NTNU
Det skapende universitet

"Hva gjør jeg med ulikhetstegnet?"

En kvalitativ studie av 1T-elevers beskrivelser
og løsning av lineære ulikheter

Thea Lien Espeland

Lektorutdanning med master i realfag
Innlevert: Juni 2012
Hovedveileder: Frode Rønning, MATH
Medveileder: Heidi Strømskag Måsøval, Høgskolen i Sør-Trøndelag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masterstudien i matematikkdidaktikk er et resultat av mitt siste halvår på den femårige lektorutdanningen i realfag ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim. Arbeidet med studien har vært utfordrende, men ikke minst veldig lærerikt. I den forbindelse ønsker jeg å rette en takk til de som har hjulpet meg gjennom prosessen.

Først og fremst vil jeg takke min veileder, Heidi Strømskag Måsøval, for konstruktive tilbakemeldinger og god veiledning. Din positivitet er smittende, og oppmuntringene dine har blitt tatt vel imot gjennom arbeidet. Jeg vil også takke Frode Rønning for verdifulle innspill i arbeidet med studien. Engasjementet deres for fagdidaktikken inspirerer!

Jeg vil også rette en stor takk til lærerne som la til rette for og lot meg gjennomføre undersøkelsen, og ikke minst til elevene som var villige til å delta.

Jeg vil spesielt takke Lise Wærstad Utvik for gode, faglige samtaler i forbindelse med arbeidet, men selvfølgelig også for deling av gleder og frustrasjoner over morgenkaffen i "Matteland". Her bor det forøvrig mange herlige mennesker som har gjort dagene lysere og som har gitt meg teknisk hjelp når jeg har hatt behov for det. Takk!

Siden dette markerer avslutningen på min studenttilværelse, vil jeg også takke mine kjære "Tromøy-jenter" og de fantastiske studievennene mine som har gjort denne tiden til en minnerik tid. Takk til familien min som har støttet meg gjennom hele utdanningen. Til slutt vil jeg takke min kjære Vidar som har hatt tro på meg gjennom hele prosessen, og som alltid er der for meg.

Trondheim, juni 2012

Thea Lien Espeland

Sammendrag

Formålet med denne studien er å få dypere innsikt i elevers løsning og resonnering i forbindelse med lineære ulikheter. Spesielt undersøkes elevers beskrivelser av ulikhetsbegrepet, en ulikhets løsning og elevers grafiske tilnærming til lineære ulikheter. I tillegg blir elevers forståelse av multiplikasjon eller divisjon av en ulikhet med negative tall karakterisert.

Denne studien har et fleksibelt forskningsdesign der en kvalitativ undersøkelse ble gjennomført med et utvalg 1T[1]-elever i en norsk videregående skole. Studiens datamateriale ble innsamlet ved bruk av observasjon og intervju som forskningsmetoder. Den første delen av undersøkelsen innebar videoopptak av elevarbeid i grupper, med utgangspunkt i et egenprodusert oppgavehefte om lineære ulikheter. Hver gruppe hadde tilgang på en datamaskin med dynamisk matematisk programvare under arbeidet. I etterkant av elevarbeidet ble elevene intervjuet enkeltvis med fokus på oppgavene og momenter knyttet til lineære ulikheter. Det samlede datamaterialet bestod derfor av videoopptak av elevarbeid, lydopptak av intervju og elevenes individuelle skriftlige besvarelser. Analysen av datamaterialet baserer seg på teorier om matematiske tegn og representasjoner, matematisk aktivitet, begrepsoppfatning samt matematisk kunnskap og forståelse.

Studien bidrar til å belyse transformasjoner av semiotiske representasjoner som elever kan gjøre i sin grafiske løsning av lineære ulikheter. Resultatene viser at ulikhetstegnets betydning ikke var fremtredende i løsningen til mange av elevene. Det viste seg at en instrumentell forståelse av multiplikasjon eller divisjon av en ulikhet med negative tall var gjeldende for flertallet av elevene i utvalget. Forståelsen til et par av elevene kunne imidlertid karakteriseres som relasjonell forståelse, på grunnlag av hvordan de koblet sammen kunnskap om tallenes ordning på den reelle tallinja, tanken om ulikhet som en relasjon, negative tall og multiplikasjon. Funnene antyder at lærere ikke må ta for gitt at elever mestrer grafisk løsning av lineære ulikheter selv om de har kjennskap til ulikhetsbegrepet.

[1] Matematikk 1T er et teoretisk rettet fellesfag for elever i sitt første år i videregående skole.

Summary

The purpose of this study is to gain a deeper insight in students' solving and reasoning considering linear inequalities. The study examines students' descriptions of the concept of inequality, the solution of an inequality and students' graphical approach to solving linear inequalities. In addition, students' understanding of multiplication or division of an equality with a negative value has been characterized.

A flexible research design was used for a qualitative study of students participating in the mathematics course 1T[2] in a Norwegian high school. The data collection was carried out by use of observation and interviews. The first part of the research involved video recording of the students' group activities, solving tasks concerning linear inequalities. Every group had access to a computer with dynamic mathematics software during their work. The students was interviewed some days after the work sessions, focusing on the tasks and features of linear inequalities. Thus, the total amount of research data consisted of video recordings of the students work, sound recordings of the interviews and the students' individual written answers. The analysis of the material is based on theories on mathematical signs and representations, mathematics as a human activity, conceptions of inequalities and mathematical knowledge and understanding.

The study contribute to shed light on transformations of semiotic representations that students carry out in their graphical approach to solving linear inequalities. The results show that the meaning of the inequality sign was not prominent in many of the students' solutions. The findings also show that the majority of the students had an instrumental understanding of multiplication or division of an equality with a negative value. Still, a couple of students' understanding was characterized as a relational understanding, based on how they connected knowledge of the real numbers, inequality as a relation and multiplication. The findings imply that mathematics teachers should not take for granted that the students manage a graphical approach to solving linear inequalities although they possess knowledge of the concept of inequality.

[2] "Matematikk 1T" is a theoretical mathematics course for students in their first year in high school.

Innhold

Kapittel 1

Innledning

Flere år med læring av matematikk gjør at man stifter bekjentskap med en rekke matematiske tegn. Etter å ha sett matematikken fra et didaktisk perspektiv, har jeg blitt spesielt oppmerksom på hvor stor rolle tegn og symboler har og hvor avgjørende de kan være for elevers læring av matematiske tema. Steinbring (2006) bemerker at man trenger visse tegn- eller symbolsystemer for å holde styr på og kode matematisk kunnskap. Tegn spiller derfor en stor rolle i kommunikasjonen og generaliserbarheten av matematisk kunnskap.

I forkant av denne studien gjennomførte jeg en forundersøkelse hvor jeg fokuserte på hvilke oppfatninger elever kan ha av bokstavsymbolet x i likninger og i funksjoner. Dette var en kvalitativ undersøkelse som viste at elevene i utvalget hadde forestillinger om x som både en ukjent og som en variabel. Her begynte jeg å tenke på elevers forhold til ulikheter, og hvordan x sin rolle i ulikheter blir oppfattet av elever. Ulikheter var noe jeg ikke hadde fokusert på i undersøkelsen, og var et begrep jeg ønsket å finne ut mer om. Selve ulikhetstegnet er i seg selv et interessant tegn som ofte kan skape problemer hos elever. I tillegg til at forskningsresultater viser til dette, blant annet Halmaghi (2011) og Vaiyavutjamai og Clements (2006), er dette noe jeg også har erfart fra min praksisperiode på 10. trinn. Her merket jeg at mange mestret arbeidet med likninger, men ulikheter var for dem et vanskelig tema.

I matematikken spiller ulikheter en viktig rolle, og vi finner ulikheter i emner som algebra, analyse, geometri og optimering (Tsamir & Almog, 2001). Boero og Bazzini (2004) bemerker at i en undervisningssammenheng i de fleste land blir ulikheter sett på som et underordnet tema i forbindelse med likninger. Tilnærmingen til ulikhetstemaet kan ofte bli særdeles algoritmisk, der vanskeligheter i forbindelse med funksjonsbegrepet ofte blir unngått (Boero & Bazzini, 2004).[3] Det er først i den senere tid at forskere har rettet søkelyset mot læring og undervisning av ulikheter (Ellerton & Clements, 2011; Halmaghi, 2011; Sfard & Linchevski, 1994; Tsamir & Almog, 2001; Tsamir & Bazzini, 2002). Selv om en algebraisk tilnærming til ulikheter har blitt mest vektlagt, har også noen få studier undersøkt grafisk tilnærming til ulikheter (Farmaki & Verikios, 2008; Sackur, 2004). Et fellestrekk for de nevnte studiene er at de har lagt vekt på elevers individuelle besvarelser av oppgaver, og noen har også intervjuet elever. Det er imidlertid få som fokuserer på hvordan elever kommuniserer og hvilke ord de bruker i sine muntlige forklaringer i arbeid med ulikhetsbegrepet. I tillegg er det relativt få studier som undersøker elevers grafiske løsning av lineære ulikheter. Denne studien vil derfor kunne bidra til å kaste lys på elevenes grafiske tilnærming til lineære ulikheter og hvilke beskrivelser og forklaringer de har til ulike aspekter ved lineære ulikheter.

1.1 Forskningsspørsmål og introduksjon av studiens teorigrunnlag

Studien har som formål å undersøke et lite utvalg 1T-elevers løsning og resonnering i forbindelse med lineære ulikheter. Spesielt har jeg undersøkt hvordan elevene løser lineære ulikheter grafisk. En slik løsning innebærer kjennskap til funksjonsbegrepet, som står sentralt i matematikkundervisningen i videregående skole. Som kommende lærer hadde jeg også et ønske om å få innsikt i hvordan elever beskriver ulikhetsbegrepet og hva de legger i en ulikhets løsning. Jeg var også nysgjerrig på hvordan elever forholder seg til og forstår regelen om å snu ulikhetstegnet i visse tilfeller. Ønsket mitt om å undersøke dette nærmere var basert på mine egne erfaringer som skoleelev samt erfaringer fra praksis på en ungdomsskole. Jeg hadde en fornemmelse av at regelen om å endre ulikhetstegnets retning i visse tilfeller kan føles mystisk for elever, og er med på å skape problemer i deres læring av lineære ulikheter.

[3] Funksjonsbegrepets rolle i forbindelse med ulikhetstemaet vil bli forklart i Kapittel 3.

Derfor har jeg kommet frem til de tre forskningsspørsmålene

1. Hvilke typer beskrivelser har 1T-elever av ulikhetsbegrepet og av en ulikhets løsning?
2. Hvilke transformasjoner av semiotiske representasjoner kan identifiseres i 1T-elevers grafiske løsning av lineære ulikheter?
3. Hvordan kan 1T-elevers forståelse av multiplikasjon eller divisjon av en ulikhet med negative tall karakteriseres?

Denne studien føyer seg inn under det subjektivistiske forskningsparadigmet som baserer seg på tanken om at virkeligheten konstrueres av individene (Cohen, Manion, & Morrison, 2007). Studien baserer seg på en kvalitativ undersøkelse der utvalget består av åtte elever i sitt første år ved en videregående skole som tar faget matematikk 1T. Jeg valgte denne metodologiske tilnærmingen på grunnlag av forskningsspørsmålenes karakter og ønsket om å gå i dybden i et lite utvalg elevers løsninger av lineære ulikheter. Jeg har derfor valgt observasjon og intervju som metoder for datainnsamlingen. Tre grupper har blitt observert og filmet i deres arbeid med et oppgavesett med en times varighet. I etterkant av arbeidet gjennomførte jeg korte intervju med hver enkelt der fokuset lå på oppgavene som elevene løste.

Matematiske representasjoner, aktivitet, kunnskap og forståelse er sentrale stikkord i studiens teorigrunnlag. Jeg vil bruke ulike teoretiske rammeverk for å undersøke de tre forskningsspørsmålene. I forbindelse med klassifiseringen av elevenes beskrivelser av ulikhetsbegrepet, vil jeg ta i bruk Halmaghis (2011) kategorier om oppfatning av ulikhetsbegrepet. Duvals (2006) teori om semiotiske representasjonsregistre står sentralt i forbindelse med det andre forskningsspørsmålet. Matematikk kan representeres ved bruk av blant annet algebraiske uttrykk, tabeller, grafer og figurer. En representasjon viser derfor til noe som skal stå for noe annet (Duval, 2006). Et semiotisk representasjonsregister blir av Duval beskrevet som et semiotisk system som tillater en transformasjon, et skifte innenfor eller mellom representasjoner. Fischbeins (1994) teori om de tre komponentene som utgjør matematisk aktivitet er også aktuell i undersøkelsen av elevenes grafiske løsning.

I forbindelse med det siste forskningsspørsmålet er teorien til Hiebert og Lefevre (1986) om matematisk kunnskap og Skemps (1976) inndeling av relasjonell og instrumentell forståelse essensielle teorier. Jeg vil også bruke Steinbrings (2006) teori om relasjonen mellom referansekontekst og matematiske tegn og hans epistemologiske trekant for å analysere elevenes matematiske aktivitet. Det teoretiske rammeverket vil bli grundigere presentert i Kapittel 2.

Det er det sosiokulturelle perspektivet på læring som ligger til grunn for denne studien. Dette perspektivet har mye til felles med det konstruktivistiske læringssynet, men vektlegger at samhandling mellom mennesker i en kontekst er vesentlig for konstruksjon av kunnskap (Dysthe, 2001). Begrepet *redskap* spiller en sentral rolle, og står for de språklige eller fysiske ressurser som mennesker har tilgang til. Slike redskaper kan derfor *mediere* virkeligheten for mennesker (Säljö, 2001). Fysiske redskaper er medierende redskaper ved at de formidler kunnskap og er til hjelp i læringsprosessen. I denne studien vil en datamaskin med dynamisk programvare være et medierende redskap, siden dette er noe elevene har tilgang til under deres arbeid. Säljö (2001) bemerker at språket vårt er menneskers viktigste medierende redskap, og hvordan mennesker kommuniserer og samhandler er derfor essensielt for det sosiokulturelle perspektivet. Elevenes ytringer og ordbruk blir derfor viktig å se nærmere på i denne studien.

1.2 Oppgavens oppbygning

I det neste kapitlet presenterer jeg studiens teoretiske rammeverk, hvor jeg først vil se nærmere på læringsperspektivet som ligger til grunn for studien. Videre vil jeg ta for meg de nevnte teoriene om semiotiske representasjonsregistre, matematiske tegn, aktivitet, kunnskap og forståelse. Kapittel 3 vil ta for seg lineære ulikheter og deres rolle i matematikken. I slutten av kapitlet legger jeg frem tidligere forskning om elevers læring av ulikheter. Studiens metodologi blir lagt frem i Kapittel 4. Her forklarer og begrunner jeg valgene jeg har tatt i forbindelse med metodene for datainnsamlingen og utvalget. Til slutt i kapitlet vil jeg beskrive studiens analyseverktøy og hvordan datamaterialet ble analysert. I Kapittel 5 presenteres resultatene og analysene av elevarbeidet og intervjuene i forbindelse med de tre forskningsspørsmålene. De blir videre diskutert i Kapittel 6. Her inngår også en diskusjon av metodiske spørsmål. Avslutningen kommer i Kapittel 7, hvor jeg oppsummerer studiens funn og kommer med en perspektivering av studien. Her legger jeg frem tanker om hvilke konsekvenser funnene kan ha. I tillegg peker jeg på mulige fokusområder for videre forskning av læring og undervisning av lineære ulikheter.

Kapittel 2

Teoretisk rammeverk

I dette kapitlet vil studiens teoretiske rammeverk presenteres. Først vil jeg legge frem det læringsperspektivet som studien tar utgangspunkt i. Deretter ønsker jeg å presentere Duvals (2000, 2006) teori om semiotiske representasjonsregistre, og vil påpeke viktigheten av å ha kunnskap om ulike transformasjoner av disse. Steinbrings (2005, 2006) teori om matematiske tegn og hans epistemologiske trekant vil så bli trukket frem. Videre vil jeg presentere til Fischbeins (1994) teori om tre komponenter som spiller inn i personers arbeid med matematikk. Deretter fokuserer jeg på matematisk kunnskap og legger frem definisjonen av begrepskunnskap og prosedyrekunnskap som Hiebert og Lefevre (1986) beskriver, før jeg karakteriserer instrumentell og relasjonell forståelse med utgangspunkt i Skemp (1976) og Sfard og Linchevski (1994). I Kapittel 3.6 vil jeg presentere tidligere forskning på læring av ulikheter som er relevant for denne studien.

Hvis ikke noe annet er uttrykt i teksten, er eksemplene jeg presenterer egenproduserte eksempler. De kan være motivert fra erfaringer fra praksis, oppgaver eller forsøk jeg har gjort selv eller teori jeg har lest på et tidligere tidspunkt.

2.1 Et sosiokulturelt læringsperspektiv

I denne studien legges et sosiokulturelt perspektiv på læring til grunn. Dette gjøres fordi studien baserer seg på hvordan elevene arbeider med lineære ulikheter i grupper og bruker språk og andre hjelpemidler til å kommunisere matematikk. Dysthe (2001) legger frem at sosiokulturelle perspektiv har mye til felles med det konstruktivistiske læringssynet, men at sosiokulturelle perspektiv vektlegger at samhandling mellom mennesker i en kontekst er vesentlig for konstruksjon av kunnskap. Hun beskriver at interaksjon og samarbeid blir sett på som en grunnleggende forutsetning for at læring og utvikling skal finne sted. At læringen er *situert* er et sentralt aspekt i dette perspektivet. "Menneskelige handlinger er situert i sosiale praksiser" (Säljö, 2001, s. 131). Handlingene vi gjør som mennesker er dermed avhengig av det vi oppfatter som aktuelt og det som omgivelsene krever i en bestemt virksomhet (Säljö, 2001).

Säljö (2001) understreker at uttrykket *redskap* eller *verktøy* har en spesiell betydning i denne sammenhengen. Han beskriver at det står for de språklige eller fysiske ressursene som mennesker har tilgang til og kan bruke. Slike redskaper kan derfor *mediere* virkeligheten for mennesker (Säljö, 2001). Mediering er et sentralt begrep innenfor sosiokulturelle perspektiv. Mediering hentyder til at menneskers kontakt med omverdenen ikke er direkte og ufortolket, og derfor er redskapenes mulighet til mediering og formidling viktig for at vi skal kunne håndtere verden (Säljö, 2001). Säljö forteller at mennesker har i alle år tatt i bruk redskaper og verktøy som har gjort det lettere å registrere verden rundt oss og som har skapt utvikling i samfunnet. Begrepet mediering blir brukt om alle former for hjelp og støtte i en læringsprosess (Dysthe, 2001). En datamaskin med en dynamisk matematisk programvare kan derfor karakteriseres som et medierende redskap. Siden elevene i studien har tilgang til dette redskapet i sitt arbeid, vil det være naturlig å studere nærmere hvordan dette blir brukt av elevene og hva det har å si for deres arbeid med og kommunikasjon om lineære ulikheter.

Säljö, Riesbeck og Wyndhamn (2001) bemerker at som medierende redskap er språklig kommunikasjon unikt. Språket er faktisk menneskets viktigste medierende redskap, og kan også karakteriseres som et intellektuelt redskap (Säljö, 2001). Språklig kommunikasjon blir av Säljö et al. (2001) karakterisert som koblingen mellom sosial samhandling og individers tanker. Ifølge Säljö (2001) ser sosiokulturelle perspektiv på kommunikasjon som en situert handling der utviklingen ikke kan forutsies. Han viser til at i en samtale er det som blir gjort og sagt blant annet avhengig av samtalens forløp og hvordan personer samarbeider. Säljö et al. (2001) understreker at det ikke er mulig å se inn i menneskers hjerner for å lese tankene, reaksjonene og oppfatningene deres, men at man kan observere det som blir uttrykt i ord og fysiske handlinger. "Et individs måte å resonnere, løse problemer eller handle på er alltid relativ til konteksten og de redskapene som finnes tilgjengelige " (Säljö, 2001, s. 121).

Vygotsky bruker begrepet *internalisering* i forbindelse med et individs kunnskapsutvikling (Dysthe, 2001). Imidlertid påpeker Säljö (2001) at begrepet ikke må oppfattes som utbytting av mentale redskaper og tilegnelse av nye. Dysthe (2001) forklarer internaliseringsprosessen som en prosess der fysiske og intellektuelle redskaper som blir brukt i sosiale aktiviteter medierer mentale funksjoner i individet. Säljö (2001) uttrykker at læring omhandler det å kunne medvirke i ferdigheter og kunnskaper slik at de kan brukes på en virksom måte i nye sosiale aktiviteter.

2.1.1 Diskurs og matematisk register

I en sosiokulturell sammenheng står diskurs for en systematisk, organisert måte å snakke på og tenke om omverdenen (Säljö et al., 2001). Mercer (1995) definerer en diskurs på denne måten: "[Discourse is] language as it is used to carry out the social and intellectual life of a community" (s. 79). Säljö et al. (2001) vektlegger hvordan ulike diskurser har ulike utgangspunkt, perspektiv, begrep og definisjoner. De trekker frem fysikk, psykologi og historie som eksempler på ulike diskurser. Fra et sosiokulturelt perspektiv går læring i stor grad ut på å beherske ulike typer diskurser (Säljö et al., 2001). Dysthe (2001) nevner klasserommet som ett av mange diskurssamfunn individer deltar i.

Pimm (1987) bruker også betegnelsen diskurs i sin redegjørelse av kommunikasjon i et matematisk klasserom. Ifølge Pimm er bruken av et teknisk vokabular et av de karakteristiske kjennetegnene av en diskurs om matematikk. Han mener at det matematiske språket er et offentlig akseptert språk som matematikere har utviklet for å kommunisere med andre. *Matematisk register* er en betegnelse han bruker for å forklare nærmere hvordan matematikken stiller seg i forhold til det offesielle språket allmennheten snakker.[4] Pimm uttrykker at et register er en teknisk lingvistisk betegnelse. Man kan se på et matematisk register som de betydningene som hører hjemme i den matematiske bruken av naturlig språk, og derfor består ikke et matematisk register kun av en samling av faguttrykk (Halliday, 1975, som sitert i Pimm, 1987). Fraser, uttrykk og karakteristiske måter å argumentere på utgjør et register, i tillegg til de tekniske termene (Pimm, 1987). Å lære å snakke om matematikk mener Pimm involverer å ta i bruk de måtene å se ting på og de betydningene som ligger i det matematiske registret.

Han argumenterer for at analogier og metaforer er billedlige talemåter som er kraftfulle teknikker for å skape nye betydninger som kan inkluderes i og dermed

[4] Pimm refererer til språket engelsk.

utvikle det matematiske registret. Pimm (1987) uttrykker at *utenfor-matematiske metaforer* kan være hverdagslige gjenstander eller prosesser som prøver å forklare matematiske ideer ved å vise til hendelser fra den virkelige verden.[5] Slike metaforer kan være individuelle fortolkninger som for eksempel å se en graf som et bilde (Pimm, 1987).

I denne studien undersøker jeg blant annet elevenes beskrivelser av ulikhetsbegrepet. I lys av et sosiokulturelt læringssyn, tolker jeg elevenes kunnskap som et resultat av medieringen av intellektuelle og fysiske redskaper som for eksempel språk og matematiske representasjoner. Elevenes språk og kommunikasjon vil også være viktig i denne studien. Hvilke ord elevene bruker i sine beskrivelser om lineære ulikheter og andre begreper er essensielt å studere nærmere, i tillegg til kommunikasjonen i den grafiske løsningen av lineære ulikheter.

2.2 Matematiske representasjoner

Matematikklæring kan involvere oppdagelser, gleder og begeistring, men kan også by på utfordringer og vanskeligheter. Dette gjelder både for de som lærer og lærerne. I den forbindelse er det viktig å undersøke hvordan man kan analysere utvikling og læring av matematisk kunnskap, og hvordan man får tilgang til matematiske objekter. Duval (2006) klassifiserer ulike registre av semiotiske representasjoner og belyser viktigheten av å kunne beherske ulike representasjoner av et begrep. Ordet *representasjon* blir av Duval (2006) kort beskrevet som “noe som står for noe annet”. Denne beskrivelsen finner vi igjen i Steinbrings (2006) og Pierces (1998) generelle beskrivelse av tegn. Imidlertid fokuserer Duvals (2006) teori om representasjoner i hovedsak på det å endre og det å skifte mellom ulike representasjonsregistre, mens Steinbring (2006) går nærmere inn på hvordan man gir mening til tegn. Det sistnevnte vil belyses i neste delkapittel.

I motsetning til objekter i fagfelt som biologi og kjemi, kan ikke matematiske objekter måles og oppfattes med visse instrumenter (Duval, 2006). En plantecelle er et eksempel på et objekt i biologi som kan studeres i et mikroskop. I kjemi er en sur løsning et eksempel på et objekt hvis surhetsgrad kan undersøkes på ulike måter, blant annet ved bruk av et pH-meter. En idé om en sirkel er et matematisk objekt i matematikken som kan ikke kan undersøkes direkte uten å representere

[5] Min oversettelse av “extra-mathematical metaphors”.

det som en geometrisk figur i planet eller som en beskrivelse med ord. Duval (2006) vektlegger denne forskjellen mellom objekter i ulike fagfelt, og understreker at man må bruke tegn og semiotiske representasjoner for å få tilgang til matematikken. Det følgende kaller forfatteren for et kognitivt paradoks, og han stiller spørsmålet: "How can they distinguish the represented object from the semiotic representation used if they cannot get access to the mathematical object apart from the semiotic representations?" (Duval, 2006, s. 107).

Et representasjonsregister blir av Duval beskrevet som et semiotisk system som tillater en transformasjon av representasjoner. Eksempler på representasjonsregistre er muntlige eller skriftlige forklaringer i naturlig språk, symbolsystemer, kartesiske grafer og geometriske figurer (Duval, 2006). Han uttrykker at transformasjoner av semiotiske representasjoner har en fremtredende rolle i enhver matematisk aktivitet. Han skiller mellom to typer transformasjoner; *behandling* og *omdanning*.[6] Behandling skjer når man holder seg innenfor samme representasjonsregister. Et eksempel på behandling er å løse en ulikhet i et algebraisk representasjonsregister. Omdanning skjer når man skifter representasjonsregister (Duval, 2006). Her er skiftet fra algebraisk representasjon til grafisk representasjon av en ulikhet et eksempel på en omdanning. For eksempel kan ulikheten $3x > x - 3$ representeres ved to rette linjer i et koordinatsystem, der løsningsmengden identifiseres ved avlesing av grafene.[7] Duval (2000) uttrykker at ethvert matematisk objekt kan ha ulike representasjoner. Han påpeker at hvis man skifter system, vil representasjonens innhold forandres, men det representerte objektet forblir det samme. Dette kan føre til misoppfatninger hos elever som en følge av at de ikke skiller objektet fra dets representasjon (Duval, 2000).

I følge Duval (2006) er behandling den transformasjonen som har fått mest oppmerksomhet i skolen, mens det er omdanning av representasjoner som skaper de største vanskelighetene for elevene. Ofte kan vanskeligheter eller mentale hindringer hos elevene komme av at de ikke håndterer en omdanning av representasjoner, eller at de ikke kjenner igjen omdanningen når den har blitt gjort (Duval, 2000). Et eksempel her kan være problemer med å transformere et uttrykk i naturlig språk til en representasjon med symboler. Imidlertid mener Duval (2006) at omdanning er en mer kompleks transformasjon enn behandling. Dette hevder han er på grunn av at det representerte objektet må gjenkjennes mellom start- og målrepresentasjonen, selv om innholdet i dem kan ha lite til felles. Han mener videre at omdanning for ofte

[6] Min oversettelse av henholdsvis "treatment"og "conversion".
[7] Mer om grafisk løsning av lineære ulikheter i Kapittel 3.

blir klassifisert som koding eller oversettelse. Noen ganger er omdanningen tydelig og umiddelbar slik at omdanningen blir som en oversettelse av enhet for enhet (Duval, 2000). Dette karakteriserer han som en *kongruent* omdanning. I en slik omdanning eksisterer en en-til-en korrespondanse mellom komponenter i startrepresentasjonen og målrepresentasjonen (Duval, 2006). Følgelig uttrykker han at det ikke finnes en slik type korrespondanse i *ikke-kongruente* omdanninger. To enkle eksempler er vist i Tabell 2.1 for å illustrere de to typene av omdanning.

Tabell 2.1: Eksempel på *kongruent* og *ikke-kongruent* omdanning.

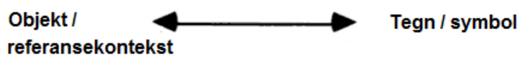
Representasjon ved naturlig språk ↓ Aritmetisk representasjon	Fem er større enn to $5 > 2$	Fem er tre større enn to $5 = 2 + 3$
	Kongruent omdanning	*Ikke-kongruent omdanning*

Duval (2006) viser til at ikke-kongruente omdanninger kan være vanskelig for mange. Slike problemer avslører en manglende koordinering mellom representasjonsregistre (Duval, 2000). Med utgangspunkt i eksemplet ovenfor, kan den ikke-kongruente omdanningen være vanskeligere i form av at uttrykket "større enn" brukes uten at ulikhetstegnet aktiveres, og man kan derfor ikke gjøre en ren oversettelse fra enhet til enhet. Når en koordinering mellom representasjonsregistre mestres, er det muligheter for en begrepsmessig forståelse (Duval, 2000). Duval (2006) fastslår at "[t]he true challenge of mathematics education is first to develop the ability to change representation register" (s. 128).

2.3 Relasjonen mellom tegn/symboler og referansekontekster i matematikken

Hovedsakelig blir matematiske tegn sett på som instrumenter vi trenger for å kunne kode og beskrive matematisk kunnskap, slik at vi er i stand til å kommunisere og generalisere kunnskapen (Steinbring, 2006). Peirce (1998) beskriver tegn som noe som skal overbringe kunnskap rundt noe den står for eller skal representere. Denne generelle beskrivelsen rommer også matematiske tegn. Verbale formuleringer, gestikulering, matematiske symboler som tall og bokstaver, operatorer, likninger, tabeller, diagram og grafer er matematiske tegn som Steinbring (2006) nevner kan bli observert i matematikkundervisning til daglig. Han uttrykker at matematiske tegn fungerer som kulturelle verktøy med den begrunnelse at de blir brukt i kommunikasjon med andre mennesker for å kunne utvikle kunnskap.

Steinbring (2006) beskriver to funksjoner som matematiske tegn har; en semiotisk funksjon og en epistemologisk funksjon. Den semiotiske funksjonen står for stedsfortrederrollen tegn har, nemlig "noe som står for noe annet". Dette "noe annet" blir av Steinbring (2006) beskrevet som et referanseobjekt eller en referansekontekst, som ikke må bli sett på som en virkelig ting med sanselige egenskaper. Synet hans sammenfaller med Duvals (2006) forklaring om at matematiske objekter ikke kan måles med instrumenter på lik linje med objekter i andre fagfelt. Den semiotiske funksjonen legger med andre ord vekt på tegns rolle som representanter for noe annet. Denne sammenhengen er vist i Figur 2.1.



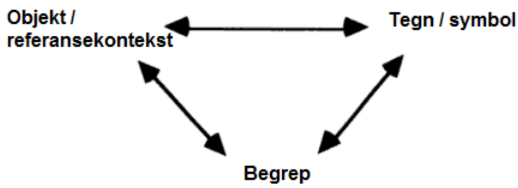
Figur 2.1: Relasjonen mellom objekt og tegn (Steinbring, 2006, s. 135).

Det at tegnet inneholder kunnskap om det den står for, utgjør tegns epistemologiske funksjon. Steinbring (2005) bemerker at matematiske tegns utforming har utviklet seg med tiden og er i stor grad fastsatt konvensjonelt. Boero, Bazzini og Garuti (2001a) uttrykker at tegn bærer mønstre av fortidens resonnering og at tegn og andre kulturelle verktøy ikke snakker for seg selv. Steinbring (2006) påpeker at for de lærende har tegnene i seg selv har ingen betydning, og man må selv skape mening til tegnene ved "establishing a mediation to suitable reference contexts" (s. 135). Han viser til at medieringen mellom matematiske tegn og referanseobjekt/referansekontekst blant annet er avhengig av læringsaktiviteten.

Man finner ulike typer tegn i matematisk kommunikasjon. Steinbring (2006) forklarer at foreløpige, spontane former for tegn er tegn som er produsert i samvirkning med andre. Han nevner eksempler som beskrivelser i naturlig språk, særegen navngiving, peking og gestikulering. Derimot kan vitenskapelige tegn eller symboler for eksempel være matematiske symboler, diagrammer, grafer, variabler og skriftlige betegnelser (Steinbring, 2006).

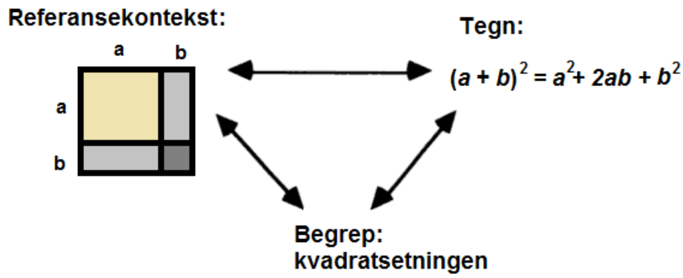
2.3.1 Den epistemologiske trekanten

Steinbring (2006) legger frem at sammenhengen mellom matematiske tegn og symboler, referansekonteksten og medieringen mellom disse kan representeres i form av en epistemologisk trekant. Figur 2.2 gjengir den epistomologiske trekanten som en teoretisk, skjematisk fremstilling.



Figur 2.2: Den epistemologiske trekanten (Steinbring, 2006, s. 135).

Han gjør det klart at den epistemologiske trekanten er en modell som er skapt for å gjøre den usynlige matematiske kunnskapen tilgjengelig. Han forklarer at den usynlige matematikkens strukturelle natur og særegenheter kan lettere bli undersøkt i modellen, samt at trekanten kan bli brukt for å analysere konstruksjon og utvikling av kunnskap i sosiale læringssituasjoner. Trekanten kan da brukes til å synliggjøre de relasjonene og strukturene som konstrueres av den lærende i en interaksjon (Steinbring, 2005). Steinbring (2006) uttrykker at medieringen mellom tegn og referansekonteksten og utformingen av mer generell matematisk kunnskap blir påvirket av epistemologiske forhold. Dette ser jeg på som at tidligere kunnskap og tolkninger i forbindelse med tegnet eller referansekonteksten kan påvirke medieringen, slik at ikke hjørnene i trekanten kan bli gitt eksplisitt. Derfor utgjør hjørnene i trekanten et balansert og gjensidig system der ingen av elementene kan bli bestemt ut ifra de andre elementene (Steinbring, 2006). Han forklarer at i utviklingsprosessen av matematisk kunnskap endrer refereransekonteksten seg ved at konkrete objekter gradvis blir erstattet med mentale objekter og strukturer. Epistemologiske trekanter kan derfor settes sammen til en kjede som viser til en interaksjonsprosess og som prøver å reflektere utviklingen av elevens tolkninger (Steinbring, 2006). Et eksempel på bruk av en epistemologisk trekant er vist i Figur 2.3 der begrepet kvadratsetningen medieres gjennom arealet og det algebraiske tegnet i den epistemologiske trekanten.



Figur 2.3: Eksempel på mediering mellom referansekontekst og tegn.

2.4 Matematisk aktivitet

Det finnes mange ulike syn på matematisk kunnskap og hva som kjennetegner matematiske sannheter. Her vil jeg presentere Fischbeins (1994) to synspunkt på matematikk. Fischbein (1994) mener at matematikk hovedsakelig bør ses på fra to synspunkt. Han nevner det ene perspektivet er som et formelt, strengt deduktivt *kunnskapsreservoar*[8], mens det andre er som menneskelig aktivitet, som vist i Figur 2.4. Denne inndelingen er relevant for denne studien fordi den fokuserer på matematikk som en menneskelig aktivitet, og jeg mener den er i tråd med det sosiokulturelle perspektivet på læring. Dette synet ser på hvordan fysiske og intellektuelle redskaper medierer virkeligheten slik at kunnskap kan konstrueres gjennom samhandling mellom mennesker, og derfor samsvarer dette med synet på matematikk som en aktivitet.

Matematikk

$\swarrow$ $\searrow$

Formelt, strengt deduktivt *kunnskapsreservoar*

Som menneskelig aktivitet

Figur 2.4: Min fremstilling av Fischbeins (1994) to synspunkt på matematikk.

Fischbein (1994) vektlegger at man må se på matematikk som en kreativ prosess selv om det matematikere ønsker å oppnå er et sammenhengende og strukturert kunnskapsreservoar. Han uttrykker et ønske om at elever må forstå at matematikk hovedsakelig er en menneskelig aktivitet. Ifølge Fischbein kan matematikk som

[8] Min oversettelse av “body of knowledge”.

menneskelig aktivitet deles inn i tre hovedkomponenter; en formell, en algoritmisk og en intuitiv komponent. Den formelle komponenten omhandler matematikkens aksiomer, definisjoner, teoremer og bevis (Fischbein, 1994). Han presiserer at disse også må tas i betraktning i forbindelse med matematikk som en menneskelig aktivitet. I en resonneringsprosess bør de nevnte matematiske kjernekomponentene være involverte, slår Fischbein fast. Med tanke på matematiske aktiviteter som innebærer ulikheter, mener jeg at den formelle komponenten omhandler en definisjon av ulikhetsbegrepet og derfor også ulikhetstegnets betydning.

Den algoritmiske komponenten tar for seg viktigheten av det å kunne utføre matematiske prosedyrer (Fischbein, 1994). Han påpeker at man ikke er i stand til å løse problemer kun ved å kjenne til aksiomer, teoremer, definisjoner og bevis slik de står i lærebøker. Det understrekes at ferdigheter må trenes på, og at ren forståelse ikke er nok. Den tredje komponenten, intuitiv kognisjon, forklarer han som en type kognisjon som umiddelbart blir akseptert uten at man føler behov for en begrunnelse eller bevis. Med andre ord er det noe som er selvinnlysende. Slike oppfatninger kan i stor grad virke inn på personers fortolkninger og resonneringsstrategier, og det er imidlertid ikke sikkert de samsvarer med logiske forsvarlige sannheter (Fischbein, 1994). Intuitive modeller kan ifølge forfatteren påvirke de lærendes måte å resonnere på, selv om de er i stand til å resonnere formelt. “The relationship between the formal and the intuitive aspects of mathematical reasoning in learning, understanding, and solving processes is very complex.” (Fischbein, 1994, s. 234). Dette kan føre til misoppfatninger og systematiske feil, ifølge forfatteren. Når løsningsmengden til en ulikhet er et intervall, kan en misoppfatning være at løsningsmengden kun består av diskrete verdier.

Et interessant fenomen som Fischbein (1994) trekker frem, er samhandlingen mellom formelle føringer og bruk av algoritmer. Han påpeker at ignorering av formelle føringer kan føre til en overgeneralisering, som vil gi en feilaktig løsningsprosedyre. Et eksempel som vises til er eleven som skriver $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$, og åpenbart overgeneraliserer den distributive loven for addisjon. En slik anvendelse er resultatet av en blind læring av algoritmer. Eleven må derfor få en dypere og mer komplett forståelse av forholdet mellom den formelle og den algoritmiske komponenten, og forstå det formelle grunnlaget som begrunner algoritmen (Fischbein, 1994).

2.5 Begrepskunnskap og prosedyrekunnskap

Gjennom årene har skillet mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap i matematikk skapt mye diskusjoner. Hvordan elever lærer matematikk og hvordan undervisningen bør legges opp, baserer seg på hvilken type kunnskap som skal læres og hvordan balansegangen mellom dem bør være (Hiebert & Lefevre, 1986). Hiebert og Lefevre (1986) forklarer at de to hovedtypene av kunnskap har gjennom tiden fått ulike betegnelser, og peker på *ferdighet* og *forståelse* som en kjent distinksjon.[9] De bemerker at diskusjonen rundt de to termene ofte har dreid seg om hvilke av dem som bør vektlegges i undervisningen i klasserommet. Hiebert og Lefevre viser til at i den senere tid har søkelyset vendt seg mot hvordan de to typene av kunnskap er relatert. De vektlegger at det er nyttig å skille mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap sett i lys av tenkningen om matematisk læring, men at man ikke kan beskrive all kunnskap som enten prosedyrekunnskap eller begrepskunnskap.

Begrepskunnskap kan karakteriseres ved at det er kunnskap som er rik på relasjoner (Hiebert & Lefevre, 1986). Forfatterne utdyper at det kan ses på som et nettverk som kobler sammen kunnskap, der relasjonene er like fremtredende som hver enkelt informasjonsdel. Utvikling av begrepskunnskap skjer når relasjoner mellom informasjondeler skapes (Hiebert & Lefevre, 1986). De viser til at uviklingen kan skje på flere måter, deriblant som en forbindelse mellom eksisterende og ny kunnskap. De bemerker at dette fenomenet har fått flere betegnelser, der forståelse er en av termene som ofte blir brukt når denne forbindelsen mellom ny og eksisterende kunnskap er god. Hiebert og Lefevre (1986) skiller mellom to nivåer av begrepskunnskap; et *primærnivå* og et *reflekterende nivå*. Det første nivået innebærer at koblingen mellom informasjonen er konstruert på samme eller lavere abstraksjonsnivå enn informasjonen selv. Her står abstraksjonsnivå for hvor kontekstspesifikk en kunnskapsenhet eller en relasjon er (Hiebert & Lefevre, 1986). Et eksempel på begrepskunnskap på primærnivå er koblingen mellom hvordan man skal addere flersifrede tall og kunnskap om plassverdisystemet.

Det forklares videre at det reflekterende nivået står for relasjoner som blir konstruert på et høyere og mer abstrakt nivå enn informasjonsdelene som blir koblet sammen. Disse relasjonene er mindre knyttet til spesifikke kontekster. Det som kjennetegner dannelsen av slike relasjoner, er at sentrale egenskaper gjenkjennes i to informasjonsdeler som er tilsynelatende ulike, og kobles sammen (Hiebert & Lefevre, 1986).

[9] Min oversettelse av henholdsvis "skill" og"understanding".

Eksempelvis kan dette være at koblingen mellom plassverdi og addisjonsprosedyren blir gjenkjent som et spesialtilfelle av den generelle ideen om at man alltid skal addere noe likt på den samme måten (Hiebert & Lefevre, 1986). Her er $11,2 + 15,8$ et eksempel der tideler, enere og tiere adderes hver for seg. Tilsvarende vil også prosedyren for å finne en fellesnevner i brøkregning være et spesialtilfelle av den generelle ideen om at det som er likt kan adderes. De sammenlikner det reflekterende nivået med et godt utsiktspunkt der den lærende kan se mer av det matematiske terrenget enn på primærnivået.

Ifølge Hiebert og Lefevre (1986) er prosedyrekunnskap satt sammen av to deler. De forklarer at den ene delen går ut på å ha kunnskap om matematikkens formel- og symbolspråk. Dette innebærer at den lærende er bevisst på de syntaktiske reglene som gjelder for å uttrykke seg med det formelle matematiske språket (Hiebert & Lefevre, 1986). Det bemerkes at kunnskap om symboler og matematikkens syntaks kun viser til en bevissthet rundt de overfladiske egenskapene, og ikke til symbolenes betydning. Den andre delen av prosedyrekunnskap blir av Hiebert og Lefevre (1986) beskrevet som kunnskap om regler, algoritmer og prosedyrer for å løse matematiske oppgaver. De utdyper at prosedyrer ikke bare trenger å omfatte manipulasjon av matematiske symboler, men også av konkrete objekt, visuelle diagrammer eller andre representasjoner av abstrakte, matematiske objekt. Dette kan for eksempel være fremgangsmåten for å representere en ulikhet i en dynamisk matematisk programvare. Prosedyrer er hierarkisk oppbygd med en klar struktur, som ofte er satt sammen av steg for steg-instruksjoner eller underprosedyrer (Hiebert & Lefevre, 1986). Forfatterne bemerker at strategier for å løse problemer som ikke direkte tar for seg symboler også inngår i prosedyrisk kunnskap.

Hiebert og Lefevre (1986) uttrykker at mening skapes når relasjoner mellom deler av kunnskap blir oppretter eller gjenkjent. Etter forfatternes definisjon av begrepskunnskap, må denne typen kunnskap bli lært med mening. Imidlertid må ikke prosedyrer nødvendigvis det. Hiebert og Lefevre (1986) foreslår at prosedyrer som blir lært med mening er prosedyrer som blir koblet sammen til begrepskunnskap.

På den annen side vil pugging gi kunnskap som er sterkt knyttet til konteksten den læres i, og denne typen kunnskap er ikke koblet til et begrepsmessig nettverk (Hiebert & Lefevre, 1986). Slik kunnskap kan kun anvendes i liknende kontekster. Som lærende kan man koble sammen isolerte deler av informasjon, og på denne måten frembringe begrepskunnskap fra noe som opprinnelig ble lært ved pugging (Hiebert & Lefevre, 1986). Det understrekes at når begrep og prosedyrer ikke er koblet sammen, kan den lærende være i stand til å finne svar på problem uten å forstå hva de gjør. En annen mulighet er at de kan ha en intuitiv følelse for matematikk, men kan ikke løse problemet (Hiebert & Lefevre, 1986).

2.6 Instrumentell og relasjonell forståelse

Skemp (1976) skiller mellom to typer forståelse.[10] Relasjonell forståelse beskrives av Skemp som det mange antakelig legger i ordet forståelse, det å vite hva man skal gjøre og hvorfor. Jeg tolker dette som at eleven har begrepskunnskap og kan identifisere relasjoner mellom informasjonsdeler (Hiebert & Lefevre, 1986). Instrumentell forståelse derimot, blir forklart som “rules without reasons” (Skemp, 1976, s. 2). Jeg oversetter dette som *regler uten begrunnelser*. Skemp bemerker at både elever og lærere kan ha denne oppfatningen av forståelse hvis de har lært en regel og har evnen til å bruke den. I forhold til Hiebert og Lefevres (1986) to betegnelser på kunnskap, tolker jeg instrumentell forståelse som først og fremst prosedyrekunnskap som ikke er lært med mening.

Sfard og Linchevski (1994) begrunner hvorfor instrumentell forståelse kommer til kort innenfor algebra. De sier at det blir vanskelig for elevene å takle nye, fremmede problem eller mer avanserte algebraiske ideer hvis de ikke kan gi en forklaring til de formelle algebraiske prosedyrene de lærer seg. Et eksempel på dette kan være dersom en elev med instrumentell forståelse av algebraisk løsning av lineære ulikheter ønsker å løse en andregradsulikhet med samme prosedyre. Sfard og Linchevski (1994) påpeker at for å få en relasjonell forståelse av algebra, må de lærende relatere de formelle algebraiske prosedyrene til begreper de har utviklet tidligere. Med andre ord går det ut på å gi en forklaring på en regel eller et begrep ved å bruke det de har lært tidligere. Dette er også noe av det Fischbein (1994) peker på når han sier at elever må forstå definisjoner eller teoremer for å begrunne algoritmene og prosedyrene de lærer seg. Når det gjelder algebra er det essensielle å forbinde de algebraiske manipulasjonene som gjøres med de aritmetiske prosessene som ligger under (Sfard & Linchevski, 1994).

Sfard og Linchevski (1994) skiller mellom to typer prosesser i arbeid med matematikk; en primærprosess og en sekundærprosess. Innenfor algebra blir en primærprosess beskrevet som de skjulte aritmetiske prosedyrene som ligger bak et algebraisk

[10] Han presiserer at det var Stieg Mellin-Olsen som gjorde ham oppmerksom på dette skillet.

uttrykk (Sfard & Linchevski, 1994). Videre beskriver de en sekundærprosess som den algebraiske manipulasjonen i seg selv. De vektlegger at man må man kunne relatere sekundærprosessen til primærprosessen for at sekundærprosessen skal skje meningsfullt. Et eksempel på en sekundærprosess kan være forkorting av a i uttrykket $\frac{3a(b+c)}{2a}$. Her vil primærprosessen være den aritmetiske prosessen der en verdi blir dividert med seg selv, som resulterer i $\frac{a}{a} = 1$.

Sfard og Linchevski (1994) uttrykker at det å kunne utføre prosedyrer automatisk, det å handle uten å tenke, er det samme som å utføre sekundærprosesser uten å bry seg om det som ligger bak. De ytrer at det er nettopp derfor symbolsk algebra er et kraftfullt verktøy for å løse sammensatte matematiske problemer. Men hvis man ikke klarer å henvise til primærprosessene der det er passende, kan dette imidlertid føre til instrumentell forståelse (Sfard & Linchevski, 1994). Dette kan for eksempel skje dersom elever ikke kan forklare prosessen som ligger bak den velkjente "flytt og bytt"-regelen.[11]

[11] Blant annet brukt av lærerne i studien til Kleve og Tellefsen (2009). Denne regelen henviser til det å legge til eller trekke fra samme verdi på hver side i en likning, og blir omtalt som "flytt over og bytt fortegn".

Kapittel 3

Lineære ulikheter og deres rolle i matematikken

I dette kapitlet vil jeg først presentere ulikhet som en ordningsrelasjon og gå nærmere inn på hvilke roller bokstavsymboler kan ha i lineære ulikheter. Deretter vil jeg rette fokus mot transformasjonene som er involvert i grafisk løsning av ulikheter, noe som er sentralt for studiens andre forskningsspørsmål. Videre ser jeg på rollen lineære ulikheter har i skolen, og trekker samtidig frem sentrale kompetansemål i læreplanen for Kunnskapsløftet. I tillegg beskriver jeg kort omfanget av elevenes undervisning av temaet, før den dynamiske matematiske programvaren blir presentert. Videre legger jeg frem en presentasjon av elevoppgavene som denne studien baserer seg på. Til slutt i kapitlet vil tidligere forskning på læring av ulikheter presenteres. Det er få studier som kun fokuserer på lineære ulikheter, og derfor vil presentasjonen vise til noen av studiene som blant annet tar for seg lineære ulikheter.

3.1 Ulikhet som en ordningsrelasjon

Tanner (1961, s. 193) hevder at "matematics begins with inequality" og argumenterer med at ideene om "mer" og "mindre" er eldre enn tallene, de er til og med eldre enn ethvert språk. Matematikkens historie går langt tilbake i tid, men det tok lang tid før symbolene vi kjenner i dag ble innført. Tanner (1962) forteller at det var først i 1557 at Robert Recorde presenterte likhetstegnet slik vi kjenner det i dag. Ulikhetstegnene $<$ og $>$ ble først sett på trykk i Thomas Harriots verk *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes resolvendas* i 1631 (Tanner, 1962). Det blir understreket av Tanner (1962) at ulikhetstegnenes matematiske karakter ligger skjult, siden den matematiske betydningen av "mindre enn" og "større enn" samsvarer med den hverdagslige betydningen.

"Mindre enn", $<$, er en ordningsrelasjon som viser hvordan to tall er ordnet i forhold til hverandre (Stoll, 1963). Ifølge Stoll (1963) blir ordet *relasjon* blir brukt i tilknytning med par av objekter som blir ansett i en bestemt rekkefølge. Han forklarer videre at en relasjon dreier seg om en eksistens eller ikke-eksistens av en type kobling mellom visse ordnede par. En relasjon R på de reelle tall vil derfor vise en forbindelse mellom elementer i den reelle tallmengden, $\mathbb{R}$. En slik relasjon R kan ha flere egenskaper. Beskrivelsen av de påfølgende egenskapene baserer seg på at a, b og c er reelle tall. Relasjonen R er *refleksiv* hvis aRa for alle a. Videre er R *symmetrisk* hvis aRb impliserer at bRa. Relasjonen R er *transitiv* hvis og bare hvis aRb og bRc fører til at aRc (Stoll, 1963).

Ut ifra beskrivelsen til Stoll (1963), viser relasjonen $<$ på $\mathbb{R}$ at det finnes distinkte elementer a og b slik at $a < b$, men da kan ikke $b < a$. Ut ifra egenskapene som ble beskrevet over, er relasjonen $<$ irrefleksiv på de reelle tallene, fordi a kan ikke være mindre enn seg selv, det vil si $a \not< a$. Videre er $<$ en asymmetrisk relasjon, fordi $a < b$ ikke impliserer at $b < a$. Imidlertid er $<$ en transitiv relasjon fordi $a < b$ og $b < c$ fører til at $a < c$. Tilsvarende gjelder for relasjonen "større enn", $>$. (Enderton, 1977) uttrykker at relasjonen tilfredsstiller trikotomi på $\mathbb{R}$, det vil si at nøyaktig én av følgende for to tall a og b gjelder: $a < b$, $a = b$ eller $a > b$. Relasjonen $<$ kan derfor kalles en lineær ordning på de reelle tallene fordi den er en transitiv relasjon og tilfredsstiller trikotomi på $\mathbb{R}$ (Enderton, 1977).[12] I likhet med relasjonene "mindre enn",$<$ og "større enn", $>$, er "mindre enn eller lik",$\leq$, og "større enn eller lik", $\geq$, også ordningsrelasjoner på de reelle tallene.

Noen viktige følger av ulikhet som en ordningsrelasjon er gitt i form av regler som vises nedenfor. De er basert på Adams (2006).

For $a < b$ og et reelt tall c, er
1. $a + c < b + c$
2. $a - c < b - c$
3. $ac < bc$ for $c > 0$
4. $ac > bc$ for $c < 0$

Reglene viser at en ulikhet kan behandles ved at samme verdi blir addert eller substrahert på hver side av ulikhetstegnet. Den siste ulikheten viser at ulikhetstegnet

[12] Forfatteren uttrykker at egenskapen også blir kalt for en total ordning.

endrer retning når $a < b$ blir multiplisert med $c < 0$. Ved bruk av disse egenskapene kan en ulikhets løsningsmengde bestemmes.

Sett fra et logisk, matematisk perspektiv er en ulikhet uten ukjente, som for eksempel $1 + 2 < 4$, en proposisjon som enten har sannhetsverdien "sann" eller "usann" (Halmaghi, 2011). Derimot kan en ulikhet med en ukjent kalles for et åpent utsagn der alle de akseptable verdiene av den ukjente må bestemmes slik at utsagnet blir et sant utsagn (Karp, 2007, som sitert i Ellerton & Clements, 2011). $2x - 1 > 4$ er et eksempel på et åpent utsagn. I løsningen av en ulikhet må ekvivalente former utledes slik at ulikhetens løsning kan leses ut ifra den siste ekvivalente formen (Halmaghi, 2011). Bagni (2006) beskriver at en ulikhet ofte viser til en uendelig delmengde av de reelle tallene. I denne studien fokuseres det på lineære ulikheter, det vil si ulikheter av første grad, der den ukjente blir symbolisert ved bokstavsymbolet x.

3.2 Bokstavsymbolets to roller i lineære ulikheter

I elevers arbeid med lineære ulikheter formoder jeg at x er det bokstavsymbolet som elevene møter på hyppigst. I dette delkapitlet vil jeg legge frem og beskrive x som en *ukjent* og som en *variabel*, mens i det neste delkapitlet forklarer og begrunner jeg i hvilken sammenheng x inntar de nevnte rollene i forbindelse med lineære ulikheter.

Radford (1996) gjør et skille mellom to tilnærminger til algebra. Han redegjør at tilnærmingen ved *algebraisk problemløsning* og *generalisering av mønster* har helt ulike logiske grunnlag, som fører til to forskjellige former for algebraisk tenkning. Algebraisk problemløsning blir av ham sett på som løsningen av en tekstoppgave gjennom likningsløsning, der målet er å finne et ukjent tall. I denne prosessen blir bokstavsymbolet behandlet som et kjent tall og identiteten blir avslørt til slutt. En ukjent blir av Ely og Adams (2012) beskrevet som en bestemt størrelse som står for én eller flere tallverdier som kan bestemmes ut ifra den informasjonen som er gitt. Ifølge Radfords (1996) og Ely og Adams (2012) forklaringer kan derfor bokstavsymbolet x i en algebraisk ulikhet klassifiseres som en ukjent, der målet er å finne løsningsmengden til x som gjør ulikheten sann.

Det engelske ordet *variable* blir ofte brukt som som en betegnelse på ethvert bokstavsymbol som opptrer i matematiske formler og uttrykk (Ely & Adams, 2012). I likhet med blant annet Ely og Adams (2012) og Radford (1996) vil jeg bruke betegnelsen variabel for bokstavsymbol i en mer spesifikk situasjon. Radford mener at generalisering er en bevisprosess der man går fra empirisk kunnskap til abstrakt kunnskap ved å undersøke sammenhenger og trekke en konklusjon i form av et formeluttrykk. Her vil bokstavsymboler innta rollen som en variabel (Radford, 1996). Når et bokstavsymbol blir brukt som en variabel, blir den ifølge Küchemann (1981) sett på "as representing a range of unspecified values, and a systematic relationship is seen to exist between to such sets of values" (s. 104). Når en variabel størrelse varierer, vil også en annen størrelse forandre seg (Ely & Adams, 2012). Dette blir presisert av Adams (2006), der x kalles for den uavhengige variabelen og representerer en innverdi fra definisjonsmengden til en funksjon f. y er den avhengige variabelen som representerer den korresponderende utverdien $f(x)$ i verdimengden til f (Adams, 2006).

3.3 Grafisk tilnærming til ulikheter

Studiens andre forskningsspørsmål tar utgangspunkt i grafisk løsning av lineære ulikheter. Her vil jeg undersøke nærmere hvilke transformasjoner av representasjoner som er involvert, og hvilken rolle bokstavsymbolet x innehar i de ulike representasjonene.

Dreyfus og Eisenberg (1985) legger frem hvordan man kan bruke en grafisk metode for å løse ulikheter. Prinsippet med den grafiske metoden er å betrakte ulikhetens to sider som to funksjoner av variabelen i ulikheten (Dreyfus & Eisenberg, 1985). De fortsetter med at funksjonene må fremstilles grafisk i det samme kartesiske koordinatsystemet, og til slutt må y-verdiene sammenliknes.Videre uttrykker de at ulikheten $f(x) < g(x)$ vil kunne løses grafisk ved å tegne grafene til $y = f(x)$ og $y = g(x)$ i et standard xy-koordinatsystem. Ut ifra grafene skal man kunne lese av for hvilke verdier for x grafen til $y = f(x)$ ligger lavere enn grafen til $y = g(x)$ (Dreyfus & Eisenberg, 1985). Til slutt påpeker de at for disse verdiene for x vil $f(x)$ være mindre enn $g(x)$, og x-verdiene vil da utgjøre løsningsmengden til ulikheten.

Sackur (2004) navngir de ulike transformasjonene av representasjoner som må gjøres for å løse ulikheter grafisk. Hun viser til hva som kreves av eleven i denne sammenhengen:[13]

Ulikhet $\rightarrow$ lage to funksjoner $\rightarrow$ tegne grafene etter tilsynekomsten av y $\rightarrow$ sammenlikne y-verdiene$\rightarrow$gå tilbake til x

Jeg velger å bruke de fire representasjonsregistrene som Sackur (2004) identifiserer som involverte registre i i grafisk løsning av ulikheter, og jeg tar utgangspunkt i grafisk løsning av ulikheten $2x - 1 > 2 - x$ i Oppgave 3.[14] Representasjonene er vist i Tabell 3.1. Den siste raden i tabellen viser hvordan jeg tolker bokstavsymbolet x sin rolle i de ulike registrene.

Tabell 3.1: En oversikt over de fire registrene som er involvert i grafisk løsning av ulikheter, oversatt etter Sackur (2004).

I	II	III	IV
Algebraisk	Funksjonal	Grafisk todimensjonal	Grafisk endimensjonal
$2x - 1 > 2 - x$	$f(x) = 2x - 1$ $g(x) = 2 - x$	$y = 2x - 1$ $y = 2 - x$	$x \in < ... >$
x som ukjent	x som variabel	x som variabel	x som ukjent med "avdekket identitet"

I starten, når ulikheten er gitt i et algebraisk representasjonsregister, har x rollen som ukjent og står for flere tallverdier som skal bestemmes (Ely & Adams, 2012). Dette er poengtert i den nederste raden i den første kolonnen i Tabell 3.1. Sackur (2004) ser på tilfellet når elever går direkte fra register I til register III. Hun uttrykker at i omdanningen I - III, fra algebraisk register til grafisk todimensjonalt register, må elevene først se at de har fått to ulike grafer fra én ulikhet. Det må poengteres at elever må derfor ha kjennskap til lineære funksjoner og hvordan de kan representeres i grafisk. Videre forteller Sackur (2004) at behandling i register I ikke er i overensstemmelse med behandling i register III. Behandling innenfor det algebraiske representasjonsregisteret vil gi en rekke ekvivalente uttrykk, men grafene til disse uttrykkene dukker ikke opp i register III (Sackur, 2004). Sackur (2004) konkluderer med at omdanningen I-III antakeligvis ikke er kongruent.

Gjennom omdanningene I-II og I-III har x skiftet rolle. Dette rollebyttet skjer samtidig som tilsynekomsten av y som Sackur (2004) beskriver. Dette viser hvordan ulikheter er tett knyttet til variabelbegrepet og funksjonsbegrepet, noe som Dreyfus

[13]Min oversettelse av visningen til Sackur (2004, s. 148).
[14]Oppgaven presenteres i sin helhet i Kapittel 3.5.

og Eisenberg (1985) også uttrykker. Både i et funksjonalt og et grafisk todimensjonalt register vil derfor bokstavsymbolet x opptre som en variabel. Dette er presisert i den andre og tredje kolonnen i Tabell 3.1. Dette fører til at x går fra å være en ukjent til en variabel, siden ulikheten gir opphav til to funksjonsuttrykk.

I forhold til omdanningen fra grafisk todimensjonalt til grafisk endimensjonalt register (III-IV), bemerker Sackur (2004) at det er en "en-til-en"-korrespondanse mellom punktene på grafen til f der f er større enn g og x-verdiene til disse punktene. Hun sier derfor at denne sistnevnte omdanningen er kongruent. Halmaghi (2011) påpeker at det ikke alltid er lett for elevene å skifte fra å se den dynamiske løsningen som et punkt som beveger seg innenfor et bestemt område på x-aksen, til å gi løsningen som en statisk intervall. Sackur (2004) vedkjenner at elever kan ha vanskeligheter med å komme tilbake til ulikhetens løsning, og at disse vanskelighetene må bli undersøkt og tolket. Et viktig moment er at ulike grafer kan gi samme løsningsmengde (Sackur, 2004). Det er med andre ord en "mange-til-en"-korrespondanse mellom en graf og en løsningsmengde. Sackur (2004) uttrykker at man må forlate informasjon om grafene idet man retter fokus mot x-verdiene til de sentrale punktene på grafen. Hun formoder at dette kan være noe av grunnen til at elevers vanskeligheter med overgangen fra grafisk representasjon til løsningsmengden. Gjennom denne siste omdanningen III-IV endrer også rollen til x seg nok en gang, ved å gå fra å være en variabel til en ukjent som har fått "avdekket sin identitet" (Radford, 1996). Dette vises i den siste kolonnen i Tabell 3.1.

I denne redegjørelsen har jeg vist at elever må gjennom flere transformasjoner i forbindelse med en grafisk løsning av ulikheter. I tillegg har jeg belyst at bokstavsymbolet x går fra å være en ukjent i en algebraisk ulikhet, til en variabel i to funksjonsuttrykk, til en ukjent med en bestemt løsningsmengde.

3.4 Lineære ulikheter i skolen

I denne delen vil jeg presentere hvordan læreplanen for Kunnskapsløftet behandler lineære ulikheter. Selve introduksjonen av ulikhetstegnet inngår i kompetansemålet som beskriver at elevene skal kunne "gjere overslag over mengder, telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar" under hovedområdet "Tal" etter 2. årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 4). En kjent visualisering av ulikhetstegnet er bruken av krokodillegap i introduksjonen av ulikhetstegnets betydning (som for eksempel i Gjerdrum, Kristiansen, & Skovdahl, 2011). I løpet av ungdomstrinnet støter elever igjen på ulikhetsbegrepet, men naturligvis på et høyere nivå enn den rene sammenlikningen mellom tall fra barnetrinnet. Lineære ulikheter står oppført i et kompetansemål under hovedområdet "Tal og Algebra" etter 10. årstrinn.

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne:

- løyse likningar og ulikskapar av første grad og enkle likningssystem med to ukjende

Videre kommer linære ulikheter inn i to kompetansemål i læreplanen for 1T på Vg1[15], under samme hovedområde.

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne:

- løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad og enkle likningar med eksponential- og logaritmefunksjonar, både med rekning og med digitale hjelpemiddel
- omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er

(Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 6-7)

Kompetansemålene viser at ulikheter har en rolle i læringen av matematikk i skolen, og i alle tilfeller blir ulikheter nevnt i samme kompetansemål som likninger. I kompetansemålet etter 10. årstrinn er det imidlertid ikke spesifisert hvordan elevene skal løse likninger og ulikheter av første grad. I kompetansemålet etter 1T er det derimot presisert at elevene skal kunne løse likninger og ulikheter av første og andre grad både ved regning og ved hjelp av digitale hjelpemidler.

Boero og Bazzini (2004) og Halmaghi (2011) beskriver at ulikheter blir undervist som et underordnet tema i forbindelse med likninger i de fleste land. Ved å studere kompetansemålene i læreplanen for Kunnskapsløftet som er gjengitt over, ser man at likninger og ulikheter er tett knyttet i norsk matematikkundervisning. Boero og Bazzini (2004) hevder at en algoritmisk tilnærming er vanlig, slik at man unngår problemer som en tilknyttet funksjonsbegrepet. Boero og Bazzini (2004) mener at denne metodiske tilnærmingen fører til en følge av prosedyrer som gjøres på rutine hos elevene, som er vanskelig for dem å forstå og fortolke.

[15]Vg1 er det første året i den videregående skole.

Halmaghi (2011) påstår at det ikke er mye diskusjon om hvilken metode som velges i løsning av lineære ulikheter i matematikkurs på videregående nivå.[16] Hun beskriver at ulikheter blir løst ved å bruke det klassiske mønsteret for algebraisk løsning av likninger, men i tillegg at divisjon eller multiplikasjon med et negativt tall resulterer i en ulikhet der ulikhetstegnet har endret retning.

Boero og Bazzini (2004) hevder at undervisningen av ulikheter ikke tar ulikheters viktige rolle i ren og anvendt matematikk i betraktning. De viser til at matematikere ofte bruker tilnærmingsmetoder som baserer seg på ulikheter i deres arbeid med likninger. Tanner (1961) slår også fast at ulikheter er standardverktøy i matematiske verkstedet. Matematikerne går derfor motsatt vei av den vanlige tilnærmingen som undervises i skolen, der ulikheter er et underordnet tema i forbindelse med likninger (Boero, Bazzini & Garuti, 2001b). Tanner (1961) henviser til hvordan matematikere bruker ulikheter som verktøy når hun bruker metaforen om at skjorteermene må brettes opp i det virkelige arbeidet, men at en likning er som en festdrakt som er fin å se på. Hun legger vekt på at matematikken som blir presentert er *fullendt matematikk*, helst som en likhet. "Modern mathematics is unthinkable without inequality and the inequality sign" (Tanner, 1961, s. 293).

3.4.1 Lineære ulikheter i elevenes undervisning og i læreverket

Denne studien baserer seg på et utvalg elevers arbeid med lineære ulikheter. Deres tidligere undervisning av temaet har derfor innvirkning på deres matematiske aktivitet. Den ene faglæreren til elevene i utvalget uttrykte at det var noen måneder siden de hadde arbeidet med lineære ulikheter i klassen. Da ble temaet tatt opp i en dobbelttime, i tillegg til at det inngikk i en repetisjonstime. Lærebokas ordbruk og oppgaver ble brukt i undervisningen, og til slutt ble grafisk løsning i GeoGebra gjennomgått. Faglærer uttrykte at løsningsmengde var et begrep de ikke hadde brukt i undervisningen.

I læreverket SINUS 1T blir temaet blir tatt opp i kapitlet "Formler, likninger og ulikheter", nærmere bestemt i delkapitlet "Ulikheter" (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2009). I starten av delkapitlet kommer forfatterne med en forklaring på hva en matematisk ulikhet er, legger frem fire de ulikhetstegnene $>$, $<$, $\geq$ og $\leq$ og forklarer at man løser ulikheter på omtrent samme måte som likninger. Regnereglene

[16] Halmaghi (2011) bruker "secondary or tertiary mathematics"

er gjengitt i en merket boks. Oldervoll et al. (2009) uttrykker at "[p]å slutten av kapittelet forklarer vi hvorfor vi må snu ulikhetstegnet når vi ganger med negative tall på begge sidene av ulikhetstegnet" (s. 83). Dette beviset tar utgangspunkt i ulikheten $x > y$ og det faktum at $x - y$ er et positivt tall, og forfatterne undersøker situasjoner med multiplikasjon av et positivt tall og et negativt tall a. Videre gis det eksempler på hvordan lineære ulikheter løses algebraisk, med påfølgende oppgaver. Boka tar også for seg oppgaver i naturlig språk der elevene må sette opp ulikhetene selv. I noen oppgaver blir det oppgitt et funksjonsuttrykk som elevene skal ta utgangspunkt i, og i andre oppgaver må elevene finne funksjonsuttrykket selv. Oppgavenes løsninger oppgis på formen $x < 2$, $x \leq 5$, $x \geq -1$ eller i naturlig språk. Grafisk løsning av ulikheter blir imidlertid ikke belyst i læreverket.

3.4.2 Dynamisk matematisk programvare

Elevene i studien hadde tilgang på den frie programvaren GeoGebra i sitt arbeid med oppgaveheftet. Hohenwarter og Preiner (2007) kaller GeoGebra for en dynamisk matematisk programvare for geometri, algebra og analyse. GeoGebra er en av flere programvarer som tjener som kraftige verkøy i undervisningen av matematikk, og som blir brukt i ulike nivåer i skolen (Hohenwarter, Hohenwarter, Kries, & Lavicza, 2008). Hohenwarter og Preiner (2007) beskriver at grunntanken med GeoGebra er å representere hvert matematiske objekt både i algebrafeltet og i grafikkfeltet. En datamaskin med programvaren GeoGebra kan ifølge Säljös (2001) beskrivelser karakteriseres som et medierende verktøy for elevene i læringen av matematikk.

3.5 Presentasjon av det matematiske potensialet i elevoppgavene

Jeg valgte å designe et oppgavehefte som delvis er basert på tidligere gitte oppgaver i flere studier om elevers arbeid med ulikheter (Ellerton & Clements, 2011; Farmaki & Verikios, 2008; Halmaghi, 2011; Tsamir & Almog, 2001). Heftet består av seks hovedoppgaver, hvorav Oppgave 2, 3 og 4 er egenproduserte oppgaver. Alle oppgavene er forankret i kompetansemålene for 1T, og oppgaveheftet i sin helhet er presentert i Vedlegg A. Her vil jeg presentere Oppgave 1, 2 og 3 som ligger til grunn for besvarelsen av forskningsspørsmålene.

Oppgave 1

Den første oppgaven i heftet er en introduksjonsoppgave hvor elevene blir bedt om å skrive ned hva de legger i begrepet *matematisk ulikhet*, og forklare hva løsningen av en ulikhet betyr. Oppgaven er gitt i Figur 3.1. Denne oppgaven ble inkludert i heftet på grunn av potensialet til å gi verdifull informasjon om elevenes syn av og tanker om ulikhetsbegrepet før selve gjennomføringen. Den gir et grunnlag for å besvare det første forskningsspørsmålet om elevenes beskrivelser av ulikheter. Denne oppgaven baserer seg på oppgaver brukt i studien til Halmaghi (2011, s. 204).

a) Skriv ned hva du legger i begrepet *matematisk ulikhet*. Du kan gjerne bruke symboler og illustrasjoner i tillegg til ord. Snakk så med hverandre i gruppa om det dere har skrevet. Er dere enige i hverandres beskrivelser?
b) Hva betyr løsningen av en ulikhet? Gi et eksempel. Snakk med hverandre i gruppa om det dere har skrevet.

Figur 3.1: Oppgave 1

Oppgave 2

Oppgave 2 i heftet består av tre deloppgaver hvor ulikhetene er gitt i et algebraisk representasjonsregister. Deloppgave 2a og 2b er gitt i Figur 3.2. I begge deloppgavene opptrer x på begge sider av ulikhetstegnet, samt at alle koeffisientene og konstantene er hele tall. Deloppgave 2a kan løses algebraisk ved å finne ekvivalente former av ulikheten som gjør at løsningsmengden kan identifiseres.

a) Avgjør for hvilke verdier for x som gjør at utsagnet er sant: $3x + 2 > x + 10$ Diskuter hvordan dere kom frem til løsningen og hvorfor dere mener løsningen er riktig.
b) Er $x \leq 5$ løsningen til $5x + 9 \leq 8x - 6$? Diskuter hvorfor/hvorfor ikke.

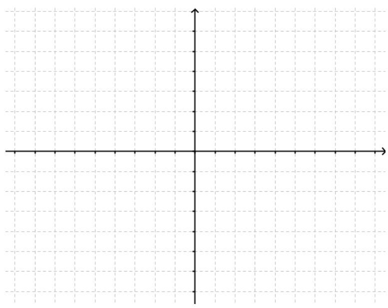
Figur 3.2: Oppgave 2

I deloppgave 2b skal elevene vurdere om den oppgitte løsningen er løsningen til den oppgitte ulikheten. Hvis ulikheten behandles algebraisk, vil koeffisienten til x bli negativ gitt en løsning med x på den venstre siden av ulikhetstegnet. Her ønsket jeg å undersøke elevenes fremgangsmåter og håndtering av oppgaven. Denne oppgaven kan fungere som et startpunkt for å undersøke elevenes forståelse av hvorfor man må snu ulikhetstegnet i visse tilfeller.

Oppgave 3

Figur 3.3 viser utformingen av Oppgave 3. Denne oppgaven ber elevene om å løse ulikheten $2x - 1 > 2 - x$ ved å bruke et oppgitt koordinatsystem uten verdier eller markeringer på aksene. Oppgaven inviterer derfor til *omdanning* fra et algebraisk representasjonsregister til et grafisk representasjonsregister (Duval, 2006). Elevenes arbeid med Oppgave 3 gir derfor et grunnlag for å besvare det andre forskningsspørsmålet som omhandler identifisering av transformasjoner av representasjoner ved grafisk løsning. De involverte representasjonene som ble beskrevet i Kapittel 3.3 vil være sentrale for analysen av elevenes løsninger av denne oppgaven.

Bruk koordinatsystemet nedenfor til å løse ulikheten $2x - 1 > 2 - x$



Figur 3.3: Oppgave 3

3.6 Tidligere forskning på læring av ulikheter

Her vil jeg presentere tidligere forskningsresultater som tar for seg elevers læring av ulikheter, og peke på hva forskere mener om undervisningens tilnærming til temaet.

Halmaghi (2011) identifiserte fem ulike kategorier av førsteårsstudenters oppfatning av ulikheter i sin doktoravhandling. De ulike kategoriene utgjorde rammeverket om elevers begrepsoppfatning av ulikheter som hun ga navnet *Conceptions of Inequalities* (COIN) og brukte i den andre delen av studien sin. De fem begrepsoppfatningene er gjengitt nedenfor:[17]

Begrepsoppfatning 0	Ulikhet som en blanding av bilder eller symboler i en matematisk setting
Begrepsoppfatning 1	Ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser
Begrepsoppfatning 2	Ulikhet som en fremmed slektning av en likning
Begrepsoppfatning 3	Ulikhet som en algebraisk prosess
Begrepsoppfatning 4	Ulikhet som et objekt

Begrepsoppfatning 0 viser til ukorrekt bruk av symboler og konvensjoner (Halmaghi, 2011). Halmaghi beskriver at famling etter symboler eller bilder er et uttrykk som beskriver besvarelsene til elever med denne begrepsoppfatningen. Hun gir også uttrykk for at elevene viste manglende tallforståelse. Den neste begrepsoppfatningen, *Ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser*, ligger nærme den formelle definisjonen av ulikhet (Halmaghi, 2011). Elevene som viste denne oppfatningen i utvalget til Halmaghi gjorde sammenlikninger ved å bruke tall, størrelser eller udefinerte objekter. Oppfatningen om at det finnes et symbol som matematisk beskriver sammenhengen der et tall er større enn et annet, er sentral. Begrepsoppfatning 2 tar for seg hvordan elever kobler ulikheter til likningsbegrepet. Hun legger frem at elevene med denne oppfatningen brukte ordet likning eller likhet i deres beskrivelse av ulikheter, og for mange av dem var en ulikhet en likning som oppførte seg annerledes. Halmaghi (2011) beskriver at definisjonen av en ulikhet som en “equation with unequal components” er et sentralt uttrykk for denne oppfatningen (s. 162).

[17] Min oversettelse av de ulike begrepsoppfatningene.

Begrepsoppfatning 3 omhandler synet på en ulikhet som en mental eller algebraisk prosess (Halmaghi, 2011). Elevene med denne oppfatningen i Halmaghis utvalg så på ulikheter som en prosess som må utføres ved hjelp av regler. Hun beskriver at elevene behersket overgangene mellom å representere en ulikhet algebraisk, som et intervall og som en grafisk representasjon. Den siste begrepsoppfatningen, *Ulikhet som et objekt*, beskrives av Halmaghi som den mest avanserte oppfatningen. Her ser elevene på en ulikhet som en mental enhet, og de behersker alle former for manipulasjon av ulikheter. I tillegg forstår disse elevene hvordan ulikheter kan skape likninger, identiteter og motsigelser (Halmaghi, 2011).

Halmaghi (2011) bemerker at de ulike oppfatningene er atskilte og at de ikke har en streng hierarkisk oppbygning. Distinksjonen mellom oppfatningene viser til ulike aspekter ved ulikheter som elevene i utvalget hennes viste. Få av elevene i utvalget til Halmaghi hadde en begrepsoppfatning som sammenfalt med begrepsoppfatning 4, og hun konkluderer med at flertallet av elevene som deltok hadde en forholdsvis svak begrepsoppfatning av ulikheter.

Pedersen og Grønmo (2010) legger frem norske elever i 3MX[18] sine prestasjoner i løsning av algebraiske ulikheter fra TIMSS Advanced 2008.[19] De observerte at elevene gjorde det bedre på problem i en virkelighetsnær kontekst enn rene matematiske problem. Ifølge Pedersen og Grønmo er elevenes evne til å løse ulikheter grafisk avhengig av hvordan problemet er presentert. Videre hentyder de om at elevene i utvalget kanskje ikke hadde en klar forståelse av hvordan ulikheter avviker fra likninger. Forfatterne viser til at metoder som observasjon og intervju av elever i deres løsning av ulikheter kan gi mer informasjon om elevers løsning. Denne studien bruker imidlertid de metodene som forfatterne etterspør.

Også flere forskere har vist at elever gjør sterke koblinger til likningsbegrepet når de løser ulikheter (Ellerton & Clements, 2011; Tsamir & Almog, 2001; Tsamir & Bazzini, 2002; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Tsamir og Almog (2001) undersøkte løsningsstrategiene til 160 israelske elever på videregående nivå. Det ble gitt én lineær ulikhet i tillegg til rasjonale ulikheter, andregradsulikheter og ulikheter med rottegn. Elevene i studien hadde hatt undervisning om ulike typer ulikheter noen måneder før deltakelsen. Tsamir og Almog observerte flere typer vanskeligheter og problem hos elevene, blant annet at de dro upassende paralleller mellom løsningsprosesser

[18] Tidligere betegnelse på det mest teoretiske matematikkurset i den videregående skole etter læreplanen Reform 94.

[19] TIMSS Advanced er et internasjonalt komparativt forskningsprosjekt om elevers prestasjoner i matematikk og fysikk i den videregående skole.

av likninger og av ulikheter. Forfatterne mener at de strukturelle likhetene mellom likninger og ulikheter gjorde at elevene fikk en intuitiv følelse av at strategiene for likningsløsning også gjelder for ulikheter. Tsamir og Bazzini (2002) undersøkte 210 israelske og 192 italienske 16-17-årige elevers algebraiske løsning. De fant blant annet ut at likninger fungerte som prototyper i elevenes algoritmiske modell for å løse ulikheter.

Forskningsprosjektet til Ellerton og Clements (2011) omhandlet lærerstudenters kunnskap om likninger og ulikheter. Deres resultater viste at studentene la for mye vekt på sammenhengen mellom likninger og ulikheter, noe som ofte førte til ukorrekt løsning av ulikhetene. Imidlertid gjorde studentene det betydelig bedre på testen etter undervisning om ulikheter. Forfatterne uttrykker at på førtesten virket de fleste av studentene å være ute av stand til å gå lenger enn ren symbolmanipulasjon.

Slike funn fant også Sfard og Linchevski (1994) der de undersøkte 280 israelske elever på videregående nivå sin løsning av likninger og ulikheter. Forfatterne var opptatt av å finne ut hvordan elever tenkte og ga mening til algebraiske begrep. De la vekt på bedømming av ekvivalente likninger og ulikheter av første og andre grad og forklaring av likninger og ulikheter med en tom løsningsmengde. Resultatene fra undersøkelsen til Sfard og Linchevski (1994) viser at flertallet av elevene så på ulikheter som meningsløse strenger av tegn som blir behandlet med veldefinerte prosedyrer. De fant ut at elever støttet seg tungt til sekundære prosesser uten å føle at de måtte begrunne prosedyrene med noe annet enn algebra i seg selv. Siden få kunne relatere sekundærprosessen til de underliggende primærprosessene, viste det seg at elevene ikke maktet å koble de algebraiske reglene til aritmetiske lover.

3.6.1 Funksjonstilnærming og grafisk representasjon

I studien til Farmaki og Verikios (2008) ble 13-14-årige greske elevers løsning av ulikheter undersøkt. Det ble fokusert på å bruke en tilnærming til algebra som var basert på representasjoner av funksjoner. På denne måten ønsket de å finne ut om og hvordan en slik tilnærming kan hjelpe elever til å forstå ulikheter og til å kunne løse problemer som er relatert til ulikhetsbegrepet. Forfatterne kritiserer ensformig løsning med algebraisk manipulasjon, og ønsket å utruste elevene med flere løsningsstrategier. Forskningen viste at multiple representasjoner i en problemløsningskontekst hjalp elevene til å utvikle en dypere forståelse av de grunnleggende begrepene som variabel, funksjon, likning og ulikhet. Elevene ble derfor i bedre stand til å assosiere begrepene med hverandre og bruke representasjoner av funksjoner som strategier for å løse problemer med lineære ulikheter (Farmaki & Verikios, 2008). De hevder at bruk av symbolrepresentasjoner av ulikheter skaper hindringer for den begynnende forståelsen. Farmaki og Verikios (2008) foreslår at den beste måten er å gå motsatt vei av den tradisjonelle undervisningen av ulikheter, og mener at en symbolrepresentasjon må være det siste nivået i tilnærmingen av begrepet. Kieran (2004) viser også til den positive rollen som grafisk representasjon kan ha for å i mening til algebraiske ulikheter.

For Tsamir og Almog (2001) viste det seg at algebraisk manipulasjon var den mest brukte løsningsstrategien hos elevene når de løste den lineære ulikheten $-8x > 0$. Det settes spørsmålstegn ved at ingen av elevene løste denne ulikheten grafisk, siden grafen til en lineær funksjon var den typen elevene var mest fortrolig med. Tsamir og Almog beskriver også at rundt 20 % av elevene som løste ulikheten ved algebraisk manipulasjon ikke kom frem til riktig svar. Som en konsekvens foreslår de å fokusere på lineære grafer når disse elevene skal løse lineære ulikheter. De mener også at en grafisk tilnærming kan gi elevene visuelle bilder av løsningen slik at de lettere kan tolke resultatene.

Ellerton og Clements (2011) mener imidlertid at elever bør lære hva som menes med å løse likninger og ulikheter før de blir presentert for den formelle definisjonen av funksjonsbegrepet. De argumenterer med at for tidlig tilnærming til funksjoner kan føre til forvirring rundt det faktum at likninger som har samme løsningsmengde har ulike grafiske representasjoner.

Sackur (2004) problematiserer bruk av grafisk tilnærming og gjør leserne oppmerksomme på hvilke overganger mellom representasjoner som elevene må gjøre i grafisk løsning av ulikheter, som beskrevet i Kapittel 3.3. Hun konkluderer med at bruken av grafer fremkaller nye vanskeligheter for elevene, og at man ikke må ta for gitt at elevene lærer det samme ved grafisk løsning som ved algebraisk løsning. Sackur (2004) påpeker at man må se på kunnskapen som ligger til grunn for de to tilnærmingene og se hva de lærer ved algebraisk og grafisk løsning i stedet for å stille spørsmålet om hvordan elever skal lære å løse ulikheter.

Forskningsprosjektene som ble presentert tar opp ulike momenter som er relevant for denne studien, blant annet elevers begrepsoppfatning og hvordan elever gjør koblinger med likningsbegrepet i sin løsning. Resultater fra grafisk løsning og forskernes meninger om funksjonstilnærming til ulikhetsbegrepet er av betydning for resultatene i min undersøkelse. Funnene til Sfard og Linchevski (1994) sier noe om hvordan elever støtter seg til sekundærprosesser i sin løsning og er derfor relevante funn i forhold til elevers forståelse av multiplikasjon av en ulikhet med negative tall.

Kapittel 4

Metodologi

I dette kapitlet vil jeg presentere studiens metodologi. Bogdan og Biklen (2003) beskriver metodologi som en betegnelse på den logiske grunnlaget og det teoretiske perspektivet som ligger til grunn for et forskningsprosjekt. Først vil jeg plassere studien innenfor det forskningsparadigmet som er karakteristisk for en undersøkelse av denne typen, og deretter beskrive studiens forskningsdesign. Videre vil jeg redegjøre for metodene jeg har brukt i innsamlingen av datamaterialet, før studiens utvalg blir presentert og begrunnet. Selve gjennomføringen blir nærmere beskrevet i Kapittel 4.4. Deretter retter jeg fokus mot de etiske betraktningene i forbindelse med studien, og studiens validitet og reliabilitet blir diskutert mot slutten av kapitlet. I den siste delen legger jeg frem hvordan jeg har behandlet og analysert datamaterialet.

4.1 Posisjonering og forskningsdesign

Denne studien føyer seg inn under det subjektivistiske forskningsparadigmet (Cohen et al., 2007). Forskere med en subjektivistisk tilnærming baserer seg på tanken om at virkeligheten konstrueres av individene (Cohen et al., 2007). Robson (2002) uttrykker at forskere med et konstruksjonistisk[20] syn på virkeligheten ønsker å forstå de ulike sosialt konstruerte oppfatningene av kunnskap og mening. Det subjektivistiske paradigmet har et relativistisk syn på kunnskap; dets natur, hvordan kunnskapen kan tilegnes og hvordan kommunikasjon av kunnskap skjer mellom mennesker (Cohen et al., 2007). Formålet med denne studien var å undersøke nærmere hvordan et lite utvalg elever oppfatter og arbeider med lineære ulikheter, og derfor ble

[20] Jeg oversetter *constructivism* til *konstruksjonisme*, slik at begrepet ikke skal forveksles med et konstruktivistisk læringssyn.

en subjektivistisk tilnærming naturlig. Studiens fleksible forskningsdesign preges følgelig av denne tilnærmingen (Robson, 2002). En studies design kan beskrives som den overordnede planen for forskningen der strategi, teoretisk rammeverk, hvem eller hva som skal studeres og hvilke redskaper som blir brukt i datainnsamling og analyse, inngår (Punch, 2005). Punch (2005) uttrykker at et slikt design tar i bruk metoder som gir kvalitative data, ofte på ordform. Detaljene i et slikt design er ikke fastsatt på forhånd, men designet utvikles gjennom forskningsprosessen (Robson, 2002). Ved å bruke kvalitative metoder får forskere muligheten til å få et rikere og mer sammensatt bilde av fenomen enn ved å bruke kvantitative metoder (Mertens, 2009). Gibbs (2007) forklarer at kvalitativ forskning ønsker å beskrive, forstå og noen ganger også forklare de sosiale fenomenene som forskningen retter søkelyset mot. Det er mulig å gjøre dette ved blant annet å analysere individers opplevelser, og å analysere kommunikasjon og interaksjon mellom individer (Gibbs, 2007). Den subjektivistiske tilnærmingen innebærer derfor at det er mine fortolkninger som danner utgangspunkt for forståelsen. Et fellestrekk for kvalitative tilnærminger er at de ønsker å gå i dybden av hvordan mennesker konstruerer verden rundt dem og hva som skjer med dem (Gibbs, 2007). Siden formålet mitt var å få et dypere innblikk i elevenes arbeid med lineære ulikheter og observere samhandlingen og kommunikasjonen mellom dem, var dette designet best egnet for denne studien.

4.2 Metoder for datainnsamling

Metoder henviser til studiens tekniske aspekter som innebærer de spesifikke teknikkene som blir brukt for datainnsamlingen (Bogdan & Biklen, 2003). Formålet med denne studien var å undersøke 1T-elevers beskrivelser og løsninger av lineære ulikheter, og jeg valgte derfor å designe et sett med oppgaver som et forholdsvis lite utvalg elever skulle arbeide med gruppevis. Jeg ønsket også å undersøke elevenes kommunikasjon og ordbruk i deres arbeid. Derfor ble det naturlig å velge observasjon med videoopptak som hovedmetode. I tillegg ønsket jeg å gjennomføre korte, individuelle intervjuer med elevene i etterkant av arbeidet. Robson (2002) legger frem at forskere med et konstruksjonistisk syn bruker metoder som intervju og observasjon som gir dem mulighet til å studere fenomen fra flere synsvinkler.

4.2.1 Observasjon av elevarbeid

Observasjon er en metode som har lange tradisjoner i kvalitativ forskning (Flick, 2006; Punch, 2005). Robson (2002) uttrykker at det å studere hva mennesker gjør er en naturlig metode for å undersøke menneskers adferd. Ved å observere kan forskeren se hva som skjer i øyeblikket, og slipper på denne måten å være avhengig av andres redegjørelser (Cohen et al., 2007). Jeg overveide å ikke være tilstede på grupperommet under elevenes arbeid med oppgavene, slik at videokameraet ville bli den eneste midlet for registreringen av elevenes aktivitet. Dette hadde kanskje gjort at elevene ville følt seg mindre overvåket. Ulempene var at elevene ikke hadde hatt mulighet til å spørre meg om uklarheter rundt oppgavene, jeg kunne ikke ha stilt spørsmål til dem, og kameraets plassering ville ikke kunne endres i løpet av elevarbeidet. Derfor valgte jeg å være tilstede og ha mulighet til å kommunisere med elevene og flytte kameraet hvis det var nødvendig. Ifølge Cohen et al. (2007) er dette en åpen og direkte observasjon, i og med at jeg var tilstede i rommet og ikke bare filmet elevarbeidet. Jeg vil definere min rolle som en mellomting mellom en deltakende og passiv observatør (Cohen et al., 2007), for jeg stilte noen spørsmål til elevene der det var naturlig. I tillegg henvendte elevene seg til meg hvis det var spørsmål omkring oppgavene. Med andre ord hadde jeg ikke en aktiv rolle som lærer og underviser. Studiens validitet i forhold til min tilstedeværelse er diskutert i delkapittel 4.6.

Det er viktig å ha et system som fanger opp informasjonen på en oppriktig måte, og samler informasjonen så fullstendig som mulig (Robson, 2002). Cohen et al. (2007) påpeker at bruk av lyd- og bildeopptak er et kraftfullt redskap, siden observasjoner både omfatter verbale og visuelle data. Jeg valgte derfor å bruke et videokamera under observasjonen. Dette gjorde det mulig å fange opp elevenes kroppsspråk og bevegelser i tillegg til lyd. På denne måten får man et fullstendig bilde av en situasjon, slik at en er mindre avhengig av forskerens beskrivelser og forståelser av hendelser i øyeblikket (Cohen et al., 2007). Filminnspillingene resulterte i innholdsrike opptak som gjenspeilet situasjonene på en nøyaktig måte.

4.2.2 Intervju

Jeg ønsket også å gjennomføre intervju med elevene i tillegg til observasjon av deres arbeid. Dette gjorde at jeg blant annet kunne få mer informasjon om hvilke tanker elevene hadde rundt ulike aspekter ved ulikheter, spørre dem nærmere om fremgangsmåter av spesifikke oppgaver samt høre hvilke ord de brukte i sine forklaringer. Robson (2002) viser til at intervjuprosessen i en gruppe må håndteres på en god måte hvis man skal unngå dominering og at enkelte ikke får kommet fram med sine synspunkter. Jeg ønsket derfor separate intervju med hver enkelt, slik at alle fikk sagt sitt uten å bli overkjørt av andre.

Bogdan og Biklen (2003) ytrer at intervju blir brukt for å samle beskrivende data i form av intervjuobjektets egne ord. På denne måten kan intervjueren få innsikt i intervjuobjektets tolkninger av enkelte fenomener (Bogdan & Biklen, 2003). Robson (2002) bemerker at intervju gir muligheter for å følge opp svar og undersøke underliggende motiver som spørreundersøkelser ikke kan. Av slike grunner har intervju potensial til å gi et rikt og opplysende datamateriale (Robson, 2002). For å utnytte dette potensialet, ønsket jeg at elevene skulle føle seg komfortabel med situasjonen slik at det ikke ble oppfattet som en utspørring eller en slags eksaminasjon. Derfor har intervjuene blitt lagt opp til å være en samtale mellom to parter som har tillit til hverandre, i stedet for et formelt møte med spørsmål og svar mellom intervjuer og intervjuobjekt (Bogdan & Biklen, 2003).

Intervjuene jeg gjennomførte med elevene vil jeg klassifisere som semi-strukturerte intervju, ifølge Robsons (2002) kategorisering. Han redegjør for at slike intervju generelt har spørsmål som er bestemt på forhånd, men intervjueren kan tillegge seg større frihet når det gjelder spørsmålenes rekkefølge og formulering. I tillegg uttrykker han at intervjueren kan legge til eller ta bort spørsmål som ikke er relevante for intervjuobjektet. Jeg hadde noen spørsmål jeg ville stille alle elevene, men også noen individuelle spørsmål. Derfor tok jeg utgangspunkt i en intervjuguide og la til spørsmål tilpasset hver enkelt person. Den generelle intervjuguiden er gitt i Vedlegg B.

Intervjuene startet som regel med et spørsmål om hvordan vinterferien hadde vært, eller et annet utenom-faglig spørsmål. Jeg ønsket en myk start for å få praten i gang og for å ufarliggjøre situasjonen. Deretter fortalte jeg litt om oppbygningen av samtalen. De første spørsmålene jeg stilte angikk deres forhold til matematikkfaget. For å komme inn på studiens tema, spurte jeg om de kunne huske første gang de ble introdusert for ulikhetstegnet. Oppfølgingsspørsmål ble gitt dersom det var naturlig. Robson (2002) påpeker at intervjuerens adferd har innvirkning på intervjuobjektenes villighet til å åpne seg og snakke fritt. Derfor fokuserte jeg på å være blid, interessert og lyttende, og viste dette ved blant annet nikking og ansiktsuttrykk. Jeg brukte lydbåndopptaker til å ta opp hver samtale. Dette gjorde at jeg kunne konsentrere meg om selve intervjuet, i visshet om at at innspillingene er permanente og kan lyttes til og transkriberes i etterkant (Robson, 2002).

4.3 Utvalg

Utvalget i denne studien består av åtte elever på Vg1 som tar faget matematikk 1T på en norsk videregående skole. Studiens tema gjorde at det ble naturlig for meg å undersøke elever i den videregående skole. Ønsket var elever som har erfaringer med lineære ulikheter, men som ikke tar matematikk på et høyt nivå. I den gjeldende læreplanen står det at elever etter 10. årstrinn skal kunne løse ulikheter av første grad (Utdanningsdirektoratet, 2006). Imidlertid kan det være ulike praksiser på når dette er et tema hos de forskjellige ungdomsskolene. Valget falt da på elever som tar faget matematikk 1T, fordi lineære ulikheter er også beskrevet i to av fagets kompetansemål i læreplanen for Kunnskapsløftet, som vist i Kapittel 3.4. Jeg tok selv kontakt med en videregående skole som jeg ikke hadde et forhold til fra før av, med ønske om å få tilgang til 6-8 elever fra 1T. Her var det to faglærere som var villige til å engasjere seg i undersøkelsen. Elevene i utvalget kommer derfor fra to forskjellige 1T-grupper. Selve utvelgelsen av elevene skjedde ved at faglærerne informerte kort om prosjektet i sine grupper, og de elevene som ønsket å delta ble plukket ut. Derfor ble hverken faglig nivå eller kjønn tatt i betraktning. Faglærerne formidlet imidlertid at elevene i de to gruppene generelt sett holdt et bra faglig nivå. Jeg vil karakterisere utvalget som en type av et *formålsbestemt utvalg*[21] ut ifra definisjonen til Cohen et al. (2007). De beskriver at et slikt utvalg er vanlig i kvalitative studier, fordi forskerne velger individene i utvalget ut ifra om de innehar de nødvendige egenskapene som kreves for undersøkelsen.

I denne studien ønsket jeg å undersøke elever som tok faget matematikk 1T. Den totale samlingen av elever utgjør hele populasjonen. Cohen et al. (2007) fastslår imidlertid at et slikt utvalg ikke utgir seg for å representere hele populasjonen, men at det er et bevisst selektivt utvalg som tilfredsstiller forskerens krav. I dette tilfellet var kravet kun at de tok faget 1T. Det er sju gutter og ei jente som utgjør utvalget, og alle har pseudonymer som gjenspeiler kjønnet. Dette har jeg valgt å gjøre selv om denne studien ikke undersøker kjønnsforskjeller, men fordi jeg mener fremstillingen blir mer virkelighetsnær. For å kunne observere elevenes samhandling

[21]Min oversettelse av *purposive sampling*.

og kommunikasjon i arbeidet, ble utvalget delt inn i tre grupper der elevene i de enkelte gruppene kom fra samme 1T-gruppe. Elevene fikk mulighet til å velge sine egne fiktive navn i starten av elevarbeidet. Tre av elevene valgte navn selv, mens de andre ønsket at jeg skulle gi dem pseudonymer i etterkant. Medlemmene i Gruppe 1 fikk navnene Kristian, Atle og Silje. Gruppe 2 valgte sine pseudonymer til å være Lasse, Vemund og Per Ivar, mens elevene i Gruppe 3 kalte jeg for Emil og Jonas. Jeg ønsket et antall på 6-8 elever for å ha mange nok til å undersøke en eventuell diversitet i deres fremgangsmåter. Grunnen til at jeg ikke valgte å ha et større utvalg, er at jeg ville sikre at analysearbeidet kunne gjennomføres innenfor tidsrammen som var satt for denne studien.

I forkant av gjennomføringen utførte jeg en test av oppgaveheftet jeg hadde utformet. Formålet med denne testen var å prøve ut oppgavene på elever i samme målgruppe, se på omfanget av oppgavene og hvordan de ble mottatt. På denne måten hadde jeg mulighet til å gjøre eventuelle endringer på oppgavene og formuleringene før selve gjennomføringen. Jeg tok kontakt med en gruppe som gir matematikkhjelp til elever etter skoletid og fikk tilgang på fem 1T-elever fra ulike videregående skoler.[22] Elevene fikk utdelt oppgaveheftet med et kommentarark hvor de skulle svare på to spørsmål om oppgavene og skrive andre kommentarer hvis de hadde det. Samtaler med dem og de leverte, anonyme besvarelsene gav meg nyttig informasjon, og jeg gjorde noen endringer på oppgavene i heftet. Elevene i testutvalget fikk lite respons av meg på oppgavene de gjorde, men i etterkant av testen diskuterte elevene den siste oppgaven, Oppgave 6, med veilederen for gruppa. Denne oppgaven omhandler lineære ulikheter som har tom løsningsmengde eller som består av alle reelle tall. Oppgave 6 har imidlertid ikke vært i fokus i denne studien.[23]

I løpet av datainnsamlingen kom det frem at en av elevene, Jonas, også hadde vært med i testutvalget. Likevel ble undersøkelsen gjort som avtalt, også fordi at han var på gruppe med kun én annen elev. Det må nevnes at Jonas arbeidet selvstendig i stor grad under begge gjennomføringene, og gjorde de fleste oppgavene på samme måte begge gangene.

[22]Dette er et frivillig motivasjonsprogram for elever på 10. trinn og i den videregående skole. Jeg visste ikke noe om det faglige nivået til 1T-elevene som jeg fikk tilgang på, men jeg visste at tilbudet var for elever på alle faglige nivåer

[23]Oppgavene som ligger til grunn for besvarelsen av forskningsspørsmålene ble presentert i Kapittel 3.5.

4.4 Gjennomføring

Datainnsamlingen foregikk over to dager. Den ene dagen observerte jeg og tok videoopptak av elevene mens de arbeidet med oppgavene på et grupperom. Elevarbeidet hadde en varighet på omtrent 1 time, der cirka 10 minutter var satt av til informasjon om gjennomføringen i forkant. Den første siden av oppgaveheftet inneholdt litt praktisk informasjon rundt undersøkelsen. I tillegg til å gå gjennom informasjonen med hver gruppe, påpekte jeg at det ikke hadde til hensikt å evaluere om det de gjorde var riktig eller feil, men at jeg ønsket å fokusere på hva de tenkte og sa under arbeidet. Jeg fortalte også litt om hva jeg skulle gjøre med opptakene hvordan jeg skulle analysere dem. Som nevnt tidligere, fikk elevene mulighet til å velge sine egne pseudonymer slik at anonymiteten ble bevart. Siden jeg blant annet fokuserer på elevenes elevenes grafiske tilnærming i denne studien, sa jeg til deltakerne at matematikk kan fremstilles på flere måter, og at jeg ønsket at de snakket litt sammen om hvorfor de valgte å løse oppgavene på den måten de gjorde. Videre uttrykte jeg at det var viktig for meg å finne ut noe om hvilke ord de velger å bruke, hvordan de peker og eventuelt bruker GeoGebra. Jeg sa også at elevene ikke trengte å skyndte seg, men at det beste var å gjøre noen oppgaver grundig. Til Gruppe 1 og 2 forklarte jeg at jeg helst ville si minst mulig under gjennomføringen, men at jeg var tilgjengelig for spørsmål eller kunne stille spørsmål til elevene hvis jeg følte det trengtes. Jeg fikk ikke avklart rollen min like tydelig til Gruppe 3. Dette kan ha vært grunnen til at de henvendte seg mer til meg når de kom med sine forklaringer enn det de andre elevene gjorde, i tillegg til at de bare var to personer i gruppa.

Jeg valgte å utføre elevarbeidet på et grupperom først og fremst av praktiske grunner. Her kunne jeg filme og fange opp elevenes samtale på en grei måte uten at de ble forstyrret av andre. Hvis jeg skulle gjennomført undersøkelsen i klasserommet, ville det ikke latt seg gjøre like effektivt. Siden jeg ønsket å filme en gruppes arbeid med oppgaveheftet i sin helhet, ville en klasseromskontekst ført til involvering av flere elever i ulike klasser over flere skoletimer. Av tidsmessige og praktiske grunner ville dette blitt vanskeligere å gjennomføre.

Under arbeidet satt elevene i enden av et ovalt bord, med ansiktene mot hverandre. Selve videokameraet stod for det meste på et stativ i den andre enden av bordet. Unntaket var hvis elevene brukte GeoGebra i sin løsning. For det meste av denne tiden holdt jeg kameraet i hånden og filmet det som foregikk på skjermen.

På den andre innsamlingsdagen gjennomførte jeg intervjuene med hver enkelt, med en varighet på cirka 15-20 minutter. På grunn av vinterferiens avvikling og andre praktiske grunner var det 13 dager mellom elevarbeidet og intervjuene. Dette gjorde imidlertid at jeg fikk transkribert og sett på de skriftlige besvarelsene før intervjuene, noe jeg ser på som en styrke. Da kunne jeg stille spørsmål til hver enkelt om deres besvarelser eller enkelte utsagn.

4.5 Etiske betraktninger

Cohen et al. (2007) legger vekt på viktigheten av at forskere viser etisk oppførsel overfor deltakerne i studien. Dette innebærer blant annet at forskere tar innover seg ansvaret de har for deltakerne, og handler slik at deltakernes verdighet blir bevart (Cohen et al., 2007). I forkant av undersøkelsen ble informert samtykke innhentet fra elevene i utvalget. Samtykkeskjemaet er presentert i Vedlegg C. Siden elevene er under myndighetsalder, var det nødvendig at de foresatte ga sin godkjenning til at barnet deres kunne delta i undersøkelsen. Samtykkeskjemaet inneholdt en forespørsel om tillatelse til video- og lydopptak av elevarbeidet, med en forutsetning om å følge gjeldende retningslinjer for personvern (NESH, 2006). Elevene og de foresatte ble også informert om elevenes mulighet til å trekke seg til enhver tid. Det ble vektlagt at de involverte og skolens navn ble anonymisert, slik at det ikke skal være mulig å spore enkeltpersoner. Cohen et al. (2007) viser til at å gi deltakerne pseudonym er en måte å oppnå anonymitet. Som nevnt i Kapittel 4.3 ble elevenes navn derfor skiftet ut med fiktive navn.

Siden denne studien innebar behandling og lagring av video- og lydopptak av personer, var prosjektet mitt meldepliktig til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), Personvernombudet for forskning (NSD, 2012). Ved å ha meldt fra og fått godkjent denne undersøkelsen, er den vurdert som et gyldig prosjekt i forhold til bestemmelsene i personopplysningsloven, med prosjektnummer 29499.

4.6 Validitet

Det er vanlig å bruke begrepet validitet for å undersøke gyldigheten til en studie (Robson, 2002). Med kvalitative data i fokus vil validiteten rette seg mot blant annet ærligheten, dybden og omfanget av det innsamlede datamaterialet, omfanget av datatriangulering og forskerens habilitet (Winter, 2000, som sitert i Cohen et al., 2007). Jeg har valgt å dele inn i to kategorier; indre og ytre validitet. Cohen et al. (2007) påpeker at denne inndelingen kan bli gjort både i kvantitativ og i kvalitativ forskning.

4.6.1 Indre validitet

Cohen et al. (2007) uttrykker at den indre validiteten forsøker å vise at forklaringer av en hendelse faktisk er understøttet av datamaterialet. De påpeker at funnene må kunne beskrive fenomenet som blir studert på en nøyaktig måte. Lyd- eller videoopptak under datainnsamlingen er derfor med på å styrke studiens indre validitet (Cohen et al., 2007). Det å kunne være i stand til å spore opp ruten som fører til en tolkning, beskriver Robson (2002) som *audit trail*. Det å kunne begrunne stegene som ble tatt er med å styrke en studies validitet (Robson, 2002). For at jeg skulle ha en full oversikt over alle aktivitetene som ble gjort i studien, foretok jeg en sikker lagring av video- og lydopptakene og transkripsjonene. Videre skrev jeg en forskningsdagbok der jeg noterte forløpet i arbeidet med studien.

Andre trusler mot studiens validitet kan være *reaktivitet*[24], *deltaker-bias*[25] og *forsker-bias* (Lincoln & Guba, 1985, som sitert i Robson, 2002). Reaktivitet går ut på at studien i seg selv påvirker det som skal studeres og henviser til måten forskerens nærvær kan forstyrre settingen som former fokuset for studien (Robson, 2002). Den såkalte "Heisenberg-effekten" går ut på at adferden til personene som er involvert i studien endres (Bogdan & Biklen, 2003). Dette er et deltaker-bias som kan føre til at deltakeren holder tilbake informasjon, gir svar eller inntrykk han eller hun tror forskeren vil høre eller se (Robson, 2002). Det presiseres av Bogdan og Biklen (2003) at hvis man behandler personene som forskningsobjekter, vil de også opptre og handle som forskningsobjekter, som er annerledes enn hvordan de ellers ville ha opptrådt. Siden elevene i utvalget mitt gjennomfører opplegget på et grupperom med meg tilstede, er mulighetene for Heisenberg-effekten tilstede. Jeg ønsket ikke at min tilstedeværelse skulle påvirke elevene i noen grad og ønsket derfor å bruke litt tid på å småprate med elevene og snakke om undersøkelsen før selve gjennomføringen.

Robson (2002) forklarer at forsker-bias innebærer at forskeren tar med seg sine

[24] Min oversettelse av *reactivity*

[25] Min oversettelse av *respondent-bias*. Jeg velger å bruke ordet *deltaker* i denne sammenhengen, da jeg mener det er mer passende i denne studien. Det engelske ordet *bias* er beholdt.

forutfattet meninger og antakelser gjennom hele forskningsprosessen. Han utdyper at dette kan påvirke måten de oppfører seg på, hvordan spørsmål blir stilt, hvilke personer som deltar, hvilke data som skal trekkes frem og hvordan analysen blir gjort. Hvordan jeg oppførte meg foran elevene og hvordan jeg stilte spørsmål har derfor mye å si for validiteten til studien. Utvalget for studien påvirker også studiens validitet. Punch (2005) bemerker at utvalget må passe inn med de andre elementene i studien, spesielt formålet og studiens forskningsspørsmål. Dette har jeg argumentert for i delkapittel 4.3. Bogdan og Biklen (2003) legger til at det er umulig for forskere å utelukke alle effektene de kan ha på deltakerne.

I Kapittel 3 trekker jeg frem ulikhet som ordningsrelasjon, bokstavsymbolets roller og grafisk tilnærming, og presentasjonen av elevoppgavene viser min forståelse av det matematiske potensialet som ligger i oppgavene. Dette er med andre ord redegjørelser som legger grunnlag for analysen i Kapittel 4, og vil bidra til at andre får en bedre forståelse av hvorfor jeg kommer til de slutningene som jeg gjør.

Datatriangulering kan bidra til å styrke validiteten til studien. Dette innebærer bruk av flere metoder for å samle inn data. I denne studien er observasjon, intervju og elevbesvarelser tre ulike kilder som danner datagrunnlaget (Robson, 2002). Transkripsjonene forsøker å gjengi interaksjonen mellom deltakerene så objektivt som mulig. Jeg har valgt å skrive transkripsjonene på bokmål, og mener at dette ikke svekker den indre validiteten siden innholdet ikke endres av dette.

4.6.2 Ytre validitet

Cohen et al. (2007) beskriver at en studies ytre validitet går ut på om resultatene kan generaliseres og vil gjelde for hele populasjonen, andre tilfeller eller situasjoner. McGrath (1982, som sitert i Firestone, 1993) slår fast at generaliserbarhet ikke er styrken til kvalitativ forskning. Firestone (1993) skiller mellom tre ulike typer generalisering; *ekstrapolasjon fra utvalg til populasjon*, *analytisk generalisering* og *case-til-case overføring*.[26] Den første typen, ekstrapolasjon fra utvalg til populasjon, er avhengig av utvalget og baserer seg på sannsynlighetsteori (Firestone, 1993). Analytisk generalisering er ikke avhengig av utvalg og populasjon, men ønsker å generalisere resultatene til en generell teori (Yin, 1989, som sitert i Firestone, 1993). Firestone beskriver at en slik generalisering ofte tar i bruk teorien for å gjøre

[26]Min oversettelse av henholdsvis "sample-to-population extrapolation", "analytic generalization" og "case-to-case transfer".

antakelser, for så å bekrefte disse antakelsene. Denne studiens generaliserbarhet kan beskrives av Firestones siste type, case-til-case overføring. Firestone informerer at denne typen generalisering blir oftest forbundet med kvalitative metoder. Han uttrykker at det er leseren som må vurdere om funnene er overførbare fra en situasjon til en annen. Derfor har forskeren en forpliktelse til å gi rike beskrivelser av situasjonen (Firestone, 1993). I mitt tilfelle er det derfor viktig at jeg gir en grundig, klar og detaljert beskrivelse slik at leserne kan bestemme i hvilken grad funnene kan overføres til andre situasjoner og sammenhenger (Shoefield, 1990, som sitert i Cohen et al., 2007).

4.7 Reliabilitet

Reliabilitet er et begrep som tar for seg kvalitetskontrollen av en studie, som omhandler studiens stringens og pålitelighet (Robson, 2002). Kvalitative forskere ser på reliabilitet som sammenlikningen mellom hva de registrerer som data og hva som faktisk skjer i settingen som blir studert (Bogdan & Biklen, 2003). I min studie går dette ut på om jeg som forsker er grundig, varsom og ærlig gjennom hele forskningsprosessen, og at jeg kan vise at jeg har vært det (Robson, 2002). Studiens reliabilitet blir derfor styrket jo mer detaljert den helhetlige prosessen blir dokumentert (Flick, 2006). Dette skjer ved at jeg holder alle kort åpne når det gjelder transkripsjoner og analyseverktøy, og bruker sekvenser fra både transkripsjonene fra elevarbeidet og intervjuene for å underbygge analysefunnene. Det påvirker også reliabiliteten hvorvidt skillet mellom hva som er deltakerens redegjørelse og hvor forskerens tolkning starter kommer frem i analysen (Flick, 2006). Valg av teori for besvarelsen av forskningsspørsmålet har også mye å si for studiens reliabilitet. For å besvare det første forskningsspørsmålet om ulikhetsbegrepet, benytter jeg et rammeverk som Halmaghi (2011) utviklet om begrepsoppfatning av ulikheter. Jeg bruker blant annet Duvals (2006) teori om matematiske representasjoner i forbindelse med forskningsspørsmålet om grafisk løsning, og mener denne teorien passer godt til å beskrive og tolke elevenes arbeid med grafisk løsning av lineære ulikheter. Studiens tredje forskningsspørsmål omfatter forståelse av multiplikasjon eller divisjon av en ulikhet med negative tall. Her mener jeg Hiebert og Lefevres (1986) beskrivelser av prosedyrekunnskap og begrepskunnskap og Skemps (1976) klassifisering av instrumentell og relasjonell forståelse er godt egnet til å belyse dette forskningsspørsmålet, fordi det er forståelsen av et fenomen tilknyttet algebraisk løsning av en ulikhet som skal analyseres.

4.8 Analyse av datamaterialet

I denne delen vil jeg legge frem hvordan jeg har gjort de første behandlingene av datamaterialet, hvordan jeg har gått til verks i analysen og hva slags analyseverktøy jeg har benyttet meg av.

Både videoopptakene fra elevarbeidet og lydopptakene fra intervjuene ble transkribert rett etter gjennomføringen. I tillegg til en presentasjon av det som blir uttrykt verbalt, inneholder transkripsjonen av elevarbeidet beskrivelser av elevenes bevegelser og måten de uttaler seg på. Jeg har imidlertid ikke tatt høyde for dialekter, og har derfor skrevet transkripsjonene på normert bokmål. Dette valgte jeg å gjøre fordi det matematiske innholdet ikke vil gå tapt av den grunn. Jeg tror også at transkripsjonstekst på bokmål er lettere å lese enn tekst på dialekt, i tillegg til at oppmerksomheten ikke blir tatt bort fra innholdet. Transkripsjonskodene jeg har brukt presenteres i Vedlegg D. I presentasjonen av samtaleutdrag fra elevarbeidet og intervjuene vil utsagnene beholde det nummeret de har i transkripsjonsteksten. Dette har jeg valgt å gjøre fordi det kan ligge informasjon i hvor mange ytringer som har blitt sagt tidligere.

Etter at alle transkripsjonene var ferdigstilte, ønsket jeg å få et overblikk over hva som skjer i elevenes arbeid. Gibbs (2007) foreslår å gjøre en intensiv lesing av transkripjsjonene når man skal starte med analysearbeidet. Inspirert av Charmaz (2003, som sitert i Gibbs, 2007, s. 41) leste jeg transkripsjonene med utgangspunkt i disse spørsmålene: "Hva skjer her? Hva gjør de og hva sier de? Hva tar disse handlingene og utsagnene for gitt?"[27]. Svarene på disse spørsmålene ble spesielt relevant for det andre forskningsspørsmålet mitt som fokuserer på grafisk løsning av ulikheter. De endelige forskningsspørsmålene blir repetert nedenfor.

1. Hvilke typer beskrivelser har 1T-elever av ulikhetsbegrepet og av en ulikhets løsning?
2. Hvilke transformasjoner av semiotiske representasjoner kan identifiseres i 1T-elevers grafiske løsning av lineære ulikheter?
3. Hvordan kan 1T-elevers forståelse av multiplikasjon eller divisjon av en ulikhet med negative tall karakteriseres?

[27] Min oversettelse av spørsmålene.

Selv om ikke formuleringen av forskningsspørsmålene var helt klare i perioden etter datainnsamlingen, hadde jeg noen foreløpige spørsmål som jeg tok utgangspunkt i. Jeg startet med å undersøke elevenes fremgangsmåter til Oppgave 1-4 i heftet, og laget en tabelloversikt hvor jeg gjenkjente likheter og forskjeller og sammenliknet strategiene. Til dette brukte jeg ulike fargetusj og markerte stegene i elevenes fremgangsmåter. I forbindelse med Oppgave 3, grafisk løsning av ulikheten $2x - 1 > 2 - x$, var *bruk av tabell*, *bruk av stigningstall og skjæringspunkt på y-aksen*, og *bruk av GeoGebra* noen av forklaringene av fargekodene til Oppgave 3. Videre bestemte jeg meg for å fokusere på elevenes grafisk løsning av lineære ulikheter, og det ble naturlig å ta utgangspunkt i denne oppgaven. I analysen er Duvals (2006) teori om semiotiske representasjonsregister brukt som analyseverktøy. Med utgangspunkt i Duvals teori, brukes Sackurs (2004) beskrivelse av hvilke overganger mellom representasjonsregistre som må gjøres i skiftet fra algebraisk til grafisk representasjon av lineære ulikheter til å identifisere og beskrive elevenes overganger. Her har jeg også brukt Fischbeins (1994) teori om den algoritmiske, intuitive og formelle komponenten som inngår i matematisk aktivitet for å undersøke om noen komponenter er mer eller mindre deltakende i elevenes aktivitet. Steinbrings (2006) teori om tegn ble naturlig å bruke for å undersøke sammenhengen mellom referansekontekst og tegn i forbindelse med elevenes meningsskaping til en representasjon gitt av den dynamiske matematiske programvaren GeoGebra.

I forbindelse med det første forskningsspørsmålet har jeg tatt utgangspunkt i Halmaghis (2011) kategorier om begrepsoppfatning av ulikheter som ble presentert i Kapittel 3.6. Disse gjentas nedenfor for kontinuitetens skyld. Jeg analyserte elevenes skriftlige besvarelser og undersøkte i hvilke kategori de hørte hjemme ved å først presentere samtlige besvarelser i én tabell og markere likheter med ulike fargtusj. Her var "likning" og"måte" sentrale ord som jeg observerte i besvarelsene som gjorde det lettere å plassere besvarelsene i en passende kategori. Uttrykk som "den ene siden er større", "hva av delene som er størst" fungerte på samme måte.

Begrepsoppfatning 0 Ulikhet som en blanding av bilder eller symboler i en matematisk setting

Begrepsoppfatning 1 Ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser

Begrepsoppfatning 2 Ulikhet som en fremmed slektning av en likning

Begrepsoppfatning 3 Ulikhet som en algebraisk prosess

Begrepsoppfatning 4 Ulikhet som et objekt

Elevenes besvarelser om en ulikhets løsning ble undersøkt ved å sette de opp mot hverandre og gjenkjenne likheter og forskjeller. Som et resultat av dette oppstod to kategorier som baserer seg på Duvals (2006) teori og om Karps (2007), som sitert i Ellerton og Clements (2011), tanker om ulikheter som åpne utsagn.

For å besvare forskningsspørsmålet som går ut på forståelse av ulikhetstegnets retningsendring i visse tilfeller, brukte jeg teorien om prosedyre- og begrepskunnskap til Hiebert og Lefevre (1986), og klassifiseringen av relasjonell og instrumentell forståelse som Skemp (1976) beskriver. Jeg valgte å bruke Sfards og Linchevskis (1994) teori om primær- og sekundærprosesser som underbyggende teori om forståelse. I intervjuene var ulikhetstegnets retningsendring et tema i forbindelse med Oppgave 2b (se oppgaveheftet og intervjuguiden i henholdsvis Vedlegg A og B). Elevenes ytringer fra intervju ble gjengitt på tabellform. Jeg observerte at elevene kunne deles inn i to grupper; de som hadde en forklaring av fenomenet, og de som ikke hadde en forklaring. Først undersøkte jeg hvordan elevenes kunnskap kunne karakteriseres i forbindelse med Hieberts og Lefevres teori om begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. I forbindelse med den ene delen av prosedyrekunnskap, undersøkte jeg om elevene viste tegn til kunnskap om matematikkens formel- og symbolspråk. Eventuell kunnskap om selve regelen og prosedyren som må følges ble undersøkt i de skriftlige besvarelsene i tillegg til elevytringene.

Om elevene kunne gi en forklaring av regelen var avgjørende for karakteriseringen av elevenes forståelse av fenomenet. En instrumentell forståelse viste seg ved at elevene hadde prosedyrekunnskap, men kunne ikke forklare hvorfor regelen stemmer. Begrepskunnskap hos elever ble identifisert hvis de kunne koble sammen kunnskap slik at det dannes relasjoner mellom informasjonsdeler (Hiebert & Lefevre, 1986). En relasjonell forståelse ble derfor identifisert hos elever ved at Skemps (1976, s. 2) uttrykk "knowing both what to do and why" stemte for elevene. I tillegg fungerte Sfard og Linchevskis (1994) prosessteori som en grundigere begrunnelse for forståelsen ved å definere de to prosessene som inngår i multiplikasjon og divisjon av en ulikhet med negative tall. I analysen presenteres to elevers forståelse som representanter for de to typene av forståelse som ble identifisert. Forklaringen til eleven med relasjonell forståelse ble analysert i lys av Steinbrings (2006) epistemologiske trekant, der tegnet, referansekonteksten og begrepet som medieres ble identifisert. Den epistemologiske trekanten synliggjør koblingen mellom disse.

Kapittel 5

Resultat og analyse

Studiens funn blir lagt frem i dette kapitlet. De baserer seg på videoopptak og transkripsjon av elevarbeidet, intervjutranskripsjoner og elevenes skriftlige besvarelser. Analyseverktøyet som ble presentert i det forrige kapitlet ble brukt for å analysere datamaterialet.

Kapitlets oppbygning samsvarer med studiens tre forskningsspørsmål. Den første delen tar for seg elevenes beskrivelser av ulikhetsbegrepet og av en ulikhets løsning, og viser hvordan disse kan kategoriseres. Deretter vil jeg undersøke to gruppers løsningsstrategier og valg av representasjoner i forbindelse med grafisk løsning av ulikheter. I den siste delen av kapitlet undersøker jeg hvordan elevenes forståelse av multiplikasjon eller divisjon av en ulikhet med negative tall karakteriseres.

5.1 Kategorisering av elevenes beskrivelser av ulikhetsbegrepet

Innledningsvis vil jeg belyse det første forskningsspørsmålet og legge frem hvordan elevenes beskrivelser av ulikhetsbegrepet i starten av elevarbeidet kan kategoriseres. Videre vil jeg i Kapittel 5.1.1 undersøke elevenes beskrivelser av en ulikhets løsning, som er den andre delen av det første forskningsspørsmålet.

I Oppgave 1a i heftet (Vedlegg A) ble elevene bedt om å skrive hva de legger i begrepet *matematisk ulikhet*, for så å snakke med hverandre om beskrivelsene sine etterpå. Jeg ønsket å undersøke elevenes beskrivelser av ulikheter noen måneder etter undervisningen om lineære ulikheter. Fordi dette spørsmålet kom først, ville ikke oppgavene og de andres meninger under arbeidet få noen innvirkning på hver enkelts forklaring av hva de la i begrepet *matematisk ulikhet*. I tillegg tror jeg det var bra at elevene fikk tenkt gjennom, skrevet ned og snakket sammen om hva de legger i begrepet før de satte i gang med oppgavene.

Denne første oppgaven besvarte elevene individuelt, og de fleste leste opp svarene sine for hverandre etterpå. Jeg har har observert likheter og forskjeller i elevenes besvarelser og analysert dem ved hjelp av Halmaghis (2011) rammeverk *Begrepsoppfatninger av ulikheter* (COIN), som ble presentert i Kapittel 3. Halmaghis kategorier ble brukt for å kategorisere elevenes egne beskrivelser av ulikhetsbegrepet. Det må presiseres at denne kategoriseringen kun baserer seg på elevenes skriftlige besvarelser på Oppgave 1a. Derfor velger jeg også å bruke ordet "beskrivelse" når jeg omtaler hva elevene har skrevet selv om rammeverket bruker betegnelsen "oppfatning".

Begrepsoppfatning 0: Ulikhet som en blanding av bilder eller symboler i en matematisk setting

Innenfor denne kategorien plasserer jeg Lasse og Per Ivar sine besvarelser, selv om beskrivelsene er veldig korte og derfor vanskelig å klassifisere. De er vist i Tabell 5.1.

Tabell 5.1: Lasse og Per Ivar sine beskrivelser av ulikhetsbegrepet.

Ulikhet som en blanding av bilder eller symboler i en matematisk setting	
Lasse	Per Ivar
"En matematisk ulikhet $3 > 0$ $8 < 0$ "	"Jeg forbinder matematisk ulikhet med $<, >, \leq$ og $\geq$. "

Lasses besvarelse består av to eksempler på matematiske ulikheter. Grunnen til at jeg plasserer besvarelsen i denne kategorien, er først og fremst basert på eksemplenes matematiske natur. Han har skrevet to proposisjoner som har ulik sannhetsverdi (Halmaghi, 2011). $3 > 0$ har sannhetsverdien "sann", mens $8 < 0$ er usant. Det kan tyde på at ulikhetstegnet blir brukt på en tilfeldig måte, og tegnets rolle som relasjon blir ikke tatt hensyn til i det andre eksemplet som han gir. Per Ivars besvarelse henviser kun til de forskjellige ulikhetstegnene. Siden dette bare er en oppramsing av tegnene og det ikke fremkommer en forklaring rundt tegnenes betydning, velger jeg å plassere besvarelsen hans i denne kategorien.

Begrepsoppfatning 1: Ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser

Besvarelsene til to av elevene faller inn under denne kategorien. Begge elevene forklarer på sine måter at ulikhetstegnet viser en sammenheng mellom to størrelser, som man kan se i Tabell 5.2. Halmaghi (2011) forklarer at denne begrepsoppfatningen ligger nærme den formelle definisjonen av ulikhet.

Tabell 5.2: Vemund og Jonas sine beskrivelser av ulikhetsbegrepet.

Ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser	
Vemund	Jonas
"En matematisk ulikhet er et tegn som viser hva av delene som er størst."	"Når jeg hører begrepet matematiske ulikheter så tenker jeg på tegnet $<$ aka [også kjent som][28] krokodilletegnet. Dette tegnet betyr at den ene siden er større enn den andre siden avhengig av x."

Vemunds forklaring er imidlertid en kort forklaring, men jeg velger likevel å plassere besvarelsen hans i denne kategorien. Han beskriver at det er snakk om en avgjørelse av hvilken "del" som er størst, og viser med dette til ulikhet som en ordningsrelasjon. Jonas bruker betegnelsen "krokodilletegnet" som en metafor på ulikhetstegnet, og viser til at det er en relasjon mellom to sider. Ifølge Pimm (1987) kan en slik metafor karakteriseres som en *utenfor-matematisk metafor* som henviser til den virkelige verden for å forklare matematikken. Her er "krokodilletegnet" en del av det matematiske registeret til Jonas. Det var imidlertid flere av elevene som brukte denne metaforen i sine verbale ytringer.

Jonas uttrykker også at en ulikhet omfatter bokstavsymbolet x. Påstanden om at x avgjør hvilken side som er størst, viser også tegn til å tenke på en ulikhet som et åpent utsagn der verdiene til den ukjente er avgjørende (Karp, 2007,som sitert i Ellerton & Clements, 2011).

[29][tekst] er en kode for min fortolkning av ord i elevbesvarelsene.

Begrepsoppfatning 2: Ulikhet som en fremmed slektning av en likning

Tre av elevene bruker begrepet likning i sin forklaring av ulikheter, og deres beskrivelser er derfor plassert under denne kategorien. Imidlertid bruker de begrepet på ulike måter. Jeg har derfor valgt å lage to underkategorier; *Direkte forbindelse til likningsbegrepet* og *Indirekte forbindelse til likningsbegrepet*. Tabell 5.4 viser kategoriene som Atle, Emil og Siljes besvarelser inngår i.

Tabell 5.4: Atle, Emil og Siljes besvarelser om ulikhetsbegrepet

Ulikhet som en fremmed slektning av en likning		
Direkte forbindelse		Indirekte forbindelse
Atle	Emil	Silje
"En likning med forskjellig svar på hver side. Den skal påvise at ett eller annet er større/mindre enn så så mye. Tegnet > eller < eventuelt ≤ og ≥."	"Når man har to sider av en likning med ulik sum, har vi en matematisk ulikhet."	"Med matematisk ulikhet tenker jeg på en likning, bare at man ikke får en bestemt x-verdi eks. $\frac{2x}{2} > \frac{6}{2}$ $x > 3$ Altså at x er større enn 3. I stedet for = - tegnet, er det enten <, >, ≤ eller ≥."

Direkte forbindelse til likningsbegrepet

De skriftlige forklaringene til Atle og Emil som vist i Tabell 5.4 viser at de tenker på en ulikhet som en spesiell type likning. Atle uttrykker at en ulikhet *er* en likning, men bemerker at sidene er forskjellige. Atle bruker også ordene større og mindre enn, og legger frem hvilke tegn han forbinder ulikheter med. Selv om han uttrykker en sammenlikning mellom to størrelser, velger jeg å plassere beskrivelsen hans i denne kategorien. Dette gjør jeg på grunnlag av den sterke koblingen til likningsbegrepet.

Emil viser også at sidene til en likning må ha ulik sum for å kunne være en ulikhet. En tolkning av dette er at elevene ikke er oppmerksomme på hva som kjennetegner en likning, men ser på en likning som to matematiske uttrykk som er relatert til hverandre med et tegn.

Indirekte forbindelse til likningsbegrepet

Tabell 5.4 viser at Siljes skriftlige forklaring er plassert i underkategorien *Indirekte forbindelse til likning*. Forklaringen viser at Silje relaterer en ulikhet til en likning ved at hun "tenker på en likning", men presiserer at ulikheter ikke gir en bestemt x-verdi. Videre gir hun et eksempel på en ulikhet og dens løsning, og henviser til fire forskjellige ulikhetstegn. Dette tolker jeg som at tegnet som brukes, og hvor mange x-verdier det resulteres i, er avgjørende i hennes atskillelse av begrepene. Hun er derfor bevisst på skillet mellom likningsbegrepet og ulikhetsbegrepet, men hun ser likevel en forbindelse mellom de to begrepene.

Begrepsoppfatning 3: Ulikhet som en algebraisk prosess

Den siste elevens beskrivelse av ulikhetsbegrepet kvalifiserer til å gå under oppfatningen om en ulikhet som en algebraisk prosess. I Tabell 5.6 forklarer Kristian at han ser på en ulikhet som en "måte", altså en prosedyre som gjennomføres. Han bruker også likningsbegrepet senere sin forklaring, men jeg plasserer likevel beskrivelsen hans under denne kategorien på grunnlag av hvordan han presiserer at en ulikhet er en "måte" å regne på.

Tabell 5.6: Kristians beskrivelse av ulikhetsbegrepet.

Ulikhet som en algebraisk prosess
Kristian
"En matematisk ulikhet er en måte å regne seg frem til en ukjent. Det vil gi et svar om hvor stor eller liten et tall må være for at en likning skal gå opp."

Beskrivelsene til de sju elevene har jeg nå plassert innenfor Begrepsoppfatning 0, 1, 2 og 3. Det var ingen av besvarelsene som kvalifiserte til å inngå i Begrepsoppfatning 4: Ulikhet som et objekt. Denne kategoriseringen viser at det er forskjell i karakteren av elevenes skriftlige besvarelser om matematiske ulikheter. Dette er viktig bakgrunnskunnskap som jeg vil komme tilbake til i Kapittel 6 og diskutere opp mot de andre funnene jeg presenterer. Dette gjelder også elevenes beskrivelser av en ulikhets løsning, som er i fokus i det neste avsnittet.

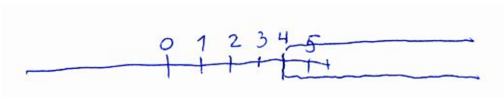
5.1.1 En ulikhets løsning

I tillegg til å få innblikk i elevenes beskrivelser av ulikhetsbegrepet, ønsket jeg å undersøke elevenes tanker om betydningen av en ulikhets løsning. Dette svarer til den siste delen av det første forskningsspørsmålet. Jeg undersøkte også om elevene kunne representere en ulikhets løsning på ei tallinje, som er en grafisk endimensjonal representasjon. Under intervjuene fikk elevene spørsmål om dette (se Vedlegg B), og det viste seg å være uvant for dem. Fem av dem representerte løsningen enten ved å plassere x under punktet 4 og markere med en pil eller en linje, eller ved å tegne en strek gjennom punktet 4 og markere med en pil eller en linje. I ytringen nedenfor viser Jonas at han er usikker på løsningen sin da han fikk spørsmål om hvordan han ville ha vist $x > 4$ på ei tallinje. Transkripsjonskodene jeg har brukt følger i Vedlegg D, og kodene gjelder både for intervju og transkripsjon av elevarbeid.

[Intervjusekvens, Jonas]

36. Jonas: Ja.. (tegner og markerer feltet fra fire og utover) kanskje jeg tegner feil sånn linje, men.. må bare prøve. Dette tror jeg jeg aldri har.. vi har bare holdt på med nullpunktslinje.

Jonas uttrykker her at denne representasjonen av en ulikhets løsning er ny for ham, og at han kun husker å ha lært om nullpunktslinjer. Han får likevel representert ulikhetens løsning som vist på Figur 5.1. Imidlertid viser han ikke tegn til å presisere om fire er med i intervallet hans eller ei.



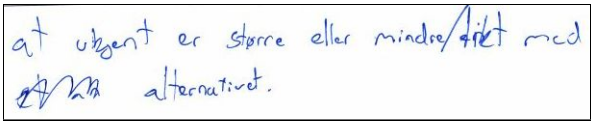
Figur 5.1: Jonas sin representasjon av $x > 4$ på ei tallinje.

Forklaringen til Jonas representerer også de andre elevenes uttalelser som tydet på at de ikke var vant med denne representasjonen. Dette mener jeg er viktig å belyse i forbindelse med betydningen av en ulikhets løsning.

Oppgave 1b tok for seg betydningen av en ulikhets løsning. Det viste seg at elevbesvarelsene kunne deles inn i to hovedkategorier som jeg har kalt *Oversettelse* og *Åpent utsagn*. I den første kategorien kunne imidlertid majoriteten av besvarelsene plasseres. Her presenterer jeg tre besvarelser som er representanter for forklaringene i disse kategoriene.

Oversettelse

Figur 5.2 viser hva Lasse svarte på spørsmålet "Hva betyr løsningen av en ulikhet?". Sett i lys av Duvals (2006) representasjonsteori, ser jeg på denne forklaringen som en oversettelse av en tenkt algebraisk løsning av en lineær ulikhet på formen $x > a$. Denne løsningen er et resultat av prosedyren for algebraisk løsning av ulikheter.



Figur 5.2: Lasses tanker om en ulikhets løsning.

Transformasjonen fra et algebraisk representasjonsregister til en representasjon i naturlig språk vil jeg dermed betegne som en *kongruent* omdanning, siden det er en oversettelse fra enhet til enhet (Duval, 2000). Lasse bruker ordene "ukjent" og "alternativet" som betegnelser på de matematiske komponentene som er involvert i en ulikhets løsning. Det fremkommer imidlertid ikke hva han legger i den ukjente, og hvor mange verdier den ukjente kan ha. Under intervjuet fikk Lasse dette spørsmålet etter at han hadde markert løsningen $x > 4$ på tallinja.

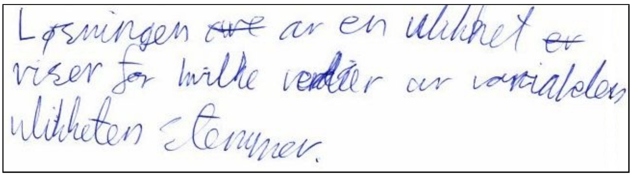
[Intervjusekvens, Lasse]

47.	Thea:	Hvor mange verdier kan x-en ha?
48.	Lasse:	Det er jo uendelig da. Over fire.

I besvarelsen på Figur 5.2 bruker han betegnelsen "ukjent", og i ordvekslingen over uttrykker Lasse at x kan ha et uendelig antall verdier. Dette er i henhold til blant annet Bagni (2006) og Sackur (2004) som presiserer at en ulikhet kan ha et uendelig antall verdier i løsningsmengden. Det er også i overensstemmelse med Ely og Adams' (2012) definisjon av en ukjent som en størrelse som står for verdier som kan bestemmes ut ifra en gitt informasjon. Representasjonen på tallinja kan imidlertid ha vært med på å tydeliggjøre for Lasse at den ukjente har flere verdier.

Åpent utsagn

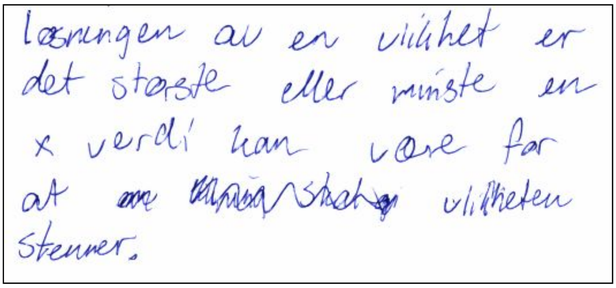
Emils beskrivelse på Figur 5.3 er av en litt annen karakter enn forklaringene i den første kategorien.



Figur 5.3: Emils tanker om en ulikhets løsning.

Emil uttrykker her at "løsningen av en ulikhet viser for hvilke verdier av variabelen ulikheten stemmer". Denne forklaringen viser ikke til en ulikhets løsning som et resultat av en prosedyre, men tar utgangspunkt i tanken om en ulikhet som et åpent utsagn. Da må de akseptable verdiene av den ukjente bestemmes slik at utsagnet blir et sant utsagn (Karp, 2007, som sitert i Ellerton & Clements, 2011). Emil bruker variabelbegrepet i sin forklaring, og uttrykker at det er flere verdier det er snakk om.

Kristian forklaring er også plassert under samme kategori, og er presentert i Figur 5.4.



Figur 5.4: Kristians tanker om en ulikhets løsning.

Denne forklaringen vitner om at Kristian også ser på en ulikhet som et åpent utsagn der bestemte verdier gjør at utsagnet blir et sant utsagn. Imidlertid kan det se ut som om han ser på løsningen som én verdi, og at han først og fremst ser på det som et grensepunkt. I intervjuet kom det også frem at han bruker ordene "minstekrav" og "høyeste krav" når han kobler ulikheter til praksislivet, som gjengitt i den påfølgende sekvensen.

[Intervjusekvens, Kristian]

21.	Thea:	Men når man blir bedt om å løse en ulikhet, hva vil egentlig det si?
22.	Kristian:	Det er vel å finne de verdiene som er_ som gjør det sånn at krokodilletegnet viser riktig vei, da. Det er for å finne ut hvilke tall som går an å løse, det går opp da. Det kan sikkert brukes i praksis hvis du skal måle ett-eller-annet og bygge noe, så må du ha_ vite hva minstekravet eller høyeste krav for hvor stort det kan være.

Ut ifra disse dataene kan det tyde på at Kristian ser på en ulikhets løsning som er et høyeste- eller minstekrav for et matematisk utsagn. Men den neste ordvekslingen fra intervjuet viser at han har et bredere bilde av løsningen.

[Intervjusekvens, Kristian]

25.	Thea:	Så i den ulikheten her for eksempel, (viser til ulikheten $3x - 4 > x - 2$) hva er det bokstavsymbolet x da betyr?
26.	Kristian:	Ja, x betyr vel det du skal finne, ja x er jo variabel i en ulikhet, det er jo flere forskjellige tall x kan være.
(..)		
37.	Kristian:	Det er uendelig mange verdier på en sånn ulikhet, som regel.

I likhet med Emil bruker også Kristian begrepet "variabel" for x, og har uttrykker at det er flere tall x kan være. Det kan tyde på at han gir x denne betegnelsen på grunnlag av antall verdier bokstavsymbolet kan inneha. Kristian uttrykker også at en ulikhet kan ha uendelig mange verdier, noe som er i henhold til blant annet Bagni (2006).

I den neste delen vil jeg belyse det andre forskningsspørsmålet som tar for seg elevenes grafiske løsning av lineære ulikheter.

5.2 Grafisk løsning av lineære ulikheter

For å besvare forskningsssprørsmålet som omfatter identifisering av transformasjoner av semiotiske representasjoner, tar jeg utgangspunkt i Oppgave 3. Denne oppgaven ber elevene om å løse ulikheten $2x - 1 > 2 - x$ ved å bruke et oppgitt koordinatsystem (se Vedlegg A). Denne oppgaven inviterer derfor til en *omdanning* fra et algebraisk representasjonsregister til et grafisk representasjonsregister (Duval, 2006). I Kapittel 3 har jeg gjort rede for hvordan Dreyfus og Eisenberg (1985) og

Sackur (2004) påpeker at det er flere transformasjoner som inngår i dette skiftet av representasjonsregister. I denne delen vil løsningene til elevene i Gruppe 1 og 2 bli undersøkt og analysert.

5.2.1 Silje, Kristian og Atles grafiske løsning

Silje, Kristian og Atle utgjorde Gruppe 1. Deres måte å arbeide med denne oppgaven på, var individuell løsning med påfølgende forklaringer og diskusjon. Jeg legger derfor frem en analyse av hver enkelts løsning og valg av representasjoner med utgangspunkt i deres ytringer og besvarelser.

Grafisk løsning av lineære likninger som algoritmisk modell

Først vil jeg fokusere på Siljes løsning av Oppgave 3, med utgangspunkt i en samtalesekvens fra gruppearbeidet.

[Elevarbeid, Gruppe 1]

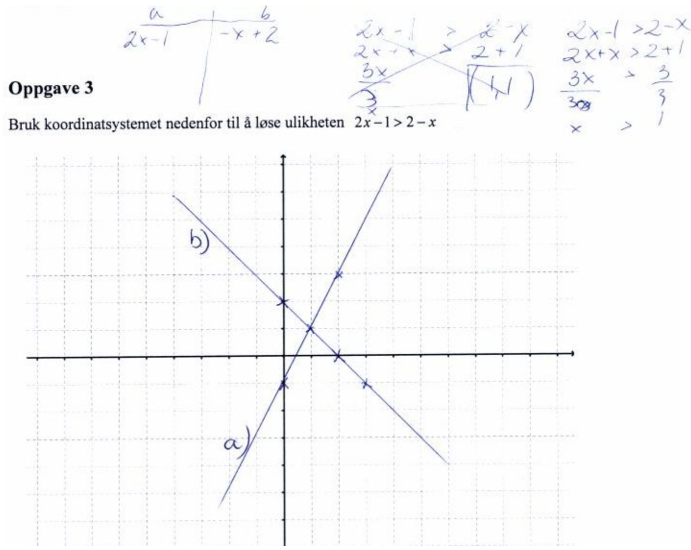
75.	Silje:	På den her, blir det to linjer?
76.	Kristian:	Jeg tror det.
77.	Silje:	[som krysser hverandre i et punkt (lager et kryss med pennen i lufta over oppgavearket)
78.	Kristian:	[det er lenge siden vi har gjort det, men jeg tror det er to linjer.

Silje spør tidlig om det blir to linjer (ytring 75). Elevene starter med selvstendig løsning av oppgaven. Silje kaller venstre side av ulikheten for a og høyre side for b som vist i besvarelsen hennes på Figur 5.5. Figuren viser også at hun bytter plass på leddene i ulikhetens høyre side og skriver den på formen $-x+2$. Elevene begynner å snakke sammen om sin løsning av oppgaven, og Kristian kommer med sin forklaring.

[Elevarbeid, Gruppe 1]

92.	Kristian:	(..) Og svaret vil jo være_
93.	Silje:	Én komma én
94.	Kristian:	Ja
95.	Silje:	Eller, som koordinater.
(..)		
105.	Silje:	Ja, nei, jeg bare tok det for hver bortover så tok jeg to oppover på den ene sida.

Silje avbryter ham med ytring 93 og uttrykker at svaret vil være tallparet $(1, 1)$. Dette skriver hun også i besvarelsen sin. I ytring 105 forklarer hun videre at hun tenkte "for hver bortover så tok jeg to oppover", som relaterer seg til det lineære uttrykket på venstre side i ulikheten i koordinatsystemet. I intervjuet i etterkant uttrykte hun også at linja ville skjære y-aksen i $y = -1$.



Figur 5.5: Siljes besvarelse på oppgave 3.

Hun identifiserer at ulikheten kan gi to ulike grafer, noe som Sackur (2004) og Dreyfus og Eisenberg (1985) påpeker at dette er det første elever må gjøre. Det kan tyde på at Silje skriver høyre side av ulikheten som $-x+2$ fordi hun ønsker å skrive uttrykket for ei rett linje på formen $y = ax + b$ som hun er kjent med fra undervisningen og læreverket (Oldervoll et al., 2009). Hennes to uttrykk er likevel ikke fullstendige funksjonsuttrykk, siden hun ikke viser sammenhengen mellom den uavhengige variabelen og den avhengige variabelen ved bruk av bokstavsymbolet y eller $f(x)$. Imidlertid gjør måten hun skriver uttrykkene på at hun lettere kan identifisere de komponentene i uttrykket som er avgjørende for å gjøre en omdanning av representasjonsregister (Duval, 2006). Ytring 105 og hennes forklaring fra intervjuet tolker jeg som at Silje gjenkjenner stigningstallet og skjæringspunktet med y-aksen som de sentrale komponentene som gjør henne i stand til å markere punkter i koordinatsystemet. Hun har dermed ingen problemer med å omdanne fra et algebraisk representasjonregister til et grafisk todimensjonalt register (I-III)[30] som

[30] Betegnelsen viser til presentasjonen i Tabell 3.1 i Kapittel 3.3.

Sackur (2004) beskriver. Dette viser at hun også behersker det usynlige rollebyttet som bokstavsymbolet x har gjennomført, da x gikk fra å være ukjent i ulikheten til å være en variabel i to lineære uttrykk.

Løsningen Silje gir er tallparet $(1, 1)$. Dette er punktet der de to linjene har like y-verdier, med andre ord skjæringspunktet til de to rette linjene. Løsningen til Silje vil derfor tilfredsstille likningen $2x - 1 = 2 - x$. Men for å fullføre den grafiske løsningen av ulikheten, må det gjøres en sammenlikning av y-verdiene som ikke bare tar for seg tilfellet der y-verdiene er like. Sackur (2004) uttrykker at det siste steget i den grafiske løsningen er å identifisere de korresponderende x-verdiene og uttrykke dem som en løsningsmengde. En riktig omdanning fra et grafisk todimensjonalt til et grafisk endimensjonalt register (III-IV)[31] blir derfor ikke gjort i dette tilfellet (Sackur, 2004).

Det kan se ut til at Siljes fremgangsmåte i stor grad er påvirket av fremgangsmåten til grafisk løsning av lineære likninger. I forhold til Fischbeins (1994) teori om de tre komponentene som spiller inn i matematisk aktivitet, kan det tyde på at den algoritmiske og den intuitive komponenten er mest aktiv hos Silje. Den algoritmiske komponenten viser seg ved at hun kjenner til prosedyren for å representere lineære funksjoner grafisk. Videre kan det virke som at Silje har en intuitiv idé om å bruke grafisk løsning av likninger som algoritmisk modell for grafisk løsning av ulikheter. Dette gjelder også spesielt i forhold til avlesing av grafene. Det ser ut til at den formelle komponenten ikke er like deltakende i hennes løsning fordi hun ser bort ifra ulikhetstegnets betydning i avlesingen av grafene.

Ved å ta utgangspunkt i sekvensen nedenfor, vil jeg undersøke hvor Siljes algebraiske løsning som kan observeres i besvarelsen på Figur 5.5 kommer inn i bildet.

[Elevarbeid, Gruppe 1]

93.	Silje:	Én komma én
94.	Kristian:	Ja
95.	Silje:	Eller, som koordinater.
96.	Kristian:	Ja. Når x er større enn en, så vil den linja (følger linja $y = 2x - 1$ med pennen sin i besvarelsen sin) være større enn den linja (peker langs linja $y = 2 - x$). Så svaret vil være.. en (mumler utydelig).
(..)		(Silje skriver i oppgaveheftet)
107.	Atle:	Det her er mitt svar hvertfall, da (viser besvarelsen sin til Kristian).

[31] Som vist i Tabell 3.1 i Kapittel 3.3.

108.	Kristian:	Ja, vi har samme, men x må jo være større enn én for at den der skal være større enn den her (peker lett med pennen).
109.	Atle:	Mmm
110.	Silje:	Det er sant.

Etter at Kristian kommer med sin påstand om at den ene linja vil være større enn den andre når x er større enn én (ytring 96), velger Silje å løse ulikheten ved behandling i et algebraisk representasjonsregister som gitt på Figur 5.5 (Duval, 2006). Hun kommer frem til at $x > 1$ etter å ha streket med pennen over den første utregningen. Det at hun løser ulikheten algebraisk, ser jeg på som et behov for å finne den rette løsningen når hennes svar ved grafisk løsning ikke samsvarer fullstendig med Kristians forklaring. Likevel snakker hun ikke direkte med de andre om svaret $x > 1$, men bekrefter Kristians argumentasjon for at x må være større enn 1 ved å si "det er sant" i ytring 110.

Grafene i seg selv som ulikhetens løsning

Videre presenterer jeg undersøkelsen av Atles løsning ved å ta utgangspunkt i samtalesekvensen som er gjengitt nedenfor.

[Elevarbeid, Gruppe 1]

91.	Atle:	Jeg tror jeg er på dypt vann jeg nå.
92.	Kristian:	Nei men, når det er snakk om å tegne linjene tenker jeg jo at.. Det er jo bare å gjøre som det står (ler litt). Gå to opp for en som går bort på den første'n, en ned på.. og svaret vil jo være_
93.	Silje:	Én komma én
94.	Kristian:	Ja
95.	Silje:	Eller, som koordinater.

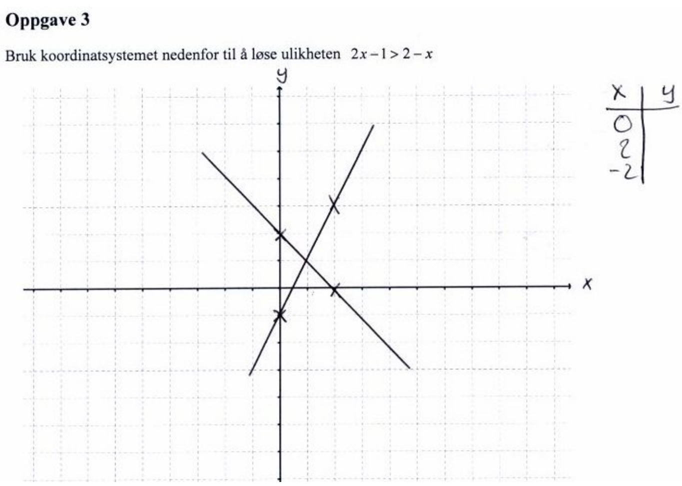
Atle uttrykker tidlig i arbeidet i ytring 91 at han tror han er på dypt vann når det gjelder oppgavens løsning. Han lytter til de andres forklaringer, og Kristian forklarer videre hva han tenker om ulikhetens grafiske løsning. Den neste sekvensen viser Atles løsning av oppgaven.

[Elevarbeid, Gruppe 1]

97.	Atle:	Jeg er ikke ferdig med den, men jeg tror jeg har tenkt på en annen måte enn dere. For jeg tenker sånn her: sette opp liksom i.. sånn_
98.	Kristian:	Sånn koordinatsystem og tabell og sånn her.
99.	Atle:	Ja, Sette inn verdier for x.

100.	Kristian:	Ja
101.	Atle:	Du får jo koordinater da. Jeg er ikke ferdig..
(..)		(Kristian og Silje snakker om hvordan Silje har gjort det mens Atle markerer punkter i koordinatsystemet)
106.	Atle:	Ja, hvertfall da, linjal.. (bruker linjal og tegner to rette linjer)
107.	Atle:	Det her er mitt svar hvertfall, da. (Viser besvarelsen sin til Kristian).
108.	Kristian:	Ja, vi har samme, men x må jo være større enn én for at den der skal være større enn den her (peker lett med pennen).
109.	Atle:	Mmm
110.	Silje:	Det er sant.

Det kommer frem i ytring 97, 99 og 101 at Atle tenkte å finne koordinater ved å sette inn verdier for x i en tabell. Denne tabellen kan observeres til høyre i besvarelsen hans på Figur 5.6. Besvarelsen viser at han ikke fullfører tabellen. Det kan være flere grunner til dette, der en av dem kan være på grunn av vanskeligheter i forbindelse med å finne y-verdiene i tabellen. Etter å ha hørt de andres forklaringer kan de virke som om han ombestemmer seg og tegner to grafer før han presenterer dem for Kristian som svaret sitt i ytring 107.



Figur 5.6: Atles besvarelse på oppgave 3.

Imidlertid avslutter ikke Atle med en videre omdanning fra et grafisk todimensjonalt til et grafisk endimensjonalt representasjonsregister (III-IV) (Sackur, 2004). Hans grafiske todimensjonale representasjon er følgelig ikke en gyldig representasjon av den algebraiske ulikheten. Det vil si at Atle ikke forlater informasjon om grafene og kun retter fokus på de vesentlige x-verdiene, noe Sackur (2004) bemerker som en nødvendighet.

Den formelle komponenten som en aktiv deltaker

[Elevarbeid, Gruppe 1]

91.	Atle:	Jeg tror jeg er på dypt vann jeg nå.
92.	Kristian:	Nei men, når det er snakk om å tegne linjene tenker jeg jo at.. det er jo bare å gjøre som det står (ler litt). Gå to opp for en som går bort på den første'n, en ned på .. og svaret vil jo være_
93.	Silje:	Én komma én
94.	Kristian:	Ja
95.	Silje:	Eller, som koordinater.
96.	Kristian:	Ja. Når x er større enn en, så vil den linja (følger linja $y = 2x - 1$ med pennen sin i besvarelsen sin) være større enn den linja (peker langs linja $y = 2 - x$) . Så svaret vil være.. en (mumler utydelig).

Ytring 92 viser at Kristian har et inntrykk av at oppgaven var lett, og at det bare "er å gjøre som det står". Han gjenkjenner stigningstallene i uttrykkene på hver side av ulikhetstegnet og tegner linjene. Han bruker imidlertid heller ikke begrepet stigningstall i denne oppgaven, men kommer med en forklaring om hvordan man grafisk finner stigningen til en rett linje (ytring 92). Videre formidler han i ytring 96 at når x er større enn 1, så vil linja $y = 2x-1$ være større enn linja $y = 2-x$.

Samtalen tyder på at i likhet med Silje hadde ikke Kristian problemer med å gjenkjenne sentrale komponenter i den algebraiske ulikheten, og gjorde en omdanning fra et algebraisk representasjonsregister til et grafisk todimensjonalt register (I-III). Det som skiller hans resonnering fra de andres, er at han studerte de rette linjene og gjorde en sammenlikning av dem ved å bruke ordene "større enn". Dette ser jeg på som en aktivering av den formelle komponenten fordi han retter fokus mot ulikhetstegnets betydning. Jeg tolker ordbruken hans som en henvisning til at den ene linja har y-verdier som ligger høyere oppe på y-aksen enn den andre linja. Dermed vil den ene grafen visuelt være plassert høyere oppe i koordinatsystemet enn den andre. Det er en slik sammenlikning av grafenes y-verdier Dreyfus og Eisenberg (1985) og Sackur (2004) beskriver, og den er nødvendig for å gjøre en omdanning fra et grafisk todimensjonalt til et grafisk endimensjonalt representasjonsregister. Samtalesekvensen viser at Kristian fant ut at x-verdiene som er større enn 1 tilfredsstiller ulikheten. Dermed håndterte han den siste omdanningen, og kom frem til ulikhetens løsningsmengde.

Kristians begrunnelse er ekvivalent med Jonas og Emil sin begrunnelse, og derfor behandler jeg ikke Gruppe 3 sitt arbeid separat. Jeg vil fortsette å belyse det andre forskningsspørsmålet som omfatter identifisering av transformasjoner i det neste delkapitlet, ved å undersøke nærmere hvordan elevene i Gruppe 2 tilnærmer seg Oppgave 3.

5.2.2 Lasse, Vemund og Per Ivars grafiske løsning

Lasse, Vemund og Per Ivar i Gruppe 2 samarbeidet om hvilken strategi de skulle velge for hver oppgave, og de jobbet for det meste sammen om selve prosessen. Her presenterer jeg deres to fremgangsmåter på Oppgave 3 i to separate deler. Først viser jeg hvordan den innledende samtalen mellom elevene i gruppa utartet seg.

[Elevarbeid, sekvens 1, Gruppe 2]

136.	Lasse:	Koordinatsystem, ja. Må først sette opp en..
137.	Vemund:	Tabell
138.	Lasse:	Ja, det må vi. ... må vi ikke ha noen sånne lineære grafer? Eller noe sånn..
139.	Vemund:	Hva
140.	Lasse:	Sånn f over x er lik dudududududu..
141.	Vemund:	Neei..
142.	Lasse:	Så finne stigningstall og konstantleddet
143.	Vemund:	Nei, det gjør du ved å sette opp i en tabell. Og så finne [].
144.	Lasse:	Kan prøve å sette den inn i GeoGebra og se hvordan de blir der først, da.
145.	Vemund:	Mmm

I ytring 138 foreslår Lasse at de må ha linære grafer, skrive som et funksjonsuttrykk (ytring 140) og finne stigningstall og konstantledd (ytring 142). Vemund vil at de skal bruke en tabell for å finne stigningstall og konstantledd (ytring 143), og får gjennomslag for dette. Deretter foreslår Lasse at de kan bruke GeoGebra. Per Ivar starter med å lage en tabell, mens Lasse bruker GeoGebra til å løse ulikheten. Elevene velger derfor å løse ulikheten i GeoGebra, og å bruke en tabell for å kunne representere ulikheten grafisk.

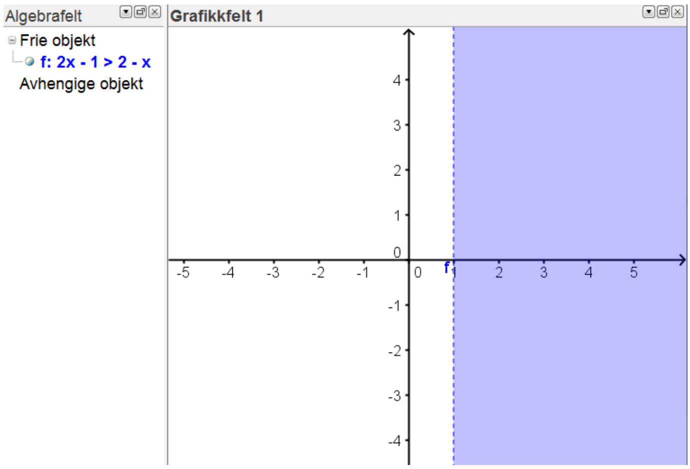
Manglende meningsskaping for GeoGebras representasjon

Her ser jeg nærmere på elevenes møte med løsningen GeoGebra gir.

[Elevarbeid, sekvens 2, Gruppe 2]

149.	Lasse:	Ok, hva skjedde.. (skriver i GeoGebra) that's much interesting (hvisker) ... Det er jeg som ikke klarer å skrive det inn.
(..)		
157.	Thea:	Er det greit om jeg ser hvordan du gjør det i GeoGebra?
158.	Lasse:	Ja, jeg gjør nå det feil, jeg så.. men du får bare prøve å se. Det kom opp sånn her.. skjønner ikke helt dette her (mumler). Er det ikke sånn at du skal skrive f over x er lik, så skriver du bare inn likninga.
159.	Vemund:	Ja, prøv det.
160.	Lasse:	Jeg har gjort det.
161.	Per Ivar:	Å, er det det du har gjort?
162.	Lasse:	To ganger x minus én er mindre enn_ er større enn to minus x. Er det ikke sånn her da?
163.	Vemund:	Men hvis_ hvorfor står det egentlig..
164.	Per Ivar:	Men kanskje du skal skrive bare likninga.. Kommer det ikke noe da?
165.	Lasse:	Da kommer akkurat det samme.. Da kommer bare a.
166.	Vemund:	Hmm. Men da gjør vi det.. da driter vi i..
167.	Thea:	Hva er det den viser den grafen som dere fikk nå?
168.	Lasse:	Hva den viser?
169.	Thea:	Mmm?
170.	Lasse:	Jeg ser ikke akkurat at det er noen graf her, men.. (de andre ler litt)
171.	Lasse:	Den viser at linja går rett opp.. fra y-en, rett opp mot y-aksen. (peker rett opp med vertikal hånd). Rett linje.
172.	Thea:	Mmm
173.	Lasse:	Det er kanskje []
174.	Vemund:	Ja det er jo.. Men det er rart_
175.	Lasse:	Sånn at når x er større enn én, så..

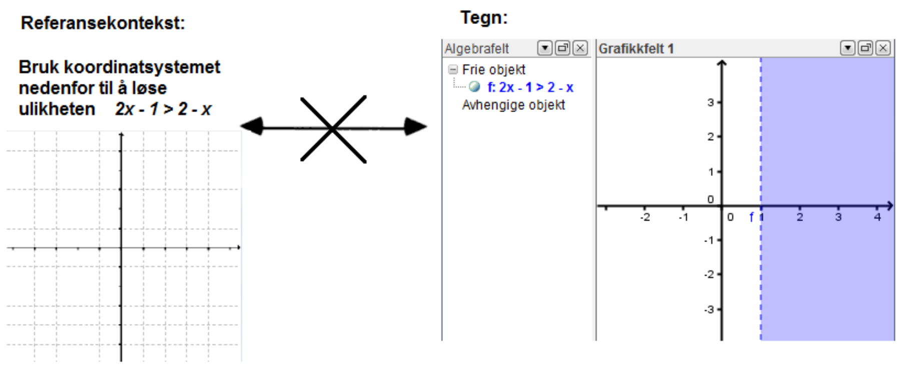
I denne sekvensen bruker Lasse GeoGebra og forklarer i ytring 158 og 162 at han skriver inn ulikheten som $f(x) = 2x - 1 > x - 2$. Han bruker også ordet "likning" i ytring 158. Ut ifra ytring 162 forstår jeg dette som et uttrykk for ulikheten. Lasse uttrykker at han ikke forstår det skjermbildet GeoGebra gir ham (ytring 158), og han sier han gjør feil (ytring 149 og 158). Vemund og Per Ivar viser heller ingen tegn til å skjønne hvorfor den grafiske fremstillingen av ulikheten i GeoGebra er som den er. Per Ivar foreslår å bare skrive inn likningen (ytring 164), men Lasse svarer at det kun gir a i ytring 165. Også her tyder det på at Per Ivar bruker ordet "likning" om ulikheten. Etter spørsmål om hva skjermbildet viser, forklarer Lasse i ytring 171 at linja går rett opp mot y-aksen. Han observerer også at det er noe spesielt når x er større enn 1, men han fullfører ikke setningen (ytring 175). Figur 5.7 viser hvordan Lasse skriver inn ulikheten i GeoGebra.



Figur 5.7: Rekonstruksjon av Lasses grafiske fremstilling i GeoGebra

GeoGebras løsning av ulikheten synes ikke å være slik Sackur (2004) beskriver. I stedet for å representere ulikheten med to funksjonsuttrykk, blir løsningen av ulikheten vist direkte i en grafisk todimensjonal representasjon. GeoGebra viser en stiplet linje i $x = 1$, og har markert arealet til høyre for denne linjen. I Figur 5.7 kan man se at GeoGebra har gitt ulikheten navnet f som kan observeres både i algebrafeltet og i grafikkfeltet. Jeg tolker Lasses bruk av $f(x)$ (ytring 158) som at han er vant med å bruke denne funksjonsbetegnelsen når han skriver inn uttrykk i GeoGebra, men at han her ikke tenker over at hele ulikheten ikke er én funksjon. Bokstaven a som Lasse snakker om i ytring 165 er et tilsvarende navn som GeoGebra gir ulikheten når den blir skrevet som den er. GeoGebras representasjon reagerer elevene på ved å uttrykke at de ikke har sett det før. I GeoGebra blir løsningsmengden representert som et areal der x-verdiene er begrenset, men y-verdiene er frie.

Ifølge Säljö (2001) er den dynamiske programvaren GeoGebra et medierende verktøy for elevene. Dette er en fysisk ressurs som elevene har tilgang på (Säljö, 2001), og er en formidler av matematikk. Grafen som GeoGebra viser i grafikkfeltet kan ifølge Steinbring (2006) karakteriseres som et matematisk tegn som er en bærer av kunnskap. I dette tilfellet kan Steinbrings referansekontekst og tegn og relasjonen mellom disse være nyttig å bruke for å undersøke den matematiske kunnskapen som er involvert i denne sosiale læringssituasjonen. Her er referansekonteksten selve oppgaven som elevene fikk, det vil si Oppgave 3. Steinbring påpeker at tegns mening må den lærende selv produsere ved å etablere en mediering til passende referansekontekster. Her er det GeoGebra som står for den direkte forbindelsen mellom referansekonteksten og tegnet, men elevene må likevel gi mening til tegnet i GeoGebra. Elevenes interaksjon viser imidlertid at de ikke klarer å gi mening til skjermbildet som dukker opp i GeoGebra. Dette tyder på at det ikke er en meningsfull relasjon mellom referansekonteksten og GeoGebras tegn hos elevene. Dette er illustrert i Figur 5.8.



Figur 5.8: En illustrasjon på elevenes manglende meningsskaping for GeoGebras tegn.

Elevenes faglærer fortalte at i undervisningen av lineære ulikheter noen måneder tidligere hadde de vært innom løsning i GeoGebra. Dette ble gjort på måten Dreyfus og Eisenberg (1985) beskriver; ved å uttrykke hver side av ulikheten som to funksjoner og sammenlikne funksjonenes grafer. Det tyder derfor på at fremstillingen av ulikhetens løsning som et areal ikke samsvarer med den algebraiske representasjonen $x > a$ av en lineær ulikhets løsning som elevene er kjent med.

Resultatet av transformasjonen GeoGebra gjør gir ikke elevene mulighet til å identifisere de to rette linjene og deres sentrale komponenter som stigningstall og konstantledd. Sekvens 4 fra Gruppe 2 sitt arbeid viser hvordan elevene reagerer da de undersøker de grafiske fremstillingene til Oppgave 4 (se Vedlegg B). Dette var en oppgave der elevene skulle finne den grafiske og den algebraiske representasjonen av en ulikhet som passet sammen. Nummereringen av ytringene viser at dette er et lite hopp frem i tid i forhold til den forrige samtalesekvensen.

[Elevarbeid, sekvens 4, Gruppe 2]

238.	Lasse:	Det var jo det (slår pennen på arket med de grafiske fremstillingene på). Skulle ha to linjer, og der dem krysser det var jo..
239.	Per Ivar:	Åja, det var punktet..
240.	Lasse:	Ja
		(elevene ser på hverandre, smiler og ler litt)
242.	Per Ivar:	Jaha, så hvis vi lager en, en graf for to x minus en (viser til til Oppgave 3).
243.	Lasse:	(Skriver i GeoGebra) For hvis vi lager..
244.	Per Ivar:	Aha.. (smiler og ler litt)

Samtalen viser at Lasse gjenkjenner den grafiske representasjonen og ser at de må ha to grafer i stedet for en ulikhet (Sackur, 2004). Gruppa endrer derfor sin strategi på hvordan de skal løse Oppgave 3. Dette kan kanskje tyde på at en representasjon som viser de rette linjene i GeoGebra ville ha gjort at elevene hadde gjenkjent noe de har vært borti før, og lettere kunne ha gitt mening til representasjonen. Dette ville imidlertid ha ført til at relasjonen mellom oppgavebeskrivelsen (referansekonteksten) og GeoGebras fremstilling (tegnet) på Figur 5.8 ville ha blitt skapt hos elevene.

I den neste delen vil jeg fortsette å fokusere på Guppe 1 sitt arbeid i forbindelse med den grafiske løsningen. Her vil jeg vil presentere og analysere elevenes utforming av en tabell.

Fravær av ulikhetstegnets betydning

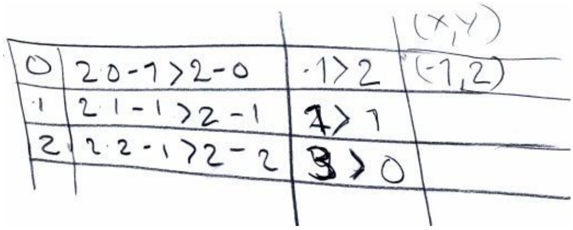
I starten av arbeidet med Oppgave 3 foreslo Vemund å lage en tabell for å uttrykke ulikheten grafisk. Per Ivar følger opp denne tanken og starter med å lage tabellen. Dette skjer samtidig som Lasse skriver inn hele ulikheten $2x-1 > x-2$ i GeoGebra, og elevene har ikke ennå sett på Oppgave 4 og endret strategi. Sekvensen fra elevarbeidet nedenfor viser hvordan elevene fokuserer på utformingen av tabellen som er vist på Figur 5.9 .

[Elevarbeid, sekvens 3, Gruppe 2]

177.	Lasse:	Så.. hva har du tenkt? (Ser på Per Ivar)
178.	Per Ivar:	Vet ikke.. hva gjør jeg med.. ulikhetstegnet?
179.	Lasse:	Hmm. Hva har du gjort da? (Ser på Vemund)
180.	Vemund:	Nei, jeg har ikke gjort noe..

181.	Per Ivar:	Nei, men.. jeg vet ikke hvorfor, men ...
182.	Lasse:	Ja, hvilke punkter får du da? Får du noen punkter i det hele tatt?
183.	Per Ivar:	Nei. Jeg skulle gjort.. er det sånn? (Skriver $(-1, 2)$ som koordinater i tabellen sin)
184.	Lasse:	Jeg tror ikke det, ass..
185.	Vemund:	Ei, jeg tror ikke det jeg heller, men.. []
186.	Lasse:	Vent da (får pennen og papiret)
187.	Per Ivar:	Nei, det blir ikke..
188.	Lasse:	Men du lager jo tabellen så jævlig trasig (tar over arket med tabellen på).
189.	Per Ivar:	Ah, sorry da..
190.	Lasse:	Hvis du har først x, så har du, så har du likninga.
(..)		
201.	Lasse:	y er lik to.. Hvordan fikk du det?
202.	Per Ivar:	To minus null, og minus en
203.	Lasse:	Ja, men det er jo ikke det her som er x-en og det her som er y-en (peker på hhv. $2 \cdot 0 - 1$ og $2 - 0$ i 2. rad og 2. kolonne i tabellen)
204.	Per Ivar:	Nei.. (oppgitt)
205.	Lasse:	x-en e jo_ det er satt inn for null, nei, satt inn for x.
206.	Vemund:	Vi må jo sette inn for y også.
207.	Lasse:	Hm? Ja. Det er jo y-en vi regner ut, er det ikke det..
208.	Vemund:	Jo.. (svakt)

I ytring 178 viser Per Ivar at han ikke vet hva han skal gjøre med ulikhetstegnet. Dette utdraget gir uttrykk for at Per Ivar har problemer med utformingen av tabellen han lager. Figur 5.9 viser at Per Ivar setter inn $0, 1$ og 2 for x i første kolonne, og skriver inn hele ulikheten i den andre kolonnen.



Figur 5.9: Per Ivars tabell på Oppgave 3.

I den tredje kolonnen har han regnet ut begge sidene av ulikheten og beholder ulikhetstegnet. Den fjerde kolonnen har han satt av til tallpar (x, y). Per Ivar svarer Lasse at han ikke får noe punkter, men skriver $(-1, 2)$ i tabellen (ytring 183). Dette punktet finner han ved å regne ut begge sidene av ulikhetstegnet når han setter inn 0 for x. Lasse og Vemund er skeptiske til resultatet, og Lasse overtar arket og lager en ny tabell. I ytring 201 Lasse lurer på hvordan Per Ivar fikk 2 som y-verdi. Han formidler gjennom ytring 203 at det ikke er venstre og høyre side av ulikhetstegnet som er x- og y-verdiene. Denne sekvensen preges av usikkerhet rundt hvordan tabellen skal utformes, og elevene bestemmer seg å legge oppgaven på vent.[32]

Sackur (2004) legger vekt på at i overgangen mellom et algebraisk og grafisk representasjonsregister må elevene må kunne gjenkjenne to ulike grafer i stedet for en ulikhet. Ut ifra samtalen i sekvens 3 og måten tabellen i Figur 5.9 utformes på, ser det ut til at elevene ikke er oppmerksomme på dette ennå. Sackur (2004) bemerker også at fremkomsten av y kan skape vanskeligheter for elevene. Dette stemmer med elevene i dette tilfellet. Det at de får to utverdier på hver side av ulikhetstegnet når de setter inn for x og regner ut, ser ut til å skape forvirring hos elevene. Videre er de to øverste ulikhetene $-1 > 2$ og $1 > 1$ i tredje kolonne i tabellen på Figur 5.9 to usanne proposisjoner, sett fra et logisk perspektiv (Halmaghi, 2011). Elevene gir imidlertid ikke uttrykk for at ulikhetene ikke er gyldige, men Per Ivar uttrykker at han er usikker på hva han skal gjøre med ulikhetstegnet. Hver side av ulikhetstegnet blir likevel regnet ut som to separate uttrykk og ulikhetstegnet beholdes. Denne situasjonen viser at elevene ønsket å gå veien om en representasjon ved tabell for å representere ulikheten grafisk, men de fikk problemer med ulikhetstegnet og bestemmelsen av y-verdier.

I dette delkapitlet har jeg belyst forskningsspørsmålet som omhandler elevenes grafiske løsning. Videre i dette kapitlet vil jeg belyse det siste forskningsspørsmålet som angår elevers forståelse av ulikhetstegnets retningsendring.

5.3 Forståelse av ulikhetstegnets retningsendring

Dette delkapitlet har som formål å undersøke hvilke forestillinger og forståelser elevene har av multiplikasjon eller divisjon av en ulikhet med negative tall. Denne delen har imidlertid fått navnet "Forståelse av ulikhetstegnets retningsendring" fordi det viste seg at elevene i utvalget var klar over at ulikhetstegnet må endre

[32] Sekvens 4 som er gjengitt tidligere viser hva som skjer når elevene tar fatt på Oppgave 4.

retning når ulikheter multipliseres med negative tall.[33]

I intervjuene med hver enkelt i etterkant av elevarbeidet spurte jeg elevene om de hadde tenkt gjennom hvorfor man må snu ulikhetstegnet under noen omstendigheter. Alle elevene i de tre gruppene hadde enten brukt eller nevnt regelen i arbeidet sitt, spesielt i forbindelse med Oppgave 2 (se Vedlegg A). Resultatene fra Oppgave 2 viste imidlertid at elevene totalt sett behersket algebraisk løsning av en lineær ulikhet. Atle og Emil var de elevene som under intervjuet kom med en forklaring av regelen om å snu ulikhetstegnet. Her vil jeg trekke frem to ulike eksempler på forståelse som så ut til å være gjeldende for elevene i utvalget.

5.3.1 Instrumentell forståelse av ulikhetstegnets retningsendring

Denne korte samtalen mellom Lasse og Per Ivar er tatt ut fra elevenes arbeid med Oppgave 2b. Her skal elevene avgjøre hvilke verdier for x som gjør at ytringen $3x + 2 > x + 10$ er sant. De bestemmer seg for å regne ut ulikheten, med andre ord en *behandling* innenfor det algebraiske representasjonsregisteret (Duval, 2006). Elevene kommer frem til ulikhetens riktige løsning, $x > 4$. Under arbeidet stiller Lasse et spørsmål til de andre som er gjengitt i samtalesekvensen nedenfor.

[Elevarbeid, Gruppe 2]

28.	Lasse:	Når du flytter over med plussfortegn, da trenger du ikke bytte side. Det er bare når man flytter over minus det, er det ikke det?
29.	Per Ivar:	Nei, hvis du ganger og deler med minus, så skal du skifte (peker litt med pennen i lufta).

I ytring 28 ønsker Lasse å få bekreftelse fra de andre på hvordan regelen er, og sier regelen slik han tror den er. Han bruker ordene “flytte over”, og dette forstår jeg som den algebraiske operasjonen å legge til eller trekke fra samme tall på begge sider av ulikhetstegnet. Lasse husker at det er i forbindelse med negative tall ulikhetstegnet må endre retning, men han sier det er “når man flytter over minus” (ytring 28). Per Ivar retter på Lasse i ytring 29, og kommer med den riktige utgaven av regelen. Da jeg litt senere stilte elevene spørsmålet om hvorfor de tror man skal snu tegnet, var det vanskelig for dem å svare på det.

[33]Den eleven som hadde en feilaktig oppfatning av fenomenet vil bli omtalt i den kommende presentasjonen.

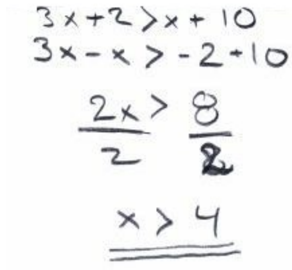
[Elevarbeid, Gruppe 2]

106.	Thea:	Hvorfor tror dere at man egentlig skal snu det ulikhetstegnet?
107.	Per Ivar:	Fordi man deler på min_ negativt.
108.	Thea:	Mhm
109.	Per Ivar:	Minus. Hvis man deler eller ganger med minus så skal man snu det. Er det ikke sånn?
110.	Lasse:	Men hvorfor tror du det?
111.	Thea:	Men hvorfor stemmer den regelen da, tror dere?
112.	Per Ivar:	Ehh..
113.	Vemund:	Ehh, jaa..
114.	Per Ivar:	Nei, jeg vet ikke. Vi har bare lært det.

Gjennom denne samtalesekvensen ser vi at Per Ivar bruker selve regelen til å svare på spørsmålet, og stiller selv et bekreftende spørsmål på om det han har sagt er riktig (ytring 109). I og med at Per Ivar er den første til å komme med en forklaring, spør Lasse ham om hvorfor han tror det stemmer (ytring 110). Jeg stiller spørsmålet videre til alle, slik at det ikke bare er Per Ivar som føler han må svare. Det viser seg at ingen av dem ikke har en forklaring på regelen, og dette bekreftes i intervjuene i etterkant.

Ut ifra samtalesekvensen fra elevarbeidet vil jeg karakterisere kunnskapen til Per Ivar og Lasse som prosedyrisk kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Vi finner igjen den ene delen av prosedyrisk kunnskap, kunnskap om matematikkens formel- og symbolspråk, i deres uttalelser og besvarelser. Denne kunnskapen kan observeres i elevenes besvarelser der de er bevisste på de syntaktiske reglene som gjelder når man skal bruke det formelle matematiske språket. Dette betyr at de er godt kjent med hvordan bokstav- og tallsymbolene skal plasseres i forhold til hverandre, og at de antakelig hadde sett at eksempelet $-+ > 3x$ ikke kan aksepteres som et matematisk syntaktisk riktig uttrykk. Figur 5.10 viser Per Ivars løsning av Oppgave 2a, som er en standard lineær ulikhet.

Vi kan finne den andre delen av prosedyrekunnskap hos Per Ivar i form av at han har kunnskap om selve reglen og prosedyren som må følges for å løse en lineær ulikhet i det algebraiske representasjonsregisteret. Det kan tyde på at prosedyren er lært uten mening, siden Per Ivar har lært prosedyren men kan ikke forklare hvorfor den stemmer (ytring 114). Dette er i tråd med det Skemp (1976) beskriver som instrumentell forståelse, og jeg vil da karakterisere både Lasses og Per Ivars forståelse av retningsendringen av ulikhetstegnet for instrumentell. Lasse har imidlertid en feilaktig oppfatning av regelen, mens Per Ivars oppfatning av regelen er den riktige.



Figur 5.10: Per Ivars løsning av Oppgave 2a.

Dette mener jeg er et eksempel på hvordan innlærte regler kan skape problemer hos elevene.

I denne sammenhengen velger jeg å definere prosessen hvor man endrer ulikhetstegnets retning når en ulikhet multipliseres eller divideres med et negativt tall som en sekundærprosess (Sfard & Linchevski, 1994). Videre definerer jeg primærprosessen til å være de aritmetiske prosedyrene som ligger bak, som innebærer en bevissthet rundt operasjoner på reelle tallene og spesielt egenskapene til negative tall. Ut ifra beskrivelsene av de to prosessene utfører Per Ivar den sekundære prosessen, men er ikke i stand til å referere til primærprosessen. Sfard og Linchevski (1994) bemerker at elever som ikke kan vise til primærprosessen oppfyller karakteristikken til Skemp (1976) om en instrumentell forståelse.

Denne korte samtalen gjengitt nedenfor fra intervjuet med Per Ivar viser hvordan han beskriver hvilken rolle regler har i løsning av ulikheter og likninger. Jeg mener denne ytringen er en bekreftelse på at prosedyrekunnskap og spesielt det å huske regler preger hans løsning av matematiske problemer, som igjen peker mot en instrumentell forståelse.

[Intervjusekvens, Per Ivar]

18. Thea: (..) Men hvordan synes du det er å jobbe med ulikheter?

19. Per Ivar: Njæ, jeg synes det er artig. Det er litt sånn_ det er noen regler som du må_ hvis du glemmer dem så er liksom hele likninga eller ulikheten ødelagt da, eller du får den ikke til.

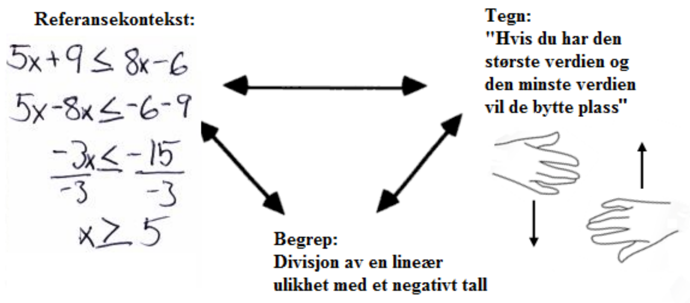
5.3.2 Relasjonell forståelse av ulikhetstegnets retningsendring

Jeg har valgt å trekke frem Atles resonnement som en representant for en relasjonell forståelse av fenomenet, siden hans og Emils forklaringer var av samme karakter. Med andre ord kan Atles resonnement representere begges forklaringer. Intervjusekvensen nedenfor viser Atles forklaring i lys av Oppgave 2b.

[Intervjusekvens, Atle]

40.	Thea:	Hva er det som skjer her? (Peker på siste del av Atles besvarelse av Oppgave 2b)
41.	Atle:	Nei, ulikhetstegnet snur jo, for du deler på minus, eller et negativt tall, så man snur ulikhetstegnet.
42.	Thea:	Har du tenkt noe på hvorfor det egentlig er sånn, at man må snu?
43.	Atle:	Det er jo fordi at når man deler eller ganger med et negativt tall, så vil jo_ hvis du har den største verdien og den minste verdien, så vil jo dem bytte plass (beveger hendene opp og ned i motsatt retning av hverandre). Den ene sida vil ta over den, den som var minst vil bli størst, den som var størst vil bli minst.
44.	Thea:	Mmm. Er det noe du har blitt forklart, eller er det noe du har bare tenkt at sånn blir det?
45.	Atle:	Nei, det er noe jeg har tenkt meg til siden, ja. Jeg lærte bare hvordan det var først.

Atle forklarer at den største og minste verdien vil bytte plass, og han bruker hendene for å vise dette. Videre sier han at det er noe han har tenkt seg til siden. Hans muntlige forklaring i ytring 43 kan ifølge Steinbring (2006) betegnes som et foreløpig matematisk tegn. Likeledes er hans håndbevegelser et annet tegn som støtter opp under hans muntlige forklaring. Ordbruken hans er også interessant, der han bruker uttrykk som "bytte plass" og "den ene sida vil ta over". Uttrykket "bytte plass" tolker jeg som en referanse til at tallene vil endre sin posisjon i forhold til hverandre på den reelle tallinja, når to verdier blir multiplisert med en negativ verdi. Dette forklarer han nærmere da han sier "den som var minst vil bli størst" og omvendt. Uttrykket "den ene sida vil ta over" tolker jeg som en indikasjon på at ulikhetstegnet må snus for å vise relasjonen mellom de to størrelsene han snakker om, fordi tallenes posisjon på tallinja har endret seg i forhold til hverandre. Atles forklaring kan beskrives gjennom Steinbrings (2006) epistemologiske trekant, som er vist i Figur 5.11. I dette tilfellet mener jeg referansekonteksten er Atles besvarelse av oppgaven i tillegg til mitt spørsmål "Hva er det som skjer her?". Den epistemologiske trekanten viser koblingen mellom referansekonteksten, tegnene som Atle bruker og begrepet som medieres mellom disse. Her mener jeg begrepet som medieres er "divisjon av en lineær ulikhet med et negativt tall".



Figur 5.11: Atles forklaring på fenomenet innsatt i den epistemologiske trekanten til Steinbring (2006).

Atle viser at han har prosedyrekunnskap når han behandler ulikheten i et algebraisk representasjonsregister (Duval, 2006). Videre tyder det på at han kobler sammen kunnskap om ulikhetstegnet som en relasjon, tallenes ordning på den reelle tallinja, negative tall og multiplikasjon. Dette ser jeg på som en form for begrepskunnskap der relasjoner mellom informasjonsdeler skapes (Hiebert & Lefevre, 1986). Atles forståelse av regelen vil jeg derfor karakterisere som relasjonell forståelse (Skemp, 1976), fordi han kan forklare regelen og vet hvorfor den gjelder på grunn av den begrepskunnskapen han innehar. Ved å undersøke Sfard og Linchevskis (1994) to prosesser i dette tilfellet, vil jeg konkludere med at Atle både utfører sekundærprosessen og er bevisst på primærprosessen som ligger bak regelen. Siden han har sin forklaring av regelen, vil han kunne bruke regelen på en meningsfull måte (Sfard & Linchevski, 1994).

I dette delkapitlet ble to former for forståelse presentert. I det neste kapitlet vil disse resultatene diskuteres nærmere, i likhet med funnene fra de to andre forskningsspørsmålene.

Kapittel 6

Diskusjon

I dette kapitlet vil jeg diskutere resultatene og analysene som ble presentert i Kapittel 5. Her vil også inndelingen samsvare med studiens tre forskningsspørsmål.

6.1 Elevenes beskrivelser av ulikheter og en ulikhets løsning

Etter å ha brukt Halmaghis (2011) kategorier til å plassere elevenes skriftlige beskrivelser av ulikheter, kom det frem at de fleste besvarelsene falt under begrepsoppfatning 0, 1, 2, og én besvarelse i begrepsoppfatning 3. Denne kategoriseringen fastslår likevel ikke at disse elevene er av denne oppfatningen fullt og helt, da de kun er basert på de skriftlige besvarelsene. To besvarelser var spesielt korte og gikk inn under *Begrepsoppfatning 0: Ulikhet som en blanding av bilder eller symboler i en matematisk setting.* Her viste elevene liten kunnskap om ulikhetsbegrepet, men de viste gjennom arbeidet at de hadde kunnskap om algebraisk løsning av ulikheter. I tillegg ga de beskrivelser av en ulikhets løsning som inngår i kategorien *Oversettelse.* Her brukte de ordene "større" og "mindre" og viste dermed tanken på en ulikhet som en ordningsrelasjon. Dette viser at disse skriftlige besvarelsene ikke gir et fullstendig bilde av elevenes oppfatning av ulikhetsbegrepet.

De to besvarelsene i kategorien *Begrepsoppfatning 1: Ulikhet som et instrument for å sammenlikne kjente størrelser* viser at elevene så på ulikhet som en ordningsrelasjon. Det viste seg at besvarelsene til tre av elevene falt inn under *Begrepsoppfatning 2: Ulikhet som en (fremmed) slektning av en likning*, og to av dem i underkategorien *Direkte forbindelse.* Disse elevene beskrev at en ulikhet var en type likning. I tillegg observerte jeg at flere av elevene i utvalget brukte ordet "likning" i noen tilfeller når de refererte til en ulikhet under elevarbeidet. Halmaghi (2011) fastslår at definisjonen av en ulikhet som "en likning med ulike komponenter" også var sentral i denne kategorien i hennes studie. Hun uttrykker at dette er et kjent fenomen i det matematiske klasserommet, og at likningsbegrepet ofte kan bli brukt av elever som en fellesbetegnelse for ulike matematiske uttrykk med tall eller symboler.

Dette demonstrerer at en slik beskrivelse av ulikheter ikke er unikt for elevene i mitt utvalg. Følgelig må det være en grunn til at denne oppfatningen er gjeldende for mange elever. Her kan ulikhetenes plass i matematikkundervisningen være sentral. I de fleste land blir ulikheter undervist som et underordnet tema i forbindelse med likninger, beskriver Boero og Bazzini (2004) og Halmaghi (2011). Kompetansemålene for 1T viser også at likninger og ulikheter er tilknyttet samme hovedområde, og i læreverket SINUS 1T (Oldervoll et al., 2009) kommer lineære ulikheter i slutten av kapitlet "Formler, likninger og ulikheter". Oldervoll et al. (2009) påpeker at ulikheter kan løses på omtrent samme måte som likninger. Dette mener jeg er med på å forsterke elevers kobling mellom ulikheter og likninger som gjør det lettere å tro at ulikheter er en spesiell type likning, og at likninger er en fellesbetegnelse på flere algebraiske uttrykk. Likningsbegrepet virker for dem å være et begrep som også inkluderer ulikheter, og kan derfor ses på som en fellesbetegnelse i elevenes matematiske register (Pimm, 1987). Funnene mine kan derfor tyde på på at det eksisterer et behov for å styrke elevenes kunnskap om definisjoner og begreper i matematikken. I tillegg er det viktig at elevene kommuniserer den matematiske kunnskapen med språket som et intellektuelt redskap slik at de får utviklet det matematiske registret.

I forhold til representasjoner av en ulikhets løsning, viste det seg at representasjon ved hjelp av ei tallinje var uvant for elevene. Jeg observerte at majoriteten av elevene ga forklaringer på en ulikhets løsning som tydet på en oversettelse fra en algebraisk representasjon til en representasjon i naturlig språk. Flere ga forklaringer som pekte på at løsningen var resultat av en prosedyre, i motsetning til Kristian og Emil. De hadde en tanke om en ulikhet som et åpent utsagn der løsningen viser verdier som gjør at ulikheten stemmer. Her mener jeg det er en forskjell i hvordan elevene ser på løsningen, og at tanken om en ulikhet som et åpent utsagn krever mer abstrakt tenkning enn en ulikhets løsning som et resultat av en prosedyre. Jeg mener funnene viser et behov for å representere en ulikhets løsning på flere måter og legge til rette for å se på en ulikhet som et åpent utsagn.

Det ser ut til at både Emil og Kristian kaller x for en variabel fordi x kan ha flere mulige verdier, og at variabelbegrepet ikke er forbeholdt funksjoner som involverer to varierende størrelser. Andre, som Lasse, brukte begrepet "ukjent" og uttrykte at x kan ha flere verdier. Dette indikerer at elevene ga bokstavsymbolet x betegnelsene "ukjent" og"variabel", men det de la i betydningen var ikke så ulikt. De forskjellige rollene til x blir imidlertid ikke tydeliggjort i læreverket. Radford (1996) påpeker at de ulike rollene har fått lite oppmerksomhet i tidligere matematikkundervisning.

6.2 Utfordringer i forbindelse med grafisk løsning

Her vil jeg diskutere resultatene fra de to gruppene jeg fokuserte på i Kapittel 5. Presentasjonen av gruppenes løsninger bar preg av forskjellen i graden av samarbeid hos elevene innad i gruppene. Elevene i Gruppe 1 arbeidet for det meste selvstendig og snakket sammen om sine løsninger i etterkant, mens elevene i Gruppe 2 samarbeidet om sine løsninger. I dette delkapitlet vil omdanningen fra grafisk todimensjonal til endimensjonal representasjon være sentral i diskusjonen av elevene i Gruppe 1 sin løsning. Videre vil jeg diskutere den representasjonen av ulikheten $2x - 1 > 2 - x$ som GeoGebra fremla for elevene i Gruppe 2. Gruppas utforming av tabellen vil også diskuteres nærmere, og jeg vil drøfte hvordan en implementert prosedyre ser ut til å styre elevenes matematiske aktivitet. Mot slutten av delkapitlet undersøker jeg nærmere ulikhetstegnets betydning i forbindelse med elevenes grafiske løsning, før jeg diskuterer rolleskiftene til bokstavsymbolet x i forbindelse med elevenes løsning.

6.2.1 Den avgjørende omdanningen

Elevene i Gruppe 1 viste seg å gi ulike løsninger til Oppgave 3, der den siste omdanningen som involverte grafiske avlesing var utslagsgivende til forskjellene. Duval (2006) formidler at i en kongruent omdanning eksisterer det en en-til-en-korrespondanse mellom komponentene i startregisteret og målregisteret. Sackur (2004) uttrykker at omdanningen fra et grafisk todimensjonalt til et grafisk endimensjonalt representasjonsregister (III-IV)[34] er kongruent i form av at det er en en-til-en-korrespondanse mellom punktene på den grafen som har høyere eller lavere y-verdier enn den andre, og punktenes x-verdier. Ifølge Duval (2006) skal en

[34]Betegnelsen viser til presentasjonen i Tabell 3.1 i Kapittel 3.3.

kongruent omdanning være mindre problematisk for elever enn en ikke-kongruent omdanning. Imidlertid krever den siste omdanningen (III-IV) at elevene evner å se ulikhetstegnets betydning i forbindelse med drøftingen av de grafisk representerte funksjonene. Dette tolker jeg som plassen der den formelle komponenten i matematisk aktivitet er avgjørende (Fischbein, 1994), fordi ulikhetstegnets rolle må taes i betraktning og informasjon om grafene må forlates.

Det tydet på at grafisk løsning av lineære likninger fungerte som en algoritmisk modell for Silje, der den formelle komponenten ikke var like deltakende i hennes løsning. Hun ga punktet $(1, 1)$ som resultat av den grafiske løsningen av ulikheten $2x - 1 > 2 - x$. Dette gjorde hun til tross for at hun presiserte at man ikke får en bestemt x-verdi i hennes beskrivelse av ulikhetsbegrepet, og beskrivelsen gikk under underkategorien *Indirekte forbindelse til likningsbegrepet*. En mulig forklaring kan være at lineære likninger og dermed også grafisk løsning av likninger er bedre implementert, siden det er vanlig å introdusere likninger og lineære funksjoner på et tidligere tidspunkt enn ulikheter (se Utdanningsdirektoratet, 2006). At ulikheter ofte undervises som et underordnet tema i forbindelse med likninger som ble diskutert i Kapittel 3.4, kan også være en medvirkende faktor. Skjæringspunktet til de to rette linjene kan da være et intuitivt fokus i den todimensjonale grafiske representasjonen. Dette mener jeg derfor er et eksempel på hvordan implementerte prosedyrer kan styre en elevs løsningsstrategi.

I det forrige kapitlet viste jeg at Silje løste ulikheten algebraisk etter at Kristian kom med sin påstand om at den ene linja var større enn den andre når $x > 1$. Denne handlingen kan tolkes som et behov for å finne den riktige løsningen siden hennes løsning $(1, 1)$ ikke samsvarte med Kristians forklaring. Dette ser jeg på som et eksempel på hvor verdifullt samhandling og kommunikasjon i matematiske aktiviteter er, der språket fungerer som et medierende redskap som formidler matematisk kunnskap.

For Atles vedkommende, kom han ikke med en forklaring på sin todimensjonale grafiske representasjon av ulikheten. Dette gjorde at han ikke utførte den siste omdanningen som innebærer å forlate informasjon om grafene til fordel for fokusering på de essensielle x-verdiene. Derfor kan det tyde på at den formelle komponenten ikke var vesentlig deltakende hos Atle.

Kristian var én av få i utvalget som kom med en forklaring til grafene og gjorde den siste omdanningen (III-IV) muntlig. Man kan likevel merke seg at Kristian bekreftet Siljes svar $(1, 1)$ før han kom med sin forklaring.[35] I tillegg konkluderer han (riktignok utydelig) med at "svaret må være.. en" i slutten av samme ytring. Dette mener jeg kan kobles til hva slags syn Kristian har av en ulikhets løsning. I Kapittel 5.2.1 ble det lagt frem data som fremmet at hans syn på løsningen var først og fremst som et grensepunkt. Likevel så han at ulikheten stemte for $x > 1$, og dermed hindret ikke tanken om grensepunkt ham i å se de øvrige verdiene i løsningsmengden.

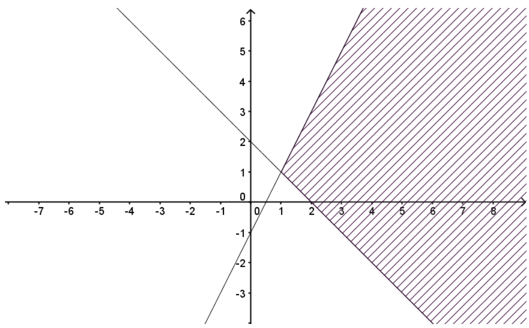
6.2.2 Skjulte transformasjoner i GeoGebra?

Lasse, Vemund og Per Ivar valgte en annerledes strategi for å løse ulikheten grafisk enn elevene i Gruppe 1, og de samarbeidet også om løsningen. I analysen trakk jeg frem deres møte med GeoGebras representasjon og deres utforming av en tabell. Jeg brukte Steinbrings (2006) teori om referansekontekst og tegn og illustrerte elevenes manglende meningsskaping for GeoGebras tegn. Det er interessant å undersøke nærmere hvorfor elevene reagerer med forvirring på GeoGebras fremstilling. En mulig grunn til at elevene sliter med å gi mening til denne representasjonen, kan være at det er mange transformasjoner som ligger bak. En mulig tolkning av GeoGebras transformasjoner er at det er en prosess som skjer i to steg. Først skjer det skjult behandling innenfor et algebraisk representasjonsregister, og deretter blir denne endimensjonale løsningen representert grafikkfeltet, et grafisk todimensjonalt register. Det sistnevnte steget er dermed en omdanning fra algebraisk representasjon til grafisk representasjon. Resultatet av dette blir derfor markeringen av arealet til høyre for den stiplete linjen $x = 1$, som gir frie y-verdier. Ulikhetens løsningsmengde i GeoGebra kan derfor skrives som $L = \{(x, y)|x > 1\}$, det vil si alle tallparene (x, y) som tilfredsstiller $x > 1$. Når elevene er vant til å se en lineær ulikhets løsning på formen $x > a$, kan det type på at den todimensjonale representasjonen gjør det ekstra vanskelig for dem å gi mening til skjermbildet i GeoGebra. Imidlertid gir også GeoGebra mulighet for å uttrykke den endimensjonale løsningsmengden $x \in < 1, \infty >$ som et åpent intervall på x-aksen, men denne innstillingen må velges manuelt.

Jeg mener at den grafisk todimensjonale representasjonen av løsningsmengden der alle tallparene (x, y) som er begrenset av $y_1 = 2x - 1$ og $y_2 = 2 - x$ er markert, ville vært en mer matematisk riktig todimensjonal representasjon. Det vil si at

[35] Ytring 96 i sekvensen i Kapittel 5.2.1.

løsningsmengden blir $L = \{(x, y)|y_1 > y_2\}$. Denne representasjonen er vist i Figur 6.1 der løsningsmengden er det skraverte området. I tillegg til å være mer matematisk korrekt, mener jeg også at en slik representasjon ville ha gjort avstanden til den algebraiske representasjonen mindre, i form av at ulikhetens to sider kan gjenkjennes som de to rette linjene i grafikkfeltet.



Figur 6.1: En alternativ todimensjonal representasjon av ulikheten i GeoGebra.

6.2.3 Implementert prosedyre som styrer den matematiske aktiviteten

Både Atle og Lasse, Vemund og Per Ivar i Gruppe 2 valgte å lage en tabell for å uttrykke ulikheten grafisk. Det viste seg at elevene hadde vanskeligheter med å fullføre tabellen på grunnlag av usikkerhet rundt utverdiene.

Igjen vil jeg vise til Fischbeins (1994) tre komponenter av matematisk aktivitet i forbindelse med elevene i Gruppe 2 sitt arbeid. Deres skriftlige besvarelser og ytringer peker mot at det er den algoritmiske og den intuitive komponenten som styrer deres matematiske aktivitet. Elevene kjenner til prosedyren som gjelder for utforming av en tabell i forbindelse med en grafisk representasjon av en lineær funksjon. Dette er også en form for prosedyrekunnskap som Hiebert og Lefevre (1986) beskriver. Det kan virke som om Per Ivar behandler ulikheten som én lineær funksjon når han gir x verdiene 0, 1 og 2 og hver aritmetiske ulikhet blir satt inn i samme celle i andre kolonne i tabellen de lagde i Figur 5.9 i Kapittel 5. Som en konsekvens av at gjenkjenningen av to lineære funksjoner i stedet for en ulikhet ikke skjer, lager elevene derfor én tabell og setter inn hele ulikheten. Dette fører til et resultat som ikke samsvarer med logiske forsvarlige sannheter (Fischbein, 1994), i form av ugyldige ulikheter. Det kan av disse grunner tyde på at elevene har en intuitiv idé om at prosedyren for å lage en tabell for én lineær funksjon også kan brukes for én lineær ulikhet, og kan karakteriseres som en algoritmisk modell. Den formelle komponenten som innebærer en bevissthet rundt ulikhetstegnets betydning er derfor lite aktiv i elevenes aktivitet.

6.3 Ulikhetstegnets betydning i forbindelse med grafisk løsning

Det ser ut til at grafisk løsning av lineære likninger og utforming av tabell basert på én lineær funksjon har fungert som algoritmiske modeller for enkelte av elevene. Relasjonen mellom de to rette linjene i en grafisk todimensjonal representasjon virket å være vanskelig for enkelte i utvalget, og at fokuset lå på å representere ulikheten som to rette linjer. Et fravær av ulikhetstegnets betydning og da også den formelle komponenten er tydelig i den matematiske aktiviteten hos mange elevene. Likevel var det et par elever som gjennomførte den siste omdanningen slik at løsningsmengden ble identifisert. De var de eneste som tolket den grafisk todimensjonale representasjonen og involverte ulikhetstegnets betydning i sine forklaringer.

Selv om mange av elevene kunne beskrive ulikhetsrelasjonen og brukte ordene større eller mindre, viste det seg at denne kunnskapen ikke gjorde seg gjeldende i den grafiske løsningen. Elevene ga også uttrykk for at en representasjon av en ulikhets løsning på en tallinje var uvant. Fem av elevene viste $x > 4$ på tallinja, men det var ingen av dem som presiserte om $x = 4$ var med i løsningsmengden eller ei. En grafisk endimensjonal representasjon på tallinje krever en reflektering rundt hva $x > a$ betyr, og hvor mange verdier det er snakk om.

I denne sammenhengen ønsker jeg å trekke inn noen tanker som Kristian ytret mot slutten intervjuet når vi snakket om hvilken vei man må sette ulikhetstegnet for å uttrykke en ulikhet: "Jeg sliter ofte med det. Det er ofte at du tenker motsatt av hva den er. For til vanlig når du gjør oppgaver som står i boka, så trenger du ikke tenke på hva det betyr, når x-en er større eller mindre, for at du regner bare ut og ser i fasiten om du har riktig."

Denne ytringen tyder på at en ensidig løsning av algebraiske ulikheter gjør at Kristian ikke trenger å tenke over hva ulikhetstegnet betyr, men kan bare sammenlikne sitt svar med læreverkets. Men dette er noe han er oppmerksom på selv. Jeg tror imidlertid ikke Kristian er alene om å la være å reflektere over ulikhetstegnet betydning i en slik sammenheng. Jeg mener dette viser et behov for å representere en ulikhets løsning på flere måter, og behov for refleksjon rundt hva løsningen egentlig betyr.

6.3.1 x sin rolle i grafisk løsning

I Kapittel 3.3 beskrev jeg hvordan x går fra å være en ukjent i ulikheten til å være en variabel i to funksjonsuttrykk som representeres grafisk. Til slutt går x tilbake til å være en ukjent som får identiteten sin avslørt (Radford, 1996). Det så ut til at elevene taklet det første rolleskiftet til x i den grafiske løsningen ved at de representerte hver side som ei rett linje, eller satte inn verdier for x i en tabell. Det siste skiftet er forbundet med avlesingen av grafen og omdanningen fra et grafisk todimensjonal til en endimensjonal representasjon. De to elevene som gjennomførte denne omdanningen mestret også dette rolleskiftet. I og med at flere av elevene ikke gjennomførte denne siste transformasjonen, ble ikke dette skiftet registrert hos dem. En mulig forklaring på hvorfor det første vekslingen fra ukjent til variabel ikke var et stort steg å ta for elevene, kan være fordi de var klar over at bokstavsymbolet x i en algebraisk ulikhet kan inneha flere verdier.

6.4 Forklaring som fremmer relasjonell forståelse

I Kapittel 3.1 viste jeg at ulikhetstegnets retningsendring er en naturlig konsekvens av multiplikasjon av en ulikhet med et negativt, reelt tall.

Elevarbeidet og intervjuene viste at det kun var to elever som kunne forklare hvorfor man må snu ulikhetstegnet, men alle kunne bruke regelen som en sekundærprosess i algebraisk løsning av lineære ulikheter. Per Ivar og Lasse ble derfor representanter for elevene som hadde en instrumentell forståelse av fenomenet, der det ikke ble gjort en kobling til primærprosessen som ligger bak (Sfard & Linchevski, 1994).

Atle og Emil var de elevene som viste en relasjonell forståelse ved at de var bevisste på primærprosessen, de aritmetiske prosedyrene som er årsaken til at man må snu ulikhetstegnet. Jeg mener Atles forklaring av fenomenet var av en fysisk og dynamisk karakter der han brukte ord som “bytte plass”, “den ene sida vil ta over” og "den som var minst vil bli størst", i tillegg til at håndbevegelsene hans fungerte som et matematisk tegn som bidro til å en visualisering av endringen i tallenes ordning. Hans resonnement står i kontrast til beviset som læreverket SINUS 1T legger frem. Beviset ble kort beskrevet i Kapittel 3.4. Dette beviset er skrevet på en algebraisk form, der bokstavsymbolene x, y og a brukes. Figur 6.2 gjengir den siste delen av beviset i tilfellet der a er et negativt tall.

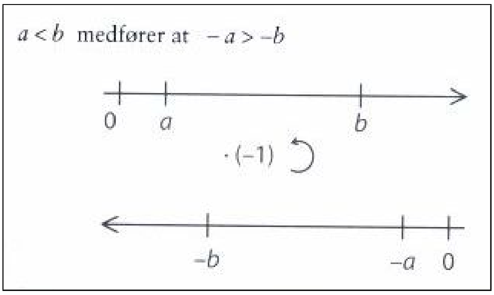
La nå a være et negativt tall. Hvis $(x - y)$ da er et positivt tall,
er produktet av a og $(x - y)$ et negativt tall. Det gir
$x > y$
$x - y > 0$
$a \cdot (x - y) < 0$
$a \cdot x - a \cdot y < 0$
$a \cdot x < a \cdot y$
I ulikheten $x > y$ må vi snu ulikhetstegnet når vi multipliserer med et negativt tall på begge sidene av ulikhetstegnet. Det gjelder i alle ulikheter og for alle de fire ulikhetstegnene $<, \leq, >$ og $\geq$.

Figur 6.2: Utdrag fra beviset av Oldervoll et al. (2009, s. 86).

Beviset krever at elevene evner å følge de sekundærprosessene som skjer, det vil si de algebraiske manipulasjonene i seg selv. I tillegg må de erkjenne at x og y i denne sammenhengen har rollen som tilfeldige, generaliserte tall som oppfyller at x er større enn y, og ikke som varierende størrelser i et funksjonsuttrykk (Philipp, 1992).

Selvik, Rinvold, og Høines (2007) har en annen tilnærming til fenomenet. De tar utgangspunkt i multipliksjon av (-1) på begge sier av ulikheten $a < b$, og viser til å se på tallene som punkter på tallinja. Videre sier de at multiplikasjon med (-1) tilsvarer å rotere tallinja 180° eller å speile tallinja om origo. Dette vises på Figur 6.3. De konkluderer med at speiling om origo bytter om tallinjas høyre og venstre side, og av den grunn også ulikhetstegnets retning.

Beskrivelsen til Selvik et al. (2007) har en mer operasjonell og visuell egenart enn beviset på Figur 6.2 i form at av det brukes en grafisk endimensjonal representasjon for å forklare fenomenet. I tillegg bruker forfatterne begrepene "speiling", "rotasjon" og "bytte". Den operasjonelle ordbruken i forklaringen til Selvik et al. har derfor fellestrekk med både Atles og Emils forklaring. Dette kan tyde på at en slik visualisering som Selvik et al. (2007) gir, kan være mer forklarende for elever enn det formelle beviset som Figur 6.2 viser.



Figur 6.3: Visuell forklaring av multiplikasjon av $a < b$ med -1 (Selvik et al., 2007, s. 37).

Jeg mener også at en slik visuell forklaring lettere kan mediere en type begrepskunnskap hos elevene, der kunnskap om ulikhetstegnet som en relasjon, tallenes ordning på den reelle tallinja og multiplikasjon med (-1) inngår. Forhåpentligvis kan det gjøre at elevene ikke har en ren instrumentell forståelse av " å snu ulikhetstegnet i visse tilfeller", men at de vil kunne forme en relasjonell forståelse av fenomenet.

6.5 Studiens funn og tidligere forskning

Denne studien viser at mange av elevene dro koblinger mellom likningsbegrepet og ulikhetsbegrepet, både i de skriftlige besvarelsene og i de muntlige ytringene. Majoriteten av elevene beskrev en ulikhets løsning som en muntlig oversettelse av den algebraiske representasjonen $x > a$. Funnene viser at ulikhetstegnets betydning var fraværende i deler av elevenes løsning, både i forbindelse med utformingen av tabell og manglende avlesing av den grafisk todimensjonale representasjonen. Resultatene viser at mange av elevene i utvalget gjennomførte derfor ikke en fullstendig grafisk løsning da de tok utgangspunkt i en ulikhet i en algebraisk representasjon. Implementerte prosedyrer for funksjoner og likninger kan ha styrt flere av elevenes grafiske løsning av ulikheten $2x - 1 > 2 - x$. Et par av elevene i utvalget løste oppgaven slik Sackur (2004) og Dreyfus og Eisenberg (1985) beskriver, slik at de fire omdanningene ble gjennomført og løsningsmengden ble funnet. Funnene viser også at en instrumentell forståelse av multiplikasjon av en ulikhet med negative tall var gjeldende for mange av elevene i utvalget. Likevel var det to elever som forklarte fenomenet på en slik måte at deres forståelse ble karakterisert som en relasjonell forståelse.

I Kapittel 3 presenterte jeg forskning som har blitt gjort på elevers læring av ulikheter. Der la jeg frem ulike forskningsresultater som viser at elever gjør koblinger til likningsbegrepet i deres arbeid med lineære ulikheter. Ellerton og Clements (2011) og Tsamir og Almog (2001) observerte at lærerstudenter og elever dro upassende paralleller mellom løsningsprosesser av likninger og av ulikheter. Tilsvarende funn observerte også Tsamir og Bazzini (2002) da de fant ut at likninger fungerte som prototyper i elevenes algoritmiske modell for å løse ulikheter algebraisk. Denne teorien ser ut til å sammenfalle med en situasjon fra denne studien, da grafisk løsning av likninger ble karakterisert som en algoritmisk modell. Tsamir og Almog (2001) mener at det er de strukturelle likhetene mellom likninger og ulikheter som er utslagsgivende for at elever trekker paralleller.

Også de norske elevene fra TIMSS Advanced 2008 som Pedersen og Grønmo (2010) rapporterer om, så ikke ut til å ha en klar forståelse av hvordan rasjonale og andregradsulikheter avviker fra likninger. Selv om deres undersøkelse ikke omfattet lineære likninger, mener jeg tendensene er de samme. Pedersen og Grønmo (2010) skiller mellom ren matematikk og matematikk anvendt i en virkelighetsnær kontekst, og mener at den sistnevnte tilnærmingen har vært en drivkraft for matematikken i skolen i de nordiske landene. De antyder at det kanskje må legges mer vekt på ren matematikk i skolen. I likhet med Pedersen og Grønmo (2010), mener jeg at elevenes kunnskap om definisjoner og begreper i matematikken må styrkes. I denne sammenhengen gjelder dette spesielt ulikhetsbegrepet og likningsbegrepet. Jeg mener dette vil legge til rette for at den formelle komponenten blir en aktiv deltaker i elevenes matematiske aktivitet.

Funksjonstilnærming til ulikheter var i fokus i forskningen til Farmaki og Verikios (2008). De uttrykte at multiple representasjoner i en problemløsningskontekst var til hjelp for elevenes utvikling av forståelse av ulikhetsbegrepet. De startet med undervisning om funksjonsbegrepet der de matematiske problemene var satt i en reell kontekst fra virkeligheten. Elevene i utvalget mitt har imidlertid ikke hatt undervisning med en funksjonstilnærming til ulikhetsbegrepet, men algebraisk løsning har vært mest i fokus. Grafisk løsning av lineære ulikheter ble likevel gjennomgått ved bruk av GeoGebra i slutten av undervisningstiden. Sackur (2004) anerkjenner at elever kan ha vanskeligheter med å komme tilbake til x og finne løsningsmengden i en grafisk representasjon av en ulikhet. Dette stemmer overens med noen tilfeller i denne studien.

Sfard og Linchevski (1994) fant i sin undersøkelse ut at elevene støttet seg tungt til sekundære prosesser, og det viste seg at elevene ikke maktet å koble de algebraiske reglene til aritmetiske lover. Dette sammenfaller med min karakterisering av instrumentell forståelse rundt multiplikasjon av negative tall, der majoriteten av elevene i utvalget mitt utførte den sekundære prosessen uten å være i stand til å referere til primærprosessen. Her definerte jeg sekundærprosessen til å være de aritmetiske prosedyrene som forklarer hvorfor ulikhetstegnet endrer retning, som innebærer en bevissthet rundt operasjoner på reelle tallene og spesielt egenskapene til negative tall.

6.6 Diskusjon av metode

I Kapittel 3 presenterte jeg studiens metodologi og argumenterte for hvorfor jeg har valgt observasjon og intervju som metode for datainnsamlingen. En styrke for denne studien er at jeg samlet inn data fra flere grupper og har både skriftlige besvarelser og muntlige ytringer som datagrunnlag. Selve datainnsamlingen foregikk over et begrenset tidsrom, men det er også en følge av tidsrammen for masteroppgaven.

Siden det var jeg som laget oppgaveheftet som elevene skulle arbeide med gruppevis, hadde jeg full frihet til designet. Tidlig i prosessen hadde jeg flere fokusområder som senere resulterte i tre forskningsspørsmål. På grunn av forskjellig fokus valgte jeg å designe et oppgavesett med seks oppgaver av ulik karakter. Denne studien baserer seg kun på tre av oppgavene i heftet. De andre oppgavene la vekt på andre overganger mellom representasjoner, blant annet fra naturlig språk til algebraisk representasjon. Oppgave 6 tar for seg likninger og ulikheter som har tom løsningsmengde eller alle de reelle tall som løsningsmengde. Dette er noe jeg ikke har fokusert på, men som hadde vært interessant å undersøke videre. Jeg kunne med fordel ha konsentrert fokuset litt og hadde derfor ikke trengt å ha så mange ulike oppgaver. Imidlertid bærer denne studien et sterkt preg av det fleksible designet som ligger til grunn i form av at designet har utviklet seg gjennom prosessen, og forskningsspørsmålene deretter. Elevenes arbeid med oppgaveheftet var derfor avgjørende for fokuset mitt videre. Dette gjorde at de oppgavene som jeg i starten ønsket å vektlegge, ble erstattet av andre. Dette gjaldt spesielt Oppgave 4 der elevene skulle finne den algebraiske og den grafiske representasjonen av en ulikhet som passet sammen. Resultatene fra denne oppgaven viste at elevene brukte sammenlikningsstrategier som gjorde at de ikke trengte å nærme seg ulikhetsbegrepet. Dette er et eksempel på hvordan målkunnskapen ikke ble oppnådd hos elevene.

Skulle jeg ha gjennomført undersøkelsen en gang til, ville jeg vært nøyere på å dokumentere at alle gruppene fikk den samme informasjonen om gjennomføringen, blant annet avklaringen av min rolle. Det er også flere momenter som jeg ikke fikk snakket grundig nok om med elevene i intervjuet på grunn av utviklingen av prosessen og fokus for forskningsspørsmålene. For eksempel kunne jeg ha snakket med elevene om læreverkets bevis på ulikhetstegnets retningsendring, og fokusert mer på Oppgave 3 enn jeg gjorde i intervjuet.

I tillegg var det ikke alle gruppene som samhandlet og diskuterte sine løsninger i like stor grad. Dette kan være et resultat av at elevene skulle levere inn hver sin besvarelse, i tillegg til at Gruppe 3 kun bestod av to elever. Derfor valgte jeg å både fokusere på elevenes individuelle skriftlige beskrivelser, muntlige forklaringer og gruppenes grafiske løsning.

Et alternativ for å begrense studiens omfang, kunne være å redusere antall forskningsspørsmål. Dette hadde gjort at det teoretiske rammeverket ikke ville bli så omfattende og mangfoldig. Jeg valgte imidlertid å beholde alle fordi jeg hadde et sterkt ønske om å finne svar på samtlige spørsmål, og mener alle er viktige spørsmål som får følger for elevenes videre læring av matematiske tema.

Kapittel 7

Avslutning og perspektivering

I denne kvalitative studien har jeg sett på ulike aspekter ved lineære ulikheter ved å undersøke åtte 1T-elevers matematiske aktivitet. Datamaterialet ble samlet inn gjennom videoopptak av elevenes arbeid med et egenprodusert oppgavehefte, i tillegg til lydopptak av intervju i etterkant av arbeidet.

Det første forskningsspørsmålet omhandlet elevenes beskrivelser av ulikhetsbegrepet og en ulikhets løsning, mens det andre fokuserte på transformasjoner involvert i elevenes grafiske løsning. Det siste forskningsspørsmålet omhandlet elevenes forståelse av ulikhetstegnets retningsendringer i visse tilfeller. Disse spørsmålene tar opp viktige momenter i læringen av lineære ulikheter, som imidlertid læreplanen implisitt krever at elevene har kontroll på.

Det er det sosiokulturelle perspektivet på læring ligger til grunn for studien. Som analyseverktøy i forbindelse med det første forskningsspørsmålet ble Halmaghis (2011) kategorier av begrepsoppfatning brukt. I analysen av elevenes grafiske løsning var Duvals (2006) teori om semiotiske representasjoner sentral, og Sackurs (2004) redegjørelse av de nødvendige transformasjonene la grunnlaget for analyseringen av elevenes løsningsstrategier. Skemps (1976) klassifisering av instrumentell og relasjonell forståelse var hovedteorien som det tredje forskningsspørsmålet baserte seg på.

Elevenes skriftlige beskrivelser av ulikhetsbegrepet viser at de var av ulik karakter, og kunne bli klassifisert i fire forskjellige kategorier. Flere elevene trakk koblinger til likningsbegrepet og omtalte en ulikhet som en likning. Halmaghi (2011) påpeker at dette er et kjent fenomen, og andre studier har funnet ut at elevene gjør sterke koblinger til likninger når de løser ulikheter (Ellerton & Clements, 2011; Tsamir & Almog, 2001; Tsamir & Bazzini, 2002; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Likevel var flesteparten av elevene i utvalget klar over at en ulikhet har flere verdier som sin løsning.

Selv om elevene ga mer eller mindre uttrykk for hva en matematisk ulikhet er i starten av elevarbeidet, viste det seg at ulikhetstegnets betydning ble borte i den grafiske løsningen hos mange av elevene. Derfor viste det seg at den formelle komponenten var lite deltakende i deres matematiske aktivitet. Derfor er det viktig å ha kunnskap om ulikhetstegnets rolle som relasjon mellom størrelser slik at den formelle komponenten forsterkes. Hos en elev virket det som om grafisk løsning av likninger fungerte som en algoritmisk modell for grafisk løsning av en lineær ulikhet. I tillegg tydet det på at prosedyren for å lage en tabell for én lineær funksjon fungerte som en algoritmisk modell for å representere hele ulikheten i en tabell i løsningen til Gruppe 3. Likevel gjennomførte et par elever en fullstendig overgang fra en algebraisk representasjon til en grafisk endimensjonal representasjon, der resultatet av den siste omdanningen ble beskrevet med ord. Dette viser hvor viktig det er å ha kunnskap om grafisk representasjon av to lineære uttrykk, slik at ulikhetstegnets betydning lettere kan være i fokus.

Bruken av den dynamiske programvaren GeoGebra førte til at tre elever fikk vanskeligheter med å gi mening til representasjonen den ga. Sett i lys av Steinbring (2006), var ikke relasjonen mellom referansekonteksten og tegnet meningsfull for elevene. Elevene gjenkjente dermed ikke sentrale komponenter i den grafiske representasjonen. Dette er et eksempel på hvordan et digitalt verktøy ikke lykkes i å mediere matematisk kunnskap for elevene. Disse resultatene viser at det er behov for en vurdering av om målkunnskapen faktisk blir nådd ved bruk av et digitalt hjelpemiddel, og hva slags kunnskap som egentlig medieres. Kanskje vil en grafisk løsning som Dreyfus og Eisenberg (1985) og Sackur (2004) beskriver være et godt valg i forbindelse med bruken av en dynamisk matematisk programvare i undervisningen av ulikheter. Ulikhetens to sider må da bli betraktet som to funksjoner som kan representeres i GeoGebra, og funksjonsverdiene må sammenliknes.

Når det gjelder ulikhetstegnets retningsendring, viste det seg at en instrumentell forståelse av fenomenet var gjeldende for mange av elevene. Disse elevene hadde prosedyrekunnskap i forbindelse med bruk av regelen, men kunne ikke komme med en forklaring av den. To av elevene viste en relasjonell forståelse ved at de kom med sine egne forklaringer av fenomenet. Atles forklaring representerte denne forståelsen i Kapittel 5. Den epistemologiske trekanten ble brukt for å vise medieringen mellom referansekonteksten og tegnene, som i dette tilfellet var henholdsvis Oppgave 2b og hans ytring og håndbevegelser. Det tydet på at han koblet sammen kunnskap om tallenes ordning på den reelle tallinja, tanken om ulikhet som en relasjon, negative tall og multiplikasjon. En forklaring som Atle og Selvik et al. (2007) gir, mener jeg derfor bør brukes av lærere for å fremme relasjonell forståelse og gi mulighet til å koble sammen kunnskap til begrepskunnskap, slik at regelen vil føles mindre mystisk for elever.[36] Jeg formoder også at elevene vil være i bedre stand til å gi mening til rasjonale ulikheter og andre matematiske tema.

Denne studien viser at arbeid med lineære ulikheter har skjulte aspekter ved seg som kan være krevende for elever. Studien bidrar til å kaste lys over de transformasjonene elever må gjøre for å løse en ulikhet grafisk, og de problemene det kan medføre. Den viser også hvor avgjørende en bevissthet rundt ulikhetstegnets betydning er for grafisk løsning og for forståelsen av tegnets retningsendring. Som lærer må man likevel ikke ta for gitt at elever mestrer grafisk løsning av lineære ulikheter selv om de har kjennskap til hva ulikhetstegnet betyr. Jeg mener lærere også må legge større vekt på at bokstavsymbolet x skifter roller gjennom den grafiske løsningen.

Selv om forskningen har rettet fokus mot læring og undervisning av ulikheter i den senere tid, er det flere områder av temaet som det er behov for å undersøke nærmere. Når det gjelder spørsmålet om hvordan man bør tilnærme seg lineære ulikheter i undervisningen, er forskernes meninger delte.[37] Hvordan man bør legge opp undervisningen slik at man unngår at elevene gjør uheldige koblinger mellom likningsbegrepet og ulikhetsbegrepet, er et sentralt spørsmål. Jeg mener også det må fokuseres mer på hvordan grafisk tilnærming til ulikheter kan gjøres meningsfullt for elever slik at ulikhetstegnets betydning kommer i fokus.

Gjennom masteroppgaven har jeg først og fremst lært mye av å forme min egen undersøkelse. Jeg erfarte at matematikkoppgavenes utforming hadde stor betydning for måten elevene løste problemene på. Det at elevene ikke trengte å nærme seg målkunnskapen i noen tilfeller, er verdifull erfaring å ta med seg som fremtidig lærer. Undersøkelsen har blant annet gjort at jeg er klar over hvordan elever kan gjøre uheldige forbindelser mellom likninger og ulikheter, og hvordan grafisk løsning kan by på problemer for elever som likevel kjenner til tanken om en ulikhet som en ordningsrelasjon.

[36] Forklaringen til Selvik et al. (2007) ble diskutert i Kapittel 6.4.
[37] Dette ble tatt opp i Kapittel 3.6.

Referanser

Adams, R. (2006). *Calculus. A complete course* (6. utg.). Toronto, Canada: Pearson Addison Wesley.

Bagni, G.T. (2006). Inequalities and equations: History and didactics. I M. Bosch (red.), *Proceedings of the fourth congress of the european society for research in mathematics education* (s. 652-662). Sant Feliu de Guíxols, Spania: CERME.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: The need for complementary perspectives. I M. Høines & A. Fuglestad (red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, s. 139-142). Bergen, Norge: PME.

Boero, P., Bazzini, L., & Garuti, R. (2001a). Moving symbols around or developing understanding: The case of algebraic expressions. I M. van den Heuvel-Panhuizen (red.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, s. 121-128). Utrecht , Nederland: PME.

Boero, P., Bazzini, L., & Garuti, R. (2001b). Metaphors in teaching and learning mathematics: A case study concerning inequalities. I M. van den Heuvel-Panhuizen (red.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, s. 185-192). Utrecht , Nederland: PME.

Bogdan, R., & Biklen, S.K. (2003). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods* (4. utg.). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). Abingdon, England: Routledge.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1985). A graphical approach to solving inequalities. *School Science and Mathematics*, *85*(8), 651-662.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. I T. Nakahara & M. Koyama (red.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, s. 55-69). Hiroshima, Japan: PME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Dysthe, O. (2001). Om samanhengen mellom dialog, samspel og læring. I O. Dysthe (red.), *Dialog, samspel og læring* (s. 9-30). Oslo, Norge: Abstrakt.

Ellerton, N.F., & Clements, M.A.K. (2011). Prospective middle-school mathematics teachers' knowledge of equations and inequalities. I J. Cai & E. Knuth (red.), *Early algebraization* (s. 379-408). Berlin, Tyskland: Springer.

Ely, R., & Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal*, *24*(1), 19-38.

Enderton, H.B. (1977). *Elements of set theory.* New York, NY: Academic Press.

Farmaki, V., & Verikios, P. (2008). *Function representations as problem solving strategies: The case of inequality.* Paper presentert på The 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico.

Firestone, W.A. (1993). Alternative arguments for generalizing from data as applied to qualitative research. *Educational Researcher*, *22*(4), 16-23.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. I R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (red.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (s. 231-245). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Flick, U. (2006). *An introduction to qualitative research* (3. utg.). London, England:

Sage Publications.

Gibbs, G.R. (2007). *Analyzing qualitative data.* London, England: Sage Publications.

Gjerdrum, A., Kristiansen, E.W., & Skovdahl, E. (2011). *Tusen millioner 2A.* Oslo, Norge: Cappelen Damm.

Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities.* (Upublisert doktoravhandling), Simon Fraser University, Burnaby, Canada.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and prodecural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and prodecural knowledge: The case of mathematics* (s. 1-27). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kries, Y., & Lavicza, Z. (2008). *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra.* Paper presentert på The 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, *7*.

Küchemann, D. (1981). Algebra. I J.K. Hart (red.), *Children's understanding of mathematics:11-16* (s. 102-119). London, England: John Murray.

Kieran, C. (2004). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. I M. Høines & A. Fuglestad (red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, s. 143-147). Bergen, Norge: PME.

Kleve, B., & Tellefsen, H.K. (2009). Stegmodellen i matematikk. *Tangenten*, *1*, 11-17.

Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge: Talk among teachers and learners.* Clevedon, England: Multilingual Matters.

Mertens, D. (2009). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

NESH. (2006). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Oslo: Forskningsetiske komiteer. Hentet fra http://www.etikkom.no/Forskningsetikk/Etiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

NSD. (2012). *Må forskningsprosjektet mitt meldes?* Bergen: Personvernombudet for forskning. Hentet fra http://www.nsd.uib.no/personvern/forsk_stud/naar_melde.html

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., & Hals, S. (2009). *SINUS 1T. Matematikk for Vg1* (2. utg.). Cappelen Damm.

Pedersen, I.F., & Grønmo, L.S. (2010). *Norwegian upper secondary school students' performance in solving algebraic inequalities.* Paper presentert på The 4th IEA International Research Conference, Gøteborg, Sverige.

Peirce, C.S. (1998). *The essential Peirce: Selected philosophical writings. Vol.2 (1893-1913).* Bloomington, IN: Indiana University Press.

Philipp, R.A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classroom.* London, England: Routlegde and Kegan Paul.

Punch, K.P. (2005). *Introduction to social research. Quantitative and qualitative approaches* (2. utg.). London, England: Sage Publications.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 107-111). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Robson, C. (2002). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers* (2. utg.). Oxford, England: Blackwell Publishers.

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. I M. Høines & A. Fuglestad (red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, s. 148-151). Bergen, Norge: PME.

Selvik, B.K., Rinvold, R., & Høines, M.J. (2007). *Matematiske sammenhenger. Algebra og funksjonslære* (3. utg.). Bergen, Norge: Caspar Forlag.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). Between arithmetic and algebra: In the search of a missing link. The case of equations and inequalities. *Rendiconti del Seminario Matematico*, *52*(3), 279-307.

Säjlö, R., Riesbeck, E., & Wyndhamn, J. (2001). Samtal, samarbete och samsyn: En studie av koordinasjon av perspektiv i klassrumskommunikation. I O. Dysthe (red.), (s. 219-235). Oslo, Norge: Abstrakt.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv.* Oslo, Norge: Cappelen akademisk.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge: An epistemological perspective.* Berlin, Tyskland: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? -An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 133-162.

Stoll, R.R. (1963). *Set theory and logic.* San Francisco, CA: W. H. Freeman and Company.

Tanner, R.C.H. (1961). Mathematics begins with inequality. *The Mathematical*

Gazette, *45*(354), 292-294.

Tanner, R.C.H. (1962). On the role of equality and inequality in the history of mathematics. *The British Journal for the History of Science*, *1*(2), 159-169.

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 513-524.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). Algorithmic models: Italian and israeli students' solutions to algebraic inequalities. I A.D. Cockburn & E. Nardi (red.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, s. 289-296). Norwich, England: PME.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplaner for kunnskapsløftet. Læreplan i fellesfaget matematikk.* Oslo, Norge: Kunnskapsdepartementet.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M.A.K. (2006). Effects of classroom instruction on student performance on, and understanding of, linear equations and linear inequalities. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 113-147.

Navn:

Oppgavehefte

Dette heftet består av seks matematikkoppgaver som dere skal løse og **diskutere sammen**. Jeg vil likevel at hver enkelt besvarer oppgavene skriftlig.

- Unngå å viske ut hvis du skriver noe du ikke er fornøyd med. Sett heller strek over det du ikke vil ha med og fortsett under.
- Bruk ekstra ark hvis du trenger mer plass, men husk å skrive oppgavenummeret på arket.
- Når det står at dere skal diskutere, trenger dere kun å gjøre dette muntlig.
- Krever oppgaven en skriftlig forklaring, skriver du hvorfor du valgte å løse oppgaven slik og hvorfor du mener løsningen er riktig.
- Dere har også en PC med GeoGebra til rådighet. Bruker dere dette programmet er det fint om dere lagrer filen(e) på en utdelt minnepenn til slutt.

Takk for at dere vil delta i dette prosjektet!

Oppgave 1

a) Skriv ned hva du legger i begrepet *matematisk ulikhet*. Du kan gjerne bruke symboler og illustrasjoner i tillegg til ord. Snakk så med hverandre i gruppa om det dere har skrevet. Er dere enige i hverandres beskrivelser?

b) Hva betyr løsningen av en ulikhet? Gi et eksempel. Snakk med hverandre i gruppa om det dere har skrevet.

Oppgave 2

a) Avgjør hvilke verdier for x som gjør at utsagnet er sant:
$3x+2>x+10$

Løsning
Diskuter hvordan dere kom frem til løsningen og hvorfor dere mener løsningen er riktig.

b) Er $x \le 5$ løsningen til $5x+9 \le 8x-6$?

Diskuter hvorfor / hvorfor ikke.

Løsning

c) Avgjør hvilke verdier for x som gjør at utsagnet er sant:

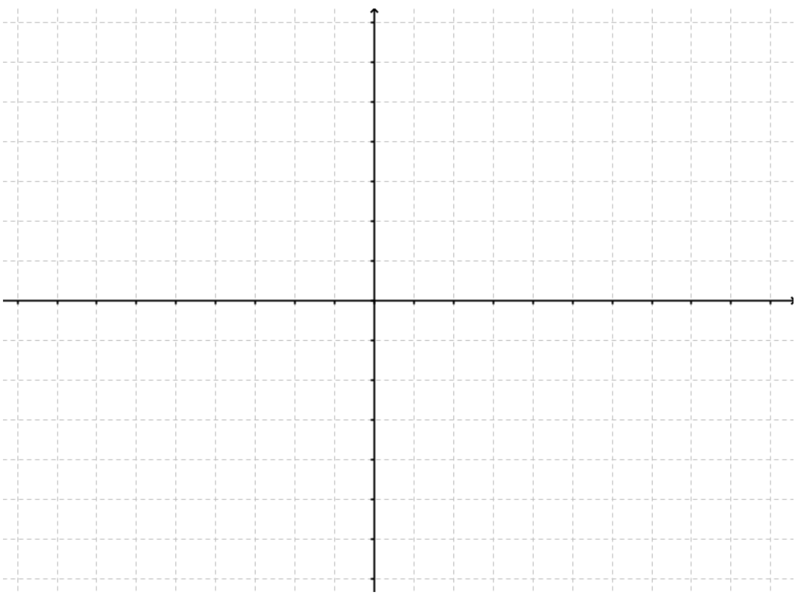
d)

$-8x > 0$

Løsning
Diskuter hvordan dere kom frem til løsningen og hvorfor dere mener løsningen er riktig. Hvor mange verdier for x er det snakk om?

Oppgave 3

Bruk koordinatsystemet nedenfor til å løse ulikheten $2x - 1 > 2 - x$

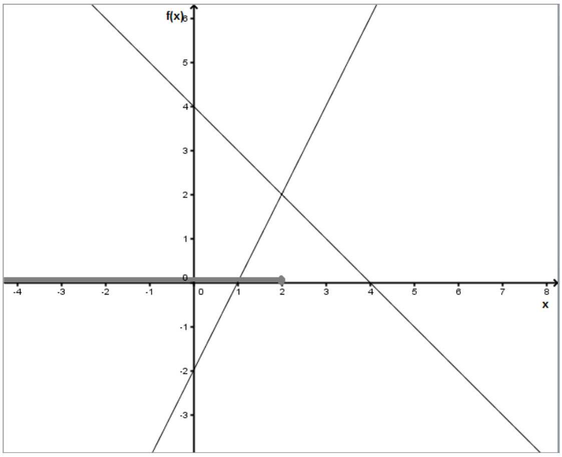


Oppgave 4 : Hva hører sammen?

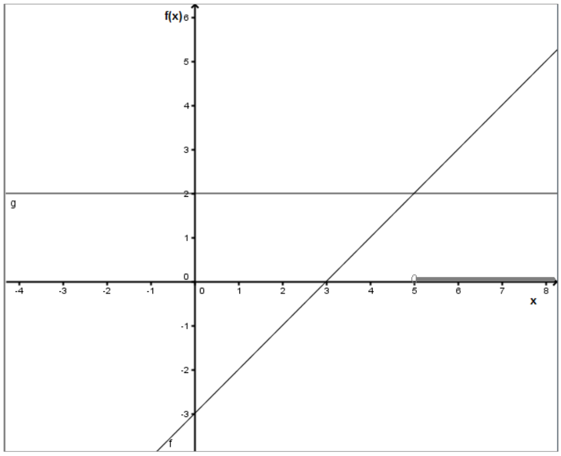
Finn den grafiske fremstillingen på neste side som passer til ulikhetene gjengitt i tabellen nedenfor. Diskuter og skriv bokstaven som passer i tabellen. Skriv også en forklaring på hvordan dere kom frem til deres løsning og hvorfor det er riktig.

Ulikhet	Bokstav	Forklaring
$x+4<-2x-2$		Hvordan kom dere frem til denne løsningen? Hvorfor er løsningen riktig?
$2x-2\leq 4-x$		Hvordan kom dere frem til denne løsningen? Hvorfor er løsningen riktig?
$3x+3\geq -3x+3$		Hvordan kom dere frem til denne løsningen? Hvorfor er løsningen riktig?
$2<x-3$		Hvordan kom dere frem til denne løsningen? Hvorfor er løsningen riktig?

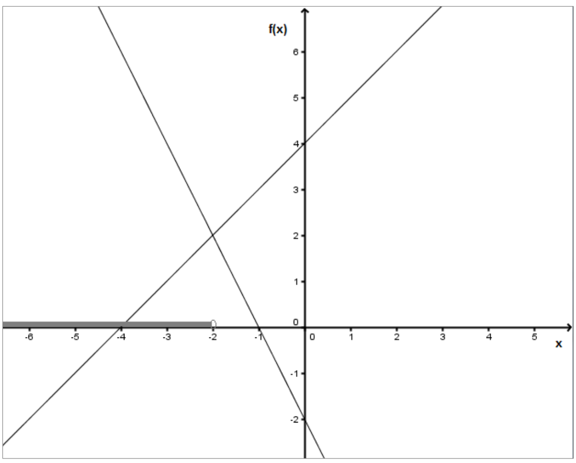
Grafiske fremstillinger



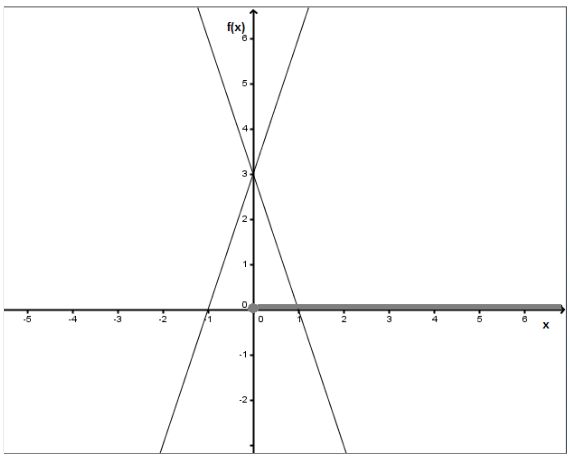
A



B



C



D

Oppgave 5: Taxiturer

Taxiselskapet ”Taxi Trondheim” tar 37 kr i startpris og 10.50 kr per kilometer.

a) To venner, Stian og Marius, står på torget i Trondheim og bestemmer seg for å ta taxi hjem. Stian betaler 79 kr for sin tur. Hvor mange kilometer unna torget ligger Stians hus?

Løsning	**Forklaring**
	Hvordan kom dere frem til denne løsningen? Hvorfor er løsningen riktig?

b) Marius skal en helt annen vei, og tar også en taxi. Han gir taxisjåføren en hundrelapp og tar imot vekslepenger. Hvor mange kilometer unna torget kan huset hans ligge?

Løsning	**Forklaring**
	Hvordan kom dere frem til denne løsningen? Hvorfor er løsningen riktig?

Oppgave 6

Avgjør hvilke verdier for x som gjør utsagnene nedenfor sanne:

a) $x+3>6-(3-x)$

Løsning
Diskuter hvordan dere kom frem til løsningen hvorfor dere mener løsningen er riktig.

b) $(4x-2)+6>(4x-2)+3$

Løsning
Diskuter hvordan dere kom frem til løsningen hvorfor dere mener løsningen er riktig.

c) $4(x+1)=4(x-3)$

Løsning
Diskuter hvordan dere kom frem til løsningen hvorfor dere mener løsningen er riktig.

e) $x+5=8-(3-x)$

Løsning
Diskuter hvordan dere kom frem til løsningen hvorfor dere mener løsningen er riktig.

Vedlegg B

Intervjuguide

Intervjuguide

Dette er den generelle intervjuguiden som ble tilpasset hver enkelt elev i etterkant av elevarbeidet om lineære ulikheter.

1. Hva synes du om matematikkfaget?
2. Hva synes du om dine prestasjoner?
3. Husker du første gang du ble introdusert for ulikhetstegnet?
    - Hvordan opplevde du dette?
4. Lærte du om ulikheter på ungdomsskolen? I så fall hva?
5. Har du jobbet med liknende oppgaver tidligere?
6. Hvordan synes du det er å arbeide med lineære ulikheter?
7. Hva betyr det egentlig når man blir bedt om ”å løse en ulikhet”?
8. Vi har ulikheten 3x **-** 4 > x – 2. Hva betyr bokstavsymbolet *x* her?

Oppgave 2

9. Kan du vise løsningen i Oppgave 2a på en tallinje?
    - Hvor mange verdier er det snakk om?
10. Hvis du har snudd ulikhetstegnet i løpet av din løsning; hvorfor gjorde du det?
    - Vil du prøve å forklare hvorfor regelen stemmer?

Oppgave 3

11. Hvordan løste du denne oppgaven?

Oppgave 4

12. Hvor på grafen er det man finner selve løsningen til ulikheten?

Oppgave 5

13. Hvordan tenkte du når du skulle sette opp ulikheten?
14. Hvorfor plasserte du ulikhetstegnet den veien du gjorde?

Vedlegg C

Samtykkeskjema

Thea Lien Espeland
Tlf.: [xx]
E-mail: thealien@stud.ntnu.no

Trondheim, 03.02.2012

Til foreldre/foresatte for elever i 1T ved Skogli vgs.

Anmodning om tillatelse til videoopptak av undervisning og lydopptak av intervju.

Jeg er masterstudent i Lektorprogrammet i Realfag ved NTNU, Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk. Dette studieprogrammet har som mål å utdanne lærere som vil være i stand til å gi en god matematikkundervisning for elever i skolen, og det fokuserer på hva som er nødvendig kunnskap å ha når det gjelder undervisning og læring av matematikk. Jeg skal nå gjennomføre mitt masterprosjekt som omhandler elevers oppfatning av lineære ulikheter. Det vil bli gitt ut oppgaver som elevene arbeider med i grupper, og intervjuer om arbeidet vil bli avholdt i etterkant.

For å få så godt dokumentert datamateriale som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak av undervisningssekvenser og lydopptak av intervju med elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre videoopptak/ lydopptak av elever som tar faget matematikk 1T ved Skogli vgs. Det er snakk om 2-4 skoletimer for enkelte av elevene. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt for de involverte og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Videoopptak vil være basert på undervisningssituasjoner der elevene arbeider i grupper, og opptakene vil bli lagt til rette slik at de ikke skal virke begrensende på elevenes læring. Intervjuene i etterkant vil ta for seg oppgavene som elevene løste, med fokus på hvordan elevene kom frem til løsningen. Ingen personlige spørsmål vil bli stilt, kun matematikken vil være i fokus. Opptakene vil kun bli sett/hørt av meg, min veileder og eventuelt av andre masterstudenter i matematikk og deres veiledere ved NTNU. Funnene fra studien vil presenteres i en masteroppgave. I masteroppgaven og eventuelt annet materiale som presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer og skolen studien gjennomføres på vil bli anonymisert. Etter at masteroppgaven er ferdig sensurert, senest 31.08.2012, vil det innsamlede datamaterialet bli slettet.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer). Min veileder er Heidi S. Måsøval ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, og hun kan også kontaktes på heidi.masoval@hist.no. Frode Rønning er daglig ansvarlig og ansatt ved NTNU og kan også kontaktes på frode.ronning@math.ntnu.no.

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen nedenfor om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til videoopptak/lydopptak der deres barn er med.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen
Thea Lien Espeland

SVARSLIPP

Jeg/vi gir/gir ikke (stryk det som ikke passer) tillatelse til at det kan bli foretatt videoopptak av matematikkundervisning der ________________________________(elevens fornavn og etternavn) er med, samt lydopptak av intervju med han/henne.

Jeg/vi har snakket med vårt barn om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

____
(Sted og dato)

____
(underskrift fra foresatte/foreldre)

Vennligst returner svarslippen til lærer så snart som mulig.

Vedlegg D

Transkripsjonskoder

Transkripsjon av video- og lydopptak:

[	B snakker samtidig med A:	
	A:	[som krysser hverandre i et punkt
	B:	[det er lenge siden vi har gjort det, men jeg tror det er to linjer
[]	Uartikulert eller ytring som ikke er hørbar	
..	En liten nøling	
…	Pause inntil 10 sekunder	
_	Avbrytelse	
(understrek)	A avbrytes av B:	
	A:	Ja det er jo.. Men det er rart_
	B:	Sånn at når *x* er større enn én, så..
Kursiv	Et symbol som intervjuobjektet uttrykker direkte står i kursiv.	
(tekst)	En kommentar til hvordan utsagnet blir sagt eller en bevegelse som blir gjort blir skrevet i parentes etter selve ytringen.	
(..)	Har hoppet over noen utsagn, for eksempel ved lange utregninger.	

I elevbesvarelser

[tekst]	Min fortolkning av ord som elevene bruker i sine besvarelser.

Transkripsjonskodene er inspirert av kodene til Heidi Strømskag Måsøval.