Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Rune Nakim

Resonnering og bevis i skolen

En kvalitativ studie av 10.-trinnelevers arbeid med matematisk resonnering og bevis i små grupper

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.–10. trinn
Veileder: Kirsti Rø
Mai 2019

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Rune Nakim

Resonnering og bevis i skolen

En kvalitativ studie av 10.-trinnelevers arbeid med matematisk resonnering og bevis i små grupper

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.–10. trinn
Veileder: Kirsti Rø
Mai 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien har undersøkt elevers arbeid med å formulere og begrunne hypoteser. Hensikten har vært å få innsikt i elevers arbeid med resonnering og bevis ved avslutning av grunnskolen, som kilde til refleksjon over muligheter og utfordringer med arbeid med resonnering og bevis i skolen. Studiens forskningsspørsmål er: Hva kjennetegner en gruppe 10.-trinnelevers deltakelse i en matematisk diskurs av resonnering og bevis?

Studien har benyttet kvalitative metoder med observasjon av to grupper, hver med tre elever, sitt arbeid med en oppgave om sammenhenger i multiplikasjon. Elevene arbeidet alene uten støtte, og fikk ikke undervisning rettet mot resonnering og bevis i forbindelse med studien. Datamaterialet ble analysert ved hjelp av induktiv analyse med åpen koding, en modell av matematisk resonnering, og et rammeverk for elevers deltagelse i en matematisk diskurs. Det overordnede teoretiske rammeverket tar utgangspunkt i et sosiokulturelt syn på læring som deltagelse, og det er elevenes felles deltagelse i små grupper som er analysert. Studien benyttet en modell som baserer seg på en vid definisjon av resonnering og bevis, som inkluderer et prosessaspekt og et strukturelt aspekt. Resonneringsprosessene er eksemplifisering, sammenligning, identifisering av et mønster, generalisering, formulering av en formodning, klassifisering, begrunnelse, formulering av et bevis og formulering av et formelt bevis. Det strukturelle aspektet inkluderer deduksjon, induksjon og abduksjon.

Studien viser hvordan elever kan delta i arbeid med resonnering og bevis, noe som kan gi grunnlag for refleksjon om undervisningspraksis. Resultatene fra studien viser at elevene deltar i de fleste av resonneringsprosessene, både med formulering av hypoteser, og med begrunnelser og bevis. Studien viser også at elevene bruker eksempler som støtte i alle resonneringsprosessene, både for å formulere og revidere hypoteser, og i formulering av begrunnelser og bevis. Elevene uttrykker usikkerhet om hvordan de skal forklare, og de baserer seg på andres aksept og ikke på kriterier for bevis for å vurdere eget arbeid. Resultatene viser at elevene forsøker å forklare og vise hvorfor en påstand er sann på tre måter: ved gjentatt sammenligning av nye eksempler for å finne mulige sammenhenger, utregning ved hjelp av et numerisk eksempel, og et generisk bevis. Til tross for at elevene ved en anledning formulerer et bevis, indikerer studien at de har liten kjennskap til hvordan de kan forklare eller vise hvorfor en matematisk påstand er sann.

Nøkkelord: matematisk resonnering, bevis, resonnering og bevis, kommognisjon, diskurs, læring som deltagelse.

Abstract

This study has looked at the participation of students in formulating and justifying hypotheses. The purpose has been to get insight in students' work with reasoning and proof at the end of their ten years of compulsory education, as a source of reflection on possibilities and challenges with reasoning and proof in school mathematics. The research question is: What characterizes a group of year 10 students' participation in a mathematical discourse of reasoning and proof?

The study has used qualitative methods with observation of two groups, each with three students, working on a task about relations in multiplication. The students worked alone without support and was not given instruction on reasoning and proof in connection with the study. Data was analyzed using inductive analysis with open coding, a model of mathematical reasoning, and a framework for student participation in a mathematical discourse. The main theoretical framework is based on a sociocultural view of learning as participation, and it is the common participation of students in small groups that have been analyzed. The study used a model based on a wide definition of reasoning and proof, which includes a process aspect and a structural aspect. The reasoning processes are exemplifying, comparing, identifying a pattern, generalizing, conjecturing, classifying, justifying, proving and formal proving. The structural aspect includes deduction, induction and abduction.

The study shows how students can participate in work on reasoning and proof, possibly leading to reflection about instruction practice. The results of the study show that students participate in most of the reasoning processes, both with formulation of hypotheses, and justification and proof. The study also shows that the students use examples as support in all reasoning processes, both in formulation and revision of hypotheses, and in justification and proof. The students express insecurity about how to explain, and they base assessment of their work on the acceptance of other people, not on criteria for proof. Results show that the students try to explain and show why a statement is true in three ways: repeated comparisons of new examples to find possible relations, calculations based on a numerical example, and a generic proof. Even though the students formulate a proof, the study indicates that they have little knowledge of how they can explain or show why a mathematical statement is true.

Keywords: mathematical reasoning, proof, reasoning and proof, commognition, discourse, learning as participation.

Forord

Denne studien er gjennomført i studieåret 2018-2019, og jeg avslutter med det en toårig masterutdanning i matematikkdidaktikk ved NTNU i Trondheim. Utdanningen har vært svært lærerik og har gitt dybdekompetanse på mange områder der tidligere utdanning og erfaring i stor grad kun har skrapet i overflaten på komplekse begreper. Gjennom arbeidet med denne studien har jeg i tillegg fått mulighet til å fordype meg ekstra i et tema som er både viktig og aktuelt, men som jeg opplever at det er lite oppmerksomhet om i skolen.

Jeg ønsker å takke min veileder, Kirsti Rø, for grundige, tydelige og konstruktive tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. Ditt engasjement og din profesjonalitet, både som veileder og foreleser, har vært en stor inspirasjonskilde gjennom hele studiet.

Jeg vil også rette en stor takk til elevene som ville være med i denne studien, og læreren og skolen som strakk seg langt for å legge til rette for at elevene kunne delta. Det hadde ikke blitt noen studie uten dere.

Jeg vil også takke Kunnskapsdepartementet og samarbeidspartnerne, KS, arbeidstakerorganisasjonene og lærerutdanningene, for den nasjonale satsingen på videreutdanning for lærere som har gjort det mulig for meg å ta videreutdanning. Jeg er nå, enda mer enn da jeg startet, overbevist om at videreutdanning vil øke kvaliteten på matematikkundervisning. Jeg vil også rette en stor takk til min arbeidsgiver for at jeg fikk innvilget søknad om videreutdanning, og for støtte til gjennomføringen.

Til slutt vil jeg takke mine nærmeste for uvurderlig støtte underveis i studietiden. Det hadde ikke vært mulig uten dere.

Tønsberg, mai 2019

Rune Nakim

Innhold

1 Innledning

Tema for denne studien er elevers arbeid med resonnering og bevis i matematikk. Nyere forskning på matematikkdidaktikk anbefaler en undervisning som tar utgangspunkt i elevers arbeid med kognitivt krevende aktiviteter i samarbeid med andre (Nosrati & Wæge, 2015). Stein, Engle, Smith og Hughes (2008) foreslår at læreren presenterer et problem som inneholder viktige matematiske ideer og kan løses på ulike måter, at elevene utforsker dette problemet, gjerne i par eller små grupper, og at de forbereder seg på å forklare sin tilnærming for andre, som til slutt presenteres og diskuteres felles i klassen. Yackel, Cobb og Wood (1991) beskriver en lignende undervisning med problemløsning i små grupper etterfulgt av diskusjoner i full klasse, der dette gjøres i alle tema i matematikk på alle trinn gjennom hele skoleåret. De legger spesielt vekt på at det oppstår læringsmuligheter fra den sosiale interaksjonen som ikke hadde oppstått ellers, ved at elevene uttrykker tenkningen sin og forklarer eller begrunner løsningene sine (Yackel et al., 1991, s. 401). Resonnering og bevis er nært knyttet til det å forklare og begrunne (Yackel & Hanna, 2003), og jeg ser derfor resonnering og bevis som en forutsetning for en undervisning som tar utgangspunkt i elevenes bidrag.

Temaet resonnering og bevis er spesielt relevant i disse dager med innføring av nye læreplaner. De nye kjerneelementene i matematikk som er fastsatt av Kunnskapsdepartementet som føringer for utforming av nye læreplaner, beskriver arbeidsmåter, metoder og tenkemåter i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2018). Blant disse kjerneelementene er resonnering og argumentasjon, som krever at elevene skal «forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser», «utforme sine egne resonnementer» og «argumentere for framgangsmåter og løsninger» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Andre kjerneelementer forventer at elevene «leter etter mønstre og finner sammenhenger», kan «begrunne svarene sine», «oppdage sammenhengene og strukturene» og «utforske med tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Å utforske og begrunne sammenhenger er sentralt i matematisk resonnering og bevis slik jeg vil definere det, og resonnering og bevis er dermed sentralt for flere av de nye kjerneelementene.

Min interesse for resonnering og bevis bygger videre på bidraget til matematisk meningsskaping (eng: sense-making), da resonnering og bevis fremheves i matematikkdidaktisk forskning som en måte å undersøke sammenhenger mellom matematiske ideer og begreper. I sin gjennomgang av forskning på læring av matematikk hevder Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) at læring forutsetter at elever begrunner og forklarer ideer, og at læreren opprettholder en forventning om forklaringer og utvikling av mening. I sin omtale av matematisk meningsskaping beskriver Schoenfeld (1992) matematisk virksomhet som en sosial aktivitet, der det å lære å tenke matematisk ikke bare innebærer å kunne bruke matematikkens verktøy, men å kunne bruke dem med mål om å forstå matematikkens struktur. Bevis har dermed mange funksjoner i matematikk, som å validere påstander og avlede ny kunnskap, bidra til matematiske oppdagelser, kommunikasjon, og å fremme forståelse gjennom forklaring ved å vise hvorfor en påstand er sann og vise logiske koblinger mellom ulike matematiske ideer (Stylianides, 2014; Yackel & Hanna, 2003). I forbindelse med undervisning er spesielt kommunikasjon og forklaring viktig, og et bevis må ikke bare vise at noe er sant, men forklare hvorfor og hjelpe med å forstå meningen av det som bevises, inkludert sammenhenger med andre matematiske begreper (Reid & Vargas, 2017; Stylianides & Al-Murani, 2010; Yackel & Hanna, 2003). Slike bevis kan dermed støtte elevenes arbeid med matematikk som en meningsskapende aktivitet (Stylianides, 2014), og Reid og Vargas (2017) foreslår undervisning i matematikk basert på bevis (eng: proof-based teaching), der elevene lærer matematikk gjennom å bevise.

Både tidligere forskning og kjerneelementene for de nye læreplanene foreslår altså at elever arbeider sammen om krevende aktiviteter, oppdager sammenhenger, begrunner og forklarer for hverandre, og at lærere leder elevene i diskusjoner basert på elevenes bidrag. Samtidig hevder Mercer og Sams (2006) at elevenes samtale ofte ikke er produktiv, noe som kan skyldes at de ikke vet hva som kjennetegner effektiv diskusjon, og spesielt at de ikke vet hvordan de konstruerer og sammenligner argumentasjon. Sfard (2001) påpeker at kommunikasjon må læres for at elevenes samtale skal bidra til læring i matematikk. Hun hevder videre at grundig analyse av episoder fra klasserom kan gi en god ide om hvordan matematisk kommunikasjon, og med det læring i matematikk, kan gjøres mer effektiv (Sfard, 2001, s. 44). Tilsvarende hevder Kilpatrick et al. (2001) at prinsipper om å diskutere løsninger på et problem i klasserommet ikke sier noe om hva som kjennetegner produktive diskusjoner (s. 359), og han foreslår derfor detaljerte studier av undervisning for å se på hva som kjennetegner effektiv diskusjon. Både i tidligere forskning og i de nye kjerneelementene i læreplanverket foreslås altså at elevene skal diskutere, forklare og begrunne, men samtidig er det mulig at elevene ikke vet hva dette innebærer.

Videre er det ikke klart hva matematisk bevis skal bety i skolen, spesielt i grunnskolen (Stylianides, 2007b), og selv om begrepene resonnering og bevis henger sammen (Stylianides, 2008) er det ikke klart hva matematisk resonnering består av (Jeannotte & Kieran, 2017). Likevel brukes ordet resonnering med en implisitt antagelse om at alle vet hva som menes med det (Yackel & Hanna, 2003). Denne uklarheten om ordenes betydning er en utfordring i forbindelse med innføring av nye læreplaner med utgangspunkt i kjerneelementet som resonnering og argumentasjon, der begrepene resonnering og argumentasjon ikke blir eksplisitt definert.

Formålet med denne studien er å bidra til mer kunnskap om grunnskoleelevers arbeid med resonnering og bevis i matematikk sammen med andre. Mer kunnskap om elevers arbeid med resonnering og bevis kan hjelpe lærere å utnytte læringsmuligheter som kan oppstå i den sosiale interaksjonen i klasserommet. Kunnskap om elevers arbeid med resonnering og bevis er viktig for å kunne hjelpe elever til å se sammenhenger mellom matematiske ideer og begreper, og se matematikk som en meningsskapende aktivitet. For å bidra med kunnskap om elevers arbeid med resonnering og bevis, har jeg i denne studien gjennomført en detaljert analyse av elevers kommunikasjon slik som Sfard (2001) og Kilpatrick et al. (2001) etterlyser, og jeg har beskrevet kjennetegn på elevers arbeid med resonnering og bevis.

Som overordnet rammeverk for studien har jeg valgt kommognisjon (Sfard, 2008), der læring i matematikk ses som en endring i hvordan en person kommuniserer om matematikk. Valget av kommognisjon henger sammen med et syn på matematikk som en sosial aktivitet, da kommognisjon ifølge Sfard (2008) kjennetegnes av at det er diskursen (kommunikasjonen) som er hovedfokus. Ved å fokusere på elevenes deltagelse i en diskurs kan jeg se etter muligheter i det elevene gjør i arbeid med resonnering og bevis, og i mindre grad fokusere på det de ikke gjør. Som min gjennomgang av tidligere forskning vil vise, er det få studier av elevers arbeid med resonnering og bevis fra et kommognitivt perspektiv, og det vil derfor være interessant å undersøke hva dette rammeverket kan gjøre synlig i elevenes arbeid. For å bidra til kunnskap om elevers arbeid med resonnering og bevis i matematikk fra et kommognitivt perspektiv har jeg stilt følgende forskningsspørsmål: *Hva kjennetegner en gruppe 10.-trinnelevers deltakelse i en matematisk diskurs av resonnering og bevis?*

For å svare på forskningsspørsmålet har jeg observert seks elever fra 10. trinn, fordelt på to grupper, med video- og lydopptak, mens de arbeidet med en oppgave om sammenhenger i multiplikasjon. Inspirert av Stylianides (2008) har jeg brukt en oppgave som ikke bare gikk ut på å bevise påstander, men ga mulighet til å identifisere mønster, generalisere og formulere hypoteser som så kunne bevises. For analyse av opptakene har jeg benyttet induktiv metode inspirert av Grounded Theory (Miles, Huberman & Saldaña, 2014; Nilssen, 2012). Ved hjelp av åpen koding har jeg beskrevet mønstre og kategorier i elevenes deltagelse, som jeg så har analysert ved hjelp av Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering og begreper fra Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk.

Det er ulike oppfatninger av hva bevis og resonnering er, og ofte defineres ikke begrepene (Jeannotte & Kieran, 2017; Reid, 2005; Stylianides, 2007b; Stylianides, Bieda & Morselli, 2016; Yackel & Hanna, 2003). Jeannotte og Kieran (2017) har derfor forsøkt å klargjøre hva matematisk resonnering er og hvordan det ser ut i skolen. Basert på en litteraturstudie, og med kommognisjon som rammeverk for sin analyse, har de utarbeidet en modell av matematisk resonnering der de forener ulike trekk som går igjen i litteraturen. Med utgangspunkt i Sfard (2008) definerer de resonnering som kommunikasjon med andre eller en selv som gjør det mulig å avlede matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 7). Stylianides (2008) hevder at bevis i skolen ofte kun handler om å lære formelle bevis, men at dette er problematisk fordi elevene da ikke får støtte fra aktiviteter forut for dette siste steget. Mens matematikere starter med å identifisere mønster, formulere formodninger, forsøke å forstå, argumentere og motbevise, og revidere formodningene, så får ikke elever samme støtte til meningsskaping og konstruksjon av matematisk kunnskap når de kun jobber med formelle bevis. Når jeg omtaler tema for studien som resonnering og bevis er det inspirert av Stylianides (2008) som hevder at det å identifisere mønster, formulere formodninger, begrunne og bevise må ses som en integrert helhet. Disse aktivitetene er i modellen til Jeannotte og Kieran (2017) beskrevet som prosesser innenfor matematisk resonnering, og kan benyttes for å beskrive elevenes arbeid uten å begrense seg til bestemte aspekter, som for eksempel identifisering av mønster, generalisering, formulering av formodning, begrunnelse og formulering av bevis. På bakgrunn av at Stylianides (2008) hevder at resonnering og bevis må ses som en integrert helhet vil jeg derfor ikke begrense meg til å se kun på kjennetegn relatert til bevis. Det er altså et helhetlig syn på matematisk resonnering og bevis som er tema for denne studien. Det er også interessant å bruke modellen til Jeannotte og Kieran (2017) fordi de ønsker at den kan bidra til å forbedre kommunikasjon om resonnering for både forskere og lærere. Det er spesielt relevant i forbindelse med innføring av nye læreplaner.

I det etterfølgende kapittel 2, teorikapitlet, vil jeg gi en kort redegjørelse for ulike begreper relatert til resonnering og bevis, før jeg beskriver det teoretiske og analytiske rammeverket jeg har benyttet. Videre vil jeg gjøre rede for tidligere forskning på resonnering og bevis i skolen, før jeg i kapittel 3 beskriver metode for datainnsamling og analyse. Hoveddelen av oppgaven vil være en presentasjon og analyse av data i kapittel 4. Oppgaven avsluttes med en diskusjon i kapittel 5, og oppsummerende avslutning i kapittel 6 der jeg beskriver mulige implikasjoner for forskning og undervisning.

2 Teori

I denne studien undersøker jeg hvilke kjennetegn på elevers deltagelse i en matematisk diskurs av resonnering og bevis som kan observeres i arbeid med en matematikkoppgave i liten gruppe. Sentrale begreper i studien er derfor matematisk diskurs og resonnering og bevis. I dette kapitlet vil jeg starte med å gjøre rede for noen begreper knyttet til matematisk resonnering og bevis, generelt og i skolen, for å etablere en felles ramme for senere beskrivelser. Jeg vil deretter presentere kommognisjon (Sfard, 2008) som det overordnede teoretiske rammeverket for studien, og gjennom det definere matematisk diskurs. Videre vil jeg presentere en modell av matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017), som inkluderer bevis. Avslutningsvis vil jeg oppsummere mitt rammeverk for analyse, før jeg kort presenterer tidligere forskning på elevers arbeid med resonnering og bevis som grunnlag for senere diskusjon.

2.1 Avklaring av begreper om resonnering og bevis

Som diskutert innledningsvis er det ulike oppfatninger av hva bevis og resonnering er. Det er også slik at bevis har mange funksjoner i matematikk (Stylianides, 2014; Yackel & Hanna, 2003). En viktig funksjon er å vise at påstander er sanne og på den måten avlede ny matematisk kunnskap. En annen er å bidra til matematiske oppdagelser gjennom forbedring av formodninger ved hjelp av forsøk på å bevise og motbevise. En tredje funksjon er kommunikasjon og å fremme forståelse gjennom forklaring, ved å vise hvorfor en påstand er sann og vise logiske koblinger mellom ulike matematiske ideer. Yackel og Hanna (2003) hevder at elever vanligvis kun møter bevis som en måte å vise at påstander er sanne, men at bevis har mest å bidra med i matematikkundervisningen som en måte å forklare og kommunisere. Et bevis må altså ikke bare vise at noe er sant, men forklare hvorfor og hjelpe med å forstå meningen av det som bevises, inkludert sammenhenger med andre matematiske begreper (Reid & Vargas, 2017; Yackel & Hanna, 2003), noe som kan knyttes til matematikk som en meningsskapende aktivitet (Stylianides, 2014).

I denne studien har jeg benyttet Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering som definisjon av matematisk resonnering og bevis i skolen. Jeg vil likevel starte med å gjøre rede for hva resonnering og bevis, og også argumentasjon kan være, spesielt i skolen. Jeg vil også gjøre rede for noen begreper relatert til resonnering og bevis som benyttes i litteraturen.

2.1.1 Matematisk bevis, deduksjon, hypotese og formodning

I læreboken *Logiske metoder*, som er ment som en «introduksjon til vitenskapelig, og spesielt matematisk, tankegang for dem som begynner på et universitets- eller høyskolestudium» (Antonsen, 2014, omslagstekst) gir Antonsen (2014) en definisjon av bevis:

> Et bevis (eng: proof) for en påstand fra en mengde gitte antagelser er en rekke logiske slutninger som viser hvordan vi kommer fra antakelsene til påstanden. For hvert steg må konklusjonen være en *logisk konsekvens* av antakelsene. (Antonsen, 2014, s. 51)

Det at konklusjonen må være en logisk konsekvens av antagelsene vil si at de logiske slutningene følger bestemte anerkjente slutningsregler[1] (eng: rules of interence). Hanna og Barbeau (2002) omtaler slike slutningsregler som deduktive. Deduksjon (deduktiv resonnering) vil altså si å starte med noe vi antar er sant eller tidligere har bevist å være sant, og så gjennom ett eller flere steg komme til en konklusjon. Fordi vi har fulgt aksepterte slutningsregler på veien fra antagelser til konklusjon, så må konklusjonen aksepteres som sann. For eksempel kan vi anta at multiplikasjon er distributiv med hensyn til addisjon (altså at $a \cdot (b + c) = ab + ac$), og så bevise at $2 \cdot (3 + x) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot x$.

Før den er bevist kalles ofte en matematisk påstand for en hypotese eller formodning (eng: conjecture). *Formodning* kan defineres som en påstand som ikke har blitt bevist eller motbevist, men som «vi tror, eller har god grunn til å tro, er sann» (Antonsen, 2014, s. 52), eller mindre subjektivt ved at den passer med kjente data (Weisstein, u.å.-a). Noen kilder hevder at formodning og hypotese brukes synonymt i forbindelse med matematikk, i hvert fall på engelsk (Weisstein, u.å.-a, b). En som likevel skiller mellom disse er Stylianides (2008) som beskriver en formodning som en hypotese som ikke er vilkårlig. Jeg vil bruke ordet formodning der kildene mine bruker det engelske conjecture. For å beskrive elevers matematiske påstander uavhengig av om de uttrykker spesielt tro på dem, bruker jeg ordet hypotese.

Et matematisk bevis må altså ha en deduktiv struktur, men det er ikke slik at deduktiv struktur er det eneste kravet matematikere stiller til matematisk bevis. Ifølge Yackel og Hanna (2003) ses formelt bevis noen ganger kun som en kjede av logiske argumenter som følger deduktive logiske slutningsregler, men de hevder at for matematikere er et bevis også en serie av ideer

[1] I Stor engelsk ordbok oversettes inference bl.a. med konklusjon, slutning eller logisk slutning («Inference», u.å.). Jeg har derfor oversatt rules of interence med slutningsregler.

og innsikt. I tillegg til å vise at en påstand er sann må et godt bevis også forklare meningen med det som bevises, og på den måten bidra til kommunikasjon. Jeg vil nå gjøre rede for hvordan argumentasjon, resonnering og bevis kan ses i sammenheng.

2.1.2 Resonnering og argumentasjon

Matematisk resonnering er et begrep som i forskningslitteraturen brukes ulikt, ofte uten eksplisitt definisjon og med en implisitt antagelse om at det er enighet om hva det betyr (Jeannotte & Kieran, 2017; Yackel & Hanna, 2003). Jeannotte og Kieran (2017) diskuterer med utgangspunkt i en litteraturstudie, hvorvidt det kun er deduktiv resonnering som kan anses som matematisk resonnering, men de finner at litteraturen også inkluderer andre former for resonnering. De gir en definisjon på matematisk resonnering som i kortform kan beskrives som det å slutte matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer, og de inkluderer blant annet det å finne mønster, generalisere og formulere formodninger, i tillegg til ulike typer begrunnelser for påstander, inkludert deduktive bevis. Også Stylianides (2008) hevder at det å identifisere mønster, formulere formodninger, argumentere og motbevise, og revidere formodningene må ses som en integrert helhet, og han omtaler dette som reasoning-and-proving. Når jeg omtaler tema for studien som resonnering og bevis har jeg valgt en slik helhetlig forståelse av matematisk resonnering som Stylianides (2008) og Jeannotte og Kieran (2017) argumenterer for, som inkluderer både utforsking fram mot formulering av formodninger og ulike begrunnelser for at formodningen er sann eller sannsynlig, inkludert, men ikke begrenset til, deduktive bevis.

Begrepet argumentasjon brukes blant annet i norske læreplaner (Kunnskapsdepartementet, 2018; Utdanningsdirektoratet, 2013). Stylianides et al. (2016) hevder at forskere stort sett er enige om at ordet argumentasjon brukes for å beskrive kommunikasjon eller retoriske grep (ikke nødvendigvis matematiske) som brukes av et individ eller gruppe for å overbevise andre om at en påstand (eng: statement) er sann eller usann (s. 316). Fordi argumentasjon handler om å overbevise om at en påstand er sann eller usann, ser jeg det i sammenheng med det som i forbindelse med matematisk resonnering blir beskrevet som begrunnelse. Stylianides et al. (2016) viser til at det er uenighet om argumentasjon og bevis skal ses som adskilte begreper eller som en kontinuitet, men de hevder at begrepene er nært beslektet og at det er meningsfullt å se dem i sammenheng. I omtale av resonnering og bevis i denne studien har jeg hovedsakelig benyttet begreper fra Jeannotte og Kieran (2017) sin modell for matematisk resonnering i skolen og Sfard (2008).

2.1.3 Bevis i skolen

Stylianides (2007a) hevder at bevis ikke kun er en deduktiv kjede av argumenter, men at det også har sosiale aspekter ved at det skal overbevise personer. Ifølge Stylianides, Stylianides og Weber (2017) beviser matematikere for å kunne begrunne og forklare påstander for sine fagfeller, og det er fagfellene som avgjør om argumentet er et bevis. Matematisk aktivitet foregår altså i en sosial sammenheng, og hva som kjennetegner et bevis er tett koblet til den sosiale konteksten. I skolen må bevis være akseptable fra et matematisk synspunkt, samtidig som det gir mening for elevene (Mariotti sitert i Stylianides et al., 2016, s. 317), et krav som dekkes av følgende definisjon av bevis i skolen, oversatt fra Stylianides et al. (2016, s. 317):

> Bevis i skolen er et matematisk argument for at en matematisk påstand er sann eller usann som oppfyller følgende to kriterier:
>
> 1) Det bruker sanne påstander (eng: true statements), gyldige resonneringsmåter (eng: modes of reasoning) og hensiktsmessige representasjoner (eng: modes of representation), slik det vil være anerkjent av matematikere.
> 2) Det bruker påstander, resonneringsmåter og representasjoner som er akseptert av, kjent av, eller innenfor rekkevidde for elever i et gitt klasserom.

Ifølge denne definisjonen skal et bevis i skolen altså både være matematisk akseptabelt og mulig for elever i klasserommet å forholde seg til. Det betyr at et deduktivt bevis som bruker påstander som ikke er kjent for elevene, ikke vil være et bevis i skolen, selv om det vil anerkjennes av matematikere som er kjent med påstanden. Det betyr også at en begrunnelse med et enkelt eksempel ikke er et bevis, fordi dette ikke vil anerkjennes av en matematiker, selv om det vil kunne aksepteres av elever. Definisjonen utfordrer derfor lærere til å bruke påstander, resonneringsmåter og representasjoner som skoleelever kan forholde seg til, samtidig som disse vil være anerkjent av matematikere. Denne definisjonen tilfredsstiller to prinsipper som Stylianides (2007a) beskriver for bevis i skolen: at bevis må være akseptable for matematikk som disiplin samtidig som det tilgjengelig for elevene under veiledning av lærer, og at bevis må forstås på en konsistent måte fra barneskolen til videregående, slik at det er en utvikling og ikke noe som må avlæres senere. Stylianides et al. (2016) sin definisjon er likevel ikke helt uproblematisk, fordi det ikke nødvendigvis er enighet om hva som er anerkjent av matematikere (Stylianides et al., 2017). Et eksempel er det som kalles generisk argument, som ikke nødvendigvis anerkjennes som et gyldig matematisk bevis, slik jeg gjør rede for i kapittel 2.1.4 nedenfor.

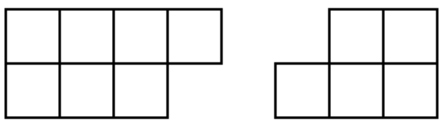
Jeg har i denne studien benyttet Jeannotte og Kieran (2017) sin definisjon av bevis, som jeg gjør rede for i kapittel 2.3 nedenfor. Deres definisjon krever i likhet med Stylianides et al.

(2016) at påstander og representasjoner både er matematisk akseptable og akseptable for elevene, men den presiserer et krav om deduktiv resonnering.

2.1.4 Empirisk og generisk argument

To begreper som går igjen i forskning på bevis i skolen er empirisk argument og generisk argument (Stylianides et al., 2016). Empirisk argument brukes om argumentasjon for en påstand ved å sjekke at den stemmer for et antall enkelttilfeller. Et eksempel er å argumentere for at summen av to oddetall alltid vil være et partall, ved å vise at summen av 3 og 5 er 8 så derfor må det alltid være slik. Et empirisk argument kan ikke bevise en påstand, med mindre det er mulig å sjekke alle tilfeller som omtales av påstanden. Empirisk argument har fått mye oppmerksomhet fordi elever ser ut til å ha en tilbøyelighet til å argumentere ved å vise til enkelttilfeller (Stylianides & Stylianides, 2018).

Det andre begrepet Stylianides et al. (2016) trekker frem er generisk argument, også kalt generisk bevis. Et generisk argument viser at en påstand er sann for en mengde (f.eks. for alle hele tall) basert på at den er sann for et generisk element i denne mengden, gjerne kalt et generisk eksempel. Et generisk eksempel er et konkret eksempel, men det er presentert slik at det fungerer som bærer av noe generelt (Mason & Pimm, 1984, s. 287). Selv om det er et eksempel som viser ett bestemt tilfelle, så har det generiske eksemplet ingen spesielle egenskaper som er spesielle for dette tilfellet. Argumentet som brukes for at påstanden er sann for dette eksemplet, kan derfor generaliseres til ethvert eksempel. For å bevise at summen av to oddetall alltid er et partall, kan dette gjøres med utgangspunkt i eksemplet 7 + 5 representert som i Figur 2.1 nedenfor. Ved å definere partall som tall der rutene kan grupperes to og to, og oddetall som tall som kan grupperes to og to, men der det blir en rute til overs, så er det ikke noe i dette eksemplet som er spesielt. Ved å utvide med flere par av ruter kan dette eksemplet generaliseres til summen av vilkårlige oddetall, og figuren er derfor et generisk eksempel for summen av to oddetall. Figuren viser to oddetall fordi det er gruppering to og to, med en rute til overs. Det vil altså alltid være to enkeltruter til overs i to oddetall og disse kan også grupperes, og summen blir derfor et partall. Dette er dermed et generisk bevis for at summen av to oddetall alltid vil være et partall.



Figur 2.1: Generisk eksempel for summen av to oddetall, representert ved 7 + 5

Stylianides et al. (2016) hevder at generiske argumenter er viktige fordi de kan brukes som en overgang mellom elevers empiriske argumenter basert på eksempler og deduktive argumenter som er uavhengige av eksempler, og fordi de ved å være mer konkrete er mer tilgjengelige for elever enn mer abstrakte bevis. Et generisk argument anerkjennes vanligvis som et matematisk bevis dersom det er deduktivt (Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 2007; Stylianides, 2007b), men Reid og Vargas (2018) viser at det ikke er generell enighet om dette. Reid og Vargas (2018) gir to kriterier for at et generisk eksempel skal fungere som et bevis: Det må være tegn til at elevene er bevisst at begrunnelsen gjelder generelt og det må være en deduktiv struktur.

Jeg vil benytte begrepene empirisk argument og generisk argument i omtale av tidligere forskning og elevenes arbeid med å begrunne påstander, og jeg vil støtte meg på Reid og Vargas (2018) sine kriterier for generisk bevis. Jeg har i dette kapitlet gjort rede for noen begreper relatert til resonnering og bevis som bakgrunn for studien og går nå videre til å beskrive rammeverk for analyse, og med det definere matematisk resonnering og bevis.

2.2 Kommognisjon

Som overordnet teoretisk rammeverk for studien har jeg valgt Sfard (2008) sitt rammeverk om kommognisjon (eng: commognition) (også omtalt som communicational framework; Tabach & Nachlieli, 2016, s. 299-300). I kommognisjon ses læring i matematikk som en endring i hvordan en person kommuniserer om matematikk. Utgangspunktet er et sosiokulturelt syn på læring, der intellektuell utvikling og prosessen der mennesker i økende grad blir fullverdige deltagere i ulike kulturelle praktiser, ses som aspekter av en og samme prosess (Cobb, 2007, s. 22). Sfard tar ikke utgangspunkt i en bestemt sosiokulturell tradisjon, men et generelt syn på læring som deltagelse, der utvikling ses som endring i hva og hvordan mennesker handler, og at kollektive handlingsmønster kommer før individuelle (Sfard, 2006b). Dette til forskjell fra læring som tilegnelse, der læring ses som endring i en person, og den personlige utviklingen kommer før personens deltagelse i kollektive aktiviteter (Sfard, 2008). Forskjellen på læring som deltagelse og læring som tilegnelse er altså ikke om det handler om passivt mottak eller aktiv konstruksjon (Sfard, 2007), men om det er det kollektive eller det individuelle som utvikles først. Mens læring som tilegnelse handler om endringer i enkeltmennesker, hva personen har tilegnet seg av kunnskap, ideer, begreper og mening, handler læring som deltagelse om endring i hva mennesker gjør og hvordan de gjør det, sammen eller alene (Sfard, 2006a). Dette fører til et annet analytisk fokus, der det som studeres er de kollektive handlingsmønstrene, altså det som kan ses som gjentagende mønstre i hva mennesker gjør og hvordan de gjør det.

Jeg har valgt å ta utgangspunkt i kommognisjon fordi det analytiske fokuset er på hva elevene gjør og hvordan de gjør det. Istedenfor et fokus på hva elevene har tilegnet seg, eller ikke har tilegnet seg, gir kommognisjon en mulighet til å studere hva elevene faktisk gjør i en bestemt situasjon og reflektere over hvordan det de gjør påvirkes av situasjonen, inkludert oppgaven og det andre sier og gjør. Kommognisjon passer dermed godt med formålet for min studie, som er å bidra til kunnskap om elevers arbeid. Forskningsspørsmålet er formulert i tråd med begreper fra kommognisjon og handler om å beskrive kjennetegn på elevers deltagelse i kommunikasjon med hverandre (en diskurs) i arbeid med resonnering og bevis. I de etterfølgende avsnittene vil jeg gå nærmere inn på hva som kjennetegner en matematisk diskurs, hvordan læring beskrives i kommognisjon, hvordan elevers deltagelse i en matematisk diskurs kan beskrives ved hjelp av begrepet rutine, samt ulike typer rutiner.

2.2.1 Matematisk diskurs

Sfard (2008, 2012) definerer tenkning som kommunikasjon med en selv, og kommunikasjon med andre og tenkning (kognisjon) er dermed to sider av samme fenomen. Hun har derfor konstruert ordet *kommognisjon* som en kombinasjon av de to ordene kommunikasjon og kognisjon. En *diskurs* er en bestemt type kommunikasjon, og for Sfard er matematikk (matematisk tenkning) en diskurs, altså en bestemt type kommunikasjon. En diskurs kjennetegnes ved bestemte nøkkelord (f.eks. tre, trekant, mengde, funksjon) og hvordan de brukes, bestemte visuelle mediatorer (f.eks. tall, algebraiske symboler, grafer), bestemte rutiner (måter matematiske handlinger utføres), og allment godkjente narrativer (eng: endorsed narratives, f.eks. teoremer, definisjoner, beregningsregler).

Sfard (2008) definerer *narrativ* som en serie ytringer, muntlig eller skriftlig. Narrativer kan være beskrivelser av objekter, relasjoner mellom objekter, eller prosesser med eller på objekter, og de kan godkjennes (eng: endorsed) eller avvises (eng: rejected), altså markeres som sanne eller usanne. Et narrativ i en anerkjent matematisk diskurs er godkjent dersom det er bevist ved hjelp av aksepterte slutningsregler, men Sfard påpeker at regler for godkjenning av narrativer er avhengig av deltagerne i diskursen, tilsvarende det jeg tidligere har omtalt i forbindelse med det sosiale aspektet ved kriterier for bevis. Aksiomer, definisjoner og teoremer kaller Sfard for allment godkjente narrativer. I denne studien vil både en hypotese eller formodning som elevene foreslår og de antagelsene de bruker i et bevis altså være narrativer. Elevene jobbet med en oppgave om hva som skjer med produktet av to like heltall når det ene tallet reduseres med én og det andre tallet økes med én. En hypotese om at produktet reduseres med én, altså $(a-1)(a+1)=a^2-1$ vil da være et narrativ. Denne hypotesen kan bevises ved å bruke konjugatsetningen, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, som også er et narrativ. Konjugatsetningen er et kjent teorem, og er dermed et eksempel på det Sfard kaller et allment godkjent narrativ.

2.2.2 Utvikling og læring

Sfard (2012) omtaler læring som en type utvikling, og hun beskriver utvikling som en endring i diskurser. Hun påpeker at dette ikke handler om en endring i eleven, men en endring av aktivitet. Det kan være at det skjer en endring inne i eleven, for eksempel en endring i hjernen, men det er aktiviteten som er fokus for kommognitive studier. En slik definisjon av utvikling kan da brukes både om historisk utvikling av matematikk og elevers læring. Sfard (2008) ser på læring som en bestemt type utvikling som har som mål å bringe elevens diskurs nærmere en anerkjent matematisk diskurs som har blitt til gjennom historisk utvikling. Det finnes dermed både anerkjente matematiske diskurser og personlige matematiske diskurser. Den anerkjente matematiske diskursen utvikler seg gjennom historien fra menneskers kreativitet, og elevers matematiske diskurs utvikler seg gjennom endring av diskursen i retning av anerkjente matematiske diskurser, som i skolen hovedsakelig vil være lærerens diskurs. Sfard (2008) omtaler personlig diskurs som handlingsmønstre som er relativt stabile i møte med ulike mennesker, men samtidig kan ikke en persons diskurs studeres uten å ta hensyn til omgivelsene. Det vil si at selv om det gir mening å se etter kjennetegn på en enkelt persons handlinger i en diskurs, ser hun på en gruppe mennesker som et kommognitivt system, der det som sies av en bestemt person vil være et resultat av deltagernes felles arbeid. Selv om Sfard (2012) omtaler personlige diskurser, skriver hun også om elevers deltagelse i matematisk diskurs. Gradvis overgang fra observasjon av andres deltagelse i en diskurs til fullt ut aktiv, uavhengig deltagelse i diskursen (Sfard, 2012, s. 6) kaller hun for *individualisering* (eng: individualization). Slik jeg forstår dette kan man si at elever har sine egne matematiske diskurser, men de vil delta i andre diskurser, og gjennom utvikling av egne matematiske diskurser vil de bli stadig mer kompetente deltagere i felles diskurser. Hver enkelt deltager i diskursen vil altså ha sin bestemte utgave av matematisk diskurs som på noen områder avviker fra andre deltageres eller fra anerkjent matematisk diskurs. I denne studien er det elevens deltagelse i gruppens felles diskurs som er i fokus, altså ikke hver enkelt deltagers personlige diskurs.

Sfard (2012) beskriver to typer utvikling av diskurser, og dermed to typer læring. Den ene er utvikling på objektnivå og den andre er utvikling på metanivå. *Utvikling på objektnivå* er en utvidelse av en eksisterende diskurs ved å formulere og godkjenne nye narrativer basert på eksisterende narrativer. At elevene lærer konjugatsetningen vil være en utvikling på objektnivå fordi denne kan godkjennes ved hjelp av narrativer elevene allerede kjenner. *Utvikling på metanivå* vil si at måten vi opptrer på i diskursen endres. Et eksempel på læring på metanivå er når elevene møter en lærer som krever et bevis for å godkjenne et narrativ om en generell sammenheng, mens elevene fram til da har vært tilfreds med å godkjenne narrativer ved å henvise til konkrete eksempler. Denne konflikten mellom elevenes oppfatning av hva som skal til for å godkjenne nye narrativer og lærerens krav til bevis, kan føre til læring på metanivå. Hva som er en akseptert måte å opptre på i en anerkjent matematisk diskurs er noe som har blitt til gjennom historien ved at mennesker har tatt valg som viste seg å være fornuftige, og læring på metanivå er derfor mer utfordrende fordi den nye måten å handle på ikke kan avledes fra noe elevene allerede kan. Sfard (2007, 2008) hevder derfor at det er usannsynlig at elever vil få til utvikling på metanivå alene, og at de derfor er avhengige av en lærer som viser fram og gjerne diskuterer eksplisitt med elevene hva som kreves av deltagelsen i anerkjent matematisk diskurs, slik som at bevis er nødvendig for å godkjenne narrativer om generelle sammenhenger.

2.2.3 Rutiner

Sfard (2008) legger stor vekt på at effektiv kommunikasjon krever regularitet, og at diskurser består av repeterende kommunikasjonsmønstre. Et eksempel fra dagliglivet er hvordan det er vanlig å hilse på hverandre, og et eksempel fra matematikk er bruk av deduktiv resonnering. Disse eksemplene viser handlingsmønstre som ikke er naturgitt, men som er utviklet opp gjennom historien som en del av kulturen, og som mer eller mindre uttalt regulerer hvordan mennesker kommuniserer. For å få til effektiv kommunikasjon er det en fordel at vi hilser på en slik måte som andre mennesker forventer, og for å overbevise andre om at en formodning er sann er det en fordel å bruke deduktiv resonnering, fordi det lettere vil bli godtatt av andre i det matematiske fellesskapet.

Sfard (2008) bruker begrepet *regel* om en beskrivelse av regularitet, inkludert diskursive mønster, og hun skiller mellom regler på objektnivå og regler på metanivå. *Regler på objektnivå* beskriver hvordan de matematiske objektene oppfører seg, mens *regler på metanivå* beskriver aktivitetene til deltakerne i diskursen når de produserer og underbygger (eng: substantiate) narrativer på objektnivå (Sfard, 2008, s. 201). Sfard gir som eksempel på en regel på objektnivå at «vinkelsummen i en mangekant med n sider er lik $(n-2)\cdot 180°$», som altså er et narrativ om det matematiske objektet mangekant. En gruppe metaregler som Sfard (2008) nevner spesielt er de som styrer bevis-aktiviteter. Regler på metanivå bestemmer ofte ikke nøyaktige handlingsmønstre, men begrenser muligheter, ved å si noe om hva som ikke er akseptabelt. Metaregler vil for eksempel begrense akseptable slutningsregler, som at matematisk bevis krever deduktiv resonnering. For å unngå uheldige assosiasjoner med ordet regel påpeker Sfard at metaregler ikke forteller oss hva vi må si eller tenke, på samme måte som trafikkregler ikke bestemmer hvor vi skal reise, og der regler på objektnivå ofte er relativt uforanderlige, kan metaregler utvikle seg over tid.

Noe av det som sammen med blant annet narrativer kjennetegner diskurser, er rutiner. Sfard (2008, s. 208) definerer *rutine* som en mengde av metaregler som beskriver en gjentagende diskursiv handling. Disse metareglene kan deles inn i tre delmengder:

- *Anvendbarhetsbetingelser* (eng: applicability conditions): Regler som bestemmer eller begrenser under hvilke omstendigheter en person antagelig vil utføre rutinen.
- *Prosedyre* (eng: procedure): Regler som bestemmer eller begrenser hvordan rutinen kan utføres.
- *Avslutningsbetingelser* (eng: closure, closing conditions): Regler som definerer omstendigheter en person antagelig vil tolke som vellykket avslutning av rutinen.

Metaregler er ikke prinsipper deltagerne bevisst følger, men regelmessigheter i det som observeres at de gjør (eng: observer's construct). Anvendbarhetsbetingelsene er omstendigheter der elevene handler på en bestemt måte, prosedyren er hvordan elevene handler, og avslutningsbetingelsene er omstendighetene som ser ut til å føre til at elevene anser seg ferdig. Metareglene er altså en beskrivelse av hva elevene har gjort, ikke hva de vil gjøre, men samtidig ligger det en forventning av at det vil gjenta seg, jf. definisjonen av rutine som en gjentagende diskursiv handling.

Sfard (2008) omtaler de tre mengdene av metaregler som utgjør en rutine for rutiners *hvordan* og *når*. Hun fremhever spesielt rutiners *når*, og hevder at både lærere og forskere ofte overser at selv om en elev kan utføre en prosedyre, betyr ikke det nødvendigvis at eleven vil utføre den når det er passende å gjøre det og bare da. Metaregler for prosedyre handler om *hvordan* en rutine kan utføres, for eksempel hvordan deduktiv resonnering kan utføres eller det å regne ut $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Anvendbarhetsbetingelser er metaregler som handler om *når* elever bruker en prosedyre. Hvis elever begrunner en generell påstand ved å vise til et eksempel, til tross for at de tidligere har vist at de kan utføre et algebraisk bevis, kan det være at elevenes anvendbarhetsbetingelser for deduktiv resonnering er for snevre, noe som gjør at prosedyren for deduktiv resonnering ikke anvendes i det tilfellet. Et eksempel Sfard viser til er at elever ofte velger å regne ut $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ så snart de ser et andregradsuttrykk slik som x^2-3x+5, til tross for at det ikke er noen grunn til at utregning med løsningsformelen for andregradslikninger er en passende prosedyre. Elevenes anvendbarhetsbetingelser begrenser i dette tilfellet ikke tilstrekkelig *når* prosedyren kan anvendes. Avslutningsbetingelser handler om hva som gjør at elevene vil oppleve at rutinen er fullført. Sfard gir rutine for likningsløsing som eksempel, og hevder at noen elever vil se et uttrykk som starter med «$x =$» som tegn på at likningen er løst, mens andre ikke er fornøyd før de er overbevist om at de har funnet alle mulige løsninger. For eksempel vil noen se likningen $x^2=9$ som løst når de har fått $x=\sqrt{9}=3$, mens andre ikke vil være fornøyd før de er sikker på at de har funnet alle løsninger, i dette tilfellet også $x=-3$.

Ifølge Sfard (2008, s. 200) er kjernen i kommognitiv forskning å lete etter diskursive mønster, og Sfard (2008, s. 208) hevder at ett av målene for kommognitiv forskning er å eksplisitt beskrive metareglene som definerer rutiner. I min studie har jeg derfor sett etter rutiner i elevenes deltagelse i diskursen, og identifisert anvendbarhetsbetingelser, prosedyre og avslutningsbetingelser for elevenes rutiner relatert til resonnering og bevis.

2.2.4 Utforsking, gjerninger og ritualer

Sfard (2008) deler rutiner inn i tre typer: Utforsking (eng: explorations), gjerninger (eng: deeds) og ritualer (eng: rituals). *Utforsking* er rutiner som produserer narrativer som så kan godkjennes[2] eller rutiner som godkjenner narrativer, og hun beskriver tre typer utforskende rutiner: *Konstruksjon* (eng: construction), som resulter i narrativer som kan godkjennes, *underbygging* (eng: substantiaton), som er å avgjøre om et narrativ skal godkjennes, og *gjenkalling* (eng: recall), som er å finne tilbake til (huske, men også å kunne gjenskape) et narrativ som tidligere er godkjent. En *gjerning* er ifølge Sfard (2008) en rutine som endrer objekter, enten fysiske eller matematiske objekter. Et eksempel er når elever bruker konkreter

[2] I sin omtale av *exploration routines* skriver Sfard (2008) om *endorsable narratives* og skriver at *endorsable* betyr at narrativene kan godkjennes ved hjelp av veldefinerte regler i en gitt matematisk diskurs, slik som aritmetiske beregninger og bevis. Samtidig er det slik at når hun definerer narrativer skriver hun at de kan godkjennes eller avvises. Jeg oppfatter det da slik at alle narrativer er *endorsable*, og at omtalen av *exploration routines* kun handler om en presisering. I en fotnote skriver hun også at ikke alle veldefinerte matematiske ytringer er *endorsable*, og hun bruker der ikke narrativer om disse.

(f.eks. penger) for å gjøre beregninger, der målet med aktiviteten for dem ikke er å konstruere et narrativ, men å gjøre noe som fører til en endring av konkretene. Det er altså det at målet for aktiviteten (avslutningsbetingelsen) er flyttingen av konkretene, og ikke konstruksjon av et narrativ om tallene, som gjør det til en gjerning og ikke utforsking. *Ritual* skiller seg fra utforsking og gjerning ved at målet (avslutningsbetingelsen) ikke er produksjon av narrativer eller endring av objekter, men å opprette og opprettholde sosialt bånd til andre mennesker. Det at målet med ritualer er sosiale bånd har ifølge Sfard (2008) flere konsekvenser. For det første betyr det at eleven vil være avhengig av andres aksept, slik at når eleven har løst en matematikkoppgave er det ikke svaret på oppgaven som er interessant, men at lærer eller medelever aksepterer det som er gjort. Dette skiller seg fra gjerninger og utforsking der det er resultatet i seg selv som er målet for arbeidet, og at eleven ved utforsking og gjerninger selv vil kunne vurdere om resultatet er tilfredsstillende. For det andre beskriver Sfard ritualer som mindre fleksible. Siden målet er harmoni med andre, vil elevene gjøre det de tenker er forventet. Når målet derimot er en endring i objekter eller produksjon av et narrativ vil det være større åpenhet om ulike måter å komme til dette resultatet på, noe som gjør gjerninger og utforsking mer fleksible. Sfard (2008) relaterer utforskende rutiner til formulering av og bevis for formodninger. I min studie har jeg dermed undersøkt utforskende rutiner, men jeg har også undersøkt hvorvidt elevenes deltagelse må ses som ritualisert. Ritualisert deltagelse kan finne sted ved at elevene er mer opptatt av harmoni eller å utføre en oppgave på en bestemt måte, enn å vurdere om en hypotese er tilfredsstillende formulert eller bevist.

2.2.5 Videreutvikling av rutinebegrepet

Lavie, Steiner og Sfard (2018) har videreutviklet Sfard (2008) sin opprinnelige definisjon av rutine og knyttet den nærmere til oppgaver som eleven opplever at skal utføres. De knytter rutine til spesifikke handlinger og en spesifikk person, og ser ikke rutiner som noe generelt og uavhengig av tid og person. Likevel hevder de at det kan være meningsfullt å snakke om generelle rutiner, slik som rutine for å bevise. Lavie et al. (2018) beskriver oppgavesituasjon som en situasjon der en person ser det nødvendig å handle. For eksempel kan en bestemt oppgavetekst kombinert med det å være i et klasserom være en oppgavesituasjon, og den samme oppgaveteksten gitt i en annen sammenheng vil ikke nødvendigvis oppfattes som samme oppgavesituasjon. I en gitt oppgavesituasjon vil en person sammenligne denne situasjonen med tidligere erfaringer, oftest ubevisst. Det fra den tidligere situasjonen som personen anser nødvendig å gjenta, kaller de en oppgave. De definerer rutine som oppgaven sammen med den prosedyren som er nødvendig for å utføre oppgaven. Jeg har ikke benyttet

Lavie et al. (2018) sin definisjon i analysen av datamaterialet, men jeg kommer inn på den i diskusjon av hvordan elevenes rutiner kan være knyttet til oppgaveteksten.

2.3 Matematisk resonnering

Jeg vil her gå nærmere inn i Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av resonnering og bevis i skolen, som mitt analyseredskap bygger på. De har gjennomført en analyse av forskningslitteratur om resonnering i skolematematikk, og utarbeidet en modell av matematisk resonnering der de forener ulike trekk som går igjen i litteraturen. De har benyttet et kommognitivt perspektiv og med utgangspunkt i Sfard (2008) definerer de *matematisk resonnering* som kommunikasjon med andre eller en selv som gjør det mulig å avlede matematiske ytringer fra andre matematiske ytringer (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 7). Bevis er i denne modellen en bestemt prosess innenfor matematisk resonnering. Jeg benytter modellen som definisjon av matematisk resonnering og bevis, og for analyse av elevenes deltagelse. Jeg har valgt modellen til Jeannotte og Kieran (2017) fordi den er et forsøk på å beskrive ulike aspekter ved matematisk resonnering som går igjen i forskningslitteraturen, og ikke begrenser seg til for eksempel argumentasjon i forbindelse med generalisering av figurmønster eller kun deduktiv resonnering. Jeg ser det som en fordel at et uttalt mål med modellen er å bidra til bedre kommunikasjon om matematisk resonnering, noe som kan bidra til at forskning på resonnering og bevis lettere kan finne anvendelse i skolen.

2.3.1 Prosesser i matematisk resonnering

Jeannotte og Kieran (2017) sin modell inkluderer to sider ved matematisk resonnering: et strukturelt aspekt og et prosessaspekt. Jeannotte og Kieran (2017) definerer *prosesser* i matematisk resonnering som kommognitive prosesser som er metadiskursive, som betyr at de avleder (eng: derive) narrativer om objekter eller relasjoner ved å utforske relasjoner mellom objekter. Narrativene som konstrueres er altså på objektnivå og utvider diskursen på objektnivå, mens prosessene er styrt av regler på metanivå. De beskriver ni prosesser i matematisk resonnering, hvorav de åtte første deles inn i to grupper. De to gruppene er prosesser relatert til *leting etter likheter og forskjeller* (beskrevet i Tabell 2.2) og prosesser relatert til *validering* (beskrevet i Tabell 2.3). Den siste prosessen, *eksemplifisering* (beskrevet i Tabell 2.1), ses som en støtte for de andre prosessene. Noe som skiller prosessene fra hverandre er den epistemiske verdien til de narrativene som konstrueres. *Epistemisk verdi* er begrepet Jeannotte og Kieran (2017) bruker for å beskrive om narrativet er sannsynlig (eng: likely/probable), sant (eng: true) eller usant (eng: false). Prosessene relatert til leting etter likheter og forskjeller avleder narrativer, og eventuelt tilordner en epistemisk verdi, mens validering defineres som en prosess som har som mål å endre den epistemiske verdien (altså sannsynligheten eller sannheten) til et matematisk narrativ (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). De mulige endringene i epistemisk verdi avhenger av metaregler i diskursen, inkludert struktur og aksepterte narrativer, noe som tilsvarer aksepterte resonneringsmåter og påstander i Stylianides et al. (2016) sin definisjon av bevis i skolen. I tabellene nedenfor gjengir og kommenterer jeg Jeannotte og Kieran (2017) sine definisjoner på de ni prosessene, og jeg gir deretter eksempler på hver prosess relatert til oppgaven elevene arbeidet med.

Tabell 2.1: Resonneringsprosessen eksemplifisering

Eksemplifisering		Epistemisk verdi
Eksemplifisering (eng: exemplifying):	En prosess som støtter andre prosesser ved å slutte (eng: infer) eksempler som hjelper til med: i. søk etter likheter og forskjeller; ii. søk etter validering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14). Eksemplifisering handler altså om å generere data som kan brukes i de andre prosessene.	ingen

Tabell 2.2: Prosesser relatert til leting etter likheter og forskjeller

Prosesser relatert til leting etter likheter og forskjeller		Epistemisk verdi
Sammenligning	En prosess som slutter, ved hjelp av leting etter likheter og forskjeller, et narrativ om matematiske objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). Spesielt det å sammenligne eksempler fremheves som nødvendig for å identifisere mønster og formulere formodninger.	ingen
Identifisering av et mønster (eng: identifying a pattern)	En prosess som, ved hjelp av leting etter likheter og forskjeller, slutter et narrativ om en rekursiv relasjon mellom matematiske objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Det å identifisere et mønster skiller seg fra generalisering og formulering av formodninger ved at mønsteret ikke nødvendigvis gjelder for en større mengde, men i utgangspunktet kun gjelder for en mengde kjente eksempler.	ingen
Generalisering	En prosess som slutter narrativer om en mengde av matematiske objekter eller en relasjon mellom objekter i mengden fra en delmengde av denne mengden (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9). Generalisering handler altså om å formulere et narrativ som gjelder for flere tilfeller enn de som danner grunnlaget for generaliseringen.	ingen
Formulering av en formodning (eng: conjecturing)	En prosess som, ved hjelp av leting etter likheter og forskjeller, slutter et narrativ om en regularitet med epistemisk verdi som er sannsynlig og som har potensiale for teoretisering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Her forstår jeg «potensiale for teoretisering» som at narrativet er mulig å bevise, noe tilsvarende Sfard (2008) sitt begrep narrativ som kan godkjennes (eng: endorsable narrative). Ifølge Sfard er en matematisk teori en mengde av godkjente narrativer. Det som skiller *formulering av en formodning* fra *generalisering* er at formodninger har en epistemisk verdi, noe som betyr at det er først når det formuleres en formodning at man fester en viss lit til narrativet.	sannsynlig
Klassifisering (eng: classifying)	En prosess som slutter, ved hjelp av leting etter likheter og forskjeller mellom matematiske objekter, et narrativ om en klasse av objekter basert på matematiske egenskaper og definisjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11).	ingen

Tabell 2.3: Prosesser relatert til validering

Prosesser relatert til validering		Epistemisk verdi
Begrunnelse (eng: justifying):	En prosess som … muliggjør endring av den epistemiske verdien til et narrativ (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12). Endringen i epistemisk verdi kan være fra sannsynlig til mer sannsynlig eller fra sannsynlig til sann eller usann. En endring fra sannsynlig til mer sannsynlig kobles til begrunnelser som skjer i forbindelse med *formulering av en formodning*, noe jeg tolker som at det i den forbindelse ofte foregår prosesser som søker å støtte en formodning, for eksempel at en formodning testes med eksempler. Metaregler i en gitt diskurs begrenser prosessen, og de presiserer at en endring til sann forutsetter en deduktiv struktur, samtidig som det er mulig med en endring til den epistemiske verdien sann uten at kravene til prosessen formulering av bevis er oppfylt.	mer sannsynlig, sann, usann
Formulering av et bevis (eng: proving):	En prosess som … endrer den epistemiske verdien til et narrativ fra sannsynlig til sann. Denne prosessen er begrenset av: i. narrativene som er akseptert av klassemiljøet (mengden av aksepterte narrativer) som er sanne (sett fra en ekspert) og tilgjengelig uten videre begrunnelse; ii. en endelig restrukturering på en deduktiv måte; iii. realiseringene (slik Sfard, 2008, side 301, bruker det) som er passende og kjente, eller tilgjengelige, for klassen. (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12) Disse tre kriteriene tilsvarer i stor grad aksepterte påstander, resonneringsmåter og representasjoner i Stylianides et al. (2016) sin definisjon av bevis i skolen. Selv om en endelig deduktiv restrukturering er et krav, trenger ikke bevis-prosessen å være deduktiv hele tiden. Realiseringene trenger ikke å være formelle, og *formulering av et bevis* kan derfor beskrive arbeid med bevis fra tidlig grunnskole, inkludert generisk argument. Sfard (2008) bruker begrepet realisering om noe som kan sanses, men som representerer noe annet. Løsningen på en likning kan realiseres som ulike forenklinger av likningen, et tall, et skjæringspunkt i et koordinatsystem eller en linje i en tabell. Realiseringer kan for eksempel være muntlige eller visuelle, ord i et naturlig språk, algebra, eller figurer og tegninger.	sann
Formulering av et formelt bevis (eng: formal proving)	En prosess som … endrer den epistemiske verdien til et narrativ fra sannsynlig til sann. Denne prosessen er begrenset av: i. narrativene som er akseptert av klassemiljøet (mengden av aksepterte narrativer) som er sanne (sett fra en ekspert) og systematisert i en matematisk teori; ii. en endelig restrukturering på deduktiv måte; iii. realiseringene som er formalisert og akseptert av klassen og matematiske miljøer. (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12) Det som skiller formelle bevis fra bevis er at de må bygge på matematisk teori og formaliserte realisasjoner (aksiomer og teoremer). Det holder altså ikke at narrativene er sanne, men de må også være en del av en bestemt matematisk teori. Formaliserte realiseringer betyr også at et generisk argument som er basert på et konkret eksempel med beskrivende narrativ i naturlig språk derfor vil være et bevis, men ikke et formelt bevis.	sann

Tabell 2.1 beskriver prosessen eksemplifisering. I min studie undersøker elevene hva som skjer med produktet av to like heltall dersom den ene faktoren reduseres og den andre faktoren økes med det samme heltallet. De undersøker altså uttrykket $(a-n)(a+n)$ for

ulike verdier av n. Når elevene regner ut $5 \cdot 5 = 25$ og $4 \cdot 6 = 24$ er dette *eksemplifisering* fordi de genererer data, et eksempel, som kan brukes i de andre prosessene.

Tabell 2.2 beskriver prosesser relatert til leting etter likheter og forskjeller, som omfatter prosessene sammenligning, identifisering av et mønster, generalisering, formulering av en formodning og klassifisering. Ved hjelp av en *sammenligning* mellom eksemplet $5 \cdot 5 = 25$ og $4 \cdot 6 = 24$ og eksemplet $8 \cdot 8 = 64$ og $7 \cdot 9 = 63$ vil elevene kunne slutte et narrativ om at differansen mellom produktene i disse to tilfellene var 1. Hvis de slutter et narrativ om at differansen mellom $a \cdot a$ og $(a - n)(a + n)$ vil være 1 for alle heltall a når $n = 1$, så har de sluttet et narrativ som har gyldighet utover de to enkelteksemplene og har dermed gjort en *generalisering*. Hvis de uttrykker en spesiell tiltro til at dette er sannsynlig, kanskje ved å sammenligne flere eksempler, så har de tilordnet en epistemisk verdi og har da gjort en *formulering av en formodning*. Hvis de forsøker med andre n og gjør en *sammenligning* av produktene $5 \cdot 5 = 25$, $4 \cdot 6 = 24$, $3 \cdot 7 = 21$ og $2 \cdot 8 = 16$, så vil de kunne se at differansen mellom to og to av disse er $1, 3, 5$. De vil da kunne gjøre *identifisering av et mønster* og slutte et narrativ om den rekursive relasjonen at når n øker med 1 så øker differansen mellom produktene med 2, for eksempel beskrevet som $a_{n+1} = a_n - (2n + 1)$ der $a_n = (a - n)(a + n)$.

Tabell 2.3 beskriver prosesser relatert til validering, som inkluderer begrunnelse, formulering av et bevis og formulering av et formelt bevis. Dersom elevene har formulert en formodning som tilsvarer $(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1$, vil de kunne teste denne ved å regne ut og se at $(5 - 1)(5 + 1) = 4 \cdot 6 = 24$ er lik $5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$, og dermed vise at formodningen stemmer når $a = 5$. Dette vil være en *begrunnelse* fordi det ikke er mulig å bevise en generell påstand ved å vise til at den stemmer for ett konkret eksempel, men det kan likevel være en endring av epistemisk verdi fra sannsynlig til mer sannsynlig. Dersom de isteden viser til at de er kjent med narrativet konjugatsetningen, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, og viser at de ved å bruke dette får $(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1^2 = a^2 - 1$, så har de ved å basere seg på et kjent og sant narrativ, vist at formodningen stemmer. Fordi de har tatt utgangspunkt i noe kjent og stegvis vist at formodningen stemmer har argumentasjonen en deduktiv struktur. Realiseringene i algebra er samtidig passende og kjente, avhengig av årstrinn. Dette er derfor *formulering av et bevis*. Formelt bevis er ikke aktuelt for denne studien, men konjugatsetningen er et narrativ systematisert innenfor algebra og realiseringen i algebra er formalisert. Beviset er derfor også *formulering av et formelt bevis*. Jeg vil vise flere eksempler på bevis i metodekapitlet når jeg beskriver oppgaven elevene jobbet med.

2.3.2 Strukturer i matematisk resonnering

Det *strukturelle* aspektet i modellen til Jeannotte og Kieran (2017) består av tre ulike strukturer som beskriver hvordan et resonnement er bygget opp: deduksjon, induksjon og abduksjon. De omtaler disse ganske kort med henvisning til at det strukturelle aspektet er mer utviklet i litteraturen enn prosessaspektet. Jeg har omtalt deduksjon i kapittel 2.1.1, og vil her beskrive induksjon og abduksjon med henvisning til noen av kildene som Jeannotte og Kieran (2017) refererer. Jeannotte og Kieran (2017) hevder at induktiv resonnering er definert ulikt i litteraturen, delvis fordi det noen steder brukes om all resonnering som ikke er deduktiv. Videre hevder de at abduksjon ofte blandes sammen med induksjon.

Ifølge Pedemonte og Reid (2011) handler både induksjon og abduksjon om å gå fra enkelttilfeller til en generell regel. De beskriver det som induksjon når det gjøres en sammenligning av flere tilfeller, for eksempel ved å systematisere data i en tabell, og på den måten oppdage et mønster. Dersom den generelle regelen isteden formuleres på bakgrunn av et enkelt tilfelle omtaler de det som abduksjon. De omtaler det også som induksjon når nye tilfeller testes for å avgjøre om regelen er korrekt. Rivera (2008) beskriver dette som en abduktiv syklus, der en hypotese formuleres, testes og eventuelt revideres på bakgrunn av moteksempler. I min studie vil det være abduksjon dersom elevene formulerer en hypotese ut fra et enkelt eksempel, dersom de ut fra eksemplet $4 \cdot 4 = 16$ og $3 \cdot 5 = 15$ foreslår at $(n-1)(n+1) = n \cdot n - 1$. Dersom de gir flere eksempler, sammenligner dem og ser at i alle tilfellene er det andre produktet én mindre enn det første, vil det være induksjon.

2.4 Oppsummering av rammeverk for analyse

Forskningsspørsmålet for denne studien er: Hva kjennetegner en gruppe 10.-trinnelevers deltakelse i en matematisk diskurs av resonnering og bevis? For å svare på dette spørsmålet har jeg observert elevers arbeid med undersøkelser i multiplikasjon. Med utgangspunkt i åpen koding av datamaterialet vil jeg i kapittel 4 analysere elevenes deltagelse ved hjelp av Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk og Jeannotte og Kieran (2017) sitt rammeverk for matematisk resonnering. I dette avsnittet gir jeg en oversikt over mitt analytiske rammeverk.

I analysen betrakter jeg Jeannotte og Kieran (2017) sitt rammeverk for matematisk resonnering som en utdyping av Sfard (2008) sine begrep konstruksjons- og underbyggingsrutiner. Som presentert tidligere, definerer Jeannotte og Kieran (2017) matematisk resonnering som noe som avleder narrativer fra andre narrativer, og de hevder at prosessene i matematisk resonnering er metadiskursive og begrenses av regler på metanivå.

De bruker ikke begrepet rutine, men Sfard (2008) beskriver bevis som en måte å underbygge narrativer på, og hun beskriver underbyggingsrutiner og underbygging av narrativer som prosesser. Slik jeg ser det er det altså overlapp mellom prosessene i modellen til Jeannotte og Kieran (2017) og rutiner slik Sfard beskriver dem. Jeg vil derfor beskrive elevenes arbeid med *leting etter likheter og forskjeller* samt *eksemplifisering* som konstruksjonsrutiner, og elevenes arbeid med *validering* som underbyggingsrutiner. Jeannotte og Kieran (2017) skriver at det strukturelle aspektet kan kobles til det Sfard (2008) beskriver som regler for konstruksjon av narrativer, blant annet at et matematisk bevis til slutt må struktureres deduktivt. Sfard beskriver altså deduksjon, induksjon og abduksjon, i forbindelse med konstruksjon, ikke underbygging. Fordi underbygging også konstruerer narrativer, både ved at deduksjon vil føre fram til konstruksjon av narrativet som skal bevises, og fordi beviset i seg selv er et narrativ, kan det strukturelle aspektet også benyttes for å beskrive underbygging av narrativer. Min kombinasjon av de to rammeverkene er vist i Tabell 2.4 nedenfor. Tabellen viser hvordan begreper fra Sfard (2008), i venstre kolonne, henger sammen med begreper fra Jeannotte og Kieran (2017), i kolonnene til høyre.

Tabell 2.4: Jeannotte og Kieran (2017) som en utdyping av Sfard (2008)

<table>
<tr><th>(Sfard, 2008)</th><th colspan="3">(Jeannotte & Kieran, 2017)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Metaregler for konstruksjon av narrativer</td><td colspan="2">Deduksjon</td><td rowspan="3">Struktur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Induksjon</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abduksjon</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Konstruksjonsrutiner</td><td colspan="2">Eksemplifisering</td><td rowspan="9">Prosess</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Leting etter likheter og forskjeller</td><td>Identifisering av et mønster</td></tr>
<tr><td>Sammenligning</td></tr>
<tr><td>Generalisering</td></tr>
<tr><td>Formulering av en formodning</td></tr>
<tr><td>Klassifisering</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Underbyggingsrutiner</td><td rowspan="3">Validering</td><td>Begrunnelse</td></tr>
<tr><td>Formulering av et bevis</td></tr>
<tr><td>Formulering av et formelt bevis</td></tr>
</table>

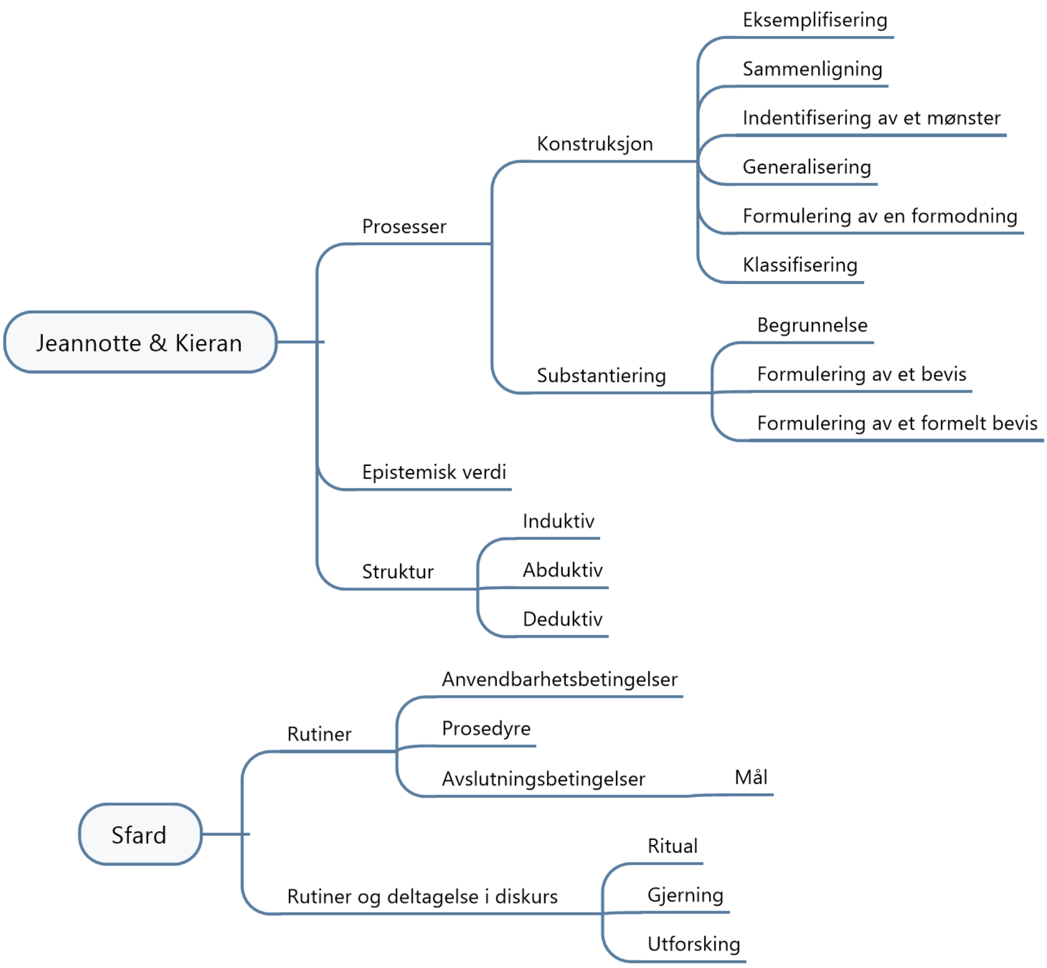
Sfard (2008) beskriver konstruksjon og underbygging som utforskende rutiner, og gir bevis som et eksempel på en matematisk utforskningsrutine. Å se prosessene i matematisk resonnering som utforsking gir mening fordi definisjonen på matematisk resonnering er å avlede narrativer, og utforsking kjennetegnes av at målet er konstruksjon av narrativer. Samtidig mener jeg at elevene kan utføre ritualer som kan beskrives av prosessene i matematisk resonnering, dersom det for elevene ikke er konstruksjon og underbygging av narrativer som er målet med rutinen. Jeg har derfor valgt å koble prosessene i Jeannotte og Kieran (2017) sin modell til konstruksjonsrutiner og underbyggingsrutiner uavhengig av om rutinen kan beskrives som utforsking, gjerning eller ritual. Det betyr at jeg vil beskrive elevenes rutiner som konstruksjonsrutiner og underbyggingsrutiner, og så analysere om rutinene kan ses som utforsking, gjerning eller ritual. Dette er tilsynelatende i konflikt med Sfard sin beskrivelse av konstruksjon og underbygging som utforskende rutiner, men slik jeg oppfatter Sfard (2008), er det å beskrive rutiner som utforsking, gjerning eller ritual uavhengig av hvordan en rutine utføres, og kun avhengig av elevens oppfatning av målet. For eksempel gir Sfard (2008) numerisk beregning som et eksempel på en utforskende rutine, samtidig som hun andre steder hevder at numerisk beregning slik som 86 + 37 vil være utforsking, gjerning eller ritual avhengig av elevens mål med rutinen. Det å finne svaret på 86 + 37 kan være utforsking dersom målet er et narrativ om tallene, slik som «86 + 37 = 123», eller det kan være et ritual dersom eleven utfører en prosedyre kun fordi hun tror det er forventet, altså at målet er sosial aksept.

Jeg analyserer elevenes deltagelse ved å identifisere hvilke prosesser i Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering elevene deltar i. Jeg tar også i bruk det strukturelle aspektet for å beskrive elevenes resonnering som deduktiv, induktiv eller abduktiv. For å identifisere prosesser tar jeg også i bruk begrepet epistemisk verdi for å beskrive om elevene ser ut til å anse et narrativ for sannsynlig, sann eller usann, eller om de ikke ser ut til å ha tilordnet en epistemisk verdi.

Videre vil jeg i denne studien vil jeg se på elevenes felles diskurs av resonnering og bevis i det øyeblikket de observeres. Dette er ikke en anerkjent eller veldefinert diskurs, men det er disse elevenes felles handlingsmønstre i møte med denne oppgaven og situasjonen. Kommognitiv forskning handler om å lete etter diskursive mønstre og beskrive metareglene som definerer elevenes rutiner (Sfard, 2008, s. 200, 208), noe som vil si at et spesielt fokus vil være å identifisere anvendbarhetsbetingelser, prosedyre og avslutningsbetingelser for elevenes rutiner for resonnering og bevis.

Utforskende deltagelse i diskursen er målet, men Sfard (2008) påpeker at ritualer oftest vil være et nødvendig steg på veien. Det vil derfor være interessant å undersøke om elevenes deltagelse i diskursen ser ut til å være ritualisert eller viser tegn til å være utforskende. Spesielt avslutningsbetingelsene er interessante, og da i form av hva som kan tolkes som målet med aktiviteten, fordi de avgjør om rutiner kan tolkes som utforsking, gjerning eller ritual. Hvis det ser ut til at målet for eleven er å lære noe nytt om den matematiske verden er aktiviteten kanskje en type utforsking, men dersom elever kun ser ut til å forsøke å tilpasse seg sosialt så er handlingene kanskje heller ritual.

I praksis kan det være vanskelig å skille mellom ritual og utforsking, og Sfard (2008) hevder at det vil være nødvendig å se på når rutinen benyttes, hvem som involveres, hvor fleksibel rutinen er og om den som utfører den er i stand til å underbygge rutinen på en akseptabel måte. Dersom rutinen er situert, altså at den har begrenset anvendbarhet, og dersom rutinen utføres med hjelp fra andre eller for andre, vil det være tegn på ritual, og dersom rutinen er fleksibel og kan tilpasses situasjonen er det tegn på utforsking. Dersom rutinen er avhengig av at andre aksepterer resultatet er det tegn på ritual, mens det er tegn på utforsking dersom eleven selv har en måte å underbygge narrativet uavhengig av andre mennesker. Figur 2.2 oppsummerer begrepene i rammeverket jeg vil benytte i analysen.



Figur 2.2: Rammeverk for analyse

Det er viktig å presisere at det ikke er mulig å avgjøre hva som kan være relativt stabilt over tid i handlingsmønsteret til disse elevene basert på kun noen få episoder. Det er altså ikke mulig å beskrive disse elevenes rutiner basert på denne studien, men det er mulig å si noe om hva disse elevene gjør i akkurat denne situasjonen. Til tross for at det ikke er mulig å si om dette vil være stabilt over tid i tilsvarende situasjoner, mener jeg at Sfard sine begreper kan benyttes for å beskrive kjennetegn på elevenes deltagelse i denne situasjonen som kilde til refleksjon om årsaker, og om muligheter og utfordringer for undervisning av og med resonnering og bevis. Det som ikke er mulig er å si noe om, er hvordan disse elevene, eller andre elever, vil delta i en diskurs i lignende eller andre situasjoner senere. Jeg vil i kapittel 3 gå nærmere inn på de muligheter og begrensninger som følger av mine metodiske valg, men for å ytterligere plassere studien i det matematikkdidaktiske forskningsfeltet vil jeg først gi en oversikt over tidligere forskning på elevers arbeid med resonnering og bevis.

2.5 Tidligere forskning på elevers arbeid med resonnering og bevis

Jeg vil her gjøre rede for tidligere forskning på elevers arbeid med resonnering og bevis. Jeg har funnet lite forskning på elevers deltagelse i diskurs av resonnering og bevis som benytter kommognisjon som teoretisk rammeverk, noe som også er en del av begrunnelsen for min studie. Det finnes likevel forskning som sier noe om elevers arbeid med resonnering og bevis, og som grunnlag for en diskusjon av mine funn presenterer jeg her et lite utvalg relevante funn fra tidligere forskning.

2.5.1 Elevers utfordringer

Det er gjort flere oversiktsstudier om resonnering og bevis i skolen og jeg vil her referere noen resultater relatert til elevers utfordringer i arbeid med resonnering og bevis.

Mariotti (2006) viser til store undersøkelser fra årtusenskiftet og hevder at det viktigste resultatet derfra er at elever har problemer med å skille mellom matematiske begrunnelser basert på et teoretisk system og begrunnelser på bakgrunn av sunn fornuft med empiriske argumenter. Det viser seg at elever ikke nødvendigvis godtar at et deduktivt resonnement beviser, men vil bekrefte beviset ved å sjekke med eksempler.

I en nyere gjennomgang av forskning på undervisning og læring av bevis beskriver Stylianides et al. (2017) flere utfordringer elever har med bevis, hvorav to er spesielt relevante for min studie. Det ene er at elever og lærere lar seg overbevise av empiriske argumenter som bevis for generaliseringer, både i egen argumentasjon og i vurdering av andres argumenter. De ser altså ofte ett enkelt eksempel som bevis for at en påstand gjelder i alle tilfeller. Det andre er at elever og lærere ikke blir overbevist av et matematisk bevis. Elevene blir ofte ikke overbevist om at et deduktivt bevis viser at påstanden holder for alle tilfeller, men de blir heller ikke overbevist om at påstanden er motbevist ved hjelp av ett enkelt motbevis, og de betrakter derfor moteksemplet som et spesialtilfelle.

Stylianides og Stylianides (2018) drøfter tiltak mot viktige utfordringer elever har med bevis. De tar utgangspunkt i misoppfatninger om viktige aspekter ved bevis som har vist seg å være vanlige og også vanskelig å gjøre noe med, og gir to eksempler: At et enkelt moteksempel ikke er tilstrekkelig for å motbevise en uriktig matematisk generalisering, og at noen få bekreftende tilfeller er nok til å bekrefte sannheten til matematisk generalisering. Spesielt det siste, at mange elever gir eksempler når de blir bedt om å bevise en generell påstand og at elever ofte anser empiriske argumenter som bevis, hevder de er grundig dokumentert.

Yackel og Hanna (2003) hevder at en grunn til at bevis er utfordrende er at resonnering i det daglige er veldig ulik matematisk resonnering, der det er viktig å være tydelig på forutsetninger og slutningsregler. For eksempel kan intuisjon føre til at elevene ikke ser noen grunn til å bevise en påstand. De viser også til forskning som viser at elever ikke ser et behov for å bevise påstander.

Litteraturen referert til her omtaler ulike aldersgrupper og både elever og lærere, og det er omfattende å gjøre rede for hvilke resultater som stammer fra hvilke klassetrinn. Det ser likevel ut til at de samme utfordringene går igjen fra tidlig i barneskolen og opp til universitetsnivå. For eksempel hevder Stylianides og Stylianides (2009) at elevers tilbøyelighet til å bruke og akseptere empirisk argumentasjon er funnet både hos skoleelever og universitetsstudenter, inkludert elever som tar avanserte matematikkfag og studenter som studerer matematikk.

Stylianides et al. (2017) har to kommentarer til den forskningen som er gjort på elevers arbeid med bevis. For det første er det ikke sikkert at de argumentene som elever og lærere selv gir eller vurderer viser hele bildet av hva de kan om bevis. Det er forskning som viser at det er enklere å vurdere argumenter enn å argumentere selv, og at det kan være enklere å se at ugyldige argumenter er ugyldige, enn å se at gyldige argumenter er gyldige. For det andre påpeker de at det ikke er klart om matematikere er enige om hva som kjennetegner et akseptabelt bevis, noe de hevder krever en mer nyansert forståelse av matematisk praksis.

Til tross for utfordringene som er funnet presenterer Yackel og Hanna (2003) en gjennomgang av studier som viser at elever helt ned i barnetrinnet kan jobbe med å utvikle og teste formodninger med både induktiv og deduktiv resonnering. De presiserer likevel at det å skape en atmosfære i klasserommet der det er naturlig å jobbe med matematisk resonnering er komplekst, og at disse studiene gjerne er utført med en forsker som lærer eller etter grundige forberedelser med klassens lærer. Det viser likevel at det kan være mulig for svært unge elever å arbeide med resonnering og bevis.

2.5.2 Bruk av eksempler

Som beskrevet over er det veldokumentert at elever gjerne bruker enkelteksempler for å begrunne generelle påstander (Stylianides & Stylianides, 2018). Stylianides et al. (2016) har sett på hvordan eksperter og nybegynnere bruker eksempler i arbeid med argumentasjon og bevis, spesielt hvordan eksempler kan være en produktiv del av argumentasjon og bevis. Et funn nyanserer elevers tilbøyelighet til å godta eksempler som bevis ved at det kanskje kan være at elever generelt godtar påstander som sanne så lenge det ikke er bevist at de er usanne. Et annet funn de refererer til er fra Morselli (2006), om at utforsking av eksempler kan være produktivt, så lenge det er fokusert og målrettet. Morselli (2006) fant at utforsking av mange numeriske eksempler kunne hjelpe elevene til et bevis dersom det inkluderte refleksjon over grunnene til at hypotesen er sann, men dersom eksemplene ble brukt på en tilfeldig måte uten en klar metode, så det ikke ut til å hjelpe elevene fram mot et bevis.

2.5.3 Elevers deltagelse i diskurs av resonnering og bevis

Jeg har funnet lite litteratur om elevers deltagelse i diskurs av resonnering og bevis som baserer seg på kommognisjon. Jeg brukte en database over forskningslitteratur som heter Scopus[3], fordi den ga meg kontroll over søkeprosessen. Jeg undersøkte at Scopus søker i alle engelskspråklige[4] tidsskrifter rangert som A*, A og B i Törner og Arzarello (2013) sin oversikt over anerkjente tidsskrifter innenfor forskning på matematikkundervisning. Jeg søkte i feltene tittel, sammendrag og nøkkelord etter kombinasjoner av søkeordene proof, reasoning, commognition, commognitive. Jeg filtrerte også ut referanser med nøkkelordene proof, proving og reasoning fra artikler som siterer boka til Sfard (2008) og to andre sentrale artikler av Sfard (2001, 2007), og jeg har søkt etter artikler som refererer Jeannotte og Kieran (2017) og Lavie et al. (2018). Jeg finner totalt 25 artikler, men de fleste omhandler ikke resonnering og bevis slik jeg bruker det i denne studien, eller de refererer Sfard av andre grunner enn å bruke rammeverket. Det var to artikler som hadde sett på resonnering og bevis i klasserommet (Blanton & Stylianou, 2014; Martin, McCrone, Bower & Dindyal, 2005) og en artikkel som så på elevers arbeid med en oppgave om sinus-funksjoner ved hjelp av Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering og ser på elevenes deltagelse i en diskurs (Carlsen, 2018), men denne studien var ikke rettet mot resonnering og bevis. Den eneste

[3] https://www.scopus.com
[4] Scopus søker ikke i «Recherches en Didactique des Mathématiques»

artikkelen som jeg fant med relevans for min studie var Remillard (2014) sin studie av universitetsstudenter som arbeider i par med bevisoppgaver. Hun hevder at diskusjon i små grupper kan egne seg for å utfordre studenters tilbøyelighet til være avhengig av andres bekreftelse i arbeid med bevis, men at dette krever en aktiv lærer som tar utgangspunkt i hvordan studentene har arbeidet. I arbeidet fant hun bestemte intervensjonspunkter i studentenes arbeid der de kunne ha en spesiell fordel av støtte av en lærer, noe hun kaller for intervensjonspunkter (eng: discursive entry points). Hun identifiserer tre slike intervensjonspunkter:

1. Etter at studentene har startet på det som ser ut som et overbevisende argument, har de problemer med å vise dette. Etter at de har gått et par runder med samme type argumenter kommer de ikke videre. De forsøker å bruke noe de kan fra før (ad hoc-rutiner), men kommer ikke videre.
2. Studentene brukte uklart språk ved å snakke om «den» og «ting», noe som ga utfordringer i kommunikasjonen.
3. Studentene stilte spørsmål til hverandre som ikke ble håndtert, men som kunne hjulpet dem i arbeidet dersom de hadde jobbet med dem.

3 Metode

Jeg har i denne studien undersøkt kjennetegn på elevers deltagelse i en diskurs av resonnering og bevis. For å kunne svare på det, har jeg observert elever som jobber sammen om en oppgave om sammenhenger i multiplikasjon. Jeg har gjort opptak av elevenes arbeid og gjort en åpen koding av datamaterialet. Datamaterialet er videre analysert ved hjelp av rammeverkene til Jeannotte og Kieran (2017) og Sfard (2008). Jeg starter med å beskrive noen metodiske konsekvenser av kommognisjon, før jeg beskriver utvalg, metode for datainnsamling, oppgaven som ble gitt til elevene og metode for analyse. Jeg vil avslutte med å gjøre rede for etiske vurderinger, samt en vurdering av studiens troverdighet.

3.1 Metodiske konsekvenser av kommognisjon

Valget av kommognisjon som overordnet teoretisk rammeverk påvirker også metodiske valg, og Sfard (2008) beskriver flere metodiske konsekvenser av kommognisjon. Først og fremst betyr det at det er diskursen slik den praktiseres av en bestemt gruppe som er fokus for forskningen. Det er dermed det som blir sagt og gjort som analyseres. Dette har også påvirket at forskningsspørsmålet handler om hvordan elevene deltar i diskursen, altså hva de sier og gjør. Sfard (2008, 2012) skriver at det ikke er mulig å observere elevenes kommunikasjon med seg selv (tenkning), men at deltagelsen i diskursen kan benyttes for å bygge opp én mulig tolkning av den helhetlige diskursen som inkluderer både deltagernes kommunikasjon med seg selv (tenkning) og kommunikasjon med hverandre (dialog). Det er denne helhetlige diskursen som er fokus for min undersøkelse, gjennom en analyse av deltagelse (dialogen, det som blir sagt og gjort). Deltagelse i diskursen er et resultat av en samhandling mellom deltagerne. Derfor må hele dialogen refereres og analysers, noe som betyr at det ikke er tilstrekkelig at innholdet refereres som forskerens gjenfortelling, eller at én persons deltagelse refereres uavhengig av andre deltagere. Det betyr også at forskerens tilstedeværelse ikke er mulig å se bort fra, og at helt ikke-deltagende observasjon dermed ikke er mulig. Forskeren kan i beste fall ses som minimalt deltagende, fordi forskerens tilstedeværelse nødvendigvis vil påvirke elevenes deltagelse i diskursen slik de vil påvirke hverandres deltagelse.

3.2 Metode for datainnsamling: Observasjon

En grunnleggende konsekvens av valget av kommognisjon som overordnet teoretisk rammeverk er at det er diskurser som er fokus for forskningen (Sfard, 2008). Enhet for analyse i denne studien er elevenes felles diskurs slik den praktiseres i arbeid med en oppgave om resonnering og bevis uten støtte fra en lærer. Metode for datainnsamling i ble dermed observasjon av det elevene sa og gjorde i arbeid med resonnering og bevis. Jeg valgte å sette sammen elever i små grupper av to grunner. For det første er elevenes tenkning (kommunikasjon med seg selv) vanskelig å observere, så jeg valgte i likhet med Sfard (2008) å se på det som ble sagt og gjort i interaksjon med andre. For det andre er deltagelse i en felles diskurs et resultat av en samhandling mellom deltagerne, slik at det i seg selv var interessant å se hvordan elevene deltok i en diskurs sammen med andre.

Sfard (2008, 2012) legger som nevnt stor vekt på detaljert og korrekt gjengivelse av det elevene sier og gjør, noe som gjør det nødvendig med opptak av samtalen for å kunne transkribere mest mulig korrekt. Lyd- og videoopptak gir ifølge Sfard (2008) også bedre mulighet for å finne alternative tolkninger i forbindelse med analysen, fordi det gir mulighet til å se hendelser på nytt. Jeg valgte å bruke videoopptak fordi det gir mulighet til å se ansiktsuttrykk og gestikulering som bidrag til å forstå hva elevene uttrykker, og det gir mulighet til å observere bruk av hjelpemidler. Jeg valgte i tillegg til video å ta lydopptak for å ha en sikkerhet i tilfelle feil eller dårlig lyd på videoopptakene.

Ifølge Cohen, Manion og Morrison (2017) er det flere utfordringer knyttet til planlegging av observasjon som metode for datainnsamling. Et av spørsmålene de stiller er hvor deltagende observatøren skal være. Hensikten med min studie var å beskrive elevenes nåværende diskurs, ikke å bidra til utvikling av diskursen som lærer, og jeg valgte derfor i minst mulig grad å være deltager i aktiviteten. Cohen et al. (2017) hevder videre at de fleste observasjoner foretatt av utdanningsforskere gjøres i naturlige omgivelser, for eksempel i elevenes klasserom, men at det kan være fordeler med et «laboratoriemiljø» fordi det gir forskeren muligheten til å kontrollere miljøet. Jeg så ikke at jeg hadde behov for å kontrollere miljøet og jeg ønsket en situasjon som var så nært som mulig en klasseromssituasjon. Praktiske utfordringer ved at jeg kun hadde tilgang på ett videokamera gjorde likevel at jeg bare kunne observere én gruppe av gangen, og jeg tok derfor en og en gruppe ut på et grupperom. Jeg vurderte at dette kunne være problematisk fordi elevene kunne oppleve dette som en enda mer kunstig situasjon enn et klasserom med videokamera, og at de derfor vil være mer konsentrert om oppgaven enn elever vanligvis er i en klasseromssituasjon med forstyrrelser fra medelever. Jeg valgte derfor å se bort fra muligheten til for eksempel å analysere elevenes fokus på oppgaven. Det var også mulig at de ville være mer utholdende når de ikke ble påvirket av medelevers framdrift på oppgavene. Samtidig så jeg ikke dette som noe vesentlig problem for studien, fordi det uansett ville være mulig å beskrive kjennetegn ved elevenes arbeid med resonnering og bevis, og at både min tilstedeværelse og det at det ble gjort opptak uansett ville påvirke elevenes arbeid.

Jeg plasserte elevene på hver sin side av et bord slik at de kunne snakke med hverandre. Lydopptaker lå på bordet og videokamera stod på stativ ved enden av bordet, og zoomet inn på elevene og det som foregikk på bordet. Jeg vurderte fast montert videokamera som minst forstyrrende, samtidig som jeg fikk med tilstrekkelig av elevenes ansiktsuttrykk og håndbevegelser som hjelp til å analysere hva de snakket om. Blanke ark, penner i ulike farger og en enkel kalkulator var tilgjengelig på bordet slik at de selv kunne velge hva de ønsket å bruke. For å redusere min påvirkning og muligheten for at elevene henvendte seg til meg, eller tolket eventuelle ubevisste signaler fra meg, satt jeg i et hjørne av rommet litt bortenfor elevenes bord. Før jeg startet opptaket gjentok jeg informasjon om behandling av personopplysninger og deres rettigheter i den forbindelse, som også fremgikk av samtykkeskjemaet som jeg kommer nærmere inn på under omtalen av forskningsetikk i kapittel 3.6. Jeg ville i minst mulig grad påvirke arbeidet deres, men fordi det var vesentlig for studien at de gjorde forsøk på å begrunne, gjorde jeg dem oppmerksomme på at det var viktig at de begrunnet forslagene sine, at de skrev ned forslagene, at de forklarte hvorfor, at de overbeviste hverandre, og at de laget en «plakat» på et eget ark som kunne vært brukt for å overbevise klassen.

3.3 Utvalg

Beslutninger om utvalg er avhengig av hensikten med studien (Cohen et al., 2017), og det er ulike meninger om i hvilken grad det er mulig å generalisere resultater fra kvalitativ forskning (Miles et al., 2014). Hensikten med denne studien er å beskrive kjennetegn på en gruppe elevers arbeid med resonnering og bevis. Målet er ikke å forsøke å beskrive hva alle, eller de fleste elever gjør, men å beskrive i detalj hva noen elever gjør i en gitt situasjon. Dette kan danne grunnlag for videre refleksjoner og forskning om muligheter og utfordringer med resonnering og bevis i skolen. Jeg valgte derfor å gå i dybden på noen få elevers arbeid ved hjelp av en kvalitativ studie, framfor å forsøke å designe en studie som eventuelt kunne si noe om en større populasjon. Internasjonal forskning viser at det har vært lite fokus på bevis i grunnskolen (bl.a. Knuth, Choppin & Bieda, 2009), men at det bør være en del av hele skoleløpet (bl.a. Kilpatrick et al., 2001; Knuth et al., 2009; Yackel & Hanna, 2003) og norske læreplaner har også hatt lite fokus på resonnering og bevis i grunnskolen (Utdanningsdirektoratet, 2013). Jeg har derfor ønsket å se på hva norske elever gjør med slike oppgaver ved avslutning av grunnskolen, og har valgt å undersøke elever på 10. trinn.

Valg av skole, klasse og enkeltelever var videre styrt av tilgjengelighet. Jeg sendte en henvendelse til rektor på en ungdomsskole i utkanten av en middels stor by på Østlandet og fikk kontakt med en matematikklærer. Jeg informerte læreren om prosjektet og presenterte prosjektet for klassen. For å sikre tilstrekkelig datamateriale ønsket jeg å observere minst to grupper, men jeg valgte å informere hele klassen. Dette for at alle skulle føle seg inkludert og for å øke muligheten for å få tilstrekkelig mange deltagere. Tolv elever takket ja til å være med på prosjektet og læreren delte inn elevene i fire grupper á tre elever. Selv om jeg ikke nødvendigvis trengte fire grupper valgte jeg å observere alle gruppene, fordi elevene som hadde skrevet under samtykkeskjema ga uttrykk for å være ivrige etter å delta. Jeg la ingen føringer på gruppesammensetningen, men sa meg enig med læreren i at det var en fordel at elevene var trygge på hverandre og at læreren satt sammen elever som hun trodde ville snakke en del i en slik situasjon. Cohen et al. (2017, s. 310) foreslår at forskere bruker tid på å bli kjent, så for at elevene skulle bli vant med å ha meg i nærheten og kanskje i mindre grad bli forstyrret av min tilstedeværelse, fikk jeg delta i to undervisningstimer som hjelpelærer.

Av de fire gruppene valgte jeg ut de to første for analyse. Datamengden i kvalitativ forskning er ofte stor (Cohen et al., 2017) og begrensningen til to av gruppene var av hensyn til overkommelig datamengde i analysen. Da de to første gruppene så ut til å vise deltagelse i resonnering og bevis valgte jeg disse. Dette gjør ikke elevene representative, men det gjør det mulig å si noe om kjennetegn ved noen elevers arbeid med resonnering og bevis.

3.4 Oppgavene til elevene

For å studere elevers arbeid med resonnering og bevis, måtte oppgaven elevene skulle jobbe med og formuleringen av den lede til arbeid med resonnering og bevis. Jeg satte derfor opp tre kriterier for valg av oppgave. Det første kriteriet var at den måtte være enkel nok til at de vil kunne løse den, altså at den kunne løses med den kompetansen som er naturlig å forvente at elevene har på dette tidspunktet i sin utdanning. Dette betydde også at utfordringene i oppgaven skulle være på resonnering og bevis, og ikke på andre matematiske tema og oppgaven måtte derfor dreie seg om et kjent tema. Det andre kriteriet var at oppgaven skulle gi mulighet til både å oppdage sammenhenger, formulere hypoteser og bevise disse, altså ikke bare at de skulle bevise fremsatte påstander. Dette er i tråd med Stylianides (2008) sin anbefaling om å la elever jobbe med alle aktivitetene innenfor resonnering og bevis, fordi det har en verdi i seg selv, fordi arbeid med å fremsette formodninger støtter arbeidet med bevis og fordi det kan gi mer mening for elevene å skulle bevise noe de selv har oppdaget. Det tredje kriteriet var at det skulle være naturlig å bruke ulike representasjoner i arbeid med bevis, ved at jeg hadde tro på at elevene kunne anvende aritmetiske argumenter, visuelle argumenter og algebra i sitt arbeid med oppgaven.

Oppgaven ble utarbeidet etter inspirasjon fra en oppgave i Van de Walle, Karp og Bay-Williams (2013) og er gjengitt i Figur 3.1 nedenfor. Oppgaven tar utgangspunkt i multiplikasjon av hele tall og burde derfor være enkel nok for elever på 10. trinn, og multiplikasjon av hele tall burde heller ikke være så utfordrende at det ville ta fokus bort fra resonnering og bevis. For å oppfordre til formulering av hypoteser ble oppgaven formulert slik at elvene ble bedt om å undersøke hva som skjer, skrive ned hva de fant og vurdere om det alltid vil være slik. Tanken med formuleringen «vil det alltid være slik?» var at elevene skulle begrunne hypotesen sine, men tidligere studier på generalisering har vist at elevene ofte ikke vil begrunne generaliseringene sine i arbeid i små grupper (Lannin, 2005). Jeg kunne brukt ordet bevis i oppgaveformuleringen, men ordet bevis brukes ikke i læreplanen i grunnskolen (Utdanningsdirektoratet, 2013), og fordi jeg er interessert i elevenes nåværende diskurs og derfor ikke ville undervise dem, valgte jeg en annen formulering for å forsøke å få elevene til å bevise. Ordene argumentasjon og argumentere brukes i omtalen av grunnleggende ferdigheter, men heller ikke dette brukes i kompetansemålene. Ordet grunngje (begrunne) brukes i forbindelse med geometri i kompetansemålene etter 10. trinn, men jeg var også usikker på om det ville føre til arbeid med bevis. For å forsøke å tvinge fram begrunnelser valgte jeg formuleringer inspirert av Stylianides og Al-Murani (2010) sin definisjon av bevis for bruk i skolen. De har som sine viktigste punkter at et bevis skal overbevise, ikke bare en selv eller en venn, men også en skeptiker, og at det skal hjelpe noen å forstå hvorfor en påstand er sann (s. 24). Jeg valgte derfor å formulere oppgaven slik at de skulle overbevise «hverandre» (venn) om «hvorfor», og så vise på et ark hvordan de kan overbevise «resten av klassen» (skeptiker).

Velg to <u>like</u> heltall og multiplisere (gange) dem med hverandre.

Hva skjer hvis dere øker det ene tallet med 1 og reduserer det andre tallet med 1, og så multipliserer dem?

Skriv ned hva dere har funnet ut.
Vil det alltid være slik?
Overbevis hverandre om hvorfor det er slik.

Vis på et ark hvordan dere kan overbevise resten av klassen.

Hva skjer hvis dere øker/reduserer tallene med mer enn 1?

Skriv ned hva dere har funnet ut.
Vil det alltid være slik?
Overbevis hverandre om hvorfor det er slik.

Vis på et ark hvordan dere kan overbevise resten av klassen.

Figur 3.1: Oppgavene til elevene

Nedenfor har jeg vist noen mulige måter elevene kunne tenkes å jobbe med oppgaven, inspirert av Reid og Vargas (2018), Balacheff (1988) og Stylianides (2007a) som viser hvordan bevis kan se ut i skolen.

3.4.1 Den første oppgaven

Den første oppgaven går ut på å velge to like heltall og så se hva som skjer i multiplikasjon når det ene tallet økes med 1 og det andre tallet reduseres med 1. Dette tilsvarer å sammenligne $a \cdot a = a^2$ og $(a+1)(a-1)$. Ved å prøve et par eksempler er det mulig å oppdage at det andre produktet er 1 mindre enn det første, altså at $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$.

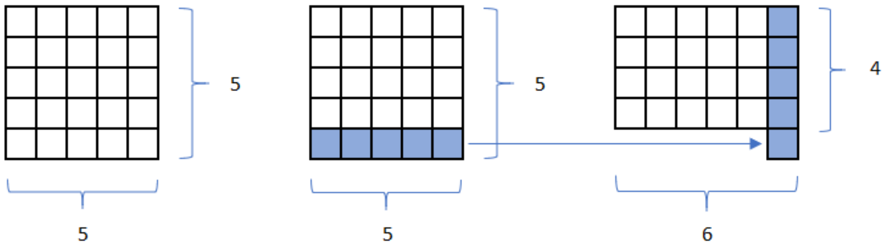
Påstanden kan bevises med algebra ved å legge til grunn den distributive egenskapen til multiplikasjon og regning med potenser som aksepterte narrativer. Dette beviset er deduktivt ved at $a^2 - 1$ sluttes fra $(a+1)(a-1)$ gjennom tre korrekt utførte steg:

$$(a+1)(a-1) = a^2 - a + a - 1^2 = a^2 - 1^2 = a^2 - 1$$

Læreplanen inneholder målet «behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knyte uttrykka til praktiske situasjonar, rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningane» (Utdanningsdirektoratet, 2013), så elevene skal senest i løpet av året ha jobbet med slike uttrykk, men det er ikke kjent for meg om disse elevene har jobbet med det.

Påstanden kan også bevises, for naturlige tall, ved hjelp av en arealmodell for multiplikasjon. Jeg antok at det var mest naturlig at elevene ville starte med et kvadrat og se hva som skjer når det gjøres om til et rektangel. Med utgangspunkt i eksemplet $5 \cdot 5 = 25$, vist i Figur 3.2

nedenfor, kan de da vise at $6 \cdot 4$ er én mindre. $5 \cdot 5$ kan representeres som et kvadrat med fem kolonner og fem rader, og $6 \cdot 4$ kan representeres som et rektangel med seks kolonner og fire rader. Dersom vi tar bort en rad av fem ruter, roterer den og legger den til som en ny kolonne, så ser vi av Figur 3.2 at vi har dannet rektanglet $6 \cdot 4$, men med én rute til overs. Det blir én rute til overs fordi den nye høyden på fire er én mindre enn den opprinnelige bredden på fem. For at dette eksemplet skal gi et generisk bevis må jeg påpeke at resultatet gjelder generelt, og ikke bare i dette tilfellet (Reid & Vargas, 2018). Det vil alltid være én rute til overs, uavhengig av størrelsen på det opprinnelige kvadratet, fordi høyden på den kolonnen som legges til alltid vil være én mindre enn bredden på raden som tas bort.



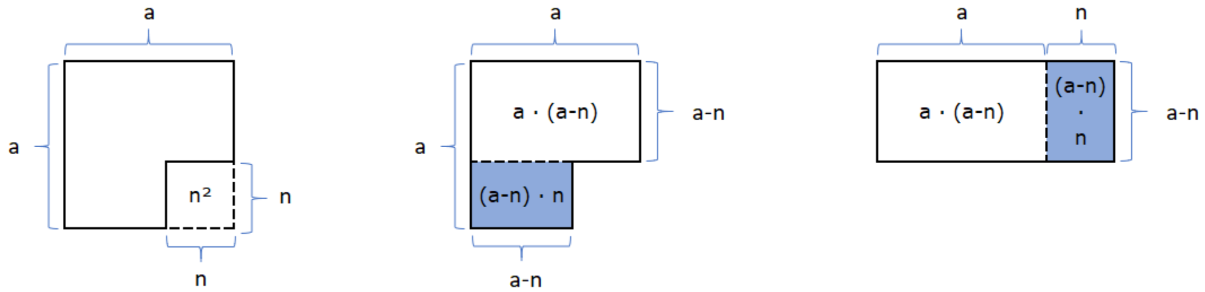
Figur 3.2: Generisk eksempel for $5 \cdot 5 = 6 \cdot 4 + 1$

3.4.2 Den andre oppgaven

Den andre oppgaven tilsvarer å sammenligne $a \cdot a = a^2$ med $(a+n)(a-n)$ der $n > 1$. Ved å prøve noen eksempler vil det være mulig å se at det andre produktet er n^2 mindre enn det første, tilsvarende $(a+n)(a-n) = a^2 - n^2$. Hvis man kun prøver tilfeller der $n = 2$ vil man se at produktet er 4 mindre, noe som kan føre til at elevene foreslår at det andre produktet er enten $n + n$ eller $n \cdot n$ mindre enn det første produktet. Påstanden $(a+n)(a-n) = a^2 - (n+n)$ kan motbevises ved et moteksempel, for eksempel $(5+3)(5-3) = 8 \cdot 2 = 16 \neq 5^2 - (3+3) = 25 - 6 = 19$. Det er flere måter å bevise påstanden $(a+n)(a-n) = a^2 - n^2$. Ved igjen å legge til grunn den distributive egenskapen til multiplikasjon og regning med potenser som aksepterte narrativer, vil algebra gi dette beviset:

$$(a+n)(a-n) = a^2 - an + an - n^2 = a^2 - n^2$$

Påstanden kan også bevises, for naturlige tall, ved hjelp av en arealmodell for multiplikasjon. I Figur 3.3 tar jeg utgangspunkt i $a^2 - n^2$ representert ved kvadratet a^2 med et kvadrat n^2 skåret bort i det ene hjørnet. Den første og andre tegningen i figuren representerer begge $a^2 - n^2$, og den tredje tegningen representerer $(a+n)(a-n)$. Det er da mulig å ta bort det blå rektanglet fra den andre tegningen, rotere det og legge et til på høyre siden i den tredje tegningen, som vist i figuren. Ved å flytte det blå rektanglet, har jeg vist at arealet i den andre tegningen er lik arealet i den tredje tegningen, og på den måten vist at $a^2 - n^2$ er lik $(a + n)(a - n)$. Dette er et deduktivt bevis, der jeg med utgangspunkt i en arealmodell for multiplikasjon har vist gjennom omforming av en tegning hvordan påstanden gjelder generelt.



Figur 3.3: ***a*²** **–** ***n*²** **= (*a* + *n*) (*a* – *n*) representert med arealmodell for multiplikasjon**

3.5 Metode for analyse: Induktiv analyse

For analyse av det empiriske materialet har jeg benyttet induktiv metode inspirert av *Grounded Theory* og *constant comparative method* (Miles et al., 2014; Nilssen, 2012) der jeg ved hjelp av åpen koding har søkt etter kategorier. Jeg har fulgt Miles et al. (2014) som skriver at koding ikke bare et teknisk forarbeid for analyse, men at det *er* analyse, og dyp refleksjon og fortolkning av meningen i data. Jeg vil først gjøre kort rede for induktiv analyse og deretter beskrive mitt arbeid med analyse av datamaterialet i denne studien.

3.5.1 Induktiv analyse i kvalitativ forskning

Kvalitativ forskning handler om å se på det mennesker sier, gjør og produserer av tekster, om å søke etter mønster, temaer og kategorier, og fokusere på det som dukker opp av interessante problemstillinger i datamaterialet (Nilssen, 2012). Nilssen (2012) beskriver kvalitativ forskning som en systematisk og strukturert, og samtidig intuitiv og kreativ prosess, og hver forsker må derfor utvikle en framgangsmåte tilpasset sin studie. Nilssen (2012) beskriver videre en prosess inspirert av *Grounded Theory*, åpen koding og *constant comparative method*. *Grounded Theory* er en metode for å utvikle teori fra data (Alvesson & Sköldberg, 2018; Cohen et al., 2017; Nilssen, 2012). Teori utvikles gjennom analyse og refleksjon, og ved hjelp av *constant comparative method* ser man etter mønster i data ved at deler av teksten sammenlignes med andre deler. Åpen koding vil si at forskeren, ideelt sett uten å være påvirket av teori, setter et navn på en del av teksten. Dette navnet, kalt en kode, skal representere og fange essensen i tekstdelen, og nye data sammenlignes med tidligere data.

Relaterte koder samles i kategorier, og gjennom utvikling av et hierarki av koder og kategorier gir forskeren mening til data. Et sentralt element er å skrive notater og oppsummeringer, kalt *memos*, underveis i kodingsprosessen, gjerne om teoretiske ideer og koblinger mellom kategorier.

Jeg har i denne studien benyttet induktiv analyse fordi det passet med mitt forskningsspørsmål om å beskrive kjennetegn på elevers deltagelse. Jeg hadde ikke på forhånd definert noe jeg så etter, men ville beskrive det elevene gjorde og være åpen for å la meg inspirere av datamaterialet (Alvesson & Sköldberg, 2018; Nilssen, 2012). Jeg tok utgangspunkt i datamaterialet og utviklet koder som beskrev kjennetegn, og gjennom en kodingsprosess inspirert av *Grounded Theory* utviklet jeg kategorier som beskrev sentrale kjennetegn på elevenes deltagelse. Det var ikke et mål å beskrive alle elevers deltagelse i en diskurs om resonnering og bevis, men ved hjelp av en analyse av disse elevenes deltagelse forsøke å komme opp med nye ideer og eventuelt utfordre eksisterende tankesett (Alvesson & Sköldberg, 2018), og på den måten inspirere til videre forskning og undervisning.

I *Grounded Theory* er idealet at kodingen skal være teorifri, men dette er i praksis ikke mulig, både fordi forskeren påvirker datainnsamling og analyse, og fordi teori er nødvendig for å se noe utover det dagligdagse (Nilssen, 2012). Jeg har i denne studien basert forskningsspørsmål og datainnsamling på kommognisjon (Sfard, 2008), og er dermed ikke frigjort fra teoretisk påvirkning i kodingsprosessen fordi rammeverket påvirker de spørsmål jeg velger å stille og de begreper jeg bruker (Nilssen, 2012). I tillegg ligger temaet resonnering og bevis til grunn for datainnsamlingen, gjennom utforming av oppgavene til elevene og ved at jeg har sett spesielt på elevers arbeid knyttet til dette temaet i kodingsprosessen.

3.5.2 Analyse av datamateriale fra observasjon

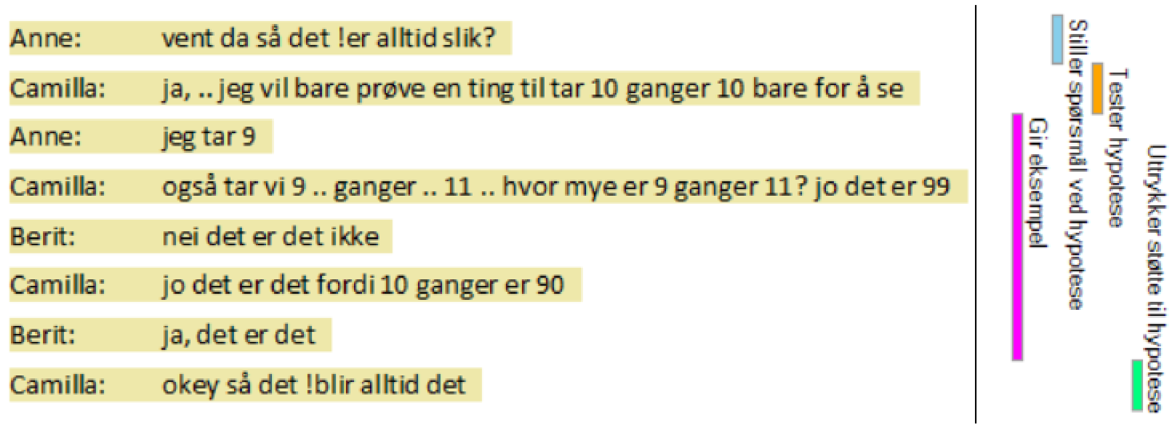
Alvesson og Sköldberg (2018) beskriver en fri analyseprosess, men påpeker at dette er krevende, særlig for forskere uten lang erfaring. Jeg har benyttet ulike analyseverktøyer beskrevet av Nilssen (2012), som å dele opp datamaterialet, stille spørsmål, organisere i tabeller, og å lage modeller og diagrammer.

Innledningsvis så jeg igjennom videoopptakene for å danne meg et bilde av elevenes arbeid. Jeg laget korte oppsummeringer av hvilke hypoteser og begrunnelser elvene så ut til å presentere, og skrev ned innledende refleksjoner. Jeg transkriberte elevenes samtale ved hjelp av både video- og lydopptakene. Det var nødvendig med flere gjennomganger av hele opptaket for å sikre korrekt transkribering. Det var ikke behov for analyse av elevenes dialekt og jeg har derfor transkribert i bokmål for bedre lesbarhet. Sfard (2008) legger vekt på at det er elevenes stemme og ikke forskerens gjenfortelling som skal utgjøre data og jeg har derfor lagt vekt på å gjengi elevenes samtale så nøyaktig som mulig. Jeg har derfor valgt å markere avbrudd og pauser, og jeg har brukt bare små bokstaver for å unngå å legge inn en tolkning av setningsbygning. Transkripsjonsnøkkelen jeg har brukt er gitt i Tabell 3.1 nedenfor.

Tabell 3.1: Transkripsjonsnøkkel

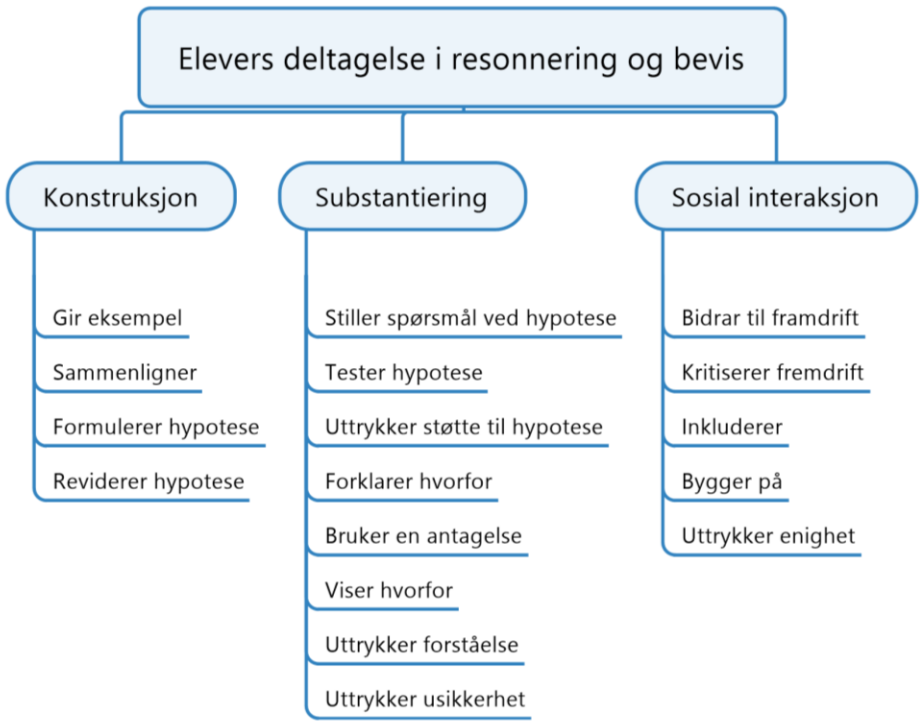
,	kort opphold, overgang
..	kort opphold < 1 sekund
…	lengre opphold > 1 sekund
(9s)	lengre opphold > 3 sekund
ab-	avbrutt tale
!abc	ekstra trykk, etterfølgende ord fremheves
abc?	spørrende
[abc]	overlapp (tekst i påfølgende linjer markert med [] når de overlapper i tid)
((abc))	kommentarer, beskrivelser

For videre analyse importerte jeg transkripsjonene i dataprogrammet NVivo 12 Pro som er utviklet for kvalitativ dataanalyse, og jeg brukte verktøyene der for å kode datamaterialet. Jeg gikk gjennom datamaterialet linje for linje og stilte spørsmål til datamaterialet. Jeg benyttet de to analytiske spørsmålene: Hva gjør elevene her, og hva uttrykker elevene her. Dette for å kode både det elevene gjorde av arbeid med oppgaven og det de uttrykte om arbeidet. Svarene på spørsmålene førte til opprettelse av koder, eller tilordning til eksisterende koder. Et eksempel på koding i NVivo er vist i Figur 3.4 nedenfor. Bildet viser hvordan linjer som har blitt kodet er markert med en farge, og hvordan de tilordnede kodene kan vises som linjer til høyre for transkripsjonen. Nye koder tilordnes ved å markere teksten og velge en eksisterende kode eller opprette en ny.



Figur 3.4: Illustrasjon av koding i NVivo

Der hvor adskilte koder hadde felles trekk kombinerte jeg disse til felles kategorier, i et hierarki, for på den måten å identifisere fremtredende kjennetegn ved elevenes arbeid. Et eksempel var at jeg hadde kodene *sammenligner eksempler* og *sammenligner produkter*, som jeg etter hvert slo sammen til en felles kode som jeg kalte *sammenligner*. Det kom også til nye koder sent i prosessen, for eksempel ved at koden *reviderer hypotese* bidro til en nyansering av den eksisterende koden *formulerer hypotese*. Etter hvert som jeg jobbet med koding og utvikling av kodehierarkiet så jeg at det pekte seg ut tre kategorier, nemlig *konstruksjon*, *underbygging* og *sosial interaksjon*. Jeg fant at mange av kodene kunne grupperes etter om de formulerte narrativer, eller om de på ulike måter begrunnet narrativer. For eksempel fant jeg at kodene *forklarer hvorfor*, *viser hvorfor* og *tester hypotese*, var ulike måter elevene deltok i underbygging av hypoteser og jeg samlet derfor disse under kategorien *underbygging*. For å unngå å introdusere nye begreper valgte jeg å bruke Sfard (2008) sine ord konstruksjon og underbygging som navn på to av kategoriene. Ved å utvikle kategoriene fra åpen koding av datamaterialet kunne jeg også se andre deler av elevenes deltagelse i sammenheng med konstruksjon og underbygging. For eksempel fant jeg at det elevene gjorde og uttrykte der hvor jeg hadde brukt kodene *stiller spørsmål ved hypotese*, *uttrykker støtte til hypotese* og *uttrykker usikkerhet* var relatert til underbygging, og jeg samlet også disse under den samme kategorien. Kodehierarkiet er vist i Figur 3.5 nedenfor.



Figur 3.5: Kodehierarki fra åpen koding

Både Nilssen (2012) og Miles et al. (2014) fremhever spesielt skriving som en viktig del av prosessen, noe som også er viktig i Grounded Theory. Det kan være personlige reaksjoner og tanker, ideer, mulige meninger, noe som kan følges opp, koblinger til andre deler av datamaterialet og oppklaringer av tidligere spørsmål. Underveis i kodingsprosessen skrev jeg notater og refleksjoner som kommentarer til teksten og egne memo-dokumenter i NVivo, og jeg skrev etter hvert også et foreløpig utkast til analysekapittel som oppsummerte refleksjoner fra kodingsprosessen.

For å få oversikt over datamaterialet valgte jeg å dele det opp i faser ut fra elevenes arbeid med resonnering og bevis, hovedsakelig slik at hver fase inneholdt ett sentralt narrativ. Jeg presenterte så en oversikt i tabeller som oppsummerer elevenes deltagelse med koder og en kort beskrivelse inndelt etter fasene. Etter at jeg hadde kodet datamaterialet, systematisert kodene i et kodehierarki og funnet de tre sentrale kategoriene, gikk jeg videre med å analysere datamaterialet ved hjelp av Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering og begreper fra Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk. Jeg startet med å gå igjennom de fasene jeg hadde identifisert i datamaterialet og knyttet dem til resonneringsprosesser i modellen til Jeannotte og Kieran (2017). En ting jeg ble oppmerksom på, var at de eksemplene elevene jobbet med hadde ulik funksjon, og hang tett sammen med formulering av hypoteser også når de tilsynelatende ble brukt for å begrunne hypoteser. For å se nærmere på dette tok jeg i bruk Jeannotte og Kieran (2017) sitt strukturelle aspekt og gikk gjennom kodingen på nytt, nå sett i sammenheng med strukturen i elevenes resonnering. Dette førte også til at jeg tok i bruk annen litteratur om abduktiv resonnering for å utdype Jeannotte og Kieran (2017) sin noe begrensede omtale av det strukturelle aspektet.

Noen av kodene jeg brukte for å beskrive elvenes deltagelse var ikke direkte knyttet til arbeid med resonnering og bevis, slik som for eksempel kodene *bidrar til fremdrift*, *uttrykker enighet*, og *uttrykker usikkerhet*. For å analysere disse delene av elevenes deltagelse tok jeg i bruk begreper fra Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk, spesielt rutiner og metaregler, og hvorvidt elevenes deltagelse kunne beskrives som ritualisert eller utforskende.

3.6 Forskningsetikk og behandling av personopplysninger

Jeg har i denne studien forholdt meg til generelle forskningsetiske retningslinjer og fagspesifikke forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi utarbeidet av De nasjonale forskningsetiske komiteene (u.å.) og relevante lover og forskrifter. Jeg har tatt spesielt hensyn til at informantene er under myndighetsalder og har tydelig informert om prosjektet og om at deltagelse er frivillig, og jeg har innhentet samtykke fra foresatte. Et tiltak for å sikre at elevene deltar frivillig er at samtykkeskjema også skal underskrives av elevene selv og at det er de selv som leverer skjemaet. For å unngå interessekonflikter, avhengighet og rollekonflikter har jeg valgt å søke informanter på en annen skole enn egen arbeidsplass. Se informasjonsskriv og samtykkeskjema i Vedlegg 1.

For å redusere mulige ulemper ved å ta avgangselever ut av ordinær undervisning har jeg latt det være opp til skolen og læreren å avgjøre når elevene tas ut til observasjon. Samtidig medfører ikke denne studien som noen stor ulempe for de involverte elevene, da aktiviteten elevene gjør i denne studien kan ses på som god trening i resonnering. For at elevene skulle få mest mulig igjen for deltakelsen i studien, tilbød jeg meg å ha en undervisningsøkt for klassen med fokus på resonnering og bevis med utgangspunkt i det elevene jobbet med under datainnsamlingen, men dette har læreren foreløpig ikke takket ja til.

Både lydopptak, videoopptak og skjema for samtykke regnes som personopplysninger (NSD - Norsk senter for forskningsdata, u.å.) og prosjektet er derfor meldt til NSD - Norsk senter for forskningsdata. Meldeskjemaet med referansekode 608211 ble godkjent 16. oktober 2018 (Vedlegg 2), og det var da mulig å informere elevene, samle inn samtykke og starte datainnsamling. Elevene ble informert om behandling av personopplysninger og rettigheter, både muntlig når jeg informerte om prosjektet, skriftlig på informasjonsskriv og igjen muntlig før opptak ble startet i forbindelse med datainnsamlingen.

I tillegg til forskningsetiske retningslinjer og føringer fra NSD har jeg forholdt meg til NTNU sine retningslinjer for behandling av personopplysninger i studentprosjekter (Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, u.å.). Jeg har også utarbeidet en datahåndteringsplan for å sikre forsvarlig lagring av personopplysninger. NSD anbefaler ikke lagring av personopplysninger på private enheter, og NTNU sine retningslinjer tillater ikke dette. Jeg har derfor kun benyttet opptaksutstyr som er eid av NTNU. NTNU har i kommunikasjon til studentene bekreftet at kryptert minnepinne vil oppfylle kravet for lagringssikkerhet og jeg har derfor benyttet dette til lagring av lyd- og videoopptak for å unngå å lagre dette på egen PC. Deltagerne er informert om at skriftlige utdrag vil bli brukt i oppgaven, at deltagerne ikke vil kunne gjenkjennes, at alt datamateriale vil være anonymisert når prosjektet er avsluttet og at opptakene vil bli slettet (se Vedlegg 1).

3.7 Troverdighet

Cohen et al. (2017) foreslår å bruke troverdighet (eng: trustworthiness) som begrep i observasjonsbasert kvalitativ forskning, men omtaler dette også som validitet og reliabilitet. Validitet handler om at studien undersøker det den hevder å undersøke, og at tolkningene og konklusjonene kan forsvares med den teorien som er valgt og de data som er tilgjengelige. Dette innebærer for eksempel at den oppgaven jeg har valgt for elevene og den datainnsamlingsmetoden jeg har valgt faktisk undersøker det forskningsspørsmålet hevder at jeg undersøker. Det innebærer også at de konklusjoner jeg har valgt å trekke frem faktisk kan forsvares med det datamaterialet som er tilgjengelig og de teorier som er brukt i analysen. Reliabilitet handler grovt sett om målingers stabilitet, om man måler det samme dersom man måler på nytt eller måler en annen gruppe, men det er omdiskutert om dette er et hensiktsmessig begrep for kvalitativ forskning (Cohen et al., 2017).

Miles et al. (2014) beskriver det de kaller retningslinjer for konklusjoners kvalitet og omtaler fem delvis overlappende utfordringer: Bekreftbarhet, avhengighet, kredibilitet, overførbarhet og anvendbarhet. *Bekreftbarhet* er spørsmålet om i hvilken grad funnene er påvirket av forskerens fordommer, *avhengighet* er spørsmålet om prosessen vil kunne gi tilsvarende resultater dersom studien gjentas, og *kredibilitet* er spørsmålet om funnene i studien gir mening, er troverdige og overbevisende for leseren. Jeg har beskrevet metoder og min forståelse av teori, og jeg har gjort rede for egen rolle i innsamling av data. På den måten har jeg lagt til rette for at studien kan gjentas. Jeg har begrunnet resultater fra studien ved å vise til utdrag fra datamaterialet, og har også inkludert en fullstendig oversikt over elevenes deltagelse i form av oversiktstabeller.

Overførbarhet er spørsmålet om konklusjonene fra studien er overførbare til andre kontekster og hvor mye de kan generaliseres. For kvalitativ forskning er generalisering ofte underordnet ved at fokus er å beskrive fenomenet som undersøkes (Cohen et al., 2017). Med bare seks elever det ikke er mulig å generalisere funn fra denne undersøkelsen til andre elever. Det er likevel interessant både for videre forskning og for praksis i skolen å se hva elever kan gjøre med slike oppgaver. For praksis i skolen vil det være interessant for lærere å se hva elever kan tenkes å gjøre i slike situasjoner, både som inspirasjon til å utnytte muligheter og for å være oppmerksomme på mulige utfordringer. Det vil likevel være mulig å generalisere rammeverkenes anvendbarhet. For å bidra til at leseren selv kan vurdere overførbarheten av mine funn har jeg beskrevet klassetrinn, utvalgskriterier, oppgave, omgivelser og metoder for datainnsamling og analyse.

Anvendbarhet er spørsmålet om hvilken nytte forskningen har for deltagerne, forskerne og samfunnet, inkludert vurdering av etiske utfordringer og dermed eventuell ulempe for de involverte. Jeg har tidligere vurdert ulike etiske utfordringer ved studien, og redegjort for tiltak jeg har gjort for å begrense ulemper. For å gjøre studiens konklusjoner tilgjengelig for forskningsfeltet, men også for lærere, har jeg forsøkt å unngå unødvendig komplisert språk og forsøkt å finne gode, men presise norske oversettelser av originallitteraturens ord og uttrykk. Jeg har også forsøkt å knytte funnene i studien både til muligheter for videre forskning og til muligheter for undervisning i skolen, og jeg har knyttet studien til det pågående arbeidet med nye læreplaner i norsk skole. Valg av tema resonnering og bevis bidrar i seg selv til anvendbarhet ved at relaterte begreper er sentrale i de fleste av de nye kjerneelementene i matematikkfaget i norsk skole. Studien kan bidra til bevissthet omkring resonnering og bevis i skolen, og til forståelse for hva det innebærer og hvordan elevers arbeid med resonnering og bevis kan se ut. De valgte rammeverkene kan også bidra til bedre kommunikasjon og bevissthet om hva resonnering og bevis innebærer, og studien bidrar til å vise hvordan disse kan anvendes for analyse av elevers arbeid, både for forskning og undervisning.

Troverdighet handler til slutt om i hvilken grad jeg er i stand til å overbevise leseren (Miles et al., 2014). Jeg har derfor forsøkt å beskrive det som kan påvirke de konklusjoner jeg mener å kunne trekke fra arbeidet, det som kalles tykke beskrivelser (eng: thick descriptions) (Cohen et al., 2017).

4 Analyse

Forskningsspørsmålet i denne studien er: Hva kjennetegner en gruppe 10.-trinnelevers deltakelse i en matematisk diskurs av resonnering og bevis? Jeg vil i dette kapitlet presentere analysen av to elevgruppers deltagelse i hver sin felles diskurs av resonnering og bevis i arbeid med multiplikasjon.

Jeg har benyttet åpen koding for å beskrive elevenes deltagelse, og har funnet de tre hovedkategoriene konstruksjon, underbygging og sosial interaksjon. Med utgangspunkt i koding og kategorisering analyserer jeg elevenes deltagelse ved hjelp av begreper fra Jeannotte og Kieran (2017) og Sfard (2008). Kapitlet er strukturert med ett delkapittel for hver av de tre hovedkategoriene konstruksjon, underbygging og sosial interaksjon. Avslutningsvis ser jeg kategoriene i sammenheng og analyserer overgangen mellom konstruksjon og underbygging.

På de neste sidene presenterer jeg ved hjelp av tre tabeller en oversikt over elevenes deltagelse i diskursen. Tabellene viser elevenes arbeid delt inn i faser, gruppert etter hvilke narrativer de produserer, hovedsakelig med en sammenligning, hypotese eller underbygging i hver fase. For hver fase har jeg vist kodene jeg har tilordnet innenfor denne fasen, med de mest fremtredende kodene i kursiv. I tiden jeg observerte dem arbeidet den første gruppen først med den første oppgaven (Tabell 4.1) og så med den andre oppgaven (Tabell 4.2). Den andre gruppen brukte hele tiden på arbeid med den første oppgaven (Tabell 4.3), selv om de i løpet av sine forsøk på å forklare en hypotese fra den første oppgaven også kom inn på spørsmål fra den andre oppgaven. I teksten i kapitlet har jeg markert mine koder og kategorier med kursiv for å gjøre det tydelig hvordan disse fremkommer i analysen. Når jeg viser til faser i elevenes arbeid bruker jeg nummereringen gitt i første kolonne i tabellene på de neste sidene.

Tabell 4.1: Den første gruppens arbeid med den første oppgaven, (a – 1) (a + 1)

Fase	Linjer	Koder			Narrativer	Beskrivelse
		Konstruksjon	**Underbygging**	**Sosial interaksjon**		
1-1-1	1.1- 1.22	Gir eksempel *Sammenligner*		Bidrar til fremdrift Inkluderer	$2 \cdot 2 = 4$ $1 \cdot 3 = 3$ «at de blir forskjellige»	Gir et eksempel og ser at produktene ikke er like.
1-1-2	1.23- 1.35	Gir eksempel Sammenligner *Formulerer hypotese*		Bidrar til fremdrift	$7 \cdot 7 = 49$ $6 \cdot 8 = 48$ «at det alltid blir en mindre»	Gir et nytt eksempel og formulerer hypotese om at det andre produktet er en mindre.
1-1-3	1.36- 1.51	Gir eksempel Sammenligner	Stiller spørsmål ved hypotese *Tester hypotese* Uttrykker støtte til hypotese	Bidrar til fremdrift Inkluderer	$10 \cdot 10 = 100$ $9 \cdot 11 = 99$ «så det !blir alltid det»	Gir et nytt eksempel og hevder at det alltid blir en mindre.
1-1-4	1.52- 1.85		*Forklarer hvorfor* Bruker antagelse Uttrykker usikkerhet	Bygger på Uttrykker enighet	Tar bort syv. Legger til seks (ganger en gang til). Tallet blir ett tall mindre, men ganges en gang til.	Forklarer hvorfor hypotesen er sann, ved hjelp av aritmetikk og beskrivelser i naturlig språk.
1-1-5	1.86- 1.107		*Forklarer hvorfor* Bruker antagelse Uttrykker usikkerhet	Bidrar til fremdrift Inkluderer Bygger på Uttrykker enighet	(som over)	(som over)
1-1-6	1.108- 1.123		*Viser hvorfor* Uttrykker usikkerhet Uttrykker forståelse	Bidrar til fremdrift Inkluderer Bygger på Uttrykker enighet	(utregning basert på konkret eksempel)	Viser hvorfor hypotesen er sann ved å skrive ned en utregning av differanser.

Tabell 4.2: Den første gruppens arbeid med den andre oppgaven, $(a - n)\ (a + n)$, $n > 1$

Fase	Linjer	Koder			Narrativer	Beskrivelse
		Konstruksjon	**Underbygging**	**Sosial interaksjon**		
1-2-1	1.124-1.142	Gir eksempel Sammenligner *Formulerer hypotese*		Bidrar til fremdrift Inkluderer Uttrykker enighet	$2 \cdot 2 = 4$ $0 \cdot 4$ $7 \cdot 7 = 49$ $5 \cdot 9 = 45$ «det er fire mindre» «alt sammen blir fire mindre»	Gir eksempel med økning og reduksjon med to, og ser at det andre produktet blir fire mindre.
1-2-2	1.143-1.145	Gir eksempel Sammenligner *Reviderer hypotese*	Tester hypotese		$2 \cdot 2 = 4$ $0 \cdot 4 = 0$ Én forskjell gir differanse én, to forskjell gir differanse 2+2=4.	Gir nytt eksempel med økning/reduksjon, $n = 2$, og foreslår hypotese om at det andre produktet er $n + n$ mindre.
1-2-3	1.146-1.166	Gir eksempel Sammenligner *Reviderer hypotese*	Tester hypotese	Bygger på	$7 \cdot 7 = 49$ $4 \cdot 10 = 40$ «da blir det ni forskjell» «fordi tre ganger tre er ni» «det tallet vi reduserer med»	Gir nytt eksempel med økning/reduksjon, $n = 3$, og foreslår hypotese om at det andre produktet er $n \cdot n$ mindre.
1-2-4	1.167-1.193	Gir eksempel Sammenligner Formulerer hypotese	*Tester hypotese* *Uttrykker støtte til hypotese*	Uttrykker enighet	$9 \cdot 9 = 81$ $4 \cdot 14 = 56$ $81 - 5 \cdot 5 = 56$ $10 \cdot 10 = 100$ $2 \cdot 18 = 36$ $100 - 8 \cdot 8 = 36$ «det man tar vekk» «skal man gange med hverandre»	Gir nye eksempler og uttrykker støtte til siste hypotese på bakgrunn av eksemplene.
1-2-5	1.194-1.196		*Tester hypotese*	Uttrykker enighet	«akkurat som når» «vi øker tallet med en så vil en gange en være en»	Tester hypotesen med eksempler fra den første oppgaven.
1-2-6	1.197-1.221	*Sammenligner*		Bidrar til fremdrift Inkluderer Uttrykker enighet	«det hadde vært så mye mer, enkelt enn det der» $7 \cdot 7 = 49$ $4 \cdot 10 = 40$ $49 - 3 \cdot 3 = 40$ «den der er mye bedre enn den der»	Ser ut til å sammenligne hypotesen i den andre oppgaven med forklaringen på hypotesen i den første oppgaven.

Tabell 4.3: Den andre gruppens arbeid

Fase	Linjer	Koder			Narrativer	Beskrivelse
		Konstruksjon	**Underbygging**	**Sosial interaksjon**		
2-1	2.1- 2.20	*Gir eksempel* Sammenligner		Bidrar til fremdrift Inkluderer	$4 \cdot 4 = 16$, $5 \cdot 3 = 15$ «at det er en mindre»	Gir eksempel, ser at det andre produktet er en mindre.
2-2	2.21- 2.29	Gir eksempel Sammenligner *Formulerer hypotese*	Tester hypotese Uttrykker støtte til hypotese		$8 \cdot 8 = 64$, $7 \cdot 9 = 63$ «da vil det alltid bli en mindre»	Gir et nytt eksempel og ser at det også der blir én mindre. Formulerer hypotese.
2-3	2.30- 2.40		Forklarer hvorfor Uttrykker støtte til hypotese *Uttrykker usikkerhet*	Bidrar til fremdrift Uttrykker enighet	«fordi det på en måte utjevner seg» «vil det alltid være slik .. ja det vil alltid være slik»	Diskuterer om det skyldes at det utjevnes «på en måte», uttrykker støtte til hypotesen, men sier at de ikke vet hvorfor.
2-4	2.41- 2.68	Gir eksempel	Viser hvorfor *Uttrykker usikkerhet*	Bidrar til fremdrift Inkluderer Uttrykker enighet	$5 \cdot 5$, $6 \cdot 4$, $4 \cdot 6$ $3 \cdot 3$, $4 \cdot 4$, $5 \cdot 5$	Leser neste oppgave om å vise på et ark. Gir nye eksempler og viser at hypotesen stemmer i alle eksemplene.
2-5	2.69- 2.87		Kritiserer forklaring *Uttrykker usikkerhet*	Bidrar til fremdrift Kritiserer fremdrift		Skriver kun ned hypotesen, «har ikke noe svar på» hvorfor.
2-6	2.88- 2.115	Gir eksempel *Sammenligner*		Bidrar til fremdrift Kritiserer fremdrift	$2 \cdot 6, 1 \cdot 7$ «fem/tre/en imellom» «to mer»	Sammenligner antagelig $4 \cdot 4$, $3 \cdot 5$, $2 \cdot 6$, $1 \cdot 7$ og finner at differansen mellom to og to av disse er $1, 3, 5$, altså øker med 2. Formulerer ikke hypotesen.
2-7	2.116- 2.135	Gir eksempel *Sammenligner*			$6 \cdot 6 = 36$, $5 \cdot 7 = 35$, $4 \cdot 8 = 32$ $3 \cdot 9 = 27$, $2 \cdot 10 = 20$ «oddetalla» «differansen mellom det forrige og neste»	Relaterer $1, 3, 5$ til oddetall, og foreslår hvordan sammenhengen vil gjelde for flere eksempler.
2-8	2.136- 2.203	*Sammenligner* Formulerer hypotese		Bygger på Inkluderer Uttrykker enighet	«hvis forskjellen mellom tallene du ganger er to så» «det vil bli» «tre mindre»	Sammenligner differansen mellom faktorene med differansen mellom produkter.
2-9	2.204- 2.298	*Sammenligner*		Bidrar til fremdrift Kritiserer fremdrift Uttrykker enighet	«fra det du starter med så blir det jo» «det er jo sånne der kvadrattall»	Kommenterer at de må finne «forrige», og sammenligner med «det du starter med». Kommenterer altså at de har funnet rekursiv sammenheng, og ser etter eksplisitt sammenheng.

4.1 Konstruksjon

Hovedkategorien konstruksjon dreier seg om elevenes deltagelse i diskursen med konstruksjon av narrativer, og for å beskrive elevenes deltagelse i konstruksjon har jeg benyttet kodene *gir eksempel*, *sammenligner*, *formulerer hypotese* og *reviderer hypotese*. Først vil jeg i avsnitt 4.1.1 illustrere hvordan elevene *gir eksempel*, *sammenligner* og *formulerer hypotese*. Jeg vil deretter i avsnitt 4.1.2 gå nærmere inn på arbeidet til elevene i den første gruppen med den andre oppgaven for å vise hvordan eksemplene bidrar på ulike måter når de *reviderer hypoteser*. I avsnitt 4.1.3 vil jeg vise hvordan elevene i den andre gruppen forsøker å forklare hvorfor hypotesen er sann, men isteden *sammenligner* stadig nye eksempler. Avslutningsvis vil jeg i avsnitt 4.1.4 oppsummere elevenes deltagelse i konstruksjon av narrativer.

4.1.1 Eksempel, sammenligning og hypotese

Innledningsvis i arbeidet med den første oppgaven ga elevene i den første gruppen eksemplet $2 \cdot 2 = 4$ og $1 \cdot 3 = 3$, de sammenlignet produktene og fant kun at de var forskjellige. I utdraget nedenfor fra fase 1-1-2 og 1-1-3 gir de et nytt eksempel, sammenligner produktene i eksemplet og benytter dette for å formulere en hypotese. Utdraget viser dermed hvordan elevenes deltagelse kan beskrives gjennom kodene *gir eksempel*, *sammenligner* og *formulerer hypotese*, og jeg vil nedenfor se dem i sammenheng med resonneringsprosessene eksemplifisering, sammenligning og generalisering slik de defineres av Jeannotte og Kieran (2017).

1.23	Camilla:	okey la oss prøve et annet eksempel så får vi se, hvis vi tar syv ganger syv da
1.24	Berit:	ja
1.25	Camilla:	som blir 14 ... også øker vi det så blir det
1.26	Berit:	syv ganger syv er ikke 14 ..
1.27	Anne:	det er 49
1.28	Camilla:	tulla nå tenkte jeg .. pluss
1.29	Anne:	okey så da blir det
1.30	Camilla:	[seks ganger åtte]
1.31	Berit:	[seks ganger åtte] og det erført- .. nei jo det er 48?
1.32	Anne:	mhm ((bekreftende))
1.33	Anne:	!åja at [det alltid blir en mindre]
1.34	Berit:	[det alltid blir en mindre] okey
1.35	Camilla:	!åjaaa

Når elevene her og ellers i arbeidet *gir eksempel*, tar de utgangspunkt i et helt tall og regner ut to produkter, et kvadrattall og et nytt produkt etter en reduksjon og økning med et annet helt tall. I dette tilfellet tar de utgangspunkt i syv, og gir eksemplet $7 \cdot 7 = 49$ og $6 \cdot 8 = 48$ (1.23-31). Anne sier så at «det alltid blir én mindre» (1.33). Det er ikke noe i dialogen som direkte viser at de sammenligner, men narrativet om at det blir én mindre må komme som resultat av at de *sammenligner* produktene i eksemplet og ser at differansen mellom dem er én. Når de bruker ordet «alltid» kan det være på grunn av oppgavens formulering, men det kan også bety at de *sammenligner* de to eksemplene og finner at det ble en mindre i begge tilfellene.

Eksemplifisering handler ifølge Jeannotte og Kieran (2017) om å generere data som kan brukes i leting etter likheter og forskjeller. Når elevene i utdraget over gir et eksempel som kilde til en sammenligning deltar elevene dermed i resonneringsprosessen eksemplifisering. Videre handler sammenligning om å konstruere narrativ om matematiske objekter og relasjoner. Elevenes sammenligning i utdraget over fører til et narrativ om en sammenheng mellom produktene i eksemplet, og elevene deltar dermed i resonneringsprosessen sammenligning slik den defineres av Jeannotte og Kieran (2017). Det at de først gir et eksempel og så sammenligner produktene i eksemplet går igjen i de innledende fasene i begge gruppenes arbeid.

Når de sier at det «alltid» blir en mindre, er det mulig at de ser en gyldighet for sammenligningen utover det ene eller de to eksemplene. Det betyr at de *formulerer hypotese* om at det vil bli «en mindre» (1.33) også i andre tilsvarende eksempler. Hva som er tilsvarende eksempler er ikke klart, fordi de ikke formulerer et fullstendig narrativ. Det er altså implisitt fra sammenhengen hva det er som blir «en mindre», noe som går igjen i de fleste av elevenes formuleringer av hypoteser. Når elevene formulerer en hypotese som har gyldighet utover de kjente eksemplene, indikerer det at de deltar i resonneringsprosessen generalisering slik den defineres av Jeannotte og Kieran (2017). Det å formulere en hypotese på bakgrunn av eksempler kan ses som induktivt strukturert, men det kreves da ifølge Pedemonte og Reid (2011) at det gjøres en systematisk sammenligning av flere eksempler. Når det, slik som her, formuleres en hypotese på bakgrunn av ett eller kanskje to enkelteksempler, beskriver de det som abduktivt strukturert resonnering.

Elevenes resonnering i starten av arbeidet kjennetegnes altså av at de deltar i resonneringsprosessene eksemplifisering, sammenligning og generalisering. Generaliseringsprosessen er abduktivt strukturert fordi de generaliserer på bakgrunn av ett eller to enkelttilfeller uten systematisk sammenligning. Jeannotte og Kieran (2017) beskriver eksemplifisering som en prosess som støtter de andre prosessene. I utdraget over støtter eksemplifiseringen prosessene sammenligning og generalisering ved at elevene genererer data som brukes for å sammenligne produkter, og foreslå hypoteser som de så generaliserer til å gjelde også for andre tall. De samme prosessene og den samme abduktive strukturen gjentar seg i den første gruppens arbeid med den andre oppgaven i de påfølgende fasene, 1-2-2 og 1-2-3. Jeg vil nå gå inn i elevenes arbeid med disse to stegene og vise at de der *reviderer hypotesen*. Jeg vil deretter gå inn på den andre gruppens arbeid, der de forsøker å forklare hvorfor hypotesen er sann, men isteden sammenligner stadig nye eksempler.

4.1.2 Revidering av hypoteser

I arbeidet med den andre oppgaven formulerer den første gruppen en hypotese om at en reduksjon og økning med to fører til en reduksjon i produktet på fire. De *reviderer hypotesen* når de ser en mulig sammenheng mellom reduksjonen og økningen med to og reduksjonen i produktet på fire. Hvis vi lar tallet de reduserer og øker faktorene med være n kan hypotesen de formulerte beskrives som $(a-n)(a+n)=a^2-(n+n)$ når $n=2$. I utdraget nedenfor, fra fase 1-2-3, viser det seg at de ser på denne hypotesen som generell også for andre n, fordi de gir et nytt eksempel der $n=3$ og deretter tester hypotesen på eksemplet. Utdraget viser hvordan elevene igjen *reviderer hypotesen* basert på enda et nytt eksempel, $7 \cdot 7 = 49$ og $4 \cdot 10 = 40$, der altså $n=3$. Utdraget nedenfor viser dermed hvordan elevenes deltagelse kan beskrives gjennom koden *reviderer hypotese*, og jeg vil se det i sammenheng med resonneringsprosessen generalisering.

1.158	Camilla:	hvis vi tar syv ganger syv så tar vi opp ti nei tre og tar ned tre så blir det fire ganger ti .. og det blir 40 .. og syv ganger syv er 49 ... da blir det fire forskjell ((utydelig))
1.159	Berit:	jommen jeg tror at
1.160	Anne:	da ga det ikke mening ((utydelig))
1.161	Camilla:	da blir det ni forskjell
1.162	Berit:	ehh .. vent da .. hæ, jammen jo det er jo [fordi tre ganger tre er ni]
1.163	Anne:	[fordi tre ganger tre] er ni
1.164	Camilla:	åja det er et gang--
1.165	Anne:	ahh
1.166	Berit:	så det [tallet vi reduserer med] --

Etter å ha regnet seg fram til eksemplet, sier Anne at det ikke gir mening (1.160), noe som må betyr at hun *tester hypotesen* mot eksemplet. Hypotesen fra forrige fase vil gi en differanse på $3+3=6$, mens den faktiske differansen er ni. Når de sier at «det er jo fordi tre ganger tre er ni» (1.162-163), foreslår de en ny sammenheng mellom n og differansen mellom produktene. De *reviderer hypotesen* og formulerer en hypotese som tilsvarer $(a-n)(a+n)=a^2-n^2$.

Berit viser her at hun ser en gyldighet utover det enkelte eksemplet når hun ikke bare bruker tall fra eksemplet, men snakker om «det tallet vi reduserer med» (1.166). Når hun utvider gyldigheten utover eksemplene er dette altså igjen deltagelse i resonneringsprosessen generalisering, slik Jeannotte og Kieran (2017) beskriver den. Samtidig viser utdraget hvordan narrativene som elevene formulerer må tolkes ut fra sammenhengen fordi elevene sjelden formulerer fullstendige narrativer. Det er ikke entydig at det er «tallet vi reduserer med» (1.166) som skal multipliseres med seg selv for å gi differansen mellom produktene, men det er tilstrekkelig klart fra sammenhengen til at jeg tolker det slik at elevene ser denne sammenhengen.

Elvene *tester hypotesen* med et eksempel, og de *reviderer hypotesen* basert på det nye eksemplet. Det betyr at de også i disse to fasene formulerer hypoteser på bakgrunn av enkelteksempler. Riktignok har de etter hvert gitt flere eksempler, men det ser ikke ut til at de systematisk sammenligner alle eksemplene. De bruker heller hvert av de nye eksemplene som kilder til reviderte hypoteser. Formuleringen av hypoteser er derfor også her abduktivt strukturert. Som i den innledende fasen støtter resonneringsprosessen eksemplifisering prosessen generalisering, men denne gangen gjør de en revidering av en eksisterende hypotese.

Når elevene gjentatte ganger reviderer hypotesen, kan det se ut til at de er opptatt av å formulere et narrativ som passer godt i situasjonen. De kunne sagt seg fornøyd når de hadde funnet en hypotese om at det alltid er en differanse på fire, men de fortsetter likevel med flere eksempler og revidering av hypotesen fram til de til slutt formulerer en formodning om at differansen er n^2. De generaliserer dermed ikke bare til ulike a, men også til ulike n. Sfard (2008) beskriver det som utforsking når målet er konstruksjon av narrativer, og det at de synes å være opptatt av å formulere et narrativ er et kjennetegn på utforskende deltagelse i diskursen.

4.1.3 Gjentatte sammenligninger, mønster og generaliseringer

I fase 2-2 formulerer den andre gruppen en hypotese som tilsvarer $(a-1)(a+1)=a^2-1$, og går videre til å forklare hvorfor det er slik. Jeg kommer tilbake til hvordan de håndterer det innledende forsøket på underbygging senere. Her beskriver jeg den videre deltagelsen deres, i fasene 2-6 til og med 2-9, kjennetegnet av leting etter nye sammenhenger ved hjelp av stadig nye eksempler. Utdragene nedenfor viser hvordan elevenes deltagelse hovedsakelig kan beskrives gjennom koden *sammenligner*. Nedenfor vil jeg se deltagelsen i sammenheng med resonneringsprosessene eksemplifisering, sammenligning, identifisering av et mønster og generalisering.

I fase 2-6 starter elevene med eksemplet $4 \cdot 4 = 16$. Utdraget nedenfor viser hvordan de prøver flere ulike økninger og reduksjoner, n, fra dette, før de *sammenligner* disse og ser på differansene mellom produktene.

2.100	Hans:	((utydelig)) to ganger seks
2.101	Elin:	ja der får man jo enda større … variasjon da
2.102	Hans:	ja hvis jeg tar en gange syv og da blir det jo da .. [bare syv]
2.103	Elin:	[bare syv] … ja [men nå .. men nå snakker du]
2.104	Hans:	[da er det fem imellom der] og tre imellom der [og .. ooh]
2.105	Elin:	[ja men nå snakker du bare på] …
2.106	Ida:	he? …
2.107	Hans:	det er fem imellom der … tre mellom der .. og en mellom der
2.108	Elin:	det er ikke noe mønster i det
2.109	Ida:	nei
2.110	Hans:	hæ
2.111	Ida:	det er jo ikke noe mønster i det
2.112	Hans:	det er jo det … fem tre en
2.113	Elin:	en tre og fem
2.114	Hans:	ja .. det er jo mønster det er jo to mer da … jeg må prøve

De har gitt flere eksempler, noe de viser når de snakker om $2 \cdot 6$ (2.100) og $1 \cdot 7$ (2.102). Det ser ut til at de har regnet ut eksemplene $4 \cdot 4 = 16$, $3 \cdot 5 = 15$, $2 \cdot 6 = 12$ og $1 \cdot 7 = 7$. Når de sier at det er «fem imellom», «tre imellom» og «en imellom» (2.104, 2.107), har de antagelig *sammenlignet* to og to av disse produktene og fått differansene $16 - 15 = 1$, $15 - 12 = 3$ og $12 - 7 = 5$. Etter at Elin og Ida først sier at de ikke ser noe mønster (2.108, 2.111), avslutter Hans med å formulere et narrativ om at det er «to mer» (2.114) som ser ut til å komme av at han har *sammenlignet* differansene. Det mønsteret de beskriver tilsvarer altså at hver gang n i $(a - n)(a + n)$ øker med 1 så øker differansen mellom påfølgende produkter med 2. Utdraget nedenfor viser hvordan de utvider gyldigheten til mønsteret utover de eksemplene de til nå har sett på.

2.130	Hans:	imellom der så er det tre .. imellom der så er det fem .. imellom der så er det sju .. imellom og imellom der så er det ni ... det her er jo oddetalla en tre fem sju ni … og neste hadde da blitt 11 … og så hadde neste blitt 13 .. imellom … […] differansen mellom det forrige .. og

Hans *gir eksempler*, *sammenligner* disse, og foreslår hva det neste ville blitt. Når han sier «differansen mellom det forrige og», tolker jeg det som at han beskriver den rekursive sammenhengen mellom påfølgende produkter når n øker. Det at han snakker om oddetall tyder på at han ser en gyldighet utover de eksemplene de har sammenlignet. Ut fra sammenhengen er det da mulig å tolke at mønsteret som Hans beskriver tilsvarer den rekursive sammenhengen $P_{n+1} = P_n - (2n + 1)$, der $P_n = (a - n)(a + n)$ og oddetallene vises som $2n + 1$.

Det å formulere et narrativ om en rekursiv relasjon uten nødvendigvis å utvide gyldigheten til relasjonen utover de gitte eksemplene beskriver Jeannotte og Kieran (2017) som resonneringsprosessen identifisering av et mønster. Når elevene påpeker at det er en differanse som øker med 2, indikerer det dermed deltagelse i resonneringsprosessen identifisering av et mønster. Når de videre viser at de oppfatter en gyldighet utover eksemplene som i utgangspunktet ga opphav til mønsteret, betyr det at de også deltar i resonneringsprosessen generalisering. Elevene fortsetter å *sammenligne* eksempler og utdraget nedenfor viser hvordan de finner en ny sammenheng.

2.203	Elin:	men hvis det er noe med at … hvis forskjellen mellom tallene du ganger er to … så vil den øke .. eller vil .. tallene .. eller svaret da produktet … det vil bli mi-- eller vil liksom være tre mindre .. og hvis det er seks for eksempel .. så er det fem mindre .. er det åtte så .. er det syv mindre

Når Elin snakker om «forskjellen mellom tallene du ganger», så tolker jeg dette som differansen mellom faktorene p og q i $p \cdot q$. Etter noe uklarhet i starten sier hun at når forskjellen er seks så vil det være fem mindre, og når forskjellen er åtte så er det syv mindre. Jeg tolker dette som at hun mener at når man reduserer og øker faktorene med 1 i produktet $p \cdot q$ slik at man får $(p - 1)(p + 1)$ så vil produktet bli redusert med én mindre enn differansen mellom de nye faktorene slik Tabell 4.4 nedenfor viser.

Tabell 4.4: Reduksjon av produktet når faktorene reduseres og økes med én

Faktor · faktor	9·9	8·10	7·11	6·12	5·13
Produkt	81	80	77	72	65
Differanse mellom faktorene	0	2	4	6	8
Reduksjon av produktet		81-80=1	80-77=3	77-72=5	72-65=7

Elin relaterer differansen mellom produktene til «forskjellen mellom tallene du ganger» (2.203). Hun sier ikke direkte at differansen vil være én mindre enn denne «forskjellen», og hun sier heller ikke om det er tallene før eller etter økning og reduksjon hun finner forskjellen mellom. For å si at det er forskjellen mellom «tallene» minus én bruker hun konkrete eksempler, og ett av dem følger heller ikke mønsteret, når hun sier at når «forskjellen» er to så «vil det bli … tre mindre» (2.203). Selv om narrativet dermed er ufullstendig formulert hevder jeg at dette likevel kan ses som at de *formulerer hypotese*, fordi de bruker den generelle formuleringen «forskjellene mellom tallene de ganger». Det betyr også at de deltar i resonneringsprosessen generalisering fordi de utvider gyldigheten til påstanden utover de enkelte eksemplene. Hypotesen tilsvarer narrativet $(p-1)(q+1) = pq - \big((q+1) - (p-1) - 1\big)$, der den siste parentesen tilsvarer én mindre enn differansen mellom faktorene i uttrykket til venstre.

Utdragene over illustrerer hvordan elevene i den andre gruppen *gir eksempler* og *sammenligner* disse gjentatte ganger. De formulerer narrativer om sammenligninger, men de formulerer i liten grad fullstendige narrativer om generelle sammenhenger. Selv om elevene nesten ikke formulerer hypoteser, finner de ved å sammenligne eksempler, flere ulike sammenhenger som kunne vært formulert som hypoteser. Som beskrevet over finner de sammenhengene $P_{n+1} = P_n - (2n+1)$, der $P_n = (a-n)(a+n)$ og $(p-1)(q+1) = pq - \big((q+1) - (p-1) - 1\big)$, der sistnevnte også er en generalisering av den første oppgaven til å starte med to ulike heltall og så redusere og øke faktorene. Tabell 4.3 viser at de også finner at differansen mellom et opprinnelig kvadrattall og et nytt produkt der faktorene er økt og redusert med et annet heltall, n, er et kvadrattall, noe som tilsvarer $(a-n)(a+n) = a^2 - n^2$. Dette er den samme sammenhengen som den første gruppen fant i arbeidet med den andre oppgaven, men her fremkommer den i arbeidet med å forklare hvorfor hypotesen $(a-1)(a+1) = a^2 - 1$ fra den første oppgaven er sann.

Elevene *sammenligner* og *formulerer hypotese* på bakgrunn av eksempler, noe som indikerer en induktiv struktur på resonneringen. Pedemonte og Reid (2011) skiller mellom induktiv og abduktiv struktur ut fra om det gjøres en systematisk sammenligning av flere eksempler, eller om en hypotese formuleres ut fra et enkelt eksempel. Elevene gir her mange eksempler, og selv om det er uklart hvor systematisk sammenligningen er kan strukturen beskrives som induktiv, fordi abduktiv resonnering vil bety formulering av en hypotese på grunnlag av et eller kanskje to enkelteksempel.

4.1.4 Oppsummering av konstruksjon

Elevene deltar i diskursen med konstruksjon av narrativer, og spesielt interessante er konstruksjon av narrativer som senere kan underbygges for å gå inn i diskursen som godkjente narrativer. Jeg har funnet at elevene deltar i flere av prosessene i modellen til Jeannotte og Kieran (2017) relatert til konstruksjon av narrativer: *sammenligning,* *generalisering*, *identifisering av et mønster*, og støtteprosessen *eksemplifisering*. Eksemplene elevene gir bidrar i prosessen *generalisering*, både for formulering av en første hypotese og revidering av hypoteser, og analyse av strukturen i elevenes argumentasjon tyder på en abduktiv struktur i formulering og revidering av hypoteser. Det at elevene viser en vilje til revidering av hypoteser tyder på at målet med aktiviteten er å komme fram til et narrativ, noe som igjen tyder på utforskende deltagelse i diskursen med konstruksjon av narrativer. Når den andre gruppen har formulert en hypotese og ser ut til å starte leting etter en forklaring på hypotesen, går deltagelsen over i induktivt strukturert *sammenligning* støttet av mange eksempler.

4.2 Underbygging

Hovedkategorien underbygging dreier seg om elevenes deltagelse i diskursen med underbygging av narrativer. For å beskrive elevenes deltagelse i underbygging har jeg benyttet kodene: *stiller spørsmål ved hypotese*, *tester hypotese*, *uttrykker støtte til hypotese*, *forklarer hvorfor*, *bruker en antagelse*, *viser hvorfor*, *uttrykker forståelse* og *uttrykker usikkerhet*. Noen av kodene fra konstruksjon benyttes også her, selv om arbeidet hovedsakelig dreier seg om underbygging, ved at elevene også her *gir eksempel* og *sammenligner*.

Jeg vil i avsnitt 4.2.1 vise hvordan elevene *tester hypotese* med et eksempel og på bakgrunn av dette *uttrykker støtte til hypotesen*. Jeg vil deretter i avsnitt 4.2.2 og 4.2.3 gå inn på hvordan elevene i den første gruppen *forklarer hvorfor* og *viser hvorfor* en hypotese er sann, der det ser ut til å være oppgavens formulering som avgjør om de forklarer eller viser. I avsnitt 4.2.4 vil jeg gå inn på den andre gruppens forsøk på å *forklare hvorfor* en hypotese er sann, noe som i deres tilfelle kun fører til gjentatt sammenligning av nye eksempler slik jeg har beskrevet under konstruksjon ovenfor. Avslutningsvis vil jeg i avsnitt 4.2.5 oppsummere elevenes deltagelse i underbygging av narrativer.

4.2.1 Tester og uttrykker støtte til hypotese

I arbeidet med konstruksjon av narrativer, formulerte og reviderte elevene hypoteser. Begge gruppene følger opp innledende formuleringer av hypoteser med å teste disse med eksempler, som vist i Tabell 4.1, Tabell 4.2 og Tabell 4.3. I utdraget nedenfor, fra fase 1-1-3, leser elevene fra oppgaveteksten spørsmålet om det alltid vil være slik, og de leser at de skal overbevise hverandre om hvorfor det er slik. Utdraget viser deretter hvordan elevene stiller *spørsmål ved hypotesen*, *tester hypotesen* og så *uttrykker støtte til hypotesen*.

1.36	Anne:	om det alltid vil være slik
1.37	Camilla:	hvorfor blir det det?
1.38	Berit:	observer hverandre om hvorfor det er slik
1.39	Camilla:	overbevis
1.40	Anne:	overbevis
1.41	Berit:	... åja, overbevis ja, tulla ((latter))
1.42	Anne:	har dere forslag?
1.43	Berit:	ehh
1.44	Anne:	vent da så det !er alltid slik?
1.45	Camilla:	ja .. jeg vil bare prøve en ting til tar 10 ganger 10 bare for å se
1.46	Anne:	jeg tar 9
1.47	Camilla:	også tar vi 9 .. ganger .. 11 .. hvor mye er 9 ganger 11? jo det er 99
1.48	Berit:	nei det er det ikke
1.49	Camilla:	jo det er det fordi 10 ganger er 90
1.50	Berit:	ja, det er det
1.51	Camilla:	okey så det !blir alltid det

Anne spør om de andre har forslag (1.42), men så stopper hun opp og *stiller spørsmål ved hypotesen*. Hun ber dem vente og spør om det faktisk alltid er slik (1.44) som hypotesen sier, at differansen mellom produktene vil være én. Dette er det eneste tilfellet der elevene eksplisitt *stiller spørsmål ved en hypotese*. Camilla svarer ja på Anne sitt spørsmål, men starter likevel å *teste hypotesen* med et eksempel. Hun *gir eksemplet* $10 \cdot 10 = 100$ og $9 \cdot 11 = 99$ og ser at hypotesen stemmer også med dette eksemplet. I siste linje konkluderer hun med å *uttrykke støtte til hypotesen* ved å si at «okey så det blir alltid det» (1.51).

Elevene deltar her i prosessene *eksemplifisering* og *begrunnelse* i modellen til Jeannotte og Kieran (2017). I motsetning til i de innledende fasene med konstruksjon av narrativer støtter ikke eksemplet formulering eller revidering av hypoteser, men en test av om hypotesen er sann. Mens de i de innledende fasene gir eksempler for å se hva som skjer, så gir de her et eksempel som direkte følge av spørsmålet til Anne om det faktisk alltid er slik at hypotesen er sann. Elevenes hensikt med å gi et eksempel ser altså ut til å være å teste hypotesen. Prosesser relatert til validering har ifølge Jeannotte og Kieran (2017) som mål å endre den epistemiske verdien til et narrativ, som sier noe om hvor sannsynlig eller sann hypotesen er. Når Camilla sier at «det blir alltid det» (1.51), ser det ut til at hun konkluderer med at hypotesen er sann. Validering med et eksempel er ikke et bevis, men det kan gå inn under resonneringsprosessen begrunnelse slik den beskrives av Jeannotte og Kieran (2017), fordi et eksempel kan endre den epistemiske verdien fra sannsynlig til mer sannsynlig.

Når elevene i den første gruppen har formulert og testet hypoteser som vist ovenfor, er det to måter de deltar med underbygging av hypotesene: med å forklare og med å vise hvorfor hypotesen er sann. Nedenfor vil jeg først analysere elevenes arbeid med å forklare for å overbevise hverandre, og deretter gå inn i elevenes arbeid med å vise for å overbevise andre.

4.2.2 Forklarer hvorfor

Utdraget nedenfor, som er fra fase 1-1-4, starter når elevene i den første gruppen har småpratet litt basert på spørsmålet fra oppgaven om «hvorfor det er slik» (1.52). Utdraget viser dermed elevenes deltagelse når de *forklarer hvorfor*, som også kan beskrives gjennom kodene *bruker en antagelse* og *uttrykker usikkerhet*. Jeg vil argumentere for at dette kan ses som deltagelse i resonneringsprosessen formulering av bevis.

1.52	Anne:	hvorfor det er slik
…		
1.57	Berit:	åja vent nei jeg vet jo det .. fordi du tar du tar å liksom det ene tallet skal du bare liksom .. okey si hvis du har to ganger to da ..
1.58	Camilla:	mm
1.59	Berit:	så tar vi en .. det funka i hodet mitt men jeg vet ikke helt om det funker på papiret ehm ... to ganger to .. så tar vi liksom ganger .. si at vi bare skulle tatt minus på en av toerne så hadde vi fortsatt hatt .. to ... liksom .. du hadde fortsatt hatt tallet to men vi hadde hatt det en ganger mindre og for at vi liksom skal ... eh jeg vet ikke hvor jeg skulle med det her

Berit forklarer her hvorfor det er slik at det andre produktet blir én mindre enn det første, og bruker eksemplet $2 \cdot 2$ som utgangspunkt. Hun forklarer hvordan en reduksjon av den ene faktoren fører til at de da har «det en ganger mindre» (1.59). Dette betyr at hun *bruker en antagelse*, nemlig at multiplikasjon kan ses som gjentatt addisjon. Hun sier at hun ikke vet om det hun tenker vil fungere «på papiret» (1.59), og hun avslutter med å si at hun ikke vet «hvor jeg skulle med det her» (1.59), noe som betyr at hun *uttrykker usikkerhet* om sin egen forklaring. Anne tar opp tråden, men baserer i utdraget nedenfor sin forklaring på et annet eksempel.

1.60	Anne:	eh okey vent da ... ehh ... jo, du har syv så tar du en mindre og da får du alltid en .. eller hvis du ganger seks med syv så får du syv tall mindre men vi ganger det enda en gang så blir det 48 og da får vi fortsatt
1.61	Camilla:	!åja
1.62	Anne:	en mindre .. enn det andre tallet

Anne sier at når de reduserer den ene faktoren med én, så betyr det at det er ett 7-tall mindre som skal adderes, og summen blir derfor 7 mindre (1.60). Deretter beskriver hun hva som skjer når den andre faktoren økes med én, når hun sier at «vi ganger det enda en gang» (1.60). Jeg tolker dette som at hun nå ser produktet som en sum av 6-tall, og at det skal legges til ett ekstra 6-tall når den andre faktoren økes med én. Det vil si at hun *bruker en antagelse* til, nemlig at multiplikasjon er kommutativ. Hun ser først multiplikasjonen som en sum av 7-tall og så som en sum av 6-tall. Fram til nå har elevene basert forklaringen på ett enkelt eksempel, og de fortsetter en liten stund med å gjenta tilsvarende forklaringer, før de i utdraget nedenfor oppsummerer mer generelt.

1.75	Camilla:	fordi vi ganger ikke syvtallet vi ganger sekstallet
1.76	Berit:	eeh ((bekreftende)) også ganger vi det en gang mere
1.77	Camilla:	ja
1.78	Berit:	ja da blir det siden seks er en mindre enn sju
1.79	Camilla:	ja, fordi tallet blir ett tall mindre men det ganges en gang til

Når Camilla sier at de ganger «det en gang mere» (1.76) så er ikke lenger forklaringen knyttet direkte til eksemplet, men til at det er en økning på én. Når hun avslutningsvis sier at «tallet blir ett tall mindre men det ganges en gang til» (1.79), kan det se ut til at hun forklarer både hvordan reduksjonen med én generelt vil føre til at den andre faktoren trekkes fra, og at økningen med én generelt vil føre til at den første, allerede reduserte faktoren, vil legges til.

Når elevene i utdragene over *forklarer hvorfor* er det deltagelse i resonneringsprosessen formulere et bevis slik den beskrives av Jeannotte og Kieran (2017). I deres definisjon av bevis forutsettes at narrativene er aksepterte i klassemiljøet og sanne, at det er en deduktiv struktur, og at realiseringene er passende, kjente og tilgjengelige for klassen. Selv om de ikke sier det eksplisitt så bruker elevene to antagelser i sin forklaring, at multiplikasjon kan ses som gjentatt addisjon og at multiplikasjon er kommutativ, og slik jeg forstår Jeannotte og Kieran (2017) krever de ikke at antagelsene uttrykkes eksplisitt. De to antagelsene er sanne og bør være kjente narrativer for en klasse på 10. trinn. Elevenes resonnering er deduktivt strukturert fordi de benytter to antagelser og beskriver trinn for trinn hvordan de kommer fram til hypotesen. De beskriver, ved bruk av de to antagelsene, hvordan en endring av de to faktorene i $a \cdot a$ fører til at det nye produktet $(a-1)(a+1)$ alltid vil være én mindre enn $a \cdot a$. De beskriver stegvis hvordan en reduksjon av den ene faktoren fører til en reduksjon med a ved å se på multiplikasjon som en sum av $a-1$ ganger a. Ved å benytte kommutativitet og se på multiplikasjonen som en sum av a ganger $a-1$, beskriver de hvordan en økning av faktoren a fører til at summen øker med $a-1$. Til slutt konkluderer de med at resultatet alltid vil være én mindre enn utgangspunktet $a \cdot a$ fordi reduksjonen med a alltid vil være én mer enn økningen $a-1$. Det at elevene tar utgangspunkt i et numerisk eksempel, men viser hvordan hypotesen gjelder generelt, gjør elevenes bevis til et generisk argument.

Realiseringene elevene bruker er passende og tilgjengelige for klassen. De tar utgangspunkt i et numerisk eksempel og realiseringene er derfor aritmetiske. Samtidig er noen av stegene underveis realisert som narrativer i naturlig språk, slik som de indirekte beskrivelsene av summer, når de sier «også ganger vi det en gang mere» (f.eks. 1.76). For å være et bevis kan realiseringene ifølge Jeannotte og Kieran (2017) være uformelle, så lenge resonneringen bygger på aksepterte narrativer og er deduktivt strukturert.

Et forbehold for å omtale elevenes resonnering i denne fasen som et bevis er at elevene kun har bevist hypotesen for naturlige tall, og ikke for alle hele tall som oppgaveteksten legger opp til. Dette skyldes at multiplikasjon som gjentatt addisjon ikke gjelder for negative tall. Elevene benytter kombinasjonen av multiplikasjon som en sum, og kommutativitet i multiplikasjon, som vist i Figur 4.1 nedenfor, der verken a eller b kan være negative, fordi i skal gå fra 1 til henholdsvis a og b.

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{a} b = b \cdot a = \sum_{i=1}^{b} a$$

Figur 4.1: Kombinasjon av multiplikasjon som en sum, og kommutativitet i multiplikasjon

Sfard (2008) beskriver rutiner som en mengde metaregler som bestemmer eller begrenser et handlingsmønster. Når elevene *forklarer hvorfor* kan det ses som en underbyggingsrutine. Rutiner bestemmes og begrenses av metaregler for anvendelsesbetingelser, prosedyre og avslutningsbetingelser. Når elevene *forklarer hvorfor* i denne fasen, ser det ut til at arbeidet følger av at de leser i oppgaven at de skal forklare hvorfor og overbevise noen (1.38, 1.52). Disse formuleringene i oppgaveteksten kan i så fall ses som anvendelsesbetingelser for underbyggingsrutinen for å forklare hvorfor en hypotese er sann. Elevenes metaregler for prosedyren fører i dette tilfellet til en deduktiv struktur og et bevis for hypotesen. Ut fra arbeidet med selve beviset er det ikke lett å vurdere avslutningsbetingelser, fordi elevene ikke ser ut til å diskutere om de er ferdige. Jeg kommer tilbake til dette senere når det gjelder den sosiale interaksjonen mellom elevene.

4.2.3 Viser hvorfor

Etter at de har forklart hvorfor hypotesen er sann, leser elevene i den første gruppen videre fra oppgaven og sier at de «må vise det på arket» (1.108). Utdraget nedenfor, fra fase 1-1-6, viser hvordan elevene deltar når de viser hvorfor, og hvordan deltagelsen kan beskrives gjennom kodene *uttrykker usikkerhet* og *uttrykker forståelse*.

1.108	Berit:	da må vi vise det på arket
1.109	Anne:	så .. hvordan gjør vi det? ... eh .. vi kan jo bare .. okey nå glemte jeg hva jeg sa
1.110	Camilla:	fordi, vi klarer å ta syv gange syv blir jo 49, og syv gange seks blir jo 42 for da ganger man med seks istedenfor
1.111	Anne:	okey, men vi kan skrive 48, mm nei 49 minus 42, som er syv .. 49 minus 42 ikke sant
1.112	Berit:	jeg skjønner ikke ((utydelig))
1.113	Anne:	jeg vet ikke .. skal vi bare skrive når i skjønte det vi skjønte det slik
1.114	Camilla:	ja
1.115	Anne:	er lik syv, og så fra og 48 .. eh minus 42 er seks, og da hvis man tar syv minus seks så får vi .. !en og ... det .. gir mening i hodet, men det [gir ikke mening for noen andre]

Camilla og Anne gjør her noen utregninger basert på eksemplet $7 \cdot 7 = 49$ og $8 \cdot 6 = 48$ som de har brukt tidligere. De regner ut $7 \cdot 6 = 42$ (1.110) trekker 49 fra 42 (1.111) og viser på den måten at reduksjonen i den ene faktoren fra 7 til 6 gir en reduksjon i produktet på 7. De regner til slutt ut at differansen mellom $8 \cdot 6 = 48$ og 42, altså økningen når den andre faktoren øker med én, er 6 (1.115). Til slutt regner de ut at differansen mellom reduksjonen og økningen i produktene underveis er én (1.115).

I utdraget over bruker elevene aritmetikk, altså realiseringer som er kjente for klassen, men det er ikke en deduktiv struktur. Spesielt er det ikke noe som viser stegvis hvordan de kommer fra eksemplet $7 \cdot 7 = 49$ til den generelle hypotesen om at det alltid vil bli én mindre. De starter med at $7 \cdot 6$ blir «en mindre» (1.110), men istedenfor å vise hvordan de kommer derfra til 48, regner de ut differansene uten at de beskriver hva disse differansene viser, og uten å beskrive at de alltid vil gi en differanse mellom produktene på 1. De gjør mer her enn bare å vise til at hypotesen stemmer i ett bestemt eksempel. Det er for eksempel riktig at differansen mellom produktene kommer av differansen mellom 7 og 6, eller egentlig mellom a og $a - 1$, men strukturen er ikke deduktiv og de følger det ikke opp med de generelle beskrivelsene som kreves av et generisk eksempel. Fordi eksemplet viser at differansen mellom produktene er én, og derfor bidrar å sannsynliggjøre hypotesen, deltar elvene her i resonneringsprosessen begrunnelse slik den beskrives av Jeannotte og Kieran (2017), men det tilfredsstiller ikke kravene til prosessen formulering av et bevis.

Elevene *uttrykker usikkerhet* i utdraget over, ved å si at de ikke skjønner (1.112), at de ikke vet (1.113) og at det bare gir mening i hodet (1.115). Utdraget nedenfor fra avslutningen av arbeidet med å vise på et ark, viser hvordan elevene både *uttrykker usikkerhet* og *uttrykker forståelse*.

1.116	Camilla:	[jo men det nei jeg skjønner det]
1.117	Alle:	((utydelig, i munnen på hverandre))
1.118	Camilla:	asså jeg tror vi hadde forklart det sånn i klassen og skjønt det
1.119	Anne:	ja men ... ja .. skal vi skrive noe mer?
1.120	Camilla:	jeg tror det er greit
1.121	Anne:	Ja okei vi skjønte det ((utydelig)) det er sånn vi ville forklart det
1.122	Camilla:	ja, okei, ehh
1.123	Berit:	ja

De *uttrykker usikkerhet* ved å bruke ord som «tror», som når Camilla sier at hun «tror de hadde forklart det sånn i klassen» (1.118) og at hun «tror det er greit» (1.120). Til tross for at de *uttrykker usikkerhet*, avslutter de arbeidet med at de *uttrykker forståelse* for forklaringen, som når Camilla sier at hun «skjønner det» (1.116) og Anne hevder at de alle skjønte det når hun sier at «vi skjønte det» (1.121).

Som når elevene *forklarer hvorfor*, ser det ut til at det er oppgaveteksten som setter i gang arbeidet med at de *viser hvorfor*. Når de i fase 1-1-5 først leser fra oppgaven at de skal vise på et ark, så gjentar de først mye av det som ble sagt i bevisprosessen i fase 1-1-4, men når Berit i fase 1-1-6 gjentar at de må «vise det på arket» (1.108) ser det ut til at de flytter fokus fra å snakke til å skrive ned noe på arket. Analysen over viser at både den deduktive strukturen og de generelle formuleringene blir borte når de skriver ned noe som skal vises til andre. Dette ser altså ut til å være en annen underbyggingsrutine enn den for å *forklare hvorfor*. Igjen ser anvendelsesbetingelsene ut til å være oppgavens formulering, denne gangen om å «vise», og antagelig det at de skal gjøre det skriftlig. Det at generelle formuleringer blir borte kan tyde på at metaregler for elevenes prosedyre i denne rutinen begrenser dem i for stor grad, og fører til at de bare skriver ned aritmetiske beregninger.

Elevene *uttrykker usikkerhet*, men avslutter arbeidet med å *uttrykke forståelse*, uten noen diskusjon om hva som skal til for at klassen skal bli overbevist. Avslutningsbetingelsene som er synlige her er altså at vellykket avslutning på underbyggingsrutinen for å vise hvorfor en hypotese er sann handler om at de selv uttrykker forståelse og at de tror klassen vil forstå. Det er ikke tegn i elvenes samtale til at de aktivt vurderer andre kriterier for når de har forklart eller vist på en god eller akseptabel måte. Samtidig kan det at de *uttrykker usikkerhet* tyde på få metaregler i elevenes underbyggingsrutiner, både for prosedyre og avslutningsbetingelser.

4.2.4 Forsøk på å forklare hvorfor og vise hvorfor

Når den andre gruppen leser oppgaveteksten om at de skal forklare og vise, går de etter hvert over til sammenligning av nye eksempler slik jeg har beskrevet i kapittel 4.1.3 under analysen av elevenes deltagelse i konstruksjon. De gjør likevel et par forsøk på å forklare som vist i utdraget nedenfor, fra fase 2-3.

2.30	Hans:	men hvorfor ... det er slik
2.31	Ida:	at det alltid .. at vi har funnet ut at det alltid blir en mindre
2.32	Elin:	fordi det på en måte utjevner seg når vi går opp på det ene tallet og ned på det andre
2.33	Ida:	jahm …
2.34	Hans:	men det utjevner seg jo ikke, det blir en mindre
2.35	Elin:	nei ikke helt [men liksom]
2.36	Ida:	[det blir] en mindre når man tar å reduserer en og legger på en … skal jeg skrive det
2.37	Hans:	vil det alltid være slik .. ja det vil alltid være slik
2.38	Ida:	hvis du gjør det på samme måte ja
2.39	Hans:	ja ... men hvorfor det er slik har jeg ikke peiling
2.40	Elin:	ehh
2.41	Hans:	vis på et ark hvordan dere kan overbevise resten av klassen ... ehh

Elin *forklarer hvorfor* når hun hevder at det «på en måte utjevner seg» (2.32), men Hans påpeker at det ikke helt utjevner seg, men blir en mindre (2.23). Ida foreslår deretter å skrive ned hypotesen (2.36), før Hans *uttrykker usikkerhet* når han sier at han «ikke [har] peiling» om «hvorfor det er slik» (2.39). Deretter går de videre til å lese neste del av oppgaven, som sier at de skal «vise på et ark» (2.41). Det de sier her endrer ikke den epistemiske verdien til hypotesen, verken til sann eller mer sannsynlig, og er dermed ikke en validering etter modellen til Jeannotte og Kieran (2017). Etter at de har lest at de skal vise på et ark (2.41) gir de flere eksempler fram til de avrunder i utdraget nedenfor.

2.59	Hans:	det som er her det ganger jeg med … to ganger to .. tre ganger tre .. fire ganger fire fem ganger fem
2.60	Elin:	ja det må jo være noe med at --
2.61	Hans:	også de som er skrått ned .. til høyre og til venstre det er … de som da er ganget med … en mindre og en mer .. altså fire ganger seks
2.62	Elin:	ja det må være noe med at for det vil jo ikke funke hvis du ikke har to like tall
2.63	Hans:	nei
2.64	Ida:	nei da .. går det jo ikke
2.65	Hans:	neimen .. jeg vet ikke hvordan man skal … jeg vet ikke hvorfor det er
2.66	Ida:	hvordan dere kan overbevise
2.67	Hans:	har prøvd å overbevise her da

Det ser ut til at Hans har gitt eksempler basert på $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $4 \cdot 4$ og $5 \cdot 5$ (2.59) og når han snakker om «ned til høyre og til venstre» (2.61) er det mulig at han kan ha regnet ut to varianter avhengig av om det er den første eller den andre faktoren som økes med én. Han har altså *testet hypotesen* med flere eksempler. Han *uttrykker usikkerhet* når han sier at han ikke vet hvorfor det er sånn (2.65), men han konkluderer med at han har prøvd å overbevise (2.67). Å teste hypotesen med et eksempel er deltagelse i resonneringsprosessen begrunnelse slik den beskrives av Jeannotte og Kieran (2017), men det er ikke et bevis. Det kan se ut til at Hans er oppmerksom på dette når han sier at han har prøvd å overbevise, men samtidig ikke vet hvorfor det er slik. Når de i fase 2-5 igjen leser fra oppgaven at de skal «overbevise» om «hvorfor det er slik», så kommer de ikke lenger enn de gjorde over.

2.82	Elin:	men hvordan begrunna dere med hvorfor det blir slik
2.83	Hans:	når man øker og reduserer .. med en blir svaret alltid en mindre … enn .. enn
2.84	Elin:	men da sier du bare hva som skjer .. du begrunner jo ikke
2.85	Hans:	jammen jeg har ikke noe svar på det …

Hans formulerer hypotesen på nytt (2.83), Elin påpeker at det ikke er en begrunnelse (2.84) og Hans gjentar at han ikke har noe svar på hvorfor (2.85).

Som for den første gruppen er forsøkene på å *forklare hvorfor* og *vise hvorfor* utløst av oppgavens formulering. Begge grupper *viser hvorfor* med et eksempel, men når den andre gruppen skal *forklare hvorfor* så viser de usikkerhet slik jeg har vist ovenfor og starter deretter med å sammenligne mange forskjellige eksempler. Istedenfor å komme fram til en forklaring konstruerer de flere nye narrativer som resultat av at de *sammenligner*, slik jeg har beskrevet under konstruksjon. Når de avslutter arbeidet med disse sammenligningene går de til slutt videre til neste oppgave.

2.288	Elin:	men vi har svart på den der … eller vil det da alltid bli slik
2.289	Hans:	[vi har hvertfall prøvd]
2.290	Elin:	[det vil det] det vil alltid bli slik
2.291	Ida:	ja
2.292	Elin:	eeeh og det der
2.293	Ida:	overbevis hverandre
2.294	Hans:	jeg synes vi har overbevist
2.295	Ida:	ja .. det synes -
2.296	Elin:	hva skjer hvis dere øker reduserer tallene med mer enn en

De ser her ut til å være overbevist om at det alltid vil være slik som den første hypotesen sier (2.290-291), og de mener at de har overbevist (2.294-295) til tross for at de kun har vist med eksempler at hypotesen er sann.

Elevenes arbeid i fase 2-3 til 2-9 kan ses som rutiner for å forklare hvorfor og vise hvorfor. Anvendelsesbetingelse for disse rutinene ser ut til å være at de leser fra oppgaven at de skal «overbevise» om «hvorfor», og at de skal «vise». De *uttrykker usikkerhet* og har i starten ikke noen klar ide om hvordan de kan forklare, men det som gjentar seg gjennom flere av fasene er at de gir mange eksempler og sammenligner stadig nye eksempler. Den metaregelen som elevene ser ut til å følge er altså å sammenligne flere nye eksempler. Når det gjelder avslutningsbetingelse er det som blir sagt i utdraget over at de mener at de har overbevist (2.294-295). Det er mulig at elevene her skiller mellom å overbevise og å forklare: at de ser på testing med eksempler som vellykket overbevisning, men at de kanskje har gitt opp å forklare. Noe som kan tyde på dette er at Hans tidligere sa at han ikke visste hvorfor hypotesen var sann, men at han likevel mente at de hadde prøvd å overbevise (2.65-67).

4.2.5 Oppsummering av underbygging

Elevene deltar i diskursen med underbygging av narrativer, og tre underbyggingsrutiner peker seg ut, nemlig at de *tester hypotese* med eksempel, *forklarer hvorfor* en hypotese er sann, og *viser hvorfor* ved å skrive det ned for andre. Det er uklart når elevene opplever hypotesen som tilstrekkelig underbygget, men det kan se ut til at de er overbevist allerede etter at de *tester hypotesene* med eksempler. Det kan i så fall tyde på at de *forklarer hvorfor* og *viser hvorfor* bare fordi oppgaven ber om det. Den første gruppens rutine for å *forklare hvorfor* er deltagelse i resonneringsprosessen formulering av et bevis slik den defineres av Jeannotte og Kieran (2017), og kan beskrives som et generisk argument. Det er kun i den første gruppens arbeid med den første oppgaven at elevene gir et bevis for en hypotese, mens den første gruppens rutine for å *vise hvorfor* er deltagelse i resonneringsprosessen begrunnelse. Elevene *gir eksempler* slik de gjorde i arbeidet med konstruksjon av narrativer, og eksemplene støtter både at de *tester hypoteser*, *forklarer hvorfor* og *viser hvorfor*. Resonneringsprosessen eksemplifisering, støtter altså både prosessen begrunnelse og prosessen formulering av et bevis. I beviset bidrar eksemplet som et generisk eksempel. Den andre gruppens rutine for å *forklare hvorfor* er ikke validering etter modellen til Jeannotte og Kieran (2017), men derimot ytterligere deltagelse i leting etter likheter og forskjeller.

Det er stor forskjell på underbyggingsrutinene, som spriker fra å teste med et eksempel, til et generisk bevis, til fortsatt sammenligning av nye eksempler. Dette, sammen med at de uttrykker usikkerhet i arbeidet, og at de ikke diskuterer hva som kjennetegner underbygging av hypoteser, kan tyde på få eller svake metaregler for disse rutinene, både for anvendbarhetsbetingelser, prosedyre og avslutningsbetingelser. Sfard (2008) skiller mellom ritual og utforsking basert på målene med rutinene, som er avslutningsbetingelser. Målet med ritual er sosial tilhørighet, mens målet med utforsking er å konstruere og underbygge narrativer. Når elevene deltar med underbygging av narrativer kan dette tyde på utforskende deltagelse i diskursen, der målet er godkjente narrativer. Elevene *uttrykker støtte* til hypoteser ved at de *tester hypotesene* med nye eksempler. Kanskje oppfatter de allerede der hypotesene som underbygget, men det er uklart når elevene ser hypotesen som tilstrekkelig underbygget. Dersom de etter testing med et eksempel ser på hypotesen som underbygget, så kan det være at målet med elevenes underbyggingsrutiner er et underbygget narrativ, og at elevenes deltagelse derfor kan ses som utforskende. Da er det i så fall slik at prosedyrer og avslutningsbetingelser i underbyggingsrutiner ikke er i tråd med anerkjent matematikk, fordi elevene ikke krever et bevis for tilstrekkelig underbygging av hypoteser.

De to underbyggingsrutinene for å forklare hvorfor og vise hvorfor ser ut til å være tett knyttet til oppgavens formulering, og elevene ser ikke nødvendigvis behov for underbygging etter å ha testet hypotesene med nye eksempler. Avslutningsbetingelser for underbyggingsrutinene ser ut til å være enten fraværende, eller en vurdering av om de selv eller klassen ville forstå det de har presentert. Kanskje jobber elevene til de intuitivt føler at oppgaven er fullført, noe som handler mer om at læreren, eller jeg i dette tilfellet, har fått noe fra dem, enn at de faktisk har fullført hensikten med oppgaven. Kanskje ser de også på hensikten med oppgaven som å gi forskeren videoopptak, noe de på mange måter har rett i. Det kan altså se ut til at elevens mål med rutinene hovedsakelig er sosiale, ved at de selv og andre skal være fornøyd med det de gjør, noe som betyr at underbyggingsrutinene i dette tilfellet utføres som ritualer og ikke som utforsking.

4.3 Sosial interaksjon

Elevene deltar på ulike måter i diskursen med interaksjon mellom hverandre, beskrevet med kodene *bidrar til fremdrift*, *kritiserer fremdrift*, *inkluderer*, *bygger på* og *uttrykker enighet*. Nedenfor gjentar jeg et utdrag, fra fase 1-1-4, der elevene i den første gruppen *forklarer hvorfor* en hypotese er sann. Utdraget viser hvordan elevene følger opp hverandres argumenter, beskrevet gjennom koden *bygger på*.

1.59	Berit:	så tar vi en .. det funka i hodet mitt men jeg vet ikke helt om det funker på papiret ehm ... to ganger to .. så tar vi liksom ganger .. si at vi bare skulle tatt minus på en av toerne så hadde vi fortsatt hatt .. to ... liksom .. du hadde fortsatt hatt tallet to men vi hadde hatt det en ganger mindre og for at vi liksom skal ... eh jeg vet ikke hvor jeg skulle med det her
1.60	Anne:	eh okey vent da ... ehh ... jo, du har syv så tar du en mindre og da får du alltid en .. eller hvis du ganger seks med syv så får du syv tall mindre men vi ganger det enda en gang så blir det 48 og da får vi fortsatt

Berit starter på et argument (1.59), men gir opp, og sier at hun ikke vet hvor hun skulle med dette (1.59). Anne følger opp med å fortsette der Berit startet. Riktignok bruker Anne et annet eksempel, men hun fortsetter å snakke om at en reduksjon av en faktor fører til at antall tall som adderes blir redusert. Hun følger altså opp Berit sin ide om å bruke multiplikasjon som gjentatt addisjon. Noe senere følger også Camilla opp, med å oppsummere Anne sitt resonnement.

1.63	Camilla:	åja så ikke sant så siden vi tar bort en syver
1.64	Anne:	ja
1.65	Camilla:	hvis vi først gjør det da så tar syv ganger syv, blir syv ganger seks, og syv ganger seks det er, 42 .. ikke sant, men så skal vi gange seks en gang !til, og da blir det 49

Camilla beskriver her hvordan en reduksjon av den ene faktoren betyr at det blir et syv-tall mindre å addere, og følger opp med en beskrivelse av hva det vil si å øke den andre faktoren med én, nemlig at de får «seks en gang til» (1.65). Dette illustrerer hvordan alle de tre elevene i denne gruppen bidrar i samtalen, og hvordan de bidrar ved å følge opp og utdype hverandres argumenter.

Elevene *inkluderer* også hverandre ved å stille spørsmål og gi åpne forslag, noe som kan illustreres av utdraget nedenfor fra den første gruppens arbeid, fra fase 1-1-1.

1.1	Anne:	okey, velg to like heltall og multiplisere, gange, dem med hverandre
1.2	Berit:	to like?
1.3	Anne:	da bare tar vi to like ((utydelig))
1.4	Alle:	((utydelig))
1.5	Anne:	okey
1.6	Camilla:	to og to, eller syv og syv, eller
1.7	Anne:	vi kan --
1.8	Berit:	hva med ni og ((utydelig))
1.9	Anne:	trenger ikke ta så høye .. hvis vi bare tar to så er det litt enklere --

Elevene viser her hvordan de er åpne for hverandres innspill, som når Camilla kommer med et forslag, men avslutter med «eller» (1.6) og når Berit formulerer forslaget som et spørsmål når hun sier «hva med ni» (1.8). Samtidig betyr ikke dette at de er overdrevent usikre, noe som vises når Anne tar et valg, ved å si «da bare tar vi to like» (1.2). Hun kritiserer også Berit sitt valg av ni, og foreslår å velge et lavere tall (1.9).

Gjentatte ganger viser det seg at elevene *bidrar til fremdrift*. Spesielt gjør de dette ved å lese opp fra oppgaven, eller gjenta for hverandre hvilken del av oppgaven de holder på med. Utdraget nedenfor, fra fase 1-1-4 og 1-1-5, viser hvordan elevene i den første gruppen *bidrar til fremdrift* ved å lese fra oppgaven når de avslutter forklaringen på hvorfor en hypotese er sann.

1.79	Camilla:	ja, fordi tallet blir ett tall mindre men det ganges en gang til
1.80	Anne:	((utydelig))
1.81	Camilla:	ja
1.82	Berit:	((utrop))
1.83	Camilla:	((utrop))
1.84	Berit:	((utrop))
1.85	Anne:	wow
1.86	Camilla:	okey hvordan kan vi forklare det for andre da hvis vi --
1.87	Berit:	vis på et ark hvordan dere kan

Elevene ser ut til å være positivt overrasket over forklaringen de har gitt, når de kommer med ulike positive utrop, blant annet «wow» (1.85). Både dette og bruk av ordet «ja» (1.79, 1.81) viser hvordan de *uttrykker enighet*. Camilla *bidrar til fremdrift* når hun med et «okey» signaliserer at nå er de ferdige med å forklare for hverandre, og skal videre til å forklare det for andre (1.86). Berit leser så fra oppgaveteksten at de skal vise på et ark (1.87). Ganske umiddelbart etter at forklaringen er fullført går de altså videre i arbeidet ved å følge oppgaveteksten.

Det at elevene gjentatte ganger *bidrar til fremdrift* er i utgangspunktet positivt, ved at de hjelper hverandre med å holde fokus på arbeidet, for eksempel når de stadig går tilbake til oppgaveteksten. Det at de *inkluderer* hverandre og *bygger på* hverandres forklaringer tyder på en oppmerksomhet om hverandres ideer som kan bety at de følger med på hva de andre sier, selv om Tabell 4.3 indikerer at den andre gruppen gjør dette mindre enn den første. Likevel kan det at de *bidrar til fremdrift* gå på bekostning av kritiske spørsmål til det de har gjort. Det at de *inkluderer* hverandre, *bygger på* hverandres forklaringer og *uttrykker enighet* kan kanskje tippe over i overdrevent sosialt fokus. Dersom fremdrift er basert på uttrykt subjektiv enighet, og ikke på vurdering av vellykket konstruksjon og underbygging av et narrativ, tyder dette på ritualisert deltagelse i diskursen.

4.3.1 Oppsummering av sosial interaksjon

Elevene *bidrar til fremdrift*, *inkluderer* hverandre, *bygger på* hverandres forklaringer og *uttrykker enighet*. Dette ser ut til å kunne være positive bidrag til arbeidet, men det er samtidig mulig at fokus på inkludering og fremdrift fører til ritualisert deltagelse i diskursen.

4.4 Overgang fra konstruksjon til underbygging

Elevene deltar i diskursen med både konstruksjonsrutiner og underbyggingsrutiner, som tilsvarer resonneringsprosesser relatert til leting etter likheter og forskjeller, og prosesser relatert til validering. Det er ikke tydelig fra analysen når elevene går over fra å lete etter likheter og forskjeller til å validere, og fram til nå har jeg ikke beskrevet deltagelse i resonneringsprosessen formulering av en formodning. Ifølge Jeannotte og Kieran (2017) er det som skiller formodning fra generalisering, at en formodning har en epistemisk verdi knyttet til seg. Spørsmålet om en generalisering også er formulering av en formodning, er altså om elevene ser hypotesene som sannsynlige, eller om hypotesene for dem kun er mulige sammenhenger som verken er mer eller mindre sannsynlige.

Når elevene *formulerer hypoteser* og *reviderer hypoteser* uttrykker de ikke spesielt støtte til hypotesen. Det er først når de *tester hypotesene* med eksempler at de *uttrykker støtte* til hypotesene. Utdraget nedenfor viser at elevene i den første gruppen *tester hypotese* med et nytt eksempel etter at de har *formulert hypotese*.

1.44	Anne:	vent da så det !er alltid slik?
1.45	Camilla:	ja .. jeg vil bare prøve en ting til tar 10 ganger 10 bare for å se
…		
1.51	Camilla:	okey så det !blir alltid det

De konkluderer med at «det blir alltid det» (1.51) noe som viser at de *uttrykker støtte til hypotesen* på bakgrunn av nye eksempler. Det er mulig å tolke det slik at de i det innledende arbeidet med å *formulere hypoteser* og *revidere hypoteser* ikke enda har noen spesiell tiltro til hypotesene, og at de dermed ikke har knyttet noen epistemisk verdi til hypotesene. I så fall kan ikke det innledende arbeidet ses som deltagelse i resonneringsprosessen formulering av en formodning. Når de *tester hypotesene* med nye eksempler og *uttrykker støtte* til hypotesen viser de derimot at de har tiltro til hypotesen, og har med det tilordnet en epistemisk verdi.

Det at de tilordner en epistemisk verdi gjør at generaliseringen sammen med testing med et nytt eksempel kan ses som deltagelse i resonneringsprosessen formulering av en formodning.

Spørsmålet er om den epistemiske verdien for dem er sannsynlig eller sann etter å ha testet hypotesen, altså om elevene i dette tilfellet ser eksemplet som en støtte til formulering av formodning eller som en validering av en hypotese. Sfard (2008) skiller mellom den innviddes (eng: insider's) og den uinnviddes (eng: outsider's) perspektiv på datamaterialet. For å se datamaterialet utenfra må jeg forsøke å se bort fra konteksten og glemme det jeg vet om resonnering og bevis, og bare se på det som kan ses og høres. Det er da slik at elevene sier at hypotesen er sann når de uttrykker støtte til hypotesen, og dette er da en validering. Det de gjør etterpå gjør de da tilsynelatende kun fordi oppgaven ber dem om det, ikke fordi de ser et behov for å underbygge hypotesen ytterligere. Hvis jeg ser elevenes arbeide innenfra, som en som vet noe om resonnering og bevis, er det at de uttrykker støtte til hypotesen kun en begrunnelse som bare kan sannsynliggjøre hypotesen. Denne begrunnelsen kan da ses som støtte til formulering av en formodning, som så valideres når elevene *forklarer hvorfor* og *viser hvorfor*, fordi de her snakker om «hvorfor». Det er vanskelig å være sikker på når elevene tilordner en epistemisk verdi til hypotesene, og når de ser den epistemiske verdien som sann og dermed ser hypotesen som tilstrekkelig underbygget. Hvis jeg legger til grunn den innviddes perspektiv og tar hensyn til oppgavens formulering, så formulerer de en formodning når de har *testet hypotesen*, og de validerer ikke før de leser at de skal «overbevise» om «hvorfor».

4.5 Oppsummering av funn fra analysen

Fra kodingsprosessen har det fremkommet tre hovedkategorier: konstruksjon, underbygging og sosial interaksjon. Kategorien konstruksjon viser spesielt at elevene *gir eksempler* som de bruker når de *formulerer hypoteser* og *reviderer hypoteser*. Kategorien underbygging viser at elevene også her *gir eksempler* som de bruker når de *tester hypoteser* og deretter *uttrykker støtte til hypoteser*. Videre underbygger de ved å *forklare hvorfor* og *vise hvorfor* hypotesene er sanne, noe de også gjør med utgangspunkt i eksempler. For den første gruppen fører rutinen for å forklare hvorfor fram til et bevis, mens for den andre gruppen fører denne rutinen til at de sammenligner stadig nye eksempler. Kategorien sosial interaksjon viser at elevene støtter hverandre ved å *inkludere* hverandre, *bygge på* hverandres forklaringer og *uttrykke enighet*, og de *bidrar til fremdrift*, spesielt ved å holde fokus på oppgaveteksten.

Elevene deltar i flere av prosessene i modellen til Jeannotte og Kieran (2017): sammenligning, generalisering, identifisering av et mønster, begrunnelse og formulering av et bevis, og støtteprosessen eksemplifisering som bidrar inn i alle de andre prosessene. Det er vanskelig å se at elevene deltar i prosessen formulering av en formodning og eventuelt når det skjer. Dette skyldes at det er vanskelig å se når elevene knytter en epistemisk verdi til hypotesene, og eventuelt om verdien for dem er sannsynlig, mer sannsynlig eller sann.

Analyse med det strukturelle aspektet i modellen til Jeannotte og Kieran (2017) indikerer en abduktiv struktur når elevene *formulerer hypoteser* og *reviderer hypoteser*, fordi de på bakgrunn av et enkelt eksempel formulerer en ny hypotese. Underbygging av en hypotese med å *forklare hvorfor* den er sann, viser en deduktiv struktur i prosessen formulering av et bevis. Elevene i den første gruppen beviser med et generisk bevis, men når de *viser hvorfor* hypotesen er sann baserer de seg på et enkelt eksempel uten generiske beskrivelser og uten deduktiv struktur, og deltar dermed i prosessen begrunnelse. Når den andre gruppen forsøker å *forklare hvorfor* har dette en induktiv struktur, når de ved hjelp av flere eksempler gjør gjentatte sammenligninger.

Analyse av metaregler i elevenes konstruksjons- og underbyggingsrutiner viser at anvendelsesbetingelsene ser ut til å være å følge opp oppgavens formuleringer. Det er altså formuleringer i oppgaveteksten som fører til de *formulerer hypoteser* og *reviderer hypoteser*, og det er formuleringer i oppgaveteksten som fører til underbyggingsrutinene for å *forklare hvorfor* og *vise hvorfor* hypotesen er sann. Det at elevene gjentatte ganger reviderer hypoteser tyder på at elevene ser som et mål, med andre ord en avslutningsbetingelse, å konstruere en passende hypotese, og ikke bare den første mulige hypotesen. Når målet med konstruksjon ikke bare er sosial tilhørighet tyder det på utforskende deltagelse i konstruksjon. Det ser ellers ut til å være få metaregler som styrer og begrenser prosedyre og avslutningsbetingelser for elevenes rutiner. Der hvor det er mulig å tolke avslutningsbetingelser for rutinene for å forklare og vise hvorfor hypoteser er sanne, ser det ut til at vellykket avslutning av rutinene baserer seg på andres aksept. Når elevene også ser ut til å ha større fokus på å *bidra til fremdrift* og å *uttrykke enighet* enn å være kritiske til resonneringen som presenteres, gjør det at deltagelsen med disse underbyggingsrutinene ser ut til å være ritualisert.

5 Diskusjon

Jeg har analysert noen 10.-trinnelevers deltagelse i en felles diskurs av resonnering og bevis i arbeid med multiplikasjon. Jeg har funnet at elevene deltar i flere av prosessene i modellen til Jeannotte og Kieran (2017), både relatert til leting etter likheter og forskjeller og relatert til validering, og spesielt eksemplifisering. Elevene bruker eksempler på flere ulike måter, knyttet til alle de andre prosessene de deltar i. Deltagelsen i konstruksjon og revidering av hypoteser kan beskrives som abduktiv, men når den ene gruppen forsøker å forklare hvorfor hypotesen er sann deltar de gjentatte ganger i prosessen sammenligning på en måte som ser ut til å være induktiv. Jeg har også funnet at elevenes deltagelse i diskursen hovedsakelig kan beskrives som ritualisert, men at det er tegn til utforskende deltagelse i konstruksjon av hypoteser. I dette kapitlet vil jeg diskutere disse funnene opp mot relevant litteratur og se dem i sammenheng med praksis i skolen. I avsnitt 5.1 ser jeg på elevenes bruk av eksempler og abduktiv resonnering. Videre vil jeg i avsnitt 5.2 ser på elevenes hovedsakelig ritualiserte deltagelse. Jeg vil så i avsnitt 5.3 se på det at elevene deltar i de fleste av resonneringsprosessene, både med konstruksjon og underbygging av narrativer. Avslutningsvis vil jeg i avsnitt 5.4 diskutere kvaliteten på studien.

5.1 Bruk av eksempler

Resultatene fra undersøkelsen viser at elevene deltar i diskursen med konstruksjon og underbygging av hypoteser, og de gir eksempler både i forbindelse med konstruksjon og underbygging. Eksempler bidrar på ulike måter, og brukes for å formulere, revidere og teste hypoteser, og for å forklare og vise hvorfor en hypotese er sann. Jeg vil her se elevenes bruk av eksempler i sammenheng med abduktiv, induktiv og deduktiv struktur, og se på muligheter og utfordringer ved elevenes bruk av eksempler.

I det innledende arbeidet med konstruksjon av hypoteser gir elevene eksempler som benyttes for å formulere og revidere hypoteser. Mine funn viser at de ikke gjør en systematisk sammenligning av eksemplene, men at hypoteser formuleres på bakgrunn av enkelteksempler, noe som gjør elevenes konstruksjon av hypoteser abduktiv. Pedemonte og Reid (2011) viser til at i matematikk er prosessen med å oppdage og å formulere formodninger ofte abduktiv, noe denne studien dermed støtter. Det kan likevel være at det var oppgavens formuleringer som i dette tilfellet la opp til en abduktiv struktur, ved at elevene ble bedt om å starte med to tall og beskrive hva som skjedde når de endret tallene. Likevel prøvde ikke elevene bare ett eksempel, men både reviderte og testet hypotesen ved hjelp av ytterligere eksempler. Det er mulig at spørsmålet «vil det alltid være slik?» kan ha bidratt til at de ga flere eksempler. Dersom oppgaven hadde bedt elevene finne tre eller flere eksempler ville de kanskje benyttet en induktiv struktur med mer systematisk sammenligning.

Det at elevene formulerte hypoteser på bakgrunn av et enkelt eksempel, og så ga nye eksempler som førte til revidering av eller støtte til hypotesen, beskriver Rivera (2008) som en abduktiv syklus. Ifølge ham handler abduksjon om å oppdage en hypotese, med påfølgende steg, som han kaller induktive, som styrker eller bidrar til å revidere hypotesen, eller velge mellom flere mulige hypoteser. Rivera (2008) diskuterer hvordan abduksjon handler om å velge en hypotese som passer best mulig, noe det kan se ut til at elevene gjorde når de utviklet hypotesene videre fra første hypotese om en differanse på fire, til å være avhengig av økningen og reduksjonen, n. Rivera (2008) beskriver en spiral av gjentatt abduksjon og induksjon, fram mot det han kaller en generalisering, som så må bevises deduktivt. Det Rivera (2008) kaller en generalisering, støttet av flere eksempler, vil med modellen til Jeannotte og Kieran (2017) beskrives som en formodning, fordi den etter testing har fått tilordnet den epistemiske verdien sannsynlig. Min undersøkelse viser derimot at når elevene har testet hypotesen med eksempler, så ser det ut til at de opplever hypotesen som validert, og antagelig ikke ser behovet for et deduktivt bevis. Elevene ser altså ut til å godta ett eller noen få eksempler som tilstrekkelig underbygging av en hypotese, noe som er velkjent fra tidligere forskning (Stylianides & Stylianides, 2018; Stylianides et al., 2017).

Morselli (2006) fant fire ulike profiler i universitetsstudenters bruk av eksempler, der den tredje og fjerde profilen var kjennetegnet av mange numeriske eksempler med mål om å forstå problemet. Studenter i den tredje profilen brukte eksemplene til å reflektere over grunner til at hypotesen var sann, noe som førte til argumentasjon i form av generisk eksempel. Studenter i den fjerde profilen brukte eksemplene hovedsakelig til å teste og illustrere hypotesen, og dere bruk av eksempler beskrives som usystematisk. I min studie brukte elevene i den første gruppen eksempler for å finne en forklaring som førte til et generisk bevis, noe som dermed passer med den tredje profilen til Morselli (2006). Den andre gruppens gjentatte bruk av numeriske eksempler, uten å reflektere over grunnene til at hypotesen er sann, passer derimot med den fjerde profilen. Morselli (2006) konkluder med at når eksemplene brukes på en tilfeldig måte uten en klar metode, ser det ikke ut til at de hjelper elevene fram til et bevis. Den andre gruppens bruk av eksempler i min studie ser ut til å støtte dette, fordi deres gjentatte sammenligninger av nye eksempler ikke førte dem til innsikt i den opprinnelige hypotesen, kun til stadig nye mulige hypoteser. Kanskje kan arbeidet til Morselli (2006) inspirere til å finne måter å hjelpe elevene til mer målrettet bruk av eksempler når de skal forklare hvorfor en hypotese er sann.

Det at elevene i min undersøkelse deltok med underbygging av hypotesen, til tross for at de kanskje allerede etter testing med eksempler så hypotesen som tilstrekkelig underbygget, skyldes antagelig at oppgaven ba dem om å «overbevise hverandre om hvorfor» og å «vise». Også i underbygging spiller eksempler en sentral rolle. Beviset elevene gir er et generisk bevis, altså et som tar utgangspunkt i et konkret eksempel, men viser ved hjelp av generelle formuleringer hvorfor hypotesen er sann. Når de så skal «vise» hvorfor hypotesen er sann, viser de en utregning basert på et konkret eksempel, noe som ikke kan beskrives som et bevis. Det at de først gir et bevis og så deretter kun en utregning basert på et eksempel, henger kanskje sammen med tidligere funn om at elever ikke nødvendigvis godtar at et deduktivt resonnement beviser, og at de heller ikke ser det generelle i et deduktivt argument eller et generisk eksempel (Mariotti, 2006; Stylianides et al., 2017).

Remillard (2014) beskriver intervensjonspunkter i universitetsstudenters arbeid der det kunne vært nyttig med støtte av en lærer. Kanskje kan det at elever uttrykker støtte til en hypotese på bakgrunn av enkelteksempler være et slikt punkt. En lærer kan da benytte anledningen til å diskutere med elevene om eksempler kan bevise eller styrke hypotesen, og diskutere forskjellen på å formulere en formodning de har tro på og det å bevise formodningen. Et annet sted der støtte fra lærer kan være nyttig, kan være elevers bruk av ulike eller uhensiktsmessige realiseringer. Min undersøkelse har vist at elevene benyttet ulike begrunnelser, inkludert empiriske argument og generisk bevis, og ulike realiseringer, men ikke algebra. Ved å se på bruk av empirisk argument og realiseringer som kanskje ikke er optimale som steder der en lærer bør støtte, kan lærere benytte anledningen til å sørge for at alle elevenes forsøk på validering presenteres for felles diskusjon i klassen. En felles diskusjon om muligheter og ulemper med ulike begrunnelser og realiseringer kan bidra til at generisk bevis kan fungere som en bro mellom empiriske argumenter og bevis som ikke er basert på eksempler, slik Stylianides et al. (2017) foreslår.

Analysen av elevenes deltagelse i diskursen med Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering viste hvordan eksemplifisering bidro som en støtteprosess både i konstruksjon og underbygging av hypoteser. Eksemplifisering bidro inn i alle resonneringsprosessene som ble identifisert i elevenes deltagelse, som var sammenligning, identifisering av et mønster, generalisering, begrunnelse og formulering av et bevis. Modellen synliggjør på den måten hvordan eksempler bidrar både i konstruksjon og underbygging av hypoteser, og støtter med det Jeannotte og Kieran (2017) sin påstand om at eksemplifisering er tett knyttet til både konstruksjon og underbygging. Eksempler bidrar altså som en del av resonnering og bevis, men har noen utfordringer som lærere kan diskutere med elevene med utgangspunkt i elevenes eget arbeid.

5.2 Ritualisert deltagelse

Mine funn viser at elevenes deltagelse i diskursen hovedsakelig var ritualisert, men at det også er tegn til utforskende deltagelse. Elevene i den første gruppen formulerte hypoteser, og slo seg ikke til ro med første mulige hypotese, men reviderte hypotesen flere ganger i arbeidet med den andre oppgaven. Dette kan tyde på utforskende deltagelse, fordi de så ut til å være opptatt av formulering av en mest mulig passende hypotese. Likevel ser det ut til at de gjennomgående var mer opptatt av fremdrift enn kritisk vurdering, spesielt når de skulle underbygge hypotesene. Det så ut til at de baserte vellykket fullføring av underbygging på andres aksept, og ikke på en diskusjon av kriterier for matematisk resonnering. Samtidig uttrykte de usikkerhet både om hvordan de skulle underbygge og når underbygging skulle anses utført.

Analysen antyder at elevene har få metaregler å basere deltagelsen sin på, spesielt i underbygging. Dette ser ut til å gjelde både hvordan de skal forklare og vise hvorfor en hypotese er sann, og hva som er en vellykket avslutning av rutinene. Når den første gruppen skulle forklare hvorfor hypotesen var sann og så vise det skriftlig for andre ga de først et bevis, leste at de skal vise for andre, gjentok så omtrent det samme beviset, før de til slutt viste en begrunnelse basert på et eksempel. Når den andre gruppen skulle forklare og vise hvorfor hypotesen var sann førte det til at de gjentatte ganger sammenlignet nye eksempler. Deltagelsen til begge gruppene kan tyde på det Sfard (2008) kaller for et ad hoc-mønster, som betyr at elevene ikke har en standard rutine som passer med den situasjonen de opplever, men prøver å anvende noe de kjenner fra andre situasjoner. Sfard beskriver dette som noe som gjerne skjer i skolen med nykommere i en diskurs. Det kan altså se ut til at elevene ikke kjenner rutiner for å forklare og vise hvorfor generelle påstander er sanne, slik som passende bruk av algebra og deduktiv struktur, men forsøker etter beste evne å gjøre noe de kjenner fra før. Det at den første gruppen ender opp med å vise med en utregning på et enkelt eksempel, betyr kanskje at det er det de forbinder med å vise noe til andre i matematikk. Et av intervensjonspunktene som Remillard (2014) fant i sin studie der studentene kunne hatt nytte av støtte fra en lærer var nettopp det at studentene så ut til å være fanget i ad hoc-deltagelse. Hun beskriver at studentene til tross for en lovende start på resonneringen strevde med å vise ideene sine til andre. Når studentene har gått gjennom flere runder med forsøk på forklaring uten å lykkes, foreslår Remillard det som et passende tidspunkt for læreren å støtte dem.

Sfard (2017a) diskuterer hvordan ritualisert deltagelse i matematisk diskurs kan skyldes at elevene ikke har møtt en diskurs der matematikk handler om å avlede narrativer fra andre narrativer, og at de ikke har lært metaregler for slik deltagelse. Ifølge Sfard er det ikke bare det at elevene ikke har lært metareglene, men de kjenner ikke engang til at slike metaregler eksisterer, og har ikke noe annet valg enn å gjøre det de tror er forventet av dem. Dette kan være med på å forklare elevenes ritualiserte deltagelse i diskursen. Dersom de ikke har vært deltagere i en matematisk diskurs der de har møtt metaregler for resonnering og bevis, kan de ikke vite når ulike underbyggingsrutiner er passende. De kan da heller ikke vite hva som kjennetegner et bevis, eller hvordan de kan vurdere om deres konstruksjon og underbygging av hypoteser er akseptable. Ifølge Jeannotte og Kieran (2017) krever metareglene i matematisk diskurs at matematisk resonnering til slutt må struktureres deduktivt, noe elevene i min studie ikke gjør når de skriftlig skal vise til andre hvorfor hypotesen er sann. Sfard (2007, 2008) hevder at utvikling av elevenes metaregler ikke er noe man kan forvente at skjer raskt, fordi elevene over lang tid må bli vant til de nye reglene. Samtidig hevder hun at metaregler ikke er naturlover, men historisk etablerte sedvaner som har vist seg å være nyttige. Det er derfor ikke slik at elever kan finne opp disse metareglene på egen hånd. Elevene må lære metaregler gjennom deltagelse i en diskurs der disse metareglene praktiseres. Når elevene i min studie ser ut til å ha en ritualisert deltagelse, spesielt i underbygging av hypotesene, kan det skyldes at de i liten grad har deltatt i en diskurs der metaregler for bevis har vært praktisert. Det er også mulig at metareglene har vært praktisert, men at de ikke har vært praktisert over tilstrekkelig lang tid.

Videre hevder Sfard (2007) at elever aktivt må være villige til å forsøke å se lærerens grunner til å delta i diskursen på den måten læreren gjør, for eksempel å bevise påstander som kan oppleves åpenbare, og slik lære metareglene læreren følger. Hun påpeker likevel at det kan være nyttig, men vanskelig, å diskutere konflikt i metaregler eksplisitt med elevene. Kanskje kan begrepene anvendelsesbetingelser, prosedyre og avslutningsbetingelser gjøre lærere oppmerksomme på en måte å snakke om konflikt mellom elevenes deltagelse i en diskurs av resonnering og bevis, og anerkjent matematisk diskurs. Kanskje kunne også eksplisitt diskusjon i klassen av definisjoner av bevis, slik som i Stylianides og Al-Murani (2010) og

Jeannotte og Kieran (2017), ha hjulpet elever til selv å kunne vurdere hva som kreves av underbygging av narrativer.

Det er verdt å merke seg at når Sfard (2017a) hevder at matematikk handler om å avlede narrativer fra andre narrativer og at elevene kanskje ikke kjenner til metaregler for slik deltagelse, så diskuterer hun ikke spesifikt en diskurs av resonnering og bevis, men matematisk diskurs generelt. Jeg finner det interessant å se Sfard (2017a) sin diskusjon av matematikk som å avlede narrativer fra andre narrativer i sammenheng med kjerneelementet resonnering og argumentasjon i det nye læreplanverket, som har følgende beskrivelse:

> Elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene må kunne følge og vurdere matematiske resonnementer. Elevene må også lære å utforme sine egne resonnementer både for å løse problemer og for å argumentere for framgangsmåter og løsninger. (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15)

Resonnering og argumentasjon er slik det beskrives i kjerneelementet altså en måte elevene kan se at matematiske regler ikke er tilfeldige. Sfard (2017a) beskriver matematikk på samme måte når hun hevder at det er ønskelig at elevene ser

> mathematics as a discourse in which new stories emerge logically one from another rather than being a matter of authorities' arbitrary decisions, and where one is motivated more by the need to know and understand than by his respect for social conventions (Sfard, 2017a, s. 61)

To av de nye kjerneelementene i læreplanen sier at elevene skal oppdage sammenhenger, blant annet gjennom utforsking av tall og utregninger, noe som gir elevene mulighet til å utforme egne resonnementer. For at dette skal føre til at de skal forstå at matematiske regler har klare begrunnelser, må de som del i å oppdage sammenhenger også begrunne disse sammenhengene. De må derfor «lære å utforme sine egne resonnementer» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Min studie har vist at noen elever på 10. trinn kan delta i en slik utforsking av tall, og de kan utforme egne resonnementer. Studien viser samtidig at elevene er usikre og at de i liten grad kjenner metaregler for resonnering og bevis. For at resonnering og bevis skal kunne brukes som en av flere «arbeidsmåter, metoder og tenkemåter i matematikk» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15) slik kjerneelementene beskriver, må elevene lære at matematisk aktivitet styres av metaregler for å avlede nye narrativer fra andre narrativer (Sfard, 2017a, b). Elevene skal altså ikke nødvendigvis lære bevis som et eget tema, men de skal lære å følge anerkjente metaregler for å avlede matematiske narrativer fra andre narrativer som en tenkemåte i matematikk.

5.3 Elevenes deltakelse i ulike prosesser i resonnering og bevis

Analysen viser at elevene i min undersøkelse deltok i diskursen med konstruksjon og underbygging av hypoteser. Spesielt elevenes underbyggingsrutiner ser ut til å være knyttet til det elevene leser i oppgaven. Dette kan tyde på at formuleringene «vil det alltid være slik», «overbevis … om hvorfor» og «vis på et ark hvordan dere kan overbevise» har ført til det Lavie et al. (2018) kaller oppgavesituasjoner som fører til at elevene ser en grunn til å handle. Det ser også ut til at elevene har tolket disse oppgavesituasjonene slik at de skulle handle på en bestemt måte. Det at rutinene ser ut til å være knyttet til oppgaveteksten kan bety at oppgavens formuleringer har fungert for å føre til deltagelse i arbeid med resonnering og bevis. Kanskje var det «hva skjer» som førte til at elevene konstruerte og reviderte hypoteser. Videre førte formuleringen «vil det alltid være slik» til at elevene testet hypotesen med et eksempel, noe som så ut til å overbevise elevene om at hypotesen var tilstrekkelig underbygget. Elevene ga et bevis først når oppgaven ba dem om å «overbevise … om hvorfor». Formuleringene om å overbevise om hvorfor er inspirert av Stylianides og Al-Murani (2010) sin definisjon av bevis til bruk i klasserommet, og denne studien støtter dermed bruk av denne definisjonen eller lignende formuleringer for å lede elevene til arbeid med å underbygge hypoteser.

Stylianides og Al-Murani (2010) påpeker at det å overbevise og å hjelpe noen å forstå hvorfor henger sammen med to ulike funksjoner bevis kan ha, henholdsvis å begrunne at en påstand er sann og å forklare hvorfor påstanden er sann. Formuleringen «vil det alltid være slik» ser ut til å ha ført til en begrunnelse med et eksempel, mens det var først når elevene skulle «overbevise» om «hvorfor» at de ga et bevis. Det at kombinasjonen av disse ordene i oppgaveteksten førte elevene til et bevis, støtter et fokus på begge de to funksjonene ved bevis, begrunnelse og forklaring, slik Stylianides og Al-Murani (2010) diskuterte og brukte definisjonen aktivt i sin studie.

Denne studien viser at en oppgavetekst som i utgangspunktet var ment å føre til et bevis for en hypotese, førte til både et bevis og en begrunnelse. Dette betyr at lærere må være oppmerksomme på at det kan være stor forskjell på elevenes underbygging av hypoteser i ulike situasjoner. Selv om elevene i samtalen i gruppen formulerte et bevis, presenterte de en begrunnelse som ikke var et bevis når de skulle vise det skriftlig for andre. Det er derfor mulig at elevene ikke ville presentert et bevis for klassen, dersom de ble bedt om å presentere arbeidet sitt. Kanskje kan begrepene rutiner og metaregler hjelpe lærere å bli oppmerksomme på hvordan samme oppgave kan føre til ulike rutiner. Kanskje kan også en definisjon av bevis slik som i modellen til Jeannotte og Kieran (2017) bidra til oppmerksomhet om hva som kreves for underbygging av narrativer, noe læreren kan lede klassen i en diskusjon om.

5.4 Vurdering av kvalitet på undersøkelsen

De metodiske valgene som ligger til grunn for undersøkelsen har hjulpet meg til å beskrive kjennetegn på elevenes deltagelse i en matematisk diskurs av resonnering og bevis. Oppgaven og formuleringen av oppgaveteksten fungerte for at elevene skulle formulere hypoteser og validere disse. Det at jeg ikke hadde mulighet til å observere elevene i klasserommet gjorde observasjonssituasjonen mer kunstig enn jeg hadde ønsket, men samtidig var det en mulig fordel at elevene var konsentrert om oppgaven, slik at arbeidet med resonnering og bevis var mer i fokus enn det ellers ville vært. Det maskerer likevel andre utfordringer med en klasseromssituasjon, slik som mulig påvirkning fra andre elever og læreren.

Et vesentlig forbehold i studien er at jeg kun har observert seks elever, og det er derfor ikke mulig å generalisere disse resultatene til andre elever. Det studien derimot viser, er eksempler på hvordan elever kan delta i en diskurs, med de kjennetegn jeg har beskrevet. Studiens bidrag er en detaljert beskrivelse av hvordan elever arbeider med en slik oppgave, noe som i en klasseromssituasjon er vanskelig for en lærer å observere i detalj. Slik kan den inspirere til refleksjon om hva andre elever vil kunne gjøre, og hvordan lærere kan legge til rette for læring av og med resonnering og bevis. Ved å vise frem et eksempel på hva resonnering og bevis kan være i norsk grunnskole, bidrar studien til en diskusjon om hva som menes med resonnering og bevis, og hvordan det kan henge sammen med de nye kjerneelementene som nå blir en del av læreplanene.

Jeg har i denne studien undersøkt seks elevers diskurs av resonnering og bevis, og blant annet beskrevet metaregler i elevenes rutiner. Rutiner er handlingsmønstre som repeteres i bestemte situasjoner, og det er ikke mulig å identifisere dette ut fra en enkelt isolert episode (Lavie et al., 2018; Sfard, 2008). Jeg mener likevel at studien har gitt verdifull informasjon om hvordan norske elever kan delta i en diskurs av resonnering og bevis ved avslutningen av grunnskolen, selv om dette ikke trenger å være representativt verken for disse elevenes deltagelse i andre situasjoner eller for andre elever. Studien viser også hvordan Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk og Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematisk resonnering kan benyttes for å identifisere interessante kjennetegn ved elevers deltagelse i en diskurs av resonnering og bevis, både i forskning og i undervisningssituasjoner.

6 Avslutning og perspektivering

Denne studien viser et eksempel på hvordan elever kan delta i en diskurs av resonnering og bevis med utgangspunkt i en oppgave om multiplikasjon, noe som kan gi grunnlag for refleksjon om undervisningspraksis. Det at elevene deltar i flere av prosessene i matematisk resonnering viser hvordan det er mulig å engasjere elever i en aktivitet der de både skal formulere hypoteser og bevise dem, slik Stylianides (2008) foreslår. Studien illustrerer kjente utfordringer, som at elever godtar empiriske argumenter som bevis for generelle påstander, men den viser samtidig hvordan eksempler også fungerer som støtte i alle prosessene i matematisk resonnering.

Analyse og diskusjon med kommognisjon antyder en ritualisert deltagelse som kan skyldes få metaregler og ad hoc deltagelse i diskursen, spesielt i underbygging av hypotesene. En mulig konsekvens av bruk av eksempler og ritualisert deltagelse er at lærere må være bevisste på hvordan eksempler benyttes i undervisningen. Eksempler kan støtte elevenes arbeid med resonnering og bevis, men læreren må praktisere en diskurs der generelle påstander ikke kan begrunnes med empiriske argumenter, men må bevises deduktivt. På den måten lærer elevene helt fra starten «at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15) som er det første som fremheves i kjerneelementet resonnering og argumentasjon i den nye læreplanen.

Rammeverkene jeg har benyttet i denne studien har gjort synlig noen kjennetegn ved elevenes deltagelse i diskursen, som har ledet til refleksjoner om resonnering og bevis i skolen. Samtidig mener jeg at begge rammeverkene kan bidra til produktiv kommunikasjon om resonnering og bevis mellom forskning og skole, og også i skolen, slik Jeannotte og Kieran (2017) ønsker at deres rammeverk skal bidra til. Det er nødvendig at lærere er bevisst hva som menes med at elever skal begrunne, og spesielt i forbindelse med innføring av nye læreplaner med større fokus på argumentasjon og resonnering er det viktig med en felles forståelse av hva disse ordene skal bety. Jeg mener at modellen til Jeannotte og Kieran (2017) kan bidra til dette, sammen med flere av de andre kildene jeg har referert i teorikapitlet i forbindelse med omtalen av bevis i skolen. Det er også interessant at Jeannotte og Kieran (2017) skiller mellom bevis og formelt bevis, noe som gjør at ordet bevis kan brukes i skolen uten at det trenger å knyttes til formelle realiseringer. Jeg mener også at Sfard (2008) sitt rammeverk kan bidra til bevissthet om resonnering og bevis, spesielt med skillet mellom hvordan en rutine utføres, når det er passende å utføre den og når den kan anses fullført. Dette kan bidra til at lærere diskuterer med elever når ulike handlinger er passende, og spesielt hvordan de selv kan vurdere om en rutine er vellykket utført.

Elevenes ritualiserte deltagelse i underbygging av hypoteser indikerer at de har få metaregler eller få tilgjengelige rutiner for underbygging av matematiske narrativer i sin matematiske diskurs. Dersom kjerneelementet resonnering og argumentasjon skal fungere som «arbeidsmåter, metoder og tenkemåter i matematikk» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15) er det nødvendig at elever i større grad enn i denne studien har individualisert metaregler for resonnering og bevis. Det vil da være nødvendig at lærere er bevisst hvilke metaregler relatert til resonnering og bevis de eksponerer, fordi elevene over tid vil individualisere disse som stadig mer kompetente deltagere i klasseromdiskursen (Sfard, 2008, 2017a, b). I forbindelse med innføringen av den nye læreplanen vil det derfor være interessant å undersøke norske læreres kompetanse relatert til resonnering og bevis, kanskje inspirert av Ma (2010) sin undersøkelse av amerikanske og kinesiske læreres håndtering av en elevs matematiske påstand. Lærere eksponerer metaregler gjennom sin håndtering av matematiske påstander, egne og elevers, for eksempel om påstander begrunnes med eksempler eller om de bevises. Hvilke metaregler lærere eksponerer vil være avgjørende for om kjerneelementet resonnering og argumentasjon vil bidra til å vise «den overordnet prioriterte retningen og innholdet i faget» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15) og bidra til at elever kan «forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser» (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15).

Det vil også være interessant å undersøke hva lærere legger i beskrivelsene av kjerneelementene, og hvordan de ser for seg at kjerneelementet resonnering og argumentasjon kan implementeres i arbeid med utvalgte kompetansenivå på ulike trinn. En mulig studie kan være å prøve ut hvordan kjerneelementene i den nye læreplanen, spesielt resonnering og argumentasjon, men også representasjon og kommunikasjon, og abstraksjon og generalisering, kan implementeres i grunnskolen. Da både som et mål i seg selv, men spesielt som et middel for undervisning av kompetansemålene.

Referanser

Alvesson, M. & Sköldberg, K. (2018). *Reflexive methodology: New vistas for qualitative research* (3. utg.). London: SAGE.

Antonsen, R. (2014). *Logiske metoder: Kunsten å tenke abstrakt og matematisk*. Oslo: Universitetsforlaget.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Blanton, M. L. & Stylianou, D. A. (2014). Understanding the role of transactive reasoning in classroom discourse as students learn to construct proofs. *The Journal of Mathematical Behavior, 34*, 76-98. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.02.001

Carlsen, M. (2018). Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. *Educational Studies in Mathematics, 99*(3), 277-291. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9844-1

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National council of teachers of mathematics* (s. 3-38). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2017). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (u.å.). Etiske retningslinjer. Hentet fra https://www.etikkom.no

Hanna, G. & Barbeau, E. (2002). *Proof in mathematics*. Hentet fra http://www.math.utoronto.ca/barbeau/hannajoint.pdf

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National council of teachers of mathematics* (s. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Inference. (u.å.). I *Stor engelsk ordbok*. Kunnskapsforlaget. Hentet fra https://www.ordnett.no/search?language=en&phrase=inference

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822

Knuth, E. J., Choppin, J. M. & Bieda, K. N. (2009). Proof: Examples and beyond. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 206-211.

Kunnskapsdepartementet. (2018). *Kjerneelementer i fag*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2018). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York, NY: Routledge.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. I A. Gutiérrez & P. Boero (Red.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (s. 173-204). Rotterdam: Sense.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 95-124. https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289. https://doi.org/10.1007/bf00312078

Mercer, N. & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education, 20*(6), 507-528. https://doi.org/10.2167/le678.0

Miles, M. B., Huberman, A. M. & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (3. utg.). Los Angeles, CA: SAGE.

Morselli, F. (2006). Use of examples in conjecturing and proving: An exploratory study. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the psychology of mathematics education* (bd. 4, s. 185-192). Prague: PME.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. (u.å.). Behandle personopplysninger i student- og forskningsprosjekt. Hentet 5. september 2018 fra https://innsida.ntnu.no/wiki/-/wiki/Norsk/Behandle+personopplysninger+i+forskningsprosjekt

Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. Trondheim: Matematikksenteret. Hentet fra https://utdanningsforskning.no/artikler/sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk/

NSD - Norsk senter for forskningsdata. (u.å.). Må jeg melde prosjektet mitt? Hentet fra https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/index.html

Pedemonte, B. & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 281-303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. I M. Bosch (Red.), *Proceedings of the fourth Congress of the European society for research in mathematics education* (s. 458-468). Sant Feliu de Guixols, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.

Reid, D. & Vargas, E. (2017). Proof-based teaching as a basis for understanding why. I T. Dooley & G. Gueudet (Red.), *Proceedings of the tenth Congress of the European society for research in mathematics education (CERME10, February 1 – 5, 2017)* (s. 235-242). Dublin: DCU Institute of Education and ERME.

Reid, D. & Vargas, E. V. (2018). When is a generic argument a proof? I A. J. Stylianides & G. Harel (Red.), *Advances in mathematics education research on proof and proving: An international perspective* (s. 239-251). Cham, Sveits: Springer International Publishing. Hentet fra https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_17

Remillard, K. S. (2014). Identifying discursive entry points in paired-novice discourse as a first step in penetrating the paradox of learning mathematical proof. *The Journal of Mathematical Behavior, 34*, 99-113. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.02.002

Rivera, F. D. (2008). On the pitfalls of abduction: Compolicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 17-25.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334-370). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics / Information Age Publishing.
Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57. https://doi.org/10.1023/a:1014097416157
Sfard, A. (2006a). Participationist discourse on mathematics learning. I J. Maasz & W. Schloeglmann (Red.), *New mathematics education research and practice* (s. 153-170). Rotterdam: Sense Publishers.
Sfard, A. (2006b). Telling ideas by the company they keep: A response to the critique by Mary Juzwik. *Educational Researcher, 35*(9), 22-27. https://doi.org/10.3102/0013189X035009022
Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.
Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013
Sfard, A. (2017a). Ritual for ritual, exploration for exploration: Or, what learners are offered is what you get from them in return. I J. Adler & A. Sfard (Red.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (s. 41-63). New York, NY: Routledge.
Sfard, A. (2017b). Teaching mathematics as an exploratory activity: A letter to the teacher. I J. Adler & A. Sfard (Red.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (s. 123-132). New York, NY: Routledge.
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675
Stylianides, A. J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0
Stylianides, A. J. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.
Stylianides, A. J. (2014). Proof. I P. Andrews & T. Rowland (Red.), *Masterclass in mathematics education: International perspectives on teaching and learning* (s. 101-112). London: Bloomsbury Academic.
Stylianides, A. J. & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 21-36. https://doi.org/10.1080/14794800903569774
Stylianides, A. J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. I Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Red.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (s. 315-351). Rotterdam: SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2018). Addressing key and persistent problems of students' learning: The case of proof. I A. J. Stylianides & G. Harel (Red.), *Advances in mathematics education research on proof and proving: An iternational perspective* (s. 99-113). Cham, Sveits: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_7

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 237–266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 299-306. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9638-7

Törner, G. & Arzarello, F. (2013). Grading mathematics education research journals. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 2013*(95), 31-34.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8. utg.). Boston: Pearson.

Weisstein, E. W. (u.å.-a). Conjecture. I *MathWorld: A Wolfram web resource*. Hentet fra http://mathworld.wolfram.com/Conjecture.html

Weisstein, E. W. (u.å.-b). Hypothesis. I *MathWorld: A Wolfram web resource*. Hentet fra http://mathworld.wolfram.com/Hypothesis.html

Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(5), 390-408. https://doi.org/10.2307/749187

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet "Elevers argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver"?

Dette er et spørsmål til dere om deres barn kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke elevers samtale når de arbeider med matematikkoppgaver. I dette skrivet gir vi dere informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for dere.

Formål
Dette prosjektet er en del av et mastergradsstudium i matematikkdidaktikk ved NTNU. Studiet omfatter et forskningsarbeid som skal presenteres i en masteroppgave. Prosjektet er en del av arbeidet med masteroppgaven.

Vi vil i prosjektet undersøke elevenes samtale når de jobber med matematikkoppgaver, i samarbeid med andre i små grupper. Bakgrunnen for prosjektet er å lære mer om hvordan elever samarbeider om oppgavene og hvordan de argumenterer for sine forslag.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Institutt for lærerutdanning ved NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Klassen er valgt ut av rektor etter henvendelse fra oss om skolen har mulighet til å stille en klasse til rådighet for dette prosjektet. Elevene velges ut i samråd med matematikklærer.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis ditt barn velger å delta i prosjektet, innebærer det at vi i ca. en skoletime vil observere elevenes arbeid med matematikkoppgaver. Elevene vil jobbe med oppgavene i gruppe sammen med 2-3 andre elever. Elevenes arbeid med oppgavene vil bli videofilmet. Videoopptakene vil bli transkribert, og barnets navn vil bli erstattet med et pseudonym.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen/lærer om du velger å delta eller ikke.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om barnet til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun undertegnede student og veileder ved NTNU som vil ha tilgang til personopplysninger. Vi vil oppbevare personopplysninger innelåst, kryptert og beskyttet med passord.

Anonymiserte skriftlige utdrag fra elevenes samtale vil bli brukt i masteroppgaven. Deltagerne vil ikke kunne gjenkjennes i den publiserte oppgaven, da skolens og elevenes navn endres.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 15. mai 2019. Når prosjektet er avsluttet vil alt datamateriale være anonymisert og opptakene vil bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Rune Nakim, på epost (nakim@stud.ntnu.no) eller telefon: nnnnnnnn.
- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Kirsti Rø, på epost (kirsti.ro@ntnu.no).
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (personvernombud@ntnu.no).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig (veileder)	Student
Kirsti Rø	Rune Nakim

Samtykkeerklæring

Vi har mottatt og forstått informasjon om prosjektet "Elevers argumentasjon i arbeid med matematikkoppgaver", og har fått anledning til å stille spørsmål.

- ☐ Vi samtykker til at vårt barn deltar i matematisk arbeid der det blir foretatt lyd- og videoopptak.

Vi samtykker til at opplysningene behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 15. mai 2019.

(Elevens navn)

(Signert av elev, dato)

(Signert av foresatt, dato)

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

NSD Personvern
16.10.2018 13:12

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 608211 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD, den 16.10.18. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER

Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.05.19.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD finner at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

De registrerte vil ha følgende rettigheter i prosjektet: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). Rettighetene etter art. 15-20 gjelder så lenge den registrerte er mulig å identifisere i datamaterialet.

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp behandlingen ved planlagt avslutning for å avklare status for behandlingen av opplysningene.

Lykke til med prosjektet!

NTNU

Kunnskap for en bedre verden