Aleksander René Sangolt

«Det er ikke de spissene der som er kanter [...] det er de lange»

En kvalitativ studie av fem elevers arbeid med todimensjonale figurer.

Masteroppgave i LMM15004
Veileder: Heidi Dahl
Trondheim, november 2018

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Aleksander René Sangolt

«Det er ikke de spissene der som er kanter [...] det er de lange»

En kvalitativ studie av fem elevers arbeid med todimensjonale figurer.

Masteroppgave i LMM15004
Veileder: Heidi Dahl
Trondheim, november 2018

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Med denne masteroppgaven, avslutter jeg det som kanskje er det viktigste, største, mest krevende og ikke minst lærerike kapittelet så langt i mitt liv. Det har vært en dannelsesreise som har bydd på fortvilelse, glede, frustrasjon, lykke, håpløshet og seier, og som har åpnet et helt nytt landskap av muligheter og veier. Jeg hadde aldri klart dette alene.

Først og fremst en stor takk til skolen, med forelesere og tilsatte som har gjort studiet til en god og minneverdig periode. Takk til alle medstudenter på B115 som har motivert med kaffe, kake, bordtennis og støttende ord, når arbeidet har sett uoverkommelig ut. Takk til Tobias, som i tillegg til å være en av medstudentene på B115, også har hjulpet til med språkvask. En stor takk til veileder Heidi Dahl, som har vært tålmodig og behjelpelig, støttende og ærlig, inspirerende og medmenneskelig. Det er medstudenter og forelesere/veiledere fra Rotvoll/Kalvskinnet som er grunnen til at jeg anbefaler studentmiljøet og lærerstudiet i Trondheim. Takk til min kjære Lise som har holdt ut, støttet og motivert. Du er uvurderlig.

En spesiell takk til foreleser Anne Carine Bonnevie Lund som overtalte meg til å fortsette på studiet da jeg var på mitt mørkeste, det vil aldri bli glemt.

Bergen/Trondheim, november 2018

Sammendrag

I denne oppgaven har jeg undersøkt hvordan elever uttrykker geometrikunnskap gjennom arbeid med sortering av todimensjonale figurer. Jeg har analysert elevers utsagn ved hjelp av van Hiele-nivåene og forsøkt å plassere elevene innenfor nivå, for å si noe om begrepskunnskapen deres i geometri. Jeg har også analysert elevers utsagn opp mot situasjonen som utsagnene stammer fra, og figurene elevene sorterer når de uttrykker begrepskunnskapen. Gjennom å undersøke to underspørsmål til problemstillingen, har jeg konkludert med at elever kan uttrykke begrepskunnskap gjennom matematisk forhandling av kontrastfigurer.

Innholdsfortegnelse

Bildeoversikt

Tabelloversikt

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Geometri er kanskje det temaet innen matematikk som i størst grad har fått meg til å undre meg over og utforske matematikk for nysgjerrigheten sin del. Kombinasjonen av det praktiske, det estetiske og det logiske ved det å konstruere figurer, utforske sammenhenger mellom figurers egenskaper, se og lage mønster, er drivkraft nok i seg selv. Likevel trodde jeg at en todimensjonal mangekants hjørner var kantene i en figur, da jeg startet på lærerutdanningen. Hvordan kunne jeg, som hadde utforsket egenskaper og sett mønstre/sammenhenger gjennom hele oppveksten, aldri ha lært meg at en figurs kanter, er linjestykkene mellom to punkter? At det jeg trodde var kanter, egentlig var hjørner? Erkjenningen av at jeg har kunnet gå gjennom hele grunnskole- og videregående skole uten å vite hva som egentlig er kanter i en todimensjonal mangekant, har gjort at jeg i denne oppgaven ønsker å studere begrepslæring i geometri nærmere. Men hva er geometri? Og hvordan jobbes det med geometri i skolen?

Historisk sett er geometri en av de eldste grenene innenfor matematikken. Hva geometri kan nyttes til, er dokumentert gjennom mange tusen år med historie. Praktisk geometri ble blant annet brukt for å lage pyramidene i Egypt for nesten fem tusen år siden, og før det ble geometriske figurer funnet i tekstiler og kunst (Smith, 1958, s. 15-22). Geometri har vært en del av menneskets kultur lenger enn mennesket har kunnet uttrykke seg skriftlig (Boyer, og Merzbach, T. C., 2011, s. 13). I dag regner Kunnskapsløftet LK06, geometri som en av hovedområdene innenfor matematikkfaget for grunnskoleutdanningen, der det har en egen definisjon i læreplanen for matematikk. I denne definisjonen står det at geometri i skolen blant annet handler om «[…] å analysere egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer […]» i tillegg til å arbeide med konstruksjoner, beregninger, kart, plassering og forflytning i rutenett og koordinatsystem (Utdanningsdirektoratet, 2013).

I skolen skal det jobbes med geometri på lik linje som de andre hovedområdene. Hvordan skolene arbeider med hovedmålene, er opp til hver enkelt skole/lærer, da LK06 gir metodefrihet, men LK06 definerer hva elevene skal mestre i fagene gjennom kompetansemål.

Disse kompetansemålene er satt etter 2., 4., 7. og 10. trinn, og gjelder også geometri. I disse dager (2018) arbeides det med en fornyelse av læreplaner i det som kalles fagfornyelsen for 2020. I fagfornyelsen for 2020 blir det innført kjerneelementer, som skal stå i sentrum for opplæringen i grunnskolen. I matematikk vil disse kjerneelementene innebære:

- Utforsking og problemløsing
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder (Regjeringen, 2018).

For geometri, vil kjerneelementene komme tydelig frem blant annet i arbeid med analysering av egenskaper hos to- og tredimensjonale figurer. Analysering av to- og tredimensjonale figurer, innebærer blant annet utforsking av figurer, resonnering og argumentering av sammenhenger i og mellom figurer. Det innebærer kommunikasjon i argumenteringen, generalisering av begreper og mulighet for abstrakt tankegang rundt definisjoner av figurer, for å nevne flere. Hva geometri er og hva som skal mestres, kommer frem i LK06. I tillegg kommer det frem generelle arbeidsmåter for hvordan elever skal jobbe med geometri i fagfornyelsen for 2020.

Men hvordan foregår læring i geometri? Og hvordan kan jeg studere begrepslæring i geometri nærmere? Forskning innenfor utdanning prøver stadig å utvikle og forbedre allerede utviklede teorier på læring. To eksempler på læringsteorier innen geometri, er van Hieles modell for geometrisk tenking (1986, gjenf. i Sinclair, 2016), som jeg vil komme tilbake til i teorikapittelet, og Fischbein (1993, gjenf. i Sinclair, 2016) sin teori om figurale konsepter (Sinclair et al, 2016, s. 692). Et mangfold av læringsteorier innen geometri, tyder på at det ikke eksisterer én forklaring på hvordan læring foregår. Jeg vil derfor undersøke begrepslæring i geometri selv.

1.2 Problemstilling og avgrensning

Fordi læring er noe som foregår over tid, er det vanskelig å studere læring hos elever. Jeg vil derfor fokusere på noe som kan gi meg et innblikk i elevers kunnskap rundt todimensjonale figurer. For å gjøre dette, har jeg avgrenset min egen forskning til å fokusere på elevers begrepskunnskap i arbeid med todimensjonale figurer. Jeg har utformet dette forskningsspørsmålet:

> *Hvordan kommer elevers begrepskunnskap til uttrykk gjennom arbeid med klassifisering av todimensjonale polygoner?*

Begrepskunnskap har en viktig rolle i geometri, som jeg vil komme tilbake til i underkapittel 2.2.1 i teorikapittelet. For å undersøke hvordan begrepskunnskap kommer til uttrykk, vil det være nødvendig å synliggjøre begrepskunnskapen. Synliggjøring av begrepskunnskap vil ikke bare gjøre det lettere å undersøke hvordan begrepskunnskap kommer til uttrykk. Det kan også være behjelpelig i lærerrollen, der innsikt i elevers begrepskunnskap kan bidra til å hjelpe læreren til å lettere vite hvor i det matematiske landskapet en elev har behov for å bevege seg.

Jeg har to hypoteser rundt synliggjøring av begrepskunnskap. Den første er at typen figurer som elevene sorterer, har noe å si for mengden begrepskunnskap som blir uttrykt. Den andre er at begrepskunnskapen vil bli uttrykt i noen spesifikke situasjoner, der elever diskuterer med hverandre. En typisk situasjon der elever diskuterer, er situasjoner der det foregår matematisk forhandling mellom elevene (se kapittel 2.2.4). Jeg vil derfor blant annet se etter situasjoner der det foregår matematiske forhandlinger. For å hjelpe meg med å undersøke hypotesene mine, har jeg laget to underspørsmål;

1. *Hvilken type figurer arbeider elevene med når de uttrykker begrepskunnskap?*
2. *I hva slags situasjoner kommer elevers begrepskunnskap i geometri til utrykk i en sorteringsaktivitet?*

Jeg har valgt å studere elevers arbeid med klassifisering av todimensjonale polygoner, fordi arbeid med todimensjonale figurer vil være høyst aktuelt også i fagfornyelsen. I tillegg gir det muligheter til å studere elever som arbeider med geometriske figurer, og som gjennom arbeidet kan uttrykke begrepskunnskap rundt disse figurene.

1.3 Datamaterialets teoretiske utgangspunkt og oppgavens oppbygning

I forbindelse med studiet, har jeg fått tilbud om å knytte prosjektet mitt opp mot forskningsprosjektet LaUDiM (Language Use and Development in the Mathematics Classroom). Gjennom LaUDiM har jeg fått tilgang på en mengde datamaterial, som vil være utgangspunktet for dataen i denne oppgaven. I LaUDiM danner Broeusseaus teori om didaktiske situasjoner utgangspunkt for de klasseromsøktene og aktivitetene som designes i LaUDiM-prosjektet.

1.3.1 Brousseau’s Theory of Didactical Situations (TDS)

Det teoretiske rammeverket bak arbeidet til elevene i empirien, baserer seg *på the theory of didactical situations in mathematics* (TDS) som er en forskningsbasert tilnærming til læring i matematikk (Rønning, F. & Strømskag, H., 2017, s. 2). I TDS spiller det matematiske innholdet, som det er tenkt at eleven skal lære, en viktig rolle. TDS er «et system av modeller og konsepter som har som mål å modellere læringssituasjoner slik at de kan bli utviklet på en kontrollert måte» (Artigue, 1994, i Måsøval, 2011, s. 27). Metoden går ut på å skape en situasjon med et problem som skal løses, hvor det teoretiske målet ved økten også er den optimale løsningen på problemet.

Metoden er delt inn i fem faser; devolusjon, aksjonsfase, formuleringsfase, valideringsfase og institusjonalisering. I tillegg benyttes begrepene *milieu* og *adidactical milieu* for å beskrive miljøet hvor fasene finner sted. Metoden starter med at læreren overfører ansvaret til elevene. Denne fasen kalles *devolusjon*. Det oppstår en adidaktisk situasjon, hvor elevene gjør det matematiske problemet til sitt eget. Elevene går i gang med å løse problemet med sin egen logiske tankegang. Denne fasen kalles *aksjonsfase*. Videre konstruerer elevene en modell av sammenhenger som elevene mener er relevant for situasjonen og formulerer strategier. Denne delen kalles *formuleringsfase*. I denne fasen er lærerens oppgave å synliggjøre de forskjellige formuleringene for resten av miljøet. Den neste fasen, *valideringsfase*, er når elevene forsøker å forklare et fenomen eller kommer med en mening. I denne situasjonen skal læreren ha rollen som ordstyrer og kun bryte inn for å strukturere debatten. Den siste fasen, *institusjonalisering*, er en didaktisk situasjon, hvor læreren knytter kunnskapen skapt av elevene til formell kunnskap (Rønning og Strømskag, 2017).

1.3.2 Oppgavens oppbygning

Forskningen min går ut på å identifisere og beskrive det som skjer i situasjoner der elevers begrepskunnskap rundt geometri kommer til uttrykk. For å gjøre dette, studerer jeg situasjoner hvor fem andreklasseelever uttrykker begrepskunnskap gjennom sortering og diskusjon av 12 forskjellige geometriske figurer. Teorien som ligger til grunn for analysene og drøftingen min, vil bli presentert i kapittel 2. I delkapittel 2.1 vil jeg presentere van Hieles nivåer for utvikling av geometri, og redegjøre for hvorfor jeg har valgt å bruke van Hieles nivåer som analyseverktøy. Jeg vil si noe om bakgrunnen for teorien og hvordan den har vært brukt tidligere. Jeg vil også si noe om hvordan teorien er brukt i nyere tid og presentere noen reviderte utgaver av teorien, i tillegg til å presentere den versjonen jeg selv har brukt og kjente utfordringer ved den. I delkapittel 2.2 vil jeg presentere teori rundt todimensjonale figurer, med fokus på egenskaper og definisjoner av slike figurer. Jeg vil også presentere og forklare begrepsdefinisjon og begrepsbilde, samt belyse noen utfordringer som definisjoner kan ha i undervisningen. Deretter vil jeg snakke om begrepslæring i lys av et prototypisk syn, med fokus på eksempelfigurer, før jeg til slutt vil snakke om begrepslæring gjennom matematisk forhandling.

I kapittel 3 vil jeg presentere metoden for forskningen min. I delkapittel 3.1 vil jeg si noe generelt om forskningsprosjektet mitt. Deretter vil jeg i delkapittel 3.2 sin noe om hvilken type data jeg har samlet inn og hvordan jeg har samlet inn dataen. Her vil jeg forklare LaUDiM-prosjektet nærmere, forklare hvorfor jeg har valgt video som datamateriale, samt forklare i detalj mengden data og hvilken type datamateriale jeg bruker. Videre vil jeg forklare hvordan jeg har behandlet dataen i tre faser. Jeg vil beskrive hvordan jeg har transkribert, hvordan jeg har kodet transkripsjonene og hvordan jeg har analysert transkripsjonene ved hjelp av van Hieles nivåer for tenking i geometri. Til slutt i delkapittelet vil jeg forklare hvordan jeg har foretatt en synteseanalyse, der jeg blant annet har studert analyserte utsagn opp mot hverandre. I delkapittel 3.3 vil jeg ta for meg forskerrollen og dataens gyldighet. Jeg vil ta for meg etikk, nærhetsprinsippet, anonymisering, forskerrefleksivitet og dataens gyldighet. Jeg vil avslutte med å skrive om validitet og reliabilitet i oppgaven.

I kapittel 4 vil jeg presentere analysen av dataen og de funn som er gjort. I delkapittel 4.1 vil jeg fokusere på analysen av elevenes diskusjoner rundt sortering av figurer, ved bruk av van Hieles fem nivåer som analyseverktøy. Jeg vil først presentere analysen min av utsagnene til hver enkelt elev, hvor jeg forsøker å plassere elevene innenfor et van Hiele-nivå. I denne delen avdekkes flere interessante funn. I delkapittel 4.2 fokuserer jeg på diskusjonene av en av figurene som elevene har sortert. Elevene er uenige om hva de skal sortere figuren som og det trekkes paralleller til definisjonen eksklusive kategorier. I delkapittel 4.3 fokuseres det på diskusjonene rundt en av de andre figurene, som elevene har sortert, hvor elevene bruker begrepet «kant» forskjellig.

I kapittel 5 vil jeg drøfte de funnene som er gjort i analysen. I delkapittel 5.1 vil jeg ta for meg van Hieles fem nivåer som analyseverktøy, og drøfte utfordringer ved bruken av nivåene som analyseverktøy. Deretter vil jeg i delkapittel 5.2 diskutere tre figurer som jeg mener har noen særegne egenskaper ved seg, og presentere en definisjon jeg har valgt å kalle kontrastfigurer. I delkapittel 5.3 vil jeg jeg koble elevenes diskusjoner opp mot matematisk forhandling. Jeg vil se på hvilken rolle kontrastfigurer gir uttrykk for å ha i disse diskusjonene og knytte dette opp mot begrepslæring og utvikling i geometri. I delkapittel 5.4 vil jeg presentere mine refleksjoner rundt forskningen, de funnene jeg har gjort og koble funnene opp mot problemstillingen. Til slutt vil jeg presentere noen tanker for videre forskning.

I kapittel seks vil jeg reflektere over oppgavens begrensninger slik jeg ser det. Jeg vil også si litt om hva jeg mener kan være interessant å forske videre på.

2 Teori

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for teorien som ligger til grunn for min analyse og drøfting. For å kunne si noe om begrepskunnskapen som elevene uttrykker i sortering av todimensjonale figurer, trengs det et analyseverktøy som kan identifisere og klassifisere denne begrepskunnskapen. Jeg har valgt å bruke van Hieles fem nivåer som utgangspunkt for mine analyser. Van Hiele-teorien og nivåene vil bli beskrevet under. Det må også sies noe om figurene som er sortert, hvilken type figurer det er, og avdekke noen spesielle egenskaper ved noen av dem. Derfor vil jeg presentere teori rundt todimensjonale polygoner, samt utdype definisjonsbegrepet innenfor geometri, og forklare begrepsdefinisjoner og begrepsbilde. I tillegg vil jeg si noe om situasjonene der begrepskunnskapen blir uttrykt, hva som kjennetegner situasjonene og hvordan de oppstår. Jeg vil derfor presentere begrepslæring gjennom prototyper og gjennom matematisk forhandling.

2.1 Den teoretiske bakgrunnen for analysen

2.1.1 Van Hieles teori for utvikling i geometri

Ekteparet Dina van Hiele-Geldof og Pierre Marie van Hiele står bak skapelsen av det som i dag er kjent som van Hieles teori for utvikling i geometri. Teorien så dagens lys gjennom ekteparets doktorgradsavhandlinger fra 1957 (Usiskin, Z., 1982, s. 3), der forskningen deres fokuserte på nivåer for tenking i geometri og hvordan studenter kan hjelpes fra et nivå til det neste (Fuys et al, 1988, s. 4). Teorien hadde som mål å forklare hvorfor så mange studenter hadde problemer med abstrakt tankegang i geometri, og da spesielt bevisføring (Usiskin, 1982, s. 1). Teorien er en kognitiv modell for utvikling av geometrisk tankegang, der et individ må gå gjennom totalt fem nivåer for tenking i geometri. Individet kan ikke oppnå et nivå uten først å ha vært gjennom det forgående nivået (Fuys et al, 1988, s. 5). I følge Pierre Marie van Hiele, viser analyser av geometri at det eksisterer omkring fem nivåer (van Hiele, P. M., 1984, s. 249). De første som tok i bruk denne teorien, var Sovjetunionen, som på 60-tallet reviderte geometripensumet sitt etter van Hiele-modellen. Først i 1976, da Izaak Wirzsup begynte å skrive om modellen, fikk van Hiele-teorien internasjonal oppmerksomhet (Crowley, 1987). Wirzsup (1915-2008) var en anerkjent polsk-amerikansk forsker, som gjennom sitt arbeid med å sammenligne realfagsundervisningen i Sovjetunionen og USA, bidro til at den amerikanske skolemodellen ble revurdert (University of Chicago News Office, 2011). Siden den gang har van Hiele-nivåene blitt utforsket og etterprøvd utallige ganger, blant annet av Fuys et al (1988), som i et forskningsprosjekt med en varighet på tre år, utforsket hvor vidt van Hiele-nivåene beskriver studenters læring i geometri. Fuys et al (1988) konkluderte med at van Hiele-nivåene tilsynelatende kan fungere som utgangspunkt for å forbedre læring i matematikk, men at det kreves mer forskning på området (Fuys et al, 1988, s 191).

I nyere tid er van Hiele-nivåene blitt brukt som rammeverk i forskning på læring og pensum i geometri. I en studie av geometriundervisning i Shanghai, der Ding og Jones (2006) har observert lærere og elever i Shanghai-skolen, har van Hiele-nivåene blitt brukt som rammeverktøy for å undersøke og beskrive hvordan lærere underviser på 8. trinn i Shanghai skolen. Studien konkluderte med at lærere i Shanghai-regionen bruker strategier som tar utgangspunkt i visualisering og deduktive metoder og at disse metodene kan være av interesse for videre utvikling av nye læringsmetoder for geometri (Ding, L. & Jones, K., 2006). Ifølge en forskningsrapport fra ICME (the International Congress on Mathematics Education) fra 2016, har van Hiele-nivåene også blitt brukt som et verktøy for å bedømme progresjon i grunnskolepensumet i USA. Newton (gjenf. i Sinclair, 2016) har konkludert med at skolepensumet innen geometri i USA har en oppbygning som har likheter med nivåene til van Hiele (Sinclair, N., et al, 2016, s. 2).

Teorien til van Hiele har tre aspekter ved seg; selve nivåene, egenskapene til disse nivåene og bevegelsen fra et nivå til et annet (Usiskin, Z., 1982, s. 4). Det første aspektet fokuserer på nivåene og hvilken geometrisk forståelse som inngår i hvert nivå. Det andre aspektet fokuserer på egenskapene ved nivåene, som at et individ ikke kan være på et nivå uten å først ha gått videre fra det foregående nivået, og at hvert nivå har sine egne tegn. Det tredje aspektet fokuserer på bevegelsen fra et nivå til det neste og hvordan læreren skal opptre for å hjelpe elever fra et nivå til det neste (Usiskin, 1982). Det er selve nivåene som vil være hovedfokus i denne oppgaven, da nivåene vil være utgangspunkt for et analyseverktøy som beskriver hvilket van Hiele-nivå elevers utsagn befinner seg på. Nivåene vil bli forklart lenger nede i teksten.

I følge van Hiele-teorien, utvikles tankegangen rundt geometri hos et individ, gjennom totalt fem nivåer (van Hiele, 1986; van Hiele-Geldof, 1984, gjenf. i Clements, D., 1998, s. 6), der nivåene blir gradvis mer sofistikerte og abstrakte. De fem nivåene har mer eller mindre den samme beskrivelsen blant de fleste forskere, der noen er mer utfyllende enn andre, men det er brukt to forskjellige skalaer i nummereringen av nivåene; 0-4 og 1-5 (Senk, S. L., 1989, s. 310). I denne oppgaven vil skalaen på nivåene rangere fra nivå 0-4, og beskrivelsen av nivåene vil basere seg på van Hiele sine beskrivelser i *The Child's Thought and Geometry* (van Hiele, 1984), samt beskrivelser funnet i Usiskin (1982), Burger & Shaughnessy (1986), Crowley (1987), Fuys et al (1988) og Battista (2002).

2.1.2 van Hieles fem nivåer

Nivå 0 (N0), Visualisering: Det første nivået blir ofte referert til som basenivået. På dette nivået dømmes figurer etter utseende. Individet resonnerer rundt figurers helhet, Det vil si at individet ikke tar hensyn til egenskaper som kant og hjørne ved figuren, men betrakter figuren visuelt og resonnerer ut fra det de ser. Individet vil også kunne lære seg noen geometriske uttrykk, identifisere noen spesielle former, og kunne reprodusere noen gitte figurer. Et individ på dette nivået vil for eksempel kunne gjenkjenne en likesidet trekant som en trekant, ut fra figurens visuelle fremtoning. I tillegg vil individet kunne lage en likesidet trekant hvis de blir vist hvordan en likesidet trekant ser ut. Et eksempel på utsagn som vil plasseres i nivå 0 er utsagn som heller vil definere en figur som et rektangel, fremfor firkant. Dette er nivå 0 fordi rektangel er en gjenkjent form som ikke tar utgangspunkt i en figurs unike egenskaper, men heller baserer seg på en visuell betraktning av figuren som helhet.

Nivå 1 (N1), Analyse: På det andre nivået kan individet identifisere egenskaper ved figurer, som kanter og hjørner. Disse egenskapene blir avdekket gjennom uformell analyse av figurene. Den uformelle analysen består gjerne av eksperimentering eller observasjon, der individet studerer figurer visuelt og trekker ut egenskaper, som de sorterer. De egenskapene individet trekker ut, blir brukt til å konseptualisere klasser og former. Et individ på N1 vil kunne gjenkjenne et kvadrat som en firkant, på grunn av figurens fire kanter og hjørner. Et eksempel på et utsagn som vil plasseres på nivå 1 er utsagn der en elev definerer en firkant som en firkant, fordi figuren har fire kanter/hjørner. Slike definisjoner tar utgangspunkt i visuell analyse av figurene der figurenes unike egenskaper blir trukket ut og brukt til å definere figuren.

Nivå 2 (N2), Abstraksjon: På det tredje nivået er egenskapene til en figur organisert, slik at individet kan identifisere sammenhengende egenskaper både i figuren og mellom figurer. Å se sammenhengende egenskaper i en figur, vil for eksempel si at man ser at sidene i et parallellogram er parallelle, fordi de diagonale vinklene er like. Å se sammenhenger mellom figurer, vil for eksempel si at man ser at et kvadrat også er et rektangel, fordi kvadratet har de samme egenskapene til et rektangel. Individet kan også lage seg abstrakte definisjoner og sortere ut hvilke egenskaper ved en figur som er nødvendige for å definere figuren, og hvilke som er overflødige.

Nivå 3 (N3), Deduksjon: På det fjerde nivået blir individets geometriske tankegang styrt av deduksjon. Det vil si at individet resonnerer fra det generelle til det spesielle. Individet mestrer bevisføring og forstår viktigheten til postulering og teoremer i geometrisk resonnering.

Nivå 4 (N4), Rigor: På det femte nivået kan individet sammenligne systemer basert på forskjellige aksiomer og kan studere forskjellige geometrier uten bruk av konkrete modeller

I tillegg til de fem nivåene beskrevet over, har en studie gjort av Clements, Swaminathan, Hannibal og Sarama (1999), konkludert med at det eksisterer et prekognitivt nivå (Clements, Swaminathan, Hannibal og Sarama, 1999, s. 205) som kommer før det som her er beskrevet som nivå 0, men dette vil ikke tas hensyn til i denne oppgaven. Det prekognitive nivået gjelder førskolebarn, og Clements et al. (1999) sier at barn som blant annet strever med å skille prototypiske eksempler av sirkler, trekanter og firkanter, fra ikke-eksempler, bør plasseres i et prekognitivt nivå (prototypiske eksempler vil bli forklart i 2.2.2).

Både Crowley (1987) og Battista (2002) argumenterer for at van Hieles modell kan brukes til å beskrive elevers tanker og utsagn rundt geometri. Battista (2002) sier at den beste måten å beskrive studenters tanker rundt todimensjonale geometriske figurer, er teorien til van Hiele for utvikling av geometri (Battista, M., T., 2002, s. 2). Crowley (1987) påpeker at van Hiele-modellen for geometrisk tankegang og fasene for utvikling innen geometri, kan fungere som en metode for å identifisere et individs nivå i geometrisk tankegang, og hjelpe individet å utvikle seg (Crowley, M., L., 1987, s. 15). Samtidig beskriver Burger og Shaughnessy (1986) noen problemer med sin analyse der elever ser ut til å være et sted mellom to nivåer, noe som kan gjøre det vanskelig å plassere dem på kun ett nivå (Burger & Shaughnessy, 1986). Fordi problemstillingen i oppgaven gir et behov for å identifisere, beskrive og kategorisere den begrepsforståelsen som elevene uttrykker, vil van Hieles nivåer for utvikling i geometri bli brukt som analyseverktøy, til tross for problemene beskrevet av Burger og Shaughnessy. Det er bare de to første nivåene, nivå 0 (N0) og nivå 1(N1) som vil bli brukt, da ingen av elevenes utsagn vitner om kunnskap over disse nivåene. Innholdet i elevenes utsagn vil bli sammenlignet opp mot nivåene og forsøkt plassert inn i et nivå.

Studien til Burger og Shaughnessy (1986) resulterte også i noen nivåindikatorer for van Hieles nivåer som vil bli brukt for å avgjøre nivået til elevenes utsagn. Mens nivåbeskrivelsene over handler om elevenes kunnskap, beskriver nivåindikatorene under hva elevene gjør innenfor de forskjellige nivåene. Nivåindikatorene er dermed en slags operasjonalisering av nivåbeskrivelsene. Nivåindikatorene vil fungere som et supplement til beskrivelsene av nivåene, slik at elevers utsagn lettere kan plasseres innenfor et bestemt nivå. Det er bare nivåindikatorene til de to første nivåene som vil bli gjengitt, da det kun er dem som er relevante for oppgaven:

Nivå 0	**Nivå 1**
Bruk av upresise egenskaper for å sammenligne tegninger og til å identifisere, karakterisere og sortere figurer.	Sammenligning av former eksplisitt ut fra figurenes visuelle egenskaper.
Referanser til visuelle prototyper for å karakterisere former (en figur er en trekant, fordi den *ligner* på en likesidet trekant).	Forbyr inkludering av klasser innenfor generelle typer av figurer, for eksempel et kvadrat er også et rektangel og en firkant.
Inkludering av irrelevante egenskaper når former identifiseres og beskrives.	Sorterer figurer ut ifra en enkel egenskap, slik som kanter, uten å ta hensyn til vinkel, symmetri osv. (et parallellogram er en firkant, fordi den har fire kanter

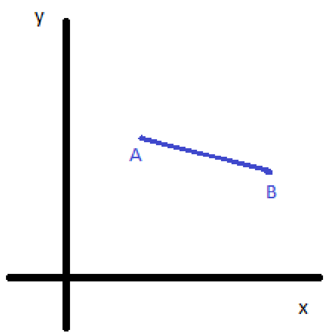
	eller hjørner, og ikke et parallellogram, fordi de diagonale hjørnene er ekvivalente).
Manglende evne til å se for seg uendelig mange varianter av former.	En oppramsing av alle nødvendige egenskaper tilhørende figuren, i stedet for å definere figuren ut ifra tilstrekkelige egenskaper.
Inkonsekvent sortering; det vil si sortering etter egenskaper som ikke er delte blant de sorterte figurene.	Beskrive figurtyper basert eksplisitt på figurtypenes egenskaper, i stedet for navnet til figurtypen, selv når navnet er kjent. Eksempel, i stedet for å kalle et rektangel for et rektangel, vil figuren bli referert til som en fire-sidet figur bestående av bare rette vinkler.
Manglende evne til å bruke egenskaper som nødvendige for å definere en form; for eksempel det å tippe formen til en figur etter altfor få ledetråder, som om ledetrådene trigger et visuelt bilde.	Eksplisitt avvisning av tekstbok-definisjoner av figurer, og heller bruke egne beskrivelser.
	Behandle geometri som noe fysisk når et forslag skal prøves ut, og ikke som noe abstrakt; for eksempel, å være avhengig av tegninger og bilder.
	Eksplisitt mangel på forståelse for matematiske bevis.

Tabell 1: Nivåindikatorer for nivå 0 og 1, hentet fra Burger & Shaughnessy (1986, s. 44-45).

2.2 Geometriske figurer og forhandling

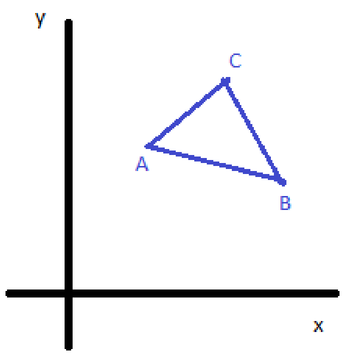
2.2.1 Geometriske figurer og definisjoner

Van Hieles nivåer beskriver hvordan tankegangen innen geometri utvikles gjennom totalt fem nivåer, men hva er geometri? Generelt regnes geometri som en gren innenfor matematikken som omhandler «[...] punkter, linjer, kurver, flater og legemer, og deres beliggenhet, form og størrelse» (Store norske leksikon, 2018). I tillegg har moderne forskning utvidet geometribegrepet til å omfatte teorier som går utenfor egenskaper ved romstørrelser (Store norsk leksikon, 2018). I grunnskolen handler geometri blant annet om å «[...] analysere egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer og gjøre konstruksjoner og beregninger» (Udir, 2013, s. 3). Plasserer man to punkter, A og B i et koordinatsystem, sier vi at linjestykket mellom dem er endimensjonal.



Bilde 1: Endimensjonalt linjestykke.

La oss tilføre et punkt til som ikke er på linje med de to andre punktene og kaller punktet for C. Et linjestykke som trekkes fra A til A via B og C, danner en lukket figur og beveger seg nå i to retninger. Figuren ABC er en todimensjonal, lukket figur.



Bilde 2: Todimensjonal figur.

I denne oppgaven analyserer fem andreklassinger egenskapene ved todimensjonale, lukkede figurer for så å sortere dem. For å kunne si noe om de geometriske figurene som elevene sorterer, må figurene defineres.

En definisjon er en beskrivelse eller forklaring av et ord/begrep, som kan hjelpe oss med å forstå hva som menes med ordet/begrepet (Store norsk leksikon, 2018). I matematikk har definisjoner en viktig rolle, fordi definisjoner blant annet har innflytelse på alt fra læring i matematikk, til teoremer og bevisføring (Zazkis og Leikin 2008, s. 132-133). Definisjoner bidrar også til at det matematiske språket blir presist. I geometri vil definisjoner beskrive for eksempel begrepet av en figur, det vil si de egenskapene og sammenhengene som til sammen utgjør figuren og gjør den spesiell. Her kan man skille mellom formell og uformell definisjon av et begrep, der en formell begrepsdefinisjon, er en definisjon som er akseptert blant matematikere (Tall, D. og Vinner, S., 1981, s.152), mens en uformell ikke er det. Generelt vil en formell definisjon være så kort og presis som mulig, uten unødvendig informasjon. Siden geometriske figurer har mange egenskaper og sammenhenger ved seg, kan de defineres på flere måter. Ta for eksempel et kvadrat. Et kvadrat er en lukket plan figur, med fire sider og fire vinkler, der alle sidene er like lange og vinklene er 90 grader. Dette gjør at figuren kan defineres på flere måter:

Et kvadrat er en firkant (lukket figur bestående av kun fire rette linjestykker som danner fire hjørner) med tre rette (90 grader) vinkler.

Et kvadrat er en firkant med fire rette vinkler.

Et kvadrat er en likesidet (alle sidene er like lange), rettvinklet firkant.

Et kvadrat er et likesidet rektangel (et rektangel er en firkant med to og to sider parallelle).

Et kvadrat er en rombe med rette vinkler (en rombe er en likesidet firkant).

Alle disse definisjonene beskriver egenskapene ved et kvadrat. Hvordan et individ definerer figuren, vil være avhengig av individets bakgrunnskunnskap, erfaringer, etc. Tall og Vinner (1981) bruker begrepsdefinisjon (concept definition) og begrepsbilde (concept image) for å skille mellom to måter å se begreper på (Tall og Vinner, 1981). Begrepsdefinisjon er sammensetningen av ord brukt for å spesifisere et begrep. Individet kan ha lært seg begrepet, eller individet kan ha laget begrepet selv. Uavhengig av om begrepet er selvskapt eller tillært, vil det være en reell mulighet for at individet vil forandre på begrepet over tid. Dermed vil en personlig begrepsdefinisjon kunne variere fra en formell begrepsdefinisjon (Tall og Vinner, 1981).

Begrepsbilde er noe ikke-verbalt som er kognitivt assosiert med begrepet. Det kan fremstå som visuelle bilder eller som en samling av inntrykk og erfaringer. Et begrepsbilde er unikt for individet det tilhører, i tillegg vil det samme individet gjerne ha forskjellige begrepsbilder for et begrep, avhengig av situasjonen. Dette kaller Tall og Vinner (1981) for vekket begrepsbilde (evoked concept image), og brukes for å beskrive den delen av minnet som er fremkalt i en spesifikk situasjon (Vinner, 2002, s. 68).

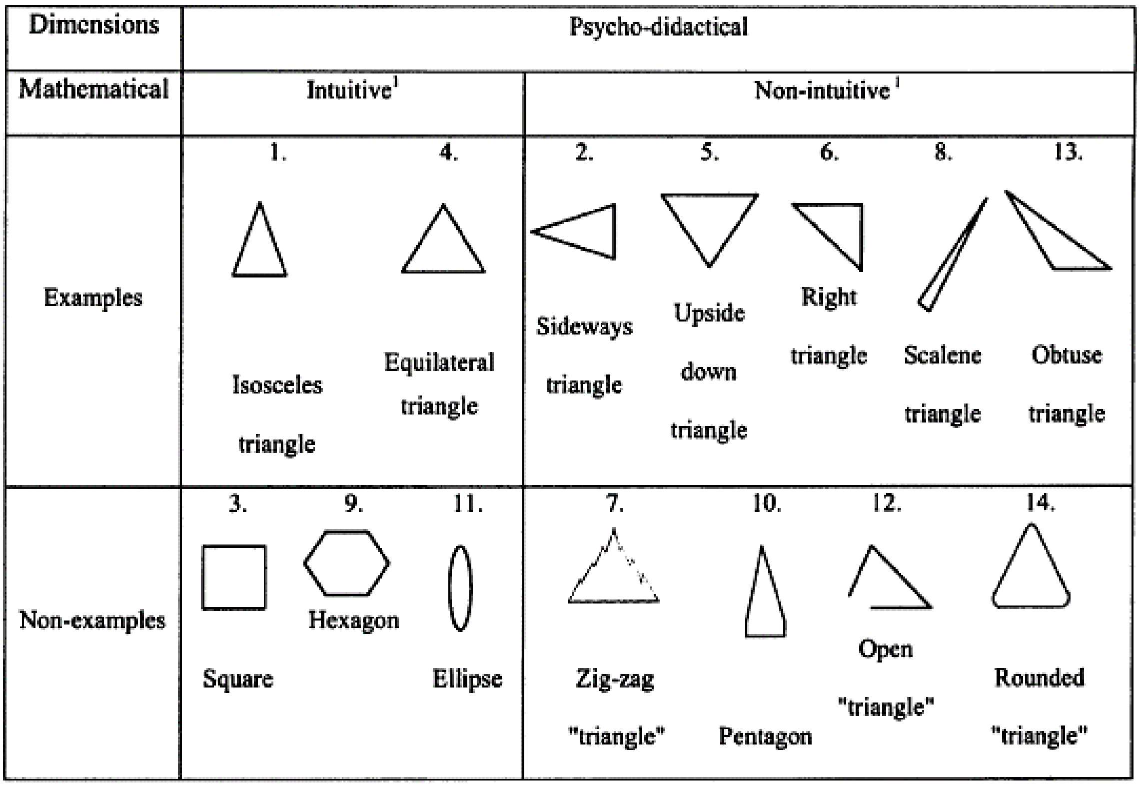
Vinner (2002), beskriver noen kjennetegn ved rollen til definisjoner i undervisning. Han sier at mye av matematikkundervisningen er basert på en oppfatning av at;

1. Begreper forstås hovedsakelig ut fra deres definisjoner.
2. Elever vil bruke definisjoner for å løse problemer og bevise teoremer […].
3. Definisjoner bør være minimale (det vil si at definisjonene bør være så kortfattet som mulig. Hvis for eksempel et kvadrat defineres ut fra dens hjørner, vil en korrekt definisjon være; firkant med tre rette vinkler, i stedet for firkant med fire rette vinkler, fordi den fjerde vinkelen må være rett, hvis de andre tre også er det).
4. Definisjoner skal skrives så elegante som mulig.
5. Definisjoner er vilkårlige. Det vil si at en definisjon i noen tilfeller kan dekke flere begreper.

Disse kjennetegnene byr på utfordringer i forhold til læring og undervisning i geometri. De forventningene som Vinner (2002) beskriver over, samstemmer ikke med hvordan van Hieles nivåer beskriver elevers tenking i geometri. Det er først når en elev er på van Hiele-nivå 3 at elever er i stand til å bruke definisjoner til å bevise teoremer. Elever på van Hiele-nivå 1 eller et lavere nivå, vil ikke kunne lage minimale definisjoner, da de ikke ser hvilke egenskaper ved en figur som er kritiske og hvilke som er overflødige.

2.2.2 Begrepslæring gjennom prototyper

Innenfor kognitiv psykologi eksisterer det to konkurrerende teorier på hvordan begrepslæring av figurer fungerer, klassisk syn og prototypisk syn. Innenfor det klassiske synet på læring, vil en kategori av figurer (trekanter, firkanter etc.) bli representert ved å vise en mengde eksempler på figurer som alle har egenskaper som kan knyttes til kategorien. Det prototypiske synet på læring derimot, mener at det eksisterer noen figurer de refererer til som prototyper. Disse figurene skal fremstå som ideelle eksempler på en kategori. Et prototypisk eksempel vil med en gang bli intuitivt godkjent som et eksempel på begrepet det representerer. Dette er fordi prototypen har noen egenskaper som representerer et begrep, som et individ automatisk vil se, uten at prototypen må bli rettferdiggjort (Tsamir, Tirosh, og Levenson, 2008, s. 81-82). Et eksempel på en slik prototype, vil være en likebeint trekant for å representere trekanter.



Dimensions	Psycho-didactical	
Mathematical	Intuitive[1]	Non-intuitive[1]
Examples	1. Isosceles triangle 4. Equilateral triangle	2. Sideways triangle 5. Upside down triangle 6. Right triangle 8. Scalene triangle 13. Obtuse triangle
Non-examples	3. Square 9. Hexagon 11. Ellipse	7. Zig-zag "triangle" 10. Pentagon 12. Open "triangle" 14. Rounded "triangle"

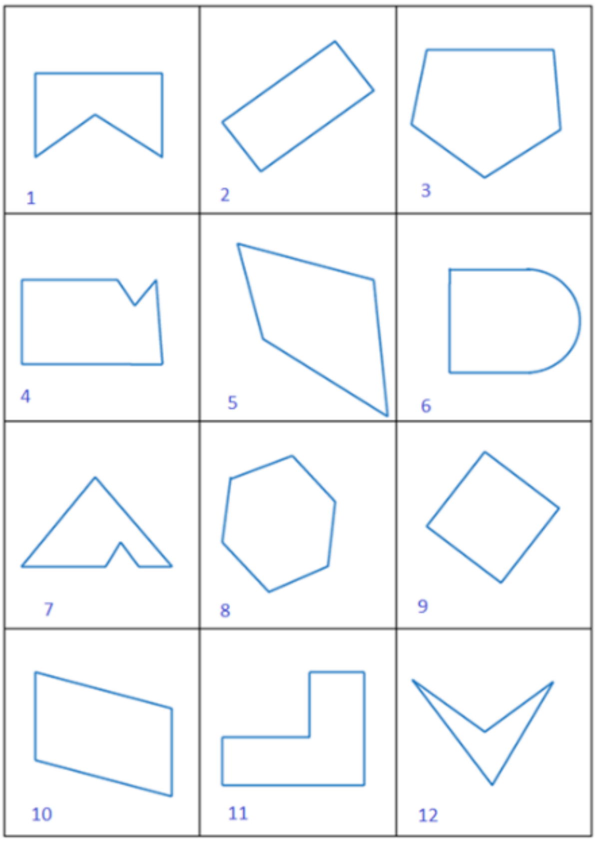
Tabell 2:Tabelloversikt over eksempler og ikke-eksempler, hentet fra Tsamir et al. (2008, s. 86).

Mens prototyper automatisk vil bli godtatt som eksempler på et begrep eller en kategori, er det noen figurer som automatisk vil bli avvist som eksempler for det begrepet eller den kategorien de er eksempel for. Tsamir et al. (2008) kaller disse for intuitive ikke-eksempler. Et eksempel på et intuitivt ikke-eksempel for trekanter, vil være et kvadrat (se Tabell 2, fig. 3, 9, 11).

I tillegg til intuitive eksempler (prototyper) og intuitive ikke-eksempler, presenterer Tsamir et al. (2008) noen figurer de kaller for ikke-intuitive eksempler og ikke-intuitive ikke-eksempler (Tsamir et al., 2008). Dette er som navnet tilsier, figurer som intuitivt ikke vil bli gjenkjent som eksempler eller ikke-eksempler. Et ikke-intuitivt eksempel, vil være figurer innenfor en kategori som hører til kategorien, men som har en visuell fremtoning som gjør at figuren ikke intuitivt vil bli godtatt som et eksempel for kategorien (se Tabell 2, fig, 2, 5, 6, 8, 13). Et ikke-intuitivt ikke-eksempel er en figur som *ikke* er et eksempel på en kategori eller et begrep, men som har noen egenskaper ved seg som gjør at de kan misoppfattes til å være et eksempel (Tabell 2, fig. 7, 10, 12, 14).

2.2.3 Figurene brukt i denne oppgaven

Figurene som er brukt i oppgaven er alle todimensjonale lukkede figurer i et plan, der 11 av 12 er polygoner. En todimensjonal polygon, også kalt en plan mangekant, er en figur med rette linjestykker som danner en lukket figur med alle sidene i et plan (Store norsk leksikon, 2017).



Bilde 3: De 12 todimensjonale figurene som elevene har sortert.

Mangekanter har blant annet den egenskapen at de alle har like mange kanter som hjørner. Av de 12 figurene som elevene i oppgaven sorterer, er det bare figur 6 (se bilde 3) som ikke er en polygon. Mens en todimensjonal polygon i et plan er en lukket figur med likt antall kanter og hjørner, har figur 6 ulikt antall kanter og hjørner. Figuren består dessuten ikke utelukkende av rette linjestykker, men av et rett linjestykke, samt et kurvet linjestykke. De andre 11 figurene er alle polygoner, fordi figurene er lukkede plane figurer som består av like mange kanter som hjørner. Figur 2, 5, 9, 10 og 12 er firkanter, figur 1 og 3 er femkanter, mens figur 4, 7, 8 og 11 er sekskanter.

Blant figurene som elevene sorterer, anser jeg figur 1 til å være et ikke-intuitivt eksempel på femkanter, da den er konkav, og vil derfor nødvendigvis ikke bli gjenkjent som femkant med en gang. Figur 2 anser jeg å være et prototypisk eksempel for firkanter, da den er konveks og har tydelige kanter og hjørner. Figur 3 anser jeg som en prototype for femkanter, av samme grunn som figur 2 for firkanter; konveks, med tydelige kanter/hjørner. Figur 4 anser jeg å være et ikke-intuitivt eksempel på sekskanter, grunnet det konkave hakket. Figur 5 ser jeg på som et ikke-intuitivt eksempel på firkanter, da det er stor forskjell på vinklene. Figur 6 ser jeg på som et intuitivt ikke-eksempel, da den ikke ligner noen annen figur, og er heller ikke en polygon. Figur 7 ser jeg på som en ikke-intuitiv sekskant grunnet det konkave hakket, eventuelt et ikke-intuitivt ikke-eksempel på trekanter, grunnet formen. Figur 8 er for meg en prototype for sekskanter (konveks, tydelige kanter/hjørner). Figur 9 og 10 anser jeg for å være prototyper for firkanter, fordi de er konvekse og har tydelige kanter/hjørner (i tillegg til at kvadrat ofte er brukt som prototypisk eksempel på firkanter). Figur 11 anser jeg som et ikke-intuitivt eksempel for sekskanter, fordi den er konkav, i likhet med figur 12, som jeg anser som ikke-intuitivt eksempel for firkanter av samme grunn.

2.2.4 Begrepslæring gjennom matematisk forhandling

Matematisk forhandling er den forhandlingsprosessen som foregår mellom elever og lærer, og elever seg imellom, i situasjoner der de forhandler matematisk mening. Jörg Voigt beskriver denne forhandlingen i sin kasusstudie fra 1994 som noe som oppstår fordi elever og lærer har forskjellige oppfatninger av den matematiske betydningen de arbeider med (Jörg Voigt, 1994, s. 275). Voigt (1994) skiller mellom implisitt og eksplisitt forhandling, der han forklarer implisitt forhandling ved hjelp av speilingsteori. Implisitt forhandling er noe som oppstår som et resultat av tolking av et annet individs reaksjon. Et individ (A) regulerer sine handlinger ut ifra hva A tror individ (B) sin bakgrunnsforståelse er, kunnskap etc. Samtidig tolker B handlingene til A og regulerer sine handlinger deretter. Hvis for eksempel en lærer smiler til en elev når eleven forklarer en løsningsmetode på en oppgave, kan eleven tolke smilet som at læreren synes forklaringen er dårlig, selv om læreren smilte av en helt annen grunn. Denne tolkningen kan føre til at eleven prøver å komme opp med en annen og bedre strategi. Dette kaller Voigt (1994) for implisitt forhandling, fordi forhandlingen skjer uten at de eksplisitt diskuterer. Eksplisitt forhandling, er den forhandlingen som foregår mellom individer når individene diskuterer fra hvert sinn synspunkt.

I matematisk forhandling er tvetydighet viktig. I følge Voigt er det meste i et klasserom, fra oppgavene og samtalene, til tegnene og konkretene som brukes, tvetydig, da de kan tolkes forskjellig av individer. Denne tolkningen kommer ikke nødvendigvis av at oppgavene i seg selv er tvetydig, eller at tegnene er det, men fordi disse tingene kan ha forskjellig betydning i forskjellige situasjoner hos forskjellige individ (vekket begrepsbilde). For at forhandlingsprosessen i det hele tatt skal finne sted, må det tilrettelegges slik at elevene får mulighet til å forhandle. Her spiller de sosiale reglene og normene i klasserommet en viktig rolle, sammen med aktiviteten som elevene gjør (Frid & Malone, 1995). Et eksempel på når en slik forhandling oppstår, kan være to eller tre elever som skal klassifisere polygoner. For at elevene skal kunne klassifisere polygonene likt, må de være enige om hvilke egenskaper som inngår i hver gruppe. Hvis det oppstår en uenighet, må de finne en felles løsning, og det oppstår en forhandling.

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg presentere metoden for forskningen min. Jeg vil først si noe om forskningsprosjektet mitt. Deretter vil jeg si noe om dataen jeg har samlet inn, hvordan jeg har samlet dataen, og hvordan dataen er behandlet. Jeg vil også si noe om hvordan jeg har analysert dataen. Til slutt vil jeg si noe om forskerrollen, med fokus på forskerrefleksivitet, dataens gyldighet og etiske betraktninger rundt arbeidet.

3.1 Forskningsprosjektet

I planleggingen av et forskningsprosjekt, er det viktig å ta hensyn til hva som skal utforskes og hvordan dette kan gjøres. Hensikten ved min studie er å studere situasjoner der begrepskunnskap blir uttrykt, derfor vil det være hensiktsmessig med et design som legger opp til studie av slike situasjoner. Jeg har valgt en kvalitativ forskningsmetode, fordi man i kvalitativ forskning, utforsker menneskelige prosesser i en naturlig setting (Nilssen, 2012, s. 13). Kvalitative data fokuserer ofte på mindre grupper mennesker enn kvantitative data, og er samtidig ofte mer detaljerte enn kvantitative data (Cohen et al., 2011, s. 539). Forskningsmetoden min kan lettest beskrives som en småskala kvalitativ studie. Studien har likheter fra blant annet mikroetnografiske studier slik etnografiske studier fremstilles i Cohen et al. (2011), der jeg utforsker en setting hvor elever diskuterer klassifisering av polygoner og forsøker å identifisere og beskrive det som skjer, uten å forandre på settingen (Cohen et al., 2011, s. 221).

Cohen et al. (2011) sier at metodene for å analysere og presentere data på, er avhengig av «fitness and purpose» (Cohen et al., 2011, s. 537), altså hvor godt analysemetoden passer og målet med analysen. Valg av innsamlingsmetode for datamateriale er essensielt for forskningens troverdighet. Hvilken metode forskeren velger for å presentere og analysere sine data på, avhenger av målet med forskningen og hvilken metode som egner seg best for akkurat den forskningen. Blant metodene som blir brukt for å samle inn data i kvalitative studier er; intervjuer, observasjon, feltnotater, video- og/eller lydopptak etc. (Cohen et al., 2011, s. 537). Forskeren må også velge hvordan han/hun skal behandle dataen, om den skal bli transkribert og hvor detaljert transkripsjonene skal være. Målet med min forskning er å si noe om hvordan elevers begrepsforståelse kommer til uttrykk i arbeid med todimensjonale figurer. For at jeg skal kunne gjøre dette, må jeg kunne observere situasjoner der elever uttrykker begrepsforståelse. Jeg må også kunne gjengi disse situasjonene så korrekt som mulig. Jeg har derfor valgt video som utgangspunkt for mine data, som jeg vil transkribere.

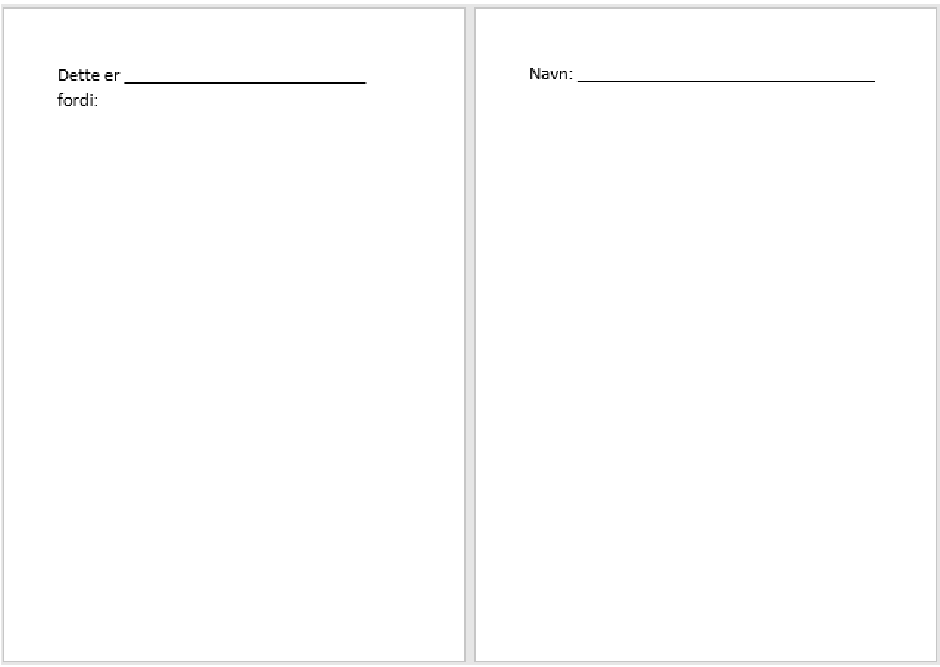
3.2 Datainnsamling og behandling av data

3.2.1 Video som kilde og valg av data

Datamaterialet jeg bruker som utgangspunkt for min studie, stammer fra et forskningsprosjekt ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU), og tidligere Høgskolen i Sør-Trøndelag (HiST). Prosjektet, Language Use and Development in the Mathematics Classroom (LaUDiM), forsker på språkbruk og språkutvikling i matematikk. Kommunikasjon står sentralt i studiet til LaUDiM, og de benytter seg av et videobasert design. I LaUDiM-prosjektet samarbeider lærere og forskere med å planlegge, gjennomføre og reflektere over undervisningsøkter med utgangspunkt i Brousseaus teori om didaktiske situasjoner. I en slik undervisningsøkt, som ble gjennomført i to klasser på 2. trinn, var intensjonen at elevene skulle klassifisere forskjellige polygoner ut ifra antall kanter (Rønning og Strømskag, 2017, s. 1). I øktene arbeider elevene i grupper på to og tre, der noen av gruppene er filmet. I tillegg er *devolusjonsfasen* til sorteringsøkten filmet, samt *institusjonaliseringsfasen* elevene har etter sorteringsøkten. Devolusjon er den fasen hvor læreren introduserer oppgaven for elevene, mens institusjonalisering er den fasen hvor læreren hjelper elevene med å knytte den kunnskapen elevene har skapt, opp mot formell kunnskap. Disse filmene har jeg fått tilgang til, og flere av dem viser elever som sorterer og samtaler rundt sortering av todimensjonale figurer.

Slike videoer passer godt som utgangspunkt for mitt datamateriale, både på grunn av innholdet i videoene, men også på grunn av videoens egenskap til å fange og lagre store mengder data. Video kan registrere både verbal og non-verbal kommunikasjon, og er i likhet med annen visuelle data, selektive i deres fokus og innhold (Cohen et al., 2011, s. 529). En av ulempene ved video er overbelastning av data. I videosnuttene jeg analyserer, kommuniserer elevene både verbalt og non-verbalt. Siden jeg ikke kan skrive ned hver minste kroppslige bevegelse, skaper dette en problemstilling rundt seleksjon og administrering av dataen. Video regnes som en type observasjon, der forskerens rolle er fullstendig observatør. I motsetning til mange andre observatørroller, gir video meg mulighet til å se situasjoner gjentatte ganger, men med den restriksjonen at data kun blir samlet inn i videoøyeblikket.

Gjennom LaUDiM-prosjektet har jeg hatt tilgang til en så stor mengde data, at jeg ikke har hatt kapasitet til å analysere alt. Jeg har derfor måttet være selektiv i hvilke av videoene jeg har ønsket å bruke. Dataen jeg har valgt, er videoklipp av elever som arbeider med klassifisering av polygoner, samt devolusjonsøkten i forkant av øktene. For å velge hvilke videoer jeg har villet bruke, har jeg først sett gjennom alle aktuelle videoer for deretter å velge ut de jeg mener er relevante. For å avgjøre hvilke videoer som er mest relevant, har jeg laget meg noen kriterier og sett etter spesielt fire ting; Lyd- og bildekvaliteten på filmene, antall diskusjoner mellom elevene og mellom elever og lærere, variasjon i diskusjonene og til slutt hvor involverte elevene er. Disse kriteriene har resultert i at jeg har valgt å bruke video fra to forskjellige grupper i to forskjellige klasser. Den første gruppen (fra nå av referert til som G1), består av tre elever hvor det er gjort videoopptak med varighet på 34 minutter og 40 sekunder. Den andre gruppen (fra nå av referert til som G2), består av to elever, der det i alt, er ni videoklipp med en varighet på totalt 22 minutter og 21 sekunder. Begge gruppene arbeider med sortering og klassifisering av figurer. I tillegg til elevene, er det minst en forsker og en lærer til stede i begge gruppene.


Dette er ________________________
fordi:

Navn: ____________________________

Bilde 4: Fremsiden og baksiden av arket der elevene skal samle figurene de mener hører sammen og beskrive dem.

Begge klassene har fått samme arbeidsoppdrag der timene er lagt opp likt i begge klassene. Timene starter med at elevene blir introdusert for og forklart arbeidsøkta i en lyttekrok. Deretter arbeider de i grupper på to til tre elever der de skal klippe ut 12 forskjellige figurer (se Bilde 3). Disse figurene skal elevene først sortere hver for seg, slik de selv mener er fornuftig. Videre derfra skal de sammenligne sorteringskriteriene sine, diskutere og komme frem til felles sorteringskriterier. De skal altså bli enige om sorteringskriteriene. Til slutt skal de samle de figurene de mener hører sammen og lime disse på et A4 ark. På arket står det «Dette er _______ fordi:» der de skal beskrive hvilke figurer haugen inneholder og sorteringskriteriene sine (se Bilde 4).

Arbeidsøktene legger opp til matematiske samtaler og matematiske forhandlinger rundt todimensjonale geometriske figurer, ved at økten sier eksplisitt at elevene skal sammenligne og diskutere sorteringskriteriene sine. Jeg ser det som sannsynlig at elever vil uttrykke begrepskunnskap i slike situasjoner, som igjen kan hjelpe meg med å finne svar på forskningsspørsmålet mitt. En liten, men mulig kritisk forskjell på de to klassene er introduksjonen i lyttekrok, der eksemplene som blir vist av lærer, er forskjellige i de to klassene.

3.2.2 Behandling av data

Behandlingen og analysen av arbeidsøktene der elevene sorterer polygoner, kan deles inn i tre hovedfaser, og er inspirert av en analysemetode som tar utgangspunkt i verktøy og metoder fra *grounded theory* (Cohen et al., 2011, s. 596). *Grounded theory* er en forskningsmetode som blant annet blir brukt til å utvikle teorier ut ifra et datamateriale. I første hovedfase ser jeg på videoene med et metablikk og prøver å sortere og registrere temaer i videoene, inntrykk jeg får og interessante situasjoner i videoene. Det jeg har sett etter, er de situasjonene i videoene der det foregår en eller annen form for kommunikasjon om, eller med sortering av todimensjonale figurer. Disse situasjonene er transkribert og delt inn i sekvenser. I den første delen har jeg gått fra data til datamateriale, der dataen er video og datamaterialet er transkripsjoner. Når transkripsjonen er gjort, har jeg begynt på neste fase, som er en mikroanalyse av transkripsjonene. I mikroanalysen er van Hiele-nivåene sentrale. Transkripsjonene er blitt analysert opp mot van Hiele-nivåene, der elevers utsagn blir forsøkt plassert innenfor et nivå.

Hele arbeidsprosessen, fra planlegging av problemstilling, til ferdigstilling av kapitler, er ført ned i en forskningsdagbok. Noe av det som er notert i forskningsdagboken, er progresjon i analysearbeid, interessante funn og ideer for videre analyse. Den tredje hovedfasen er et resultat av ideer notert ned i forskningsdagboken. Fase tre er en slags syntese av de to andre hovedfasene, der jeg ser på resultatet av mikroanalysen i fase to, opp mot sekvensene funnet i fase 1. Det er i den tredje hovedfasen at funnene mine blir gjort. I tillegg har jeg skrevet et kort resymé av devolusjonsøktene for G1 og G2, der jeg forklarer kort innholdet og hva som blir sagt. Disse to resyméene blir mer et bakgrunnsmateriale enn datamateriale, som jeg kan se funnene mine i lys av. Jeg vil komme tilbake til disse i refleksjonskapittelet.

3.2.3 Transkribering

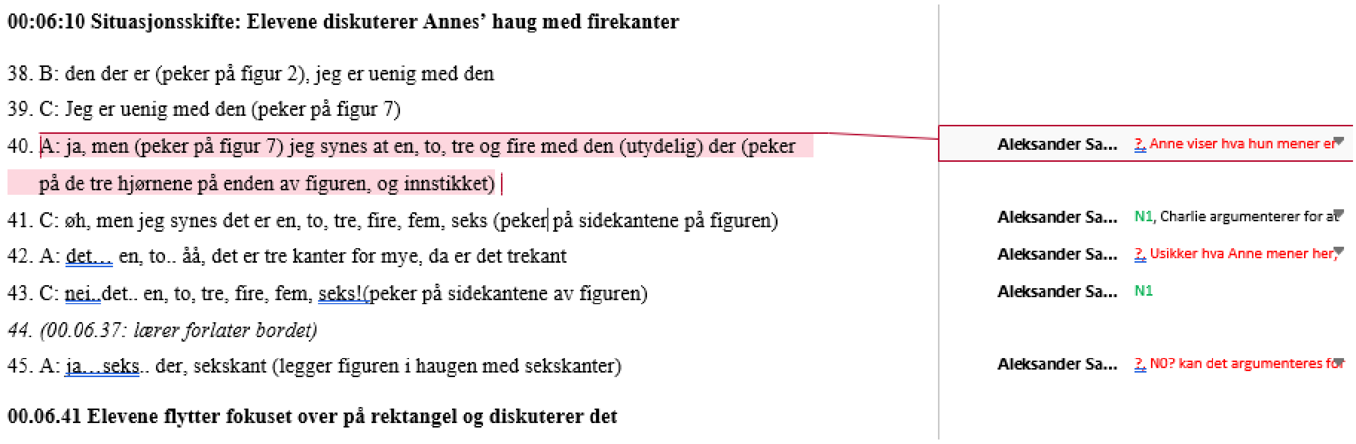
Transkripsjonen av dataen har foregått i flere omganger, og er skrevet på data. Jeg har først tatt for meg den ene gruppen med elever og analysert den ferdig, før jeg har analysert video fra den andre gruppen elever. Jeg har også skrevet et kort handlingsreferat av videoene som viser introduksjonene til timene. All kommunikasjon som omhandler arbeid med todimensjonale figurer, har blitt transkribert. Dette gjelder også non-verbal kommunikasjon som gestikulering med hender, når gestikuleringen blir tolket som en del av kommunikasjonen i en situasjon som omhandler arbeid med todimensjonale figurer. Samtaler der innholdet handler om praktiske ting rundt arbeidet er ikke transkribert. Jeg har også transkribert pauser i situasjonene og uttrykk, som «eh», «mmm», etc. For å anonymisere de involverte, har jeg transkribert alt på bokmål og de involverte får dekknavn, også de involverte lærerne og forskerne.

Transkripsjonen av begge gruppene bærer preg av samme struktur. Først har jeg presentert videonummer og hvilken gruppe som er filmet, samt varigheten på filmen. Deretter har jeg skrevet en kort handlingsintroduksjon til transkripsjonen. Selve transkripsjonen er delt inn i små sekvenser, der det står kort hva sekvensen handler om, samt når i filmen sekvensen foregår. Sekvensene er delt opp etter det jeg kaller situasjonsskifte, hvor situasjonene forandrer seg fra å handle om en ting, til noe annet. Dette kan være alt fra temaskifte i samtaler, til skifte i hvordan samtalene foregår. Hver setning har fått et nummer, sammen med forbokstaven til dekknavnet til individet som ytrer setningen. Totalt omfatter transkripsjonen i overkant av 20 A4-sider.

3.2.4 Koding og analyse

I transkripsjonen har jeg laget noen koder og forkortelser for å gjøre analysearbeidet lettere. Den første gruppen med elever jeg har transkribert, blir referert til som G1, mens gruppen fra den andre klassen blir referert til som G2. I G1 har elevene fått pseudonymene Anne, Bernt og Charlie, med forkortelsene A, B og C. Læreren blir referert til som lærer med forkortelse L, mens forskeren refereres til som forsker med forkortelse F. I G2 har elevene pseudonymene Daniel og Ester med forkortelser D og E, læreren blir referert til ved forkortelsen T og forskeren ved forkortelsen Fo. Hvert utsagn i transkripsjonen har fått setningsnummer. I analysen vil jeg referere til empirien ved å skrive setningsnummeret på den gjeldende setningen med en S foran.

Jeg har også laget koder for de forskjellige nivåene til van Hiele (referert i Burger & Shaughnessy, 1986) som er brukt i analyseringen, der nivå 0-2 har kodene N0, N1 og N2 med fargekode grønn. Underveis i analyseringen av dataen, har elevene kommet med utsagn der de uttrykker en form for begrepsforståelse i geometri. Disse samtalene har jeg analysert og vurdert opp mot ett av van Hiele-nivåene, for deretter å skrive den tilhørende nivåkoden til setningen. I analysen av G1, har jeg først analysert deler av dataen utsagn for utsagn, for deretter å analysere utsagnene i hele sekvenser. I G2 har jeg analysert alt i sekvenser. Ved analyseringen av G1, har det oppstått en nødvendighet for å utvide med to koder til. Den første er for utsagn jeg mener er relevant for hvordan elever uttrykker begrepsforståelse i geometri, men som jeg ikke klarer å plassere i nivåer. Denne koden har oppstått etter gjentakende problemer med å plassere utsagn innenfor de nivåene jeg har brukt. Jeg har kalt denne koden for Annet og gitt koden «?» med fargekode rød. Den andre koden har jeg kalt Til Info og gitt det koden «!», med fargekode oransje. Denne koden har oppstått etter at jeg har gjort flere interessante funn i analysen. Dette er funn jeg mener kan ha betydning for forskningen min, men som ikke nødvendigvis kan knyttes direkte opp mot van Hieles nivåer.



00:06:10 Situasjonsskifte: Elevene diskuterer Annes' haug med firekanter

38. B: den der er (peker på figur 2), jeg er uenig med den
39. C: Jeg er uenig med den (peker på figur 7)
40. A: ja, men (peker på figur 7) jeg synes at en, to, tre og fire med den (utydelig) der (peker på de tre hjørnene på enden av figuren, og innstikket) — Aleksander Sa... ?, Anne viser hva hun mener er
41. C: øh, men jeg synes det er en, to, tre, fire, fem, seks (peker på sidekantene på figuren) — Aleksander Sa... N1, Charlie argumenterer for at
42. A: det… en, to.. åå, det er tre kanter for mye, da er det trekant — Aleksander Sa... ?, Usikker hva Anne mener her,
43. C: nei..det.. en, to, tre, fire, fem, seks!(peker på sidekantene av figuren) — Aleksander Sa... N1
44. *(00.06.37: lærer forlater bordet)*
45. A: ja…seks.. der, sekskant (legger figuren i haugen med sekskanter) — Aleksander Sa... ?, N0? kan det argumenteres for

00.06.41 Elevene flytter fokuset over på rektangel og diskuterer det

Bilde 5: Utdrag fra analysen av transkripsjonen. Bildet viser en sekvens som er analysert opp mot van Hieles nivåer.

Analyseringen har foregått i Word, der kodene er koblet rett til utsagn ved hjelp av verktøyet *Kommentar*.

3.2.5 Synteseanalyse

I løpet av arbeidet med analyseringen av transkripsjonene, har det dukket opp flere interessante funn og ideer for videre analysearbeid, som er notert ned i en forskningsdagbok. Blant disse ideene, er en idé om at det kanskje er en sammenheng mellom figurene som elevene sorterer, og begrepskunnskapen de uttrykker. Denne ideen har ført til at jeg har utvidet analysen min, og kan hjelpe til med å finne svar på de to hypotesene mine for synliggjøring av begrepskunnskap, som sier at; «typen figurer som elevene sorterer, har noe å si for mengden begrepskunnskap som blir uttrykt», og «begrepskunnskapen vil bli uttrykt i noen spesifikke situasjoner, der elever diskuterer med hverandre».

I utvidelsen av analysen, har jeg studert de analyserte utsagnene i G1 opp mot hverandre og utsagnene i G2 opp mot hverandre, innenfor de sekvensene som utsagnene stammer fra. Det vil si at jeg blant annet har analysert alle de involvertes utsagn i G1 rundt en figur, opp mot akkurat den sekvensen der figuren blir analysert, og tilsvarende i G2. Jeg har studert utsagnene og sekvensene opp mot figurene som elevene diskuterer i de forskjellige sekvensene. Jeg har studert de sekvensene der elevene blir analysert til å være på samme van Hiele-nivå, og sammenlignet de sekvensene opp mot hverandre. Det samme har jeg gjort med de sekvensene der elevene blir analysert til å *ikke* være på samme van Hiele-nivå. Jeg har også sett om det er noen likhetstrekk mellom de situasjonene der elevene er analysert til å være på samme nivå, og de situasjonene der elevene *ikke* er det, og sett etter eventuelle likhetstrekk. Det er i denne delen at funnene mine har kommet frem.

3.3 Forskerrollen og dataens gyldighet

3.3.1 Etikk, nærhetsprinsippet, anonymisering, forskerrefleksivitet og dataens gyldighet

Visuelle media er ikke nøytrale, for de sender bevisste og ubevisste signaler som vi tolker på forskjellige måter. De har en effekt på den som ser og er konstruert ut fra sosiale situasjoner og perspektiver (Cohen et al., 2011, s. 528). Videoene som er utgangspunkt for min data, er filmet av forskere fra LaUDiM-prosjektet. Filmingen foregår ved at noen forskere går rundt i et klasserom med håndholdte kamera og filmer tilfeldige situasjoner, mens andre er plassert på bord der det foregår gruppearbeid, og filmer gruppearbeidet i sin helhet. Det som vises på videoene er dermed påvirket av forskernes valg av hva de mener skal filmes. Dataene jeg bruker i studien min, må sees i lys av nærhetsprinsippet og forskerrefleksivitet.

Nilssen (2012) beskriver all forskning som en balansegang mellom nærhet og distanse, der nærhet til forskningsdeltakerne i kvalitativ forskning er en styrke (Nilssen, 2012, s. 137), men også en utfordring. Nærhetsprinsippet setter et søkelys på hvor nært en forsker kan være i forskningen før resultatene blir påvirket i så stor grad at dataen ikke lenger er gyldig. Nærhetsprinsippet utfordrer forskningens troverdighet, så forskeren må være reflektert over egen rolle. Forskerrefleksivitet handler om at forskerens påvirkning på dataen er uunngåelig. Forskeren er partisk og tar med seg sine egne verdier, sin egen persepsjon av dataen, og sin egen verdensoppfatning, i tolkningen av dataen (Cohen et al., 2011, s. 225).

Jeg har personlig aldri møtt eller snakket med noen av elevene i videoene og har dermed forholdsvis stor distanse til dataen. Denne distansen til dataen gjør at jeg går inn i en rolle som fullstendig observatør. Dette påvirker min analyse av dataen både positivt og negativt. Positivt, fordi jeg i større grad enn de forskerne i prosjektet som også har truffet elevene, kan forholde meg nøytral til det som skjer i videoene, da jeg ikke vet noe om elevene fra før. Annen kunnskap og kjennskap til elevene kan ikke påvirke meg, fordi det ikke eksisterer. Det negative er at jeg ikke kan si noe om det jeg ser er et mønster som går igjen i situasjoner utenfor videoene, da jeg ikke har noe kunnskap om dette. Analysen og seleksjonen jeg gjør er dermed kun basert på det som vises i videoene og vil tolkes i lys av forskningsspørsmålet mitt.

Både forskerens nærhet, og forskningens etiske betraktninger påvirker dataens gyldighet. Cohen et al. (2011) kaller denne balansegangen for «costs/benefits ratio», der gevinsten ved forskningen settes opp mot prisen de involverte må betale (Cohen et al., 2011, s. 75). For å ivareta etikkspørsmålet rundt anonymitet i LaUDiM-prosjektet, har deltakerne blitt opplyst om rammene for datainnsamlingsmetodene, og de har gitt sin tillatelse til å bli filmet. I tillegg er det opprettet kontrakter for forskerne, der de skriver under på å anonymisere all data slik at privatlivet til deltakerne opprettholdes. For å ivareta de involvertes rett til privatliv i dataen min, er dataen anonymisert. Jeg har transkribert alle samtaler i dataene jeg bruker og oversatt dem til bokmål. Jeg har også gitt de involverte fiktive navn. Slik anonymisering kan påvirke dataen i negativ retning, da anonymiseringen kan fjerne viktige aspekter ved dataen. Ved å oversette dialekt til bokmål, kan deler av dataen forsvinne, da enkelte ord og setningsoppbygging er særegen og unik for flere dialekter. Nyanser i elevenes forståelse kan dermed gå tapt. Denne problematikken er høyst gjeldende i transkribering av video, da spørsmålet om nøyaktig gjengivelse versus anonymitet, ofte er vanskelig. Deltakerne skal anonymiseres slik at de ikke kan gjenkjennes, samtidig som dataen skal gjengis så nøyaktig som mulig. Denne balansen er viktig for å fremstå som en troverdig og pålitelig forsker.

3.3.2 Validitet og reliabilitet i studien

For at forskningen skal fremstå som troverdig, må det tas hensyn til validiteten og reliabiliteten til forskningen. Mens validitet fokuserer på gyldigheten i forskningen, handler reliabilitet om forskningens evne til å gjenproduseres (Cohen et al., 2011). For at forskningen min skal fremstå som reliabel, vil jeg beskrive forskningsprosessen min i detalj, og på den måten gjøre forskningsprosessen gjennomsiktig. Jeg vil gjøre rede for dataen jeg bruker, hvordan jeg transkriberer dataen, hvorfor jeg velger å fokusere på de situasjonene som jeg gjør og hvordan jeg analyserer dataen. Jeg vil også strebe etter å gjøre forskningen så gjennomsiktig, at forskningen skal kunne være reproduserbar. Mens reliabiliteten vil avhenge av min evne til å gjengi forskningsprosessen i detalj, vil validiteten avhenge av min evne til å gjengi dataen så nøyaktig og troverdig som mulig. Ved å gjengi det som faktisk skjer i dataene, hvordan jeg tolker dataene, om de gir mening og hvordan jeg knytter dette opp mot teori, vil gjøre dataen min mer valid. Denne redegjørelsen vil kunne skape mer troverdighet i forskningen og samtidig være en del av refleksiviteten i min forskning.

4 Analyse

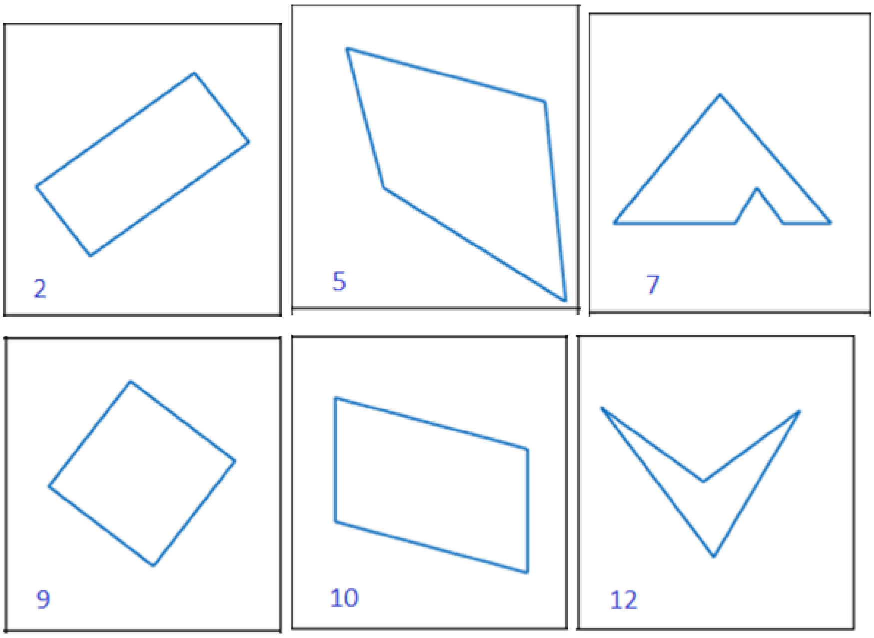
I dette kapittelet vil jeg presentere analysen min. For å undersøke hvordan elevers begrepskunnskap blir uttrykt gjennom arbeid med klassifisering av todimensjonale figurer, har jeg delt analysekapittelet i tre deler. Første del prøver å kartlegge begrepskunnskapen elevene uttrykker. Andre og tredje del prøver å si noe om hva som kan være grunnen til at begrepskunnskapen har blitt uttrykt i noen situasjoner, med fokus på figurene som elevene sorterer i de situasjonene. I delkapittel 4.1 fokuseres det på å identifisere begrepskunnskapen til elevene. Dette skjer ved analyse av elevers diskusjon ved bruk av van Hieles 5 nivåer for utvikling i geometri. Utsagn fra elevene i G1 blir først analysert hver for seg ved hjelp av van Hieles nivåer i geometri. Deretter blir elevenes utsagn analysert i kontekst med hverandre. Utsagn fra elevene i G2 vil bare bli analysert i kontekst til hverandre. Jeg vil vise at Anne, Bernt og Charlie i G1 og Daniel og Ester i G2 er i en overgangsfase mellom van Hiele nivå 0 og van Hiele nivå 1.

I delkapittel 4.2 og 4.3 studeres to situasjoner der elevene i G1 har sortert figurene forskjellig, og dermed uttrykt ulike begrepskunnskaper. Det viser seg at grunnen til at elevene uttrykker ulike begrepskunnskaper, kan skyldes egenskaper ved figurene. I delkapittel 4.2 vil jeg fokusere på diskusjonene rundt figur 2, som er et rektangel. Anne sorterer figuren sammen med andre firkanter, mens Bernt og Charlie ønsker å sortere den som et rektangel. I delkapittel 4.3 vil jeg ta for meg diskusjonen rundt figur 6. Elevene sorterer figuren forskjellig, fordi de har forskjellige definisjoner på hva som er en kant. Dette fører til en diskusjon rundt begrepet «kant».

4.1 Sortering av figurer

4.1.1 Anne

Anne er den første eleven til å presentere en bunke med figurer hun har sortert. I presentasjonen blir figur 2, 5, 7, 9, 10 og 12 nevnt. Figur 2, 5, 9, 10 og 12 er firkanter, mens figur 7 er en sekskant.



Bilde 6: Figurene som Anne sorterer som firkanter.

I S30 sier Anne at figur 2 er en firkant fordi den har fire kanter.

30. *A: Dette er firkant, fordi denne har fire kanter (viser til figur 2 (rektangel) i haugen).*
31. *A: Og da telte jeg en, to, tre, fire (peker på fire plasser på figuren)… fire. (tar opp neste figur i bunken (figur 5)) En, to, tre, fire (peker på fire plasser på figur 5)... fire (peker på figur 7 som er neste figur i bunken), fire, fire (viser frem de siste tre figurene i bunken, som er figur 9, figur 10 og figur 12).*
32. *A: jeg telte kantene*

Dette utsagnet er innenfor nivå 1 i van Hieles teori for utvikling i geometri, fordi Anne bruker egenskapen kant for å definere figuren. For at en elev skal plasseres innenfor nivå 1, skal det resonneres rundt geometriske konsepter gjennom en uformell analyse av komponentdelene og egenskapene til figuren (Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M., 1986, s. 31). Et polygons antall kanter er en av flere karakteristiske trekk ved polygonet som er med på å definere det. En firkant har blant annet nøyaktig fire kanter og fire hjørner.

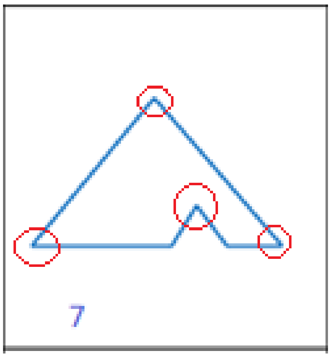
I S31 forklarer Anne hvordan hun tenker ved å bruke både muntlig språk og kroppsspråk i form av gestikulering. Jeg har valgt å dele opp S31 i to på grunn av lengden på utsagnet og innholdet. I første del sier hun; «*Og da telte jeg en, to, tre, fire (peker på fire plasser på figur 2)… fire. (tar opp neste figur i bunken (figur 5)) En, to, tre, fire (peker på fire plasser på figur 5…*». Anne sier ikke eksplisitt at hun teller kanter, men gestikuleringen tilsier at hun teller fire punkt på figur 2 og figur 5, og begge figurene er firkanter. Jeg ser det som sannsynlig at Anne har gjort en uformell analyse av figurene ved å studere dem visuelt og trukket ut egenskaper hun kan se ved figurene, for å definere dem. I følge Crowley (1987) er observasjon og eksperimentering blant de uformelle analysemetodene som elever bruker på nivå 1. Elevene bruker disse metodene for å skille ut karakteristiske trekk og egenskaper ved figurene. Anne har brukt observasjon til å trekke ut en egenskap ved figurene. Dette plasserer henne på nivå 1.

Etter å ha forklart hvorfor figur 2 og 5 er firkanter i første del av utsagnet, ramser hun opp de resterende figurene i bunken, som er figur 7, 9, 10 og 12. Hun sier i andre delen av utsagnet; «*(…) fire (peker på figur 7 som er neste figur i bunken), fire, fire (viser frem de siste tre figurene i bunken, som er figur 9, figur 10 og figur 12)*». Hun nevner figur 7, 9, 10 og 12 i samme utsagn som figur 2 og 5, men uten å forklare hvorfor de er firkanter. Derimot forklarer hun tidligere i utsagnet hvorfor hun mener figur 2 og 5 er firkanter, så det vil være naturlig å anta at hun har brukt samme sorteringskriteria på figur 7, 9, 10 og 12 som figur 2 og 5.

Figur 9, 10 og 12 er alle firkanter, mens figur 7 er en sekskant. Jeg plasserer hennes utsagn om figur 9, 10 og 12 på nivå 1, da hun tilsynelatende har brukt samme sorteringskriterier som ved figur 2 og 5. Figur 7 bryter derimot med de andre figurene ved å være en sekskant. Dette gjør analyseringen av den andre delen av utsagnet hennes mer komplisert. Det er også her utfordringene ved å bruke van Hieles nivåer som analyseverktøy først gjør seg gjeldende. Disse utfordringene vil jeg komme tilbake til i drøftingskapittelet.

Det er vanskelig å si hvordan Anne har tenkt ut fra de opplysningene hun gir i S31, for figuren er en sekskant og ikke en firkant. Anne sier hun har telt antall kanter for å definere figurene, men hun har utelatt to av kantene i figur 7. Hun er dermed selektiv i hva hun definerer som kant ved figur 7 og bruker ikke figurens faktiske antall kanter som sorteringskriterium. For å være på nivå 1 må sorteringen ta utgangspunkt i figurens karakteristiske trekk og egenskaper. Karakteristiske trekk ved en figur vil for eksempel være figurens antall hjørner og/eller kanter. De karakteristiske trekkene ved figur 7 vil da være seks kanter og/eller seks hjørner. Dette gjør det vanskelig å plassere den andre delen av utsagnet på nivå 1.

På nivå 0 resonneres det rundt grunnleggende geometriske konsepter, slik som enkle former, primært gjennom visuelle betraktninger av konseptet som helhet, uten direkte hensyn til egenskaper rundt dens deler (Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M., 1986, s.31). Ut fra denne definisjonen ville det vært mest logisk å definere figur 7 som en trekant, da den visuelt kan ligne mer på en trekant enn en firkant. Å definere figur 7 som en firkant ut fra figurens helhetlige visuelle fremtoning, finner jeg lite sannsynlig, da den har tre og ikke fire klart fremtredende sidekanter. Dermed er det vanskelig å plassere denne delen av utsagnet også under nivå 0. Jeg argumenterer for at det er for lite informasjon i S31 til å kunne plassere Annes utsagn om figur 7 i et nivå.



Bilde 7: Annes tolkning av figurens hjørner, markert med rød ring.

Etter at Anne har presentert sin haug for de andre på gruppen, bes de andre uttrykke om de er enig eller uenig i Anne sin sortering.

40. *A: ja, men (peker på figur 7) jeg synes at en, to, tre og fire med den (utydelig) der (peker på de tre hjørnene på enden av figuren, og innstikket)*
41. *C: øh, men jeg synes det er en, to, tre, fire, fem, seks (peker på sidekantene på figuren)*
42. *A: det… en, to.. åå, det er tre kanter for mye, da er det trekant*
43. *C: nei..det.. en, to, tre, fire, fem, seks!(peker på sidekantene av figuren)*

Charlie er uenig med Anne om figur 7. Anne svarer i S40 at; «*Ja, men (peker på figur 7) jeg synes at en, to, tre og fire med den (utydelig) der (peker på de tre hjørnene på enden av figuren, og innstikket)*». I dette utsagnet kommer forklaringen på hvordan Anne har tenkt når hun har sortert figur 7 sammen med firkantene. Hun peker på fire av hjørnene av figuren og teller samtidig til fire, for å argumentere for sin sortering (se røde sirkler i bilde 7).

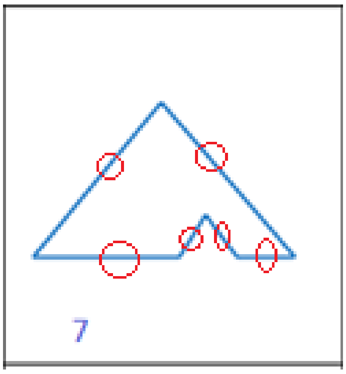
Denne nye informasjonen gir utsagnene hennes i S31 ny mening. Anne har, gjennom observasjon som uformell analyse, skilt ut det *hun* mener er karakteristiske trekk og egenskaper ved figur 7, som er de fire hjørnene hun peker på. I følge van Hiele kjennetegnes nivå 0 ved at elevene betrakter figurene visuelt uten hensyn til egenskapene rundt figurens deler. Anne tar jo hensyn til figurens deler, ved å ta utgangspunkt i noen av hjørnene til figuren. Jeg vil derfor argumentere for at Anne er på et nivå som er høyere enn nivå 0.

I følge van Hiele sier ikke nivå 1 noe om at eleven skal ha rett, bare at de skal resonnere ut fra gitte egenskaper. Eleven kan likevel ikke være selektiv i hvilken av egenskapene eleven skal telle med og ikke. Med den logikken kan man si at en femkant er en tokant, ved å bare telle to av kantene. Anne sier så langt i samtalen ingenting om at hun ser flere hjørner enn de fire hun har talt med. Jeg kan ikke være sikker på om hun har unnlatt to av hjørnene i figur 7 bevisst, eller om hun bare ser fire hjørner, men jeg antar det siste. Sett i kontekst med de andre figurene hun har sortert som firkanter, så har hun talt med alle hjørner som er på figur 2, 5, 9, 10 og 12.

Videre i diskusjonen uttrykker Charlie at han er uenig med Anne om at figur 7 er en firkant. Han argumenterer for at figur 7 er en sekskant ved å peke på sidekantene i figuren mens han teller til seks. I S42 svarer Anne på Charlie sitt argument ved å si; «*det… en, to.. åå, det er jo tre kanter for mye, da er det en trekant*». Det virker som om Anne prøver å gi mening til utsagnet til Charlie, at hun ikke helt forstår hans argument, noe som igjen kan brukes til å argumentere for at hun ikke ser seks hjørner, men fire. Dermed teller Anne med alle de hjørnene hun ser i figur 7. Dette er høyere enn nivå 0, men ikke helt oppe på nivå 1. Jeg vil derfor argumentere for at Anne er på vei mot nivå 1.

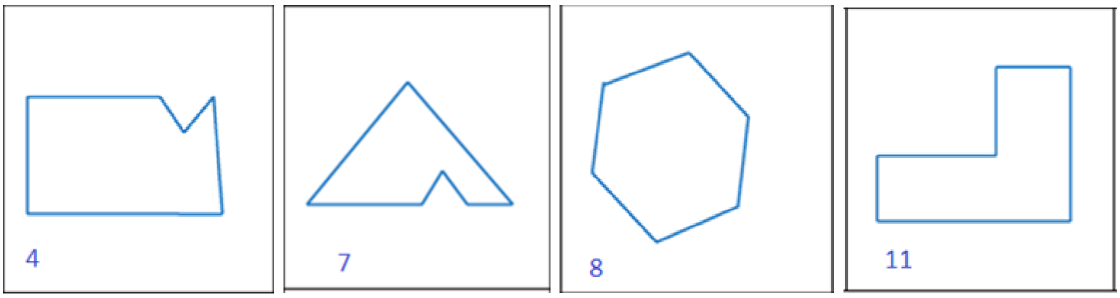
4.1.2 Bernt og Charlie

Bernt og Charlie gir uttrykk for å sortere figurene likt med hverandre og ha lik oppfatning av sorteringskriteriene. Derfor presenterer jeg en analyse av deres samtaler samlet. Av de to, er det Charlie som er mest aktiv. Det er ved diskusjon rundt Anne sin haug med firkanter, at Charlie sin oppfatning først kommer til syne.



Bilde 8: kantene som Charlie peker på.

Charlie sier seg uenig med at figur 7 er sortert som en firkant. Han går videre og forklarer hvorfor han er uenig med sorteringen av figuren. I S41 og sier Charlie; *«Øh, men jeg synes det er en, to, tre, fire, fem, seks (peker på sidekantene på figuren)»* (se bilde 8). I likhet med S41, argumenterer Charlie i S43 ved å telle kantene på figuren mens han peker på dem. Charlie bruker figurens seks sidekanter, som er en av figurens komponentdeler, til å definere figuren. Dette plasserer Charlie sine utsagn i S41 og 43 innenfor nivå 1.



Bilde 9: sekskanter.

Charlie er konsekvent i sin sortering av figurer, med unntak av figur 2, som jeg skal komme tilbake til. Han sorterer figurer etter antall sidekanter og kaller disse for kant. Dette kommer også tydelig frem i S56, hvor Charlie presenterer sin bunke med sekskanter. Bunken består av figur 4, 7, 8 og 11 (se bilde 9), som alle er sekskanter.

56. C: øm, det her er (holder en bunke med figurer), det her er, øm, sekskanter (teller kantene på den øverste figuren som er figur 8) fordi den har en, to, tre, fire, fem, seks (peker på kantene etter hvert som de blir talt) kanter.

…

59. B: (lavt) få se (plukker til seg figur 7) ja… (plukker til seg figur 4) en, to tre, fire, fem, seks, ja… (plukker opp figur 11) en to (lavt) ja… (plukker opp figur 8) En, to (lavt) ja.

I likhet med Charlie, bruker også Bernt en figurs antall sidekanter for å definere figurer. Bernt sine sorteringskriterier er derimot litt vanskeligere å se ved første øyekast.

Bernt plukker til seg haugen til Charlie med sekskanter og studerer dem. I S59 studerer Bernt figurene, teller lavt til seks for seg selv og nikker anerkjennende. Bernt sier ikke eksplisitt i S59 at han definerer figurene basert på figurenes antall kanter, men han studerer figurene og teller til seks. Figurene har to unike karakteristiske trekk ved seg som det er seks av; antall kanter og antall hjørner. Det er derfor naturlig å tenke at Bernt teller enten antall kanter eller antall hjørner.

Videre i diskusjonene kommer det opp flere eksempler på situasjoner der Bernt bruker kant som argument. Ved en anledning skal Bernt vise frem sin gruppering av femkanter.

96. B: men se her Charlie, du må tell.. du må tell.. (finner frem den ene femkanten) du må telle en, to, tre, fire, fem (peker på sidene av figuren når de blir talt). Du må telle hvor mange..

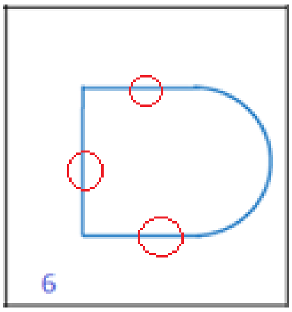
…

138.B: en kant.. en kant at det er en sånn lang…

…

140.B: alt som er strek liksom (fører pekefinger frem og tilbake langs ene langsiden på figur 2)

Charlie prøver å telle antall bunker hos Bernt og forveksler figurene som Bernt har lagt ut fra sin bunke med femkanter, til å være forskjellige bunker. Bernt forklarer i S96 hvordan Charlie skal vurdere bunken med femkanter ved å si at han må telle antall kanter. Ved en annen anledning argumenterer Bernt for hva han mener er en kant. I s138 og S140 sier Bernt at en kant er det lange, altså det som er en strek i figurer. Dette er argumenter for at Bernt også er konsekvent i hva han definerer som kant, noe som plasserer hans utsagn i S59 til å være nivå 1.

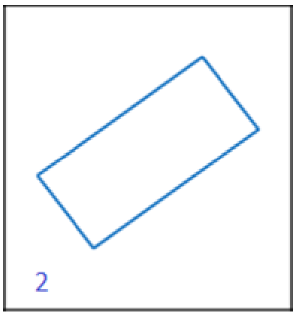


Bilde 10: Røde ringer hvor Bernt og Charlie peker.

Til nå har Bernt og Charlie blitt vurdert til å ligge på nivå 1, men diskusjoner rundt figur 2 og 6, viser at dette ikke er tilfelle gjennom hele analysen.

67. *C: det her er trekant (finner frem figur 6)*
68. *B: ja, det her er trekant (tar opp samme figur)*
69. *C: en, to tre kanta (teller sidekantene)*
70. *B: en, to tre kanta (teller sidekantene til Anne sin figur)*

I S67 til S70 sier Charlie og Bernt at figur 6 er en trekant, og definerer figuren likt. De peker på sidene av figuren og teller til tre. Anne er uenig og definerer figuren som tokant, fordi hun teller hjørner. Elevene argumenterer litt frem og tilbake; Anne for at figuren er en tokant og Bernt og Charlie for at figuren er en trekant. Figuren er verken tokant eller trekant. Figuren består av to kurver, en rett kurve, og en som er både rett og buet. Den som er rett og buet, er rett i endene, men buet på midten. Eventuelt kan man si at figuren har tre kurver, der to av figurens kurver starter som rette linjer, men glir over i en bue og møtes. Det er ingen klar grense for når de rette delene slutter og buen starter. Argumentativt går det også an å si at de rette linjene slutter i det den starter å bue seg, men verken Bernt eller Charlie gjør noen tegn til å være oppmerksomme på dette. De har en mangelfull begrepsoppfatning av kant, der en kant skal være en rett linje, og ikke litt rett og litt buet. Jeg vil derfor argumentere for at de er på et nivå lavere enn nivå 1 her.



Bilde 11: Figur 2, rektangel og firkant.

I diskusjon rundt figur 2 (se Bilde 11), vil både Bernt og Charlie kategorisere figuren som et rektangel, mens Anne vil ha den i samme kategori som firkantene.

46. *C: (peker på figur 2).. og det der er rektangel.*
47. *B: men da er det din…men jeg er uenig med den(tar figur 2), det er jo et rektangel.*
48. *A: ja, men den er jo, den har jo fire hjørner, så det er jo en firkant.*

Elevene argumenterer for hvorfor de vil sortere figuren på sin måte. Anne påpeker at figuren har fire kanter, og derfor bør være sammen med de andre firkantene. Senere i diskusjonen, i S112, viser Charlie at han er oppmerksom på figurens egenskaper- at figuren har fire kanter. Likevel er både Bernt og Charlie bastante i sin kategorisering og vil ha den som en egen kategori kalt rektangel. Elever som er på nivå 0 evner å identifisere spesielle former (Crowley, 1987). Bernt og Charlie har gjenkjent figuren som et rektangel. De vil ikke kategorisere figuren ut ifra dens egenskaper. Derfor plasseres de innenfor nivå 0 på sine utsagn rundt figur 2. Jeg vil derfor argumentere for at både Bernt og Charlie ikke er helt oppe på nivå 1, men heller på vei dit, i likhet med Anne.

4.1.3 Puslespillmetode som sorteringskriteria

I likhet med elevene i G1, har Daniel og Ester i G2 fått utdelt hvert sitt ark med 12 figurer på, som de har klippet ut. G2 består av i alt 9 videosnutter på til sammen 22 minutter, men transkripsjonene starter ikke før i den andre videosnutten, da ingenting blir uttrykt verbalt i første videosnutt. Jeg vil presentere analysen ut ifra sorteringskriteriene til elevene, på tvers av videosnutter. Felles for Daniel og Ester er at de sorterer figurene i par, og ikke i større bunker. Analysen starter mens elevene holder på å sortere figurene hver for seg. Forskeren både filmer og snakker med elevene mens de sorterer.

Daniel starter med å sortere etter et spesielt sorteringskriterium;

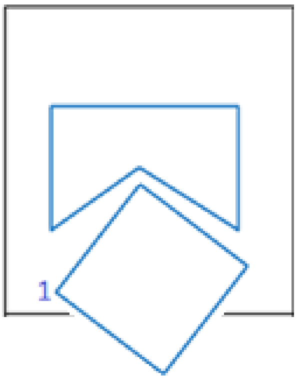
1. *Fo: Hva er det som passer inni der? (filmer Daniel)*
2. *D: Den kanten der (holder figur 2 og figur 11, peker på figur 2)*

…

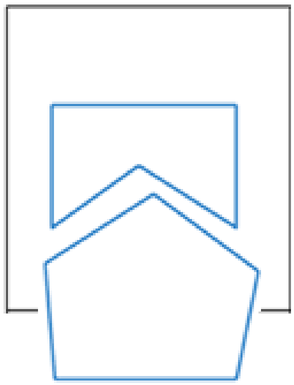
4. *Fo: okei… (filmer at Daniel holder fig 2 opp mot fig 11, slik at den korte enden av fig 2 ligger inni kroken på fig 11 som to puslespillbiter) (...)*

Daniel plukker opp figur 1 og figur 9, setter dem opp mot hverandre slik at det ene hjørnet på fig 9 er inni hjørnet på fig 1. Han legger begge figurene ned og bytter ut figur 9 med figur 3, før han legger dem ned igjen.

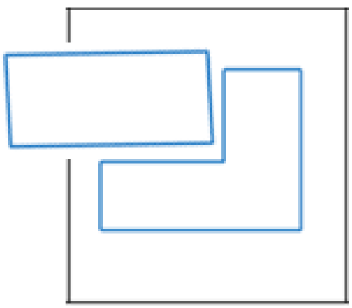
(…) Så plukker han opp fig 7 og 9, legger fig. 7 over fig 9 slik at han så vidt kan skimte fig 9 gjennom papiret på fig 7. Figurene settes opp mot hverandre slik at en av hjørnene på fig 9 ligger inni hakket på fig 7, som et puslespill.



Bilde 12: Figur 1 og 9 sammenlignes.



Figur 1 og 3 sammenlignes.



Bilde 13: Figur 2 og 11 sammenlignes.

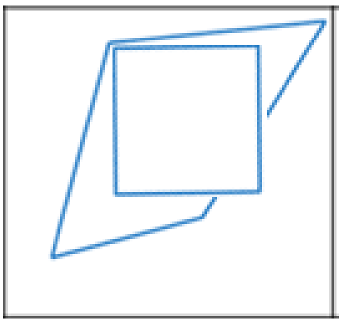
I utdraget fra empirien over, filmer forskeren mens Daniel sorterer figurene sine. Forskeren samtaler også med Daniel og får ham til å forklare litt hvordan han mener to av figurene passer sammen. Daniel vurderer hvordan både figur 9 og 3 «passer» sammen med figur 1 (se Bilde 12), før han bestemmer seg for at figur 3 passer bedre. På spørsmål fra forskeren, forklarer og viser Daniel at figur 2 passer inntil figur 11 (se Bilde 13). Daniel sammenligner figur 2 og 11 ut ifra visuelle betraktninger, der han ser om det er noen sammenheng med de to figurenes visuelle fremtoning som han kan pare dem etter. Dette gjør at Daniel faller inn under van Hiele-nivå 0, der eleven resonnerer rundt grunnleggende geometriske konsepter, som i dette tilfellet er enkle former gjennom visuelle betraktninger av figurene, uten direkte hensyn til egenskaper rundt figurenes deler.

Daniel ser på hvordan figurene passer inntil hverandre og sorterer med deretter. Sorteringskriteriet vil jeg kalle oppfinnsomt, og gir assosiasjoner til puslespill. I puslespill skal man finne de brikkene som passer sammen for å skape et bilde. Kriteriene er at puslespillbrikkene skal passe perfekt sammen. Det virker som at Daniel har overført disse kriteriene til denne oppgaven. Hvorfor han har bestemt seg for å bruke akkurat denne sorteringsmetoden, vites ikke, men en mulig forklaring kan være at figurene har vekket et begrepsbilde hos Daniel, der Daniel har erfaringer med puslespill fra tidligere, og at han assosierer puslespillbiter med figurene han nå skal sortere. Daniel sammenligner figurene basert på figurenes visuelle fremtoning og ligger dermed på nivå 0 i van Hieles teori.

Til forskjell fra Daniel, bruker Ester flere sorteringskriterier for å sortere figurene. I starten ser det ut til at Ester sorterer figurer basert på figurenes egenskap, men det viser seg senere at hun sorterer figurer basert på visuelle betraktninger av figurenes helhet.

I S12 spør forskeren hva Ester gjør.

12. Fo: Hva er det du gjør, Ester?
13. E: Sjekker hvem som passer sammen (holder figur 5 og figur 9 over hverandre)
14. Fo: Hva betyr det at de passer sammen?
…
17. E: At det ser litt samme ut



Bilde 14: figur 9 plasseres over figur 5. I virkeligheten, skimtes figur 5 så vidt gjennom papiret til figur 9.

Ester svarer i S13 at hun ser hvilke figurer som passer sammen med hverandre. Mens Ester sier dette, holder hun figur 5 og 9 opp på en måte som gjør at figurene overlapper hverandre (se Bilde 14). Forsker spør hva det betyr å passe sammen og Ester svarer; «*At det ser litt samme ut*». På spørsmål om hva som er det samme med figurene, svarer Ester; «*mmm, kantene*». Ester viser også forskeren hvor hun mener kantene er, ved å peke på hjørnene til figur 9. Ester sorterer tilsynelatende figur 5 og 9 basert på egenskaper hos figuren. I likhet med Anne i G1, bruker også Ester ordet kant for hjørner.

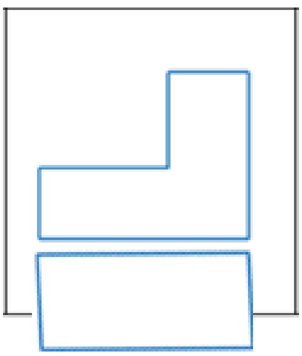
Forsker spør videre om det er noe annet ved kantene på figurene som er grunn til at Ester velger å pare figur 5 med 9.

26. *Fo: er det… ser kantene ut lik ut, eller er det noe annet med kantene som du…. Ser (utydelig)…?*
27. *E: mmm, den (utydelig) spissen der (peker på den spisseste og største vinkelen på figur 5)*
28. *Fo: den der er spissere… mm. Så slik er de litt ulik. Men… ,men du la de i samme bunken allikevel*

Ester svarer at hun synes at den ene kanten i figur 5 er litt «spissere» enn spissene i figur 9. I utgangspunktet kunne sorteringen til Ester blitt analysert til å være nivå 1 i van Hieles teori. En firkants antall kanter er unikt hos firkanter, men Ester nevner aldri noe om *antall* kanter. Hun sorterer ut ifra det som tilsynelatende er visuelle forskjeller og likheter i figurenes utseende. Dette vil i så tilfelle plassere henne på van Hiele-nivå 0. Videre viser Ester to forskjellige sorteringskriterier som tydelig viser at hun ligger på nivå 0.

Den første av de to sorteringskriteriene ligner på puslespillmetoden. I S33 spør forskeren om Ester har funnet flere figurer som passer sammen;

34. *E: mm, disse her to (plukker opp figur 2 og figur 11)*
35. *Fo: de passer sammen? Hvorfor passer de sammen da?*
36. *E: fordi den her (plukker opp figur 2) er like stor som den der biten der (peker på langsiden av figur 11)*

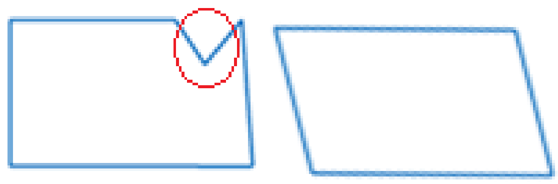


Bilde 15: figur 2 under figur 11, sammenligning av størrelser.

Ester svarer i S 34; «*mm, disse her to…*» og viser figur 2 og 11. Figur 2 er et rektangel mens figur 11 er en sekskant. På spørsmål om hvordan de passer sammen, svarer Ester;» *fordi den* *her (plukker opp figur 2) er like stor som den der biten der (peker på langsiden av figur 11)».* Her argumenterer Ester for at figur 2 og 11 passer sammen ved at figur 2 sine langsider passer ved siden av figur 11. Visuelt kan det se ut til at figur 11 består av to rektangler, der det ene rektangelet er plassert på høykant i enden av det andre. Dette kan sammenlignes med puslespilltankegangen, der biter skal passe sammen, og det svarer til nivå 0.

Den andre sorteringsmetoden kan kun forklares ut fra visuell sammenligning. I S40 viser Ester figur 4 og 10 og forklarer at de hører sammen fordi de; *«er like store».*

40. *E: Øm, det er disse her to (plukker opp figur 4 og figur 10) som er like store, bare at den spissen (peker på innhakket i figur 4) er (utydelig)…*
41. *Fo: akkurat, så de er like, bare at den ene har den der..*
42. *E: spissen*
43. *Fo: spissen innover ja, akkurat*



Bilde 16: Figur 4 med rød ring rundt innhakk, ved siden av figur 10.

Figur 4 er en sekskant med et konkavt hakk i seg, mens figur 10 er en firkant. Ester påpeker hakket i figur 4 (se Bilde 16; rød ring), men vil fortsatt pare de to figurene. Ester avslører ved å overse hakket i figur 4, at hun kun bryr seg om figurenes helhetlige visuelle fremtoning. Hun er dermed på nivå 0.

4.1.4 Fra puslespill til sortering etter egenskaper

Rett før forskeren ber Daniel og Ester om å sammenligne gruppene sine, oppdager Daniel at figurene kan grupperes etter egenskaper;

47. *Fo: Ester og Daniel skal sammenligne og prøve å finne felles krav for å legge i felles bunke*

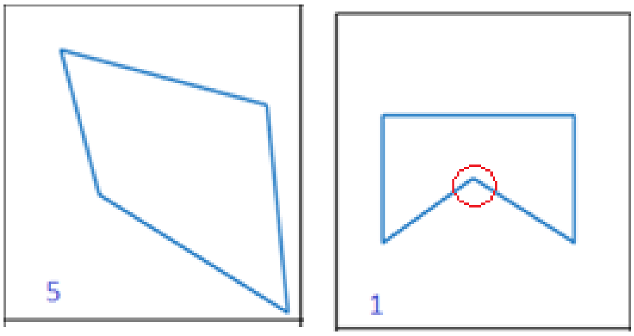
…

56. *D: disse her er ganske lik (holder frem fig. 1 og en fig. Som ikke vises), bare fordi de har fem kanter*
57. *Fo:ja! Så antall kanter kan være et… en egenskap*

I S47 forklarer forskeren for kameraet at elevene *«skal sammenligne og prøve å finne felles krav»*. Daniel og Ester studerer figurene i 10 sekunder, før Daniel bemerker; «*disse her er ganske lik (holder frem figur 1 og en figur som ikke vises på kamera), bare fordi de har fem kanter*». Elevene fortsetter å studere figurene og Daniel oppdager at flere av figurene har antall kanter som fellestrekk. I S63 sier han; «*Disse her har også like mange kanter!*» og refererer til figur 5 og 12. Daniel sier videre at figurene er firkanter. Han forklarer ved å telle antall hjørner på figur 5 og 12. En figurs antall hjørner er en unik egenskap ved figuren, så denne sorteringen svarer til van Hiele-nivå 1.

Litt senere når elevene skal sammenligne bunker, viser Daniel fire forskjellige par med figurer. Det første paret, er figur 7 og 8. Daniel sier at han har lagt dem sammen grunnet likt antall kanter. Når forskeren i S75 ber Daniel telle kantene i og i S 77 vise med fingeren, viser Daniel i S80 hvordan han tenker ved å telle til seks mens han peker på sidekantene til figur 7. Det andre paret er figur 2 og 11, som han sorterer ut ifra puslespillmetoden. Daniel sier i S89 og S91 at; «*…de har ikke like mange kanter (…) de bare passer inni der (flytter figur 2 inni kroken på figur 11*». Det tredje og fjerde paret sorterer han ut ifra både puslespillmetoden *og* antall kanter. Daniel sier at figur 1 og 3 passer sammen, fordi; «*disse, disse har begge deler (…) de har like mange kanter og de passer inni hverandre*». Det samme gjelder figur 5 og 12, som han i S106 forklarer at; *«… de er begge deler de og…»*. De to siste parene legger Daniel i samme bunke.

De fire parene viser at Daniel ligger en plass mellom van Hiele-nivå 0 og van Hiele-nivå 1. Sortering etter en figurs egenskaper, som antall kanter, svarer til nivå 1, mens sortering basert på puslespillmetoden svarer til nivå 0, da dette er sammenligning av figurers visuelle fremtoning. Daniel er ikke helt oppe på nivå 1, da han fremdeles vil sortere etter puslespillmetoden, men han er heller ikke på nivå 0, da han har beveget seg inn på et sorteringskriterium som tar utgangspunkt i figurers egenskaper.



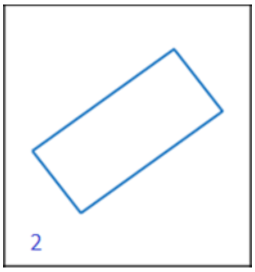
Bilde 17: Figur 5 og 1 sortert som firkanter. Rød ring viser konkavt hjørne.

I likhet med Daniel, beveger Ester seg også etter hvert litt bort fra nivå 0 i van Hieles teori. Hun begynner å sortere figurer etter antall hjørner, som hun kaller kanter, men det viser seg at hun er selektiv i hva hun definerer som hjørne. Ester parer figur 1 og 5, kaller dem i S112 for firkanter og begrunner i S14 at det er fordi de har fire kanter. Forskeren spør om hun kan telle kantene slik at forskeren får se det. Ester teller de fire ytterste hjørnene i figur 1, men utelukker det konkave hjørnet i figuren (se Bilde 17). Forskeren spør Ester om ikke det konkave hjørnet er en kant. Ester sitt svar i S118 er utydelig, men forskeren responderer i S119 med; «*nei, det spørs hva vi mener med kant!*». Dette tolkes som at Ester ikke definerer det konkave hjørnet for kant. Videre spør forskeren om Ester ser flere firkanter blant figurene sine. Ester peker etter hvert på figur 10, 9 og 2 og legger disse i en bunke sammen med figur 1 og 5. Forskeren spør videre om figur 4. Ester teller igjen de fire ytterste hjørnene, men dropper å telle to av hjørnene i forbindelse med det konkave innstikket. Ester sorterer etter antall hjørner, som hun kaller kanter, men hun er selektiv i hva hun definerer som kant. Dette plasserer henne over nivå 0, da hun har begynt å trekke ut egenskaper hos figurene, men hun når ikke helt opp til nivå 1 i van Hieles teori. Senere gjenkjenner hun figur 1 som femkant, men fortsetter å se på figur 7 som en firkant. Mot slutten forklarer hun at hun teller med innstikket i figur 1, fordi det er stort nok, men ikke i figur 7, fordi det er for lite.

Både Daniel og Ester er på vei bort fra nivå 0 i van Hieles teori, i tillegg til å bevege seg vekk fra puslespillmetoden, men de er ikke oppe på nivå 1 enda. Jeg vil argumentere for at Daniel er kommet litt lenger i sin utvikling da han evner å sortere figurer etter figurens antall kanter. Ester, som sorterer etter hjørner, er selektiv i hva hun definerer som hjørne, og vil derfor ikke alltid sortere en figur etter figurens faktiske antall hjørner.

4.2 Firkant eller rektangel – et definisjonsspørsmål

Analysen av G1 viser at figur 2, i likhet med figur 6 og 7, er en av de figurene som Anne, Bernt og Charlie diskuterer mest. Jeg vil nå presentere diskusjoner rundt figur 2, og belyse noen av de funnene som kan gi en forklaring på hvorfor akkurat denne figuren er grunnen til flere av diskusjonene. Figur 2 er både en firkant og et rektangel, som ifølge Clements og Sarama (2011) ofte blir sett på som en eksklusiv kategorisering (Clements & Sarama, 2011, s. 141). Fordi figuren kan defineres som både firkant og rektangel, og elevene er uenige om hva den skal defineres som, er den blitt gjenstand for diskusjon.



Bilde 18: Figur 2, som Anne sorterer forskjellig fra Bernt og Charlie.

Anne sorterer figuren sammen med andre firkanter, mens Bernt og Charlie ønsker å ha figuren som en egen gruppe, kalt rektangel. Fra S46 til S51 diskuterer elevene figuren og argumenterer for sitt syn.

46. C: (peker på figur 2).. og det der er rektangel

47. B: men da er det din… men jeg er uenig med den (tar figur 2), det er jo et rektangel

48. A: ja, men den er jo, den har jo fire hjørner, så det er jo en firkant.

…

50. A: Rektangel, men det har jo fire kanta, rektanglene er lenger

51. B: jeg vet, det er et rektangel

I S46 peker Charlie på figur 2 og kaller den for et rektangel. Det samme gjør Bernt i S47. Selv når Anne argumenterer for at figuren skal sorteres som firkant, fordi den har fire kanter/hjørner, ønsker Bernt og Charlie å sortere figuren som rektangel. I S51 svarer Bernt på Anne sitt argument med; «*jeg vet, det er et rektangel*». Bernt sitt utsagn «jeg vet», tyder på at han er enig med noe av det som Anne sier i S50. Siden Bernt fortsatt står på sitt om at figuren er et rektangel, tyder dette på at Bernt er enig med Anne om at figuren har fire hjørner, men han vil fortsatt definere figuren som et rektangel, og ikke en firkant. Fra S108 til S115 diskuterer elevene igjen figur 2, men denne gang hvilken forklaring de skal ha på sorteringen av figuren. Her kommer det frem at Charlie også ser at figuren har fire kanter, men at han likevel vil definere den som rektangel. Elevene er altså enige om egenskapene til figuren, men uenige om kategoriseringen. Det kommer også frem at Anne til slutt har latt seg overtale til å definere figuren som et rektangel, fremfor firkant.

Elevenes definisjon av rektangel er nokså diffust. I diskusjonene rundt figur 2, bruker Anne argumenter som «*rektanglene er lenger*» og *«rektangelet er lang»*. Charlie argumenterer for figur 2 som rektangel med å si i S114 at *«den er lenger enn bare firkanter!»*. Bernt er den som kanskje er nærmest noe som kan minne om en unik egenskap ved rektangler, for i S115 sier han *«nei, den… den… eh.. (peker på figur 2) den har to lenger enn…»*. Utsagnet hans kan tolkes som at han påpeker en egenskap hos figuren, en egenskap som kan beskrives med ordet to. Figuren har to parallelle sider som er lenger enn de to andre parallelle sidene. Dette er en unik egenskap hos alle rektangler som ikke også er et kvadrat. Bernt får aldri fullført argumentet sitt, så det er umulig å vite hva han egentlig mener med utsagnet. Det som er sikkert, er at elevene definerer rektangel som noe som er lenger enn noe. At noe er lenger enn noe annet, er en unøyaktig beskrivelse og baserer seg på figurers visuelle fremtoning. Rektangler har, med unntak av regulær firkant, to og to parallelle sider i forskjellige lengder. Dette kan forklare elevenes trang til å beskrive figur 2 som «lenger» enn andre figurer. Elevene velger altså å kategorisere figuren ut fra dens visuelle fremtoning, som svarer til van Hieles nivå 0, i stedet for figurens unike egenskaper, som ville vært på nivå 1.

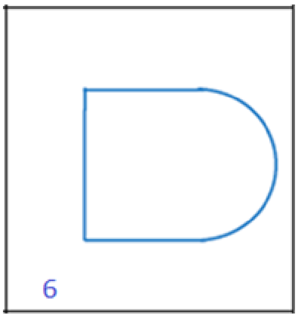
En av forklaringene på hvorfor Bernt og Charlie kaller figur 2 for et rektangel fremfor en firkant, kan være at de ser på enkelte kategoriseringer som mer eksklusive enn andre. Clements og Sarama (2011) sier at på grunn av flere faktorer, mener de fleste amerikanske elever (og voksne) at en figur ikke kan være rektangel fordi det er et kvadrat. De (her: elevene og voksne) tror at rektangler og kvadrat er likeverdige eksklusive kategorier. En figur kan derfor ikke være i begge kategoriene. Clements og Sarama sier videre at barns første møte med geometriske figurer i skolepensum, ofte er de fire figurene sirkel, kvadrat, trekant og rektangel og at tanken om at et kvadrat ikke er et rektangel slår rot allerede i 5-års alderen (Clements & Sarama, 2011, s. 141).

Et rektangel er både en firkant og et rektangel, der den ene kategorien ikke er mer eksklusiv enn den andre. Likevel kan det hende at elevene tror at den ene kategorien er mer eksklusiv enn den andre. Det som gjør at et rektangel kan sees på som en eksklusiv kategorisering, er dens visuelle egenskaper, og at den har flere likeverdige kategoriseringer. Rektangler er firkanter som består av fire rette vinkler. Med unntak av reguler firkant, vil to og to parallelle sider ha forskjellig lengde i forhold til hverandre. Dette gjør at de fleste rektangler er lette å gjenkjenne, med unntak av regulær firkant, som ofte blir kategorisert som et kvadrat. Egenskapene er lette å se visuelt, noe som igjen gjør rektangler lett gjenkjennelige. En annen figur som ifølge Clements og Sarama kan få en eksklusiv kategorisering, er kvadrat. Figur 9, som elevene også sorterer, er et kvadrat. Likevel sorteres figuren sammen med andre firkanter, og ikke som en eksklusiv kategori. Figuren blir ikke diskutert i det hele tatt av elevene, bare nevnt av Anne to ganger. Hvorfor elevene velger å sortere figur 2 for seg selv, men ikke figur 9, kommer ikke frem i diskusjonene.

Det som derimot kommer frem, er figur 2 sin rolle som utgangspunkt for diskusjoner. Sorteringen er et bevis for at elever generelt *kan* lage eksklusive kategorier for noen figurer. Figurer med den egenskapen at de kan få tildelt eksklusive kategorier, kan fungere som utgangspunkt for diskusjoner rundt figurers egenskaper, nettopp fordi figurene kan defineres forskjellig. Slike diskusjoner er viktig fordi de kan avdekke elevers misoppfatninger, som i dette tilfelle at det eksisterer eksklusive kategoriseringer.

4.3 Tokant eller trekant; en figurs rolle i diskusjoner

De to andre figurene som elevene diskuterer mye, er figur 6 og 7. Jeg velger å fokusere på figur 6, da analyse rundt diskusjonen av figur 6, fører til noen viktige funn. Figur 6 skiller seg fra figur 2 og 7 ved å ikke være en mangekant. Likevel har figuren noen fellestrekk med figur 2 og 7. Alle tre figurene bidrar til diskusjon og matematisk forhandling mellom elevene, og alle tre figurene har den visuelle egenskapen at de blir kategorisert forskjellig ut ifra hvordan figurene blir definert.



Bilde 19: Figur 6, som Anne sorterer som tokant mens Bernt og Charlie sorterer som trekant.

Jeg vil presentere diskusjoner rundt figur 6, og belyse noen av de funnene som kan gi en forklaring på hvorfor akkurat denne figuren er grunnen til flere av diskusjonene. Likheten mellom diskusjonene rundt figur 2 og 6, er at det diskuteres hva figurene skal kategoriseres som. Forskjellen er at ved figur 2, er elevene enige om egenskapene, men uenige om kategoriseringene, mens ved figur 6 er de uenige om begge deler. I samtalen under er elevene uenige om hvordan de skal sortere figur 6. I løpet av diskusjonen kommer det frem at elevene bruker uttrykket kant forskjellig.

67. C: det her er trekant (finner frem figur 6)

…

76. A: men det er jo to (peker frem og tilbake på hjørnene på figuren), det er jo en kant og to kanter, det er jo ikke noen andre kanter der oppe

77. B: (plukker opp figuren) det er ikke de spissene som er kanter (peker på hjørnene)

78. C: nei

79. B: det er de lange (fører fingeren langs sidene på figuren)

I S67 sier Charlie at figur 6 er en trekant. Han forklarer hvordan han har tenkt i S69, ved å peke på den rette linjen, samt de to rette delene på sidene av figuren samtidig som han teller. Bernt er enig med Charlie i at figuren er en trekant og viser i S70 at han også teller tre kanter. Anne er uenig med Bernt og Charlie i at figur 6 er en trekant. Hun sier i S72; «*men dette her er jo bare to kanter (peker på figuren), to, og så er det sånn bøy (fører fingeren over buen på figuren)*». I S76 utdyper Anne hva hun mener med tokant og peker på hjørnene i figuren mens hun sier at den bare består av to kanter. Anne bruker igjen figurens hjørner for å definere figuren, samtidig som hun kaller hjørnene for kant. Bernt er oppmerksom på Anne sin definisjon av kant, og sier at det ikke er de spisse delene av figurer som er kanter, men de lange delene.

Han bruker også fingeren for å vise på figur 6 hva han mener, og fører fingeren frem og tilbake langs de rette delene av figuren.

Samtalen mellom elevene får frem at elevene bruker ordet «kant» forskjellig. Anne bruker hjørner som utgangspunkt, og kaller disse for kant. Hun er ikke alltid like konsekvent på hva hun mener et hjørne er, som ved figur 7, der hun bare teller med fire av seks hjørner. Likevel er hun konsekvent i å sortere figurer etter denne egenskapen. Bernt og Charlie bruker tilsynelatende figurenes sider når de definerer figurer (med unntak av figur 2) og kaller disse for kant. Når Bernt blir oppmerksom på Anne sin definisjon av «kant», mener han at hennes oppfatning av kant er feil, og viser hva han mener den egenskapen som skal defineres som kant er.

Analysen av diskusjonene rundt figur 6 resulterer i to viktige funn; Det første er at figur 6 fremprovoserer ulikheten i sorteringen hos elevene, fordi de sorterer etter forskjellige egenskaper. Anne sorterer figuren som tokant, mens Bernt og Charlie sorterer den som trekant. Dette skaper en viktig diskusjon rundt begrepet kant, da de ser at de definerer kant forskjellig. Det andre funnet er Bernt og Charlie sin definisjon av kant. I S79 sier Bernt at kantene i en figur er *«(..)de lange»* og fører fingeren langs de rette partiene til figur 6. Frem til da har Bernt og Charlie bare pekt på sidekantene til polygone figurer og kalt disse for kanter.

Ut ifra diskusjonen rundt figur 6, kan det tolkes dit hen at Bernt og Charlie definerer en kant som de rette partiene i et linjestykke. En kant skal være *et rett linjestykke,* og ikke deler av et linjestykke som er rett. Figur 6 har bare én kant, som strekker seg fra hjørne til hjørne. Videre er figuren sammensatt av en bue, som har to rette parti, ett i hver ende. Disse rette partiene velger Bernt og Charlie å definere som kanter. Bernt og Charlie har altså en mangelfull begrepsforståelse for kanter. De er ikke oppmerksomme på alle egenskapene til en kant. Bortsett fra figur 2 og 6, kategoriserer Bernt og Charlie figurene basert på figurenes antall sider. Alle figurene bortsett fra figur 6, er polygoner og består av et likt antall kanter og hjørner, med rette linjer mellom hjørnene. Det er figur 6 som har fremprovosert diskusjonene, og som har resultert i de to funnene. De andre figurene ville kanskje ikke ført til en diskusjon lik diskusjonen rundt figur 6, nettopp fordi de andre figurene har like mange kanter som hjørner.

Dermed ville Bernt og Charlie sitt mangelfulle begrepsinnhold rundt kanter sannsynligvis ikke blitt «avslørt» om alle figurene hadde vært mangekanter.

5 Drøfting

I dette kapittelet vil jeg drøfte funnene jeg har gjort i analysen. I delkapittel 5.1 vil jeg drøfte utfordringer ved van Hiele-nivåene som analyseverktøy, og begrunne hvorfor jeg mener at van Hiele-nivåene ikke er nøyaktige nok til å kunne brukes effektivt til å analysere elevers begrepskunnskap i geometri. I delkapittel 5.2 vil jeg diskutere figur 2, 6 og 7, som har noen unike egenskaper ved seg. Jeg vil forsøke å sammenligne noen av egenskapene hvor jeg vil ende opp med en felles definisjon, som jeg vil kalle kontrastfigurer. I delkapittel 5.3 vil jeg fokusere på matematisk forhandling, og legge frem tre mulige årsaker til at matematisk forhandling har funnet sted. Deretter vil jeg diskutere noen fellestrekk ved matematiske forhandlinger. I delkapittel 5.4 vil jeg komme med refleksjoner rundt forskningen, samt presentere noen funn jeg mener er viktige. Jeg vil argumentere for at matematisk forhandling og kontrastfigurer kan bidra positivt i undervisning. Til slutt vil jeg si noe om videre forskning.

5.1 van Hieles fem nivåer som analyseverktøy

Det har vist seg vanskelig å plassere enkelte elevutsagn innenfor et nivå i van Hiele sine fem nivåer. Et eksempel er situasjonen der Anne sorterer figur 7 som firkant sammen med andre firkanter. Anne sier i G1 S31; *«Og da telte jeg en, to, tre, fire (peker på fire plasser på figuren)… fire. (tar opp neste figur i bunken (figur 5)) En, to, tre, fire (peker på fire plasser på figur 5)... fire (peker på figur 7 som er neste figur i bunken), fire, fire (viser frem de siste tre figurene i bunken, som er figur 9, figur 10 og figur 12)».*

Uttalelsen til Anne blir analysert til å verken være nivå 0 eller 1. Det må mer informasjon til fra senere samtaler, for å kunne avdekke hvordan Anne har tenkt, og dermed kunne si noe om hvilket av van Hieles fem nivåer hun ligger på.

Et annet eksempel er i diskusjonen rundt figur 2. I S50 bruker Anne to forskjellige argumenter for hvorfor figur 2 er en firkant. Det første argumentet «*men den har jo fire kanter*», er et argument som beskriver hvorfor figur 2 er en firkant, ved å ta utgangspunkt i figurens oppbygning. Dette utsagnet plasseres på nivå 1 i van Hieles nivåer. Det andre argumentet «*... rektanglene er lenger*», er et argument som beskriver hvorfor figur 2 ikke er et rektangel, ved å ta utgangspunkt i figurens fasong. Hun sier at en figur er et rektangel hvis figuren er over en viss lengde. At noe er lenger enn noe annet, er en egenskap som kan brukes for å beskrive en figurs helhet, satt opp mot andre figurer. Derfor tolker jeg dette til å være en visuell egenskap, der figurens visuelle fremtoning bestemmer om figuren er et rektangel eller ikke. Argumentet plasseres dermed innenfor nivå 0, som sier at elever resonnerer gjennom visuelle betraktninger av figurer som helhet. S50 er både nivå 0 og 1, og er derfor vanskelig å plassere i et av van Hieles nivåer.

Van Hieles fem nivåer, slik de er beskrevet i Burger og Shaughnessy (1986), er ikke et nøyaktig nok analyseverktøy for å analysere utsagn setning for setning. Selv når setninger sees i sammenheng med hverandre, er det noen ganger vanskelig å plassere en elev på ett nivå. Alle de fem elevene ender opp med å plasseres en eller annen plass mellom nivå 0 og 1 i van Hieles fem nivåer.

Denne problemstillingen er også nevnt i Burger og Shaughnessy (1986) sin studie. Burger og Shaughnessy (1986) skriver at van Hieles nivåer fremtrer som dynamiske og ikke statiske. De sier at individer kan bevege seg frem og tilbake mellom nivåer flere ganger i sin utvikling fra ett nivå til det neste (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 45). Usiskin (1982, referert i Burger & Shaughnessy, 1986), sier at individuelle elever kan plasseres innen et nivå, men at elever som er på vei fra et nivå til et annet er vanskelig å klassifisere. I tillegg sier Mayberry (1986) referert i Burger og Shaughnessy at elever kan være på forskjellige nivåer for forskjellige konsepter. Burger og Shaughnessy bekrefter oppfatningen til Fuys et al. og Mayberry av at van Hieles nivåer fremtrer som hierarkiske, og sier at de også erfarte vanskeligheten ved å klassifisere elever som fremsto å være mellom to forskjellige nivåer (Burger & Shaughnessy, 1987, s. 41-42).

Selv om elevene er plassert mellom van Hiele-nivå 0 og 1, er det store forskjeller mellom elevene. Bernt og Charlie bruker nesten konsekvent sidekantene i figurene som sorteringskriterium, selv om de har en ufullstendig begrepsoppfatning av sidekant. Unntaket er figur 2, som de sorterer etter gjenkjent figur, og figur 6, som de sorterer som trekant. Anne sorterer etter hjørner, som hun kaller kanter, og er konsekvent i sin sortering, men ender opp med å utelate noen hjørner. Figur 7 kaller hun for firkant, selv om den er en sekskant, fordi hun bare ser fire hjørner. Daniel oppdager at han kan bruke en figurs antall kanter som sorteringskriterium, men er ikke konsekvent i sorteringen. Han vil fortsatt holde på puslespillsorteringen i tillegg til sorteringskriteriet han oppdager. Ester er i samme båt som Daniel, men sorterer færre figurer etter antall hjørner enn det Daniel gjør, og kaller hjørnene for kanter.

Jeg opplever at forskjellene mellom elevene er større enn det analysen tilsier, men dette er vanskelig å tolke ut ifra resultatet av analysen, fordi van Hieles fem nivåer ikke er et nøyaktig nok verktøy til å analysere elevers begrepskunnskap. Bernt og Charlie har kommet lenger enn for eksempel Daniel i sin begrepskunnskap, fordi de er mer konsekvent i kategoriseringen sin. Likevel gir analysen et inntrykk av at de er kommet like langt i begrepsutviklingen for geometri. Jeg savner mer nyanser i van Hiele-nivåene, slik at det er mulig å skille mellom for eksempel Bernt og Daniel. Jeg vil derfor konkludere med at van Hieles fem nivåer slik de er beskrevet i Burger & Shaughnessy (1986) ikke er et nøyaktig nok analyseverktøy for å analysere elevers resonnering innen geometri, spesielt ikke hvis elever skal rangeres opp mot hverandre. I denne oppgaven ville en mulighet for rangering av elevenes utsagn opp mot hverandre, gjort det lettere å si noe om kvaliteten på begrepskunnskapen som elevene uttrykker. Med kvalitet, mener jeg høyere rangerte utsagn, der utsagn som blir rangert høyere enn andre utsagn, vil bli tolket til å være av bedre kvalitet. Til tross for at det er vanskelig å plassere elevenes utsagn innenfor van Hiele-nivåer, har analysen vist i hvilke situasjoner det blir uttrykt begrepskunnskap, og hvilke figurer elevene arbeider med når de uttrykker begrepskunnskap.

5.2 Kontrastfigurer

Selv om det har vist seg vanskelig å skille mellom elevenes begrepskunnskap ved å bruke van Hieles nivåer, har analysen ved hjelp av nivåene avdekket noen figurer som skiller seg ut ifra andre figurer. Figur 2, 6 og 7 har den felles egenskapen at de kan tolkes forskjellig ut ifra figurenes form og egenskaper. Figurene blir alle sortert forskjellig av elever, er gjenstand for matematiske diskusjoner, og har vist at de kan ha en viktig rolle for blant annet å avdekke misoppfatninger. Disse figurene styrker også den første hypotesen om at mengden begrepskunnskap som blir uttrykt, blir påvirket av typen figurer som elevene sorterer. I et forsøk på å samle figurene under en felles kategori, vil jeg analysere figurene opp mot allerede kjente kategoriseringer.

5.2.1 definering av kontrastfigurer

Figur 2 er et rektangel, og blir av Bernt og Charlie definert deretter. Samtidig nekter Bernt og Charlie å definere figuren som en firkant. Jeg har trukket paralleller til eksklusive kategorier, der det kan virke som om Bernt og Charlie mener at figur 2 ikke kan være både rektangel og firkant. Det virker som om det de regner rektangel som mer eksklusiv, fordi de velger å kalle figuren for det. I utgangspunktet ville jeg tenkt at figur 2 ville hatt rollen som en prototype, da den tydelig viser egenskapene som må være til stede for å kunne defineres som en firkant. Figuren har jo fire kanter og fire hjørner, der kantene og hjørnene vises tydelig, da figuren er konveks. Likevel velger to av elevene å heller sortere figuren som et rektangel.

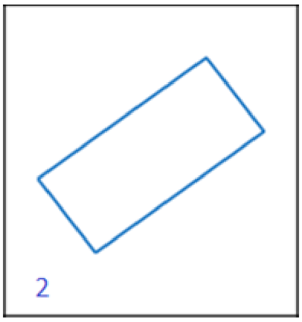
Figur 6 er ikke noe polygon i det hele tatt, men blir likevel sortert sammen med andre polygoner, fordi figuren har noen egenskaper ved seg som ligner polygoner. Figuren har to hjørner, et rett linjestykke, og et buet linjestykke, som er rette i endene. Elevene definerer figuren forskjellig, fordi de definerer ut ifra forskjellige egenskaper ved figuren. Samtidig har de sortert figuren ut ifra samme kriterier som polygoner. Man kan derfor argumentere for at figur 6 har rolle som et ikke-intuitivt ikke-eksempel for de figurene som elevene mener figur 6 hører til. For Anne vil figur 6 være et ikke-intuitivt ikke-eksempel for tokanter. Tilsvarende for Bernt og Charlie, men da for trekanter. Det vil si at figuren ikke er et eksempel på polygoner i det hele tatt, men blir sortert om en. Dette kan komme av at elevene som sorterer figurene er en plass mellom nivå 0 og nivå 1 i van Hiele-nivåene, og har fremdeles ikke noen kunnskap om kritiske egenskaper ved definisjoner. En todimensjonal polygon må ha like mange kanter som hjørner for å være en polygon.

Figur 7 er en sekskant, og blir sortert deretter av Bernt og Charlie, men blir av Anne sortert som en firkant. Figuren er det jeg vil kalle for et ikke-intuitivt eksempel på en sekskant, da figuren har en form som elevene ikke nødvendigvis vil godkjenne som en sekskant. Annes utsagn er et argument for dette. Samtidig vil jeg argumentere for at figuren i noen tilfeller kan fungere som et ikke-intuitivt ikke-eksempel for trekanter, da det har en form som kan minne om trekanter. Men hva har disse tre figurene felles? De er ikke samme type eksempel. De kan heller ikke regnes som eksklusive kategorier alle sammen. En ting de har felles, er at individer som i hovedårsak befinner seg på van Hiele-nivå 1 vil kunne definere og sortere figurene annerledes enn andre individer på nivå 1, i tillegg til elever som i hovedårsak befinner seg på van Hiele-nivå 0. En annen ting de har felles, er egenskapen til å bli tolket forskjellig av forskjellige elever. Elevene får antageligvis forskjellige begrepsbilder vekket av figurene. Voigt (1994) bruker ordet «tvetydighet» for å forklare at undervisning, oppgaver, tegn osv. kan tolkes forskjellig ut ifra individet (Voigt, 1994, s. 277). En figur har en form og noen egenskaper som er fastsatt figuren og kan ikke tolkes, men hvordan figuren skal defineres kan derimot tolkes. Figur 2, 6 og 7 blir alle tolket forskjellig, da de antageligvis vekker forskjellige begrepsbilder hos de forskjellige individene, og har på den måten en tvetydighet ved seg.

I mangel på en felles generell definisjon, velger jeg å kalle figur 2, 6 og 7 for *kontrastfigurer,* da de skaper en kontrast til vanlige mangekanter. Hvilke egenskaper som avgjør om en figur er en kontrastfigur eller ikke, avhenger av situasjonen. Dette gjør det også vanskelig å avgjøre når en figur går fra å være en alminnelig figur til å være en kontrastfigur. Det er ikke noen klar grense på når en figur er «stygg» nok til at et individ vil definere den forskjellig fra andre individ. Jeg har likevel prøvd å sortere noen fellestrekk ved kontrastfigurer og kommet frem til denne definisjonen;

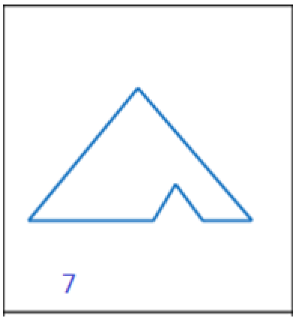
> *En kontrastfigur er en figur med en visuell egenskap som gjør at individer på van Hiele-nivå 1, vil kunne definere figuren forskjellig fra andre individ på samme nivå, men også forskjellig fra individer som er på van Hiele-nivå 0.*

Jeg deler kontrastfigurer inn i to grupper; **polygone kontrastfigurer** og **ikke-polygone kontrastfigurer**. Polygone kontrastfigurer er figurer som defineres som mangekanter i et plan, men som har noen egenskaper ved seg som gjør at de kan bryte med individers visuelle oppfatning av figurene. Ikke-polygone kontrastfigurer er figurer som har noen visuelle egenskaper lik plane mangekanter, men som mangler noen kriterier for å oppfylle kriteriene for mangekanter.



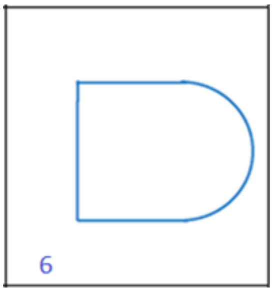
Bilde 20: Polygon kontrastfigur med flere samlingsdefinisjoner.

Jeg har funnet to typer polygone kontrastfigurer; Den ene er figurer som har flere samlingsdefinisjoner, der noen av disse samlingsdefinisjonene kan oppfattes som mer eksklusive enn andre. Figur 2 (Bilde 20) er en slik figur og vil av elever på nivå 0 defineres som rektangel, grunnet en gjenkjent figur. Den samme figuren vil bli definert som firkant av elever på nivå 1, grunnet figurens fire kanter og hjørner.



Bilde 21: Polygon kontrastfigur med likhetstrekk fra ikke-intuitive ikke-eksempler.

Den andre typen polygone kontrastfigurer er figurer som har en form som visuelt kan ligne på én type polygon, men som har en visuell egenskap som gjør at den får egenskaper ulikt fra de type polygonene den ligner, slik som ikke-intuitive ikke-eksempler. Figur 7 (se Bilde 21) er et eksempel på en slik figur. Den vil bli kalt trekant av elever på nivå 0 fordi den har en form som kan minne om trekanter, mens elever på nivå 1 vil definere som sekskant grunnet figurens seks kanter og hjørner.



Bilde 22: Ikke-polygon kontrastfigur.

Ikke-polygone kontrastfigurer er figurer som ikke er polygoner, men som har noen egenskaper lik polygoner. Eksempel på en ikke-polygon kontrastfigur, er figur 6 (se Bilde 22). For figur 6 vil likhetene med polygone figurer være at figuren har både hjørner og kant, men fordi blant annet antall kanter og hjørner er ulike hverandre, er ikke figuren en polygon.

Elever på nivå 0 vil kunne definere figuren annerledes enn andre elever på nivå 0, og elever på nivå 1 vil kunne definere figuren annerledes enn andre elever på nivå 1. I tillegg vil elever på nivå 0 kunne definere figuren annerledes enn elever på nivå 1. Alt avhengig av hvilke egenskaper elevene definerer figurer ut ifra. Elever på nivå 1 som definerer figurer ut ifra en figurs antall kanter, vil kunne definere figuren som en enkant, mens elever på nivå 1 som definerer figurer ut ifra en figurs antall hjørner, vil kunne definere figuren som en tokant (figuren er ingen av delene, da en todimensjonal polygon i et plan har like mange kanter som hjørner).

5.2.2 kontrastfigurers rolle i begrepslæring i geometri

Analysen har vist at det er noen figurer som elevene arbeider med i større grad enn andre figurer, når de uttrykker begrepskunnskap. Dette gjelder figur 2, 6 og 7, der ikke bare uttrykker begrepskunnskap, men også forskjellig begrepskunnskap fra hverandre. I tillegg har diskusjoner rundt figurene avdekket noen misoppfatninger blant elevene. Disse misoppfatningene kan være et hinder for felles begrepsforståelse hvis de ikke blir oppdaget.

For å kunne kommunisere matematikk, er det ønskelig med en felles begrepsforståelse, i tillegg til et så presist språk som mulig. Derfor er det viktig å avdekke misoppfatninger som kan stå i veien for felles begrepsforståelse og et presist språk. Hvis misoppfatninger ikke blir oppdaget, kan det få konsekvenser i senere tid. Derfor er det viktig at slikt blir oppdaget. Diskusjonen rundt figur 6 er en viktig diskusjon, fordi den avdekker misoppfatninger rundt begrepet kant. Disse misoppfatningene ville kanskje ikke blitt oppdaget hvis elevene ikke fikk mulighet til å diskutere nettopp figur 6. Tilsvarende er diskusjonene rundt figur 2, der Bernt og Charlie tilsynelatende mener at rektangel er en mer eksklusiv kategori, fremfor å si at figuren er både et rektangel og en firkant. Figurene i seg selv ser ut til å fremprovosere diskusjoner, fordi de har egenskaper ved seg som kan tolkes forskjellig. Dette gjør at kontrastfigurer er en type figurer jeg mener det kan være viktig at elever jobbet med, nettopp fordi de har den egenskapen at de kan fremprovosere diskusjoner.

5.3 Matematisk forhandling av kanter og hjørner

Analysen har avdekket noen situasjoner der elevene i større grad enn andre situasjoner, uttrykker begrepskunnskap i geometri. Dette er situasjoner der det foregår matematisk forhandling. De situasjonene der det oppstår matematisk forhandling, er med på å styrke den andre hypotesen min, om at begrepskunnskapen vil bli uttrykt i noen spesifikke situasjoner, der elever diskuterer med hverandre. Jeg vil i dette delkapittelet si noe om mulige årsaker til at matematisk forhandlingen oppstår. Jeg vil beskrive noen fellestrekk ved matematiske forhandlinger og hvorfor matematiske forhandlinger er viktige, ved å se på noen situasjoner der jeg mener det oppstår matematisk forhandling mellom de involverte i G1 og G2.

5.3.1 Fellestrekk ved matematiske forhandlinger

Det er flere eksempler på situasjoner hvor matematisk forhandling foregår mellom Anne, Bernt og Charlie. Felles for disse situasjonene, er at de foregår fordi elevene er uenige om sorteringen. Jeg vil nå se nærmere på disse situasjonene, og belyse noen fellestrekk. Det er i alt fire situasjoner der elevene tyr til matematisk forhandling. Den første situasjonen er når Anne presenterer sin sortering av figur 2, 5, 7, 9, 10 og 12;

31. *A: Og da telte jeg en, to, tre, fire (peker på fire plasser på figur 2)… fire. (tar opp neste figur i bunken (figur 5)) En, to, tre, fire (peker på fire plasser på figur 5)... fire (peker på figur 7 som er neste figur i bunken), fire, fire (viser frem de siste tre figurene i bunken, som er figur 9, figur 10 og figur 12).*

…

38. *B: den der er (peker på figur 2), jeg er uenig med den*

39. *C: Jeg er uenig med den (peker på figur 7)*

I starten av G1 presenterer Anne sin sortering av firkanter og forklarer hvordan hun har sortert. Læreren sier i S37 at de andre elevene må få si om de er enig eller uenig om sorteringen hennes. I S38 uttrykker Bernt at han er uenig med sorteringen av figur 2, mens Charlie uttrykker i S39 at han er uenig med sorteringen av figur 7. Den første forhandlingen oppstår rundt sorteringen av figur 7. Anne argumenterer for hvorfor hun mener figuren er en firkant, mens Charlie argumenterer for hvorfor han mener figuren er en sekskant. Begge to bruker figuren som utgangspunkt, peker på figuren og teller høyt. Det ender med at Anne gir etter for Charlie sin argumentasjon, og sorterer figuren som en sekskant. Forhandlingen er mulig, fordi elevene er uenige om sorteringen av figuren, men det er læreren som starter forhandlingen, fordi hun ber de andre elevene komme med sitt syn. I tillegg er figur 7 det jeg kaller for en polygon kontrastfigur.

Den andre forhandlingen skjer rett etter den første. Bernt uttrykker i S48 uenighet nok en gang med Anne sin sortering av figur 2. Det oppstår en matematisk forhandling, der Anne argumenterer for at figur 2 er en firkant, mens Bernt argumenterer for at figuren er et rektangel. Anne ender opp med å godta Bernt sine argument, og sorterer figuren for seg selv. Igjen er det læreren som har startet forhandlingen, fordi Bernt uttrykket uenighet allerede før forhandlingen av figur 7. Selve gjenstanden for forhandlingen er figuren, som også er en polygon kontrastfigur.

71. *A: men dette her er jo bare to kanter (peker på figuren), to, og så er det sånn bøy (fører fingeren over buen på figuren)*

Den tredje forhandlingen skjer etter at Charlie presenterer figur 6 som en trekant. Denne gangen oppstår forhandlingen uten en voksen tilstede, kun motivert av uenighet rundt sorteringen av figuren. Bernt og Charlie mener figuren er en trekant, mens Anne mener den er en tokant. I motsetning til figur 2 og 7, ender denne forhandlingen opp med å handle om begrepet kant, og hva som ligger i det begrepet. Uenigheten kommer av at Anne mener hjørnene er kant, mens Bernt og Charlie mener det er de rette delene av linjestykkene i figurer som er kant. Anne ender opp med å sortere figuren alene, og det virker som hun er overbevist. Til forskjell fra de to forgående matematiske forhandlingene, oppstår denne uten hjelp fra en lærer. Likheten er at forhandlingen starter å dreie seg om figur 6, som også er en kontrastfigur.

Den fjerde og siste matematiske forhandlingen oppstår når Anne i S122 spør læreren om ikke figur 6 er en tokant. Dette resulterer i en matematisk forhandling som varer i tre minutter, styrt av læreren. Denne matematiske forhandlingen ender opp med å handle om hva som skal regnes som kant, men har sitt utspring i sorteringen av figur 6. Den matematiske forhandlingen starter igjen ved hjelp av læreren, mens det er en kontrastfigur som fungerer som det opprinnelige målet for diskusjonen, selv om diskusjonen etter hvert dreier over til å handle om begrepet kant.

Felles for de situasjonene der det har foregått forhandling, er at de involverte i forhandlingen er deltakende fordi de uttrykker sin mening og argumenterer for sitt syn. Forhandlingene tar utgangspunkt i uenigheter rundt sorteringen av figurer. Figurene de er uenige om, er alle kontrastfigurer. Kontrastfigurer har alle den egenskapen at de kan tolkes forskjellig, ut ifra begrepsbildet til eleven. Læreren spiller en viktig rolle, men den tredje forhandlingen viser at matematisk forhandling kan oppstå og pågå selv uten støtte fra lærer. I G2 foregår det bare implisitt matematisk forhandling. Jeg vil komme tilbake til et eksempel på dette i 5.3.2. En av grunnene til at det ikke har oppstått noen eksplisitte matematiske forhandlinger i G2, kan være at elevene ikke uttrykker uenighet ovenfor sorteringen til hverandre.

5.3.2 Tre mulige årsaker til matematisk forhandling

I G1 diskuterer Anne, Bernt og Charlie blant annet begrepet kant. I løpet av diskusjonen i S77-S79, forklarer Bernt ovenfor Anne at det ikke er hjørnene i figuren som skal regnes som kanter, men figurens sidekanter. Dette godtar Anne tilsynelatende i S80, ved at hun teller antall sidekanter i figuren, uttrykker at figuren er en trekant og plasserer den i en haug for seg selv uten å diskutere videre. Litt senere i gruppearbeidet viser det seg derimot at Anne ikke er overbevist om at det er figurens sidekanter som skal telle som kanter. Dette kommer først frem når læreren kommer tilbake til bordet som elevene sitter og jobber på.

122.A: er dette her tokant? (holder opp figur 6 mot lærer)
123.L: det er dere som må finne ut hva ...(utydelig)… kalle den
124.B: Anne sier at det der (peker på hjørnene i figur 6) er kanter. De spissene
125.A: ja, det er, det er jo kanter

I S122 tar Anne opp igjen diskusjonen rundt figur 6. Hun spør læreren; *«er dette en tokant? (holder opp figur 6 mot lærer)»*. Læreren svarer i S123 med å si at det er elevene som må finne ut av hva de skal kalle figuren. Bernt forklarer i S124 hvordan Anne tenker, og sier at*; «Anne sier at det der (peker på hjørnene i figur 6) er kanter. De spissene»,* hvorpå Anne sier i S125 at *«ja […] det er jo kanter».* Charlie blir med i diskusjonen og sier seg uenig med Anne. Anne svarer i S127 og argumenterer med at; *«ja, men kanter og hjørner er det samme som kantehjørne».*

For å forklare hva som skjer i diskusjonene over, ser jeg til artikkelen «Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics» (1994) av Jörg Voigt. I artikkelen undersøker Voigt elever og en lærer mens de prøver å tilskrive matematisk betydning av tall, numeriske operasjoner og empiriske fenomen. På grunn av elevenes og lærerens forskjellige oppfatninger av egenskaper, forhandler læreren og elevene om den matematiske betydningen (Jörg Voigt, 1994, s. 275). På lignende måte forhandler Anne, Bernt og Charlie om begrepet kant, og hva som skal ligge i begrepet. Anne mener at kanten er hjørnene på figuren, mens Bernt og Charlie mener at kanten er sidekantene. Anne, Bernt og Charlie driver med matematisk forhandling. Analyse av diskusjonen til Anne, Bernt og Charlie, avdekker tre mulige årsaker til at forhandlingen av begrepet kant oppstår og vedvarer; tvetydighet i begrepet, arbeidsmetoden og lærerens rolle. Jeg vil se nærmere på disse tre årsakene og hvorfor disse årsakene er viktige for matematisk forhandling.

Den første mulige årsaken, tvetydighet, beskriver Jörg Voigt i sin artikkel fra 1994. I artikkelen snakker Jörg Voigt om rollen til matematiske diskusjoner og tvetydighet i matematikken. Han sier at hvis en elev «[...] matematiserer det empiriske fenomenet annerledes enn læreren forventer, kan det oppstå en konflikt på et senere tidspunkt [...]. Dette er en av grunnene til at matematisk mening bør diskuteres» (Jörg Voigt, 1994, s. 176, min oversettelse). Med dette mener han at tvetydighet i matematikken som ikke blir diskutert, kan bli et problem på et senere tidspunkt. Fordi eleven(e) kan tyde det matematiske innholdet annerledes enn det som var meningen, kan dette føre til misoppfatninger og andre problemer ved senere tidspunkt. Dette gjelder også tvetydighet mellom elever, og ikke bare mellom elev og lærer.

Voigt bruker tall og matematiske tegn som eksempel i sin artikkel, men det kan trekkes paralleller til arbeidet med sortering av geometriske figurer, hvor språket og elevenes vekkede begrepsbilde (Tall & Vinner, 1981) av figurene, kan ha en tvetydig mening. Dette ser vi igjen i diskusjonene mellom Anne, Bernt og Charlie, der de fleste diskusjonene omhandler sorteringen av figurer. Her ligger tvetydigheten i elevenes oppfatning av begrepet, altså elevens vekkede begrepsbilde av figuren. Det er elevenes individuelle oppfatninger av hva som er egenskapene ved figurene, som er tvetydigheten, og som igjen fører til diskusjon. Vi ser det også igjen der alle tre bruker ordet kant, men ordet har forskjellige betydninger for dem. Videre finnes det eksempler på ord som kan ha forskjellige betydninger i matematikk og dagligliv. Her kan også ordet kant brukes som et eksempel. Det å slå seg på kanten av bordet, kan fort tolkes til å slå seg på noe spisst, som igjen kan assosieres med hjørner.

Den andre mulige årsaken til matematisk forhandling er arbeidsmetoden. Arbeidsmetoden som er brukt, baserer seg på *The Theory of Didactical Situations in Mathematics*, (TDS) av Brousseau (Rønning & Strønskag, 2017, s. 2). I TDS spiller det matematiske innholdet en viktig rolle. Metoden går ut på å skape en situasjon med et problem som skal løses, hvor det teoretiske målet ved økten også er den optimale løsningen på problemet. Metoden er delt inn i fem faser. De fem fasene er *devolution, action, formulation, validation,* og *institutionalisation (Brousseau, 1997, referert i Rønning & Strømskag, 2017).* Intensjonen for økten er at elevene skal klassifisere forskjellige polygoner ut ifra antall kanter (Rønning & Strømskag, 2017, s. 1).

I situasjonen der elevene diskuterer begrepet kant, er elevene i fasen kalt *formulation***.** I denne delen skal elevene bli enige om sorteringskriteriene for figurene. Arbeidsmetoden elevene bruker, legger opp til matematisk forhandling, fordi elevene skal bli enige om sorteringskriteriene. Denne arbeidsformen oppfordrer til sosial interaksjon mellom de deltakende elevene (og mellom elever og lærer), hvor de oppfordres av miljøet til å dele sine sorteringskriterier og diskutere eventuelle forskjeller. Denne delingen av sorteringskriterier fører til matematisk forhandling.

Den tredje mulige årsaken til matematisk forhandling, er læreren. Den matematiske forhandlingen rundt kant for G1 foregår i to omganger. Første runde starter i S67 og slutter i S80, hvor Anne tilsynelatende blir enig med Bernt og Charlie i sorteringskriteriet for figur 6. Selv om elevene tilsynelatende har kommet til enighet i S80, viser det seg at Anne ikke er tilfreds med definisjonen på kant, og gir uttrykk for dette når hun spør læreren i S122 om figur 6 er en tokant. Dette starter andre runde med matematisk forhandling av kant. Læreren involverer seg i samtalen, og den matematiske forhandlingen fortsetter. For å si noe om hvorfor den matematiske forhandlingen fortsetter, ser jeg til artikkelen Negotiation of Meaning in

Mathematics Classrooms: A Study of Two Year 5 Classes av Sandra Frid og John Malone. Frid og Malone (1995) ser på sammenhengen mellom elevenes erfaring i klasserommet og måten de konstruerer matematisk mening. Analysen deres viser at det er læreren som er den viktigste primære kilden (av i alt fire primærkilder) som elevene bruker for å avgjøre om en matematisk aktivitet er meningsfull eller rett (Frid & Malone, 1995, s. 132). Når Anne spør læreren om hennes tankegang er den rette, til tross for at hun har diskutert dette med medelever, tyder dette på at hun verdsetter lærerens mening høyere enn sine medelever. Dermed kan læreren ha stor påvirkning på den matematiske forhandlingen. Lærerens rolle i den matematiske diskusjonen vil kunne være utslagsgivende for om elever godtar andre elevers argument. Det er sannsynlig at læreren er grunnen til at den matematiske forhandlingen rundt kanter gjenoppstår, men læreren har også en sentral rolle i hvor lenge den matematiske forhandlingen pågår.

123.L: det er dere som må finne ut hva ...(utydelig)… kalle den

…

130.L: hva mener du da? (ser på Bernt)

…

142.L: Charlie er enig i det. Er du enig i det? (ser på Anne)

I fra S122 og utover, styrer læreren deler av samtalen ved å inkludere alle elevene, la dem svare og argumentere etter tur og får elevene til å utdype sine forklaringer og argumenter. Læreren gjør dette ved å stille spørsmål som; «hva mener du? er det dette du mener? Er du enig?» Samt oppsummere noen av forklaringene til elevene. Dette gjør at elevene holder den matematiske forhandlingen gående fra S122 til S168, i litt over tre minutter. Læreren spiller dermed også en sentral rolle i å holde den matematiske forhandlingen gående, og blir selv en del av den matematiske forhandlingen.

I G2 starter Daniel på et tidspunkt å sortere figurer etter egenskaper. I S56 sier han; «*disse her er ganske lik (holder frem fig. 1 og en fig. Som ikke vises), bare fordi de har fem kanter»,* hvorpå forskeren svarer i S57; *«ja! Så antall kanter kan være et … en egenskap»*. I denne situasjonen bekrefter forskeren ovenfor eleven at kanter kan være et sorteringskriterium. Etter denne korte samtalen, sorterer Daniel flere figurer etter figurenes antall kanter. Jeg vil argumentere for at forskeren har inntatt en rolle lik en lærer ville gjort i denne situasjonen, hvor forskeren er aktivt deltakende. Det er derfor ikke usannsynlig at Daniel ser på forskeren på lik linje med en lærer, som en kilde til å avgjøre om en aktivitet er fornuftig eller ikke. Hvorvidt Daniel starter med kanter som sorteringskriterium som et resultat av forskerens bekreftelse, kan bare spekuleres i, men det kan tenkes at det har foregått en implisitt forhandling, der Daniel har agert ut ifra forskerens tilbakemeldinger. I situasjonene fra både G1 og G2 argumenterer jeg for at læreren (her i G2: forskeren) spiller en sentral rolle, både for den eksplisitte og implisitte forhandlingen.

5.4 Oppsummering og svar på problemstilling

I dette forskningsprosjektet har jeg studert fem elevers arbeid med klassifisering av todimensjonale figurer. Grunnen til dette er at jeg mente det kunne gi meg et innblikk i elevers begrepskunnskap rundt todimensjonale figurer, og fordi arbeid med todimensjonale figurer vil være høyst aktuelt også i fagfornyelsen. Jeg har ønsket å få et innblikk i elevers begrepskunnskap, da begrepskunnskap er viktig i matematikkfaget, og fordi innblikk i begrepskunnskap kan være til hjelp i lærerrollen. Utfra disse forutsetningene utformet jeg denne problemstillingen:

> *Hvordan kan elevers begrepskunnskap komme til uttrykk gjennom arbeid med klassifisering av todimensjonale polygoner?*

For å svare på problemstillingen, har jeg analysert elevers utsagn ved hjelp av van Hieles fem nivåer for utvikling i geometri, samt analysert utsagn opp mot hverandre og opp mot konteksten rundt utsagnene. Jeg har sett på hvilken type figurer elevene arbeider med når de uttrykker begrepskunnskap, og studert hva slags situasjoner elevers begrepskunnskap i geometri kommer til uttrykk. Så hva har jeg funnet ut gjennom analysen?

Analysen har vist at det er noen figurer som elevene arbeider med i større grad enn andre figurer, når de uttrykker begrepskunnskap. Disse figurene skiller seg ut ved at de kan tolkes forskjellig ut fra figurenes form og egenskaper. I denne oppgaven gjelder dette figur 2, 6 og 7. Disse figurene, som jeg har valgt å kalle kontrastfigurer, blir av elevene oftere snakket om og diskutert enn andre figurer, og er gjenstand for matematiske diskusjoner og forhandlinger. Dermed kan jeg bekrefte den første hypotesen min rundt synliggjøring av begrepskunnskap, som sier at «typen figurer som elevene sorterer, har noe å si for mengden begrepskunnskap som blir uttrykt».

Videre har analysen avdekket at det meste av elevenes begrepskunnskap, blir uttrykt i de situasjonene der elevene driver med matematiske forhandlinger. Disse matematiske forhandlingene, dreier seg for det meste om diskusjoner rundt sorteringen av figur 2, 6 og 7, der elevene er uenige om hva figurene skal defineres som. Den andre hypotesen, som sier at begrepskunnskapen vil bli uttrykt i noen spesifikke situasjoner, der elever diskuterer med hverandre, kan likevel ikke bekreftes. Dette er fordi elevene uttrykker begrepskunnskap også i situasjoner der elever ikke diskuterer med hverandre. Så hvordan kan elevers begrepskunnskap komme til uttrykk gjennom arbeid med klassifisering av todimensjonale polygoner?

Analysen av fem elevers arbeid med sortering av todimensjonale polygoner, er ikke nok til å generalisere hvordan elevers begrepskunnskap kommer til uttrykk gjennom klassifisering av todimensjonale figurer. Til det er datamaterialet for lite. Det analysen derimot viser, er hvordan begrepskunnskap kan komme til uttrykk hos de elevene jeg har studert i de situasjonene jeg har analysert. I denne oppgaven kommer store deler av elevers begrepskunnskap til uttrykk i de situasjonene der det foregår matematisk forhandling av egenskaper og definisjoner av kontrastfigurer, men ikke alt. Noe av begrepskunnskapen blir uttrykt som svar på spørsmål fra læreren/forskeren, mens noe blir uttrykt der elevene presenterer sine grupper med sorterte figurer. Oppgaven viser at elever kan uttrykke begrepskunnskap gjennom matematisk forhandling, og at arbeid med kontrastfigurer kan føre til matematisk forhandling. Jeg vil derfor konkludere oppgaven med at elever *kan* uttrykke begrepskunnskap gjennom matematisk forhandling av kontrastfigurer.

6 Refleksjoner

I dette kapittelet vil jeg reflektere over oppgavens begrensninger. Jeg vil belyse noen tanker rundt datainnsamlingsmetoden og devolusjonsøktene i forkant av videoene, samt knytte datainnsamlingsmetoden og devolusjonsøktene opp mot reliabiliteten til- og validiteten i datamaterialet. Jeg vil også si noe om hva jeg mener kan være interessant å utforske videre.

6.1 oppgavens begrensninger

Datainnsamlingsmetoden og størrelsen på dataen presenterer en del begrensninger for oppgaven. Det er spesielt to faktorer jeg mener påvirker datamaterialet. Den første faktoren, er selve innsamlingsmetoden. Datamaterialet som er samlet inn, består av videosnutter av elever som arbeider med sortering av todimensjonale figurer, og er gjort av forskere fra LaUDiM-prosjektet. Det er i hovedårsak forskerne fra dette prosjektet som har avgjort hvilken gruppe elever som filmes og *hva* som filmes i de gruppene med elever. Kameraet veksler mellom å være stasjonært, med fokus på bordet mellom elevene som arbeider, og håndholdt, der forskeren går rundt med kameraet og filmer. Forskeren påvirker datamaterialet gjennom å styre hva som blir filmet, og hva som ikke blir filmet. I tillegg er forskerne og lærerne i noen situasjoner aktivt deltakende, hvor de stiller spørsmål til elevene som blir filmet, og responderer på spørsmål fra elevene. Dette er en påvirkning av dataen som jeg ikke kan styre, da jeg bare har fått tildelt videosnuttene. Det er også noe som er vanskelig å reprodusere nøyaktig, da jeg ikke kan gjengi i detalj hvordan dataen er samlet inn. Det er forskerne fra LaUDiM-prosjektet som i samarbeid med lærerne til de utvalgte klassene, har planlagt og gjennomført øktene som videosnuttene filmer.

Den andre faktoren, er det som blir sagt i devolusjonsøkten, som foregår i forkant av videosnuttene. I devolusjonsøktene, blir elevene introdusert for sorteringsoppgaven. For å forklare hva læreren mener med sortering, blir det brukt noen eksempler på hva sortering kan være. Disse eksemplene er forskjellige i de to devolusjonsøktene. I devolusjonsøkten til G1, sier læreren at elevene kan prøve å se hvilke figurer som har felles egenskaper og hører sammen. Som eksempel på egenskaper, tegner læreren tre forskjellige trekanter på tavlen, og spør elevene hva de vil kalle disse figurene for. Når en elev svarer trekanter, bekrefte læreren svaret, og sier at disse trefigurene legges sammen, fordi de er trekanter. I tillegg til eksemplene som gis, er det verd å nevne at en elev kommer med ideen om at det går an å telle kanter, noe lærer er enig i. I devolusjonsøkten til G2, Brukes det helt andre typer eksempler. For å forklare hva som menes med sortering av figurer, bruker læreren fugler som et eksempel, og sier at haugen kalles fugler, fordi alle i den haugen har vinger.

Jeg mener eksemplene som er brukt i devolusjonsøktene *kan* ha påvirket elevenes sorteringskriterier fra starten av. I forkant av G1 brukes todimensjonale polygoner i form av trekanter som eksempel, i tillegg til at kanter som sorteringskriteria blir bekreftet. I G1 bruker de elevene jeg har videosnutter av, kanter som sorteringskriterier fra starten av. I G2, der elevene ikke har blitt vist todimensjonale polygoner som eksempler, eller fått bekreftet kanter som et sorteringskriteria, Bruker de to elevene jeg har videosnutter av, helt andre sorteringskriterier. Hvorvidt elevene har blitt påvirket av devolusjonsfasen, vites ikke, men fordi det er en mulighet for at de har blitt påvirket av devolusjonsøkten, går dette utover den interne validiteten. Jeg kan ikke være sikker på om den begrepskunnskapen elevene har uttrykt, er et naturlig resultat av settingen og figurene de sorterer, eller om de har blitt påvirket i devolusjonsøkten til å velge sorteringskriterier, og dermed også hvilken type begrepskunnskap de uttrykker.

Refleksjoner rundt disse to faktorene og deres påvirkning på validiteten og reliabiliteten til oppgaven, er en viktig del av min forskerrefleksivitet. Hvis jeg skulle ha gjennomført forskningsprosjektet en gang til, ville jeg ha gjort følgende endringer:

Jeg ville samlet inn datamaterialet selv. Jeg ville fortsatt brukt video som utgangspunkt for datamaterialet, men jeg ville planlagt og gjennomført innhentingen av videoen selv. Hvis jeg skulle gjennomført studien i to forskjellige klasser, der øktene tok utgangspunkt i TDS, ville jeg forsøkt å få devolusjonsøktene så like som mulig, med fokus på blant annet eksempler som ble vist.

6.2 veien videre

Forskningsprosjektet har avdekket noen funn jeg mener det kan være interessant å utforske nærmere. Analysen har blant annet vist at det eksisterer noen figurer jeg kaller kontrastfigurer som kan defineres forskjellig av elever. Definisjonen på kontrastfigurer er ganske snever, og krever at elever holder seg innenfor van Hiele-nivå 0 og 1. Jeg mener det ville være interessant å se om kontrastfigurbegrepet kan utvides og generaliseres. Kanskje er det mulig å utforske sammenhenger mellom kontrastfigurer og prototyper, eller sammenhenger mellom kontrastfigurer og Fischbein sin teori på figurale konsepter (1993, gjenf. i Sinclair et al., 2016, s. 692). Jeg mener også det ville være interessant å videre utforske bruken av kontrastfigurer i undervisning.

Analysen har også vist at matematisk forhandling kan ha en positiv rolle i undervisningen, fordi elever som forhandler matematisk, kan vise sin begrepskunnskap, og dermed gi læreren informasjon om hvor i det matematiske landskapet eleven bør bevege seg, for å utvikle seg. I tillegg har analyse avdekket noen faktorer som kan føre til matematisk forhandling. Jeg mener det ville vært interessant å utforske nærmere hvilken rolle matematisk forhandling kan ha for begrepslæring i geometri. Jeg mener også det ville være interessant å utforske nærmere hvilke faktorer som fører til matematisk forhandling.

Helt tilslutt vil jeg ta et tilbakeblikk til starten av oppgaven, der jeg undret meg over hvordan jeg kunne gå gjennom hele grunnskole- og videregående skole, uten å vite hva som egentlig er kantene i en todimensjonal mangekant. Jeg trekker paralleller til Anne og hennes definisjon av kant. Hun mener også at en figurs kant er hjørnene, men hennes oppfatning av kanter har kommet til syne gjennom en matematisk forhandling av figur 6, som er en kontrastfigur. En slik synliggjøring av misoppfatningen hennes, kan bidra til at hun vil definere en figurs sidekanter som et rett linjestykke mellom to punkter, hvis misoppfatningen blir korrigert. Kanskje ville jeg definert kanter annerledes hvis jeg fikk muligheten til å drive matematisk forhandling av kontrastfigurer i barndommen.

Jeg vil avslutte med en litt pompøs, men til dels beskrivende påstand for denne oppgaven:

Hvis kontrastfigurer kan sees på som den gnisten som må til for å skape en diskusjon, vil den matematiske forhandlingen være selve flammen som blir tent og læreren oksygenet som skal til for at flammen overlever.

Kilder

Battista, Mt. T. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment. *Teaching Children Mathematics,* 8(6), 333-339. hentet 16.10.18 fra: https://search.proquest.com/docview/214138953?pq-origsite=gscholar

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics. John Wiley & Sons.Hentet fra: https://books.google.no/books?id=bR9HAAAAQBAJ&lpg=PP16&dq=history%20of%20mathematics&lr&hl=no&pg=PP16#v=onepage&q=history%20of%20mathematics&f=false

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M., (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *National Council of Teachers of Mathematics, 17*(1), 31-48. DOI: 10.2307/749317

Chua, G. L. L., Tengah, K. A., Shahrill, M., Tan, A. og Leong, E (2017). Analysing Students'Perspectives on Geometry Learning from the combination of Van Hiele Phase-Based Instructions and GeoGebra. *Proceedings of 3rd International Conference onEducation, 205-213*. Hentet 16. oktober 2018 fra: https://educationconference.co/wp-content/uploads/2018/06/Conference_Proceedings_ICEDU_2017.pdf

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14(2), 133-148.* DOI: 10.1007/s10857-011-9173-0

Clements, D. H., Swaminathan S., Hannibal, M. A. Z. og Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(2), 192-212*.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* Abingdon: Routledge.

Crowley, M. F. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought.*National Counsil of Teachers of Mathematics*, 12, 1-16. hentet fra http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.456.5025&rep=rep1&type=pdf

Ding, L. & Jones, K. (2006). Teaching geometry in lower secondary school in Shanghai, China. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 26* (1), 41-46. hentet fra https://eprints.soton.ac.uk/40502/

Frid, S. & Malone, J. (1995). Negotiation of Meaning in Mathematics Classrooms: A Study of Two Year 5 Classes. *Mathematic Education Research Journal, 7(2),* 132-147. DOI 10.1007/BF03217281

Fuys, D., Geddes, D. og Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *National Council of Teachers of Mathematics*. DOI:10.2307/749957

Henriksen, Arild H. & Tranøy, Knut Erik. (2018, 10. april). Definisjon. I Store norske leksikon. Hentet 5. november 2018 fra https://snl.no/definisjon.

Littleton, K. & Mercer, N., (2013). *Interthinking. Putting talk to work.* Abingdon: Routledge

Mangekant. (2017, 2. juni). *I Store norske leksikon.* Hentet 9. september 2018 fra https://snl.no/mangekant.

Geometri. (2018, 20. februar). I Store norske leksikon. Hentet 5. november 2018 fra https://snl.no/geometri.

Måsøval, H. S. (2011). *Factors Constraining Students' Establishment of Algebraic Generality in Shape Patterns. A Case Study of Didactical Situations in Mathematics at a University College.* (Doktorgradavhandling), Universitetet i Agder. Faculty of Engineering and Science.

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori.* BERGEN: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren.* OSLO: Universitetsforlaget

Regjeringen. (2018, 26. juni). Fornyer innholdet i skolen, (132-18). Hentet 18. november 2018 fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Rønning, F., Strømskag, H. (2017). Entering the mathematical register through evolution of the material milieu for classification of polygons. *Proceedings CERME 10, 2017*. hentet fra http://www.laudim.no/publikasjoner/artikler

Senk, S. L. (1989). Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, (20/3)*, 309-321. DOI: 10.2307/749519

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education.* DOI: 10.1007/s11858-016-0796-6

Smith, D. E. (1958). History of mathematics, 429(30). Courier Corporation. Hentet fra https://books.google.no/books?id=12qdOZ0gsWoC&lpg=PR13&lr&hl=no&pg=PA22#v=onepage&q&f=false

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in Mathematics 12(2)*, 151-169. DOI: 10.1007/BF00305619

Tsamir, P, Tirosh, D og Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 81-95. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/40284536

University of Chicago News Office. (2011, 2. august). Izaak Wirszup, 1915 – 2008. hentet fra: http://www-news.uchicago.edu/releases/08/080131.wirszup.shtml

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in secondary School Geometry. CDASSG Project. *The university of Chicago.*Hentet 15. oktober 2018 fra https://eric.ed.gov/?id=ED220288

Utdanningsdirektoratet~~,~~. (2013, 26. juni~~.~~). Læreplan i matematikk fellesfag, (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2013, 1. august). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Van Hiele, P. M. (1984). The Child's thought and geometry. I D. Fuys (Red.), *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele (s. 247-256).*

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. I *Advanced mathematical thinking*, 65-81. Springer, Dordrecht.

Voigt, J. (1994). Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26 (2/3), Learning Mathematics: Constructivist and Interactionist Theories of Mathematical Development, 275-298.* Hentet fra https://www.jstor.org/stable/3482786?seq=1#metadata_info_tab_contents

Vedlegg 1: informasjon om LaUDiM-prosjektet og samtykkeskjema utlevert til de involverte i datamaterialet.

Kjære foreldre og foresatte til elever på 2. trinn ved (…) skole

I perioden 31.7.14-1.8.18 skal forskere fra lærerutdanninga ved (…) sammen med lærere utvikle og forske på matematikkundervisning og læring gjennom prosjektet LaUDiM (Language use and development in the mathematics classroom)**.** Prosjektet er støttet av Norges forskningsråd. (…) skole er en av to skoler i prosjektet. Prosjektet er utviklet i nært samarbeid mellom forskerne og Rektor (…) som ønsker å utvikle skolens matematikkundervisning Vi er så heldige å få samarbeide med lærer (…) i skoleåret 2014/2015.

Vi ber om tillatelse til å samtale med elevene og gjøre lyd- og videoopptak av matematiske samtaler. Vi ber også om lov til å kopiere og bruke tekster elevene lager. Forskerne vil være tilstede i undervisninga i 21 undervisningsøkter i perioden våren 2015-høsten 2017:

Våren 2015:	6 undervisningsøkter fordelt på to perioder (1-2 uker)
Høsten 2015:	3 undervisningsøkter i én periode (1-2 uker)
Våren 2016:	6 undervisningsøkter fordelt på to perioder (1-2 uker)
Høsten 2016:	3 undervisningsøkter i én periode (1-2 uker)
Høsten 2017:	3 undervisningsøkter i én periode (1-2 uker)

Nærmere beskjed om tidspunkt blir gitt i god tid.

Datamaterialet skal brukes som grunnlag for å diskutere barns bruk og utvikling av matematisk språk. Materialet blir behandlet på en slik måte at det ikke vil være mulig for andre å vite hvilken skole vi har vært på, hvilke elever vi har intervjuet eller hvem som har skrevet aktuelle tekster. Ved presentasjon av materialet vil alle elevene bli anonymisert. Opplysninger som kan identifisere enkeltelever, vil bare være tilgjengelig for forskerne. Materialet vil bli presentert på konferanser og brukt i artikler og foredrag samt i undervisninga ved lærerutdanninga. Prosjektet er meldt inn til Norsk Samfunnsvitenskaplig Datatjeneste (NSD) i samsvar med retningslinjer for forskningsetikk og personvern. Prosjektet avsluttes formelt 31.07.18, og materialet vil bli slettet senest 31.7.19.

Vi understreker at det er frivillig å delta, og at man kan trekke seg fra prosjektet underveis uten å oppgi noen grunn til det. Data som spesifikt er knyttet til deres barn, vil da anonymiseres ved at navn i navneliste fjernes og ved at lyd- og videoopptak sladdes. Om dere velger å avstå fra prosjektet, vil det ikke ha noen betydning for forholdet til lærerne eller skolen. Det vil ikke bli innhentet opplysninger om eller foretatt lyd- og video opptak av deres barn uten samtykke fra dere. Hvis noen har spørsmål om prosjektet eller bruken av materialet, kan dere snakke med rektor (…) eller ta kontakt med prosjektleder (…) på telefon eller e-post. Tillatelse til å samle inn materiale og bruke det som skissert over, gir dere ved å fylle ut vedlagte svarslipp og levere den til lærer (…).

Med vennlig hilsen
Prosjektleder (…) og rektor (…)

Tillatelse

Som del av LaUDiM-prosjektet ber vi om tillatelse til å samtale med barnet ditt/deres, gjøre lyd- og videoopptak der han/hun er med og kopiere/bruke tekster skrevet av ham/henne.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg/vi gir tillatelse. Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

☐ Jeg/vi gir ikke tillatelse.

Dato: ………………………

Elevens fornavn og etternavn: …………………..……………………. …………………..

Underskrift av foresatt(e): ……………………………………………………………..

Vennligst returner svarslippen til lærer (…) så snart som mulig.

NTNU

Norwegian University of
Science and Technology