NTNU
Det skapende universitet

"Det bare e sånn"

En studie av R1-elevers argumentasjon i geometri

Gro Ingeborg Hansen
Lene Hayden Taraldsen

Lektorutdanning med master i realfag
Oppgaven levert: Juni 2011
Hovedveileder: Kari Hag, MATH
Biveileder(e): Frode Rønning, Høgskolen i Sør-Trøndelag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Forord

Masterstudien marker en avslutning på vår lektorutdanning i realfag ved NTNU i Trondheim. Vi startet utdanningen høsten 2006, og har gjennom de fem årene studert fagene matematikk, fysikk, kjemi og biologi. Studien ble gjennomført i løpet av våren 2011. Vi vil i den forbindelse takke alle som har hjulpet og støttet oss i løpet av studien.

Først og fremst vil vi takke våre to veiledere Frode Rønning og Kari Hag for god oppfølging. Vi vil gjerne takke for gode råd og verdifull veiledning. Veiledning med dere har vært oppklarende og gitt inspirasjon til arbeid med studien.

I tillegg vil vi takke de to lærerne som engasjerte seg i vår studie, samt elevene i de to klassene vi gjennomførte datainnsamlingen i.

Vi ønsker å takke Hild Mari Kvikne og Anne Lise Øvstebø Versterdal for faglig respons. I tillegg vil vi takke våre medstudenter for gode råd og motivasjon gjennom hele arbeidsprosessen. Det har vært en fornøyelse å dele studietiden med dere. Vi vil videre takke Eirik Hjelmtvedt for hjelp med den engelske oversettelsen av sammendraget. Are Hjelle Guddal, Gaute Svardal Salomonsen og Hallgeir Hansen takkes for grundig korrekturlesing.

Vi ønsker også å gi en takk til våre nærmeste som bestandig har stilt opp for oss gjennom studietiden.

Tilslutt vil vi takke hverandre for et fantastisk samarbeid både faglig og sosialt.

Trondheim, 1. juni 2011

Gro Ingeborg Hansen og Lene Hayden Taraldsen

Sammendrag

I studien undersøkes R1-elevers argumentasjon i geometri i en klasseromskontekst hvor elevene har tilgang til et dynamisk geometrimiljø. Målet med studien er å få dypere innsikt i elevers bevisskjema i arbeid med bevisoppgaver i geometri. Studiens overordnede problemstilling er: *Hvilke bevisskjema kan vi observere i R1-elevers argumentasjon i geometri.* I tillegg er problemstillingen utdypet med følgende forskningsspørsmål: *I hvilke bevisskjema kan vi finne spor av det dynamiske geometrimiljøet?* Resultatene i studien er analysert ved hjelp av et selvutviklet analyseverktøy, basert på et allerede eksisterende rammeverk om bevisskjema hos elever.

For å besvare problemstillingen er det gjennomført en kvalitativ undersøkelse i en respondentgruppe med elever ved en videregående skole i Sør-Trøndelag. Elevene deltar i kurset realfaglig matematikk 1 (R1) og blir under datainnsamlingen filmet mens de arbeider i grupper. Under hele datainnsamlingen har elevene tilgang til det dynamiske geometrimiljøet GeoGebra, og elevene arbeider med oppgavehefter satt sammen med hensikt å fremme argumentasjon og muntlig aktivitet. Det totale datamaterialet inneholder transkripsjon av videoopptak fra klasserommet, samt elektroniske filer med elevenes skriftlige besvarelser. Dette materialet er analysert ved bruk av teori knyttet til argumentasjon, bevisskjema og dynamiske geometrimiljø.

Resultatene fra studien bekrefter at det eksisterer ulike bevisskjema hos elever. Elevene i studien argumenterer på måter som kan plasseres i kategoriene autoritært, empirisk og deduktivt bevisskjema. Videre observerte vi to underkategorier av empirisk bevisskjema; induktivt bevisskjema og matematisk visualisering. Under induktivt bevisskjema ble rammeverket utvidet med kategorien visuelle eksempler. Kategorien gjenspeiler elevenes bruk av det dynamiske geometrimiljøet, da elevene benytter seg av redskapene dragging- og målingsfunksjonen for å sannsynliggjøre sine hypoteser.

Våre funn bekrefter at det eksisterer ulike bevisskjema hos elever i geometri. En konsekvens av det er at lærere bør være bevisst elevers bevisskjema, blant annet i forhold til å veilede elevene til å argumentere matematisk presist. Videre indikerer våre funn at dynamiske geometrimiljø ennå ikke funnet sin plass hos elevene i studien, da det ble observert at elever ikke benyttet dragging og målinger målrettet eller konsekvent. I tillegg ble det observert situasjoner hvor elevene ikke benyttet redskapene til tross for at de hadde tilgang til dem.

Abstract

In this thesis, we are going to look at R1-students' argumentation in geometry in a classroom context, where the students have access to a dynamic geometry environment. The aim is to get a deeper insight in the students' proof schemes. The problem to be addressed is: *Which proof schemes can be observed in R1-students argumentation in geometry?* Also, the focus is expanded by the following research question: *In which proof schemes can traces of the dynamic geometry environment be found?* The results of the study have been determined by using a self-developed tool of analysis, based on an already existing framework regarding students' proof schemes.

To answer these questions, a qualitative study was conducted in a group of students at a high school in Sør-Trøndelag which participate in the *mathematics of scientific studies 1*-course (R1). The students are divided into groups, and are being video recorded during their work on proof problems in geometry. Under the whole period they have access to a dynamic geometry environment, GeoGebra. The proof problems in geometry exist of worksheets developed by us to stimulate the students' argumentation and oral activity. The total amount of data includes transcriptions of video films from the classroom, along with electronic files containing the student's written answers. This material is analyzed, using theory related to argumentation, proofs and dynamic geometry environments.

The results confirm that there exist different classes of proof schemes in a group of students. The students justify their solutions in ways which can be categorized as authoritarian, empirical and deductive. Furthermore, we observed two sub-categories of the empirical class of proof schemes; inductive proof scheme and mathematical visualization. By inductive proof scheme the category was extended with a new sub-category named by us visual example. This category reflects the student's use of the dynamic geometry environment, as the students make use of dragging- and measuring tools to justify their conjectures.

Our findings show that students indeed have different forms of proof schemes. As a consequence teachers should be aware of the student's individual proof schemes, and give them guidance in terms of improving their proof skills based on their already existing proof schemes. The study also suggests that the dynamic geometry environment still hasn't found its place among the students, as our observations shows that the students' use of dragging and measuring is neither goal orientated nor consistent. We also found that there were times where the students did not use the tools at all, even though they had accesses to them.

Innhold

Vedlegg

1: Oppgavehefte 1

2: Oppgavehefte 2

Kapittel 1: Innledning

Overgangen fra videregående skolen til universitetet var for oss en tøff opplevelse. Det ble her stilt andre krav i matematikken enn det vi var vant med. På universitetet ble det ikke bare forventet at vi skulle løse matematiske oppgaver korrekt, men vi måtte i tillegg argumentere for at svaret var rett. Det ble også forventet at vi skulle kunne bevise matematiske setninger og teoremer, noe vi fra videregående skole ikke var kjent med. At overgangen føltes tøff var ikke et problem vi var alene om. Flere av våre medstudenter klaget også over forskjellene mellom matematikk på videregående og på universitetet.

I løpet av de siste ti årene har det i følge Mariotti (2006) blitt et fokus på elevers forståelse av bevis i matematikk. Hun påpeker at denne trenden har medført at bevis blir inkludert i læreplaner for matematikk, noe vi mener kan observeres i Kunnskapsløftet (LK06). Her blir det lagt vekt på at elever skal utvikle formelle logiske argumenter og bevis i geometriske sammenhenger. Videre er det et mål at elevene skal formulere matematiske bevis ved bruk av korrekt matematisk notasjon hvor logisk gyldige slutninger inngår (Utdanningsdirektoratet, 2006). Til tross for dette er vår erfaring fra praksistiden ved lektorutdanningen at lærere i den videregående skolen fortsatt vektlegger korrekte løsninger av oppgaver, framfor argumentering og deduktiv resonnering. Vi mener en årsak til det kan være kan være det store tidspresset og eksamensjaget mange lærere erfarer i skolen. Mellin-Olsen (1990) omtaler dette som at lærere befinner seg i oppgavediskursen.

Etter fem år ved lektorstudiet i realfag ved NTNU tenker vi at man som lærer i den videregående skolen bør legge til rette for at elevene opplever en mykere overgang mellom videregående skole og utdanning på universitetsnivå. Om lærere fokuserer på presise matematiske argumenter, for eksempel i form av bevis framfor korrekte løsningsmetoder, mener vi det vil fremme elevenes relasjonelle forståelse, noe som støttes av Skemp (1976).

Bevis er ifølge Hanna og Jahnke (1996) en essensiell karakteristikk i matematikk og bør derfor være en nøkkelkomponent i matematikkundervisningen. Hanna (1990, s. 6) definerer et formelt bevis av en gitt påstand som "a finite sequences such that the first sentence is an axiom, each of the following sentence is either an axiom or has been derived from preceding sentences by applying rules of inference, and the last sentence is the one to be proved". Fischbein (1982) hevder det eksisterer to måter å sannsynliggjøre matematiske teoremer på. Den ene måten er den empiriske, som innebærer å sjekke tilstrekkelig med tilfeller til man er overbevist om teoremets gyldighet. Han hevder at denne måten som regel er nok til å overbevise seg selv. Den andre måten er den logiske, hvor beviset bygger på et logisk-deduktivt resonnement. Hanna og Jahnke trekker fram at bevis i matematikk ikke bare er nødvendig for å sannsynliggjøre matematiske teoremer eller påstander, men at bevis i tillegg kan benyttes som et pedagogisk hjelpemiddel i undervisningen for å fremme relasjonell forståelse. Videre påpeker Bell (1976) at bevis i klasserommet må forklares på måter som oppleves meningsfull av elevene.

At elever uten videre skal være i stand til å føre formelle bevis, mener vi fra egne erfaringer vil være urealistisk av lærere å forvente. Hanna (1990) hevder for eksempel at et bevis for en elev sjeldent vil være et formelt bevis, men ofte heller det som er overbevisende for eleven selv. Harel og Sowder (1998) trekker fram at hovedgrunnen til at elever har problemer med å forstå, sette pris på, og produsere egne bevis er at lærere tar for gitt hva som utgjør sannhet i elevenes syn. I tillegg påpeker de at lærere ofte presenterer bevis av opplagte sannheter framfor å be elevene utforske hypoteser på egen hånd. På den måten lærer ikke elever at bevis først og fremst er overbevisende argumenter (Harel & Sowder, s.287).

Med bakgrunn i elevers problemer med bevis valgte Harel og Sowder (1998) å betrakte elevers bevisskjema i sin studie. Vi har i likhet med Harel og Sowder (2007) valgt å betrakte en elevs bevisskjema som det som overbeviser og fjerner tvil hos eleven. Harel og Sowder (1998) deler i sin studie elevenes bevisskjema inn i tre hovedkategorier; *eksternt bevisskjema*, *empirisk bevisskjema* og *analytisk bevisskjema*. Balacheff (1998) undersøkte på lik linje med Harel og Sowder hvordan elever beviser i matematikk ved å kategorisere elevers bevisnivåer. Balacheff skiller mellom *pragmatiske bevis* og *begrepsmessige bevis*. Elever som befinner seg på et pragmatisk bevisnivå argumenterer ved hjelp av *naiv empirisme*, *avgjørende eksperiment* eller *generisk eksempel*. Ifølge Harel og Sowder (2007) kan bevisnivåene naiv empirisme og avgjørende eksperiment plasseres i kategorien empiriske bevisskjema da begge omfatter elever som nyttiggjør seg av eksempler i sin argumentasjon. Harel og Sowder (1998) påpeker at elever som blir overbevist ved logisk-deduktive argumenter av en generalitet innehar et analytisk bevisskjema. Generalitetsaspektet går igjen i Balacheffs pragmatiske nivå generisk eksempel, hvor elever generaliserer for et spesifikt tilfelle. I tillegg omhandler begrepsmessige bevis ifølge Balacheff å betrakte generelle tilfeller, der slike bevis tar utgangspunkt i matematiske egenskaper og forhold mellom disse. Harel og Sowder (2007) plasserer derfor Balacheffs bevisnivå generisk eksempel og begrepsmessige inn under kategorien analytisk bevisskjema.

I et sosiokulturelt perspektiv på læring, er kunnskap noe som konstrueres gjennom samhandling og i en kontekst (Dysthe, 2001). Konteksten kan for eksempel omhandle individet i samhandling med medierende redskaper. Slike medierende redskaper kan for eksempel være verktøy elevene får tilgang til gjennom en datamaskin. Mariotti (2001) hevder at dynamiske geometriprogrammer kan brukes som et hjelpemiddel i stegene fram mot å skape behovet for forklaringer og bevis hos elevene. Hun hevder videre at elevene ved å dra i figurer og utføre målinger i et dynamisk geometrimiljø[1] (DGM) kan bli overbevist om at deres hypotese er sann. På den måten kan det ifølge Mariotti vokse fram et behov for å vise hypoteser formelt ved bruk av et matematisk presist språk. I tillegg viser andre forskningsresultater at dynamiske geometriprogrammer og de medierende redskapene slike tilbyr, kan være et effektivt middel for å oppmuntre elever til oppdagende- og utforskende læring i matematikk (Hohenwarter, Hohenwarter, Kries, & Lavicza, 2008).

Med bakgrunn i egne erfaringer, teori og tidligere forskning mener vi det er viktig elever gjennom matematikkundervisningen får innsikt i logisk-deduktiv resonnering, samtidig som elevene utvikler en forståelse for sannhet og bevis i matematikk. Med utgangspunkt i at elever har problemer med å argumentere og bevise påstander i matematikk, ønsket vi i studien å se nærmere på elevers bevisskjema i arbeid med bevisoppgaver i geometri. Geometri har lenge vært ute av den norske læreplanen, men ble etter LK06 igjen et tema i matematikk for den videregående skolen. Geometri er et fag som tar for seg figurer og forhold i plan og rom, og derfor mener vi det er spennende å betrakte argumentasjon i geometri. Videre står det også i LK06 at digitale ferdigheter er en grunnleggende ferdighet elevene skal trenes i.

Forskning viser at elever i geometri ofte lar seg overbevise ved observasjon av dynamiske figurer og visuelle bilder (Laborde, 1998). Et dynamisk geometriprogram viser matematiske objekter som figurer i skjermbildet, og tillater elevene å utføre omdannelser på disse, noe vi mener gjør det spennende å studere elevers argumentasjon i geometri hvor de har tilgang til et DGM. I tillegg til å fokusere på bevisskjema, ble vi derfor nysgjerrige på hvordan det dynamiske geometrimiljøet GeoGebra ville innvirke på elevenes argumentasjon i geometri da forskning viser at slike kan fremme elevenes behov for bevis i matematikk. Marrades og Gutiérrez (2000) har benyttet seg av Harel og Sowder (1998) sine bevisskjema og Balacheffs (1988) bevisnivåer til å studere elevers argumentasjon i geometri. I deres studie har de blant annet kommet fram til at et DGM som Cabri kan bidra til å fremme elevers behov for abstrakt

[1] DGM er en fellesbetegnelse for dynamiske geometriprogrammer.

verifikasjon og formelle bevis i matematikk. Videre konkluderer de også med at dragging[2] hjelper elever til å se etter for eksempel egenskaper, spesialtilfeller og moteksempler, som igjen kan lede elevene til å forme hypoteser eller til å begrunne sine løsninger. Vi har i studien valgt å benytte GeoGebra, som er et dynamisk geometriprogram på lik linje med Cabri.

1.1 Problemstilling

I studien vår søker vi en forståelse av elevers argumentasjon og bevis i matematikk. I forbindelse med det har vi undersøkt elever som følger kurset realfaglig matematikk (R1) i en videregående skole. Vi søker i studien å beskrive disse R1-elevenes bevisskjema ved å ta utgangspunkt i Harel og Sowder (1998) sine bevisskjema, samt Balacheffs (1988) bevisnivåer. Forskningsspørsmålet vårt er som følger:

Hvilke bevisskjema kan vi observere i R1-elevers argumentasjon i geometri?

For å belyse forskningsspørsmålet ytterligere, samt forsøke å dokumentere det dynamiske geometrimiljøets innvirkning på elevenes argumentasjon, har vi formulert følgende delspørsmål:

I hvilke bevisskjema kan vi finne spor av det dynamiske geometrimiljøet?

For å undersøke hvordan elever argumenterer i arbeid med bevisoppgaver i geometri der GeoGebra var tilgjengelig, benyttet vi oss av en kvalitativ undersøkelsesmetode. Studien har derfor gått ut på å samle informasjon om R1-elevenes argumentasjon i to klasser, for så å kategoriserer argumentasjonen. Informasjonen ble samlet inn gjennom observasjon av elevene i klasserommet og ved å samle inn elektroniske filer med elevenes skriftlige besvarelser.

Vi mener studien vår kan bidra til at lærere kan kjenne seg igjen i våre beskrivelser av situasjoner fra klasserommet. På den måten kan de bli mer bevisste elevers bevisskjema i geometri, samt hvordan de kan benytte seg av dynamiske geometrimiljø i sin geometriundervisning. Videre kan lærere få innsikt i hvordan de medierende redskapene dragging og målinger kan hjelpe elevene til matematisk utforsking. Studien kan med andre ord bidra til didaktisk refleksjon, både for oss selv og for andre lærere. I tillegg har vi tatt utgangspunkt i et allerede eksisterende rammeverk, noe som har medført at vi har fått bekreftet at noen av kategoriene i rammeverket faktisk eksisterer, også i den norske videregående skolen. Til slutt har vi modifisert rammeverket til å passe inn i den situasjonen

[2] Dragging er en funksjon i dynamiske geometrimiljø som tillater brukeren å dra i frie objekter.

vi studerte. Med andre ord har vi sett etter spor av det dynamiske geometrimiljøet og tilpasset rammeverket etter det.

1.2 Kapitteloppbygging

Oppgaven består av 8 kapittel. I kapittel 2 presenteres studiens teoretiske ramme. Kapittelet innledes med et historisk perspektiv på bevis. Deretter presenteres ulike definisjoner på formelle og matematiske bevis, i tillegg definerer vi her begrepene deduktiv resonnering og argumentasjon. Videre i kapittelet presenteres bevisets plass i skolen og begrepet bevisskjema slik det benyttes av Harel og Sowder (1998). Etter at sosiokulturelt perspektiv på læring er presentert, blir til slutt begrepet dynamisk geometrimiljø (DGM) introdusert. Vi trekker her frem funksjonene dragging og målinger. Samtidig blir begrepene matematisk visualisering og empiriske bevis beskrevet. I kapittel 3 foretas en kort presentasjon av geometri i skolen. Her legges i tillegg det matematiske temaet vi har betraktet i studien frem. Vi vil i kapittel 4 presentere vår valgte metodologi. Det blir i denne sekvensen beskrevet hvilke metoder vi har valgt, i tillegg til at vi beskriver utvalget i studien. Videre i kapittelet vil vi gi en gjennomgang av vårt analyseverktøy. Kapittel 5 er tredelt og omfatter resultater og analyse av datamaterialet. Vi vil først presentere situasjoner forbundet med autoritært bevisskjema, deretter vil vi trekke fram situasjoner vi betrakter til å være innenfor et empirisk bevisskjema, i den tredje delen blir situasjoner plassert innenfor deduktivt bevisskjema belyst. I kapittel 6 diskuteres funnene i studien. I dette kapittelet vil vi også drøfte vårt analyseverktøy, før vi til slutt i kapittelet diskuterer studiens gyldighet og pålitelighet. Avslutningsvis, i kapittel 7, vil vi foreta en oppsummering av resultatene i studien, før vi ser på mulige veier videre.

Kapittel 2: Teoretisk rammeverk

I kapittel 2 vil vi presentere det teoretiske rammeverket for studien vår. Vi vil først introdusere bevis og argumentasjon i matematikk. I sammenheng med det vil vi i delkapittel 2.1 trekke fram bevis i et historisk perspektiv, før vi i 2.2 og 2.3 betrakter formelle bevis og bevis i skolen. Deretter vil vi i delkapittel 2.4 se nærmere på bevisskjema og tidligere forskning på elevers bevis og argumentasjon i matematikk. Videre i 2.5 beskriver vi et sosiokulturelt perspektiv på læring og i sammenheng med det presenterer vi medierende redskaper og situert læring. Til slutt i delkapittel 2.6 beskriver vi et dynamisk programvaremiljø (DGM), der vi presenter funksjonene dragging og målinger. Videre vil vi i delkapittelet om DGM presentere matematisk visualisering og empiriske bevis.

2.1 Bevis i geometri – et historisk perspektiv

Geometri går tusenvis av år tilbake i historien, og det er funnet spor av geometrisk tenking i nesten alle menneskelige kulturer. En av de kulturene vi kjenner best til er den egyptiske. Egyptisk geometri var i hovedsak en empirisk vitenskap som bestod av mange tommelfingerregler og utviklet seg gjennom eksperimenter, observasjon og ved prøving og feiling. Et eksempel er at de benyttet spesielle tilfeller av Pytagoras' teorem, uten å bevise det formelt. De andre kulturene vi kjenner til omkring denne tidsperioden hadde, i likhet med egypterne, også fokus på den praktiske nytten av geometrien (Venema, 2006).

En milepæl i geometriens historie er grekernes innføring av abstraksjon, logisk oppbygging og bevis i geometri. Grekerne påpekte at geometriske resultater burde basere seg på logiske resonnement fra grunnprinsipper, noe som medførte at geometri ble betraktet som en eksakt viten (Venema, 2006, s.1). En av de mest innflytelsesrike greske matematikerne var Euklid, og i sitt mesterverk "Elementene" utarbeidet han fem basispåstander for geometri som han kalte postulater. Ut i fra de fem postulatene la Euklid grunnlaget for en logisk deduktiv oppbygning av geometri. Postulatene benyttet han som utgangspunkt for å utlede og bevise teoremer. I senere tid er det kommet andre matematikere som har benyttet seg av Euklidsk geometri, blant annet til å utlede kjente teoremer. Et eksempel fra det syttende århundre er Fermat (1601-1655) som oppdaget at medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Det viste seg at det samme gjaldt for midtnormalene, vinkelhalveringslinjene og høydene i en trekant (Venema).

I det nittende århundre ble ulike syn på matematiske sannheter fremhevet, noe som gav opphav til ulike filosofiske retninger som logisisme, formalisme og intuisjonisme (Hanna &

Jahnke, 1996). En oppfatning innenfor logisisme er at matematikk og logikk ikke kun behøver å opptre parallelt, men i en viss forstand er sammensmeltet. Videre forbindes logisisme ofte med forsøket på å grunnlegge hele matematikken på aksiomer (Haugstrup, Juncher, Pedersen, Rauf, & Bryder, 2010, s.4). For eksempel var det logisisten Frege (1848-1925) som først utformet et formelt begrepsmessig språk for matematikk. Han utdypet formaliseringen av matematisk kunnskap ved sitt begrepsspråk som innebar eksplisitte kriterier for gyldigheten av kjeder av slutninger fram til den endelige konklusjonen (Hanna, 1990). En annen pioner i utviklingen av det moderne aksiomsystemet var formalisten David Hilbert (1862-1943). I følge Kleiner (1991) var det Hilbert som utarbeidet og videreførte Euklids postulater. Videre mente formalistene at matematikk var en rekke tegn med tilhørende regler for å manipulere tegnene, og at et matematisk bevis skulle bygges opp av aksiomer gjennom etablerte regler av interferens (Haugstrup et al.; Kleiner). På den andre siden så ikke intuisjonistene behovet for et aksiomsystem, men mente derimot at mange matematiske påstander hvilte på intuisjon alene. Intuisjonistene mente, i motsetning til formalistene, at matematikerens intuisjon ville guide han til å unngå motsigelser. I det matematiske samfunnet pågår det fremdeles diskusjoner mellom formalistene og intuisjonistene om hva bevis i matematikk omhandler (Kleiner).

Før 1950-tallet var bevis i matematikkundervisningen forbeholdt geometri. Det var i geometriundervisningen elevene først ble introdusert for begrep som aksiom, antagelser, teorem og deduktiv metode. Bevis var på denne tiden ansett som et nødvendig onde, et ritual som måtte følges framfor en kilde til dypere matematisk forståelse (Hanna & Jahnke, 1996). På slutten av 1960-tallet ble begrepet *moderne matematikk*[3]forsøkt introdusert i den norske læreplanen med den hensikt å forbedre elevenes matematiske forståelse. Bevegelsen bygde på antagelsene om at det i moderne matematisk teori var allment aksepterte kriterier for hva som var et gyldig matematisk bevis. Ifølge Hanna og Jahnke tok bevegelsen utgangspunkt i logikk og mengdelære, der formelle bevis var kjennetegnet på den moderne praksisen. I 1971 kom et midlertidig forslag til mønsterplanen av 1974, og her fikk for alvor den moderne matematikken sitt inntog i den norske skolen. Da den endelige versjonen av mønsterplanen kom i 1974 var sporene av moderne matematikk forsvunnet. I stedet hadde praktisk nytte av matematikk fått en sentral plass i læreplanen (Gjone, u.å.). Videre hadde både læreplanen for videregående skole i 1976 og 1994 også fokus på anvendt matematikk, noe som medførte at

[3] Den norske betegnelsen på den amerikanske bevegelsen *New math.* som startet i USA på 1950 tallet. Her stod bevis i matematikkundervisningen sentralt.

det var vanskelig å finne plass til bevis. Etter LK06 har argumentasjon i matematikk igjen fått en plass i læreplanen. Elevene skal ifølge læreplanen lære om ulike bevistyper og anvende disse til å gjennomføre formelle bevis (Olsrud, 2009).

2.2 Bevis og argumentasjon

Healy og Hoyles (1999) hevder at bevis er hjertet i matematisk tenkning, og synet på hva et bevis er har ifølge Kleiner (1991) endret seg gjennom tiden. Formelle bevis ble etablert med den hensikt å unngå feil ved å eliminere potensielle feilkilder. Slike feilkilder kunne for eksempel være menneskers behov for å ty til intuisjon og menneskelig dømmekraft i en formell logisk struktur. Hanna (1990, s. 6) definerer et *formelt bevis* som et teoretisk begrep i formell logikk. Videre hevder hun at formelle bevis kan tenkes på som et ideal som den matematiske praksisen bare omtrentlig tilnærmer seg. I litteraturen finner vi ulike definisjoner av hva et matematisk bevis er. For eksempel finner vi hos Hanna (s.6) følgende definisjon av et *formelt bevis av en gitt påstand* som "a finite sequence such that the first sentence is an axiom, each of the following sentences is either an axiom or has been derived from preceding sentences by applying rules of inference, and the last sentence is the one to be proved". Brumbaugh og Rock (2001, sitert i Nyaumwe & Buzuzi, 2007, s.21) omtaler *matematiske bevis*, og definerer at "mathematical proofs can be viewed as logically structured arguments that follow certain established sequences of steps to confirm or refute the viability of mathematical conjectures". Vincent (2002), trekker i likhet med Brumbauh og Rock fram *matematiske bevis*, og definerer det som et argument som bekrefter sannheten av en formodning av alle tilfellene, eller som forkaster en formodning ved et moteksempel. Videre sier han at et argument er en sekvens matematiske utsagn, som har til hensikt å overbevise.

I det vi studerer de tre definisjonene mener vi det kan det trekkes paralleller mellom Hannas (1990) definisjon av et formelt bevis av en gitt påstand, samt Brumbaugh og Rock (2001, sitert i Nyaumwe & Buzuzi, 2007) og Vincents (2002) definisjoner av et matematisk bevis. Alle definisjonene fremhever for eksempel at et bevis i matematikk er en trinnvis sekvens av logiske oppbygde argumenter. Ved å betrakte de tre definisjonene av bevis mener vi at formelle bevis av et utsagn og matematiske bevis kan sidestilles, og betraktes som bevis oppnådd gjennom logisk deduksjon. Vi velger videre i oppgaven å betrakte matematiske og formelle bevis som synonyme begrep, og baserer oss på Hannas definisjon av formelle bevis.

Ayalon og Even (2008) trekker fram at deduktiv resonnering er en nøkkelkomponent i arbeid med matematikk, da rigorøse logiske bevis er konstruert ved bruk av deduktiv resonnering.

Vincent (2002) påpeker at deduktiv resonnering er "reasoning based on deducing statements from definitions, previously deduced statements or given information" (s.11). I følge Ayalon og Even er deduktiv resonnering unikt, da man ut fra kjente premisser benytter formelle logiske regler for å slutte en konklusjon. Deduktiv resonnering blir ofte sett som et synonym til matematisk tenkning, og er blant matematikere betraktet som et foretrukket verktøy for å validere matematiske utsagn. Med bakgrunn i Ayalon og Even, og Vincent tolker vi det som at man i matematikk kan utføre et deduktivt resonnement uten at det nødvendigvis oppfyller kravene til et formelt bevis.

For å bevare gyldigheten i et formelt bevis må både den kjente utgangsinformasjonen være sann, samt at den trinnvise logiske sekvensen av argumentasjon som fører fram til konklusjonen må være gyldig. Sannheten av en konklusjon eller et premiss impliserer ikke at et argument er gyldig. Det finnes forskjellige gyldige måter å argumentere logisk på. To vanlige eksempler som har utgangspunkt i logikkens prinsipper for å argumentere er *modus ponens* og *modus tollens*. Modus ponens omhandler en implikasjon $(p \Rightarrow q)$, altså hvis hendelse p inntreffer, vil også hendelse q inntreffe. Modus tollens er en negasjon av modus ponens $(\neg q \Rightarrow \neg p)$. Hvis hendelse *ikke q* inntreffer, vil hendelse *ikke p* inntreffe (Ayalon & Even, 2008).

Balacheff, Leibniz og France (1999) omtaler problematikken med læring av bevis i matematikk, og diskuterer forskjellene mellom det å bevise og det å argumentere. De hevder at bevis ofte presenteres i sekvenser med struktur, og ofte i deduktiv form. Etter vår mening kan det Balacheff et al. omtaler som det å bevise sees i sammenheng med det som vi i oppgaven omtaler som formelle bevis.

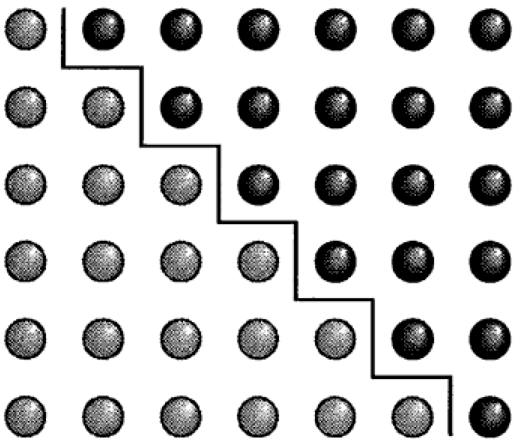
Argumentasjon vil ut i fra Balacheff et al. (1999) ikke følge like strenge regler som bevis, og er en enklere form for rettferdiggjørelse av påstander. "*Argumentation is to a conjecture what mathematical proof is to a theorem"* (Balacheff et al., s. 5). Vincent (2002) trekker fram at et argument har til hensikt å overbevise, og at et argument derfor enten kan være en understruktur som oppstår under en argumentasjon eller som et sluttprodukt av en argumentasjon. Krummheuer (1995, sitert i Vincent) betrakter i likhet med Vincent et argument som et produkt, og en argumentasjon som en prosess. Slik vi forstår Balacheff et al., Vincent og Krummenheuer anser alle tre et argument som en del av en fullstendig argumentasjon. For eksempel mener vi dette kan sees gjennom at Vincent og Krummenheur betrakter et argument som et produkt, altså noe som oppstår gjennom en argumentasjonsprosess. I studien undersøker vi elevenes argumentasjon, og har dermed valgt å betrakte et argument på lik linje med Vincent.

2.3 Bevis i skolen

I følge Thurston (1994) er menneskelig tenkning og forståelse ikke ensporet. Matematikere vil i sin tenkning ikke stole generelt på de formelle reglene for deduksjon (årsak - virkning, selvmotsigelse eller negasjon), men benytte seg av en logisk struktur der de danner trinnvise resultater. En annen komponent av matematisk tenkning og forståelse er intuisjon. I følge Fischbein (1982) hviler flere matematiske aksiomer på intuitive sannheter. Fischbein hevder at man opp igjennom historien har prøvd å formalisere den matematiske strukturen fullstendig, noe som har ført til at matematikere strever etter så langt som mulig å eliminere de aspektene som kun har et intuitivt utrykk eller intuitiv begrunnelse. Fischbein er uenig i at en slik formalisering er nødvendig, og hevder at intuitive strukturer er essensielle ingredienser for alle former for aktiv forståelse og produktiv tenkning, og dermed nyttig for undervisning i matematikk.

Innenfor matematikkdidaktikk har det de siste tiårene blitt mer fokus på forståelse og betydningen av formelle bevis enn på strenge regler for bevisets føring (Hanna, 1990). Ifølge Hanna har matematikere og matematikklærere begynt å revurdere hvilken rolle den aksiomatiske strukturen og strenge formelle bevis bør spille i en matematikkundervisning som samtidig vektlegger viktigheten av matematisk forståelse. Hun påpeker at hva som er akseptert som et bevis for elever som regel ikke er det samme som matematikere anser som et matematisk akseptert bevis. For en elev kan et bevis for en påstand ifølge Hanna være det som overbeviser eleven selv om at påstanden er sann.

Hanna (1990) engasjerer seg i debatten om hvilken type bevis som bør formidles i skolen, og hevder at signifikansen av det som blir bevist er det viktigste aspektet av et formelt bevis, og ikke hvilken måte det bevises på. Et bevis kan ifølge Hanna ha ulike roller i en undervisningssammenheng. Hun påpeker at noen ganger vil et bevis forklare et teorem, andre ganger generalisere det. I tillegg kan et bevis i noen sammenhenger vise en ny og uventet matematisk egenskap. Bevis har dermed ikke bare den funksjonen at det er nyttig eller nødvendig for å argumentere for at matematiske teoremer og påstander er sanne. Bevis kan ifølge Hanna og Jahnke (1996) i tillegg brukes som et pedagogisk hjelpemiddel i undervisningen, som et redskap for å fremme relasjonell forståelse i matematikk slik det defineres av Skemp (1976). Hanna hevder at et *bevis som beviser* er et bevis som viser at et teorem er sant, mens et *bevis som forklarer* viser *hvorfor* det aktuelle teoremet er sant. Et bevis som beviser kan avhenge av matematisk induksjon eller syntaktiske vurderinger alene. Mens et bevis som forklarer må ifølge Hanna gi en forklaring av teoremet som bevises, basert på de matematiske egenskapene som underbygger teoremet til å være sant. Bevis som er forklarende er ofte visuelle bevis, som for eksempel et geometrisk bevis for hvorfor summen av de n første heltallene kan beskrives ved arealet av halvparten av et rektangel, slik det illustreres i figur 1.



$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

Figur 1: Et visuelt bevis for at summen av de n første heltall kan skrives som arealet av halvparten av et rektangel (Nelsen, 1993, s. 69).

Den største forskjellen mellom et bevis for å bevise og et bevis for å forklare ligger ifølge Hanna (1990) i at forklarende bevis fokuserer på matematisk forståelse framfor deduktive mekanismer. Hun påpeker videre at et bevis som forklarer og et bevis som beviser begge er rettmessige bevis i matematikk. Det vil si at begge typene bevis møter de kravene som stilles til et formelt bevis, og dermed i lik grad tjener til å oppnå gyldighet av en matematisk påstand.

Ifølge Bell (1976) bør måten bevis forklares på i klasserommet være meningsfull for elevene framfor å forklares som et formelt ritual. Dette kan sammenlignes med Hanna (1990) og hennes *bevis som forklarer*, da hun påpeker at bevis bør ha en forklarende funksjon i klasserommet. Videre skriver Bell (s. 24) at "conviction is normally reached by quite other means than that of following logical proofs". Slik vi forstår Bell overbevises vanligvis elever på andre måter enn ved formelle bevis. Et eksempel på det er at elever i geometri ofte overbevises ved å betrakte figurer og visualisere omdannelser av figurer (Harel & Sowder, 1998).

2.4 Bevisskjema

Studier har vist at elever har liten forståelse av formelle bevis (Healy & Hoyles, 1999; Senk, 1985). Når Harel og Sowder (1998) refererer til elevbevis legger de i ordet bevis vekt på hva som overbeviser elever, framfor kun å betrakte ordet bevis slik det benyttes i en formell sammenheng.

I en undersøkelse utført av Balacheff (1988) karakteriserte han ulike bevisnivåer oppdaget i elevenes besvarelser med utgangspunkt i hvordan elever validerer sine løsninger. Balacheff kategoriserer elevenes bevisnivå i to hovedgrupper; *pragmatiske bevis* og *begrepsmessige bevis*. Pragmatiske bevis refererer til fysiske handlinger eller synlige endringer ved å ta utgangspunkt i konkrete figurer, aritmetiske utrykk eller manipulasjoner for å bevise. Begrepsmessige bevis involverer ikke, ifølge Balacheff, handlinger eller referanser til matematiske objekter.

Balacheff (1988) deler pragmatiske bevis inn i tre bevisnivåer. Det første nivået *naiv empirisme* innebærer at elevene sjekker noen få eksempler, og ut i fra disse blir elevene overbevist om at en påstand er sann. *Avgjørende eksperiment* er det andre nivået. Elever som er innenfor nivået avgjørende eksperiment undersøker et nøye utvalgt eksempel for å bevise at en påstand er sann. Idet elever benytter egenskapene eller strukturen ved et eksempel for å argumentere for en påstands sannhet, har elevene beveget seg til det tredje nivået, som kalles *generisk eksempel*. Ved bruk av generisk eksempel argumenterer elever for sannheten av en påstand ved å gjennomføre operasjoner eller transformasjoner på et eksempel som er valgt som en karakteristisk representant for en situasjon. Sèmadèni (1984, sitert i Balacheff) hevder at ved å fremheve de *generiske egenskapene* i ulike situasjoner kan elever bevege seg fra et pragmatisk bevis og inn i begrepsmessige bevis. Å fremheve de genereriske egenskapene kan kobles til Hannas (1990) *bevis som forklarer* du hun påpeker at slike bevis bør gi en forklaring basert på matematiske egenskaper.

Tankeeksperiment er det fjerde og høyeste nivået av elevbevis hos Balacheff (1988), og hører inn under begrepsmessige bevis. Elever på nivået tankeeksperiment undersøker transformasjoner utført på kjente objekter løsrevet fra spesielle representasjoner, der språket er et verktøy for logisk-deduksjon (Balacheff).

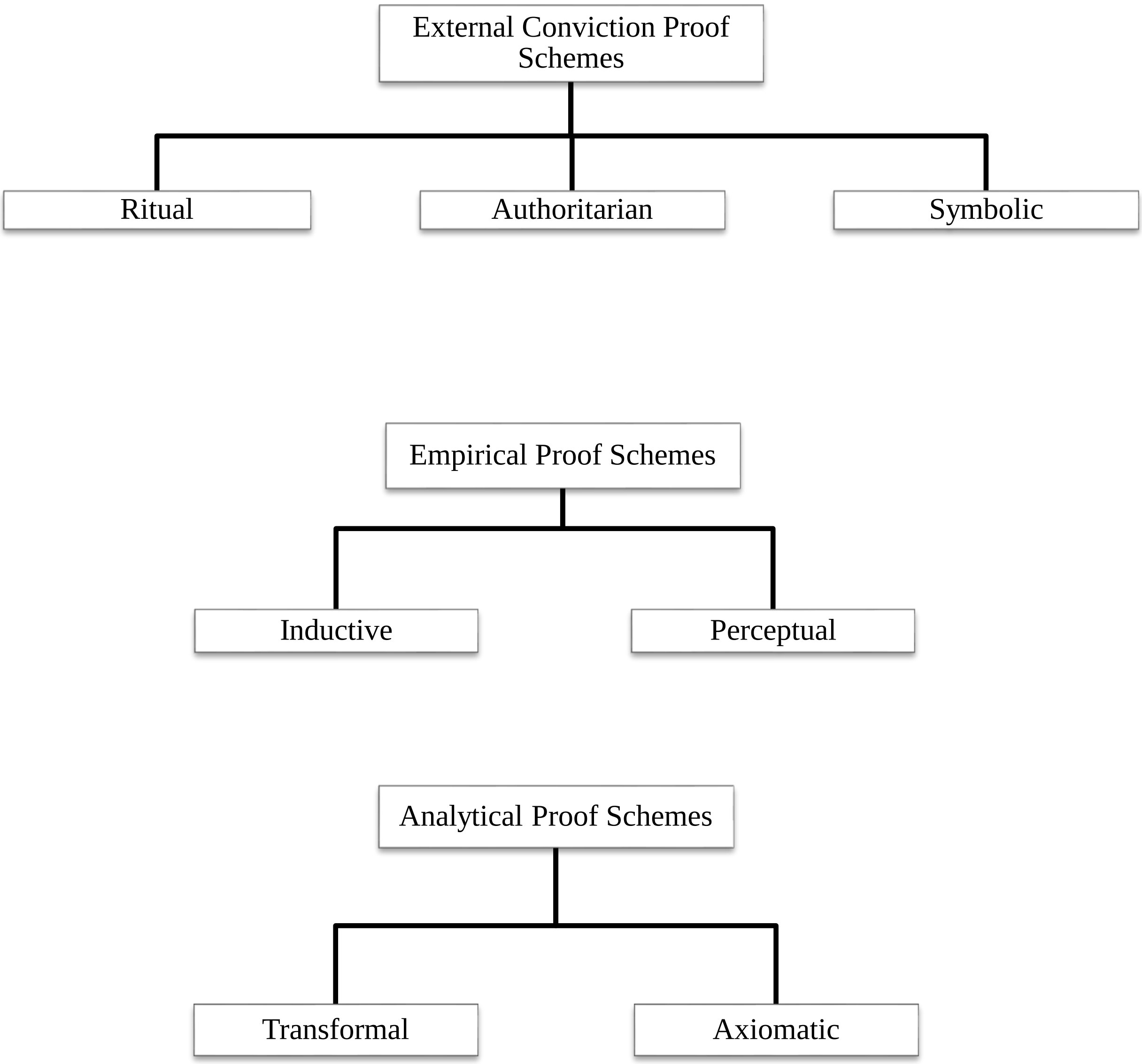
Krummheuer (1995, sitert i Vincent, 2002) definerer begrepet *kollektiv argumentasjon* som den endelige følgen av påstander akseptert av alle deltakerne, som mer eller mindre er fullstendig rekonstruerbar av alle deltakerne, eller av en observatør. I likhet med Vincent skriver Bell (1976, s.24) "proof is an essentially public activity which follows the reaching of conviction". Videre påpeker Balacheff et al. (1999) at interaksjon mellom elever i arbeid med matematiske problemer kan fremme deres bevisprosess.

At å bevise er en sosial aktivitet med formål å overbevise, kan i tillegg sees i sammenheng med Harel og Sowder (1998) som påpeker viktigheten av at elevene blir kjent med at bevis er et produkt av en sosial aktivitet der de bør og kan delta, dette kan også observeres i deres definisjon av bevisskjema. Harel og Sowder (2007, s. 7) skriver: "A person's (or a community's) proof scheme consists of what constitutes ascertaining and persuading for that person (or community)". Slik vi forstår Harel og Sowder innebærer et bevisskjema de faktorer som overbeviser og fjerner tvil hos individet (eller samfunnet). Videre påpeker Harel og Sowder (s. 6) at begrepet bevisskjema baserer på følgende tre definisjoner:

- *Formodning versus fakta*: Et individ kan oppfatte en påstand som en formodning eller som fakta. Med formodning menes en påstand formulert av et individ som er usikker på påstandens sannhet. Påstanden slutter å være en formodning og går over til å bli faktum, i individets syn, i det individet blir overbevist om dens sannhet.
- *Bevise:* Prosessen med å bevise er den prosessen som fjerner individets tvil om sannheten av påstanden. Prosessen med å bevise inkluderer de to underprosessene *overbevise seg selv* og *overbevise andre*.
- *Å overbevise seg selv versus å overbevise andre*: Å overbevise seg selv i bevisprosessen er å forsikre seg selv om en påstands sannhet. Å overbevise andre er derimot en prosess der man overbeviser andre om at en påstand er sann.

Slik de to prosessene å overbevise seg selv versus å overbevise andre er definert, er de fullstendig subjektive prosesser. Prosessene kan med andre ord variere fra kontekst til kontekst, fra person til person, fra elev til elev (Harel & Sowder, 2007).

I studien utført av Harel og Sowder (1998) ble elevenes bevisskjema kategorisert. Ved å observere 128 elever i seks undervisningseksperiment ble elevenes bevisskjema delt inn i de tre hovedkategorier *eksterne bevisskjema*, *empirisk bevisskjema* og *analytisk bevisskjema* (figur 2).



Figur 2: Tre kategorier av bevisskjema, litt forenklet etter Harel og Sowder (1998, s. 245).

Elever som er i besittelse av et eksternt bevisskjema kan bli overbevist om at en påstand er sann avhengig av (a) kun å se på påstandens struktur, (b) ved en autoritet, for eksempel av en lærer eller et læreverk, eller (c) ved symbolmanipulasjon der manipulasjonen eller symbolene ikke har en meningsfull tilhørighet til konteksten.

Harel og Sowder (1998) observerte fem forskjellige tilfeller av det autoritære bevisskjemaet i elevenes matematiske oppførsel i sin studie. For det første insisterte elevene på å bli fortalt en løsningsprosedyre som de kunne benytte for å løse problemet. Videre søkte elever hjelp uten å gjøre et seriøst forsøk på oppgaven først. Det tredje tilfellet var at elevene tilegnet matematiske teoremer og setninger en mystisk og magisk kraft i bevisprosessen. Deretter var det tilfeller der elevene beviste en gitt påstand ved å reformulere påstanden til en ytring de anså som faktum. Det siste tilfellet var at elevene ikke stilte spørsmål til lærerens motiv og bakgrunnen for hans tenkning, eller utfordret hans påstander – selv når de mistenkte at påstanden hans kunne være feil. Om læreren ikke kommenterte en gal løsning, ville elevene her godta løsningen, selv om de mistenkte den for å være feil.

Empirisk bevisskjema er ifølge Harel og Sowder (2007) en klasse av bevisskjema hvor skjemaene kjennetegnes ved elevenes tillit til dokumentasjon fra eksempler ved direkte målinger av kvantiteter, substitusjon av spesifikke tall i algebraiske uttrykk eller deres tillit til persepsjon. *Persepsjon* defineres av Kaufmann og Kaufmann (2009, s. 144) som den kognitive prosessen som omfatter et individs oppfatning av objekter og begivenheter i individets fysiske og sosiale omgivelser med utgangspunkt i individets sanseinntrykk her og nå. Kort forklart omfatter termen et individs ervervelse, utvelgelse og tolkning av sanseinntrykk. Harel og Sowder (1998) deler empirisk bevisskjema i to underkategorier*; induktivt bevisskjema og perseptuelt bevisskjema.*

Hvis elever innehar et *induktivt bevisskjema*, vil de ifølge Harel og Sowder (1998) overbevise seg selv og andre ved en kvantitativ evaluering. Slik vi forstår Harel og Sowder baserer elevene seg innenfor induktivt bevisskjema på en rekke konkrete eksempler (av og til bare ett) for å overbevise seg selv og andre. I likhet med Harel og Sowder (2007) mener vi det kan trekkes paralleller mellom induktivt bevisskjema og Balacheffs (1988) nivåer *naiv empirisme* og *avgjørende eksperiment*, da både Harel og Sowder (1998) og Balacheff presiserer at elever blir overbevist om en påstands sannhet ved å betrakte et utvalg av eksempler og ofte bare et enkelt eksempel.

Et *perseptuelt bevisskjema* omfatter ifølge Harel og Sowder (1998) elevers uutviklede mentale bilder som innebærer deres persepsjoner og en koordinering av deres oppfatninger. At elever har uutviklede mentale bilder beskrives av Harel og Sowder som at elevene ignorerer omdannelser på objekter eller mangler evnen til å forutse resultatet av omdannelser fullstendig eller nøyaktig. Harel og Sowder baserer seg på Piaget og Inhelders (1967, sitert i Harel & Sowder, s.225) definisjon av mentale bilder, som sier at "such images constitute an imitation of actions that can be carried out in thought (e.g., rotations of objects)… [but they] cannot be adequately visualized all the way to [their] ultimate conclusion before [they have] actually been performed".

Harel og Sowder (1998) har innenfor det analytiske bevisskjema skilt mellom *omdannelsesbevisskjema*[4] og *aksiomatisk bevisskjema*. Omdannelsesbevisskjema har tre essensielle kjennetegn. De tre kjennetegnene er elever som (a) tar hensyn til generalitetsaspektet til formodningen, (b) anvender mentale omdannelser som er målorienterte, og hvor de forutser resultatet av den mentale omdannelsen, og (c) elever som er i stand til å utføre omdannelser av bilder som del av en logisk-deduktiv prosess (Harel & Sowder, s. 261). Generalitetsaspektet til formodningen har å gjøre med et individs forståelse av at målet er å argumentere "for alle" og ikke isolerte tilfeller hver for seg. At elever formulerer mål og delmål, og at elever prøver å forutse resultatene i løpet av argumentasjonsprosessen er dokumentasjon på at elevene anvender mentale omdannelser, som er målorienterte (Harel & Sowder, 2007, s.8). Harel og Sowder presiserer videre at generiske eksempler, beskrevet av Balacheff (1988), innfrir kravene for et omdannelsesbevisskjema.

Aksiomatisk bevisskjema innebærer i likhet med omdannelsesbevisskjemaet de essensielle kjennetegnene nevnt for omdannelsesbevisskjema. I tillegg til kjennetegnene for omdannelsesbevisskjema, vil elever med aksiomatisk bevisskjema ha en forståelses for, ihvertfall i prinsippet, at alle matematiske begrunnelser har utspring i udefinerte begreper og aksiomer (Harel & Sowder, 1998).

2.5 Sosiokulturelt perspektiv på læring

I litteraturen finnes det flere teorier om hvordan vi mennesker lærer og tilegner oss kunnskap. En av dem er sosiokulturelt perspektiv på læring. I følge Dysthe (2001) bygger sosiokulturell teori på et konstruktivistisk syn på læring. Mens et rendyrket konstruktivistisk syn på læring legger vekt på at kunnskap konstrueres gjennom individuelle prosesser, legger sosiokulturell teori vekt på at kunnskap konstrueres gjennom samhandling og i en kontekst (Dysthe). Säljö (2005) hevder at kunnskap i et sosiokulturelt perspektiv på læring først vil oppstå i et samspill mellom mennesker, før det blir en del av individet og dermed individets tenking. Læringssynet er sentralt i vår studie da vi studerer kommunikasjonen mellom elever i arbeid med bevisoppgaver i geometri, der elevene har tilgang til et dynamisk geometriprogram.

Balansen mellom det individuelle og det sosiale er et kritisk aspekt av ethvert læringsmiljø (Dysthe, 2001). Hun påpeker videre at læring er langt mer enn det som skjer i hvert enkelt individs hode, det har med omgivelsene i vid forstand å gjøre. I vår studie har dette betydd at

[4] Egen oversettelse fra engelsk: transformational proof scheme.

vi har måttet ta i betraktning rollen det dynamiske geometrimiljøet spiller som konteksten rundt elevenes læring. Ifølge Dysthe blir ordet kontekst i pedagogisk sammenheng som regel forklart med en rekke konsentriske sirkler rundt den lærende, og en fremstiller lag på lag med kontekster. Vår tolkning av Dysthe er at kontekst betegner det miljøet som omgir den lærende. Med andre ord betegner samspillet mellom eleven og DGMet én kontekst i vår studie, mens samspillet mellom elevene som samarbeider om matematikkoppgaver betegner en annen. Begge har innflytelse på elevens læringsprosess. Konteksten inkluderer individet som deltaker i et samspill. Samspillet omslutter både andre individer, fysiske redskaper (datamaskiner) og representasjonssystemer (matematiske symboler).

Noe som skiller det sosiokulturelle perspektivet fra andre teoretiske perspektiver, er blant annet vektlegging av kulturelle redskaper (Ottersen, 2007). Ifølge Säljö (2005) innebærer kultur den samlingen av ideer, holdninger, kunnskaper og andre ressurser mennesket har ervervet seg gjennom interaksjon med omverdenen. Termen redskap er her knyttet til verktøy mennesket har utviklet for å håndtere hverdagen. Säljö påpeker at betegnelsen redskap stammer fra det Vygotsky beskriver som artefakter, som vil si gjenstander eller produkter framstilt av mennesker.

2.5.1 Medierende redskaper og artefakter

Fysiske og intellektuelle redskaper er avhengige av hverandre i den moderne teknologiske verden (Säljö, 2005). I følge Säljö har fysiske redskaper som vi benytter oss av, som for eksempel en datamaskin, ofte en underliggende teknikk som er usynlig for brukeren. Den underliggende teknikken er preget av både fysiske og intelligente redskaper. Et samlebegrep for slike redskaper er medierende redskaper. Verbet å mediere, kommer fra det tyske verbet *vermittlung* som betyr å formidle (Dysthe, 2001). Säljö påpeker ut i fra et sosiokulturelt perspektiv at medierende redskaper som språket og fysiske objekter vil være bærebjelker i vår tenking og vår forestillingsevne.

Et eksempel på intellektuelle egenskaper til et medierende redskap kan være en stokk i hendene på en synshemmet person. Om personen har erfaring i å anvende stokken, kan den bli et kraftfullt redskap for å orientere seg og interagere med omverdenen. Man sier at tenkingen kommer i kontakt med omverdenen gjennom redskapet. I kombinasjon med et tenkende individ blir den, i én forstand døde gjenstanden, et svært følsomt redskap som kan brukes til å kommunisere med omverdenen med stor presisjon (Säljö, 2005). Vi mener analogien kan overføres til bruk av verktøyene et dynamisk geometriprogram har å tilby til matematikkundervisningen. Verktøyene som et dynamisk geometriprogram innehar kan, i kombinasjon med en kompetent elev, føre til matematiske undersøkelser og matematiske oppdagelser. Blant annet er den unike *draggingfunksjonen* i et dynamisk geometriprogram et eksempel på et medierende redskap (Mariotti, 2009). Uten en kompetent bruker, har draggingfunksjonen ingen interessante egenskaper i seg selv, men i et system med en kompetent bruker har verktøyet flere interessante egenskaper. Når et individ har blitt i stand til å anvende draggingfunksjonen på intellektuelle måter, sier man i sosiokulturellteori at det medierende verktøyet er internalisert hos individet. Draggingfunksjonen vil bli beskrevet nærmere i kapittel 2.6.1. Ifølge Säljö blir menneskers fysiske redskaper på en slik måte en del av svært komplekse sosiale, samt intellektuelle praksiser.

2.5.2 Situert læring

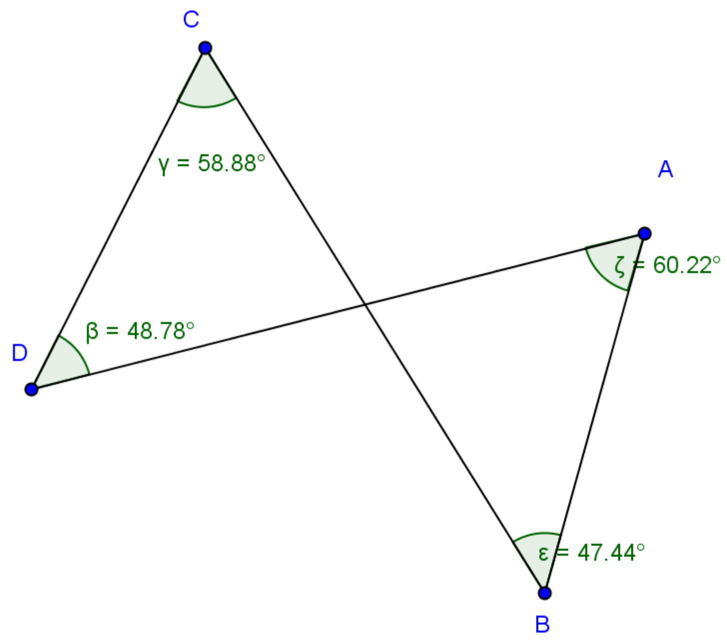
At læring er situert bygger på teorier om at kunnskap ikke kun eksisterer i menneskets hjerne, men er avhengig av og befinner seg i konteksten der individet deltar. Læring foregår i miljøet individet deltar i og er dermed gjenkjennelig for individet (Lave, 1999). Slik vi forstår Lave vil ulike kontekster gi ulik påvirkning på en elevs læring. Säljö (2005) påpeker at situasjonen individet befinner seg i spiller en avgjørende rolle for tolkningen, forståelsen og løsningen av en oppgave. Et eksempel på at læring er situert kan være en elev som arbeider med en matematikkoppgave. Om eleven har tilgang på et DGM kan et medierende redskap som draggingfunksjonen påvirke elevenes handling. Om eleven derimot ikke har tilgang til DGM kan elevens handlig være en annen. Med andre ord blir læringen og kunnskapen som konstrueres ulik i de to situasjonene.

2.6 Dynamisk geometrimiljø (DGM)

Dynamiske geometrimiljø har blitt fellesbetegnelsen for en gruppe av dynamiske geometriprogramvarer, som for eksempel Cabri Geometri™, The Geometer's schetchpad® og GeoGebra. Elevene tilbys gjennom GeoGebra et DGM for gjenoppdagelse, manipulasjon og utforskning av matematiske begrep og fenomener (Hohenwarter et al., 2008). I GeoGebra kan objekter bli kontinuerlig omdannet på skjermen ved bruk av funksjonen kalt *dragging*. I tillegg kan man i dynamisk geometriprogramvare utføre *målinger*. Videre inneholder DGMet, i tillegg til de egenskapene allerede nevnt, Euklidske geometriverktøy som passer- og linjalkonstruksjoner.

Forskningsresultater indikerer at et DGM kan bli brukt for å oppmuntre elever til oppdagende og eksperimenterende læring i matematikkundervisningen. Samtidig har visualiseringsaspektet ved slike programvarer vist seg å være et effektivt virkemiddel for blant annet at elevene skal kunne generere matematiske hypoteser (Hohenwarter et al., 2008). Flere forskningsresultater (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Healy & Hoyles, 2001; Marrades & Gutiérrez, 2000; Olivero, 2001) har indikert at å engasjere elever til å formulere sine egne matematiske hypoteser, kan hjelpe dem i retning mot å bli i stand til å bevise matematiske teoremer.

Ifølge Goldenberg, Cuoco, og Mark (1998, sitert i Vincent, 2002, s. 70) vil et DGM invitere elever til å omdanne teoremer i statisk geometri til dynamiske eksperimenter. På den måten har de muligheten til å utvikle en dypere innsikt i resultatet og forklaringen av teoremet. I tillegg har de gjennom dynamiske eksperimenter mulighet til å gjøre undersøkelser på måter som kan antyde nye resultater og nye forklaringer. Et eksempel på dette finner man i studien utført av De Villiers (1998, s. 387). Han fant at elever som i et DGM utforsket om vinkelsummen i firkanter alltid ville være 360˚, endte opp med å dra i sine konstruksjoner og oppdage et moteksempel av en krysset firkant hvor vinkelsummen syntes å bli mindre enn 360° (se figur 3). Vi mener mønsteret neppe hadde oppstått i et papir- og blyantmiljø. Moteksempelet ledet til en diskusjon i klassen om en reformulering av definisjonen av en firkant. De Villiers (1998) påpeker at elevene var motvillige til å godta den kryssede firkanten som en firkant ettersom de observerte at vinkelsummen var mindre enn 360˚. Vi mener eksempelet viser hvordan DGMer kan gi opphav til konflikt situasjoner som man ikke får tilgang til i et papir- og blyantmiljø. I tillegg illustrerer det hvordan et DGM kan tilby elevene et behov for å løse slike konflikter.



Figur 3: Illustrasjon av den krysset firkanten, slik som elevene fant i DeVilliers (1998) studie.

2.6.1 Draggingfunksjonen

I et DGM kan elevene benytte seg av dragging gjennom å bevege musen for å bestemme bevegelsen av forskjellige frie objekter. Draggingen kan ifølge Mariotti (2009) utføres på to ulike måter: direkte og indirekte. *Direkte dragging* innebærer den direkte bevegelsen av et basiselement (for eksempel et punkt) som er relatert til den direkte virkningen på et spesielt punkt (eller et annet objekt). Draggingen representerer variasjonen av dette elementet i planet, noe som er måten å representere et generisk element et DGM. *Indirekte dragging* innebærer den indirekte bevegelsen av et element som oppstår etter en konstruksjon har blitt utført. I indirekte dragging vil dragging av basispunktene fra konstruksjonens opphav, bestemme bevegelsen for det nye elementet oppnådd gjennom konstruksjonen.

Draggingfunksjonen kan i et sosiokulturelt perspektiv på læring ses på som et medierende redskap som elevene får tilgang til gjennom DGMet. Flere forskere (Azarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Mariotti 2009) har studert draggingfunksjonen som verktøy i et DGM. I følge Mariotti tillater draggingfunksjonen elevene å erfare bevegelsers avhengighet, noe som ifølge henne kan tolkes i form av logisk avhengighet i DGMet. Samtidig hevder hun at dette kan tolkes i form av logisk avhengighet i en ren geometrisk kontekst, for eksempel logisk avhengighet mellom geometriske forhold i en geometrisk teori. Forskning utført av Baccaglini-Frank og Mariotti indikerer at elever benytter draggingfunksjonen til å formulere og komme fram til hypoteser. Videre hevder Azarello et al. at dragging støtter produksjon av hypoteser gjennom å undersøke figurer ved bevegelse, samt ved å se etter måten de endrer seg på. I tillegg støtter draggingfunksjonen ifølge dem brukeren ved å tillate oppdagelse invariante egenskaper. Draggingfunksjonen støtter ifølge Azarello et al. bevisets rolle som en virkelighetsnær forklaring av hypoteser eller matematiske egenskaper, ved at den tilbyr brukeren tilbakemeldinger til oppdagelsesfasen.

Studier viser at å la elever arbeide med å formulere hypoteser i et DGM kan være fruktbart for å skape en situasjon for elevene som oppmuntrer til forklaringer og bevis (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Mariotti (2009) beskriver ulike måter å benytte seg av dragging på i sammenheng med formulering av hypoteser; undrende/tilfeldig dragging, bevart dragging, dragging med sporing aktivert og dragging-testen. Under følger en forklaring av de ulike:

- *Tilfeldig dragging*: Tilfeldig dragging av et basispunkt på skjermen mens man ser etter interessante konfigurasjoner eller regelmessigheter i figuren.
- *Bevart dragging*: Dragging av et basispunkt slik at figuren opprettholder en spesiell egenskap.
- *Dragging med sporing aktivert*: Dragging av et basispunkt med sporingsfunksjonen[5] aktivert.
- *Draggingtesten:* Dragging av basispunkt for å se hvorvidt den konstruerte figuren opprettholder de ønskede egenskapene. I denne modusen kan det være fruktbart for brukeren å utforme en ny hypotese eller redefinere et punkt på et objekt for så å teste den formulerte hypotesen.

2.6.2 Målinger i et DGM

I et DGM kan elevene i tillegg til dragging, benytte seg av målinger på objekter gjennom måleverktøyet. Måleverktøyet tillater målinger av avstand, lengde, perimetere, areal og vinkler av konstruerte figurer. Målingene endrer seg kontinuerlig[6] når figuren dras (Olivero og Robutti, 2007). I forskning utført av Olivero og Robutti fant de at målinger i likhet med dragging kunne ha ulik funksjon i elevenes utforskende prosess. I tillegg fant Olivero og Robutti at målinger kan brukes for å sjekke en hypotese i GeoGebra etter at elevene har

[5] Sporingsfunksjonen er en funksjon i DGMet som viser veien punktene har beveget seg i løpet av draggingen.
[6] Målinger oppdateres kontinuerlig i sann tid ettersom figuren dras.

formulert den, enten for å akseptere eller motbevise hypotesen. Denne formen for måling benyttes ofte sammen med draggingtesten.

2.6.3 Matematisk visualisering og DGM

Å visualisere et matematisk problem er ifølge Vincent (2002) å være i stand til å forstå problemet gitt ved et diagram eller et visuelt bilde. Vi har i studien valgt å benytte oss av Zimmerman og Cunninghams (1991, s. 3) definisjon av *matematisk visualisering* som "the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding". Vår forståelse av definisjonen er at matematisk visualisering omhandler prosessen med å forme bilder mentalt eller ved hjelp av verktøy, og benytte seg av slike bilder effektivt for matematiske oppdagelser og forståelse.

Fischbein (1993) hevder at geometriske figurer er en blanding av to uavhengige definerte enheter. Ifølge han har man på den ene siden de abstrakte ideene eller begrepene, mens man på den andre siden har de sanselige representasjonene som reflekterer noen konkrete operasjoner. Videre skriver Fischbein (s.143) at:

> "The objects of investigation and manipulation in geometrical reasoning are then mental entities, called by us figural concepts, which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and at the same time, possess conceptual qualities – like ideality, abstractness, generality, perfection)".

Vår forståelse av Fischbein (1993) er at figurale begrep[7] på den ene siden omhandler de romlige egenskapene til det matematiske objektet, og på den andre siden de begrepsmessige egenskapene til det matematiske objektet. For eksempel kan en skisse av en trekant ikke bare betraktes som et visuelt bilde av et fysisk objekt, men må i tillegg betraktes som et matematisk begrep. Mariotti (1997 sitert i Vincent, 2002) betrakter derimot skjermbildet i DGMet til å representere både de figurale og de begrepsmessige komponentene av et matematisk objekt. Laborde (1998) hevder at dynamiske tegninger tilbyr sterkere visuell overbevisning enn statiske tegninger, og skriver: "a spatial property may emerge as an invariant in the movement whereas this might not be noticeable in one static drawing" (s. 117). Hun påpeker videre at den kritiske terskelen i løsningsprosessen i et DGM, er den visuelle gjenkjenningen av geometriske invarianter, som tillater elevene å bevege seg fra

[7] Egen oversettelse fra engelsk: figural concepts

dynamisk geometri til teoretisk statisk geometri. Love (1995) på den andre siden, stiller spørsmål ved virkningen av raskt produserte skjermbilder på elevens evne til å generere sine egne mentale bilder. Slik vi ser det vil det man lærer i et DGM vær tilknyttet miljøet da læring i sosiokulturelteori er situert. Med andre ord vil ikke nødvendigvis det eleven lærer i et DGM være overførbart til andre situasjoner eller miljøer.

2.6.3 Empiriske bevis og DGM

Noen forskere (Chazan, 1993; Hanna & Jahnke, 1993) advarer mot bruken av dynamisk programvare i matematikkundervisningen. De mener at feil bruk av dynamiske læringsmiljøer vil fremme elevenes empiriske resonneringsevne framfor deres deduktive resonneringsevne. Grunnen til det kan ifølge Chazan være at DGMer gjør det så enkelt å sjekke ulike hypoteser empirisk. Elever kan på den måten overbevises om sannheten av en hypotese ved å sjekke et tilstekkelig antall eksempler, og dermed ikke føle noe behov for mer abstrakt argumentasjon.

Ifølge Fischbein (1982) har elever ofte problemer med å se hvorfor et gitt faktum trenger et bevis, fordi det etter deres syn enten er opplagt eller rettferdiggjort gjennom faktiske målinger. I tillegg vil elevene, ifølge Fischbein, ofte ikke overbevist av den generelle gyldigheten av et teorem, selv etter de har blitt presentert for et bevis. De føler da et behov for ytterlig testing av teoremet. Slik vi forstår Fischbein mener han at elever er usikre på forholdet mellom formelle deduktive argument og empirisk argumentasjon. Hanna (2000) påpeker at erfaringer tilsier at elever ikke overbevises av geometriske argumenter, og godtar kun symbolsk resonnering som bevis. Vår tolkning av Fischbein og Hanna er at bevis har ulik betydning for elever. Med andre ord er det ulike faktorer som spiller ulike roller i prosessen tilknyttet det å overbevise elever om at en hypotese er sann.

Forskning utført av Mariotti (2001) indikerer at datamaskinen kan brukes som et hjelpemiddel i stegene fram mot å skape et behov for forklaringer og bevis hos elevene. Samspillet mellom å formulere hypoteser og å undersøke situasjoner empirisk kan lede elevene til å erfare motsigelser og uvissheter, noe som ifølge Hadas, Herschowitz og Schwarz (2000) kan føre til at elevene får et behov for forklaringer. På den måten kan det vokse fram et behov for i å vise hypotesen formelt ved bruk av matematisk språk. Flere forskere påpeker at det empiriske aspektet ved matematikk er viktig for elevenes forståelse av bevis i matematikk (Balacheff, 1988; Fischbein, 1982; Hanna & Jahnke, 1996). De foreslår en tilnærming til undervisning av bevis og sannhet i matematikk som baserer seg på at elever utforsker matematiske fenomener empirisk, for eksempel ved å utføre målinger og eksperimenter i et DGM. Deretter må elevene oppmuntres til å observere regulariteter som kan føre til en generalisering av det aktuelle fenomenet. Hvis elevene klarer å generalisere et matematisk fenomen, vil det ifølge Hanna og Jahnke sannsynligvis vokse fram et behov hos eleven for å sannsynliggjøre generaliteten. Fischbein påpeker viktigheten av å la elever se begge sidene i matematikk, både empirisk og teoretisk. Balacheff støtter også dette synet på undervisning av bevis i matematikk. Han poengterer i tillegg viktigheten av å etablere et klasserommiljø hvor elevene blir bevisst nødvendigheten av å kunne produsere gyldige argumenter. Balacheff beskriver en metode som kan fremme dette behovet basert på tre steg. Disse stegene innebærer at elevene først engasjerer seg i en diskusjon hvor de kommer opp med en hypotese, deretter utfører de nødvendige målinger for å teste hypotesen, og til slutt skaper elevene et bevis som bygger opp om deres hypotese.

Kapittel 3: Geometri i skolen

Kapittelet har til hensikt å gi en nærmere beskrivelse av elevenes forutsetninger for å arbeide med oppgavene i studien. Først i kapittelet presenteres det kort hva Euklidsk geometri er, ettersom det er Euklidsk geometri som undervises i skolematematikken. Deretter vil vi presentere noen punkter fra læreplanen for programfaget R1 som omhandler geometri, samt noen begreper vi mener elevene bør ha kjennskap til. Vi vil også presentere bevis for at midtnormalene så vel som vinkelhalveringslinjene i en trekant skjærer hverandre i ett felles punkt.

3.1 Euklidsk geometri

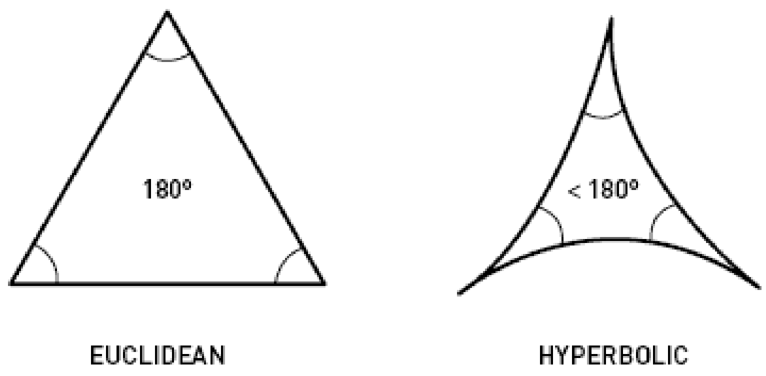
I *Book I* skiller Euklid mellom *grunnbegreper, common notions og postulater,* som alle ifølge Euklid var sannheter som var ment å aksepteres uten bevis. Bakgrunnen for at Euklid formulerte dem var fordi han innså at man ikke til enhver tid kunne bevise alt i geometrien og at man dermed måtte ha et startpunkt for argumentasjonen (Venema, 2006). Euklids grunnbegreper bestod av de helt elementære byggesteinene i geometrien slik som punkt og linjer. For eksempel beskrev han et *punkt* som det som ikke har deler, og en *linje* som lengde uten bredde. Både common notions og postulatene var ifølge Euklid basispåstander hvis sannhet burde være opplagt for enhver fornuftig person (Venema, s. 2). Hovedforskjellen mellom common notions og postulatene var ifølge Euklid at common notions ikke var spesielle for geometri, men felles for alle grener av matematikk. For eksempel omhandlet en common notion at ting som var lik den samme tingen også måtte være like hverandre (Venema). Euklids postulater omhandlet geometriske egenskaper og er i følge Venema (s.5) beskrevet som:

1. Fra et vilkårlig punkt til et vilkårlig annet punkt kan man trekke en rett linje.
2. Et rett linjestykke kan forlenges ubegrenset i en rett linje.
3. Man kan tegne en sirkel med vilkårlig sentrum og vilkårlig radius.
4. Alle rette vinkler er like store.
5. Dersom en rett linje skjærer to rette linjer og de innvendige vinklene på samme side av den kryssende linjen har en sum mindre enn to rette vinkler, så vil de to rette linjene møtes om de forlenges ubegrenset til denne siden.

Det mest omtalte av Euklids postulater er det femte postulatet. Om man studerer postulatene nærmere vil man ifølge Venema (2006) oppdage at det femte postulatet er bemerkelsesverdig annerledes enn de andre postulatene. Venema hevder at dette postulatet ikke er like intuitivt eller selvinnlysende som de andre postulatene. Han påpeker derimot at postulatet har utseende og karakter av en proposisjon snarere enn et postulat. Med bakgrunn i det femte postulatet, har matematikere i to tusen år prøvd å forbedre Euklids geometri ved å bevise at det femte postulatet er en logisk konsekvens av de fire andre postulatene. Det uten hell, noe som resulterte i at det vokste frem tre ulike grener av geometri; *nøytral geometri*, *Euklidsk geometri* og *hyperbolsk geometri* (Venema). Nøytral geometri omhandler alle teoremer som kan utledes basert på de fire første postulatene til Euklid, Euklidsk geometri baserer seg på de fem postulatene til Euklid, og hyperbolsk geometri omhandler de fire første postulatene til Euklid, samt negasjonen av Euklids femte postulat.

Til tross for at Euklids femte postulatet ikke eksplisitt nevner parallelle linjer er postulatet vanligvis referert til som *Euklids parallellpostulat*. Grunnen til det er at postulatet kan omformuleres på måter som gjør det mer opplagt og direkte til en påstand om parallelle linjer (Venema, 2006). Den mest vanlige av disse formuleringene er *Playfairs postulat* som sier at: ”For alle linjer l og for alle punkt P som ikke ligger på l eksisterer det nøyaktig en linje m slik at P ligger på m og $m \| l$” (Venema, s.119). Det kan i tillegg vises at Euklids femte postulat er logisk ekvivalent med det *motsatte av alternative indre vinkel teoremet*, som sier at om ”to parallelle linjer er kuttet av en transversal, så er begge par av alternative indre vinkler kongruente” (Venema, s.117). Et annet teorem innenfor Euklidsk geometri som også er logisk ekvivalent med Euklids parallellpostulat, er *vinkelsumteoremet* som sier at for alle trekanter ΔABC er vinkelsummen lik 180° (Venema, s. 120).

Siden vinkelsumteoremet er logisk ekvivalent med Euklids femte postulat er det dermed ikke gyldig i nøytral og hyperbolsk geometri. Trekanter i nøytral geometri har en vinkelsum som er mindre enn eller lik 180°, mens trekanter i hyperbolsk geometri har en vinkelsum som er strengt mindre enn 180°. I figur 4 følger illustrasjoner av trekanter innenfor Euklidsk og hyperbolsk geometri.



Figur 4: Trekanten til venstre illustrerer en trekant i Euklidsk geometri, og trekanten til høyre illustrerer en trekant i hyperbolsk geometri (Mathematics Illuminated, 2011).

3.2 Geometri i matematikk R1

I studien er elevenes argumentasjon knyttet til geometri. Under hovedområder for matematikk R1 er det beskrevet at geometri blant annet omhandler bruk av geometriske steder, kongruens og formlikhet til å løse problemer med rene geometriske argumenter. Videre er det i programfaget et mål at elevene skal kunne ”utlede og bruke skjæringssetningene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant” (Utdanningsdirektoratet, 2006). Vi vil nå presentere noen av forkunnskapene vi mener elevene bør ha for å være i stand til å oppfylle disse målene. Vi har her valgt å ta utgangspunkt i hvordan læreverket *Matematikk R1* (Heir, Erstad, Borgan, Moe, & Skrede, 2007) fremstiller de ulike matematiske temaene, med bakgrunn i at det var det læreverket elevene hadde tilgang til.

Formlikhet og kongruens er sentrale begrep i Euklidsk geometri. Heir et al. (2007) påpeker at hvis to trekanter har parvis like store vinkler, er trekantene formlike. Videre presiseres det i læreverket at forholdet mellom tilsvarende sider i to formlike trekanter er konstant og blir ofte kalt n (s. 247). Begrepet kongruens forklares av Heir et al. (s. 250) som et tilfelle av formlikhet der forholdstallet n mellom de to trekantene er lik 1. Deretter opplyser de at om to figurer har samme form og størrelse, kalles figurene kongruente. Videre står det beskrevet at to trekanter vil være kongruente hvis én av kongruensbetingelsene er oppfylt.

Betingelsene for kongruens presentert i Heir et al. (s. 250) er:

1. Sidene er parvis like.
2. To sider og den mellomliggende vinkelen er like.
3. To sider og den motstående vinkelen til den lengste av disse sidene er like.
4. En side og de to hosliggende vinklene er like.

Vi vil nevne at betingelse nummer 2 ovenfor er tilsvarende til *side-vinkel-side* aksiomet beskrevet i Venema (2006, s.86). Aksiomet gir opphav til de tre resterende betingelsene i nøytral geometri.

I kompetansemålene i R1 står det blant annet beskrevet at elevene bør ha kjennskap til midtnormal, vinkelhalveringslinje, median og høyde i en trekant. Heir et al. (2007) presenterer disse som følger:

- *Midtnormalen* til et linjestykke mellom to gitte punkter er det geometriske stedet[8] for et punkt som har like stor avstand fra de to punktene.
- *Vinkelhalveringslinjen* til en vinkel er det geometriske stedet for et punkt som ligger like langt fra to gitte rette linjer som skjærer hverandre.
- *Medianen* i en trekant er et linjestykke fra et hjørne til midtpunktet på motsatt side.
- *Høyden* i en trekant er normalen fra et hjørne ned på motsatt side.

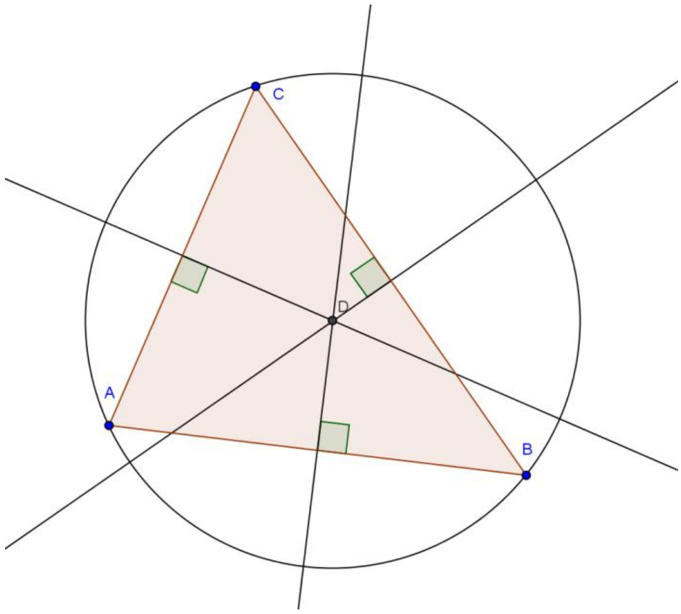
3.3 Skjæringssetningene for midtnormalene og vinkelhalveringslinjene i en trekant

Vi vil i dette delkapittelet presentere skjæringssetningene for midtnormalene og vinkelhalveringslinjene i en trekant. Vi vil i tillegg presentere to bevis for at disse møtes nøyaktig i ett punkt. Bevisene er såpass enkle at vi mener elever med de antatte forkunnskapene beskrevet tidligere bør være i stand til å følge eller utføre dem.

[8] Et geometrisk sted er mengden av punkter som tilfredsstiller et bestemt krav (Heir et al., 2007).

3.3.1 Omsenter - der midtnormalene møtes

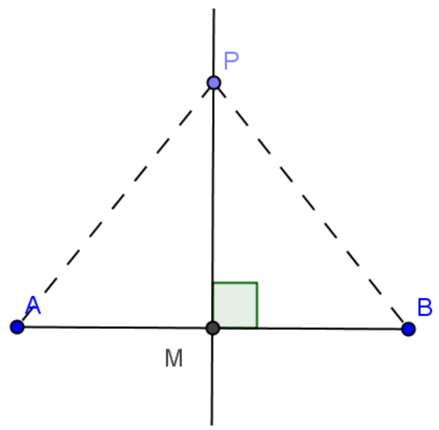
Midtnormalene på sidene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Skjæringspunktene mellom midtnormalene i en trekant er sentrum i den omskrevne sirkelen i trekanten, vist i figur 5 (Heir et al., 2007).



.

Figur 5: Den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$.

Vi vil nå gi et bevis for at midtnormalene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Vi har i beviset valgt å bruke følgende notasjon for lengden av et linjestykke: Om du har et linjestykke PQ betegnes lengden av linjestykket med $|PQ|$. I beviset benytter vi følgende definisjon på midtnormal: *Midtnormalen* på et linjestykke PQ er en linje som står vinkelrett på PQ og som går igjennom midtpunktet M på PQ, som vist på figur 6 (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2007). Før vi starter på beviset vil vi først gi en karakterisering av midtnormalen til et linjestykke.

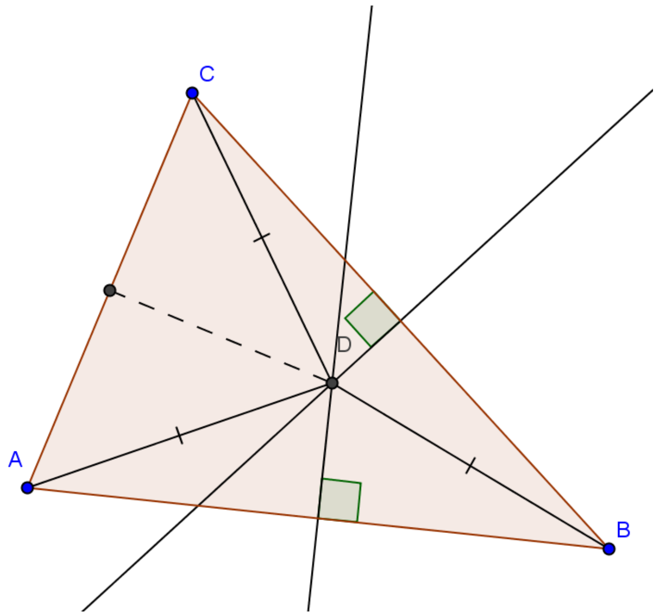


Figur 6: P ligger like langt fra A som fra B.

Implikasjon (1): La P være et punkt på midtnormalen til AB, og M markere midtpunktet på AB. ΔAMP og ΔBMP er da kongruente trekanter ettersom trekantene har to sider som er like lange (AM=MB og MP er felles), og vinklene mellom disse to er like store ($\angle AMP = \angle BMP = 90°$). Dermed er AP=BP (illustrert i figur 6). En konsekvens av dette er at et punkt på midtnormalen til AB vil ligge like langt fra A som fra B (Oldervoll et al., 2007).

Vi vil nå vise at det motsatte også gjelder.

Implikasjon (2): La P være et punkt som ligger like langt fra A som fra B, ΔABP er da likebeint. Vi drar så vinkelhalveringslinja fra P ned på AB og betegner skjæringspunktet med M. ΔAPM og ΔBPM er da kongruente trekanter siden de har to like sider (AP=BP og MP er felles) og vinkelen mellom sidene er like store ($\angle APM = \angle BPM$). En følge av det er at $\angle PMA = \angle PMB$. Siden $\angle PMA$ og $\angle PMB$ til sammen er 180° må hver av vinklene være 90°. I tillegg har vi som konsekvens av kongruensen at AM=MB. PM er dermed midtnormalen på AB.



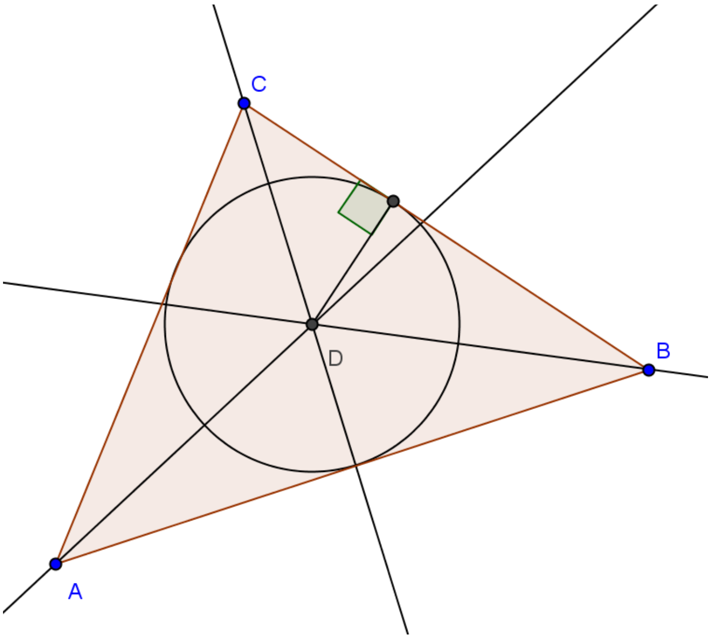
Figur 7: Illustrasjon av Δ *ABC* med midtnormalen på *AB* og midtnormalen på *BC*.

Nå som vi har fått karakterisert midtnormalen er det lett å gjennomføre et bevis for at midtnormalene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Vi konstruerer først midtnormalene på *AB* og *BC* i trekanten. En trekant består av tre ikke-parallelle sider. To midtnormaler til to ikke parallelle linjer vil ikke være parallelle i Euklidsk geoemtri. Vi kan dermed si at to midtnormaler i en trekant skjærer hverandre. Skjæringen mellom midtnormalene *AB* og *BC* betegner vi med *D* (figur 7). Ut i fra implikasjon (1) kan vi nå si at $AD=DB$ og at $DB=DC$. Videre har vi da at $AD=DC$. Ettersom $AD=DC$ kan vi ut i fra implikasjon (2) slutte at *D* ligger på midtnormalen på *AC*. Dermed vil de tre midtnormalene skjære hverandre i et fellespunkt *D*.

$\square$

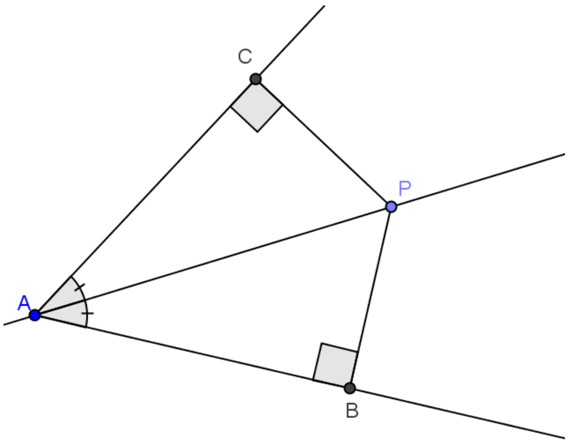
3.3.2 Innsenter - der vinkelhalveringslinjene møtes

Vinkelhalveringslinjene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Skjæringspunktet er sentrum i den innskrevne sirkelen i trekanten (figur 8). Ved å trekke en normal fra skjæringspunktet til en av sidene i trekanten finner man radius i sirkelen (Heir et al., 2007).



Figur 8: Den innskrevne sirkelen til ΔABC.

Vi vil nå gi et bevis for at vinkelhalveringslinjene skjærer hverandre i ett punkt. Som i beviset for midtnormalene vil notasjonen $|PQ|$ beskrive lengden av linjestykket PQ. Før vi starter på beviset, vil vi først gi en karakterisering av vinkelhalveringslinjen med utgangspunkt i definisjonen Heir et al. (2007) gir av en vinkelhalveringslinje.

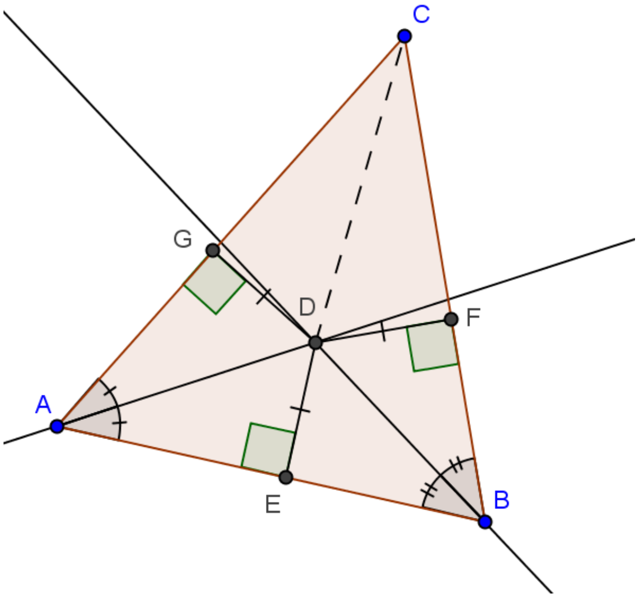


Figur 9: P ligger på halveringslinja til $\angle A$. *C* og *B* er fotpunktene for normalene fra *P* ned på vinkelbeina til $\angle A$.

Implikasjon (1): Halveringslinjen til $\angle A$ deler vinkelen i to like store deler. Vi avsetter et punkt *P* på halveringslinjen, og lar *B* og *C* være fotpunktene for normalene fra *P* ned på vinkelbeina til $\angle A$ (figur 9). Siden vi har to trekanter med to parvis like store vinkler ($\angle PAB = \angle PAC$ og $\angle PBA = \angle PCA$), og en felles samsvarende side *AP*, vil $\Delta ABP \cong \Delta ACP$. En konsekvens av dette vil være at $BP=CP$ (Oldervoll et al., 2007).

Vi vil også vise den motsatte implikasjonen.

Implikasjon (2): La *P* være et punkt som ligger like langt fra begge vinkelbeina til $\angle A$. På samme måte som i (1) setter vi *B* og *C* til å være fotpunktene til normalen fra *P* ned på vinkelbeina. Da vil en vinkel ($\angle PBA = \angle PCA$) og to sider ($CP=BP$, og *AP* felles) være parvis like i ΔABP og ΔACP. Ut i fra betingelse nummer 3, beskrevet i Heir, et al. (2007) kan vi si at trekantene er kongruente. Spesielt har vi at $\angle BAP = \angle CAP$.



Figur 10: vinkelhalveringslinjene for to hjørner i trekanten møtes i ett punkt.

Vi vil nå gi et bevis for at de tre vinkelhalveringslinjene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt ved å benytte implikasjonene (1) og (2). Om vi først betrakter vinkelhalveringslinjene til $\angle CAB$ og $\angle ABC$, vil de opplagt skjære hverandre i et punkt *D*, da de er to ikke-parallelle linjer. Vi drar så normalen fra punktet *D* og ned på sidene *AB*, *BC* og *CA*, og kaller fotpunktene ved normalene henholdsvis for *E*, *F og G* (figur 10). Vi vet fra (1) at siden *D* ligger på både vinkelhalveringslinjen til $\angle ABC$ og $\angle CAB$, så vil $DG=DE=DF$. Ettersom $DF=DG$, og *F* og *G* er fotpunkter normalt på vinkelbeina til $\angle C$, kan vi ut i fra implikasjon (2) si at punkt *D* ligger på $\angle BCA$. De tre vinkelhalveringslinjene skjærer dermed hverandre i ett felles punkt.

□

Kapittel 4: Metodologi

For å undersøke hvordan elever argumenterer i arbeid med bevisoppgaver i geometri benyttet vi en kvalitativ undersøkelsesmetode. Studien gikk ut på å samle informasjon om elevenes bevisskjema i geometri, og det ble derfor samlet inn data gjennom observasjon av elevene i klasserommet. I tillegg ble det samlet inn elektroniske filer med elevenes skriftlige besvarelser. Først i kapittelet presenteres begrunnelser for de metodiske valgene med bakgrunn i relevant teori. Så følger en beskrivelse av utvalget og gjennomføringen av datainnsamlingen i studien, samt de etiske problemstillingene vi støtte på i forhold til de metodiske valgene. Til slutt presenteres en beskrivelse av hvordan datamaterialet er behandlet og analysert.

4.1 Forskningsdesign

Mertens (2005) påpeker at grunnlaget for valg av forskningsdesign avhenger av tre faktorer: Forskernes verdenssyn, forskningsspørsmålets natur og andre praktiske årsaker. I forhold til forskernes verdenssyn plasserer vi oss i det *konstruktivistiske.* Innenfor konstruktivismen er virkeligheten ifølge Mertens ikke absolutt, men defineres gjennom fellesskapets overensstemmelser. Ifølge Robson (2002) vil metoder som tillater mangfoldige perspektiver være en god tilnærming i et konstruktivistisk verdenssyn da konstruktivister ofte søker å forstå sammensatte sosiale konstruksjoner av mening og kunnskap. Videre benytter man seg ofte i kvalitative forskningsdesign av flere datakilder. I vår studie har vi valgt å gjennomføre observasjon med og uten lyd- og bildeopptak, samt innsamling av skriftlig datamateriale. Noe som er i tråd med både et konstruktivistisk syn på verden og et kvalitativt forskningsdesign.

I forskningsspørsmålet vårt søker vi en forståelse av elevers argumentative bevisskjema i geometri i en klasseromskontekst. Vi søker å klassifisere elevenes bevisskjema i ulike kategorier, med utgangspunkt i Harel og Sowders (1998) bevisskjema og Balacheff (1988) sine bevisnivåer. Vi har derfor valgt å anvende Harel og Sowders (2007) definisjon på et individs bevisskjema. I korte trekk er et individs (eller et samfunns) bevisskjema det som overbeviser individet (eller samfunnet). Videre innebærer et individs bevisskjema individets forestilling om tvil, sannhet og overbevisning i en gitt sosial kontekst. For å få innsikt i elevers bevisskjema, er det nødvendig å få forståelse av hvordan elevene blir overbevist når de argumenterer i matematikk. Det mener vi enklest kan gjøres gjennom å analysere hva som blir sagt og skrevet i arbeid med oppgaver hvor elevene trenger å anvende sine argumentative kunnskaper i geometri. Thagaard (2003) påpeker at samtalen er et godt utgangspunkt for viten om hvordan enkeltpersoner opplever og reflekterer over deres egen situasjon. Videre mener vi kvalitativt forskningsdesign er at naturlig valg fordi det tillater oss å observere elevene i deres naturlige omgivelser.

Thagaard (2003) hevder at kvalitative metoder egner seg godt til å studere nye kulturelle fenomener, noe som passet bra ettersom bruk av et DGM i matematikk var et vesentlig aspekt i vår studie. Fordi vi ønsket å undersøke om programvaren GeoGebra ville prege noen av kategoriene vi observerte, var også fleksibilitet viktig for oss ettersom vi var usikre på hva vi ville finne i klasserommet. Det var dermed gunstig å benytte et kvalitativt forskningsdesign som gir muligheter for fleksibilitet (Robson, 2002). Et annet vesentlig aspekt ved et fleksibelt forskningsdesign var muligheten til å tilpasse datamaterialet. Fortolkning av datamaterialet var en viktig prosess i vår studie og foregikk parallelt med datainnsamlingen. Ved å parallell-legge datainnsamling og fortolkning kunne vi vurdere om dataene var relevante i forhold til problemstillingen og om informasjonen kunne føre til interessante resultater. Samtidig var praktiske årsaker noe vi måtte ta hensyn til ved valg av forskningsdesign. Siden en kvalitativt studie ikke er like tidkrevende å gjennomføre som en kvantitativ studie falt valget til slutt på kvalitativ studie. Kvantitative spørreundersøkelser stiller blant annet strengere krav til utvalg og antall respondenter (Robson, 2002).

4.2 Metode

Observasjon er en velbrukt metode innenfor kvalitativ forskning. Ved kvalitative observasjoner er forskeren opptatt av å observere menneskelig oppførsel som oppstår i sin naturlige form og i meningsfulle omgivelser for de involverte (Mertens, 2005). Gjennom å observere deltagerne kan forskeren personlig se hva deltagerne foretar seg og lytte til hva de sier, framfor å spørre deltagerne direkte (Robson, 2002). Når forskeren deltar på lik linje med informantene og samtidig observerer får man ifølge Thagaard (2003) et spesielt godt grunnlag for å forstå den sosiale konteksten informantene fungerer i. Vi har i studien benyttet oss hovedsakelig av observasjon ved bruk av lyd- og bildeopptak, men vi har i tillegg benyttet observasjon med observasjonsskjema. For å få dypere innsikt i elevenes argumentasjon i geometri samlet vi i tillegg inn skriftlig datamateriale i form av elektroniske GeoGebra-filer.

4.2.1 Observasjon

Ved bruk av observasjon som metode er observatøren forskningsinstrumentet, og behovet for ømfintlighet og personlige ferdigheter har stor verdi for datamaterialet som samles inn

(Robson, 2002). Mertens (2005), med referanse til Adler og Adler, skiller mellom det å være *perifer-medlemforskere* og det å være *aktive-medlemsforskere*.

De første fire timene vi observerte i de to klassene var vi *perifer-medlemforskere* som ifølge Mertens (2005) innebærer at man observerer og samhandler med klassen nært nok til å etablere et innviet medlemsperspektiv, uten å delta i aktivitetene i klasserommet. Etter at vi hadde etablert et inntrykk av kulturen i klassen utførte vi lyd- og bildeopptak. Lyd- og bildeopptakene ble utført over en periode på en uke. I denne perioden var vi *aktive-medlemsforskere,* som ifølge Mertens innebærer at man som forsker blir mer involvert i gruppens sentrale aktiviteter, men ikke fullstendig engasjert i klassens verdier og mål.

Å holde rollen som observatør og deltager kan ifølge Robson (2002) være vanskelig, og derfor ønsket vi at læreren skulle ha ansvar for undervisningen. Videre ønsket vi derimot å påvirke undervisningen til en viss grad, for å sikre at elevene fikk behov for å argumentere. Det ble gjennomført ved at vi var med i planleggingsfasen i forkant av timene. På den måten fikk vi innvirkning på hvilke oppgaver elevene skulle arbeide med og hvilken arbeidsmetode de skulle anvende.

4.2.2 Observasjon med lyd- og bildeopptak

Under datainnsamlingen ble det gjennomført observasjon i form av lyd- og bildeopptak. I forbindelse med det kombinerer forskeren det verbale og det visuelle. En av de store fordelene med lyd- og bildeopptak er mulighet til å gjenskape sitasjoner fra klasserommet flere ganger og i et variert tempo, noe som kan bidra til en dypere forståelse av situasjonen (Thagaard, 2003). På den andre siden vil det å bringe lyd- og bildeopptak inn i klasserommet medbringe noen utfordringer. Blant annet kan rollen observatøren trer inn i påvirke informantene, noe som videre kan gi utslag i datamaterialet som samles inn. Thagaard påpeker at relasjonen mellom forskere og informanter derfor er avgjørende for at datainnsamlingen ikke skal føles truende. I følge Thagaard vil en informant som er engasjert i aktiviteter eller samtaler ikke bry seg om opptakene som blir gjort.

4.3 Etiske betraktninger

Ved observasjon av elever må man gjøre seg noen etiske betraktninger ved begynnelsen av studien. Blant annet er det ifølge Thagaard (2003) viktig med informert samtykke når man skal benytte seg av lyd- og bildeopptak. Lærerne på skolen kunne informere oss om at alle elevene ved skolestart skrev under på et slikt samtykkeskjema og at det dermed var unødvendig at vi gjorde det igjen. Det ble dermed viktig for oss å informere elevene om formålet med studien vår, og at de elevene som ble filmet skulle bli det frivillig. Måten det ble gjennomført på var at vi i første observasjonstime introduserte oss selv. Vi ga da en kort introduksjon til hvorfor vi var der, og hvordan vår tilstedeværelse ville påvirke undervisningen deres. Elevene fikk etter introduksjonen mulighet til å stille oss spørsmål. Robson (2002) påpeker at det er viktig å være åpen om sine hensikter for å etablere trygghet blant informantene.

For å opprettholde loven om personvern har alle navn i studien blitt anonymisert, ved at det er funnet pseudonymer for elever og lærere. Hensikten med det er å opprettholde prinsippet om konfidensialitet. Prinsippet innebærer at de som gjøres til gjenstand for forskning har krav på at all informasjon blir behandlet konfidensielt (NESH, 1993). Thagaard (2003) påpeker at forskeren derfor må være omhyggelig med å behandle all informasjon på en slik måte at deltakernes identitet forblir skult, noe vi mener det er tatt hensyn til i vår studie.

Det er viktig ikke å bryte for mye med lærerens og elevenes undervisning i forskningsarbeidet, ettersom forandring i undervisningen kan føre til en konflikt hos elevene (Robson, 2002). Med bakgrunn i dette valgte vi blant annet å tilpasse det matematiske temaet i undersøkelsen til noe som allerede stod i læreplanen for faget. Ellers valgte vi å planlegge undervisningen sammen med lærerne, slik at deres meninger ble hørt med tanke på hva undervisningen skulle innebære.

4.4 Utvalg og gjennomføring

Fokuset i studien vår har endret seg mye underveis, men et startpunkt for vårt valg av informanter var at vi ville observere elevers argumentasjon i arbeid med bevisoppgaver der de hadde tilgang til GeoGebra. Ettersom vi går på lektorutdanning i realfag, var det naturlig for oss å velge en videregående skole, da det kan være en framtidig arbeidsplass. I delkapittelet vil vi først beskrive hvordan vi har valgt ut informanter til studien. Deretter beskrives gjennomføringen av observasjonen i klasserommet. Til slutt presenteres oppgaveheftene elevene har arbeidet med.

4.4.1 Førsteutvalg

Gjennom et strategisk utvalg ble en videregående skole plukket ut på bakgrunn av de benyttet seg av GeoGebra i matematikkundervisningen, noe som var en nødvendig forutsetning for å få svar på forskningsspørsmålene i studien. Gjennom den ene veilederen vår kom vi i kontakt med to matematikklærere som var villig til å delta i studien. Utvalg basert på denne framgangsmåten betegnes som *bekvemmelighetsutvalg*[9] (Robson, 2002). Lærerne underviste hver sin klasse i realfaglig matematikk 1 (R1), som er et femtimers programfag ved studiespesialiserende utdanningsprogram. Grunnen til at vi valgte å observere i to klasser var flere. Blant annet var det en praktisk årsak ved at vi er to forskere. Samtidig var en årsak at to klasser ville gi oss et bredere perspektiv på situasjonen. Om man observerer i to klasserom og underbygger analysene med empiri fra begge klasserommene, er det ifølge Robson med på å gi leseren større grunnlag for å vurdere analysens gyldighet og pålitelighet. Undervisningsøktene foregikk parallelt, noe som medførte at vi observerte i hvert vårt klasserom. De fem skoletimene (en skoletime varer i 45 minutter) var fordelt slik at elevene hadde to timer matematikk på mandag, en enkelt time på onsdag, og to timer igjen på torsdag.

Etter at klasse og skole var valgt ble det matematiske tema innenfor geometri spisset ytterligere. I læreplanen for R1 er det beskrevet at elevene skal kunne utlede skjæringssetningene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant, og vi valgte derfor å ta utgangspunkt i disse som matematisk tema (beskrevet i kapittel 3.3). De to lærerne, Åge og Trond, var med på å velge ut elever til studien. Studien ble dermed bestående av totalt 11 elever fra de to klassene.

4.4.2 Andreutvalg

Åge underviste 24 gutter i R1 (gruppe 1). Til den første timen med lyd- og bildeopptak hadde han plukket ut seks elever som skulle være med i studien. Gruppe 1 ble dermed bestående av disse seks elevene. Elevene arbeidet under datainnsamlingen i grupper på tre og tre henholdsvis Arne, Lars og Knut, Ole, Per og Stian. Avtalen med Trond som underviste i den andre R1 klassen (gruppe 2), var at han skulle plukke ut en gruppe elever til filming i de fem timene vi skulle være til stede i klasserommet. Trond hadde i den sammenheng plukket ut 11 elever, noe vi synes var i overkant mange ettersom man ved en kvalitativ studie skal gå i dybden på datamaterialet. Det ville også ha vært problematisk å få lyd- og bildeopptak på 11 elever på samme tid. Dermed falt valget på å filme kun fem elever. De fem jentene som ble plukket ut Sara, Kari, Line, Mona og Siri arbeidet to og tre sammen.

4.4.3 Gjennomføring av observasjon

Undervisningen i de to klassene var lagt parallelt og vi følte derfor vi et behov for at begge skulle få et inntrykk av klassene i forkant av lyd- og bildeopptakene. Grunnen til det var at vi begge skulle arbeide med datamaterialet i etterkant, samt at det var greit å få et inntrykk av

[9] Egen oversettelse fra engelsk: convenience sampling

hvilken undervisning som foregikk i klasserommene. Vi gjennomførte derfor observasjon som perifere-medlemsforskere i begge klassene i forkant av datainnsamlingen. Observasjonen som perifer-medlemsforskere ble utført ved at vi satt på hver vår stol, på hver vår kant, i klasserommet. Observasjonene ble notert ved hjelp av et observasjonsskjema. Etter observasjonstimene diskuterte vi observasjonene våre i felleskap for så å sammenfatte dem i en helhetlig tekst. Observasjonen som aktiv-medlemsforskere utfoldet seg noe annerledes, da vi observerte i hvert vårt klasserom. Her gikk vi rundt og stilte spørsmål til elevene, og fungerte som "hjelpelærer" i de respektive klassene. I etterkant av hver observasjon ble det skrevet et sammendrag av observasjonene, basert på feltnotater gjort i timene.

Før vi gjennomførte lyd- og bildeopptakene i de to klassene (beskrevet i kapittel 4.3.4) satt vi sammen to oppgavehefter som elevene skulle arbeide med under datainnsamlingen. Elevene benyttet henholdsvis tre timer på oppgavehefte 1 og to timer på oppgavehefte 2. De to første timene starter med at klassen arbeider med oppgavehefte 1. Det ble i forkant bestemt at elevene skulle arbeide i grupper på to eller tre, for å skape dialog mellom elevene. I et sosiokulturelt perspektiv på læring legges det vekt på at læring er en prosess som finner sted i deltagelse med andre, og ikke bare i individets bevissthet (Lave, 1999). For å prøve å skape et gjensidig avhengighetsforhold mellom gruppemedlemmene arbeidet elevene med ett oppgavehefte og én datamaskin på deling, (Johnson, Johnson, Haugaløkken & Aakervik, 2006). Elevene jobbet under hele datainnsamlingen selvstendig med oppgaveheftene, og det ble ikke gjennomført noe felles oppsummering av oppgavene. I begge klasserommene var kameraet plassert på et stativ ved elevene, noe som gjorde det mulig for oss som forskere i tillegg å gjøre observasjoner.

Gjennomføring i gruppe 1

Begge elevgruppene i gruppe 1 ble i de to første timene filmet bakfra, med den hensikt av å kunne se hva elevene gjorde på datamaskinen. Elevene hadde i tillegg en diktafon liggende på arbeidsplassen for å sikre lydkvaliteten. Etter den første timen med lyd- og bildeopptak ble de registrert at lyden ble meget dårlig ved filming bakfra. Elevene ble derfor filmet forfra på onsdag for å forsterke lydkvaliteten på videoopptaket. Lars fra gruppe 1 var fraværende i denne timen. I de to timene på torsdag arbeidet elevene med oppgavehefte 2. Ola var fraværende på torsdag fra gruppe 2.

Gjennomføring i gruppe 2

De første timene var elevene i gruppe 2 delt i to grupper; Sara og Kari utgjorde en gruppe og Line og Siri utgjorde den andre gruppen. Mona var fraværende de første to timene. Begge gruppene ble filmet forfra. På onsdag var Siri fraværende og Line arbeidet derfor med Mona denne økten. Ettersom begge elevene som hadde arbeidet med Line tidligere i uken var fraværende torsdag, valgte vi å plassere Line, Sara og Kari sammen i en gruppe.

4.4.4 Presentasjon av oppgavene i studien

For å innhente datamaterialet som kunne bidra til å besvare problemstillingen i studien, valgte vi at elevene arbeidet med bevisoppgaver i geometri som hadde hensikt å fremme argumentasjon hos elevene. I studien ble det også lagt vekt på at elevene skulle benytte seg av DGMet for å løse oppgaver. Videre ble det viktig for oss at oppgavene elevene skulle arbeide med var godt begrunnet i læreplanen for programfaget R1. Grunnen til det var at vi ønsket å endre situasjonen så lite som mulig både for elevene og lærerne.

Det presiseres i læreplanen at geometri i R1 blant annet handler om utvikling av formelle logiske argumenter og bevis i en geometrisk sammenheng (Utdanningsdirektoratet, 2006). Videre står det i læreplanen at elevene skal trenes i grunnleggende ferdigheter, som blant annet å utrykke seg muntlig og skriftlig i matematikk, og å bruke digitale verktøy. I det følgende vil vi kort presentere oppgaveheftene elevene arbeidet med under aksjoneringen vår. Med hensyn til datamaterialets omfang har vi valgt å sentrere analysen omkring noen utvalgte oppgaver, og vi velger derfor kun å presentere disse her.

Oppgavehefte 1

Oppgavehefte 1 er satt sammen med inspirasjon fra et undervisningsopplegg utarbeidet av Irene Hove (2011). Undervisningsopplegget fant vi på Norsk GeoGebra-institutt sine nettsider[10]. Oppgaveheftet er utformet med utgangspunkt i *læreverk for matematikk R1* (Heir et al., 2007), som var samme læreverk våre elever benyttet seg av. Vi valgte å endre undervisningsopplegget ved å tilføye kommentarer som "beskriv", "begrunn" og "diskuter" med hensikt å fremme dialog mellom elevene. I tillegg la vi til og fjernet noen oppgaver med hensikt å fremme argumentasjon hos elevene. Elevene ble i oppgaveheftet også oppfordret til å benytte GeoGebra. Etter vår mening tilbyr GeoGebra elevene et læringsmiljø hvor de kan analysere figurer i planet, blant annet gjennom konstruksjon av geometriske figurer, målinger og draggingfunksjonen. Av tidsmessige hensyn har vi fra oppgavehefte 1 kun valgt å

[10] www.geogebra.no

analysere elevenes argumentasjon i arbeid med innsenter og omsenter (som beskrevet i kapittel 3.2). Vi vil videre gi en nærmere beskrivelse av disse oppgavene, de resterende oppgavene kan leses i vedlegg 1.

Oppgavene i oppgavehefte 1 (vedlegg 1) introduseres med en fastlagt beskrivelse av hva elevene skal gjøre. Utgangspunktet for oppgave 1 og 2 var likt, da elevene først skulle lage en vilkårlig trekant *ABC* i GeoGebra. Etterpå skulle elevene sette på vinkler og konstruere henholdsvis to midtnormaler (oppgave 1) og to vinkelhalveringslinjer (oppgave 2). Figur 11 viser et utdrag fra oppgave 1.

1. Lag en vilkårlig trekant ABC i GeoGebra.
2. Sett på, ved hjelp av GeoGebra, hvor store vinklene er.
3. Konstruer midtnormalene til to sider i trekanten. Beskriv med ord hva som kjennetegner punktene på midtnormalen.
4. Sett inn et punkt, D, i skjæringspunktet for midtnormalene. (Tips: Bruk skjæringspunkt mellom to objekter.)

Figur 11: deloppgave 1-4 i oppgave 1.

Hensikten med introduksjonsoppgavene var å gi elevene en trinnvis oppbygning av konstruksjonen i GeoGebra. Videre var hensikten at elevene skulle kjenne igjen og beskrive allerede kjente begrep som for eksempel midtnormal og vinkelhalveringslinje.

Etter introduksjonsoppgavene fikk elevene i oppgave å konstruere den siste midtnormalen eller vinkelhalveringslinjen i trekanten. Derfra skulle elevene undersøke og begrunne hvorfor de tre linjene møtes i et punkt i de to tilfellene. Oppgaveteksten vises i figur 12.

5. Konstruer midtnormalen til den tredje sida. Hva observerer dere? Dra i hjørnene på trekanten og se hva som skjer. Diskuter med hverandre og prøv å begrunne hvorfor det er slik som det ser ut til å være.

Figur 12: deloppgave 5 i oppgave 1.

Å gi elevene oppgaver der de konkret foretar en konstruksjon, for så å undersøke ved dragging, mener vi kan stimulere elevenes nysgjerrighet på hvorfor situasjonen oppstår. I vårt tilfelle mener vi det var overraskelsesmomenter ved begge oppgavene, ved at de tre midtnormalene eller vinkelhalveringslinjene henholdsvis møttes i ett felles punkt. Ved å stimulere elevenes nysgjerrighet, og be elevene prøve å begrunne hvorfor det er slik det ser ut til å være, ønsket vi at elevene skulle føle et behov for å sannsynliggjøre påstandene. Elevene ble også oppfordret til å diskutere med hverandre, da det i et sosiokulturelt perspektiv på læring legges vekt på at læring skjer i et samspill med andre. Deretter mener vi oppgavene legger opp til at elevene kan benytte seg av rene geometriske argumenter, som for eksempel å argumentere ved hjelp av formlikhet og kongruens.

Videre i oppgavene skulle elevene benytte dragging for å undersøke to eller tre tilfeller, for så å beskrive og begrunne deres observasjoner. Hensikten med å undersøke ulike situasjoner og sider ved samme fenomen er at det kan stimulere til en generalisering av fenomenet hos elevene. Eksempler på de utforskende oppgavene er vist i figur 13.

6. Dra i hjørnene slik at skjæringspunktet D flytter seg, og se på situasjonen der det ligger:
    a. Inne i trekanten
    b. På en av sidene i trekanten
    c. Utenfor trekanten

7. Hva kjennetegner de trekantene dere får i hver av situasjonene a), b) og c) ovenfor? Beskriv og begrunn det dere ser.

Figur 13: deloppgave 6 og 7 i oppgave 1.

Oppgavene vist i figur 13 mener vi kan oppfordre elever til å undersøke tre spesielle tilfeller uten å oppgi en bestemt løsningsmetode. Videre var det i oppgaven mulig for elevene å formulere, sannsynliggjøre og argumentere for egne hypoteser, da de ble bedt om å beskrive og begrunne sine observasjoner. I deloppgave 6 ble elevene oppfordret til kun å undersøke tilfellene ved å benytte GeoeGebra, og i deloppgave 7 ble elevene oppfordret til å argumentere for hvorfor det er på denne måten i de tre tilfellene.

I deloppgave 8 i oppgave 1 fikk elevene i oppgave å begrunne hvorfor det blir dannet en rettvinklet trekant når skjæringspunktet D ligger på en av sidene i trekanten (figur 14). Denne deloppgaven var spesiell for tilfellet hvor midtnormalene i en trekant møtes i ett punkt.

8. Det kan se ut som at vi får en rettvinklet trekant når D ligger på en av sidene i trekanten. Begrunn hvorfor det er slik.

Figur 14: deloppgave 8 oppgave 1.

Elevene ble her utfordret direkte til å begrunne et spesielt tilfelle. Hensikten med oppgaven var å undersøke om elevene klarte å sette sammen flere logiske argumenter til et deduktivt resonnement. I motsetning til andre oppgavene i oppgaveheftet var det her lagt til rette for at elevene skulle argumentere mer matematisk presis ved hjelp av geometriske argumenter for et generelt tilfelle.

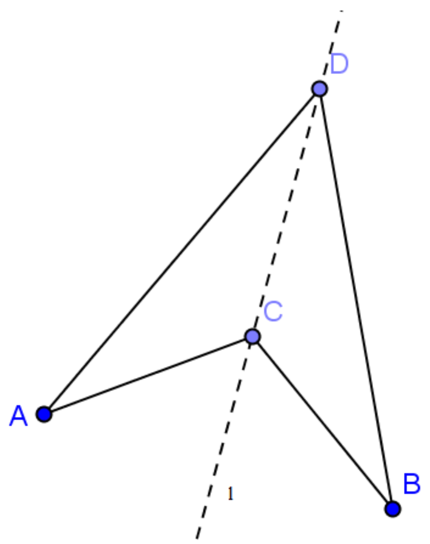
Oppgavehefte 2

Oppgavehefte 2 ble utviklet i bakgrunn i at lærerne ønsket at elevene skulle arbeide med oppgaver fra Heir et al.(2007) sitt *læreverk for matematikk R1.* Vi vurderte derfor oppgavene presentert i læreverket, og plukket ut de oppgavene vi mente var relevante for vår studie. Igjen ble det tilført ord som ”beskriv”, ”begrunn” og ”diskuter” for å fremme argumentasjon og dialog mellom elevene. I oppgavehefte 2 har vi kun tatt utgangspunkt i oppgave 1-4 for analyse av elevenes argumentasjon og velger derfor kun å presentere disse her. De resterende oppgavene kan leses i vedlegg 2.

I oppgave 1 og 4 vist i figur 15 under får elevene oppgitt noen kriterier og en tilhørende figur. Oppgaveteksten oppfordrer elevene til å argumentere for at en gitt påstand er sann.

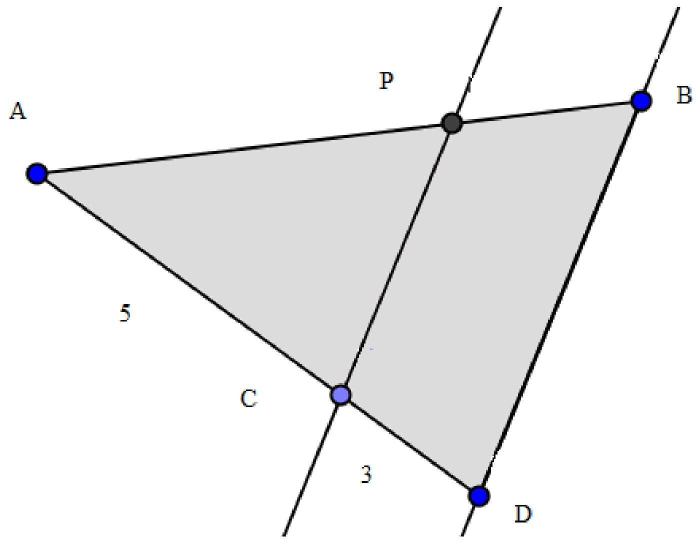
Oppgave 1)

På figuren er l midtnormalen til linjestykket AB. Punktene C og D ligger på l. Begrunn hvorfor $\Delta ACD \cong \Delta BCD$?



Oppgave 4)

På figuren er CP∥DB. Hva vil det si at to linjer er parallelle? Forklar at punktet P deler AB i forholdet 5:3.



Figur 15: oppgave 1 og 4 (oppgavehefte 2)

I oppgave 1 var målet å sjekke om elevene klarte å argumentere for et generelt tilfelle, noe som alltid gjelder. I oppgave 4 ble elevene derimot oppfordret til å argumentere for et spesielt tilfelle. Hensikten med det var å undersøke om elevene klarte å argumentere i form av Balacheffs (1988) bevisnivå generisk eksempel. I tillegg var det et mål at elevene skulle benytte antatte kjente geometriske argumenter i oppgaveløsningen. For eksempler antok vi at elevene hadde kjennskap til begrepene midtnormal, normal, kongruens, parallelle linjer og formlikhet.

Oppgave 2 var etter vår mening av en mer utforskende karakter enn de andre oppgavene i oppgavehefte 2. Oppgaveteksten er vist i figur 16.

Oppgave 2)

a) Kan du konstruere en rettvinklet trekant der alle sidene er like lange. Begrunn svaret ditt.

b) Er det mulig at to eller flere forskjellige trekanter kan oppfylle kravene gitt i en oppgave. Begrunn svaret ditt.

Figur 16: oppgave 2 (oppgavehefte 2)

Elevene kunne i oppgave 2a og 2b helt fritt velge framgangsmåte, og vi mener derfor de hadde mulighet til å formulere egne hypoteser. Videre la oppgaven etter vår mening til rette for at elevene kunne argumentere og sannsynliggjøre sine hypoteser. Hensikten med oppgaven var å utfordre elevene til å utforske flere generelle tilfeller og at elevene skulle argumentere for ulike løsninger, samt sannsynliggjøre sine hypoteser.

4.5 Analyse av datamaterialet

Datamaterialet fra gjennomføringen ble behandlet og analysert gjennom flere trinn. Først ble lyd- og bildeopptakene transkribert. I transkripsjonen ble all form for kommunikasjon skrevet ned. Det vil si at i tillegg til å skrive ned alt som ble sagt, ble også kroppsspråket notert hvor vi anså det som hensiktsmessig. All ikke-verbal aktivitet er skrevet i klammeparentes i utsagnene, der vi ut i fra observasjon beskriver hva elevene gjør. Hvis elevene fysisk peker på skjermen til datamaskinen skriver vi ”[peker på skjermen]”. Tolkninger av hva elevene henviser til når elevene utrykker “den” eller “det” er skrevet i parenteser. Videre betyr ”…” at elevene ikke fullfører setninger og *pause* betegner at elevene er stille eller prater andre ting enn oppgaven. Når transkripsjonen var gjennomført startet, arbeidet med å gjennomgå alt datamaterialet. Her ble situasjoner hvor elevene argumenterte for sine løsninger markert.

Deretter ble de ulike situasjonene plassert i en matrise for å lette arbeidet med å kategorisere de ulike utsagnene. Da vi hadde funnet passende kategorier, med utgangspunkt i Harel og Sowders (1998) bevisskjemaer og Balacheff (1988) sine bevisnivåer så vi nærmere på elevenes bruk av DGM i de ulike kategoriene. I kategoriseringen gikk vi etter kriteriene presentert i analyseverktøyet vårt beskrevet under. Til slutt ble situasjonene tolket. Tolkningen av datamaterialet er den mest kritiske prosessen i databehandlingen (Thagaard, 2003). I noen situasjoner har vi forsøkt å beskrive hvordan elevene argumenterer, noe som innebærer våre personlige tolkninger av elevenes samtaler og kroppsspråk. Prosessen innebærer i tillegg at vi tolker elevenes språk, som til tider var mangelfullt ettersom elevene manglet en del begrep da de snakket om, og argumenterte i matematikk.

4.4.1 Analyseverktøyet

Vi vil i det følgende presentere analyseverktøyet som vi har benyttet for å belyse vår problemstilling. Verktøyet er utviklet med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket presentert tidligere i studien.

Med inspirasjon fra Harel og Sowders (1998) kategorier av elevers bevisskjema og Balacheffs (1988) bevisnivåer ønsket vi i studien å kategorisere elevers argumentasjon i arbeid med bevisoppgaver i geometri. Ut i fra det har vi utviklet et analyseverktøy for analyse av resultatene i studien. Spesielt for vår analyse ble hvordan DGMet satt spor i elevenes argumentasjon. I figur 17 følger en oversikt over våre kategoriinndelinger, med etterfølgende forklaring av de ulike kategoriene.

I. Autoritært bevisskjema

II. Empirisk bevisskjema
   1. Induktivt bevisskjema
      i. Talleksempel
      ii. Visuelle eksempel
   2. Matematisk visualisering

III. Deduktivt bevisskjema

Figur 17: Vår kategorisering av elevenes bevisskjema.

I. Autoritært bevisskjema

I likhet med Harel og Sowder (1998) observerte vi situasjoner hvor elever var i besittelse av et autoritært bevisskjema. Etter vår mening finnes det mange likhetstrekk mellom vår kategori og underkategorien med samme navn i Harel og Sowder. I situasjonene vi har kategorisert under autoritært bevisskjema blir elevene overbevist om at en påstand er sann ved påvirkning av en ytre autoritet. Den ytre autoriteten i vår studie var elevenes læreverk. I tillegg fant vi spor av det Harel og Sowder (s. 247) beskriver som typiske kjennetegn for autoritært bevisskjema ved at elevene (a) søkte hjelp uten å gjøre et seriøst forsøk på oppgaven først, og at (b) elevene tilegnet matematiske teoremer og setninger en mystisk og magisk kraft i bevisprosessen.

II. Empirisk bevisskjema

Vi velger å dele empirisk bevisskjema inn to underkategorier; induktivt bevisskjema og matematisk visualisering I vårt datamateriale observerte vi to underkategorier av induktivt bevisskjema; *talleksempel og visuelle eksempel. Talleksempel* kjennetegnes ved at elever bruker konkrete eksempler med tallverdier som en hovedkilde til overbevisning. For eksempel sjekker elevene sannheten av en påstands ved å sette inn tall i konkrete eksempler. I situasjonene vi har plassert i denne kategorien trekker elevene konklusjoner etter at de har undersøkt et eller flere eksempler. Typisk var også at elevene sjekket eksemplet ved å sette inn tallverdier i en formel. Til tross for at talleksempler er et viktig element i elevenes overbevisning er elevene i noen situasjoner også klar over begrensingen av et induktivt bevisskjema. Dette observeres ved at elevene uttrykker tvil i forhold til påstandens sannhet, til tross for at de har observert noen talleksempler.

Vår kategori *visuelle eksempel* skiller seg fra kategoriene til Harel og Sowder (1998) ved at elevene benytter medierende redskap i et DGM for å verifisere sine hypoteser. I et DGM refererer elever ofte til figurer på datamaskinen når de sannsynliggjør sine hypoteser (Marrades & Gutiérres, 2000). Kategorien vår kjennetegnes ved at elevene observerer en spesifikk figur i skjermbildet, for så å formulere en hypotese med basis i det spesielle eksemplet. Videre utforsker elevene ulike tilfeller av figuren ved å anvende dragging, målinger, eller en kombinasjon av disse i DGMet. Elevene får ut i fra endringer i figuren bekreftet eller avkreftet sin hypotese. I tillegg har vi i datamaterialet situasjoner der elevene, ved bruk av draggingtesten slik den beskrives av Mariotti (2009), verken får avkreftet eller bekreftet hypotesen sin. Slik vi tolker det kan slike situasjoner kategoriseres under visuelle eksempel fordi elevene overbevises om at hypotesen deres er sann, fordi de ikke finner noe moteksempel til hypotesen sin.

Med utgangspunkt i perseptuelt bevisskjema slik det beskrives av Harel og Sowder (1998) har vi i vår analyse konsentrert persepsjonsbegrepet til å omfatte det elevene ser av figuren. Vi har valgt å kalle denne kategorien *matematisk visualisering*. Matematisk visualisering er i vår studie kategorien der elever overbevises ved å betrakte figurer. Kjennetegn på kategorien er at elevene (a) argumenterer for at matematiske påstander er sanne ved at de ser det av figuren, “det bare er sånn” (b) utfører omdannelser av figurer mentalt, og blir dermed overbevist om at påstanden må være sann. Tilslutt har vi observert (c) at elevene i tillegg til å bli overbevist av å observere figuren i skjermbildet, trekker fram ulike egenskaper i situasjonen. Elevene klarer derimot ikke å anvende egenskapene til en presis matematisk argumentasjon.

III. Deduktivt bevisskjema

I motsetning til Harel og Sowder (1998) har vi innenfor omdannelsesbevisskjema kun observert elever som benytter seg av deduktiv resonnering. Derfor har vi valgt å kalle vår kategori deduktivt bevisskjema. I likhet med Harel og Sowder observerte vi i kategorien, elever som (a) tar hensyn til generalitetsaspektet til formodningen og (b) elever som er i stand til å utføre omdannelser av mentale bilder som del av en logisk-deduktiv prosess. I tillegg har vi (c) observert at elevene benytter allerede kjent kunnskap som utgangspunkt i sine argumenter. Felles for situasjonene er at elevene argumenterer målrettet i form av deduktive resonnementer med hensikt å argumentere for et generelt tilfelle. Vi betrakter Balacheffs (1988) bevisnivå generisk eksempel til å høre inn under denne kategorien.

Kapittel 5: Resultat og analyse

Kapittel 5 omhandler våre resultater og vår analyse av datamaterialet i studien. Vi har valgt å dele inn kapittelet etter de tre hovedtyper bevisskjema *autoritært bevisskjema, empirisk bevisskjema og deduktivt bevisskjema,* som vi har observert hos elevene. Videre vil vi under hvert bevisskjema presentere situasjoner vi mener underbygger det bevisskjema situasjonen er plassert i. Datamaterialet er analysert ved hjelp av det analyseverktøyet som ble presentert i kapittel 4.6.

5.1 Autoritært bevisskjema

I våre resultater vil elever som overbevises av en ytring de finner i læreverket inneha et autoritært bevisskjema. Situasjon 1 viser elever som søker hjelp til et problem uten først å gjøre et forsøk på å argumentere for en løsning selv. I situasjon 2 illustreres den mystiske kraften av termen "setning" eller "teorem" på elevenes bevisprosess.

Situasjon 1

I oppgave 2b (oppgavehefte 2) blir elevene bedt om å undersøke om det er mulig at to eller flere forskjellige trekanter kan oppfylle kravene gitt i en oppgave. Ola er rask med å slå opp i læreverket før noen av dem har prøvd skikkelig på egenhånd. Han finner fram til en side hvor det er listet opp fire betingelser for at trekanter er kongruente. Betingelsene er beskrevet i delkapittel 3.2. Rett etter han har funnet fram til de fire betingelsene i læreverket, begynner han å skrive på datamaskinen.

1.1. Ola: det æ prøve å si e det at det spørs kor mye du får oppgitt i en oppgave.
1.2. Per: ka som e kravan?
1.3. Ola: det e jo derre fire, ka det va [blar i boka]?
1.4. Per: slå av kamera i mens.
1.5. Ola: her vettu, fire, hvis dem ikke… [leser stille fra læreverket, skriver deretter på datamaskinen].

Videre i det skriftlige datamaterialet påpeker Ola og Per at om de skal løse en oppgave hvor de skal konstruere en trekant, og den ikke gir nok informasjon til å dekke en av de fire betingelsene for at en trekant skal være entydig bestemt, vil trekanten ikke være entydig.

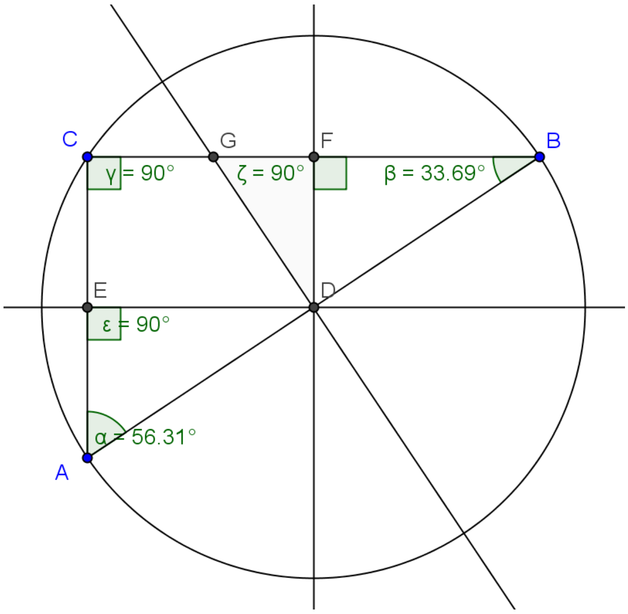
> ”hvis opplysningene vi får i en oppgave ikke har nok informasjon til å dekke en av de 4 betingelsene for at to trekanter skal være entydig bestemte, vil det være mulig å lage flere trekanter med den oppgitte informasjonen”.

Ola påpeker i ytring 1.3 at det i læreverket er oppgitt fire krav til at en trekant skal være entydig bestemt. Istedenfor å prøve å argumentere på egenhånd først, velger Ola å bla i læreverket. Ola noterer deretter besvarelsen sin samtidig som han titter ned i læreverket, der de fire betingelsene for at en trekant skal være entydig bestemt står beskrevet (ytring 1.5). I det skriftlige datamaterialet, hvor elevene har notert ned sin løsning på oppgaven, påpeker de at om en oppgave ikke innehar tilstrekkelig informasjon til å "dekke en av de 4 betingelsene for at to trekanter er entydige" vil de ha mulighet for å lage flere trekanter ut i fra den gitte informasjonen. Vi mener det her kommer tydelig fram at guttene anser de fire kravene som tilfredsstillende besvarelse på oppgaven. Videre tolker vi situasjonen som at elevene benytter læreverket for å finne betingelsene for at en trekant skal være entydig bestemt. At elevene bruker en henvisning til læreverket som besvarelse på oppgaven, uten å prøve og argumentere for en løsning på egenhånd, tolker vi som at elevene ikke ser hensikten med argumentere for løsningen selv. Videre tolker vi situasjonen som at elevenes kilde til overbevisning er læreverket, noe som ifølge Harel og Sowder (1998) indikerer at elevene er i besittelse av et autoritært bevisskjema.

Situasjon 2

Elevene har i situasjonen blitt bedt om å gå tilbake til oppgave 1.8 (oppgavehefte 1) hvor de blir bedt om å begrunne hvorfor det blir dannet en rettvinklet trekant når skjæringspunktet *D* mellom midtnormalene ligger på en av sidene i trekanten. Siden elevene blir bedt om å gå tilbake til oppgaven har de allerede tegnet omsenteret til trekanten, noe som egentlig ikke er meningen i oppgave 1.8. I situasjonen påpeker Line at de her kan benytte seg av Thales' setning til å vise at det blir dannet en rettvinklet trekant. Mona spør Line hvorfor det er slik, og det viser seg at Line ikke har noen begrunnelse for Thales` setning. Hun utrykker "det e Thales setning, det bare e sånn".

1.6. Line: men hvis det her e Thales` setning… hvis AB e diameteren i sirkelen så vil det alltid bi 90 grader ($\angle ACB$). (Vist i figur 18).
1.7. Mona: men koffer e det slik, det e det vi ska finn ut?
1.8. Line: det e Thales` setning, det bare e sånn.



Figur 18: Illustrasjon av figuren jentene arbeider med i situasjon 2.

Vi tolker Line som at hun ser at figuren deres ligner på figuren som står på samme side som Thales' setning i læreverket. Det ville i situasjonen ha fungert å argumentere med Thales' setning, men Line konkluderer med at det bare må være sånn uten å gi en forklaring. At Line i ytring 1.7 hevder de kan anvende Thales setning uten å kunne begrunne *hvorfor* (ytring 1.9), mener vi illustrerer at Line innehar en oppfatning om at matematikk er en samling sannheter som kan anvendes uten begrunnelser. Ifølge Harel og Sowder (1998) er det vanlig at elever som innehar et autoritært bevisskjema anser matematiske setninger og formler til å ha en magisk kraft. Med bakgrunn i at elevene i situasjonen anser matematiske setninger som *magiske* ved at Line utrykker "det bare er sånn", tolker vi som at elevene her er i besittelse av et autoritært bevisskjema.

5.2 Empirisk bevisskjema

Innenfor et empirisk bevisskjema overbeviser elevene seg selv og andre ved å undersøke bestemte tilfeller på ulike måter. Vi deler empirisk bevisskjema inn i underkategoriene; *induktivt bevisskjema* og *matematisk visualisering.*

5.2.1 Induktivt bevisskjema

Elever som har et induktivt bevisskjema benytter eksempler i sin sannsynliggjøring av påstander. Ut fra vårt datamateriale har vi observert to underkategorier av induktivt bevisskjema; *talleksempel* og *visuelle eksempel*. Videre i kapittelet vil vi presentere våre funn i de to underkategoriene.

Talleksempel

Elever som er i besittelse av bevisskjemaet *talleksempel* benytter seg av tallverdier for å bevise at en påstand er sann. Vi vil her presentere to situasjoner hvor vi mener elevene benytter talleksempel for å argumentere. I den første situasjonen benytter elevene et enkelt talleksempel i sin overbevisningsprosess, mens i den andre situasjonen ser elevene på et stort talleksempel.

Situasjon 3

I situasjonen leses oppgaveteksten til oppgave 2a (oppgavehefte 2) opp, og elevene begynner med en gang å diskutere om en rettvinklet trekant kan ha tre like lange sider. Ola og Per konstruerer ved bruk av GeoGebra en trekant der en av vinklene er 90˚. Elevene trekker så fram Pytagoras' læresetning ved å nevne en ligning. Elevene prøver videre å vise at en rettvinklet trekant ikke kan ha like lange sider i et bestemt tilfelle, ved å benytte Pytagoras' læresetning.

2.1 Ola: les neste oppgave. Kan du konstruere en rettvinklet trekant med like lange sider?
2.2 Ola: nei!
2.3 Per: fordi…
2.4 Ola: vent ska vi se, kossen gjør vi det her da.
2.5 Per: 90…

pause

2.6 Ola: jah, det sir sæ jo sjøl, når du har en 90 grader der så vil du jo få en hypotenus, og en hypotenus i en trekant vil jo alltid… når det e 90 grader da selvfølgelig.
2.7 Per: den (hypotenusen) vil vær dobbelt?
2.8 Ola: nei, den (hypotenusen) vil ikke vær dobbelt, men den vil alltid vær lenger enn dem på sian (katetene).
2.9 Per: mhm…
2.10 Ola: førdi den der i andre, pluss den der i andre [peker på katetene på skjermen] ska vær lik kvadratrota…ææhh...to sekund. Viss du har en, en i andre.
2.11 Per: en i andre e en.
2.12 Ola: det bi feil!
2.13 Per: pluss en det bi to.
2.14 Ola: ja selvfølgelig, så det går ikke, okei, men vi må uansett forklar det da.
2.15 Per: det va et godt eksempel det med en da.

I det skriftlige materialet skriver eleven at de vet at de kan benytte seg av Pytagoras' læresetning når de har en rettvinklet trekant. Videre presiserer de at hypotenusen alltid vil være lengre enn de to andre katetene i trekanten og dermed vil det være umulig å få alle sidene like lange i en rettvinklet trekant.

> ”I en rettvinklet trekant vet vi, ved hjelp av pytagoras setning at $h^2=k^2+k^2$. Derfor vil alltid hypotenus være lenger enn de andre sidene, og derfor er det umulig å få alle sidene like lange i en rettvinklet trekant”.

Ut fra dialogen mellom Ola og Per, kan det tyde på at Ola har en formodning om hva løsningen på oppgaven kommer til å være ettersom han i ytring 2.2 utbryter ”nei!”. Ved å gi en slik respons på oppgaven, uten å begrunne *hvorfor* det vil være slik matematisk, tolker vi som at Ola ser for seg hva løsningen vil være mentalt. Elevene fokuserer så på hvordan de skal utføre oppgaven i DGMet (ytring 2.4).

I ytringene 2.6 og 2.8 påpeker Ola en generalitet ved å utrykke at i en rettvinklet trekant vil hypotenusen alltid være lengre enn de andre sidene i trekanten. Videre i samtalen begrunner Ola generaliteten ved å benytte seg av Pytagoras’ læresetning. Han sier blant annet i ytring 2.10 at ”den der i andre pluss den der i andre ska vær lik kvadratrota…” mens han peker på katetene i trekanten. Vi mener det kan tolkes som om elevene husker deler av Pytagoras’ læresetning, men på grunn av spørsmålsformuleringen i oppgaven blir usikre på om de kan anvende den. Ola legger videre fram et konkret talleksempel, der de to katetene i trekanten er lik 1 (ytring 2.10). Deretter argumenterer elevene for løsningen av det spesielle tilfellet. Elevene sjekker her det spesielle tilfelle ved å sette inn i en formel, de påpeker blant annet at en opphøyd i andre er en og at en pluss en er lik to (ytring 2.10-2.14).

Elevene benytter i situasjon 3 et enkelt eksempel for å overbevise seg selv om at hypotenusen må være lengre enn katetene, noe som etter Balacheff (1988) kan kategoriseres som bevisnivået naiv empirisme. Mot slutten av argumentasjonen påpeker Ola til tross for det gitte eksemplet, at de uansett må forklare det (ytring 2.14). Denne ytringen mener vi kan tolkes slik at Ola ikke er tilfreds med kun ett enkelt eksempel og har behov for ytterligere bevis. Han er med andre ord ikke helt overbevist over påstandens sannhet. Per på den andre siden uttrykker i ytring 2.15 at det var et godt eksempel med 1, noe vi mener kan tolkes slik at Per er overbevist over påstandens sannhet.

Elevene skrev opp ligningen $h^2=k^2+k^2$ i den skriftlige besvarelsen sin, men de manipulerer ikke ligningen til at $h=\sqrt{2}k$, noe som ville vist at h alltid vil være større enn k. Om guttene hadde klart dette steget i argumentasjonen ville de vært framme, ihvertfall i sitt spesielle tilfelle hvor de betraktet en likebeint trekant. Slik vi ser det kunne elevene da blitt plassert under et deduktivt bevisskjema da de i det tilfellet hadde betrakter et generisk eksempel. Ut i fra elevenes skriftlige datamateriale mener vi elevene påpeker at det er en sammenheng mellom at hypotenusen alltid vil være lengre i en rettvinklet trekant og deres formel for Pytagoras' læresetning ($h^2=k^2+k^2$). Dette mener vi kan observeres gjennom at de i sin skriftlige respons utrykker "derfor" mellom formelen og påstanden om at hypotenusen alltid vil være lengre i en rettvinklet trekant. De presiserer derimot ikke hva denne sammenhengen er.

Med bakgrunn i utdraget beskrevet over og elevenes skriftlige respons, mener vi det kan tolkes som at guttene ut i fra et enkelt konkret eksempel argumenterer for at det ikke er mulig med tre like lange sider i en rettvinklet trekant. Vi plasser derfor guttene i situasjon 3 innenfor et empirisk induktivt bevisskjema talleksempel.

Situasjon 4

Elevene arbeider med oppgave 2a (oppgavehefte 2). I likhet med elevene i situasjon 3, diskuterer Kari, Line og Sara om de tre sidene i en rettvinklet trekant kan være like lange ved å benytte seg av Pytagoras' læresetning. I forkant av situasjonen har elevene tegnet ned noen rettvinklede trekanter på papir. Ut i fra en av figurene har elevene observert at hypotenusen i trekanten er lengre enn de to katetene. I forbindelse med det kom Kari med ytringen "i pytagoras er det hvertfall sånn", noe som elevene benytter seg av videre i argumentasjonen. I utdraget under trekker Kari, Sara og Line fram konkrete eksempler på at hypotenusen må være lengre enn de to katetene. I tillegg får elevene avkreftet en hypotese de har om at hypotenusen vil være dobbelt så lang som katetene i en rettvinklet trekant, der de to katetene er like lange.

2.16 Sara: ja før hypotenusen e jo alltid ei side i andre pluss en anna side i andre.
2.17 Kari: ja.
2.18 Sara: så vil den (hypotenusen) vær større enn dem sidan (katetene), om dem sidan (katetene) e like lang da så vil den (hypotenusen) bli dobbelt så lang.
2.19 Kari: ja, eller bli den (hypotenusen) dobbel? Den bi i hvertfall lenger.
2.20 Sara: hvis du tar h i andre er lik k i andre pluss k i andre, koss va det man gjør det her da?
2.21 Line og Kari: man satt inn.
2.22 Sara: så fikk du?
2.23 Line: men vist vi late som at den her (katet) e to at den her (hypotenus) e ukjent, før no e dem (katetene) like lang, så ser vi om vi får fire?
2.24 Kari: ja, sjekke det [Elevene setter inn tall i ligningen fra 2.22].

pause

2.25 Kari: da bi hypotenusen fire.
2.26 Sara: nei.
2.27 Line: nei det bi det ikke.
2.28 Kari: nei. Det e nokka sånn to komma et eller anna.
2.29 Line: kalkulator?
2.30 Kari: [henter fram kalkulatoren fra sekken sin] to komma kvadratrota av to, eller to komma åtte.
2.31 Sara: ja, men i alle fall større da.

I startfasen av utdraget uttrykker Sara at hypotenusen alltid er en side opphøyd i andre pluss en annen side opphøyd i andre (ytring 2.16). Ved å se videre på elevenes argumentasjon kommer det i ytringen 2.20 fram at de også mener hypotenusen opphøyd i andre. Etter at elevene har kommet fram til en ligning hentet fra hukommelsen, spør Sara i ytring 2.20 ”koss hva det man gjør det her da?” der de to andre jentene sier at ”man satt inn”. Sara hevder videre i ytringen 2.18 at hypotenusen vil være dobbelt så lang som katetene, om katetene er like lange. Vi tolker ytringen som om Sara formulerer en hypotese om at hypotenusen alltid vil være dobbelt så lang når de to katetene er like lange. Kari derimot utrykker tvil til hypotesen i ytringen 2.19, ved at hun sier at hypotenusen ihvertfall vil være lengre men ikke nødvendigvis dobbel. Ut i fra en figur hun har tegnet på et ark kommer Line med et forslag om ”å late som” at hypotenusen er ukjent og sette de to katetene lik 2 (ytringen 2.23). Mot slutten av ytringen trekker hun fram at de skal se om de får fire. Slik vi tolker ytringen, er hensikten til Line å sjekke om hypotenusen er dobbelt så lang i det spesielle tilfellet. Elevene kommer da fram til at hypotenusen blir lik $2\sqrt{2} \neq 4$ (ytring 2.26-2.30), og får dermed avkreftet hypotesen sin om at hypotenusen alltid er dobbelt så lang som katetene, i det spesielle tilfellet av en likebeint trekant.

Etter at hypotesen i deres spesielle tilfelle er avkreftet, utrykker Sara i ytring 2.29 at hypotenusen i alle fall er større. Slik vi ser det kan det tyde på at elevene ikke lar seg helt overbevise om at det alltid er tilfelle at hypotenusen vil være lengre enn de to katetene kun ved å se på et enkelttilfelle. Utdraget under viser at elevene ser det nødvendig å sjekke for et større eksempel med kateter lik 32.

2.32 Sara: så? eller e det noen tilfelle der dem ikke bli det? Der du tar kvadratrota liksom.
2.33 Kari: veit itj. Men uansett liksom hvis vi tar et punkt.
2.34 Sara: men for eksempel ta et større tall da, ta 32 før eksempel.
2.35 Line: 32 i andre pluss 32 i andre, ka e 32 i andre da? [Finner fram kalkulatoren], det var 45,2.
2.36 Sara: så den (hypotenusen) e fortsatt større da.
2.37 Alle i kor: ja
2.38 Kari: den (hypotenusen) blir aldri det (like lang) når det e 90 grader.

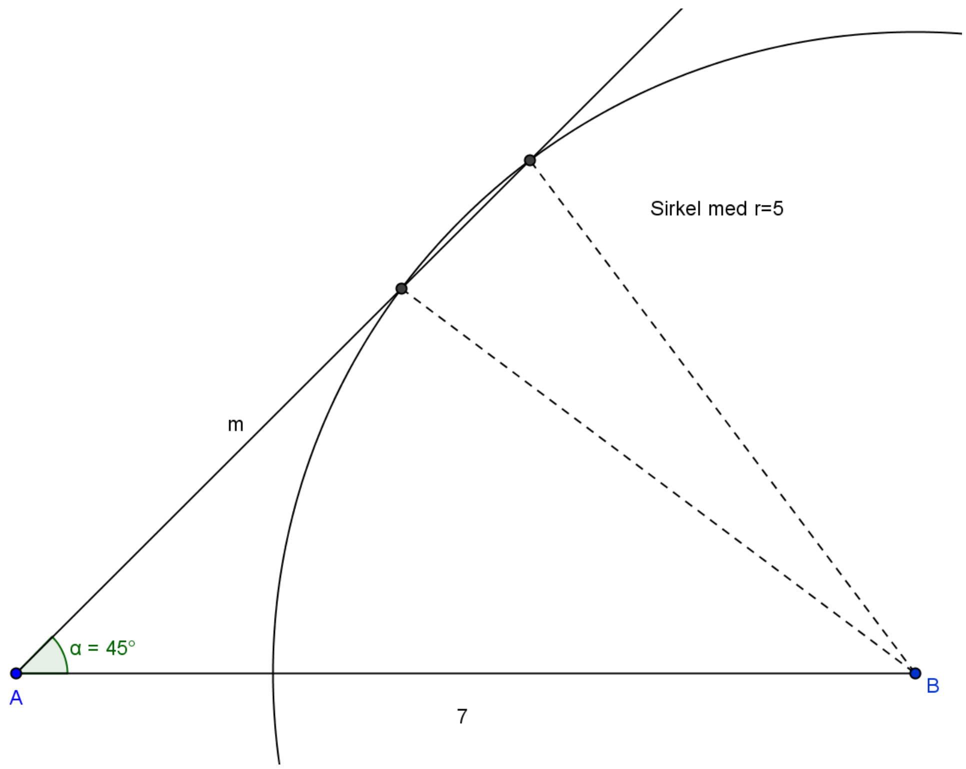
Ved å sjekke for kateter lik 32, finner elevene at hypotenusen også her er større enn katetene (ytring 2.36). Balacheff (1988) hevder at elever som betrakter et nøye utvalgt eksempel, kan betegnes som elever som befinner seg på bevisnivå avgjørende eksperiment. Slik vi tolker situasjonen benytter elevene et stort talleksempel, som de betrakter og manipulerer, for å overbevise seg selv om at hypotenusen alltid er lengre. Dette bekreftes i ytring 2.38, der Kari hevder at hypotenusen aldri er like lang når man har en 90° vinkel i trekanten. At elevene betrakter konkrete eksempler og anvender eksemplene for å overbevise seg selv og hverandre, indikerer at elevene innehar et induktivt bevisskjema, mer spesifikt bevisskjema av kategorien talleksempel.

Visuelle eksempel

I kategorien visuelle eksempel benytter elevene seg av målinger og dragging i GeoGebra for å undersøke om en påstand er sann. Vi vil i dette avsnittet presentere tre situasjoner vi mener kan kategoriseres under bevisskjemaet visuelle eksempel. I situasjon 5 benytter elevene seg av endringer av mål. Elevene anvender dragging for å få avkreftet en hypotese i situasjon 6. Til slutt i situasjon 7 benytter elevene dragging for å undersøke en hypotese. Ettersom de ikke finner noe moteksempel til hypotesen, blir de overbevist om at den må være sann.

Situasjon 5

I arbeid med oppgave 2b (oppgavehefte 2) skal ikke elevene fram til en generalitet, men påvise ved eksempler om det er mulig at to eller flere forskjellige trekanter kan oppfylle kravene gitt i en oppgave. Måten elevene har grepet fatt i oppgaven på er at de betrakter et spesifikt eksempel av en trekant. Opplysningene elevene har bestemt skal være "gitt" i deres tilfelle er AB=7, $\angle A$=45°, og at C skal ligge 5 cm fra B (figur 19).



Figur 19: Illustrasjon av det spesifikke eksempelet elevene arbeider med i situasjon 5.

Gjennom en undersøkelse av det spesifikke eksemplet, på papir, ser det for elevene ut til at trekanten er entydig. Lene utfordrer da elevene til å endre på de gitte målene, noe som fører til at elevene benytter seg av det medierende verktøyet ”målinger” i GeoGebra. I utdraget oppdager elevene at det kan være to eller flere løsninger av trekanten.

2.39 Arne: med syv nederst der og fem der.
2.40 Knut: men hvis du bytter. Hvis vi hadde sotte den her [endrer størrelsen til radiusen i GeoGebra] til seks centimeter da? Hvis vi hadde sotte den der til seks?
2.41 Arne: så gjort den der (*AB*) enda mindre.
2.42 Knut: hvis vi hadde gjort den sida der (radius) til seks da? Da hadde du fått to.
2.43 Lars: hvis du hadde gjort den til seks.
2.44 Knut: ja, radiusen. Ja for den er fem ja….ja ja ja enig!
2.45 Arne: skal vi gjør det? Det var jo bare, enten så visst du at det ble sånn ellers var det bare…
2.46 Lars: så det er jo ikke sant da. Vil det være to eller flere forskjellige?
2.47 Arne: det er mulig. Grunn er at hvis den træff, tangerer over der…
2.48 Knut: da har vi jo, har vi jo svaret da.

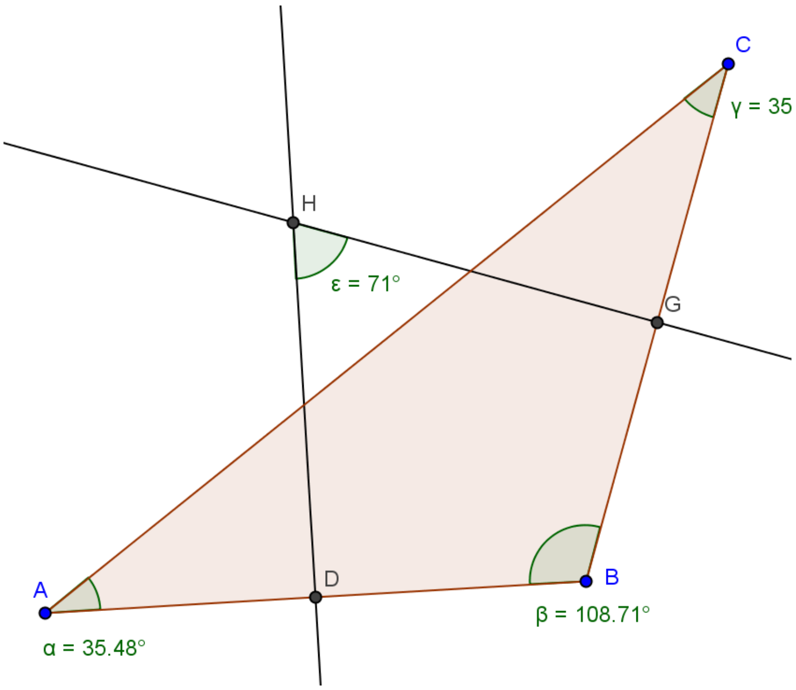
Gjennomgående for sekvensen er at elevene undersøker ulike eksempler ved å endre lengdene på sidene av trekantene. Elevene presenterer først en hypotese, for eksempel kan det observeres i ytring 2.40 og 2.41 at elevene formulerer følgende hypotese ”hvis vi setter radiusen til 6, og gjør den der (*AB*) enda mindre”. Deretter sjekker de hva som vil skje ved å endre på målene ved hjelp av GeoGebra, og kommer med konklusjonen ”da hadde du fått to” (2.42). Gjennom å se på figuren i skjermbildet, og å endre målene på sidene, oppdager elevene at det er mulig at flere trekanter oppfyller de samme kravene gitt i en oppgave, jamfør Arne i ytring 2.46. Avslutningsvis, i ytring 2.47, benytter elevene ordet tangerer. Det viser seg senere i transkripsjonen at elevene påpeker at for å få en løsning, må sirkelen angitt med radius lik lengden fra B, tangere strålen fra $\angle A$.

2.49 Lars: ja, ja men sje her.
2.50 Knut: hvis den her (strålen fra $\angle A$) blir tangenten til radiusen da
2.51 Lars: tangenten til radiusen…ja
2.52 Knut: ja, hvis den tangerer sånn ja
2.53 Arne: da er det bare ett.
2.54 Knut: da er det bare ett.

Ytring 2.49-2.54 tolker vi som at elevene er på vei mot Balacheffs (1988) bevisnivå generisk eksempel. Ved å benytte målinger på et konkret eksempel for å overbevise hverandre, uten å henvise til hva som er det generelle i akkurat dette eksempelet, mener vi derimot det kan tolkes som at elevene innehar et bevisskjema som baserer seg på visuelle eksempler framfor generiske eksempler. For eksempel påpeker ikke elevene i situasjonen hvilke kriterier som må holde for at de skal få ingen, en eller to løsninger på oppgaven sin. Her mener vi det kunne ha vært mulig for elevene å komme fram til at $7sin45 > r > 7$ for at de skal få to løsninger, og at det er i situasjonen hvor $r = 7sin45$ at strålen fra $\angle A$ tangerer sirkelen. I tillegg kunne elevene ha betraktet situasjonen hvor $r < 7sin45$, da den situasjonen ville gitt ingen løsning på oppgaven. $r \geq 7$ ville igjen gitt en løsning da radiusen kun ville treffe strålen fra $\angle A$ i nøyaktig ett punkt. Slik vi ser det ville et slikt resonnement utvikles fra å være et visuelt eksempel til å gjelde for et generelt tilfelle av eksempelet.

En oppsummering av situasjonen er at elevene presenterer logiske argumenter som de benytter for å overbevise seg selv, og hverandre, ved å endre målene på figuren. Ut i fra å endre målene på figuren påviser elevene eksempler på hva som kan skje ved gitte krav, noe som i følge vårt analyseverktøy kan kategoriseres som visuelle eksempel.

Situasjon 6
Elevene arbeider med oppgave 1.5 (oppgavehefte 1). Utgangspunktet for oppgaven er at elevene skal undersøke om de får en rettvinklet trekant når skjæringspunktet mellom midtnormalene (punkt *H*) ligger på en av sidene i trekanten. Ved å se på et tilfelle med en vinkel på 71˚ mellom to av midtnormalene ($\angle DHG$), former elevene en hypotese basert på ett eksempel. Hypotesen til elevene er at $\angle DHG$ alltid er mindre enn 90˚ (figur 20). De benytter seg videre av draggingfunksjonen i GeoGebra for å undersøke hvordan vinkelen endrer seg.



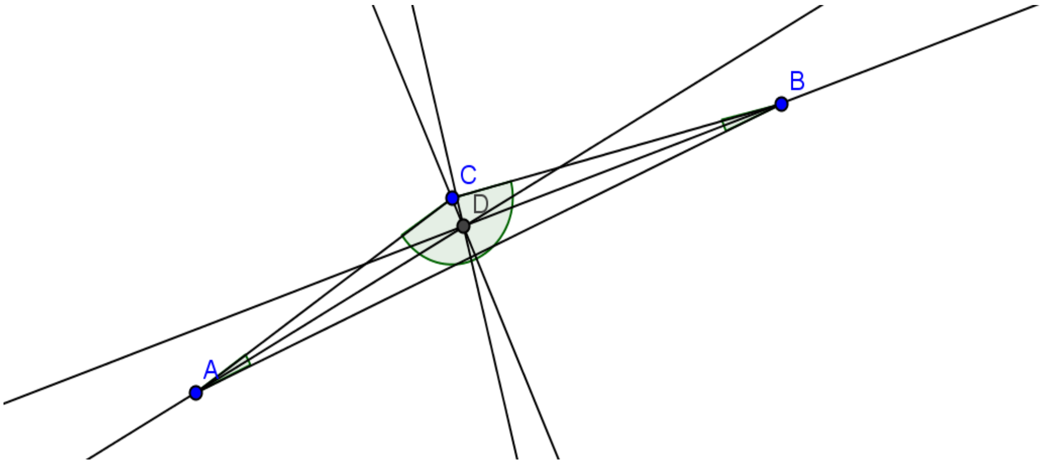
Figur 20: Figuren er hentet fra elevenes skriftlige besvarelse på oppgave 1.5 (oppgavehefte 1).

2.55 Lars: hvilken vinkel dannes når dem (midtnormalene i *AB* og *BC*) krysser da?
2.56 Knut: det danner en vinkel ($\angle DHG$) som er mindre enn 90 grader.
2.57 Lars: høyre vinkelbein ja.
2.58 Arne: 71 grader der.
2.59 Lars: æ tror… *pause*… vi må sjekke om den aldri blir mer enn 90. Kanskje han ($\angle DHG$) blir det?
2.60 Knut: ehh…nei.
2.61 Lars: jo, æ tror kanskje den ($\angle DHG$) blir det hvis du drar nok… ja.

I ytring 2.59 trekker Lars fram at de må sjekke at $\angle DHG$ aldri blir mer enn 90˚. Ved å dra i figuren får elevene avkreftet hypotesen sin, da det var mulig å dra figuren i en slik posisjon at vinkelen ble større enn 90 °. Skjæringspunktet *H* kom da innenfor ΔABC. Elevene benytter i situasjonen dragging der de så på endringer på vinkelmålet for å undersøke om den konstruerte figuren opprettholder en vinkel som aldri blir mer enn 90˚ (ytring 2.61), noe som i følge Mariotti (2009) betegnes som å benytte draggingtesten. Elevene benytter seg ikke av egenskaper for midtnormalen for å finne ut av hypotesen, men baserer seg kun på de visuelle egenskapene ved figuren. Situasjonen har vi dermed plassert i kategorien visuelle eksempel.

Situasjon 7

Ola, Per og Stian arbeider her med oppgave 2.6 og 2.7 (oppgavehefte 1). I forkant av situasjonen har elevene konstruert vinkelhalveringslinjene til ΔABC i GeoGebra. Ved å dra i figuren kommer elevene fram til at skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinjene (punkt *D*) i eksemplet deres aldri vil havne utenfor trekanten (figur 21).



Figur 21: Illustrasjon av figuren elevene betrakter i situasjon 3.

2.62	Ola: nå er det litt vanskelig å få den (punktet D) til på.
2.63	Stian: okei.
2.64	Ola: den eneste måten jeg får det punktet (punkt D) til å komme uta på på…
2.65	Stian: nei, du kan ikke få den (punkt *D*) utenpå.
2.66	Ola: det går ikke an, men jeg kan få den (punkt D) på linja [bruker dragging]. Men da må jeg ha den helt, da må jeg ha den sånn.
2.67	Per: ja!

Elevene bruker under hele situasjonen draggingtesten slik den blir beskrevet av Mariotti (2009), der elevene ved å dra i hjørnene av trekanten undersøker om skjæringspunktet kan bevege seg utenfor trekanten. Ved å dra i figuren finner ikke elevene et tilfelle der skjæringspunktet går utenfor trekanten. Stian presiserer i ytring 2.65 at du ikke kan få skjæringen utenfor trekanten, noe som kan tyde på at elevene blir overbevist om at det ikke er mulig gjennom bruk av draggingtesten (ytring 2.66). Elevene benytter seg ikke av egenskapene til vinkelhalveringslinja for å argumentere matematisk presist, men benytter dragging i GeoGebra for å overbevise seg selv og hverandre. Vi har dermed plassert situasjonen under kategorien visuelle eksempel.

Generelt for resultatene i kategorien visuelt eksempel var at elevenes samtaler var preget av undring. Eksempler på undrende ytringer er “vi må sjekke om den…”(ytring 2.59), “kanskje han blir det?” (ytring 2.59), “æ tror kanskje den blir det hvis du drar nok” (ytring 2.61), “hvis… så hva skjer da” (ytring 2.42) og “hvis… så” (ytring 2.40). Ut i fra elevenes språk kan det etter vår mening se ut til at elevene ønsket å utforske tilfellene. Hvis elever befinner seg i en situasjon hvor de inviteres til å stille spørsmål som ”hva hvis…” og ”hvorfor det?” befinner de seg i følge Skovsmose (2003) i et undersøkelseslandskap. Videre var også kategorien preget av at elevene undersøker sine hypoteser ved å benytte de medierende verktøyene målinger og dragging. Vi mener derfor et DGM har satt sitt spor på kategorien ved at elevenes språk er undrende og at de benytter seg av det dynamiske aspektet av et DGM. Ut i fra det foregående mener vi elevenes bruk av et DGM gjør at arbeidsformen får preg av undersøkelseslandskap.

5.2.2 Matematisk visualisering

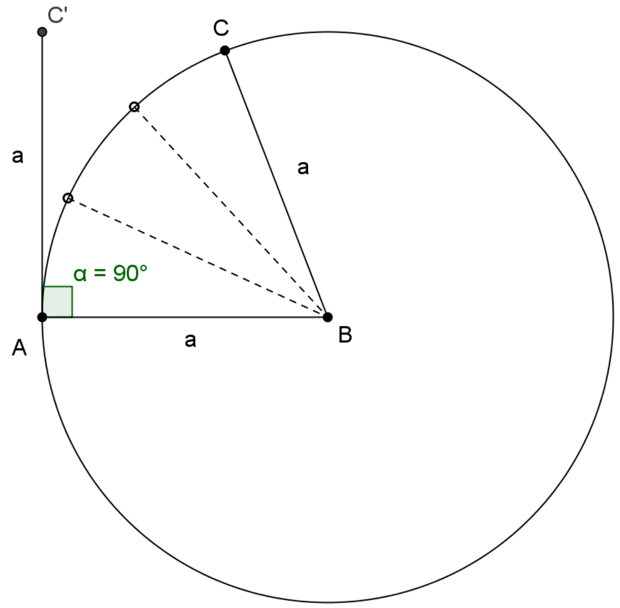
Innenfor bevisskjemaet *matematisk visualisering* var ikke elevene i stand til å begrunne sine observasjoner og mentale omdannelser matematisk. Figurer på skjermbildet hadde etter vår mening en stor innvirkning på hvordan elevene argumenterte for sine hypoteser, da elevene verifiserer sine matematiske påstander ved at de visualiserer omdannelser mentalt – *de bare ser det*. I dette delkapittelet vil vi presentere situasjoner hvor elevene argumenterer ved hjelp av *matematisk visualisering.* Situasjonene er valgt med den hensikt å vise bredden av det vi observerte av kategorien. I situasjon 8 og 9 overbevises elevene ved å se av figuren. Elevene i disse situasjonene begrunner ikke sine observasjoner matematisk presist, men bruker utrykk som ”ikke nådd fram”, ”speiling” og ”bretting”. I situasjonene 10 og 11 benytter elevene matematisk visualisering, i tillegg til at de nevner egenskaper ved elementer i figuren. De klarer derimot ikke å anvende egenskapene videre til å argumentere for påstandens sannhet.

Situasjon 8

I oppgave 2a (oppgavehefte 2) blir elevene spurt om det er mulig å konstruere en rettvinklet trekant hvor alle tre sidene er like lange. Elevene benytter seg i forkant av situasjon 8 av Pytagoras’ læresetning for å forklare at det ikke er mulig at en rettvinklet trekant har tre like lange sider (beskrevet i situasjon 4). Selv om elevene har sjekket Pytagoras’ læresetning for to eksempler uttrykker Kari fortsatt et behov for å begrunne hvorfor hypotenusen ikke kan være like lang som de andre to andre sidene i en rettvinklet trekant. Hun forklarer videre at om de har en trekant med tre like lange sider, ville ikke hypotenusen ha “nådd fram” til det tredje hjørnet.

2.68 Sara: så den (hypotenusen) e fortsatt større da.
2.69 Alle i kor: ja.
2.70 Kari: den (hypotenusen) blir aldri det (like lang) når det e 90 grader.
2.71 Line: før ellers hadde det ikke vært hypotenus.
2.72 Kari: den (hypotenusen) hadde ikke nådd fram.
2.73 Sara: det e jo heilt sikkert at man kan bruk pytagoras.
2.74 Kari: men den (hypotenusen) hadde ikke kommet tel og nådd fram, den (hypotenusen) hadde bare kommet hit liksom [bruker fingrene til å vise].

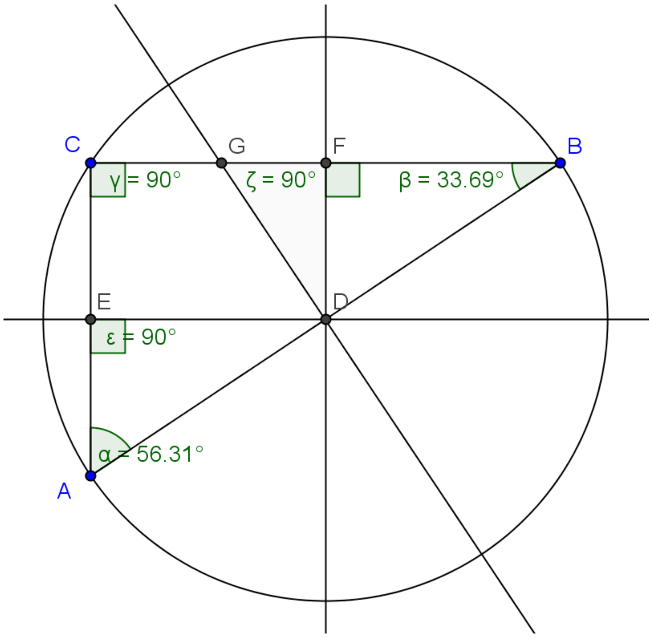
Kari setter fingrene som en passer med lengde lik de to andre sidene og illustrerer med det hvordan hypotenusen ikke hadde "nådd fram" (ytring 2.74). Vi tolker det som at Kari ser av figuren at den tredje siden ikke når fram til det tredje hjørnet i trekanten hvis den skal være like lang som de to andre sidene (figur 22). Hun nevner at hypotenus ikke ville nådd fram i både ytring 2.72 og ytring 2.74, det til tross for at Sara poengterer gyldigheten av Pytagoras' læresetning (ytring 2.73). Vi tolker situasjonen som at Kari tyr til visuelle hjelpemidler for å overbevise seg selv om at situasjonen ikke er en mulighet. Vi mener Kari ser for seg en tredje linje, som er like lang som de to andre, og ved å visualisere sidens bevegelse, som radiusen i en sirkel (illustrert i figur 22) overbeviser hun seg selv om at linjen ikke når fram til det siste hjørnet i trekanten. Vi mener det Kari visualiserer er legitimt da hypotenusen faktisk ikke vil "nå fram". Grunnen til at radiusen (markert med a i figur 22) ikke "når fram" i en rettvinklet trekant med tre like lange sider er fordi hypotenusen må være lik $\frac{a}{cos\angle ABC}$. Om hypotenusen derimot er lik a som i dette tilfellet, har vi at a er ekte mindre enn $\frac{a}{cos\angle ABC}$ fordi $cos\angle ABC$ alltid vil være mindre enn 1. Det er derfor umulig at en rettvinklet trekant kan ha tre like lange sider. Med bakgrunn i at elevene ikke nevner generalitetsaspektet i deres spesielle tilfelle er situasjonen plassert under empirisk bevisskjema. Videre er situasjonen plassert under bevisskjemaet matematisk visualisering fordi Kari ikke benytter seg av et presist matematisk argument, men utfører en omdannelse av et linjestykke mentalt.



Figur 22: Illustrasjon av den mentale omdannelsen til Kari.

Situasjon 9
I situasjonen arbeider Line og Mona med oppgave 1.7. (oppgavehefte 1) hvor elevene er bedt om å beskrive hva som kjennetegner situasjonene hvor skjæringspunktet D ligger inne i trekanten, på en av sidene i trekanten og utenfor trekanten. De skal i tillegg begrunne svarene sine.

I forkant av situasjon 9 har elevene observert at når D ligger på den ene siden i trekanten danner det seg en rettvinklet trekant. Dette har ledet elevene til å undersøke figuren og lete etter ulike egenskaper. Line argumenterer da for at $\angle FDG$ og $\angle BDF$ begge er lik 45°, noe hun begrunner ved at DF halverer $\angle BDG$. Strålen gjennom DF har elevene konstruert som en midtnormal til linjestykket AB. Vi tolker det slik at Line baserer argumentasjonen sin på figuren, og at det for Line ser ut av figuren som at DF halverer $\angle BDG$ (figur 23). Mona er uenig med Lines argumentasjon om at $\angle FDG$ og $\angle BDF$ begge er 45°, og påpeker at DF ikke halverer $\angle GDB$ (figur 23). Elevene starter da å lete etter nye like vinkler og formlike trekanter. I utdraget under observerer Line at $\Delta AED \sim \Delta DFB$ (figur 23), noe som ikke er matematisk presis, da trekantene faktisk er kongruente. Videre begrunner elevene at trekantene er formlike ved å benytte seg av "speiling" og "bretting" av trekantene.



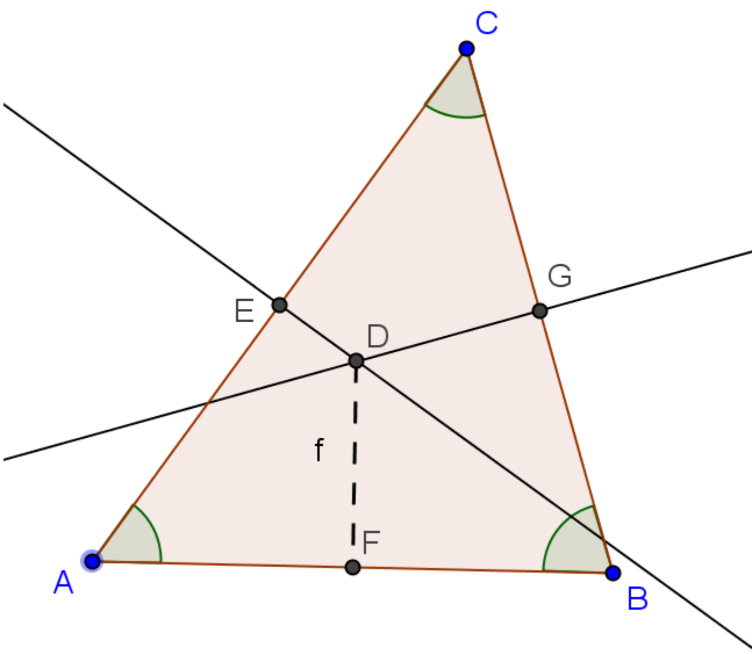
Figur 23: Illustrasjon av figuren elevene arbeider med i situasjon 2.

2.75 Line: den her lille trekanten (ΔDGF) e jo også lik (formlik) den her trekanten (ΔBDF)?
2.76 Mona: mhm, du veit at begge dem (∠GFD og ∠DFB) e 90.
2.77 Line: ja, mhm, og du veit at…
2.78 Mona: da e den her 33,69 *(∠DGF)* også? Den må da det?
2.79 Line: eller æ tenker at kanskje heller den *(∠FDG)* må vær det da men.
2.80 Mona: før 90 gradern e på samme plass om du speile dem no, brett den (ΔBDF) over.
2.81 Line: nei men æ trur du må brett den (ΔBDF) ned.

Mona argumenter i ytring 2.80 for at $\Delta DGF \sim \Delta BDF$ ved å *speile* trekantene eller ved å *brette* trekantene over i hverandre. I tillegg påpeker hun at vinkelen på 90 ° havner på samme plass om de blir speilet, eller brettet over. At vinkelen havner på samme plass tolker vi som at hun speiler $\angle DFB$ over i $\angle GFD$. Med bakgrunn i det mener vi det kan tolkes som at Mona først observerer hvilke trekanter som er formlike, for så å prøve å finne en måte å argumentere for at det hun observerer er sant. Det kan blant annet ses i ytring 2.75 hvor Line påpeker at de to trekantene er formlike. Det virker som begge elevene er med på tankegangen om *bretting*, siden begge benytter utrykket (ytring 2.80 og 2.81). Ettersom elevene benytter seg av en omdannelse av objektet ved mental manipulasjon av figuren, uten noen direkte referanse til formlikhet, de bare "ser" at vinkelene er like store uten å argumentere for det matematisk presist. Derfor er situasjonen kategorisert som matematisk visualisering.

Situasjon 10

I oppgave 1.5 (oppgavehefte 1) blir elevene bedt om å konstruere midtnormalen til den tredje siden i trekanten og beskrive hva de observerer. Deretter skal elevene dra i hjørnene på trekanten og se hva som skjer. I tillegg skal de prøve å begrunne hvorfor alle tre midtnormalene skjærer hverandre i ett punkt *D*. I situasjonen er elevene i gang med å forklare hvorfor de tre midtnormalene må møtes i et punkt. I samtalen nevner elevene noen egenskaper ved midtnormalen, blant annet påpeker de at midtnormalene står normalt på alle sidene, og at midtnormalene befinner seg midt på sidene i trekanten. I utdraget under kommer Gro bort til elevene og spør dem om de har klart å begrunne at de tre midtnormaler må møtes i ett punkt. Elevene forklarer først at de bare må møtes. Deretter oppfordrer Gro elevene til å skjule den ene midtnormalen først, og så betrakte situasjonen med to midtnormaler. Kari forklarer da at hun ser for seg at punktet *D* deler *AB* i to like store deler.



Figur 24: Illustrasjon av hva Kari ser for seg i situasjon 10, basert på observasjon av situasjonen

2.82 Sara: det vi tenkt da at den (midtnormal på *AC*) på en måte halvere linja [peker på *AC]* at det e lik avstand her (*AE*) og her (*EC*).

2.83 Gro: mhm.

2.84 Sara: og den (midtnormalen på *AC*) står 90 grader rett på, før det gjør det jo på alle.

2.85 Gro: ja.

2.86 Sara: da vil dem (midtnormalene) jo treff da, men klar ikke helt å tenk koffer da.

2.87 Kari: nei, vi skjønne bare at dem må bare det.

2.88 Gro: enn hvis dokker tar vekk før eksempel den der da [peker på midtnormalen på *AB]* og bare ser på tilfellet der dokker har to midtnormala.

Elevene og Gro starter å diskutere hvordan de kan fjerne den ene midtnormalen ved å benytte seg av skjulefunksjonen i GeoGebra. Etterpå fortsetter samtalen som følger:

2.89 Gro: sånn, så har du jo at de to (midtnormalen på *AC* og midtnormalen på *CB*) treffes.
2.90 Kari: du ser jo at det (punkt *D*) e jo liksom [peker opp og ned på linje f i figur 24] rett under. (pause)
2.91 Kari: så på en måte den her og da, punktet der (punkt *F*) eller der dem skjær (i punktet *D*) skjær den (punktet *D*) den (*AB*) og da [peker opp og ned på linje *f*] eller?
2.92 Gro: forklar på nytt.
2.93 Kari: ja liksom, dem (midtnormalen på *AC* og midtnormalen på *CB*) krysse jo i et punkt sånn, bare litt lenger ned da, og det (punkt *D*) krysse jo på en måte den her (*AB*) liksom også da, det (punkt *D*) dele den her (*AB*) i to også.

Til tross for at Sara klarer å trekke ut at midtnormalen halverer linjestykket *AC* (ytring 2.82), og at midtnormalene står normalt på alle sidene (ytring 2.84), klarer ikke elevene å bruke egenskapen videre til en presis matematisk argumentasjon. Verken Sara eller Kari klarer å bruke egenskapene til å vise at det er lik avstand fra punktet *D* til hjørnene i trekanten.

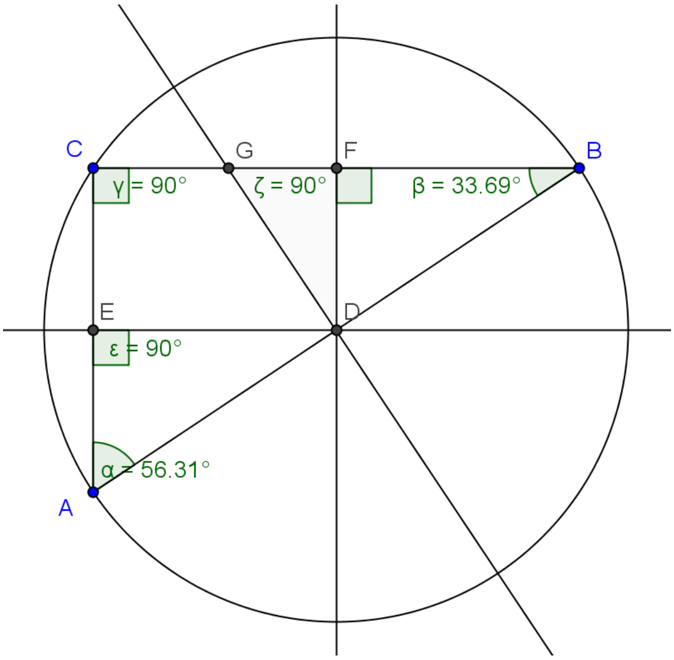
Kari utrykker i ytring 2.90, 2.91 og 2.93 at hun ser for seg at skjæringspunktet *D* mellom de to midtnormalene vil halvere den siste siden i trekanten (illustrert med *AB* i figur 24). Vi tolker ytringene som at Kari ser for seg at en normal fra punktet *D* ned på *AB*, vil dele *AB* i to like store deler. Videre tolker vi Kari som at hun mener det kan forklare at de tre midtnormalene vil treffes i et punkt, jamfør ytring 2.87 hvor hun utrykker "dem må bare det". Hvis hun derimot hadde begrunnet at *DF* halverer *AB* ville det vært en forklaring.

I situasjonen støtter Kari sin argumentasjon på figuren hun observerer i skjermbildet. I tillegg utfører Kari i ytring 2.93 en omdannelse av punktet *D*, i det hun ser for seg at punktet *D* tegner en normal ned på *AB*. Vår tolkning av situasjonen er at Kari blir overbevist om at de tre midtnormalene vil treffes i et punkt da hun visualiserer en normal fra skjæringspunktet *D* ned på *AB*, og visualiserer at den vil bli en midtnormal på *AB* (figur 24). Med bakgrunn i det mener vi Kari benytter seg av en visuell argumentasjon i situasjonen og vi har derfor kategorisert situasjonen som matematisk visualisering.

Situasjon 11

Elevene blir i situasjonen bedt om å beskrive hva som kjennetegner situasjonene hvor skjæringspunktet D mellom midtnormalene i trekanten ligger inne i, på en av sidene og utenfor trekanten (oppgave 1.7, oppgavehefte 1). Elevene arbeider med samme oppgave som situasjon 2 under kategorien matematisk visualisering. I denne situasjonen arbeider elevene med tilfellet hvor *D* ligger på den ene siden i trekanten. Elevene har observert fra figuren at $\Delta AED \sim \Delta DFB$ (egentlig er de kongruente). Line begrunner at $\Delta AED \sim \Delta DFB$ ut i fra at

$\angle AED = \angle DFB = 90°$, og at de deler punktet i D (figur 25). Hva Line mener med å dele punktet i D er uvisst.



Figur 25: Illustrasjon av figuren elevene arbeider med i situasjon 11.

2.94 Line: ja e det flere her som e 90 da? Men du ser jo også at den (ΔAED) og den (ΔDFB) e formlik og dem to (ΔACB og ΔDFB) og dem to (ΔACB og ΔAED).

2.95 Mona: ja æ ser det no.

2.96 Line: den (ΔACB) og den (ΔAED), æ veit ikke om det har no å si da (pause)

2.97 Line: ja og hvis du ser så e dem her to også formlik (ΔDGF og ΔDFB). I dem her to så e dem (ΔDGF og ΔDFB) formlik, som e begge e 90 og dele punktet i D.

2.98 Mona: mhm.

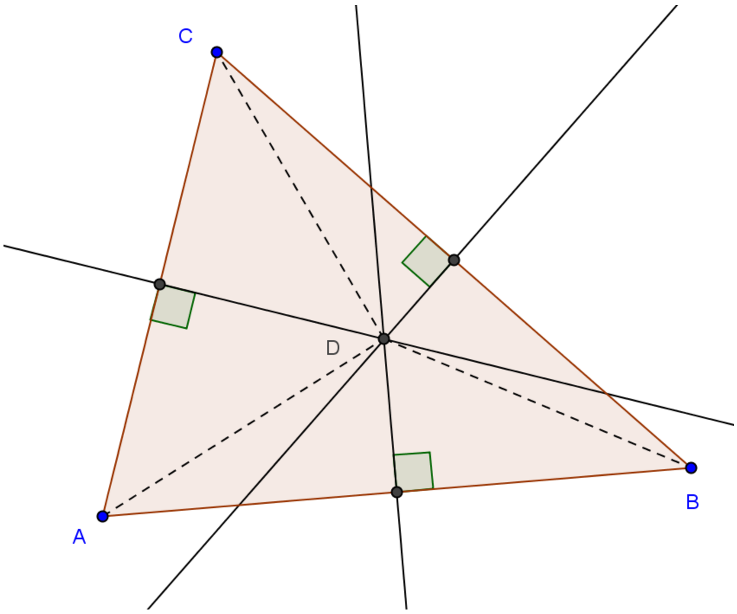
Line nevner i ytring 2.94 at $\Delta AED \sim \Delta DFB$, $\Delta ACB \sim \Delta DFB$ og $\Delta ACB \sim \Delta AED$. Vi tolker ytring 2.94 og 2.96 som at Line observerer formlikhet ut i fra figuren fordi trekantene på skjermen ser like ut, med bakgrunn i at hun ikke nevner noen egenskaper ved trekantene som tilsier at de faktisk må være formlike. I ytring 2.97 sier Line at egenskaper, som at trekantene begge innehar en 90 graders vinkel og at de deler et felles punkt D, tilsier at trekantene er formlike. Hva Line mener med at de deler et felles punkt D er usikkert. At elevene bruker utrykk som “æ ser det” (2.95) og “hvis du ser så” (2.97) tolker vi det som at begge elevene observerer at trekantene er formlike ved å se på figuren i skjermbildet i GeoGebra. Derfor har vi kategorisert situasjonen som matematisk visualisering.

5.3 Deduktivt bevisskjema

Elever som er i besittelse av et deduktivt bevisskjema overbeviser seg selv og andre ved hjelp av logisk-deduktive resonnement. Vi vil i kapittelet presentere tre situasjoner der elevene overbeviser seg selv og andre om en påstand ved delvis bruk av logisk-deduksjon. I situasjon 12 argumenterer elevene for at skjæringen mellom midtnormalene møtes i ett felles punkt, der de ved bruk av midtnormalen tydelig er målorientert. Videre vil vi i situasjon 13 trekke fram en situasjon der elevene trekker fram kriterier for formlikhet, men ikke setter de nevnte kriteriene sammen for å nå fram til en konklusjon. Til slutt trekkes det i situasjon 14 fram en situasjon der elevene argumenterer deduktivt, i denne situasjonen observeres det i tillegg at elevene innehar flere bevisskjema.

Situasjon 12

Elevene arbeider med oppgave 1.5 (oppgavehefte 1), der de skal argumentere for hvorfor skjæringspunktet mellom midtnormalene vil møtes i ett felles punkt. I utdraget argumenterer elevene for at avstandene fra punktet *D* til hjørnene i trekanten er like lang ved å benytte seg av egenskapene til midtnormalen (figur 26).



Figur 26: Illustrasjon av elevenes figur i situasjon 2.

3.1 Lene: hva vet vi om egenskapen til midtnormalen da?
3.2 Per: ja, den er… ja hvis vi skal gjør sånn ja, da. Du vet at det er like langt fra punktan den er midtnormal te [peker på hjørnene i trekantene].
3.3 Lene: mmh.
3.4 Ola: og det er jo alle sammen, den (*AD*) er jo like lang som den (*BD*).
3.5 Lene: mmh.
3.6 Ola: at dermed så er… så vil punktet der (punkt *D*) være like langt fra den (punkt *A*) som fra den (punkt *B*)
3.7 Lene: mmh.
3.8 Ola: fra den (punkt *B*) som fra den (punkt *C*), og dermed likelang fra den (punkt *A*) som fra den (punkt *C*).
3.9 Lene: ja.
3.10 Ola: så det er det punktet (punkt D) som er like langt fra alle.

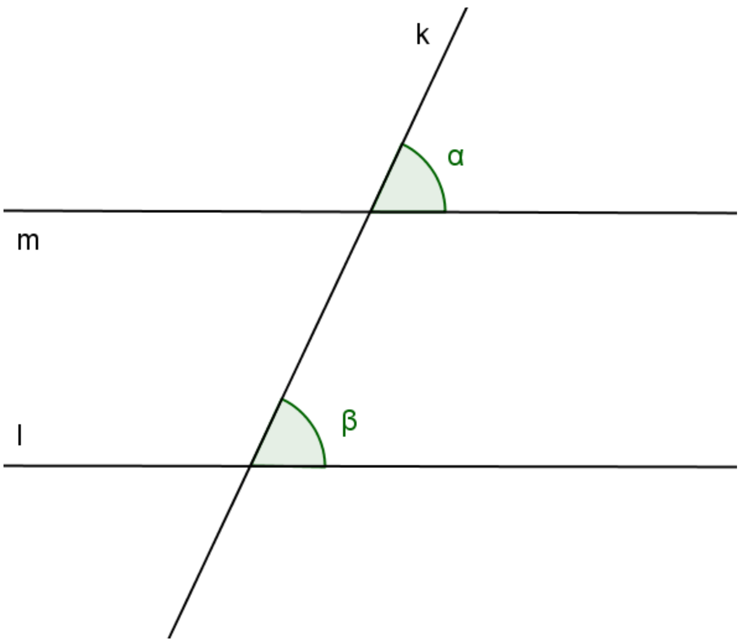
I begynnelsen av samtalen stiller Lene spørsmål til elevene om hva de vet om egenskapene til midtnormalen, noe vi mener kan ha ledet elevene mot å vise at avstandene er like store. I argumentasjonen sin betrakter Ola sidene i trekanten fortløpende en etter en, for å vise at skjæringspunktet mellom de tre midtnormaler vil være like langt fra alle hjørnene i trekanten (vist i figur 26). Noe vi tolker som at Ola utfører en trinnvis argumentasjon. I det første trinnet påpeker Ola (ytring 3.2) at det er like langt fra punktene til midtnormalen. Fra observasjon i klasserommet vet vi at Ola mener hjørnene i trekanten når han utrykker punktene, da han samtidig peker på disse. Videre i ytring 3.4 presiserer Ola at *AD* og *BD* er like lange. Ola fortsetter så videre til en annen side i trekanten og observerer tilsvarende der, at *BD* er lik *CD* (ytring 3.8). Tilslutt konkluderer Ola med at *AD* dermed må være lik *CD*. Ut i fra ytring 3.10 tolker vi det slik at Ola finner ut at punktet *D* ligger like langt fra alle tre hjørnene i trekanten, ettersom alle de tre linjestykkene må være like lange.

Ut fra situasjonen mener vi det kan tolkes som at elevene er i besittelse av et deduktivt bevisskjema. Elevene argumenterer med utgangspunkt i egenskapen om at et punkt på midtnormalen til et linjestykke *AB* vil ligge like langt fra *A* som fra *B*, noe som kan observeres i ytring 3.2. Elevene benytter seg så videre av denne egenskapen for å argumentere for at $|AD|=|BD|$ (ytring 3.4). Egenskapen om at *D* ligger like langt fra *A* som fra *B* mener vi er rimelig å anta er etablert kunnskap hos elevene. Egenskapen illustreres gjennom et eksempel i læreverket til elevene ved at den deduseres fra definisjonen av en midtnormal (Heir et al., 2007). At elever benytter seg av tidligere dedusert kunnskap fra definisjoner kan ses i sammenheng med Vincents (2002) definisjon av deduktiv resonnement. Han påpeker at et deduktivt resonnement enten kan basere seg på tidligere deduserte resultater fra en definisjon eller fra gitt informasjon.

Ut i fra situasjonen tolker vi det som at elevene går ut i fra at de to midtnormalene til *AB* og *BC* skjærer hverandre i ett felles punkt *D*, noe som er greit da linjene umulig kan være parallelle. Videre mener vi de benytter egenskapene til midtnormalene til å argumentere deduktivt for at *CD* og *AD* vil være like lange. Etter dette spesifiserer ikke elevene hvorfor vinkelhalveringslinja fra punktet D som skjærer på linje *AC* må være midtnormalen på *AC*, med utgangspunkt i at $|CD| = |AD|$. Dette medfører at elevene ikke kommer helt i mål med å vise at de tre midtnormalene møtes i ett punkt. Elevene argumenterer logisk-deduktivt i deler av situasjonen og vi har dermed kategorisert elevene her til å inneha et deduktivt bevisskjema.

Situasjon 13

I oppgave 4 (oppgavehefte 2) blir elevene bedt om å vise at punktet P deler *AB* i forholdet 5:3. I oppgaven er det gitt at $CP \parallel DB$ (figur 28). Oppgaven spør i tillegg etter hva det vil si at to linjer er parallelle. I forkant av situasjonen prøver elevene først å forklare hva det vil si at *CP* og *DB* er parallelle, og har i sammenheng med det tegnet noen parallelle linjer på et ark. Den ene tegningen deres er illustrert i figur 27. Lars kommer til slutt fram til noe vi anser å være sammenlignbart med *det motsatte av alternative indre vinkel teoremet* beskrevet i kapittel 3.1. Deretter begrunner elevene hvorfor $\Delta APC \sim \Delta ABD$ ved hjelp av parallelliteten.

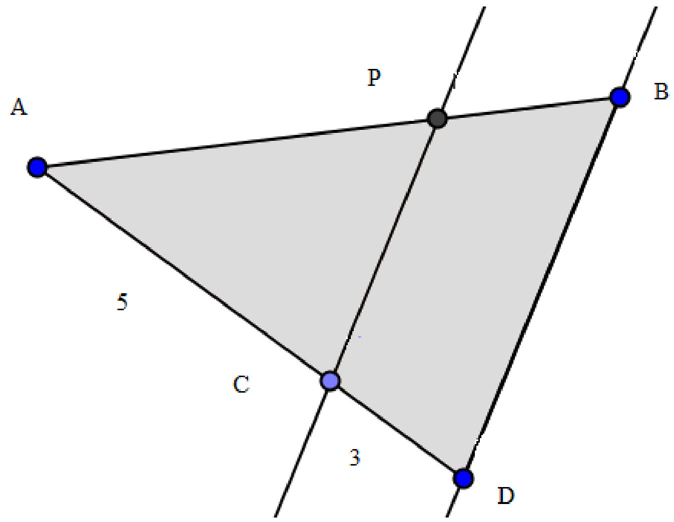


Figur 27: Illustrasjon av Lars forklaring av at vinklene alltid må være like store.

I diskusjon om parallelle linjer kommer Lars med følgende ytring:

3.11 Lars: hvis du har en strek (linje *k*) opp her da, så kan du si at den vinkelen der ($\angle\alpha$) vil alltid være like stor som vinkelen der ($\angle\beta$) (vist i figur 28).

Slik vi tolker ytring 3.11 (figur 27), er linje k en transversal som skjærer to parallelle linjer på skrå. Lars trekker videre fram at hvis *k* skjærer de to parallelle linjene, så vil vinkel $\alpha = \beta$. Vi mener derfor at Lars sin ytring kan overføres til elevenes konkrete oppgave, da det i oppgaven er oppgitt at *CP* og *DB* er parallelle.



Figur 28: Illustrasjon oppgitt i oppgave 4 (oppgavehefte 2).

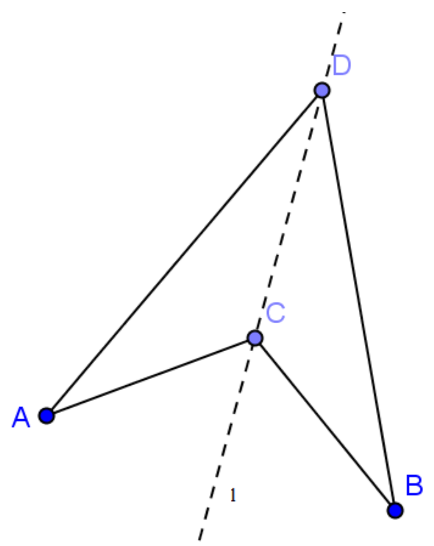
Videre benytter elevene seg av parallelliteten til å forklare at $\Delta APC \sim \Delta ABD$. I argumentasjonen utfører elevene et deduktivt resonnement basert på at $CP \parallel DB$ og at $\angle A$ er felles i ΔAPC og ΔABD.

3.12 Arne: ok, formlik siden…ehh. Æ må tenk litt. Koss vi skal formuler det. Ehh, si at ABD er formlik med APC.
3.13 Knut: ABD er formlik med.
3.14 Arne: med APC, fordi de deler vinkel A og fordi vinkelbeinet…de deler vinkel A og CP er parallell med DB.
3.15 Knut: og CP er.
3.16 Arne: parallell med DB.

Elevene benytter seg målrettet av opplysningene i oppgaven til å utføre en trinnvis argumentasjon for å vise at $\Delta APC \sim \Delta ABD$. I det første trinnet i argumentasjonen trekker elevene fram egenskapene til parallelle linjer, blant annet at parallelle linjer som skjæres av en linje vil gi to like store vinkler (ytring 3.11). I utdraget presiserer ikke elevene at $\angle APC = \angle ABD$ og $\angle PCA = \angle BDA$. Slik vi tolker det kan det være etablert kunnskap hos elevene, ettersom Lars tidligere har påpekt i ytring 3.11 at vinklene α og β må være like på grunn av parallelliteten (figur 28). At vinklene $\angle APC = \angle ABD$ og $\angle PCA = \angle BDA$ er parvis like store anser vi derfor som en tidligere deduserte konklusjon. I det andre trinnet observerer elevene at ΔAPC og ΔABD har en felles vinkel, $\angle A$. Ut i fra det foregående konkluderer elevene med at $\Delta APC \sim \Delta ABD$. Til tross for at elevene ikke utrykker at de to trekantene har parvis like vinkler, påpeker de at $\angle A$ er felles, og at $CP \parallel DP$. Med bakgrunn i at elevene utfører en målrettet deduktiv argumentasjon hvor de til tider benytter logiske argumenter har vi plassert situasjonen innunder et deduktivt bevisskjema

Situasjon 14

I oppgave 1 (oppgaveheftet 2) får elevene oppgitt at linje *l* er midtnormalen til *AB*, samt at punktene *C* og *D* ligger på *l*. De skal ut i fra disse opplysningene argumentere for $\Delta ADC \cong \Delta CDB$. I situasjonen kan det virke som elevene ikke helt vet hva som må til for at to trekanter skal være kongruente. Selv om de har argumentert for at de to trekantene har tre like sider, fortsetter elevene å lete etter flere like forhold i de to trekantene. Etter at de deduktivt har argumentert for mange likheter i situasjonen ender elevene opp med å konkludere at trekantene er formlike og ikke kongruente.



Figur 29: Illustrasjonen gitt i oppgave 1 (oppgaveheftet 2).

3.17 Sara: koffer den e lik den [peker på arket rundt ΔADC og ΔBCD].
3.18 Kari: ja, hvis den her e midtnormalen (linje *l*).
3.19 Sara: Så betyr det at avstanden her må være lik (*AD* og *BD*).
3.20 Kari: Og så går den (linje *l*) igjennom både C og D.
3.21 Sara: avstanden her, ja, hvis avstanden her e lik [peker på *AD* og *BD*], så betyr det at avstanden her [peker på *AC* og *CB*] må vær lik, altså må vinklan her vær like stor ($\angle CAD$ og $\angle DBC$).
3.22 Kari: mhm.
3.23 Sara: pluss at det her (linje *l*) e midtno… kanskje det her, ja, den her (linje l) går jo igjennom der (punkt *D*) (viser på arket) altså vil (mumler).
3.24 Kari: når den (linje *l*) går igjennom begge to (punkt *C* og punkt *D*) altså så veit man at det e like lang avstand fra AB til C [peker på *AC* og *CB*] og D [peker på *AD* og *BD*].
3.25 Line: e det ikke no setning i boka vi kan bruk?
3.26 Sara: jo det e den derre, ka hete den da, perifieripunkt og greier og greier.
3.27 Line: ja det e det her [viser i læreverket].
3.28 Sara: ja, og da betyr jo det at linja l halvere vinkelen i punktet C.
3.29 Line: ja også veit vi at vinkelen i D e halvparten så stor som vinkelen i C?
3.30 Sara: ja.
3.31 Line: ja.
3.32 Sara: no må vi bare bevis at dem (ΔADC og ΔCDB) e formlik da.
3.33 Kari: ja, begrunn koffor, har vi ikke gjort det da?
3.34 Sara: jo dem dele to vinkla, og har en tredje vinkel felles.
3.35 Alle: mhm.
3.36 Sara: men koss veit vi at den her (linje *l*), halvere den her ($\angle ADB$) da?
3.37 Kari: fordi at liksom det her vi veit at det her (linje *l*) e midtnormalen ikke sant? Og vi veit at midtnormalen, den går liksom.. D e på midtnormalen? Og da veit vi…
3.38 Sara: ja det veit vi jo…
3.39 Kari: at den ($\angle ADB$) halvere.
3.40 Sara: e vi ferdig med den da?
3.41 Kari: trur det.

I begynnelsen av utdraget (3.18-3.22) benytter elevene egenskapen om at et punkt som ligger på midtnormalen til linjestykket *AB* vil ligge like langt fra *A* som fra *B* til å argumentere for at *AD=BD* og at *AC=BC*. De presiserer ikke egenskapene ved midtnormalen eksplisitt, men i likhet med elevene i situasjon 12 mener vi det er naturlig å anta at denne egenskapen er etablert kunnskap hos elevene. Argumentasjonen kan observeres ved at elevene i ytring 3.19 og 3.20 påpeker at hvis linje *l* er midtnormalen på *AB* så må *AD*=*BD*. Videre presiserer Kari i ytring 3.21 at linje *l* går gjennom både punktet *C* og punktet *D*. Elevene kommer da også fram til at *AC*=*BC*. Deretter konkluderer elevene i ytring 3.21 med at $\angle CAD = \angle DBC$, uten å begrunne *hvorfor*. Slik vi ser det argumenterer elevene her deduktivt ut i fra egenskapene til midtnormalene. De påpeker derimot ikke at de har tre like sider, når de konkluderer med at $\angle CAD = \angle DBC$, noe som medfører at argumentasjonen ikke blir matematisk presist. Hvorvidt elevene benytter figuren for å visualisere at vinklene er like store, eller om elevene benytter egenskaper ved kongruente trekanter er etter vår mening vanskelig å tolke ut i fra datamaterialet.

Videre i utdraget ser vi spor av autoritært bevisskjema. Et eksempel på dette er i ytring 3.25 der Line søker etter en løsningsmetode i læreverket. I det Sara presenterer periferipunktsetningen fra læreverket (ytring 3.26) tolker vi det som at elevene overbevises om at $\angle ACB$ er dobbelt så stor som $\angle ADB$, ettersom ingen av jentene protesterer på det (ytring 3.30 og ytring 3.31). De bruker det derimot ikke videre i argumentasjonen sin.

Elevene trekker i ytring 3.33 fram at de må vise at $\Delta ADC \sim \Delta CDB$, noe oppgaven ikke spør etter. Vi mener med bakgrunn i det at elevene viser at de er usikre i forhold til begrepene formlikhet og kongruens. Sara trekker så fram at trekantene deler to vinkler og har en tredje vinkel felles (ytring 3.34). Videre snakker elevene om at $\angle ADB$ halveres av linje l (ytring 3.37), noe Sara allerede har poengtert i ytring 3.29.

Elevene utfører ikke i situasjonen et fullstendig logisk-deduktivt resonnement, for eksempel begrunner ikke jentene at $\angle CAD = \angle DBC$. Videre mener vi at elevene utrykker at de ikke har tilstrekkelig kunnskap om hva som kreves for kongruens, basert på at de under argumentasjonen ved flere anledninger utrykker opplysninger som kunne ført argumentasjonen i mål. Til tross for dette mener vi elevenes argumentasjon i hovedsak består av deduktiv resonnering hvor de med utgangspunkt i midtnormalen gjennomfører en trinnvis argumentasjon som består av logiske argumenter. Situasjonen er derfor plassert under deduktivt bevisskjema.

Kapittel 6: Diskusjon

I dette kapittelet presenterer vi først en oppsummering og diskusjon av resultatene opp mot teori presentert i kapittel 2. I tillegg drøftes resultatene opp mot tidligere forskning på området. Etter dette følger en drøfting av analyseverktøyet benyttet i studien. Til slutt i kapittelet diskuteres studiens gyldighet og pålitelighet.

6.1 Diskusjon og oppsummering av resultater

I det følgende vil vi gi en oppsummering og drøfting av resultatene i studien. Diskusjonen av resultatene blir betraktet opp mot teori, samt tidligere forskning.

6.1.1 Autoritært bevisskjema

Vår tolkning av resultatene funnet under kategorien *autoritært bevisskjema*, er at elevene her har et fokus på finne løsningsmetoder. For eksempel mener vi det kan observeres at elevene benytter seg av læreverket for å finne ut hvordan de kan løse oppgavene. En måte elevene benytter læreboken på er som oppslagsverk for å finne teoremer eller setninger de kan bruke direkte til å løse oppgaven, det uten gjøre et forsøk på å argumentere eller resonnere selv først. I likhet med Harel og Sowder (2007) tolker vi det som at elevene har en oppfatning om at bevis bare er en måte å sannsynliggjøre allerede kjente fakta på. Om elevene har en slik oppfatning mener vi det kan føre til at elevene ikke ser hensikten med å bevise matematiske påstander.

6.1.2 Empirisk bevisskjema

I studien valgte vi å dele *empirisk bevisskjema* inn i *induktivt bevisskjema* og *matematisk visualisering*. Generelt for empirisk bevisskjema finner vi at elevene baserer seg på konkrete eksempel for å overbevise seg selv og hverandre om en påstands sannhet. Harel og Sowder (1998) påpeker at empirisk bevisskjema kjennetegnes ved; elevenes tillit til eksempler, direkte målinger av størrelser, eller persepsjon. De hevder at grunnen til at dette bevisskjemaet oppstår kan være at den naturlige dagligdagse tenkningen nyttiggjør seg så mye av eksempler. Videre har vi i resultatene våre situasjoner hvor vi mener at elevene benytter seg av figurer observert i skjermbildet for å overbevise seg selv og hverandre om sannheten av en hypotese.

Spesielt for *induktivt bevisskjema* finner vi i resultatene at elevene benytter seg av *talleksempel* og *visuelle eksempel*. I denne kategorien overbeviser elevene seg selv og hverandre om en påstands sannhet hovedsakelig ved å betrakte enkelttilfeller. Et slikt enkelttilfelle er i våre resultater enten et konkret talleksempel eller en konkret figur. I likhet med Harel og Sowder (1998) ser vi i våre resultater at elevene som betrakter et utvalgt eksempel for å argumentere for sine påstander som regel bare benytter seg av ett eksempel, framfor en rekke eksempler. Tilfellene der elevene velger ett enkelt eksempel mener vi kan ses i sammenheng med naiv empirisme slik det beskrives av Balacheff (1988). Andre ganger betrakter elevene et nøye utvalgt eksempel, for eksempel et stort talleksempel eller en spesiell figur, som de benytter for å overbevise seg selv og hverandre. Det å betrakte et nøye utvalgt eksempel kan i følge Balacheff tolkes som at elevene benytter seg av et avgjørende eksperiment. Typisk for kategorien talleksempel er også at elevene "sjekker" eksemplet sitt ved å sette inn i en matematisk formel. Et eksempel på dette er i situasjon 4, hvor jentene setter inn tall i formel de har for Pytagoras' læresetning.

Kategorien *visuelle eksempel* mener vi er forskjellig fra Harel og Sowders (1998) kategorier, og vi mener den er unik som følge av DGMet i studien. Tolkningene baserer vi på at visuelle eksempler var den eneste kategorien hvor det dynamiske geometrimiljøet fikk sitt utslag. Et av funnene i kategorien visuelle eksempel er for det første at elevene formulerer egne hypoteser. Videre benytter elevene seg her av medierende redskaper som "målinger" og "dragging" i DGMet for å sannsynliggjøre sine hypoteser. I forhold til de ulike draggingfunksjonene vi kort har beskrevet i kapittel 2.6.1, var draggingtesten den vi observerte hyppigst brukt i situasjonene. Resultatet mener vi kan ses i sammenheng med tidligere forskning utført av Azarello et al. (2002) og Baccaglini-Frank og Mariotti (2010), som i likhet med oss fant at elever benytter draggingstesten til å bekrefte eller avkrefte hypoteser. Et typisk eksempel har vi i situasjon 6, hvor elevene benytter dragging for å sjekke om en bestemt vinkel kan bli større enn 90 grader. I denne situasjonen observerer elevene endringer av vinkelmålet ved å dra i figuren. At elevene lot seg overbevise at figuren i skjermbildet mener vi kan stemme med Laborde (1988), som hevder at slike dynamiske figurer tilbyr en sterkere overbevisning enn statiske tegninger. Baccaglini-Frank og Mariotti påpeker at elever benytter seg av dragging til å påvise at det enten eksisterer et eksempel, eller til å vise at det ikke eksisterer et moteksempel. I våre resultater har vi funnet situasjoner som kan ses i likhet med Baccaglini-Frank og Mariottis resultater. Et eksempel er situasjoner 7, der elevene godtar hypoteser de i DGMet ikke klarer å observere et moteksempel til. Elevene benytter målinger i flere av kategoriene, men i situasjonene beskrevet under visuelle eksempel benytter elevene seg av målinger i tillegg til å endre figuren for å overbevise seg selv og hverandre om en sannhet. At elever benytter målinger kan ses i likhet med Olivero og Robutti

(2007) som fant at elevene benyttet seg av målinger i DGMet for å sannsynliggjøre sine hypoteser.

Sett i sammenheng med forskning utført av Mariotti (2001) som fant at undervisning i et DGM kan medføre at elever får et behov for å sannsynliggjøre sine hypoteser generelt, viser vår studie derimot at elevene overbevises ved å betrakte visuelle eksempel. Det elevene observerer i skjermbildet synes å være så visuelt overbevisende at et behov for et mer formelt bevis ikke ser ut til å oppstå. Våre funn fra kategorien visuelle eksempel indikerer at elevenes bruk av dragging eller måling, for å verifisere sine løsninger, ser ut til å fremme en lyst til å utforske. Videre mener vi våre resultater også indikerer at de medierende redskapene stimulerer elevene til å stille undrende spørsmål. At DGMet førte til at elevene stilte undrende spørsmål og formulerte hypoteser kan ses i sammenheng med det Skovsmose (2001) referer til som undersøkelseslandskap.

Innenfor kategorien *matematisk visualisering* mener vi det i våre resultater kan observeres likheter med kategorien perseptuelt bevisskjema hos Harel og Sowder (1998). Spesielt i våre resultater innenfor matematisk visualisering er elevenes bruk av observasjon for å overbevise seg selv og andre. Våre tolkninger av resultatene i kategorien er at elevene "ser" av figuren at det må være slik hypotesen deres tilsier. At elevene ikke har et behov for å argumentere ytterligere mener vi kan være en følge av at elevene bare "ser" at hypotesen deres er sann, de benytter seg av matematisk visualisering. Videre observerer vi situasjoner der elevene benytter seg av mentale omdannelser av figuren for å argumentere for en gitt påstand. For eksempel benytter Mona og Line i situasjon 9 seg av speiling og bretting av en trekant for å argumentere for at trekantene er formlike.

Det at visualiseringsaspektet er så fremtreende i våre resultater mener vi kan ha en sammenheng med fokuset på geometri i studien. Med andre ord mener vi figurer er et sentralt redskap for argumentasjon i arbeid med geometri. Fischbein (1993) omtaler objektene for undersøkelse i geometrisk resonnering som figurale begrep. I vårt datamateriale observerte elevene i situasjon 9 (figur 23) et tilfelle der skjæringspunktet mellom midtnormalene i en trekant lå på en av sidene i trekanten. Da elevene ut i fra figuren påpekte de figurale egenskapene, og i tillegg trakk fram begrepsmessige egenskaper ved situasjonen, mener vi objektet elevene undersøkte betraktes som et figuralt begrep (Fischbein). Dette mener vi videre er i tråd med Mariotti (1997, som sitert i Vincent, 2002) som påpeker at skjermbildet i et DGM representerer både de figurale og de begrepsmessige egenskapene til et matematisk objekt.

6.1.3 Deduktivt bevisskjema

Deduktivt bevisskjema består i vår studie av situasjoner der elever benytter deduktive argumenter for å argumentere for en påstand. Et funn i kategorien er at elevene benytter seg av tidligere etablert kunnskap som utgangspunkt i argumentasjonen. I forhold til oppgavene elevene arbeidet med, mener vi det er naturlig at elevene kunne klare å kjenne igjen forhold med de matematiske begrepene presentert der. Et eksempel på en oppgave hvor elevene i et tilfelle klarte å benytte seg av egenskaper ved et gitt begrep er oppgave 1 (oppgavehefte 1) der det er beskrevet at linje l er midtnormal til linjestykket *AB*. Elevene brukte der egenskapen ved midtnormalen som utgangspunkt for argumentasjonen.

I flere av situasjonene plassert i kategorien deduktivt bevisskjema framtrer elevene som målrettet, noe vi tolker som at elevene vet hva de ønsker å oppnå med argumentasjonen. Til tross for at elevene framstår som målrettet, klarer de ikke alltid å fullføre fullstendige formelle bevis. I følge Harel og Sowder (1998) vil det å lage og omdanne generelle mentale bilder, samt å lede omdannelsen mot en forklaring være nøkkelen i deduksjon. I forbindelse med et DGM kom det fram at elevene under deduktivt bevisskjema kun benyttet figurene i GeoGebra uten å endre på dem, det dynamiske aspektet spilte derfor ingen rolle i elevenes overbevisningsprosess i denne kategorien.

6.2 Analyseverktøyet

Studien utført av Harel og Sowder (1998) gir et nyansert bilde av elevers bevisskjema. Flere forskere (Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000; Marrdes & Gutiérrez, 2000) har latt seg inspirere av Harel og Sowder og benyttet seg av bevisskjemaene i sine studier av elevers argumentasjon. Vi mener derfor at Harel og Sowders bevisskjema gir et godt bilde på hva slags bevisskjema det er mulig å observere hos elever. Videre har vi, som en videreføring av Harel og Sowder, sett på elevers bevisskjema i et DGM, noe som har fått betydning for hvilke kategorier vi observerte.

I vår studie har vi observert mange av de samme kategoriene som Harel og Sowder (1998) presenterer, noe vi anser som naturlig ut i fra Harel og Sowders representative elevutvalg. Vi mener av den grunn vårt tilpassede analyseverktøy har fungert godt til å kategorisere elevgruppers bevisskjema i ulike situasjoner. Til tross for at vi har sett på elevers bevisskjema der elevene arbeider i grupper kan alle våre kategorier plasseres under hovedkategoriene eksternt, empirisk og analytisk bevisskjema. Dette mener vi indikerer at analyseverktøyet passer like godt for å studere en gruppes bevisskjema som et individs. At bevisskjema omslutter både individet og samfunnet individet deltar i kan observeres i Harel og Sowders (2007) definisjon av bevisskjema. Vi vil derimot påpeke at å studere en elevgruppes bevisskjema er utfordrende, ettersom både individet selv og deltakerne i en gruppe kan inneha ulike bevisskjema. Det var dermed vanskelig å få grep om hvilket bevisskjema som var dominerende innenfor de ulike situasjonene. Problemet løste vi ved å plassere samme situasjon innenfor flere ulike kategorier.

Gjennom en kvalitativ studie har vi sett på R1-elevers bevisskjema i ulike situasjoner der GeoGebra var tilgjengelig for elevene. Resultatene våre indikerer at elevene i hovedsak benytter seg av empiri for å overbevise seg selv og andre om sannheten av en matematisk påstand. Slik vi ser det kan det være flere faktorer som spiller inn for å forklare at empirisk bevisskjema var det vi observerte mest av i resultatene. For eksempel kan en faktor være elevenes alder. I vår studie var elevene 17-18 år gamle, mens Harel og Sowder (1998) i hovedsak har sett på studenter som fordyper seg i matematikk ved College[11]. Våre elever er dermed en del yngre enn elevene Harel og Sowder studerte. En annen faktor kan ha vært at vi undersøkte bevisskjema kun innenfor temaet geometri. Harel og Sowder har undersøkt elever som arbeidet innenfor både tallteori, geometri, lineær algebra og analyse. Som allerede nevnt i diskusjonen kan temaet geometri ha spilt en rolle i forhold til elevenes fokusering på det figurale. Til slutt vil vi nevne at elevenes tilgang til de ulike verktøyene i et DGM, for eksempel måling og dragging, kan ha spilt en rolle for den hyppige forekomsten av situasjoner som plasserte seg innenfor empirisk bevisskjema, da slike miljø ifølge Chazan (1993) gjør det enkelt å sjekke ulike hypoteser empirisk.

6.3 Studiens gyldighet og pålitelighet

Ifølge Gunnarson (2002) bør man i kvalitative studier alltid søke etter høy gyldighet og pålitelighet. I det følgende vil vi derfor presentere en drøfting av studiens gyldighet og pålitelighet, og hvilke tiltak vi har benyttet for å ivareta disse.

6.3.1 Gyldighet

Studiens gyldighet omhandler hvorvidt det man har funnet ut, er troverdig (Robson, 2002). Ifølge Thagaard (2003) er det viktig å informere informantene sine om hva studien omhandler. Samtidig påpeker hun at om man forteller for mye, er det en fare for at

[11] College tilsvarer høyskole eller universitet i Norge.

informantene blir påvirket av informasjonen og dermed opptrer utenom det normale. Vi valgte derfor å fortelle elevene at vi ønsket å observere geometriundervisningen deres og hvordan de snakket sammen i og om geometri. Midlertidig unnlot vi å fortelle elevene at vi spesifikt skulle observere deres argumentasjon i matematikk, i frykt for at elevene kunne henge seg for mye opp i det, og at datainnsamlingen på den måten ville blitt preget av elevenes kjennskap til studien.

En strategi vi benyttet for å ivareta gyldigheten av studien, var triangulering. Triangulering innebærer at man ser på den aktuelle situasjonen fra flere synsvinkler (Mertens, 2005). Trianguleringen vår bestod i at vi benyttet oss av observasjon, samt innsamling av skriftlig materiale fra elevene. At vi benyttet oss av lyd- og bildeopptak sammen med egen tilstedeværelse, i tillegg til observasjon i forkant av lyd- og bildeopptaket, er en strategi vi mener gir oss gode muligheter til å se på situasjonen fra flere synspunkt. Samtidig tilbyr lyd- og bildeopptak oss muligheten til å observere situasjonene om og om igjen, og i et variert tempo. At vi i tillegg samlet inn skriftlig datamateriale er med på å styrke gyldigheten av studien. Mye av det skriftlige datamaterialet var derimot ufullstendig, og noen av elevene leverte ikke inn noe. Dette gjorde materialet mangelfullt, men fortsatt nyttig for å få en bedre forståelse av elevene sin argumentasjon der det var mulig. Det kunne også ha vært nyttig for oss å intervjue elevene og lærerne i tillegg til observasjonen vi gjennomførte, men både tidsperspektivet og vår vurdering av datamaterialet, gjorde at vi valgte å ikke gjennomføre det.

I tillegg til triangulering fikk vi, gjennom at vi er to forskere, muligheten til å kryssjekke våre tolkninger og analyser fortløpende gjennom hele studien. En slik form for kryssjekking er ifølge Mertens (2005) med på å styrke studiens gyldighet. Vår kryssjekking ble utført ved at vi begge, for hver kategori av bevisskjema, plukket ut relevante episoder fra datamaterialet. Deretter satte vi oss sammen og diskuterte de ulike situasjonene som var plukket ut. Gjennom diskusjonen ble vi enige om en felles oppfatning, og hvor de ulike situasjonene passet best.

Hensikten med studien var å finne ut hvilke bevisskjema vi kunne observere i R1-elevers argumentasjon, samt å undersøke hvilke bevisskjema vi kunne se spor av det dynamiske programvaremiljøet. Studien hadde med andre ord ikke til hensikt å generalisere funnene til alle matematikklasser, men å få en dypere forståelse av elevgruppene vi studerte. Videre mener vi resultatene i studien kan overføres til andre lignende situasjoner ved at elever og lærere kan kjenne seg igjen i det som beskrives, og dermed bruke det til å utvikle sin egen undervisningspraksis.

6.3.2 Pålitelighet

Studiens pålitelighet omhandler hvorvidt måleinstrumentene benyttet i studien er pålitelige. I kvalitative studier er forskeren selv et instrument for datainnsamling (Robson, 2002). Våre meninger og vår bakgrunn kan dermed ha innvirkning på datainnsamlingen, samt på analysen av datamaterialet. Disse påvirkningene kan være med på å svekke påliteligheten til studien (Mertens, 2005). For å unngå at våre meninger og vår bakgrunn skulle ha noen merkbar innvirkning på studien, har vi under hele studien prøvd å holde oss så objektiv som mulig. At vi er to som forsker sammen har vært en fordel her, siden vi da under hele forskningsperioden har kunnet diskutere våre holdninger og meninger med hverandre, og på den måten bli mere bevisst på disse.

Som nevnt tidligere er tolkninger av datamaterialet kanskje den mest kritiske prosessen man foretar seg i en slik kvalitativ studie. I slike tolkninger er det vanskelig å være objektiv, og forskerens meninger og holdninger har lett for å skinne igjennom i teksten (Mertens, 2005). Tolkningen av datamaterialet er dermed en stor trussel for studiens pålitelighet. Tiltakene vi har gjort for å redusere denne trusselen er at vi gjennom hele rapporten tydeliggjør våre resultater og tolkninger ved å referere direkte til utdrag fra transkripsjonen.

Kapittel 7: Avslutning og perspektivering

I studien fokuserer vi på elevers evner til å argumentere i geometri, hvor de har tilgang til et DGM. For å besvare forskningsspørsmålet "*hvilke bevisskjema kan vi observere i R1-elevers argumentasjon i geometri"* med tilhørende delspørsmål "*i hvilke bevisskjema kan vi finne spor av det dynamiske geometrimiljøet*?" ble det samlet inn data gjennom observasjon i klasserommet og skriftlige ved elevenes skriftlige GeoGebra-filer. Datamaterialet ble transkribert og deretter analysert ved hjelp av vårt analyseverktøy basert på Harel og Sowders (1998) bevisskjema og Balcheff (1988) sine bevisnivåer. Harel og Sowders bevisskjema baserer seg på at det eksisterer tre ulike kilder til overbevisning hos elever; eksterne, empirisk eller analytiske. I studien observerte vi de fleste av Harel og Sowders bevisskjema i R1-elevenes argumentasjon i geometri. I tillegg fant vi i studien at DGMet spilte en vesentlig rolle under empirisk bevisskjema, og at vi dermed kunne utvide bevisskjemaene med kategorien *visuelle eksempel*. Innenfor denne kategorien fant vi at elevene benyttet seg av målinger og draggingtesten for å sannsynliggjøre sine hypoteser.

At vi ikke fikk muligheten til å gjennomføre en pilotundersøkelse før studien, har medført at vi i etterkant ser flere forbedringspotensialer med studien vår. Blant annet er ikke datamaterialet vårt egnet til å si noe om elevenes forestillinger om matematikk. Harel og Sowder (1998) påpeker at slike forestillinger er uatskillelig fra elevenes bevisskjema. I flere situasjoner mener vi det ser det ut til at elevene kan ha en forestilling om at matematikk er en samling sannheter. Tolkningen er basert på at vi observerte at våre elever søkte i læreverket etter løsningsmetoder, og var raske til å be om hjelp fra læreren. En slik forestilling kan ifølge Harel og Sowder medføre et lavt behov for å argumentere og bevise i matematikk, og at elevene dermed tyr til autoritære kilder for overbevisning. Med bakgrunn i det mener vi det kunne vært interessant å intervjue elevene om deres forestillinger om matematikk, og på den måten fått dypere innsikt i *hvorfor* vi observerte de ulike bevisskjemaene i klassen.

Under kategorien *visuelle eksempel* fant vi at elevene utforsket og formulerte hypoteser i samspill med et DGM. Videre mener vi det fra resultatene kan også tolkes at elevene benytter seg av målinger og draggingtesten for å overbevise seg selv og andre om sine hypoteser. For oss virket det som at elevene ble så overbeviste av de dynamiske egenskapene til figurene i DGMet at behovet for å bevise ved bruk av et formelt matematisk språk ikke syntes å oppstå. At elevene ikke føler et behov for å bevise formelt kan ses i sammenheng med forskning utført av Mariotti (2001). Hun fant i motsetning til oss at et DGM kan fremme elevenes behov for bevise sine matematiske hypoteser generelt.

Vår generelle tolkning av resultatene er at DGMet ikke fullstendig har funnet sin plass hos elevene vi studerte. Et eksempel på det er elevenes snevre bruk av draggingfunksjonen. Ved flere anledninger valgte for eksempel elevene å ikke benytte seg av dragging til tross for at de hadde tilgang til et DGM. Et eksempel her er kategorien matematisk visualisering hvor elevene bare benyttet figuren i skjermbildet uten å dra i den. Ifølge Mariotti (2009) har elevene i et DGM potensial til å konstruere matematisk kunnskap gjennom interaksjon med datamaskinen, da spesielt gjennom det medierende verktøyet draggingfunksjonen. For at elever skal bli i stand til å benytte seg av draggingfunksjonen til matematisk utforskning må den, i lys av et sosiokulturelt perspektiv på læring, først internaliseres hos brukeren. I vår studie observerte vi at elevenes bruk av dragging ikke alltid var meningsfull og konsekvent, noe vi mener kan tyde på at dragging som medierende redskap ikke var fullstendig internalisert hos våre elever. Draggingtesten derimot synes å være godt internalisert hos elevene, da det var denne vi observerte hyppigst brukt blant elevene i studien.

Et annet forbedringspotensial så vi i utviklingen av oppgaveheftene benyttet i studien. I følge Mariotti (2001) kreves det en spesiell form for undervisning for at elevene skal utvikle et behov for å sannsynliggjøre sine hypoteser. Våre generelle tolkninger av resultatene er at oppgaveheftene hadde innvirkning på hvilket bevisskjema elevene benyttet seg av i de ulike situasjonene. Hadas, Hershkowitz og Schwarz (2000) utførte en studie hvor de undersøkte om noen oppgavetyper fremmet mer deduktiv resonnering enn andre hos elevene i et DGM. Deres funn tilsier at overraskelser og usikkerhet i undervisningsaktivitetene førte til at elevene følte et behov for verifisering av matematiske hypoteser. Med bakgrunn i det foreslår Hadas et al. aktiviteter som innebærer konstruksjon og evaluering av argumenter hvor elevenes sikkerhet og forståelse utfordres. I tillegg hevder de at aktivitetene må legge opp til at elevene får bruke sin geometriske kunnskap til å forklare motsetningene og overvinne usikkerhetene. Med bakgrunn i det mener vi det kunne vært interessant å utføre en studie hvor problemstillingen hadde vært "*hvordan fremme et behov for argumentasjon i geometri?*"

Kapittel 8: Litteraturliste

Ayalon, M., & Even, R (2008). Deductive reasoning: In the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 235-247.

Azarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66-72.

Baccaglini- Frank, A, & Mariotti, M.A. (2010). Generating in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics . I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N., Leibniz L., & France, G. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitiation to a debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Lastet ned 3.mars 2011, http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/search/detailmini.jsp?_nfpb=true&_&ERICExtSeach_SearchValue_0=ED435644&ERICExtSearch_SearchType_0=no&accno=ED435644.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1-2), 23-40.

Chazan, D. (1993). High school geometry students` justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(7), 359-387.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. I R. Lehrer, & D. Chazan (Red.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (s. 369-393). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (s. 33-79). Oslo: Abstrakt forlag.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18, 24.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Gjone, G. (u.å.). *På terskelen til framtiden*. Lastet ned 25. mai 2011, fra *ncm.gu.se/pdf/namnaren/3335_83-84_2.pdf*

Gunnarsson, R. (2002). *Validitet och reliabilitet.* Lastet ned 21. mars 2011 fra www.infovoice.se/fou/bok/10000035.shtml.

Hadas, N., Herschowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The Role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 127-150.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, N. H. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hanna, G., & Jahnke, N. H. (1996). Proofs and proving. I A. J. Bishop, K. Clements, C., Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics education* (s. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students` Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. I J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubdinsky (Red.), *Research in collegiate mathematics education. III* (vol. 7, s. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, a project of the national council of teachers of mathematics* (vol. 2, s.805-842). San Diego, C: Information Age Publishing Inc.

Haugstrup, A., Juncher, H., Pedersen, S. F. P., Rauf, M. N., & Bryder, R. S.(2010). Den matematiske grundlagskrise. Lastet ned 14. april 2011, fra http://math.ananas.nu/vtmat/projekt.pdf

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). *Technical report on the nationwide survey: Justifying and proving in school mathematics*. London: Institute of Education, University of London.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 235-256.

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Moe, H., & Skrede, P. A. (2007). *Matematikk R1*. Otta: Aschehoug.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kries, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. TSG 16: *Research and development in the teaching and learning of calculus ICME 11*. Lastet ned 11. mars 2011, http://www.geogebra.org/publications/2008-ICME-TSG16-Calculus-GeoGebra-Paper.pdf.

Hove, I. (2011). *Undervisningsopplegg for R1, geometri skjæringssetningene*. Lastet ned 15. januar 2011 fra http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/R1%2C_R2_og_X#Geometri.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., Haugaløkken, O. K., Aakervik, A. O.(2006). *Samarbeid i skolen. Pedagogisk utvikling – samspill mellom mennesker* (4. utg.). Namsos: Pedagogisk Psykologisk Forlag.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, *64*(5), 291-314.

Kaufmann, G., & Kaufmann, A. (2009). *Psykologi i organisasjon og ledelse* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer based environment. I C. Mammana, & V. Villani (Red.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (s. 113-121). Dordrecht: Kluwer Academic.

Lave, J. (1999). Læring, mesterlære, sosial praksis. I J. Lave, & E. Wenger (Red.), *Situert læring og andre tekster* (s. 105-129). København: Hans Reitzels Forlag A/S.

Love, E. (1995). The functions of visualization in learning geometry. I R. Sutherland & J. Mason (Red.), *Exploiting mental images with computers in mathematics education*: *Proceedings of NATO advanced workshop* (s. 125-141). Berlin: Springer-Verlag.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), s.257-281.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. I A. Gutiérrez & P. Boero (Red.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (s.173-204). Rotterdam: Sense Publishers

Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427-440.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics 44*(1-3), 87-125.

Mellin-Olsen, S. (1990). Oppgavediskursen. I G. Nissen & J. Bjørneboe (Red.), *Matematikundervisning og demokrati. Initiativet vedrørende matematikkundervingingen* (s. 47-64). Roskilde: IMUFA, RUC.

Mertens, D.M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods* (2. utg.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Mathematics Illuminated. (2011). Geometries beyond Euclid. 8.4 spherical and hyperbolic geometry. Lastet ned 24. mai 2011, fra http://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/8/textbook/04.php.

Nelsen, R.G. (1993). *Proofs without words. Exercises in Visual Thinking*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

NESH - Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (1993). Lastet ned 22. mai 2011 fra http://www.etikkom.no/no/Forskningsetikk/Etiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/B-Hensyn-til-personer-5---19/.

Nyaumwe, L., & Buzuzi, G. (2007). Teachers` attitudes towards proof of mathematical results in the secondary school curriculum: The case of Zimbabwe. *Mathematics Education Research Journal, 19*(3), 21-32.

Robson, C. (2002). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers* (2. utg.). Oxford: Blackwell Publishing.

Oldervoll, T., Orskaug O., Vaaje, A., Hanisch, F., & Hals, S. (2007). *Sinus R1 Grunnbok i* matematikk. Oslo: Cappelen Forlag.

Olsrud, H. G. (2009). *Bevisets plass i norske læreplaner. En historisk oversikt og drøfting av matematiske bevis i videregående skole.* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Olivero, F. (2001). Conjecturing in open geometric situations using dynamic geometry: An exploratory classroom experiment. *Research in Mathematics Education, 3*(1), 229-246.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(2), 135-156.

Ottersen, E. (2007). Det viktigste er læring. I R. Mikkelsen & H. Fladmoe (Red.), *Lektor adjunkt-lærer. Innføringsbok for praktisk-pedagogisk utdanning* (s.204-116). Oslo: Universitetsforlaget.

Säljö, R. (2005). *Læring i praksis. Et sosiokulturelt perspektiv.* Oslo: Cappelen Akademiske

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 78*(6), 449-456.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.), *Kan det virkelige passe? Om matematikklæring* (s. 143-158). København: L&R Uddannelse.

Thagaard, T. (2003). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode* (2.utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 30*(2), 1-17.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk*. Lastet ned 13. april 2011 fra http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=168732&visning=5&sortering=2&kmsid=168738.

Venema, G. A. (2006). *Foundations of geometry*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

Vincent, J. L. (2002). *Mechanical linkages, dynamic geometry software, and argumentation: Supporting a classroom culture of mathematical proof*. Department of Science and Mathematics Education, University of Melbourne, Melbourne.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? I W. Zimmermann & S. Cunningham (Red.), *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes 19 (s. 1-7). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Vedlegg 1: Oppgavehefte 1

Undervisningsopplegg i Geometri R1

Oppgaveheftet: I dette heftet finner dere ulike samarbeidsoppgaver som dere skal løse i grupper ved hjelp av hverandre og GeoGebra. Dere skal samarbeide to eller tre i grupper, alt etter hva som passer dere best. Det er viktig at dere husker å begrunne alle svarene deres underveis, samtidig må dere pass på at dere hele tiden begrunner hvorfor det dere observerer er slik det ser ut til å være.

Vurdering: Dere leverer inn GeoGebra-filene elektronisk ved slutten av undervisningen.

Oppgave 1: ***Omsenter - Skjæringspunkt for midtnormaler i en trekant.***

1. Lag en vilkårlig trekant ABC i GeoGebra.

2. Sett på, ved hjelp av GeoGebra, hvor store vinklene er.

3. Konstruer midtnormalene til to sider i trekanten. Beskriv med ord hva som kjennetegner punktene på midtnormalen.

4. Sett inn et punkt, D, i skjæringspunktet for midtnormalene. (Tips: Bruk skjæringspunkt mellom to objekter.)

5. Konstruer midtnormalen til den tredje sida. Hva observerer dere? Dra i hjørnene på trekanten og se hva som skjer. Diskuter med hverandre og prøv å begrunne hvorfor det er slik som det ser ut til å være.

6. Dra i hjørnene slik at skjæringspunktet D flytter seg, og se på situasjoner der det ligger
   a) Inne i trekanten
   b) På en av sidene av trekanten
   c) Utenfor trekanten

7. Hva kjennetegner de trekantene dere får i hver av situasjonene a), b) og c) ovenfor? Beskriv og begrunn det dere ser.

8. Det kan se ut som at vi får en rettvinklet trekant når D ligger på en av sidene i trekanten. Begrunn hvorfor det er slik.

9. Se på en situasjon der D ligger på en av sidene i trekanten, for eksempel på AB. Pek på det motstående hjørnet til denne sida, C, og velg ”slå på sporing” på dette punktet. Dra i C slik at skjæringspunktet mellom midtnormalene hele tiden holder seg i ro på AB. Hva slags kurve ser C ut til å følge. Kan du begrunne hva slags kurve det blir?

10. Konstruer en sirkel med sentrum i D og som går gjennom et av hjørnene i trekanten.

11. Hva observerer dere? Diskuter med hverandre.

    Når det går en sirkel gjennom hjørnene på en trekant, sier vi at sirkelen omskriver trekanten, eller at trekanten er omskrevet av sirkelen. Skjæringspunktet for midtnormalene kalles trekantens omsenter.

Oppgave 2: ***Innsenter - Skjæringspunkt for vinkelhalveringslinjer i en trekant.***

1. Lag en vilkårlig trekant ABC i GeoGebra.
2. Sett ved hjelp av GeoGebra, på hvor store vinklene er.
3. Konstruer vinkelhalveringslinjene til to av vinklene i trekanten. Husk at dere må angi en vinkel med tre punkter. Du må markere punkt A, B og C for å få vinkel ABC.
4. Sett inn et punkt D, i skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinjene. (Tips: Bruk skjæringspunkt mellom to objekter.
5. Konstruer vinkelhalveringslinja til den siste vinkelen. Hva observerer dere? Dra litt i hjørnene på trekanten og se hva som skjer. Diskuter med hverandre og prøv å begrunne hvorfor det er slik det ser ut til å være.
6. Dra i hjørnene slik at skjæringspunktet D flytter seg, å se på situasjonen der det ligger
    a. Inne i trekanten
    b. På en av sidene i trekanten
    c. Utenfor trekanten
7. Hva kjennetegner de trekantene dere får i hver av situasjonene a), b) og c) ovenfor? Beskriv og begrunn det dere ser.
8. Konstruer normalen fra skjæringspunktet, D, og ned på en av sidene i trekanten. Kall skjæringspunktet mellom normalen og siden for E. Konstruer deretter en sirkel med sentrum i D som har radius DE. Dra i trekanten og beskriv hva dere observerer nå. Diskuter i gruppen.
9. Når en sirkel tangerer sidene på en trekant, sier vi at sirkelen er innskrevet i trekanten. Skjæringspunktet for vinkelhalveringslinjene kalles innsenter.
10. Forklar hvorfor vinkelhalveringslinjene må skjære hverandre i et punkt og at dette punktet vil være sentrum av den innskrevne sirkelen. (Tips: Hva er felles for alle punktene på en vinkelhalveringslinje?)
11. Vis at arealet av trekanten er gitt ved: $A_{trekant} = r(a+b+c)/2$
12. Konstruer omsenteret til trekanten. Vil innsenteret og omsenteret til trekanten noen gang falle sammen? Når? Begrunn svaret deres.

Oppgave 3: ***Ortosenter -Skjæringspunkt for høydene i en trekant.***

1. Lag en vilkårlig trekant i GeoGebra.
2. Konstruer høydene på to av sidene i trekanten. Marker 90º vinkler.
3. Sett inn et punkt, D, i skjæringspunktet for midtnormalene.
4. Konstruer høyden på den den tredje siden i trekanten. Hva observerer dere? Dra i hjørnene på trekanten og sjekk om observasjonene deres alltid gjelder. Diskuter med hverandre. Prøv å begrunne hvorfor det er slik som det ser ut til å være.

Skjæringspunktet mellom høydene i en trekant kalles ortosenter.

5. Finn ut når ortosenteret ligger inne i trekanten og når det ligger utenfor trekanten. Beskriv de ulike tilfellene. Kan ortosenteret ligge på sidekantene i trekanten eller i hjørnene? I så fall, når skjer det? Sett gjerne på vinkelmålene når du utforsker.
6. Hvorfor må alle høydene skjære hverandre i nøyaktig ett punkt? Diskuter med hverandre

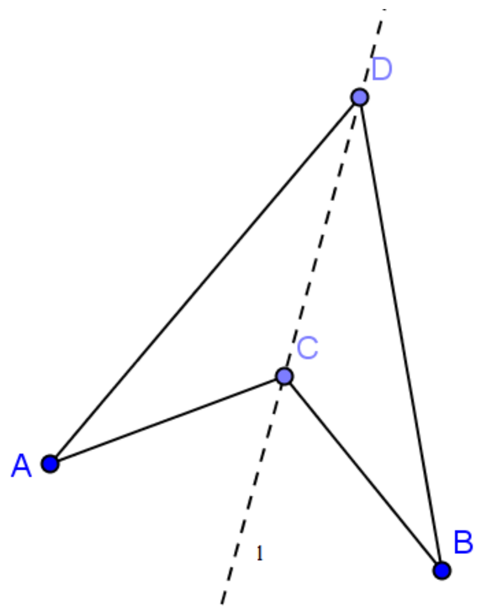
Oppgave 4: ***Tyngdepunkt -Skjæringspunkt for medianer i en trekant.***

1. Lag en vilkårlig trekant i GeoGebra
2. Konstruer midtpunktene på siden i trekanten. (D på AB, E på BC og F på AC)

En median i en trekant er et linjestykke fra et hjørne til midtpunktet på motstående side.

3. Lag de 3 medianene i trekanten.
4. Hva observerer dere? Dra litt i hjørnene på trekanten og sjekk om observasjonene deres alltid gjelder. Prøv å begrunne hvorfor det er slik det ser ut til å være.
5. Sett inn et punkt i skjæringspunktet for medianene. Kall punktet G.
6. Bruk GeoGebra til å undersøke forholdet mellom den lengste og den korteste delen av medianene. (Tips: Sett inn linjestykket AG og GE og regn ut AG/GE.)
7. Vis at skjæringspunktet mellom medianene deler medianene i forholdet 2:1 regnet fra hjørnene.

Vedlegg 2: Oppgavehefte 2



Undervisningsopplegg i geometri R1

- Oppgavene løses i grupper på to eller tre.
- Begrunn alle løsningene deres
- Lever besvarelsene i fronter

Oppgave 1)

På figuren er l midtnormalen til linjestykket AB.

Punktene C og D ligger på l. Begrunn hvorfor $\Delta ACD \cong \Delta BCD$?

Oppgave 2)

a) Kan du konstruere en rettvinklet trekant der alle sidene er like lange. Begrunn svaret ditt.

b) Er det mulig at to eller flere forskjellige trekanter kan oppfylle kravene gitt i en oppgave. Begrunn svaret ditt.

Oppgave 3)

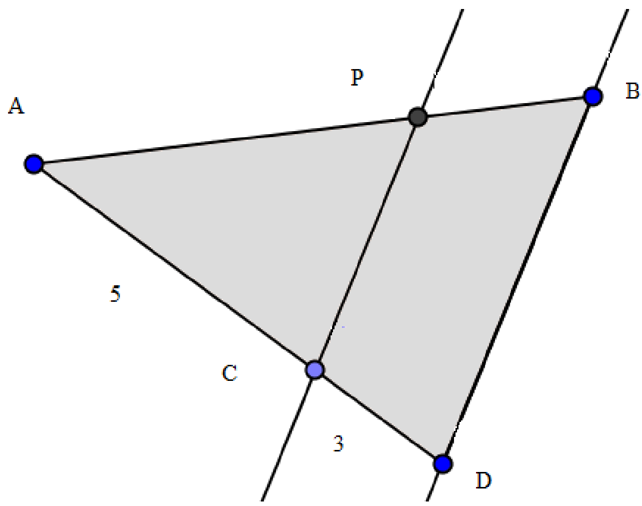
a) Analyser og utfør konstruksjonen av en trekant ABC, der AB=7cm, AC=5cm og $\angle B=30^0$.

b) Gi eksempler for et krav som ville ført til bare en løsning på oppgave a.

c) Regn ut den ukjente siden og de ukjente vinklene i løsningene fra oppgave a.

Oppgave 4)

På figuren er CP∥DB. Hva vil det si at to linjer er parallelle? Forklar at punktet P deler AB i forholdet 5:3.



Oppgave 5)

Konstruer ΔABC der $AB=10$, $BC=12$ og midtpunktet D på AC ligger slik at $BD=7$. (Hint: konstruer midtpunktet på AB).