. Ved å bruke for eksempel både tallsymboler og tegning kan elevene vise at de forstår sammenhengen mellom mengden tolv og symbolet «12», for å ta et eksempel.

Funnene jeg gjorde knyttet til grad av detaljer i tegningen viser at det for noen elever ikke var av betydning at tegningen hadde mange detaljer, mens det for andre førte til at de ikke klarte å løse oppgaven. Ut fra mine funn virker det ikke som om mengden detaljer spiller inn på om elevene klarer å løse oppgaven eller ikke, men det påvirker helt klart hvor lang tid elevene bruker på å løse oppgavene. Videre når det kom til bruk av farger i tegningene, fant jeg at nesten alle elevene som brukte farger i sine tegninger fargela etter de hadde løst oppgaven. Som nevnt tidligere var alle som fargela på oppgavene jenter. Da det ikke var noe tydelig mønster på bruk av farger på spesifikke oppgaver eller fra enkelte personer, kan det virke som om bruken av farger var noe tilfeldig i min studie.

Det er viktig og til slutt kommentere at de funnene som ble gjort er basert på 23 tredjeklassingers arbeid med tre problemløsende oppgaver. Det kunne blitt gjort andre funn med andre oppgaver, andre elever eller andre forskere. Funnene mine lar seg ikke generalisere ut over studien, men det er samtidig naturlig å tenke at situasjonen kan være lik i andre klasserom.

7. Pedagogiske implikasjoner og videre forskning

7.1 Implikasjoner for undervisning

Aritmetiske tekstoppgaver blir ofte brukt til å gi en kontekst til de matematiske strukturene. På samme måte som barn møter matematiske ideer gjennom opplevelsene sine, er oppgaver med kontekst med på å gjøre det mulig for elevene å få tak i matematikken som ligger i oppgavene. Matematikkoppgaver med tilknytning til virkeligheten, og problemløsende oppgaver, kan hjelpe elevene til å finne logiske forklaringer, slik at løsningene gir mening og er gyldige i «den virkelige verden». Hvis man for eksempel skal stille opp regnestykket på kjeksoppgaven, eller ta oppgaven ut av konteksten sin, vil man stå med regnestykket 18 delt på 12. Det er en divisjon som ikke går opp, og vil for en tredjeklassing mest sannsynlig ikke gi mening. Ved å plassere oppgaven i en virkelig kontekst, som er 12 barn som skal dele 18 kjeks, vil elevene se at det er en mulighet at svaret ikke blir et helt tall, selv om de ikke har lært brøk enda. Barn bør ifølge Carpenter et al. (1993) møte multiplikasjon og divisjonsproblemer allerede fra barnehagen av, og de argumenterer for å introdusere det tidligere enn hva som er normalt, som er slutten av 2. klasse, starten av 3. klasse. Ved å introdusere det tidligere, vil elevene i større grad ta i bruk den matematiske kompetansen de allerede besitter, for å gi mening til problemet og forstå hvordan det henger sammen med det de allerede kan.

Som lærer i matematikk er det å skape forståelse viktig og de første årene på skolen møter elevene i større grad mer konvensjonelle, formelle og symbolske representasjoner. Lærere kan støtte denne overgangen ved å ta utgangspunkt i en representasjon som allerede er kjent for elevene; tegning. For at tegning i matematikk skal oppnå sitt fulle potensial som et verktøy for å lære, er det viktig at man tar tak i og ser nærmere på både hvilke pedagogiske strategier som er nyttige for å fremme temaet, samt hvordan læringsmiljøet i et klasserom påvirker. Den største utfordringen i dag, er nok at mange lærere fortsatt sitter med det som kan kalles et *tradisjonelt* syn på hva tegning er – ikke bare i matematikk, men også i andre fag. Det er, som nevnt tidligere, et syn på tegning som en «koseaktivitet» hvor det ikke finnes noe ekte læring, og hvor det heller ikke ligger potensial for læring.

> «Å gjenkjenne det pedagogiske potensialet i barns tegninger med fokus på å støtte matematiseringen av barnas representasjoner er en ferdighet det vil være verdt å tilegne seg for alle lærere.» (Bobis & Way, 2018, s. 58)

I drøftingen ble det presisert at barns tegninger ikke blir gode matematiske representasjoner av seg selv. Det krever imidlertid eksplisitt arbeid med og samtaler om tegning som representasjon i matematikk. Både barns holdninger og deres praksis påvirkes av de sosiokulturelle miljøene barn er i, og kjent med. Hvis barn opplever at deres tegninger blir verdsatt og får positiv oppmerksomhet fra andre, og enda viktigere når tegningen blir gjenkjent av miljøet rundt som er verktøy for tanken og et kommunikasjonsverktøy, er det mye større sannsynlighet for at elevene bruker tegning som er verktøy for å lære.

7.2 Videre forskning

Slik andre forskere også gjør, er det naturlig å si noe om videre forskning på feltet. Et tema det både ville være relevant og spennende å se nærmere på, er hvorfor elever ofte slutter å tegne når de begynner på mellomtrinnet. Erfaringer fra skolen kan tyde på at det er en overgang mellom småtrinnet og mellomtrinnet hvor elevene slutter å tegne i matematikk. En av grunnene til at de eldre elevene tegner mindre kan være at elevene får andre typer matematikkbøker hvor de ikke lengre kan skrive rett i boken, men må «føre inn» fra en bok til en annen. K. M. Edens og Potter (2001) fant i sin studie at elevene brukte mindre og mindre visuelle representasjoner jo lengre opp i skolen de kom og at lærere la mer vekt på kommunikasjon gjennom symboler og skriftlig språk. Om det kommer som en naturlig utvikling på grunn av tidseffektiviteten ved å skrive symboler kontra å tegne, eller om utviklingen skjer på grunn av en oppfordring av å «tegne mindre og skrive mer» jo eldre man blir er ikke godt å si, men det hadde helt klart vært spennende å sett nærmere på elever på mellomtrinnet og deres bruk av visuelle representasjoner i matematikk, og spesielt tegning.

8. Referanser

Alver, B. G. (2001). Forskningsetiske perspektiver på forskning i studiet af børnekultur. I U. Palmenfelt & T. K. Marker (Red.), *At forske i en bevægelig verden: Refleksivitet i børnekulturforskningen.* (s. 13–29). Odense: Odense Universitetsforlag.

Bakar, K. A. (2017). Young Children's Representations of Addition in Problem Solving. *Creative Education, Vol.08No.14*, 11. https://doi.org/10.4236/ce.2017.814153

Bakar, K. A., Way, J. & Bobis, J. (2016). *Young Children's Drawings in Problem Solving*. Innlegg presentert ved Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) Adelaide, South Australia.

Befring, E. (2007). *Forskningsmetode med etikk og statistikk*. Oslo: Det Norske Samlaget

Bobis, J. & Way, J. (2018). Building Connections Between Children's Representations and Their Conceptual Development in Mathematics. I V. Kinnear, M. Y. Lai & T. Muir (Red.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning* (s. 55-72). Singapore: Springer Singapore.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 428-441. https://doi.org/10.2307/749152

Charlesworth, R. & Leali, S. A. (2012). Using Problem Solving to Assess Young Children's Mathematics Knowledge. *Early Childhood Education Journal, 39*(6), 373-382. https://doi.org/10.1007/s10643-011-0480-y

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8. utg.). Oxfordshire: Routledge.

Csíkos, C., Szitányi, J. & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 47-65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

Edens, K. & Potter, E. (2007). The Relationship of Drawing and Mathematical Problem Solving: "Draw for Math" Tasks. *Studies in Art Education, 48*(3), 282-298. https://doi.org/10.2307/25475830

Edens, K. M. & Potter, E. F. (2001). Promoting Conceptual Understanding through Pictorial Representation. *Studies in Art Education, 42*(3), 214-233. https://doi.org/10.1080/00393541.2001.11651699

Eide, H. & Eide, T. (2018). *Kommunikasjon i relasjoner : personorientering, samhandling og etikk* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Einarsdottir, J., Dockett, S. & Perry, B. (2009). Making Meaning: Children's Perspectives Expressed through Drawings. *Early Child Development and Care, 179*(2), 217-232. https://doi.org/10.1080/03004430802666999

Johns, K. (2015). How Do Kindergarteners Express Their Mathematics Understanding? *Universal Journal of Educational Research*, 9.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving.* . Victoria, England.: Deakin University Press.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforl.

Papandreou, M. (2009). Preschoolers' semiotic activity: additive problem-solving and the representation of quantity. *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 321-328).

Papandreou, M. (2014). Communicating and Thinking Through Drawing Activity in Early Childhood. *Journal of Research in Childhood Education, 28*(1), 85-100. https://doi.org/10.1080/02568543.2013.851131

Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a Drawing. Effects of Strategic Knowledge, Drawing Accuracy, and Type of Drawing on Students' Mathematical Modelling Performance. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 53-78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Repstad, P. (1998). *Mellom nærhet og distanse : kvalitative metoder i samfunnsfag* (3. utg. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Saundry, C. & Nicol, C. (2006). Drawing as Problem-Solving: Young Children's Mathematical Reasoning Through Pictures. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Soundy, C. S. & Drucker, M. F. (2009). Drawing opens pathways to problem solving for young children. *Childhood Education, 86*(1), 7-13.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM, 40*(1), 97-110. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0063-y

Thom, J. S. & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM, 47*(3), 465-481. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0697-0

Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using Self-Generated Drawings to Solve Arithmetic Word Problems. *Journal of Educational Research, 83*(6), 301-312. https://doi.org/10.1080/00220671.1990.10885976

Westenskow, A., Moyer-Packenham, P., Anderson-Pence, K., Shumway, J. & Jordan, K. (2014). *Cute Drawings? The disconnect between students' pictorial representations and their mathematics responses to fraction questions*.

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures: An Investigation of Children's Mathematical Drawings. I A. C. Albert & F. R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (s. 215-227).

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten, 2*. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/W%C3%A6ge%20Samtaletrekk%20Tangenten%202%202015%20W%C3%A6ge.pdf

9. Vedlegg

Vedlegg 1 – Intervjuguide og transkripsjonsguide

Vedlegg 2 – Informasjonsskriv til foresatte og elever

Vedlegg 1 - Intervjuguide

Intervjuguiden til masteroppgaven er basert på spørsmål fra andre artikler på samme fagfelt og handler om elevenes bruk av tegning til å løse problemløsingsoppgaver. Spørsmålene elevene vil få vil være hentet fra listen nedenfor, men spørsmålene kan stilles i ulik rekkefølge og det er ikke sikkert alle elever får alle spørsmålene. Da intervjuet er samtalebasert vil valg av spørsmål påvirkes av om elevene tegner, hva de tegner og hva elevene eventuelt sier uoppfordret.

- Hvordan tenkte du her?
- Hvordan kom du frem til dette svaret?
- Hva viser denne figuren i tegningen din?
- Hvorfor har du tegnet dette?
- Hvilket tall skal dette være?
- Brukte du tegningen til å løse oppgaven?
- Synes du tegningen var nyttig for å løse oppgaven?
- Ville du tegnet om du fikk andre tall i oppgaven?

Transkripsjonsguide

- Handlinger vil være markert mellom to stjerner.
- Enkelte ord vil være gjengitt på dialekt hvis det ikke fantes et åpenbart alternativt ord.

Vedlegg 2 – Informasjonssrkriv til foresatte og elever

Vil du delta i masterprosjektet

*" Barns multimodale uttrykk i matematikk"***?**

Til foresatte ved 3. trinn.
Dette er et spørsmål til deg/ditt barn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å si noe om barns ulike måter å uttrykke seg i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål
Formålet med prosjektet er å samle inn datamateriale til en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Den foreløpige problemstillingen er: Hvordan bruker barn tegning for å utrykke seg i matematikk og hva kan det fortelle oss om deres matematiske kompetanse.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, institutt for lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Utvalget til prosjektet er tilfeldig, men målet er å si noe generelt om andre- og tredjeklassinger i matematikk og hvordan de uttrykker seg.

Hva innebærer det for barnet ditt å delta?

Hvis du/ditt barn velger å delta i prosjektet, innebærer det at ditt barn gjennomfører noen oppgaver i matematikk sammen med én eller to medelever. Det vil ta ca. 30 minutter og det vil bli gjort lydopptak underveis. Elevenes besvarelser vil bli transkribert og anonymisert i etterkant og det vil ikke være mulig å spore besvarelsene tilbake til enkeltpersoner.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å la barnet ditt delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Datamaterialet vil være tilgjengelig for meg og veilederen min på NTNU, men vi vil ikke behandle andre personopplysninger enn fornavn på ditt barn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon, men masteroppgaven vil bli publisert våren 2019.

Mitt navn er Astrid Hågensen Kleven og det er jeg som vil ha hovedansvar for å samle inn, bearbeide og lagre datamaterialet. Jeg er en 24 år gammel mastergradsstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes mai 2019. Lydopptaket vil bli slettet så raskt det er transkribert og all data vil etter 2019 bli slettet med unntak av masteroppgaven som vil være tilgjengelig hos NTNU.

Dine rettigheter
Så lenge du/ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- NTNU, Institutt for lærerutdanning ved Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Benedikte Grimeland	Astrid Hågensen Kleven
Prosjektansvarlig (Forsker/veileder)	Student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Barns multimodale uttrykk i matematikk* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg og mitt barn samtykker til:

☐ å delta i denne masterstudien

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, mai 2019

(Signert av prosjektdeltaker/foresatt , dato

Kunnskap for en bedre verden