NTNU
Det skapende universitet

Metakognisjon og generalisering

En studie om utfordringer og metakognitiv påvirkning i generaliseringsprosessen

Hilde Fossbakk

Master i lærerutdanning med realfag
Oppgaven levert: Juni 2010
Hovedveileder: Tine Wedege-Mathiassen, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne studien markerer avslutningen på mitt femårige studium, lektorutdanning i realfag, ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. Gjennom disse fem årene har jeg studert matematikk, kjemi, fysikk, biologi og ikke minst pedagogikk. Studien ble påbegynt i januar 2010, som oppfølging av en pilotundersøkelse gjennomført høsten 2009. De siste 5 månedene frem til juni har vært lærerike, og jeg har vokst både personlig og faglig gjennom arbeidet med studien.

Veilederen min gjennom studiet har vært Heidi Strømskag Måsøval, førsteamanuensis ved Program for lærerutdanning. Jeg vil takke for konstruktive råd og god veiledning. Ingen spørsmål har vært for store eller for små, og du har alltid vært tilgjengelig når jeg har hatt behov for veiledning. Du har vært en kilde til inspirasjon og entusiasme for fagdidaktikken, og vært en stor støtte gjennom arbeidet.

Jeg vil også takke mine medstudenter oppe i SB2-393 for god støtte og for et strålende studiemiljø. Det har vært en opplevelse å kunne dele studietiden med dere, og dere har bidratt til at de mest intense perioder i arbeidet med studien har vært utholdelige.

En varm takk rettes også til mine nærmeste som har stilt opp på ulike vis gjennom arbeidet med studien.

Trondheim, 1. Juni 2010

Hilde Fossbakk

Sammendrag

Målet med studien var å utvide perspektivet på elevers læring i algebra. Studien ble basert på følgende problemstilling: *Hvordan virker elever sin metakognisjon inn på løsning av generaliseringsoppgaver?* Gjennom en undersøkelse av elevers arbeid med generaliserings-oppgaver, ble det søkt å finne svar på hvilke utfordringer elever møter, og hvordan metakognisjon påvirker løsningsprosessen.

Utvalget i studien bestod av seks elever fordelt på to grupper. Selve undersøkelsen ble gjennomført i løpet av fire skoletimer med fastlagt undervisningsopplegg, basert på generaliseringsaktiviteter. Datamaterialet i studien ble samlet inn gjennom kvalitative metoder. Det anvendtes passiv deltakende observasjon av elevenes arbeid i timene, som utgjorde hovedvekten av datamaterialet. Semistrukturerte intervju og analyse av elevenes skriftlige arbeid bli i tillegg benyttet for å supplere observasjonsdataene. Analysene av datamaterialet ble gjennomført på grunnlag av fire nivåer i generaliseringsprosessen, samt veiledende metakognitive aktiviteter.

Resultatene fra studien indikerte at utfordringer elever møtte i arbeidet med generaliseringsoppgaver var å oppdage et nyttig mønster, samt å være i stand til å bruke det videre i løsningsprosessen. Elevene så også ut til å ha begrepsmessige utfordringer når de skulle verbalisere og symbolisere det matematiske innholdet i en generalisering. Resultatene indikerte også at metakognitiv regulering utvist av elevene sannsynligvis hadde en positiv effekt i alle stadier av løsningsprosessen.

Summary

The purpose of the study was to broaden the perspective on students learning in algebra. The study was based on the following research questions: *How does students' metacognition affect their process of solving algebraic generalization tasks?* By studying students while working with generalization tasks, the focus was on finding challenges students faced, and how metacognition affected their solving process.

The sample in the study consists of six students distributed in two groups. The study took place in the course of four sessions with a predetermined teaching plan based on generalization activities. The data was gathered through qualitative methods. Passive participation was used in the teaching sessions, which constitutes the main data. Semi-structured interviews and analysis of the students written work was used to supplement the main data. The analysis of the data was carried out on the basis of four levels of the generalization process and guiding metacognitive activities.

The results indicated that students faced challenges in their work with generalization tasks, regarding the discovery of useful patterns and to be able to apply these later on. In addition the students found certain terms challenging when they were to symbolize and verbalize the mathematical content in a generalization. Furthermore the results indicated that the metacognitive regulation done by the students themselves probably had a positive effect when they were solving problems.

INNHOLDSFORTEGNELSE

1 INNLEDNING

Mine erfaringer fra praksis gjennom lærerutdanningen kommer fra både mellomtrinnet og den videregående skolen. Jeg har også undervist enkelte vikartimer både i grunnskolen og forkurs i ingeniørutdanningen på høgskolen. Jeg har erfart at mange elever, spesielt på mellomtrinnet, synes emnet algebra er vanskelig. Det samme har jeg erfart med emnet funksjoner. Jeg har truffet studenter fra 8.trinn og opp til forkurs i matematikk på høgskolen som synes funksjoner er komplisert. Det har gitt meg et inntrykk av at det er mye pugging av regler og etterfølgende reproduksjon av den innlærte kunnskapen, noe som får meg til å anta at elevene har lite forståelse innenfor algebra og funksjonslære. Jeg ser på algebra som grunnlaget til forståelse for funksjonslære, og jeg tror at dersom man ikke har den grunnleggende forståelsen innenfor algebra, vil det by på utfordringer når man jobber med funksjoner. Jeg tror generaliseringsoppgaver, spesielt mønstergeneraliseringer, kan gi en alternativ og mer kreativ introduksjon til funksjonslære. Å gi elevene figurmønstre å jobbe med fremfor tabeller og formler, tror jeg kan gi en alternativ innfallsvinkel til algebra og funksjonslære for enkelte elever, og slik være svært nyttig.

I studien fokuserer jeg på hvordan elever i ungdomsskolen jobber med generaliserings-oppgaver. Jeg vil nærmere bestemt se på det metakognitive aspektet ved elevenes arbeid. Jeg ser på hvilke metakognitive strategier elever tar i bruk for å løse generaliseringsoppgaver, og hvordan strategiene påvirker selve løsningsprosessen. Jeg mener at en viktig del av læreryrket bør bestå i å kunne legge til rette for alternative innfallsvinkler og løsningsmetoder for elever. Med dette følger det å ha kjennskap til elever sine ulike forutsetninger for å lære, samt tilrettelegging av undervisning. Jeg anser det som vikig å gjøre elevene i stand til å bli bevisst på egen læring, og å utruste elevene med de verktøy som fremmer mer reflektert og selvstendig arbeid i skolen. Derfor mener jeg at også elever sin metakognisjon, og utvikling av metakognisjon, bør tas hensyn til av lærere. Goos, Galbraith og Renshaw (2002) og Lester (1994) påpeker at til tross for at metakognisjon nå har blitt et anerkjent og viktig tema innenfor matematikkdidaktisk forskning, er det en minkende interesse for temaet. Det er fortsatt mye innenfor metakognisjon som er lite forsket på. For eksempel er det lite forskning på læreren sin rolle i forhold til utvikling av elever sin metakognisjon og metakognitive evner (Lester, 1994). Man ser det derfor som nødvendig å kartlegge ulike metakognitive strategier. Senere har man mulighet til å benytte dette som et verktøy for å gjøre lærere i stand til å tilrettelegge undervisningen elever basert på de ulike strategiene elever har (Lester, 1994). Metakognisjon spiller en kritisk rolle i suksessfull læring. Livingston (2003) påpeker også at det derfor er viktig å studere metakognitiv aktivitet og utvikling, slik at man bedre kan tilrettelegge for at elever anvender sine kognitive evner gjennom metakognitiv kontroll. Ifølge Schraw (1998) blir metakognisjon ofte inndelt i to deler: metakognitiv kunnskap og metakognitiv regulering. Jeg vil i studien ta utgangspunkt i det jeg anser som de mest sentrale metakognitive aktivitetene beskrevet i litteraturen og underkategorier av disse: planlegging, overvåkning, refleksjon og diskursivitet (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007; Schraw, 1998; Stillman & Galbraith, 1998).

Tradisjonelt sett består algebra i skolen hovedsakelig av likningsløsning, forenkling av algebraiske uttrykk og manipulering av variabler (Stacey & MacGregor, 2001). De mest kjente karakteristika når man snakker om algebra er bruken av bokstaver som uttrykk for ukjente tall og størrelser. En annen mindre vektlagt karakteristikk ved algebra, er evnen til å gjøre generaliseringer ved hjelp av en slik notasjon (Amit & Neria, 2008; Stacey & MacGregor, 2001). Polya (1957) definerer generalisering som en prosess der man går fra antakelsen om en begrenset mengde til antakelsen om en mer omfattende mengde. Mason (1996) hevder at lærere må være oppmerksomme på generaliseringens natur i matematikken. At elever jobber med generalisering er nødvendig for at matematisk tenkning i det hele tatt skal ta plass i klasserommet (Mason, 1996). Lee (1996) har utviklet tre kategorier som hun benytter til å analysere elever sine løsninger på generaliseringsproblemer. Kategoriene er oppfatningsnivået, verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået. I tillegg vil jeg i min studie bruke en fjerde kategori, analyseringsnivået, motivert av Lee og Wheeler (1987, som sitert i Lee, 1996). I studien vil de fire kategoriene brukes til å avdekke elever sine metakognitive strategier i arbeid med generaliseringsoppgaver. Kategoriene blir så knyttet opp mot metakognitive aktiviteter elevene benytter seg av i løsningsprosessen.

Forskning har vist at flertallet av elever opp til 15-års alderen har vansker med å tolke algebraiske uttrykk, og med å forstå begreper som konstanter og variabler (MacGregor & Stacey, 1997). Slike vanskeligheter henger sammen med en nødvendighet for kognitiv utvikling i faget algebra (MacGregor & Stacey, 1997). Montague og Bos (1990) refererer til flere undersøkelser som viser at elever med lærevansker har metakognitive utfordringer når det gjelder å velge, bruke og kontrollere strategier for å løse matematiske problemer. Derimot viser flere studier beskrevet av Schraw (1998) en signifikant økning i regulerende metakognitive ferdigheter og forståelse for bruken av disse når de blir inkludert i undervisningen. Lannin, Barker og Townsend (2006) gjennomførte en studie som fokuserte på algebraiske generaliseringsstrategier, og faktorer som påvirket elevenes strategivalg. De fant at elever sine kognitive strukturer er en påvirkende faktor når elevene velger fremgangsmåter i arbeid med generaliseringsoppgaver. Når elever bruker ulike strategier kan de møte situasjoner der de inneværende kognitive strukturene blir utfordret, noe som kan føre til strategiendring (Lannin, et al., 2006).

Sasman, Olivier og Linchevski (1999) utviklet en studie med elever fra mellomtrinnet der elevene skulle løse generaliseringsoppgaver med varierende bruk av representasjonsmåter. Studien viste at elever stort sett fokuserte på det numeriske aspektet ved oppgavene og ikke på det figurative. Elevene viste seg også å foretrekke rekursive løsningsmetoder som resulterte i feil bruk av blant annet proporsjoner. Orton og Orton (1999, sitert i Barbosa, Palhares, & Vale, 2007) gjennomførte en studie på lineære og kvadratiske mønstre med elever på 10 til 13 år. Studien avdekket manglende aritmetisk kompetanse og et sterkt fokus på rekursive metoder som de største utfordringene elevene møtte. Med aritmetisk kompetanse menes elever sin kompetanse i å gjennomføre elementære operasjoner på tall og størrelser.

1.1 Forskningsspørsmål

Formålet med studien er å utvide mitt perspektiv på elever sin læring i matematikk. Ved å få en dypere innsikt i elever sin metakognisjon, gir det en mulighet til å tilrettelegge undervisningen bedre, og man kan se på hvilke områder elever har behov for hjelp og støtte.

Det leder meg til følgende problemstilling:

Hvordan virker elever sin metakognisjon inn på løsning av generaliseringsoppgaver?

For å undersøke problemstillingen nærmere har jeg formulert to forskningsspørsmål:

Hvilke utfordringer møter elever i generaliseringsprosessen?

Hvordan påvirker elever sitt metakognitive arbeid løsningsprosessen?

Min studie faller innenfor et kvalitativt forskningsdesign. Kvalitativ forskning er en situert aktivitet der forskeren plasseres i virkelige omgivelser, og tolkning og beskrivelser av omgivelsene står i sentrum (Mertens, 2005). Kvalitative studier er ment til å oppnå en dypere forståelse eller detaljert beskrivelse av et emne, og i min studie er fokuset på elever sitt metakognitive arbeid (Mertens, 2005).

I studien valgte jeg å benytte meg av klasseromsobservasjon og intervju. Jeg la fokuset på to grupper med tre elever, og filmet elevene gjennom fire timer med oppgaveløsning. Jeg valgte å benytte meg av et håndholdt kamera, samt en diktafon, for å få et innblikk i hvordan elevene jobbet med oppgavene. Her fikk jeg utfyllende data om elever sine arbeidsmåter og tanker omkring oppgavene, samtidig som jeg fikk mulighet til å se på det skriftlige arbeidet parallelt med samtaler og diskusjoner. Etter timen med oppgaveløsning ble elevene i den observerte gruppen tatt inn enkeltvis til intervju. Spørsmålene fokuserte på oppgavene og hvordan elevene løste disse. De ble basert på elevenes skriftlige arbeid som ble samlet inn etter oppgaveøkten. Ifølge Robson (2002) gjør studiens fokus på elever sine oppfatninger og tanker, at intervju er en god forskningsmetode.

1.2 Oppbygging

Kapittel 2 beskriver det teoretiske grunnlaget studien bygger på. Her blir studien først knyttet opp mot aktuelle perspektiv på kunnskap og læring. Deretter blir begrepet metakognisjon gjort rede for og en sammenfatning av viktige metakognitive aktiviteter blir gitt. Til slutt i kapittelet redegjøres det for begrepet generalisering, og fire sentrale nivåer for arbeid med generaliseringsoppgaver blir presentert. Kapittel 3 beskriver metodene som er brukt i studien. Her redegjøres det for valg av metode, samt at erfaringer fra en pilotstudie presenteres. Videre presenteres intervjuguiden og en beskrivelse av utførelsen av undersøkelsen. Avslutningsvis i kapittel 3 presenteres metodekritikk. Det analytiske rammeverket blir beskrevet i kapittel 4. Her blir det gitt en oversikt over analyseverktøyet, og utførelsen av dataanalysen beskrives. I kapittel 5 blir resultatene og analysene fra studien presentert. Resultatene for to ulike elevgrupper beskrives og analyseres. Det blir i kapittel 6 diskutert resultatene i studien. Konklusjon presenteres og perspektivering av studien redegjøres for i kapittel 7.

2 Teoretisk grunnlag

I det følgende kapittelet beskrives det teoretiske grunnlaget for studien. Kapittelets første del tar for seg læringsperspektivet som danner studien sitt utgangspunkt for læring og kunnskap. I den andre delen tar jeg for meg begrepet metakognisjon og de ulike komponentene som utgjør metakognisjon. Den tredje delen beskriver generalisering, og ulike aspekter ved dette begrepet.

2.1 Perspektiv på kunnskap og læring

Det finnes flere ulike perspektiv på læring og kunnskap. Min studie dreier seg om elever sin metakognisjon i samarbeid med andre elever. På bakgrunn av fokuset på elever sine tankeprosesser i en sosial setting, blir det vanskelig å plassere studien min i ett enkelt perspektiv. Jeg velger derfor å ta utgangspunkt i kognitiv læringsteori, men tar også sosiokulturell teori i betraktning.

Læringsteorier fungerer som en del av læreren sin generelle bevissthet om elevenes tankeverden (Imsen, 2008). Læreren sin oppgave er å legge til rette for og stimulere elevenes læring og utvikling. Imsen påpeker at det er viktig for en lærer å forstå hvor kompliserte indre, kognitive prosesser kan være. Begrepet kognitiv dreier seg om intellektuelle funksjoner hos mennesker (Vygotskij & Cole, 1978). Her er læring, hukommelse, tenkning og problemløsning sentralt. Kognitiv psykologi er opptatt av indre, høyere mentale prosesser, og spørsmålet blir dermed hvordan hjernen organiserer kunnskap, hva som skjer når vi husker, tenker, løser problemer og lignende (Vygotskij & Cole, 1978). Det kognitive synet på læring er at det er en indre prosess. Læring er en aktiv konstruksjonsprosess der elever tar imot informasjon, tolker den, knytter det opp mot eksisterende kunnskap, og dersom det er nødvendig, reorganiserer de mentale strukturene for å legge til rette for ny kunnskap (Vygotskij & Cole, 1978). Kognitiv læringsteori er mest opptatt av kunnskap som kan omsettes til symboler, bilder, språk, begreper og abstraksjoner. På grunnlag av dette synet vil kognitiv teori oppfattes som mer relevant i skolesammenheng enn for eksempel behavioristisk teori (Imsen, 2008). Studien tar utgangspunkt i et fokus på det metakognitive aspektet ved elevenes arbeid. Den kognitive teorien beskriver i denne studien, elevene sine indre mentale prosesser i løsning av generaliseringsoppgaver, og ser på kunnskapen elevene tilegner seg i form av oppfatninger, verbaliseringer og symboliseringer.

Dysthe (2001) skriver at kritikk av kognitivismen har oppstått på grunn av et ensidig individsentrert perspektiv, og en tendens til å fokusere kun på den mentale siden ved læring. I min studie er hovedfokuset på elever sine metakognitive aktiviteter. En annen vesentlig del er også det sosiale aspektet ved å jobbe i grupper. I ren kognitiv teori blir de sosiale sidene ved undervisning og læring bare sett på som viktige for å støtte opp om den enkeltes læring (Vygotskij & Cole, 1978). Dysthe (2001) nevner at sentrale elementer i sosiokulturelle tilnærminger innenfor læringsteori er interaksjon og samhandling. Læring i et sosiokulturelt perspektiv dreier seg om mellommenneskelige relasjoner, og læring skjer gjennom deltaking og samspill med andre. Kunnskap blir dermed konstruert gjennom praktisk aktivitet der en gruppe mennesker samhandler innenfor et kulturelt fellesskap (Dysthe, 2001). Den sosiokulturelle læringsteorien beskriver i denne studien elevenes læringsprosess i samspill med andre elever, og ser på kunnskapen elever tilegner seg som et resultat av samspillet mellom elevene.

2.2 Metakognisjon

Forskjellen mellom kognisjon og metakognisjon ligger i at kognitive egenskaper er nødvendige for å gjennomføre en oppgave, mens metakognisjon er nødvendig for å forstå hvordan en oppgave blir gjennomført (Schraw, 1998). Den enkleste definisjonen av metakognisjon er ifølge Livingston (2003) ”tenkning om tenkning”. Til tross for at begrepet metakognisjon har eksistert i flere tiår, og begrepet har eksistert så lenge mennesket har vært i stand til å reflektere over sine egne kognitive prosesser, så er det ingen enkel sak å definere. Det er og har lenge vært stor debatt om hva metakognisjon egentlig betyr. Garofalo og Lester (1985) mener at en grunn til dette kan være at begrepet metakognisjon består av to ulike, men beslektede aspekter: kunnskap og oppfatning om kognitive fenomen, og regulering og kontroll over kognitive aktiviteter. Livingston (2003) mener årsaken til dette kan ligge i at det er mange begreper som i dag brukes for å beskrive det samme grunnleggende fenomenet eller aspektene ved metakognisjon. Begreper som selvregulering, overordnet kontroll eller meta-hukommelse brukes stadig om hverandre i litteraturen. Det grunnleggende bak alle disse begrepene er fokuset på overordnede prosesser i overvåkning og regulering av kognitive prosesser (Livingston, 2003). Altså handler det om tenkning om tenkning.

Vi aktiviserer oss gjennom metakognitive aktiviteter hver eneste dag. Metakognisjon gjør oss til høyt presterende elever, og mange har assosiert metakognisjon med intelligens (Alexander, Johnson, Albano, Freygang, & Scott, 2006; Garofalo & Lester, 1985; Livingston, 2003). Skemp (1987) sammenligner begrepet metakognisjon med reflekterende intelligens. På det reflekterende nivået blir mentale prosesser gjenstand for introspektiv bevissthet. Man må reflektere over løsningsmetoder og bruken av disse. På samme måte beskriver Livingston (2003) at metakognisjon består av høyere ordens tenkning som innebærer en aktiv kontroll over de kognitive prosessene som skjer under læring. Reflekterende aktivitet innebærer at man blir oppmerksom på ens egne begreper og skjema[1], oppfatter strukturen og sammenhengen mellom disse, og deretter manipulerer dem på forskjellige måter (Skemp, 1987).

Man kan se et overordnet skille mellom to sider av begrepet metakognisjon. På den ene siden dreier begrepet seg om kunnskap om sin egen og andres kognisjon. På den andre siden dreier det seg også om en slags regulering av sin egen kognisjon. John Flavell (1979, som sitert i Livingston, 2003) beskriver metakognisjon som bestående av to deler: metakognitiv kunnskap og metakognitiv regulering. Metakognitiv kunnskap refererer til en ervervet kunnskap om kognitive prosesser. Kunnskapen kan så brukes til å kontrollere de kognitive prosessene, som utgjør metakognitiv regulering (Livingston, 2003). I studien tar jeg utgangspunkt i metakognitiv regulering. I de følgende avsnittene går jeg dypere inn på det regulerende aspektet ved metakognisjon.

2.2.1 Metakognitiv regulering

Metakognitiv regulering inkluderer en mengde aktiviteter som hjelper elever med å kontrollere egen læring. Den innebefatter strategiske aktiviteter og avgjørelser man tar mens man jobber med en oppgave. Slike aktiviteter kan være å planlegge fremgangs-

---

[1] Med skjema mener Skemp (1987) en gruppe begreper som hver har blitt dannet gjennom abstrahering av invariante egenskaper fra sensoriske oppfatninger eller fra andre begreper. Begrepene er koblet sammen gjennom relasjoner.

måter, velge fremgangsmåter som øker forståelsen for problemet, evaluere strategier og fremgangsmåter, overvåke fremgangsmåter, og forlate en strategi eller fremgangsmåte dersom det er nødvendig (Garofalo & Lester, 1985). Ifølge Schraw (1998) forbedrer metakognitiv regulering prestasjoner på en rekke måter. Elever blir flinkere til å regulere sitt eget fokus og sin egen oppmerksomhet på en nyttig måte, de får bedre nytte av eksisterende strategier, og de får en større bevissthet knyttet til brudd i forståelsen (Schraw, 1998). Schraw nevner også at det er flere forskningsrapporter som viser en signifikant forbedring i læring når regulative egenskaper og forståelse av hvordan disse best kan brukes er en del av klasseromsundervisningen. Han påpeker at sannsynligvis ved å forbedre ett aspekt ved den metakognitive reguleringen, så forbedres også andre.

2.2.2 Fire metakognitive aktiviteter

Cohors-Fresenborg og Kaune (2007) har utviklet et system for å kategorisere metakognitive aktiviteter som skjer i klasserommet. De har fokusert spesielt på situasjoner der det er diskusjoner mellom flere elever om matematikkoppgaver. Systemet består av fire kategorier: planlegging, overvåkning, refleksjon og diskursivitet[2]. Innenfor hver av kategoriene lister de opp ulike metakognitive aktiviteter som er sentrale. De tre første kategoriene er planlegging, overvåkning og refleksjon (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Schraw (1998) har en lignende måte å organisere metakognitiv regulering, og bruker også begrepene planlegging, overvåkning og refleksjon. Jeg vil bruke Schraw til å utfylle Cohors-Fresenborg og Kaunes (2007) tre første kategorier. Den siste kategorien fra Cohors-Fresenborg og Kaunes er *diskursivitet,* som dreier seg om diskusjoner i klasserommet. Jeg ser på elevenes metakognitive arbeid når de jobber sammen i grupper, og ser det som nødvendig å inkludere diskursivitet for å ha et mer utfyllende syn på det metakognitive aspektet i samarbeidsgrupper. Begrepene planlegging, overvåkning, refleksjon og diskursivitet blir beskrevet nærmere i de to følgende avsnittene.

---

[2] Min oversettelse, discursivity.

Metakognisjon er, som nevnt tidligere, et vidt begrep. Man har derfor sett det som nødvendig å se på ulike komponenter når man analyserer metakognitiv aktivitet. Analyser av metakognisjon er ofte basert på en situasjon der et matematisk problem skal løses. Her vil *planlegging* av problemløsningsprosessen, og hvilke mål som er til stede, være en sentral komponent (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Planlegging involverer også valg av passende verktøy og strategier for å løse oppgaven, og disponering av ressurser som påvirker prestasjoner (Schraw, 1998). Bruken av verktøy må på sin side kontrolleres, og hvor langt i løsningsprosessen man har kommet må vurderes og sammenlignes mot de målene som skal oppnås. Slike kontroller og vurderinger blir kalt *overvåkning* (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Det inkluderer også en oppmerksomhet mot forståelse for og utførelse av oppgaven. Schraw (1998) nevner i sin artikkel forskning som har vist at evnen til slik overvåkning utvikles sakte både hos barn og voksne, men at den forbedres med trening. Et godt eksempel på overvåkning er periodisk testing av seg selv og fremgangen underveis i læringsprosessen (Schraw, 1998). *Refleksjon* omkring forståelse av problemet og tilhørende begreper er også en vesentlig komponent når det gjelder metakognisjon (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Schraw (1998) nevner at her er det viktig å vurdere produktene man har og effektiviteten i ens læring.

I tillegg til de tre komponentene nevnt ovenfor består også Cohors-Fresenborg og Kaunes (2007) system av en siste komponent, som dreier seg om diskusjoner i klasserommet. Et mål med metakognisjon er å vurdere kvaliteten på representasjoner som et produkt fra en ide, eller å ta utgangspunkt i andre elever sine representasjoner og vurdere fremgangsmåten baklengs fra representasjon til ide (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). *Diskursivitet* er karakteristisk for diskusjoner med slikt innhold. Cohors-Fresenborg og Kaune påpeker at målet er en dypere forståelse for egne og andres tanker. Cohors-Fresenborg og Kaune gir ingen dypere forklaring på hva som menes med begrepet diskursivitet. Jeg forstår begrepet diskursivitet som en situasjon man er i der man har et språk for å diskutere matematisk. Jeg bruker begrepet likt som Mellin-Olsen (1990), og forklarer diskurs som både et språk og en praksis. Diskursive aktiviteter i min studie blir ulike aktiviteter der man tar i bruk det matematiske språket som et middel for å øke den matematiske forståelsen.

I tabell 1 har jeg sammenfattet de metakognitive aktivitetene som er presentert av Cohors-Fresenborg og Kaune (2007) og Schraw (1998), samt enkelte bidrag fra Stillman og Galbraith (1998). Aktivitetene er samlet under de fire kategoriene nevnt overfor: planlegging, overvåkning, refleksjon og diskursivitet. Disse vil utgjøre mitt videre utgangspunkt når jeg skal analysere datamaterialet i studien.

Planlegging	Overvåkning	Refleksjon	Diskursivitet
Planlegging av løsningsmetoder Lokale og globale strategier og metoder, trinnvis løsning	**Kontrollere beregninger** Lokal og global kontroll Avdekke egne og andres feil i beregninger og oppfatninger	**Refleksjon om begreper** Klassifisering av begrep og angi objekter til begrep	**Initiativtaking til diskurs** Avdekke misforståelser, presentere fakta, sjekke planer og strategier, sjekke forståelse av andres utsagn
Planlegging av mål og klargjøring av hensikt Identifisering av mål og klargjøring av delmål, evt. rekkefølge	**Kontrollere argumentering** Lokal og global kontroll av argumentering, og avdekking av feil i argumentering	**Bevissthet om metoder, matematiske verktøy og representasjonsmåte** Effekt av ulike verktøy, metode og rep.valg	**Videreformidling** Ta opp hovedmomenter, referere til tidligere utsagn som et utgangspunkt for ny diskusjon, forsikring av ment og sagt
	Kontroll av terminologi og notasjon	**Analyse av struktur, figur og matematisk uttrykk**	
	Kontroll og vurdering av fremgangsmåter og metoder	**Analyse av resonnering/diskurs** Vurdering av evt. motsigelser, endringer i synspunkt, begreper og resonnering, se tilbake	
	Vurdere løsning, rimelighet i svaret	**Refleksjon/ evaluering** Ens egne svake/sterke sider og handlinger	

Tabell 1: Metakognitive aktiviteter. Min tilpasning av kategorier inspirert av Cohors-Fresenborg og Kaune (2007), Schraw (1998), og Stillman og Galbraith (1998).

2.3 Generalisering

> *The most important operation of the mind is that of generalization* (C. S. Peirce i Radford, 2010, p. 38)

Generaliseringens rolle i matematikk kan ifølge Amit og Neria (2008) ikke overvurderes. NCTM standards[3] anmoder at algebraundervisning bør foregå med utforskning av mønstre, og at generalisering bør være et av hovedmålene i matematikkundervisning (Amit & Neria, 2008; MacGregor & Stacey, 1993). Kruetskii (1976, som sitert i 2008) klassifiserer generalisering som en av de høyere kognitive ferdighetene elever kan utvise når de lærer matematikk. Polya (1957) forklarer mange vitenskapelige oppdagelser som ”heldige generaliseringer”, og han påstår at generalisering er essensielt i utviklingen av matematisk kunnskap. Generalisering involverer blant annet abstraksjon, holistisk tenkning, visualisering, fleksibilitet og resonnering, som karakteriserer høyere ordens tenkning (Amit & Neria, 2008). En høyere ordens tenkning gjør, ifølge Amit og Neria, evnen til å generalisere til et trekk som er karakteristisk for høyt presterende elever og som skiller dem fra andre.

Mason (2005) mener at alle barn som begynner på skolen allerede har vist evner til å generalisere. Antakelsen Mason gjør, går ut på at generalisering er en naturlig fremgangsmåte mennesker benytter for å forstå verden. Algebra skaffer da til veie et symbolsystem og språk til å uttrykke og manipulere slike generaliteter. Ifølge Mason (1996) er generalisering selve kjernen i matematikk. I flere av sine arbeider presenterer Mason fire opphav og veier til algebra: uttrykke generaliseringer, muligheter og restriksjoner, reorganisere og manipulere, og generalisert aritmetikk. Å uttrykke generaliseringer er ifølge Mason av stor betydning fordi det så ofte blir oversett i undervisningen. Bruken av algebra til å løse problemer avhenger av trygghet i uttrykk av generaliseringer. Mason sier at dersom man har utviklet trygghet i å uttrykke

[3] National Council of Teachers of Mathematics

generaliseringer og å lage flere uttrykk for det samme tilfellet, følger også dyktighet i bruk og manipulering av generaliseringer.

2.3.1 Hva er generalisering?

Det finnes flere ulike definisjoner på begrepet generalisering i matematikkdidaktisk forskning. Enkelte definisjoner er veldig avgrensede og konkrete, mens andre er bredere og mer åpne. Generalisering har blant annet blitt knyttet til begreper som matematisk induksjon, transfer[4] og abstraksjon (Ellis, 2007; Mitchelmore, 2002; Radford, 2010). Studier har sett på generalisering som utvikling av matematiske regler, eller kommunikasjon og resonnering med fokus på bakenforliggende strukturer, prosedyrer og relasjoner (Ellis, 2007).

Ellis (2007) beskriver et overordnet skille mellom generalisering som oppdagelse av strukturer og likheter, og som dannelse av generelle regler og formler. Mitchelmore (2002) har gjennom analyse av matematikkdidaktisk litteratur beskrevet begrepet generalisering i tre kategorier der han ser på generalisering som en abstraksjon, utvidelse av begreper og konstruksjon av et algebraisk uttrykk. Ellis (2007) sin generaliseringstaksonomi inkluderer også ulike typer generaliseringer, som elever konstruerer når de resonnerer algebraisk. Ellis definerer generalisering som å inkludere minst en av tre aktiviteter: identifisering av likheter mellom flere tilfeller, utvidelse av resonnering utenfor dets opphavssted, og utledning av bredere resultater fra spesifikke tilfeller. I de følgende avsnittene beskrives generalisering i tre kategorier, med bidrag fra ulike forskere sine syn. Kategoriene er ikke gjensidig utelukkende. Det vil si at de er overlappende og flere av bidragene kan høre hjemme i mer enn en kategori.

Generalisering som gjenkjenning av likheter

Mange forskere bruker generalisering synonymt med begrepet abstraksjon, som beskriver Mitchelmores (2002) første kategori. Definisjoner innenfor denne kategorien beskriver generalisering som å finne felles egenskaper i en mengde objekter, også kalt similaritetsgjenkjenning. Ifølge Kaput (1999) er generalisering en iboende kraft i

[4] Overføring av kunnskap lært i en situasjon til en annen situasjon (Ellis, 2007, s. 197).

matematisk aktivitet og tenkning, og er en del av det som gjør aktivitet og tenkning matematisk. Generalisering innebærer en bevisst utvidelse av resonnering eller kommunikasjon utover tilfellet eller tilfellene som blir betraktet. Det innebærer også en eksplisitt identifisering og klargjøring av likheter over flere tilfeller. Når man generaliserer løfter man resonnering og kommunikasjon til et nivå der fokuset er flyttet fra de spesifikke tilfellene over til mønstre, prosedyrer, strukturer og relasjoner mellom disse (Kaput, 1999).

Generalisering som prosess

Det er flere beskrivelser av generalisering der fokuset er på selve prosessen bak generaliseringen (Ellis, 2007; Mitchelmore, 2002). Ifølge Mason (1996) er generalisering et middel for å utvide fokuset fra referansepunkter og applikasjon av et resultat, for så å plassere resultatet i en bredere kontekst uten restriksjoner fra spesifikke tilfeller. Mitchelmores (2002) har en beskrivelse av generalisering som en ekspansjon av kunnskap. Mitchelmores andre kategori beskriver generalisering som en utvidelse[5] av allerede eksisterende begreper. En utvidelse kan skje når man finner nye kontekster der det eksisterende begrepet gjelder, for eksempel når en elev aksepterer en rombe til å være en firkant, selv om han bare har sett kvadrater og rektangler tidligere. En utvidelse kan også skje når en mengde matematiske objekter med en likhet blir innkapslet i en større mengde basert på en annen likhet. Et eksempel her kan være mengden med hele tall (**Z**) som også kan inngå under klassen reelle tall (**R**).

Ellis (2007) beskriver også en form for generalisering som har fokus på handlingene ved generalisering. Ellis sin *handlingsgeneralisering* beskriver tre handlinger som oppstår når man generaliserer. Den første er å danne en assosiasjon mellom flere oppgaver man har jobbet med. Elever husker og gjenskaper tidligere oppgaver og relaterer disse til en nåværende oppgave. Den andre kategorien er å lete, som beskriver blant annet det man gjør når man utfører beregninger eller ser etter mønstre for å finne elementer med like egenskaper. Her er fokuset på sammenhenger, prosedyrer eller mønstre. Leting kan også knyttes opp mot Mitchelmores (2002) første kategori som

[5] Min oversettelse, fra *extension.*

beskrev similaritetsgjenkjenning. Den siste handlingen beskrevet av Ellis (2007) innebærer at elever utvider mønstre, sammenhenger eller regler de har funnet til en mer generell struktur. Her utvider man resonneringen utenfor det aktuelle problemet til en mer vidstrakt kontekst, noe som kort oppsummer Mitchelmores (2002) andre kategori.

Generalisering som uttrykk

Den typiske tilnærmingen til generalisering innebærer en formell verbal eller algebraisk beskrivelse av en korrekt regel (Ellis, 2007). Ellis beskriver *representasjons-generaliseringer* som ens evne til å identifisere en generalisering. Representasjons-generaliseringer er endelige verbale eller skriftlige utsagn som beskriver aspekter ved en generalisering. Utsagnene kan identifisere generelle mønstre, egenskaper, regler eller felles egenskaper. De kan også definere klasser av objekter der man slår fast den fundamentale egenskapen til alle objektene innenfor klassen. Denne egenskapen kan for eksempel være et gitt forholdstall eller en mønsterutvikling. Mitchelmores (2002) tredje kategori beskriver en generalisering som et gitt forhold som holder for alle elementer i en mengde. Eksempler på en slik type generalisering kan være matematiske formler og sannheter, for eksempel utsagnene ”2x + 3x = 5x”, eller ”2n er større enn n”.

Kieran (2004) er en av flere forskere som mener at generalisering hovedsaklig består av dannelsen av et algebraisk uttrykk. Situasjoner der generaliseringsaktiviteter oppstår kan være kvantitative problemer med en ukjent faktor, utvikling av figurmønstre, og numeriske forhold som kan uttrykkes ved regler. Fokuset for generaliseringsaktiviteter er algebraisk representasjon av situasjoner, egenskaper, mønstre og relasjoner (Kieran, 2004).

2.3.2 Algebraisk tenkning og generalisering

Som nevnt ovenfor er det flere ulike syn og definisjoner på generalisering (Ellis, 2007; Kieran, 2004; Mitchelmore, 2002). Som følge av temaet for denne studien dukker det opp en lignende problem: hva er *algebraisk* generalisering? Som en avklaring på begrepene generalisering og algebraisk generalisering foreslår Radford (2010) først et skille mellom generalisering og induksjon, dermed en forklaring på algebraisk generalisering. Radford påstår at ikke all symbolisering i generaliseringer er algebraisk, og ikke alle typer mønsteraktiviteter fører til algebraisk tenkning. Heller ikke alle generaliseringer er algebraiske.

Radford (2010) skiller først og fremst mellom induksjon og generalisering. Induktive metoder kan også føre frem til formler og uttrykk, men løsningsprosessen er annerledes. Radford har i sine undersøkelser funnet at noen elever bruker ”prøv-og-feil” metoder når de skal finne sammenhenger og formler. Heuristikken resulterer i en regel man har funnet gjennom gjetting. Slike regler kan sees på som hypoteser, og løsningsprosessen er en form for induksjon Radford betegner som *naiv induksjon*. Elevene gjennomfører da en induksjon fremfor en generalisering. Becker og Rivera (2006) setter også et lignende skille mellom hvordan elever jobber med generaliseringsoppgaver. Fremgangsmåten til elever som hovedsakelig bruker ”prøv-og-feil” metoder eller lager formler på grunnlag av tall de får gitt i oppgaven, kalles *numeriske generaliseringer*. Elevene har liten forståelse for hva parametrene i formlene representerer, og formlene som dannes forsvares kun etter hvor godt de passer til en begrenset mengde informasjon (Becker & Rivera, 2006).

Radford (2010) beskriver *generalisering* som å oppdage felles egenskaper ved for eksempel figurer. Her vil elever også komme frem til formler, men elevene lager disse på bakgrunn av de felles egenskapene de har oppdaget ved figurene. Heuristikken hviler på oppdagelse av egenskaper hos gitte figurer, og generalisering av disse til etterfølgende figurer. Ifølge Becker og Rivera (2006) bruker elevene *figurativ generalisering* dersom de er i stand til å forsvare generaliseringene sine ved å knytte symboler og variabler til mønstret som genererer figurene. Slike elever er i stand til å se figurative sammenhenger der det eksisterer en konstant struktur i mønsteret, og er på grunnlag av dette mer i stand til å utlede en direkte formel (Becker & Rivera, 2006).

Forskjellen mellom hva Radford (2010) kaller naiv induksjon og generalisering blir ofte oversett i undervisning, og fører ofte til at induksjonsresultater blir kalt generaliseringer. Sammenligning mellom generalisering og induksjon viser egenskaper ved generaliseringer Radford betegner som kjerneegenskaper, nemlig egenskapen til å se noe generelt i det spesifikke. Mason (1996) skiller mellom to aspekter ved å jobbe med generaliseringer. Det ene er å se det generelle gjennom det særskilte, å være i stand til å gjøre en generalisering basert på særskilte tilfeller. Det andre aspektet er å se det særskilte i det generelle, å være i stand til å klassifisere et særskilt tilfelle som et eksempel på en generalisering. Radford (2010) mener at evnen til å se det generelle i det spesifikke danner rammen for algebraisk generalisering, men nevner ikke evnen til å symbolisere som en del av en generalisering. Kieran (1989, som nevnt i Radford, 2010) mener derimot at kun egenskapen til å se det generelle i det spesifikke ikke er nok for å kvalifisere til en algebraisk generalisering, men at man også må være i stand til å symbolisere det generelle algebraisk. Korrelasjonen mellom algebraisk tenkning og generalisering er, ifølge Radford (2010), grunnpilarene i tanken om generalisering som et opphav til algebra. Det å tenke algebraisk er ifølge Kieran mer enn å kun tenke på det generelle. Algebraisk tenkning er også en måte å se det generelle i en algebraisk form, som ved et symboluttrykk (Radford, 2010).

Radford (2010) foreslår følgende definisjon på algebraisk generalisering:

> Å generalisere et mønster algebraisk hviler på evnen til å oppfatte en likhet mellom noen elementer i en sekvens S, å være oppmerksom på at denne likheten gjelder for alle elementer i S og å være i stand til å bruke denne for å skaffe til veie et uttrykk for S (Radford, 2010, s. 42).[6]

Dette mener jeg oppsummerer begrepet generalisering på en god måte.

2.3.3 Generalisering og figurmønstre

Elevers algebraiske forståelse har ofte vært mangelfull på grunn av et sterkt fokus på symbolmanipulering uten mening (Kieran, 2004; Lannin, et al., 2006). Mønstergeneraliseringer hjelper elever å gå fra numerisk til algebraisk tenkning. De gir mening til algebraiske symbol ved å relatere de til et kvantifisert objekt (Lannin, et al., 2006). Man kan skille mellom flere ulike typer mønstre når man jobber med generalisering: numeriske mønstre, figurmønstre, geometriske mønstre, repeterende mønstre, lineære og kvadratiske mønstre, med mer. Figurmønstre består av stadier der en figur i hvert stadium er konstruert på en spesiell måte (Rivera, 2010). Stadiene i et algebraisk nyttig mønster skal være konstruert slik at det skal være mulig å oppdage et

---

[6] Min oversettelse.

stabilt forhold innenfor og mellom stadiene, og man skal kunne utvide mønsteret jevnt matematisk. Ifølge Rivera er hensikten med mønstergeneraliseringer at elever bruker perseptuelle og symbolske egenskaper til å konstruere og redegjøre for en sannsynlig og algebraisk nyttig struktur. Strukturen skal kunne overføres i form av en direkte formel. Evnen til å se ulike mønstre er svært individuelt. Elever må kunne koordinere sin egen persepsjon og sin egen symbolske konklusjon effektivt for å kunne tolke strukturen man finner, både for kjente og ukjente stadier (Rivera, 2010). De kjente stadiene er de som presenteres i figurmønstret, mens de ukjente er de senere stadiene.

Når man utvider mønstre og bestemmer figurer i de 2-3 neste stadiene kalles det *nær generalisering* (Amit & Neria, 2008; Stacey, 1989). Disse kan vanligvis bestemmes ved enkel telling eller tegning. *Fjerne generaliseringer* består av å finne figurer i stadier som er langt unna, for eksempel å bestemme figur nummer 113. I fjerne generaliseringer vil det være altfor tidkrevende å bestemme alle figurer opp til det aktuelle stadiet. Det å finne et mønster her krever en forståelse for strukturen bak mønsteret (Amit & Neria, 2008; Rivera, 2010).

2.3.4 Fire nivåer for generaliseringsaktiviteter

Lee (1996) har utviklet tre kategorier som hun benytter for å analysere elever sine løsningsprosesser i arbeidet med generaliseringsproblemer som inneholder figurmønstre. Disse er oppfatningsnivået, verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået. I tillegg til disse vil det i denne studien benyttes en fjerde kategori, analyseringsnivået, motivert av Lee og Wheeler (1987, som sitert i Lee, 1996). De 4 kategoriene vil være utgangspunktet for dataanalysen i studien og blir her knyttet opp mot metakognitiv aktivitet elevene benytter seg av i løsningsprosessen. I de følgende avsnittene vil hver av kategoriene beskrives.

Oppfatningsnivå

Den første kategorien, *oppfatningsnivået*, sier noe om hvordan elever tolker og oppfatter mønstre (Lee, 1996). Mønsteroppfatning er svært individuelt, og man kan ha flere forskjellige fokus når man leter etter mønstre. Det er elevenes oppfatning som styrer utviklingen frem til et symboluttrykk. De ulike måtene man oppfatter mønstre på kan knyttes til de tidligere nevnte begrepene numerisk og figurativ generalisering (Becker & Rivera, 2006). Noen ser etter tallfølger og antall elementer, noen ser på forgreininger, mens andre ser på geometri, armer og kanter. Lee (1996) nevner i sin artikkel at nøkkelen til suksess ser ut til å ligge i det første stadiet av mønsteroppfatningen. Her kreves det en viss fleksibilitet av elevene for å finne et matematisk nyttig mønster (Lee, 1987, 1996). For mange er det ifølge Lee (1996) ikke noe problem å finne et mønster, men det er derimot å se et som er algebraisk nyttig, som er utfordringen. Med algebraisk nyttig oppfatning mener jeg at en oppfatning er til hjelp og ikke til hinder for å lage en algebraisk formel som beskriver mønsterutviklingen. Her er det viktig at man er i stand til å se flere mønstre, og at man er villig til å gå bort fra mønstre som viser seg å være unyttige senere (Lee, 1996).

Verbaliseringsnivå

Verbaliseringsnivået i generaliseringsaktiviteter innebærer at man verbalt uttrykker hva man ser i en oppgave eller et mønster (Lee, 1996). Dersom man skal generalisere mønstre er det å uttrykke seg tydelig om hvilke egenskaper man får øye på ifølge Lee et steg i riktig retning. Mason (2005) forklarer at når man uttrykker hva man ser, vil det trigge en pause og refleksjon over trekkene og egenskapene man ser i et mønster. Dette vil i sin tur hjelpe en selv og andre til å oppdage relasjoner mellom trekkene og egenskapene. Mason påpeker at å ”si hva man ser” er en hjelpsom strategi for å finne mening i egne og andres mønstre. Oppfatnings- og verbaliseringsnivået kan man se har en noe glidende overgang. Med dette mener jeg at hvordan man oppfatter et mønster kan påvirke hvordan man uttrykke det man ser. Hvordan man artikulerer det man ser i et mønster kan i sin tur også påvirke og endre oppfatningen av mønsteret. Både oppfatnings- og symboliseringsnivået krever at man er fleksibel i hvor man retter oppmerksomheten (Lee, 1996). Ved å si nøyaktig hva man ser, kan fokuset rettes mot detaljene i mønsteret, og man kan gå glipp av et overordnet inntrykk eller en egenskap. I motsatt tilfelle kan man bli for fokusert på det overordnede at man ikke ser de avgjørende detaljene i mønsteret (Mason, 2005).

Symboliseringsnivå

Symboliseringsnivået er ifølge Lee (1996) den matematiske løsningen på en generaliseringsoppgave. Det vil si den matematiske formuleringen av mønstret man har funnet, i form av et algebraisk uttrykk (Lee, 1996). Symboliseringsnivået er tett knyttet opp mot oppfatningsnivået i den forstand at den endelige symboliseringen avhenger av hvordan man har oppfattet mønstret. Dersom man ikke har funnet et matematisk nyttig mønster, vil det kunne blir vanskelig å uttrykke mønsteret som et algebraisk uttrykk (Lee, 1996). Avhengig av hvilke mønsteroppfatning elevene har, kan de uttrykke både rekursive og direkte formler. Det er en forutsetning at elevene har de algebraiske og aritmetiske verktøyene tilgjengelig for å kunne skrive ned et uttrykk.

Analyseringsnivå

Den siste kategorien er analyseringsnivået. Med dette mener Lee og Wheeler (1987, som sitert i Lee, 1996) hvordan, og hvorvidt, elevene tester ut og sjekker mønstrene og eventuelt de tilhørende skriftlige sammenhengene de har funnet. Det kan elevene gjøre enten ved beregninger, eksempler, eller andre måter å rettferdiggjøre eller argumentere for antakelsene sine. Her vil jeg på eget initiativ legge til refleksjoner elever gjør om sine egne handlinger og utsagn innenfor hvert av de 3 overstående nivåene. Jeg vil også legge til refleksjoner om den matematiske/algebraiske strukturen bak mønstrene.

3 Metode

I det følgende kapittelet presenteres metodologien for studien i åtte deler. I den innledende delen argumenterer jeg for valg av metode i forhold til studien sitt forskningsspørsmål og fokus. De neste to delene presenterer utvalget basert på elevenes faglige nivå og kognitive utvikling, og en pilotstudie som ble gjennomført i forkant av studien. De tre neste delene presenterer de tre kildene til datamateriale, henholdsvis observasjon, intervju og elevoppgaver. Her redegjøres det for innsamlingsmetodene i forhold til min rolle i undersøkelsen, utvikling av intervjuguide og utvikling av elevoppgaver. Utførelsen av undersøkelsen og redegjørelse for ulike valg tatt i forhold til observasjonstime, elevgrupper og gjennomføring av intervju beskrives i neste del. I den avsluttende delen ser jeg tilbake på valgene tatt i forhold til metodologien og gjennomføringen med et kritisk blikk. Her tar jeg opp ulike kritikkverdige forhold ved metoden sett i etterkant av undersøkelsen.

3.1 Valg av metode

I studien undersøker jeg elever sine metakognitive strategier i arbeid med generaliseringsoppgaver i algebra. Jeg ser på hvordan elevene jobber med oppgaver, hvordan løsningsprosessen foregår, og elevene sine opplevelser av løsningsprosessen. Dersom forskningsspørsmålenes fokus er på en prosess eller på selve deltakerne i undersøkelsen, er det ifølge Mertens (2005) naturlig å velge en kvalitativ forskningsmetode. Forskningsspørsmålet i studien gjør det dermed naturlig å velge kvalitativ forskningsmetode. Bruk av kvalitative metoder kan også grunngis i praktiske årsaker. Kvalitative metoder åpner for mer personlig kontakt mellom deltaker og forsker, noe som i min studie vil være svært fordelaktig siden jeg skal samle inn data om hva elevene gjør, hva deres egne oppfatninger er om generalisering og hvordan de jobber og tenker. I en undersøkelse der deltakeren sine opplevelser, betraktinger og måter å tenke på er i fokus, vil det være en fordel dersom man har en større grad av nærhet til deltakeren enn hva kvantitative metoder kan tilby (Mertens, 2005).

I studien bruker jeg tre kilder til data, henholdsvis observasjon, intervju og skriftlig arbeid. Jeg får her tre ulike synsvinkler på hvordan elevene jobber. Gjennom klasseromsobservasjon får jeg se hvordan elevene faktisk jobber med oppgavene, samt hvordan kommunikasjon foregår og påvirker løsningsprosessen. I intervjuene får jeg elevene sine egne forklaringer på oppgaveløsningene, og deres syn på hvordan de jobbet. Elevene sitt skriftlige arbeid gir et innsyn i løsningsprosessen, hva de har gjort, og hvordan de har tenkt underveis. Dette utfyller blant annet elevene sine egne forklaringer på hvordan de har løst oppgavene i intervjuene. Ved å bruke flere metoder for datainnsamling får jeg det man kaller datatriangulering (Mertens, 2005; Robson, 2002). Datatriangulering er med på å gi ulike synsvinkler på forskningsspørsmålet, og det kan være med på å motvirke trusler mot validiteten i studien. Fordelen med datatriangulering er at man får undersøkt flere sider av forskningsspørsmålet. Man får flere ulike synsvinkler, og det gir en mulighet til å utforske andre spørsmål som er komplementære til selve forskningsspørsmålet (Robson, 2002)

3.2 Utvalg

Utvalget foretas på bakgrunn av to aspekter ved studien. Det første aspektet dreier seg om elevenes faglige nivå. Elevoppgavene i studien forutsetter at elevene har kjennskap til matematiske begreper som variabel og konstant, og at man har grunnleggende kunnskaper innenfor algebra. Det er også viktig at oppgavene i studien ikke er for enkle eller for utfordrende for elevene. Det andre aspektet dreier seg om elevenes kognitive utvikling. Det er et behov for å undersøke barns kognisjon gjennom hele oppveksten. Metakognitive ferdigheter kommer ikke til syne ikke før i 10-års alderen, og de utvikler seg videre i de neste årene (Veenman, Hout-Wolters, & Afflerbach, 2006). På bakgrunn av at jeg skal undersøke eksisterende metakognitive ferdigheter hos elever som jobber med algebra, faller valget på elever ved 9.trinn i ungdomsskolen. Det er også fra ungdomstrinnet jeg selv har mest praksiserfaring.

Jeg fikk kontakt med en lærer som gav meg muligheten til å gjennomføre undersøkelsen i løpet av 5 matematikktimer i en klasse. Denne klassen hadde delt undervisning, og dermed fikk jeg 2 enkelttimer med hver av gruppene samt en enkelttime der begge gruppene var tilstede. Det ble da naturlig for meg å gjennomføre samme opplegg på de to gruppene og fokusere på en elevgruppe i hver gruppe. De to elevgruppene ble valgt ut på bakgrunn av mine observasjoner i fellestimen, og samtaler med læreren. Elevene ble valgt ut under forutsetning av at de måtte være i stand til å snakke fritt og åpent om oppgavene, være i stand til å uttrykke seg skriftlig, samt at de selv var positive til å bli filmet og intervjuet. Jeg ønsket også å at elevene var noe spredt i ferdigheter. Elevene fikk i forkant av undersøkelsen med seg et samtykkeskjema hjem, der foresatte fikk informasjon om undersøkelsen (se vedlegg 1).

Det endelige utvalget ble noe påvirket av elevenes ønske om å delta i undersøkelsen. Enkelte elever ville ikke delta siden det var et kamera til stede. Det endelige utvalget ble bestående av 2 jenter og 4 gutter. Gruppe 1 bestod av 2 jenter og en gutt. I studien bruker jeg pseudonymene Mia, Line og Even. Jeg fikk inntrykk av læreren at elevene var middels presterende i matematikk. Jeg fikk også inntrykk fra mine egne observasjoner at disse elevene var flinke til å uttrykke seg både skriftlig og muntlig. Gruppe 2 ble dermed bestående av 3 gutter. Jeg bruker pseudonymene Jan, Jonas og Erik. Læreren nevnte at to av disse guttene presterte noe bedre enn de andre elevene, og var svært selvstendige når det kom til matematikk.

3.3 Pilotstudie

Høsten 2009 gjennomførte jeg en pilotundersøkelse med samme tema som masterstudien. Hensikten med pilotundersøkelsen var å teste ut metodene som senere skulle brukes i masterstudien. Jeg fikk her en mulighet til å teste ut både intervjuguiden og en av elevoppgavene. Jeg gjennomførte undersøkelsen i løpet av en enkelttime der klassen jobbet med en generaliseringsoppgave som jeg hadde laget. Etter timen tok jeg ut 3 av elevene til intervju angående denne oppgaven. Generaliseringsoppgaven ble laget med den hensikt at den skulle åpne for utforskning og refleksjon omkring generalisering. Ved å teste ut elevoppgaven i en pilotstudie fikk jeg en bekreftelse på hvorvidt den åpnet for den type arbeid og resultater jeg ville ha, nemlig elever sitt metakognitive arbeid.

Pilotstudien viste seg å gi svært gode datainnsamlinger når det gjaldt elevoppgaven, og dermed ble denne også brukt i masterstudien. Elevoppgaven jeg bruke i pilotstudien ble brukt i den første undervisningstimen i masterstudien. Jeg fikk også godt datamateriale i pilotstudien når det gjaldt intervjuguiden, og jeg valgte derfor å bruke den som utgangspunkt i masterstudien med enkelte modifikasjoner. Etter pilotundersøkelsen så jeg imidlertid et behov for mer utfyllende data om hva som foregikk i klasserommet. Intervjuene og elevbesvarelsene gav gode data, men jeg så et behov for å registrere hva som skjedde underveis i løsningsprosessen på en bedre måte. I masterstudien valgte jeg derfor å gjennomføre en klasseromsobservasjon mens elevene jobbet med oppgavene.

3.4 Observasjon

En del av datamaterialet til denne studien samles inn fra klasseromsobservasjon mens elevene jobber med oppgaver. Observasjonene gjennomføres i til sammen fire timer, to timer med hver gruppe. En fordel ved å bruke observasjon som en metode for datainnsamling, er at man får et direkte innblikk i hva deltakerne gjør, og innsamlingen skjer forholdsvis utvunget i forhold til for eksempel intervju (Robson, 2002). Man slipper å spørre etter meninger, følelser og fremgangsmåter, i stedet får man mulighet til å observere hva elevene gjør og høre hva de sier. Jeg velger å gjennomføre en klasseromsobservasjon for å få et innblikk i hvordan elevene faktisk jobber med generaliseringsoppgaver, hvordan elevene kommuniserer underveis og hvordan dette påvirker løsningsprosessen. Observasjon blir oftest brukt i en utforskende fase ved en studie (Mertens, 2005; Robson, 2002). I denne studien brukes observasjon til å samle inn informasjon som senere skal utfylles av andre innsamlede data. Observasjonene danner også utgangspunktet for intervjuene. Kvalitativ observasjon skjer ifølge Mertens (2005) uten å bruke forhåndsbestemte kategorier man skal måle eller registrere. I denne studien fokuserer jeg på hvordan en elevgruppe jobber med spesifikke oppgaver. Jeg ser på elevenes naturlige atferd mens de jobber, hva som faller elevene naturlig å gjøre underveis i arbeidet. Siden det ikke er noen spesifikke kategorier som undersøkes på dette tidspunktet, vil dermed denne typen observasjon ifølge Mertens naturlig falle innenfor kvalitativ forskning. Gjennom observasjonen velger jeg å bruke filmkamera for å få en mer fullstendig datainnsamling. Ved å bruke filmkamera slipper man å bekymre seg for at enkelte hendelser blir oversett eller ikke notert ned, og man kan gå tilbake og se på datamaterialet senere. Dette gir en fyldig og objektiv registrering av data i forhold til om man skulle skrevet ned inntrykk og tolkninger for hånd, og man unngår eventuelle subjektive forklaringer fra observatøren.

Et aspekt man må ta hensyn til før en aksjonering er observatøren sin rolle i observasjonen. Spradley (1980, som sitert i Mertens, 2005) identifiserer 5 typer deltakende observasjon. Disse består av ikke deltakende, passiv, moderat, aktiv og fullstendig deltakende. Jeg velger å forholde meg til en passiv deltakende rolle. Det vil si å være til stede i klasserommet under observasjonen, men at man holder seg passiv i forhold til læreren og elevene, og ikke deltar på noen måte i undervisningen (Mertens, 2005). En ulempe med observasjon er om hvorvidt forskeren påvirker situasjonen deltakerne er i, og dermed også påvirker dataene (Mertens, 2005; Robson, 2002). Jeg velger rollen som passiv deltakende fordi jeg vil påvirke elevene i minst mulig grad. Jeg mener det er viktig for min studie å ikke påvirke elevene for mye, fordi det er elevenes tanker og oppfatninger som er i sentrum, ikke mine egne. En annen grunn til at jeg velger passiv deltakende er at jeg også vil ha muligheten til å selv være i klasserommet og styre hva som blir filmet. Et alternativ er at kameraet settes på et stativ, og dermed kan jeg forlate rommet. Da vil jeg kunne samle inn data og se filmen i etterkant, uten å selv være til stede. Jeg velger derimot å være til stede og styre kameraet selv, for å få muligheten til å endre fokus for innsamlingen dersom det blir nødvendig. Jeg får slik muligheten til å skifte mellom å filme elevene i samtale, elevene sitt skriftlige arbeid og resten av klassen.

3.5 Intervju

Jeg velger å bruke intervju som metode i tillegg til observasjon. Intervjuene gjennomføres enkeltvis med de utvalgte elevene etter hver av de to øktene. Jeg velger å bruke intervju som innsamlingsmetode for å få et innblikk i elevenes tankegang. Det kan være vanskelig å få entydige data om hva og hvordan elever tenker dersom man bare benytter observasjon, derfor velger jeg intervju for å ha muligheten til å spørre elevene direkte om hva de tenker. Undersøkelsen sitt fokus er på elever sine oppfatninger og tanker. Det er et slikt fokus som åpner for at intervju er en god forskningsmetode her (Kvale & Brinkmann, 2009; Robson, 2002).

Intervju er en vanlig metode man benytter i kvalitative studier (Mertens, 2005). Jeg velger å bruke et semistrukturert intervju som utgangspunkt. Semistrukturerte intervju karakteriseres av at spørsmålene er bestemt på forhånd, men intervjuet har en viss fleksibilitet slik at det kan tilpasses situasjonen og intervjuobjektene (Kvale & Brinkmann, 2009). Dersom situasjonen krever det kan rekkefølgen og innholdet i spørsmålene endres. Denne intervjuformen åpner dessuten for at jeg som intervjuer kan få et nærere forhold til elevene. Beskrivelsene fra elevene kan dermed bli mer ekte og detaljerte (Kvale & Brinkmann, 2009; Mertens, 2005; Robson, 2002). Både nærhet til elevene og fleksibiliteten et slikt intervju, gir er vesentlig i denne studien. Datamaterialet som samles inn faller helt og holdent på elever sine oppfatninger og tanker omkring oppgavene de jobber med. Derfor er det viktig at de føler en viss tillit til intervjueren og føler at de kan være ærlige. Datamaterialet som blir samlet inn gjennom intervjuene er ment til å supplere dataene fra klasseromsobservasjonene. Robson kaller denne typen innsamling supplerende metode, der dataene som blir samlet inn supplerer til og setter andre data i perspektiv. Slik er denne datainnsamlingen også med på å validere dataene som blir samlet inn, siden man får informasjon om samme sak fra flere ulike metoder (Mertens, 2005).

3.5.1 Intervjuguide

Intervjuguiden i masterstudien består av tre deler, der det følger en oversikt over hvilke spørsmål som er aktuelle (se vedlegg 2). De tre delene utgjør rammen i intervjuet og har en bestemt rekkefølge. Intervjuet er som nevnt semistrukturert, så det er rom for å modifisere spørsmålene innenfor hver av de tre delene etter behov. Spørsmålene er hovedsakelig av deskriptiv karakter.

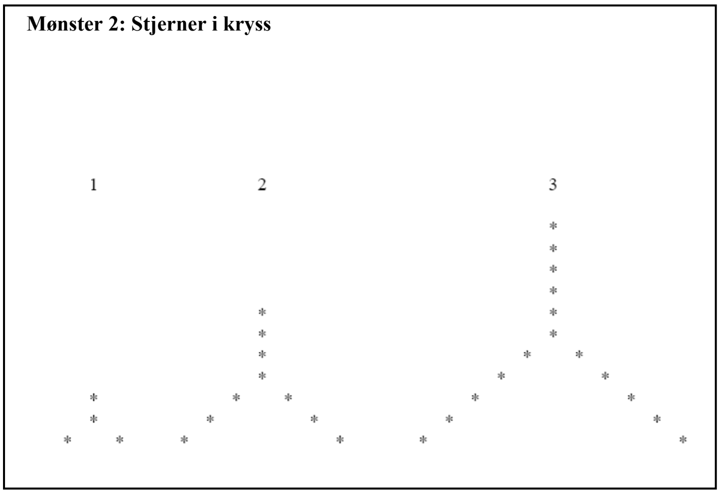
Den første delen av intervjuet er en innledende del der jeg spør spørsmål angående starten av oppgaveøkten. Det første spørsmålet dreier seg om elevenes førsteinntrykk av oppgavene og hva de mener oppgavene gikk ut på. Et slikt konkret introduksjonsspørsmål kan ifølge Kvale og Brinkmann (2009) være fordelaktig og åpne for rike beskrivelser som danner rammen for resten av intervjuet. Det blir også spurt om de har jobbet med lignende oppgaver tidligere, og i tilfelle om de da husker noen fremgangsmåter de brukte. Disse spørsmålene gir meg litt innsikt i hvordan elevene vanligvis angriper oppgaver og om tidligere erfaringer påvirket løsningsprosessen. Deretter blir elevene spurt om hvordan de startet arbeidet med oppgavene. Dette gir meg innsikt i hvilken grad av innledende planlegging elevene gjør i forhold til oppgaveløsningen, og hvorvidt de har noen refleksjoner om metoder og lignende. Jeg har en antakelse om at løsningsstrategier og suksess i å løse oppgaver avhenger delvis av hvor involvert man er i oppgaven og hvor mye man tar seg tid til å jobbe med oppgaven. Jeg mener at disse innledende spørsmålene gir meg et godt utgangspunkt for å se videre på det metakognitive arbeidet elevene gjør.

I intervjuets andre del tar jeg for meg selve utførelsen av oppgavene. Disse spørsmålene sikter hovedsakelig mot å avdekke hvordan elevene har tenkt gjennom løsningen og eventuelt metakognitivt arbeid de gjør underveis. Her blir elevene bedt om å gå gjennom oppgavene og forklare hva de gjorde, og eventuelt utdype dersom noe er uklart. De blir bedt om å forklare sine løsningsmetoder og utdype bruken og grunner til bruken av metodene. Spørsmålene i denne delen er formulert slik at elevene må forklare og grunngi valgene de gjør. Her bruker jeg spesielt ord som ”Hvordan” og ”Forklar”. Det vil si spørsmål i en hovedsakelig deskriptiv form, som ifølge Kvale og Brinkmann (2009) bør utgjøre hoveddelen av et intervju. Jeg spør også om elevene kan forklare formlene sine ved hjelp av figurene i mønsteret, og om de kan knytte de ulike elementene i formlene opp mot figurene. Slike spørsmål gir meg en innsikt i hvorvidt elevene har oppdaget den matematiske strukturen bak mønsterutviklingen. Sist i denne delen av intervjuet blir elevene bedt om å sette seg inn i tre direkte formler som er oppgitt, og avgjøre om disse er riktige i forhold til mønstrene. Elevene blir også bedt om å begrunne svarene sine. Disse spørsmålene viser om elevene er fleksible i sin mønsteroppfatning og om de er i stand til å sette seg inn i andres tankesett omkring en mønsteroppfatning, og eventuelt avsløre feil i oppfatninger.

Den siste delen fokuserer på elevenes egne vurderinger av fremgangsmåter de brukte og resultater de fikk. Elevene blir spurt hvilke problemer og utfordringer de møtte underveis, og hvordan de eventuelt løste disse. Elevene blir også spurt om de gjorde noen vurderinger av metoder og resultater underveis i løsningsprosessen. Her får jeg elevenes egne oppsummeringer av hvordan de jobbet med oppgavene, og jeg får et innblikk i hvor stor grad elevene har tenkt over strategiene og løsningene sine. Spørsmålene i den siste delen åpner for elever sine refleksjoner omkring sitt eget arbeid, metodebruk og resultater, og hvorvidt de har noen form for overvåkning over seg selv gjennom oppgaveøkten.

3.6 Elevoppgaver

Oppgavene (se vedlegg 3 og 4) elevene jobber med ble valgt gjennom samtale med veileder, og ut fra inspirasjon av lignende studier (Becker & Rivera, 2006; Radford, 2006; Sasman, et al., 1999). Alle oppgavene er basert på lineære mønstre, og fordrer kreativ tenkning der flere alternative fremgangsmåter er mulig. Figur 1 er et eksempel på et lineært mønster fra elevoppgavene.



Figur 1: Mønster 2 fra første økt.

Oppgavene er laget i den hensikt at elevene skal utforske og oppdage mønstre, og egenskapene til disse. Oppgavene åpner for refleksjon og algebraisk tenkning, der elevene skal se på både nære og fjerne elementer i mønstrene, noe Stacey (1989) kaller nær og fjern generalisering. Det er også tatt hensyn til differensiering i oppgavene. Oppgavene spør etter mønsterutvikling og sammenhenger på ulike vis, og elevene får flere ulike måter å uttrykke seg på. De kan uttrykke seg i form av tegninger, ord og formler. For elever som trenger en utfordring, blir det å finne den direkte formelen til mønsterutviklingen en oppgave å bryne seg på. For elever som er noe svakere er det nok å lete etter sammenhengen og å uttrykke denne ved hjelp av de foregående figurene, kalt rekursiv formel.

Øverst på oppgavearket er det figurer som viser utviklingen av et lineært mønster (se figur 1). Elevene blir først og fremst bedt om å forklare hvordan mønsteret utvikler seg videre ved hjelp av ord. Her får elevene mulighet til å utforske mønsteret som er gitt, og se etter sammenhenger i figurene. Det er ikke gitt noen metode for hvordan de skal løse oppgaven. I tillegg til å tenke på egen hånd og diskutere med de andre elevene på gruppen, får elevene trening i å sette ord på sammenhenger de ser. Figur 2 viser oppgavene til mønster 2.

1. Hvordan vil figur på plass nr. 4 se ut? Hvor mange stjerner vil denne ha?
2. Forklar hva som skjer med stjernene etter hvert som mønsteret utvider seg.
3. Hvordan kan du finne ut hvor mange stjerner figur nr. 10 har? Forklar.
4. Foreslå en metode for å regne ut hvor mange stjerner som må til for å lage en hvilken som helst figur i denne mønsterfølgen.
5. S er antall stjerner i en figur, og n er plassen figuren står på., det vil si figur på plass 1 har 4 stjerner (se figur). Finn sammenhengen mellom S og n der du uttrykker S ved hjelp av n.
6. Se på disse formlene: er noen av disse riktige? Hvorfor/hvorfor ikke?

   Antall stjerner = 1 + 3 * (n + n - 1)

   S = 3 * 2n - 2

   S = 4 + 3 * (n + n - 2)

Figur 2: Oppgaver som tilhører mønster 2.

Elevene blir også bedt om å finne antall elementer (stjerner, fyrstikker med mer) i figurer som ikke vises på oppgavearket. Her blir elevene bedt om å se på både nære og fjerne figurer. Elevene må da være i stand til å ha funnet et nyttig mønster og oppdaget den algebraiske strukturen bak mønsterutviklingen. Etter å ha funnet antall elementer i konkrete eksempler blir elevene bedt om å uttrykke sammenhengen mellom en tilfeldig figur nr. *n* og antall elementer i denne. Denne oppgaven ber elevene om å sammenfatte mønsterets utvikling i en formel eller et uttrykk. Her står elevene fritt til å uttrykke denne sammenhengen som en direkte eller rekursiv formel, og de står fritt til å benytte både ord og symboler i uttrykkene.

Sammen med figurmønstrene får elevene også utdelt tre direkte formler til hvert mønster (se figur 2). Elevene skal avgjøre om disse formlene beskriver de aktuelle mønstrene eller ikke. De skal også grunngi svarene sine. Elevene blir gitt både riktige og gale formler. Jeg velger å gi de slike oppgaver fordi jeg tror en oppgave der de må sette seg inn i andres besvarelser, gir et innblikk i det kognitive aspektet ved generalisering. En av de mest signifikante karakteristikkene av generaliseringer er dens logiske grunnlag (Radford, 1996). Det logiske grunnlaget bak en generalisering kan variere, og det er avhengig av eleven sin matematiske tenkning. Noen elever mener at å gi et par eksempler er nok for å redegjøre for en formel. Andre mener kanskje at å teste formelen med en spesiell faktor, for eksempel 100, validerer en formel. Det å gi elevene oppgaver der de må redegjøre for andres formler og uttrykk, mener jeg kan gi et godt innblikk i hvordan elever tenker både om algebraisk generalisering og validering av generaliseringer. Det gir også et innblikk i om elevene er i stand til å forlate sine egne oppfatninger og ta til seg nye.

3.6.1 Elevbesvarelser

Jeg velger å gi elevene løsningsark de skal løse oppgavene på som er delt i to vertikalt (se vedlegg 5). På venstre side blir de bedt om å skrive ned og forklare alt de gjør underveis, og på høyre skrives beregninger, figurer og selve løsningen av oppgaven (se figur 3).

FORKLARING	**LØSNING**
Hva gjør du og hvorfor? Ombestemte deg underveis, hvorfor? Forklar hva du gjør mens du løser oppgaven.	Beregninger eventuelt tegninger eller lignende.

Figur 3: Løsningsark

Løsningsarkene blir samlet inn og brukt som grunnlag for intervjuene. Ved å se på elevenes skriftlige arbeid, og å snakke med elevene om arbeidet de har gjort, styrkes den indre validiteten i undersøkelsen. Ved å bruke elevenes skriftlige arbeid som utgangspunkt for intervjuene antar jeg at det ble lettere å oppklare eventuelle misforståelser angående oppgavene eller elevenes arbeid. Elevenes arbeidsmåter og tankegang blir på denne måten bekreftet både skriftlig og muntlig av elevene selv.

3.7 Utførelse

Jeg hadde på forhånd avklart med læreren hva jeg skulle gjøre, og hvordan både min og hans rolle i disse timene skulle være. Den første timen i klassen brukte jeg på observasjon av elevene, mens læreren gjennomførte en tradisjonell matematikktime med tavleundervisning og påfølgende oppgaveregning. Jeg brukte noe av tiden på å observere elevene for å velge ut elever som jeg senere skulle filme og intervjue. Deler av denne timen fungerte jeg også som hjelpelærer når dette var nødvendig. Dette gjorde jeg fordi jeg ville bli litt mer kjent med elevene, og jeg ville at de skulle få et inntrykk av meg før selve undersøkelsen satte i gang. Slik antok jeg at det ville gi en større nærhet til elevene, og at dette ville være fordelaktig når jeg senere skulle gjennomføre klasseromsobservasjon og intervju. Etter min mening er en time lite til å bygge et tillitsforhold til elevene, men på grunn av et begrenset antall timer var en time det meste jeg kunne avse til å gi elevene et inntrykk av meg.

Elevene som i de følgende timene skulle observeres og intervjues, ble valgt ut basert på mine egne erfaringer i klassen og i samarbeid med læreren. Elevene ble valgt ut under forutsetning av at de måtte være i stand til å snakke fritt og åpent om oppgavene. Jeg gjennomførte to enkelttimer klasseromsobservasjon i hver av gruppene, der elevene jobbet med generaliseringsoppgaver. Her hadde jeg inntatt rollen som passiv deltakende observatør, der jeg filmet en gruppe på tre elever gjennom timen. Jeg hadde på forhånd avtalt med læreren at jeg ikke var tilgjengelig for spørsmål fra elevene i disse timene, og at han måtte være tilstede og hjelpe elevene som vanlig ved oppgaveløsning. Ved å la elevene jobbe i grupper, åpnet jeg for muligheten til at de kunne diskutere oppgavene høyt. Stillman og Galbraith (1998) nevner at det er en klar skeptisisme om hvorvidt verbalt materiale er reliabelt, men påpeker at så lenge elevene ikke blir bedt om å forklare hva de gjør underveis i løsningsprosessen, vil det verbale materiale samsvare med elevenes handlinger, og være reliabelt.

Gjennom klasseromsobservasjonen filmet jeg elevenes arbeid og tok opp samtalene de hadde på bånd. Jeg fokuserte hovedsakelig på å få med sammenhengen mellom hva elevene sa og hva de skrev angående oppgavene. Jeg valgte å ha en båndopptaker på bordet under timen i tillegg til kameraet for å sikre at jeg hadde god lydkvalitet. Jeg filmet hovedsakelig arbeidet elevene gjorde, det vil si hva de skrev og regnet underveis. Ved å filme elevene uforstyrret i arbeidet med generaliseringsoppgavene, gav dette detaljerte bilder av elevenes strategibruk og ikke-verbale data som ifølge Stillman og Galbraith (1998) ikke kunne vært mulig å registrere uten videoopptak.

I etterkant av hver time ble de tre elevene intervjuet enkeltvis om oppgavene de hadde løst. Hele intervjuet ble tatt opp på bånd og senere transkribert. At det ble gjort lydopptak av intervjuet er med på å øke reliabiliteten i undersøkelsen. Det kunne vært informasjon som ikke hadde blitt oppfattet dersom intervjuet skulle bli skrevet ned og ikke tatt opp på bånd. Underveis i intervjuet gjentok jeg enkelte deler av hva elevene sa for å forsikre meg om at jeg hadde fått en riktig oppfatning av hva de hadde gjort og tenkt. I intervjuet ble oppgavene og hvordan elevene løste dem diskutert, noe som var med på å utfylle datamaterialet som ble samlet inn fra klasseromsobservasjonene. I tillegg til å kontrollere og diskutere selve datamaterialet sammen med eleven, har det vært fortløpende samtaler og vurderinger med veileder og medstudenter angående undersøkelsen. Å snakke med en utenforstående part angående resultater, analyser og hypoteser er med på å styrke den indre validiteten til en undersøkelse (Mertens, 2005).

3.8 Metodekritikk

Det ble tydelig hos begge gruppene i studien at det var et behov for begrepsavklaring hos elevene. De uttrykte utfordringer i blant annet å forstå hva oppgavene spurte etter, situasjonsforståelse for begreper som *sammenheng,* og bruk og forståelse av variabelen n. En innledende time der slike begreper og bruken av dem hadde blitt presentert hadde nok vært fordelaktig, og kunne kanskje luke bort noen av disse problemene. Det hadde også kunnet gitt meg en bedre pekepinn på hvilket kunnskapsnivå elevene var på, og jeg kunne tilpasset oppgavene bedre. På grunnlag av begrenset med tid i klassen, ble ikke en slik time prioritert. Det viste seg etter den første timen at algebra var et forholdsvis nytt tema for alle elevene, mens bakgrunnen for oppgavene jeg hadde laget var at elevene hadde grunnleggende kunnskaper innenfor algebra. Dersom en introduksjonstime hadde funnet sted ville nok dette problemet vist seg, og elevoppgavene kunne blitt tilpasset deretter.

Når det gjelder elevoppgavene, og slik de ble presentert, hadde det med fordel kunne blitt lagt til en ekstra oppgave med tilknytning til fjern generalisering. I elevoppgavene dreier to av oppgavene seg om nære generaliseringer, og den eneste som dreier seg om fjern generalisering var i tilfellet *n.* Jeg kunne med fordel inkludert utforsking av en figur nummer 100 for å mykne overgangen mot et generelt tilfelle *n.* Når det viste seg at enkelte elever hadde problemer med å forstå betydningen av *n,* ser jeg tydelig behovet. Ved å inkludere en figur 100 kunne de svakere elevene fått mulighet til å jobbe med fjerne generaliseringer uten at et notasjonsproblem hadde stått i veien. Det kunne sannsynligvis endret deler av datamaterialet. Jeg kunne også, med fordel, satt av mer tid med tanke på at den ene gruppen ikke ble ferdig med noen av oppgavene. Et alternativ hadde vært å utvide mønstrene noe og fokusert på bare ett mønster per oppgaveøkt. Dette kunne sannsynligvis gitt meg mer fyldig datamateriale med tanke på diskusjoner, oppdagelser og refleksjoner, siden elevene hadde hatt bedre tid på hver av oppgavene.

Når det gjelder intervjuene med elevene, kunne disse vært mer vinklet mot det metakognitive aspektet ved oppgaveløsningen. Metakognisjon er vanskelig å måle og undersøke, og dermed kan man argumentere for at all metodebruk burde fokusert på dette. Intervjuene inneholdt mange spørsmål som gikk direkte på både hvordan elevene løste oppgavene, og hvilken løsning de hadde kommet frem til. Jeg hadde ingen mulighet til å påvirke hvilke timer jeg fikk tildelt hos klassen. Det viste seg at jeg fikk tildelt to etterfølgende timer der jeg skulle være hos hver av klassene. På grunnlag av dette, og at jeg fikk kun 4 skoletimer til å gjennomføre klasseromsobservasjonene og intervjuene, ble eneste mulighet å gjennomføre intervjuene rett etter oppgaveløsningen. Det førte til at intervjuene stort sett handlet om svarene elevene hadde kommet frem til, og hvordan de hadde løst oppgavene. Jeg fikk ikke sett over videoopptakene i forkant av intervjuene, noe som kunne gitt mer rom for å tilpasse intervjuet for å få en bedre innsikt i elevenes metakognisjon. Intervjusituasjonen ble dermed at jeg inntok en lærerrolle og nærmest rettet elevenes besvarelser, noe som ikke gav så mye nyttig datamateriale i forhold til metakognisjon. Jeg synes likevel at man må ta i betraktning elevenes utbytte av både oppgaveøkten og intervjuene. Det ble derfor naturlig for meg å innta en slik rolle gjennom deler av intervjuet for å sikre at også elevene satt igjen med en form for læringsutbytte.

4 Analytisk rammeverk

I kapittel fire presenteres det analytiske rammeverket for studien i to deler. I den første delen beskrives verktøyet som danner utgangspunktet for analysene. Verktøyet er utviklet med utgangspunkt i sentrale deler av det teoretiske grunnlaget for studien. Den andre delen presenter studiens analysemetode. Her redegjøres det for hvordan datamaterialet ble analysert i forhold til analyseverktøyet.

4.1 Analyseverktøy

Målet med analysene er å få innsikt i det metakognitive arbeidet elever gjør når de jobber med generaliseringsoppgaver. I studien min tar jeg først utgangspunkt i Lee (1996) sine fire nivåer i arbeid med generaliseringsoppgaver: oppfatningsnivå, symboliseringsnivå, verbaliseringsnivå og analyseringsnivå. Jeg bruker de fire nivåene til å analysere datamaterialet, og til å beskrive hvordan elevene jobber med de ulike generaliseringsoppgavene. Jeg velger å bruke Lee sine fire nivåer fordi de gir en god beskrivelse av de ulike aspektene ved hvordan elever jobber. Valget begrunner jeg også i at gjennom pilotstudien fikk jeg svært gode og utfyllende resultater ved å analysere datamaterialet ved hjelp av disse. Jeg ønsker å danne et mest mulig komplett bilde av hvordan elever jobber med generaliseringsoppgaver. I den anledning velger jeg også å bruke tabellen beskrevet på side 13, ”Metakognitive aktiviteter”, som er en sammenfatning av sentrale aktiviteter presentert av Cohors-Fresenborg og Kaune (2007), Schraw (1998), og Stillman og Galbraith (1998). I denne tabellen har jeg sammenfattet det jeg anser som de mest sentrale metakognitive aktivitetene beskrevet i litteraturen og underkategorier av disse: planlegging, overvåkning, refleksjon og diskursivitet. Jeg ser på hvordan elevene bruker metakognitive aktiviteter i forbindelse med Lees fire nivåer. Jeg mener det vil gi en fyldig beskrivelse av det metakognitive arbeidet elever gjør når de generaliserer.

Jeg velger å se på generalisering som en kontinuerlig prosess som går fra umiddelbare antakelser om mønstre, til et endelig algebraisk uttrykk. Jeg mener handlings-generalisering, som er beskrevet av Ellis (2007), er passende for hva jeg tror vil beskrive elever sine generaliseringer best. Det å ha et fokus på både prosessen og det endelige resultatet av en generaliseringsprosess synes jeg er vesentlig. Generalisering som en handlingsprosess mener jeg er et viktig fokus i den forstand at generalisering bør være grunnlagt i en forståelse for selve arbeidsprosessen. Jeg mener også, i likhet med Kieran (2004), at generalisering som en algebraisk representasjon er vesentlig, fordi her uttrykker man produktet av generaliseringsprosessen og forståelsen for den matematiske strukturen som ligger bak.

4.2 Analysemetode

Etter datainnsamlingen satt jeg med data fra tre ulike metoder: klasseromsobservasjon, intervju og elevbesvarelser. Målet med analysen er å fremskaffe datamateriale som sier noe om elever sine utfordringer i arbeid med generaliseringsoppgaver, og som sier noe om det metakognitive arbeidet elevene gjør.

Jeg gjennomførte en analyseprosedyre der jeg først gjorde en grovanalyse av datamaterialet. Grovanalysen bestod i å kode transkripsjoner etter de fire generaliseringsnivåene, samt hva jeg kunne knytte opp mot metakognitiv aktivitet. Først leste jeg gjennom transkripsjonene fra klasseromsobservasjonene for å danne meg et bilde av elevenes løsningsprosess. Klasseromsobservasjonene utgjorde grunnlaget for analysene. Deretter leste jeg gjennom de for andre gang, og markerte utsagn som kunne si meg noe om de ulike generaliseringsnivåene. Utsagnene markerte jeg med post-it lapper i fire ulike farger, og jeg noterte et kort sammendrag på hver lapp. Dette gav et utgangspunkt for hvordan elevene jobbet i ulike stadier med generaliseringsoppgaver. Deretter tok jeg for meg datamaterialet på nytt og kodet transkripsjonene med hensyn på metakognitivt arbeid som elevene gjorde. Her brukte jeg post-it lapper i en femte farge. Denne grovanalysen gjennomførte jeg også på transkripsjonene fra intervjuene. Analysene av intervjuene ble i hovedsak brukt til to ting. De ble brukt til å få et dypere innblikk i det metakognitive aspektet, som kanskje ikke kom godt nok frem fra observasjonen, og til å utfylle dataene som ble funnet fra klasseromsobservasjonene.

Etter den første grovanalysen tok jeg for meg transkripsjonene med de ulike fargekodene. Jeg gjorde deretter en dypere analyse av det metakognitive arbeidet jeg kunne finne innenfor de ulike generaliseringsnivåene elevene jobbet i, og jeg forsøkte å knytte det metakognitive aspektet opp mot de ulike nivåene. Denne analysen utførte jeg på både observasjons- og intervjutranskripsjonene.

Elevbesvarelsene ble analysert i to trinn. Først så jeg på besvarelsene i venstre kolonne på løsningsarkene, merket ”Forklaring”. Her kodet jeg elevenes besvarelser ut fra en metakognitiv synsvinkel. Deretter analyserte jeg besvarelsene i den høyre kolonnen merket ”Løsning” etter de to nivåene oppfatningsnivå og symboliseringsnivå. Analysene fra elevbesvarelsene ble brukt til å utfylle analysene fra observasjonene og intervjuene.

5 Resultat og analyse

I dette kapittelet vil jeg presentere resultatene fra analysene gjort basert på videoopptak, intervjuer og elevenes skriftlige arbeid. Jeg velger å dele resultatene inn i tre deler etter tre av de fire mønsteroppgavene. De to første delene viser elevenes arbeid i den første oppgaveøkten. Jeg ser på gruppe 1 sitt arbeid i mønster 1 og gruppe 2 sitt arbeid i mønster 2. I den tredje delen ser jeg på mønster 3 som elevene arbeidet med i den andre oppgaveøkten. Jeg ser på begge gruppene sitt arbeid i mønster 3. Jeg velger en slik inndeling på grunnlag av datamaterialet, da jeg mener det er mest representativt for resultatene. Jeg velger videre å se på elevenes arbeid i Lees fire nivåer. Jeg tar derimot utgangspunkt i de tre første: oppfatningsnivået, verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået. Etter min mening oppstår det fjerde nivået, analyseringsnivået, innenfor de andre tre, og jeg velger derfor å fremheve dette underveis der det skulle oppstå analyseringsaktiviteter. Jeg bruker datamateriale hovedsakelig fra observasjonsdataene, og datamaterialet fra intervjuene bruker jeg til å supplere. Disse viser jeg i form av nummererte utdrag. Materiale fra elevenes skriftlige materiale kommer frem i form av figurer.

Resultatene skal belyse de to forskningsspørsmålene som ble presentert i innledningen:

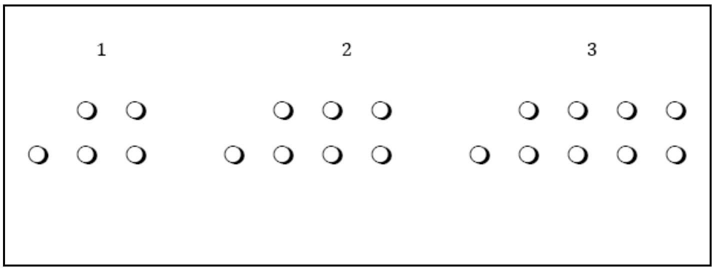
> Hvilke utfordringer møter elever i generaliseringsprosessen?
>
> Hvordan påvirker elever sitt metakognitive arbeid løsningsprosessen?

5.1 Mønster 1 – Problemet med *n* og videre bruk av en nyttig oppfatning

5.1.1 Diskurs og nye oppfatninger

Mønsteroppfatning er en svært individuell aktivitet, og man kan oppfatte en utvikling på mange forskjellige måter. Oppfatningsnivået kan man si er det første steget elevene gjør når de jobber med generaliseringsoppgaver som inneholder figurmønstre. Jeg mener det er elevenes umiddelbare persepsjon av mønsteret som er viktig, og jeg vil i dette avsnittet se på de første ytringene elevene gjør om mønstrene. Hva elevene sier, tegner og skriver i denne fasen kan si noe om elever sin forståelse av oppgaven. Elevene sine oppfatninger kan påvirke løsningsprosessen videre og legge føringer på hvordan de gjennomfører de kommende fasene. Derfor ser jeg det som viktig å få en bedre forståelse for elevenes utgangspunkt i oppgaveløsningen.

Gjennom den første oppgaveøkten var gruppe 1 preget av en del problemer knyttet til blant annet grunnleggende regneferdigheter,[7] og at de satte seg fast i lite nyttige mønsteroppfatninger. Dette skulle vise seg å hindre fremdriften til gruppa, og de ble ikke ferdige med blant annet mønster nummer 2. Stort sett var oppfatningsfasen preget av mye telling og lite diskusjon blant elevene. Jeg vil først se på elevene i gruppe 1 sin oppfatning omkring mønster nummer 1, se figur 4.



Figur 4: Mønster 1, sirkler.

Den umiddelbare oppfatning elevene viser i mønster 1 er at mønsteret utvikler seg med noen kuler for hver gang. I et utdrag fra observasjonsdataene påpeker Mia at denne utviklingen er konstant og med en fast differanse på 2.

1. Mia: Det utvikler seg med 2
2. Even: Ja..
3. Mia: Hele tiden.
4. Even: Ja. Du legger jo til 2 for hver gang da.
5. Line: Det blir uansett 1 mer prikk på den nederste siden enn den øverste.

Allerede i utsagn 3 gjør Mia en generalisering om mønsteret ved å si at denne utviklingen skjer "hele tiden". Hun gir derimot ingen begrunnelse for denne antakelsen.

---

[7] Elevene hadde enkelte problemer når det gjaldt de grunnleggende regneoperasjoner med variabler. Enkelte så ut til å ha problemer med å forstå at *ab* tilsvarte *a* ganger *b*, og lignende.

Even uttrykker også en regelmessighet i utviklingen i form av at det samme skjer ”hver gang”. Utsagn 4 kan tyde på at Even ser den rekursive sammenhengen,

$$a_n = a_{n-1} + 2 \tag{1}$$

men dette kan ikke sies for sikkert. Han uttrykker at det er en regelmessig økning med to prikker, men han sier derimot ingenting om hvor det øker eller hva det er som øker. Han uttrykker bare at noe øker med 2. Her gjør jeg likevel en antakelse om at når Even sier ”hver gang” er det underforstått at det menes mellom hver figur. I samme sekvens ser vi at Line også ser på det figurative aspektet og gjør en antakelse om selve strukturen i figuren. Her uttrykker hun at det er ”sider” som utvikler seg, slik at en side blir lengre enn den andre. Det kan tolkes som at Line i utsagn 5 oppfatter figurene som to linjer der den ene vil være en prikk lengre enn den andre. Det kan tolkes som at Line gjør en analyse av figurmønsteret, og finner en egenskap som ser ut til å gjelde for flere av figurene i mønsteret, at det vil være 1 mer prikk på den nederste linjen enn den øverste. Dette faller innenfor den metakognitive kategorien refleksjon. Om hun mener at egenskapen gjelder for alle figurene i mønsteret er avhengig av meningen hun legger i ”uansett”. I betydningen ”i uansett hvilken figur” gjør Line en generalisering over alle figurene i mønsteret. Dersom hun mener utsagnet som et uttrykk for å fortsette resonneringen, ”uansett hva dere sier nå da, så…” så er det usikkert om man kan kalle det en generalisering.

Elevenes utgangspunkt for arbeidet videre ser ut til å avhenge av hvilket fokus de velger. I utdragene ovenfor viser de to fokus. De uttrykker en rekursiv sammenheng basert på mengden i utviklingen, ”legger til 2”, og de viser en antydning til en figurativ oppfatning omkring begrepet ”sider”. Dersom elevene fokuserer på den rekursive sammenhengen er det usikkert om dette vil hjelpe dem med å uttrykke en algebraisk formel i symboliseringsnivået. Om elevene velger å fokusere på den figurative oppfatningen, kan den derimot vise seg å være algebraisk nyttig i en generaliserings-sammenheng dersom elevene klarer å beskrive de to linjene algebraisk. Med algebraisk nyttig oppfatning mener jeg at en oppfatning er til hjelp og ikke til hinder for å lage en algebraisk formel som beskriver mønsterutviklingen. Det skal senere vise seg at gruppe 1 har vanskeligheter med nettopp å beskrive sammenhengene de ser algebraisk.

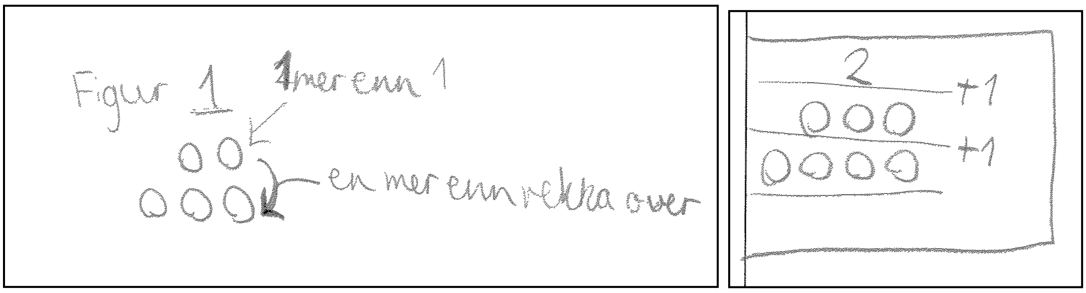
Fra eksempelet ovenfor ser vi at gruppen hadde antydninger til en rekursiv oppfatning og en figurativ generalisering. Etter litt arbeid med mønsteret oppdager Line en ny sammenheng og presenterer dette for de andre elevene. Tidligere så det ut til at Line fant en sammenheng der figurene bestod av 2 vannrette linjer, der den nederste hadde 1 mer prikk enn den øverste.

6.	Line:	Det blir uansett 1 mer prikk på den nederste siden enn den øverste.

Gjennom diskusjon med medelevene på et senere tidspunkt kommer Line frem til enda en sammenheng som kan knyttes opp til den første oppfatningen de hadde. Line gjør et forsøk på å forklare sammenhengen med ord, men Even har litt vansker for å forstå og ber om en gjentakelse.

7.	Line:	Nei, se her! For hver gang den går oppover med 2 så blir den der (peker på figurnummeret) en mindre enn den i øverste rekken, uansett (tegner rundt sirklene i øverste rekke).
8.	Even:	Si det en gang til.
9.	Line:	Hvis dere ser på 1 her (peker på figur 1) så har vi 2 prikker her (sirkler om øverste linje)
10.	Even:	Å. For hver gang så hopper det over…
11.	Line:	Der blir det 2 (peker på figurtall), 3 (peker på øverste linje). Der blir det 3, 4. (Peker igjen på figurtall og øverste linje i figurene) Da trenger vi liksom å ta bort den ene prikken, så den her viser kanskje neste plass.

I utsagn 8 ber Even om en gjentakelse av Line sin nye oppfatning. Even tar initiativ til en diskusjonssekvens der Line må forklare utsagnet sitt mer inngående. I utsagn 10 ser vi også at Even tar opp et poeng ved Lines oppfatning for så å la det stå åpent for forklaring. Fra videodataene kunne man se at Even avsluttet midt i setningen og nikker mot Line. Jeg tolker det som at Even vil at Line skal fullføre setningen. En initiativtaking til diskurs kan tyde på at Even vil sjekke forståelsen han har for Lines utsagn, og øke den matematiske forståelsen for oppgaven. Line må etter oppfordring fra Even omformulere, og velger å ta i bruk et eksempel og gestikulering (se utsagn 9 og 11). Utdraget indikerer at Line mener det er en sammenheng mellom en del av figuren og figurnummeret. Sammen med den første oppfatningen om mønster 1, uttrykt i utsagn 6, utgjør disse utsagnene et godt utgangspunkt for elevene i symboliseringsnivået. Det kan forstås som at de ser det figurative aspektet ved at figurene er delt inn i to linjer, der den ene har en prikk mer enn den andre, og de to linjene i sin tur har en og to prikker mer enn hva figurnummeret viser. Figur 5 viser hvordan Line forklarte sammenhengen.



Figur 5: Line sin forklaring på sammenhengen mellom antall prikker og figurnummer.

Det kan tolkes som at diskusjoner elevene mellom fører til nye, og kanskje mer nyttige oppfatninger. Elevene ser ut til å bruke diskusjon som et middel for å presentere nye ideer, kontrollere hverandre og for å utdype egen og andres forståelse for oppgaven, noe som tydelig faller innenfor de metakognitive aktivitetene overvåkning og diskurs.

5.1.2 To ulike fokus

Verbaliseringsnivået er flytende i den forstand at det ofte vil inngå i de andre, og det kan være vanskelig å skille mellom aktivitetene elevene gjør her fra de andre nivåene. En utfordring som viste seg hos gruppe 1 på verbaliseringsnivået var forståelsen for begreper i oppgaveteksten, samt at de så ut til å trekke raske slutninger om oppgavene.

Figur 6 viser oppgaveteksten og et utdrag der elevene står fast når de blir bedt om å forklare sammenhengen mellom figurnumre og antall elementer i figurene. Oppgaveteksten gir også et eksempel på en nær generalisering. Vi skal senere i symboliseringsnivået se at elevene forklarer at de har vansker med å uttrykke sammenhengen mellom plassen til en figur og figurnummeret *n*.

4. Finn en sammenheng mellom plassen til en figur og antall prikker den har. Se for eksempel på figur nr. 10.

Figur 6: Oppgavetekst 4 til mønster 1

12. Even: Det blir det dobbelte av figur 5.

13. Mia: Ja, da blir det 26 da. Prikker.

14. Even: Finn en sammenheng…

15. Mia: Mellom plassen til en figur…

16. Even: Hvor er den da?

17. Lærer: Ja. Vet dere hva plassen til en figur er?

(Stille. Elevene ser på hverandre, ingen svarer.)

Jeg tolker fra utdraget ovenfor at elevene ikke bruker den figurative oppfatningen de viste på oppfatningsnivået. De ser ut til å ha en formodning om en proporsjonalitet, der de dobler figur 5 for å finne figur 10. I utsagn 12 og 13 ser vi at Even og Mia trekker feil konklusjon om figur nummer 10, da det riktige svaret vil være 23 prikker. Utdraget fra observasjonsdataene ovenfor viser at elevene ikke helt forstår betegnelsen ”plass”. Mia ser ut til å reflektere over betegnelsen knyttet til begrepet ”plass” (utsagn 15) og Even uttrykker i utsagn 16 at han ikke vet hvor ”plassen” skal være. Elevene vil ikke være i stand til å uttrykke en direkte formel for mønsteret dersom de ikke skjønner meningen bak ”plassen til en figur”, og heller ikke hva det vil si å finne en sammenheng. Elevene får etter hvert forklart av læreren at plassen til en figur vil si nummeret på figuren.

Umiddelbart etter forklaringen kan vi fra utdraget nedenfor se at Line ser ut til å kontrollere den første antakelsen, i utsagn 12, om at man kan doble figur 5 for å få figur 10. En slik kontrollering faller innenfor den metakognitive kategorien overvåkning. Om det var refleksjonen over begrepsbruken og oppklaringen fra læreren som var årsaken til at kontrolleringen fant sted er usikkert, men det er sannsynlig at elevene ble i bedre stand til å vurdere gyldigheten til utsagnet. I et utdrag fra observasjonsdataene ser vi at Line kontrollerer Mia sitt utsagn 18.

18. Mia: Du har 11 på nummer 4, så blir det 13 på nummer 5 og da blir det 26.

19. Lærer: Er du ikke enig?

20. Line: Nei, fordi at hvis du går opp med 2 så blir det bare oddetall og hvordan kan det blir et partall da? (tenker) på 3 blir det jo 9, på 4 blir det 11, 5 har 13 (peker på figurene og utenfor figurene der nummer 4 og 5 skulle vært)

21. Mia: Da blir det sånn at du må ta (…) da blir det 23!

Line uttrykker i utsagn 20 at hun er uenig i utsagnet til Mia (utsagn 18). Jeg tolker utsagn 20 som at Line gjør en analyse av den matematiske strukturen i mønsterfølgen, og konkluderer med at alle figurene vil ha et odde antall prikker. Videre spør Line hvordan Mia da kan konkludere med 26, som er et partall. Line viser med eksempler i utsagn 20 at figurene vil ha et odde antall prikker. Det kan se ut til at som følge av en begrepsavklaring hos elevene ble de i bedre stand til å overvåke løsningsarbeidet. En kontrollering av beregninger førte i sin tur til at Line, gjennom en analyse av den matematiske strukturen, oppdaget en feil i beregningene, og elevene fikk rettet opp feilen.

I utdraget under fra observasjonsdataene skifter elevene mellom to ulike fokus. Det ene er å se på tallene som er tilgjengelige i oppgaven, og å finne sammenhenger mellom disse for å beskrive mønsterutviklingen.

22.	Line:	2 ganger 3,5 er 7
23.	Mia:	Men den her da, da kan vi jo si 3 ganger 3 (peker på figur 3). Og her kan vi jo si 1 ganger 5 (peker på figur 1). Det er jo ingen sammenheng i det.
24.	Line:	Nei, det kan ikke være bare oddetall heller. For hvis vi ser på nummer 5, da har vi jo 5 og 13, og 5 går ikke opp i 13. Så da kan det ikke være det heller.

Vi ser at både Line og Mia i utsagnene ovenfor er fokusert på det numeriske aspektet ved figurene, og utsagnene 22 og 23 tolker jeg som prøving og feiling med tilgjengelige tall fra elevenes side. Med numerisk mener jeg at elevene kun er fokusert på tall som er tilgjengelige i oppgaveteksten, som elevene regner seg frem til eller på andre måter bruker for å finne sammenhenger i mønsteret. Det kan tyde på at elevene er i starten på en numerisk generalisering, som beskrevet av Radford (2010) og Becker og Rivera (2006). I utsagn 22 og 23 forsøker de å vise en multiplikativ sammenheng, men kommer frem til at det ikke gir noen mening. Jeg antar her at når Mia sier ”ingen sammenheng i det”, så mener hun at de ikke ser noen multiplikativ sammenheng som er lik for alle figurene. I utsagn 23 viser hun to ulike måter å beregne antall prikker i to ulike figurer. I utsagn 24 avkrefter Line at sammenhengen har med oddetall å gjøre, og at man kan heller ikke gjøre ren divisjon siden antall prikker ikke vil gi et heltall dividert på figurnummeret. Det er sannsynlig at begge jentene her gjør en analyse av egenskapene til mønsterutviklingen, og kommer frem til at sammenhengen ikke kan beskrives rent multiplikativt eller ved en enkel divisjon. Dermed avkrefter jentene to muligheter for å beskrive sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker. Det ser ut til at elevene gjennomfører en overvåkning der de kontrollerer beregninger og argumentering, som fører til at de forkaster noen forslag til mønsterutvikling. Dette tyder på metakognitiv aktivitet som faller innenfor overvåkning.

Det andre fokuset er på oppbyggingen av figurene som to linjer der den ene har en mer prikk enn den andre.

25.	Mia:	Vent litt nå. 3 pluss 2 er 5 (peker på figurnumrene og tilslutt på sirklene i figur 1), 4 pluss 3 er 7 (peker på to figurnumre og så på sirklene i figur 2)
26.	Even:	Men går dette hele veien?
27.	Mia:	Det er det jeg prøver å finne ut nå. (Noterer figurnumre opp til 10, teller litt for seg selv. Diskuterer/teller med Even på figurtallene, regner de sammen med mer.) Men hvordan skal vi skrive dette i en formel? For hvis det er 3 her, så bruker vi 4 og 5 (peker på plassnummer). Men hvordan blir dette i en formel? Hvis vi har figur 2 da, og n er 2. Hvordan skal vi vise at vi bruker 3 og 4?
28.	Line:	Det er alltid de neste tallene plusset sammen blir svaret på den forrige.

I utsagn 25 ser det ut som om Mia finner tilbake til den figurative oppfatningen de viste på oppfatningsnivået, men med en liten vri. Tidligere fant de ut at den øverste linjen i figuren hadde en mer prikk enn figurnummeret, og den nederste linjen hadde en mer prikk enn den øverste linjen (se figur 5). I utsagn 25 viser Mia til en lignende forklaring, men i stedet for å fokusere på linjene i figurene ser hun på de to neste figurtallene som har samme verdi som antall prikker i linjene. Vi ser i utsagn 27 at Mia vil bruke etterfølgende figurtall til å beregne antall prikker i en figur. Problemet her ser ut til å være å uttrykke nummeret på figuren etter en figur *n.* Fra utsagn 27 ser vi at Mia lurer på hvordan de skal klare å uttykke de to figurnumrene etter *n.* I utdraget som følger får vi se at Even fortsatt ikke har en klar oppfatning av hva *n* er.

29.	Even:	Ok, hvis n pluss n er 3 pluss 2 (peker på to etterfølgende figurtall i oppgaveteksten)

Til tross for en forklaring fra læreren tidligere kan vi fra utsagn 14-17 og 29 se at elevene viser problemer med å forstå begrepene *sammenheng*, *plassen* til en figur, og hva som menes med *n*. Det kan tolkes som at elevene ikke er stødige i bruken av variabler, og å uttrykke et høyere figurtall *n+1* er det ingen av elevene som foreslår. Det kan nesten se ut som at de ikke vet at en slik bruk av variabler er lov eller mulig når man jobber med algebra. I utsagn 28 forsøker Line å oppsummere diskusjonen i en verbalisering som kort beskriver hva elevene mener er sammenhengen mellom figurtall og antall prikker. Her antar jeg at "den forrige" tilsvarer antall prikker i en figur *n,* og "de neste tallene" er de to etterfølgende figurtallene. Det som er interessant er at denne verbaliseringen tilsvarer den figurative oppfatningen elevene viste i figur 5, men at de skifter fokus fra figurenes egenskaper om linjene til å se på etterfølgende figurtall. I utsagn 26 viser Even en antydning til at han vil kontrollere at sammenhengen Mia viser i utsagn 25 skal gjelde for alle figurer i følgen. Overvåkning kan være en verdifull metakognitiv aktivitet, siden den gir et utgangspunkt for at Mia videre må generalisere over alle figurene i mønsterutviklingen. Det skal senere i symboliseringsnivået vise seg at et fokus på figurtall skulle gi gruppe 1 vanskeligheter med å uttrykke en algebraisk formel.

5.1.3 Fra oppfatning til formel

Gruppe 1 viste seg å ha noe problemer med både å finne en nyttig oppfatning og i tillegg bruke en oppfatning de hadde funnet videre. Et eksempel på viktigheten av å se et nyttig mønster følger i eksempelet under. Elevene greier ikke å bruke strukturen bak mønstrene når de skal finne en sammenheng mellom figurtallenes posisjon *n* og antall elementer i mønster 1.

5. Finn en sammenheng mellom figur på plass nr. n og antall prikker. Hvordan gjorde du dette?

Figur 7: Oppgave 5 i mønster 1

I oppfatningsnivået og verbaliseringsnivået så vi i utsagn 6 og 28 i kapittel 5.1.1 og 5.1.2 at Line hadde sett egenskaper ved mønsteret som kunne gitt et svært godt utgangspunkt for de neste oppgavene, samt en sammenheng mellom linjene i figuren og figurnummeret (se figur 5). Dette ga en indikasjon på at Line hadde oppfattet det figurative aspektet ved mønsterutviklingen. På et senere tidspunkt uttalte Mia at dette var et konstant forhold i en hvilken som helst figur i mønsteret, og det ser ut som hun gjør en generalisering over alle figurene i mønsterfølgen.

30. Mia: Selv om det er plass 1 eller plass 100 så er det jo alltid 1 mer i den nederste rekken.

Til tross for det som kan se ut som om elevene har en figurativ oppfatning som kunne ha vært nyttig, skifter elevene fokus til de numeriske hintene i oppgaven, som i dette tilfellet var figurnumrene og antall elementer i figurene. Elevene gjør i verbaliseringsnivået flere forsøk på å beskrive forholdet mellom figurtallene og antall prikker de ulike figurene har. Den direkte formelen for utviklingen av figurmønster 1, basert på de oppfatningene elevene så ut til å ha fra utsagn 25 til 28, kunne vært

$$a_n = (n+1) + (n+2) \qquad (2)$$

Her tilsvarer (n+1) den øverste linjen og (n+2) tilsvarer den nederste. Utdraget under fra intervjuet med Line viser at elevene synes det var vanskelig å finne en direkte formel for mønsterutviklingen.

31. Int.: Mm. Ja. Også å finne en sammenheng mellom plass n og antall prikker.

32. Line: Ja. Det er jo litt det samme som den, eller det er jo det samme som den oppgave 4 (se figur 6), men vi fant ikke noe (…) det var vanskelig å skrive en formel på det.

33. Int.: Litt vanskelig?

34. Line: Ja. Så vi tok et eksempel.

Her beskriver Line at gruppen har vansker med å uttrykke en algebraisk formel. De velger derfor å gi et eksempel for å fullføre oppgaven. Under ser vi utdrag fra observasjonsdataene der elevene forsøker å skrive ned et svar på oppgave 5 (se figur 7).

35. Even: Da tar vi for eksempel figur nummer 10…

36. Mia: Pluss figur nummer 11 blir figur nummer 9?

37. Even: Ja. Men det er ikke figuren da, det er jo nummeret. Det er ikke figur 11 vi skal ha, vi skal ha figurnummeret. Figur 11 har jo mange prikker, vi skal bare ha 11.

38. Line: Nei, det blir jo figur nummer 10 = 11+12

Det kan tolkes som elevene bevisst bruker eksempler for å forklare hvordan de mener sammenhengen mellom figurnummer og antall prikker er. Line uttrykte i intervjuet at de hadde problemer med å finne formler og at de dermed bestemte seg for å vise med eksempler. En slik avgjørelse kan tyde på at elevene reflekterer over hvilken representasjonsmåte som vil være hensiktsmessig, og at de velger å bruke eksempel siden dette kan best forklare hva de vil vise i oppgaven. Det er sannsynlig at elevene selv skjønner at de ikke er i stand til å uttrykke en algebraisk formel, og at de dermed tar en bevisst avgjørelse på hvordan de videre skal uttrykke seg, som viser tegn på den metakognitive aktiviteten refleksjon. Vi ser at det er Even i utsagn 35 som tar initiativ til å uttrykke løsningen ved hjelp av et eksempel. Mia utfyller Even i utsagn 36. Vi kan se at elevene bruker betegnelsen "figur nummer …" i alle deler av beskrivelsen i utsagn 35 og 36, noe som notasjonsmessig blir feil. Det kan se ut som elevene mener at alle prikkene i figur 10 pluss alle prikkene i figur 11 til sammen gir alle prikkene i figur 9, noe som blir galt. Even ser dette og korrigerer i utsagn 37, og sier at det er figurnumrene som skal legges sammen for å få totalt antall prikker. I utsagn 38 viser Line den endelige symboliseringen, som jeg tolker som formelen under.

$$a_{10} = 11 + 12 \qquad (3)$$

Det som er interessant er at dersom elevene hadde greid å uttrykt formel 3 for en generell figur *n* ville den tilsvare formel 2 beskrevet tidligere. Det er sannsynlig at det er elevenes tilsynelatende manglende kunnskap om bruk av variabler som hindret de i å komme frem til den direkte formelen vist i formel 2.

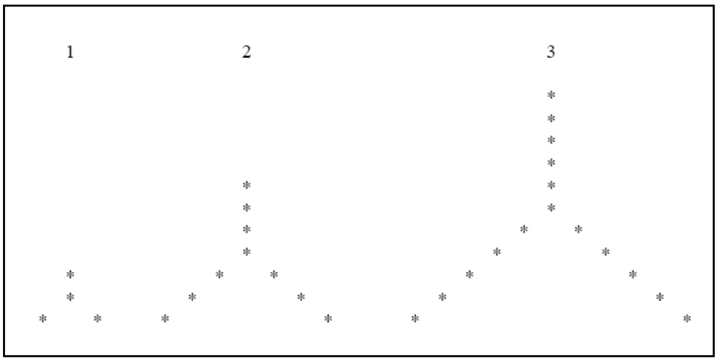
5.1.4 Oppsummering

Det ser ut til at utfordringene for gruppe 1 hovedsakelig ligger i den grunnleggende forståelsen for betydning av og bruk av variabler. Dette i sin tur påvirker den videre løsningsprosessen ved at fjerne generaliseringer, der variabelen *n* er sentral, vil være problematisk å uttrykke ved en direkte formel. I oppfatningsnivået viste elevene initiativtaking til diskusjoner som kunne tolkes som en kontroll av oppfatningen som ble presentert, og som sannsynligvis økte elevenes forståelse. Elevene viste i verbaliseringsnivået en refleksjon om begrepene *figur* og *sammenheng* som, etter forklaring fra læreren, gjorde de i stand til å overvåke arbeidet de hadde gjort. Det førte til at de oppdaget en feil i beregningene sine basert på en feiloppfatning om strukturen av mønsterfølgen, nemlig at man kan doble en figur for å få figuren med dobbelte figurtall. Elevene viser også problemer med å ta i bruk sammenhengene de fant i oppfatningsnivået, og dette så ut til å føre til et stadig skiftende fokus gjennom løsningsprosessen. Elevene forsøker blant annet en multiplikativ sammenheng, men gjennom en analyse av egenskapene til mønsterutviklingen blir denne avvist. Elevene viser underveis i løsningsprosessen mange refleksjoner både omkring begreper, figurutviklingen og representasjonsmåter. I symboliseringsnivået gjorde elevene et bevisst valg av eksempel som representasjonsmåte på bakgrunn av vanskeligheter med å uttrykke en direkte formel ved hjelp av n. Innenfor samme nivå så man også antydninger til en kontrollering av at sammenhengen som ble funnet var gyldig for alle figurer i følgen.

5.2 Mønster 2 – Oppdagelsen av en struktur og utvikling av en formel

5.2.1 Tidlige refleksjoner om en struktur

Oppfatningsnivået til gruppe 2 var preget av mye diskusjoner og elevene var flinke til å dele sine oppfatninger med hverandre. I dette avsnittet ser jeg på hvordan elevene sammen ser ut til å oppdage strukturene bak mønster 2. Vi skal se at elevene fokuserer på hvordan figurene i mønstrene er bygd opp, og at de oppdager en ”grunnstruktur” som de forklarer som utgangspunktet for utviklingen av mønstrene. Figur 8 viser mønsteret elevene jobber med i dette avsnittet.



Figur 8: Mønster 2

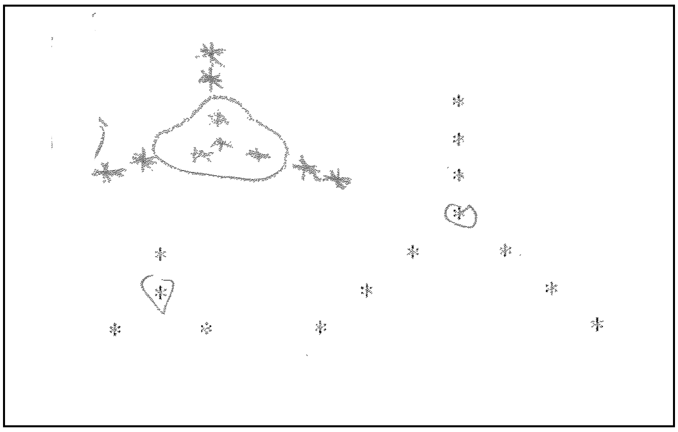
I mønster 2 få elevene en umiddelbar oppfatning om at figurene kan sees som bestående av 3 *armer*, og at hver av disse øker med 2. Under ser vi et utdrag fra observasjons-dataene der elevene uttrykker sine første oppfatninger om mønsterutviklingen.

39. Jonas: Nei, se her nå. 2 (peker på arm og midtstjerne i første figur), 4 (peker på arm og midtstjerne i andre figur), 6 (arm i tredje figur), også 8. (…) Så det går jo det samme alle veiene.
40. Jan: Det øker med 2 på hver… nei.
41. Jonas: Jo, det øker med 2 på hver stjernearm.

Jonas antyder at det er lik utvikling i alle 3 armene, ”samme alle veiene”. For gruppe 2 ble den umiddelbare oppfatningen ganske fort utviklet videre gjennom en fortløpende diskusjon mellom elevene. Elevene gjorde innspill med ny informasjon etter hvert som samtalen gikk, og det så ut til at de oppdaget en struktur i mønsteret bestående av en grunnfigur og økende armer.

42. Jan: Ja. Hvis vi tar med den i midten (sirkler rundt stjernen i midten av figurene)
43. Jonas: Hvis vi ikke tar med den blir det 1, 3, 5 stjerner på hver arm.
44. Jan: Ja, men den må telles. Eller egentlig ikke.
45. Erik: Det spiller ingen rolle om den telles eller ikke da. Faktisk.
46. Jonas: Men 1, 3, 5. Der øker jo den faktisk også med 2.
47. Erik: Ja, det er derfor det er det samme om den telles eller ikke.

Elevene diskuterer hvorvidt de skal telle denne midterste stjernen med i armene eller ikke. I utsagn 39 uttrykker Jonas gjennom gestikulering og tegning på oppgavearket (se figur 9) at den midterste stjernen er en del av armene, noe som kan gi et vanskelig utgangspunkt når elevene senere skal finne den direkte formelen for mønsterutviklingen.



Figur 9: Jonas sin skisse av utviklingen i mønster 2.

I utsagn 43 til 47 ser vi at elevene kommer frem til at man også kan la være å regne med den i armene, og at økningen likevel vil være på to stjerner. Det er rimelig å anta, basert på utdraget ovenfor, at elevene gjennom diskusjoner analyserer egenskapene til figurene. Innledningsvis så vi at Jonas forklarte økningen i form av en partallsrekke som økte med 2 for hvert ledd. Gjennom videre analyse i utsagn 42 og 43 ser vi at Jan og Jonas skiller mellom å telle antall i armene med eller uten stjernen i midten. I utsagn 44 til 47 kommer de frem til at det er samme hvordan de teller, siden utviklingen likevel vil være den samme, bare nå beskrevet av en oddetallsrekke. Det kan se ut til at elevene gjør refleksjoner omkring strukturen til mønsterutviklingen, og analyser av hvordan mønsterfølgen utvikler seg i forhold til figurenes oppbygning. Jeg tolker det videre at de på bakgrunn av dette konkluderer med at utviklingen vil være den samme uansett om de ser på figuren som bestående av tre armen med felles stjerne i midten eller som bestående av tre armer og en separat stjerne i midten. Arbeidet videre mot en algebraisk formel vil sannsynligvis bli påvirket av hvilket fokus elevene nå velger. Dersom elevene oppfatter figurene som bestående av armer og en separat midtstjerne vil det sannsynligvis være en nyttig figuroppfatning som er enklere å symbolisere fremfor en oppfatning der armene har en felles stjerne. I det neste utdraget ser vi tydeligere at elevene oppfatter en grunnfigur.

48. Jonas: Den lille ekstra inni her er jo på en måte den prikken i midten da.
49. Erik: Den er utgangspunktet, er den.

I utsagn 49 beskriver Erik stjernen i midten som et utgangspunkt, og jeg tolker det som at han mener den er utgangspunktet der de neste stjernene bygges på. Min tolkning kan også støttes av Jonas sin skisse i figur 9 der vi kan se at han har sirklet rundt stjernen i midten av figurene og videre tatt utgangspunkt i figur 1 for å bygge utover på hver arm for å lage figur 2.

Det ser ut til at oppfatningsnivået hos elevene i gruppe 1 består av mye refleksjoner omkring strukturen bak mønsterutviklingen. Oppfatningsnivået er også preget av en diskurs der alle elevene kom med innspill i arbeidet med å finne strukturen og språket preges av et matematisk innhold. Diskursen er både et språk og en praksis, og ser her ut til å være et middel for deling av informasjon og ideer, vurdering av ideer og verifisering av konklusjoner. Utsagn 38 til 46 bærer preg av en diskusjon som karakteriser diskursen beskrevet ovenfor. I utsagn 38 deles oppfatningen om øking av armene, videre vurderer elevene om strukturen påvirkes av hvordan de velger å se på utviklingen i utsagn 43 til 44, og de konkluderer med at uansett oppfatning så er utviklingen den samme i utsagn 45. I utsagn 46 og 47 verifiseres denne konklusjonen med et eksempel. Gjennom diskusjoner kommer elevene frem til at de ser en del av figurene som et element mønsterutviklingen bygges videre på, og klassifiserer dette som et utgangspunkt. En klassifisering av et objekt der man tilegner det ulike egenskaper, faller innenfor den metakognitive aktiviteten refleksjon. I verbaliseringsnivået skal vi se at elevene tar i bruk ideen om at figurene består av en konstant midtstjerne og separate voksende armer. Vi skal også se at oppdagelsen av en grunnstruktur gjorde elevene i stand til å uttrykke en direkte formel på symboliseringsnivået.

5.2.2 En ny og nyttig oppfatning, og overvåkning av fremdrift

I verbaliseringsnivået kan det dukke opp sider ved en mønsterutvikling som kanskje ellers ikke ville kommet like godt til syne. Når elevene skal sette ord på oppfatningene sine kan dette trigge en refleksjon omkring ens egne og andres oppfatninger, og relasjoner mellom trekk og egenskaper ved mønsteret blir tydeligere (Mason, 2005). I det følgende eksemplet oppdager en elev en ny sammenheng i mønster 2 der figurtallene kan brukes til å finne antall stjerner i den ene armen til figuren. Elevene jobber her med oppgave 3 (se figur 10) og vi ser av et utdrag fra observasjonsdataene at Jonas kommer frem til en ny oppfatning.

3. Hvordan kan du finne ut hvor mange stjerner figur nr. 10 har? Forklar.

Figur 10: Oppgave 3.

50. Jonas: Skal jeg vise deg noe kult? Se her, 1 (peker på figurtall 1) pluss 0 (peker på fiktivt figurtall foran figur 1) er lik 1 (peker på stjernearm i figur 1), 2 (peker på figurtall 2) pluss 1 (peker på figurtall 1) er lik 3 (peker på stjernearm i figur 2), og 3 pluss 2 er lik 5 (peker på figurnummer 3 og armen til stjernen).

Slik jeg tolker Jonas sitt utsagn 50, mener han at dersom man legger sammen to etterfølgende figurtall så får man antall stjerner i den ene armen til figuren med høyest figurtall. Denne sammenhengen er sannsynligvis en videreføring av den figurative oppfatningen der elevene så på mønsterutviklingen som bestående av to elementer, en konstant stjerne i midten og voksende armer. Jeg tolker det slik på grunnlag av at Jonas i utsagn 50 foreslår en regnemetode der stjernen i midten ikke blir medregnet i stjernearmene. En slik antakelse bekreftes senere av Erik i utsagn 52. Fra observasjonsdataene bærer situasjonen beskrevet ovenfor preg av mye peking, mens Jonas forklarer hva han har kommet fram til. I utdraget under ser vi den videre diskusjonen der Jan forsøker å oppsummere Jonas sin nye oppfatning.

51. Jan: Hvis man adderer det nummeret man er på med det under, så får man tallet og hvor mange stjerner det er på armen… på hver arm på det nummeret du er på.

52. Erik: Unntatt den i midten.

Vi ser i utsagn 51 at Jan tar tak i Jonas sin forklaring og gjør et forsøk på å formulere sammenhengen mer matematisk, uten bruk av eksempler. Det er sannsynlig at Jan mener å oppsummere Jonas sitt tidligere utsagn for å gjøre det enklere for å forstå, eller for å gjenta for seg selv som en kontroll over forståelsen. Det er også sannsynlig at Jan sin oppsummering gav et bedre utgangspunkt for den videre diskusjonen. Han kommer frem til noe som kan ligne på en rekursiv sammenheng mellom figurnumrene:

$$n + (n - 1) = \text{"antall stjerner i en arm til figur n"} \qquad (4)$$

Denne verbaliseringen danner utgangspunktet for formelen gruppen senere finner for det generelle tilfellet *n.* Jonas satt i forkant av utsagn 50 litt for seg selv og så på oppgaven, mens de andre to elevene diskuterte hva de skulle skrive på løsningsarket. I løpet av tiden Jonas satt for seg selv oppdager han sammenhengen beskrevet ovenfor, og deler dette med de andre elevene. Det kan se ut som at Jonas velger å ikke delta i diskusjonen med de andre elevene, og heller foretrekker å sitte litt for seg selv en stund.

53. Jonas: Ser du, det er bra å ikke følge med dere og tenke litt selv!

Det kan antas at den nye oppfatningen kom som et resultat av at Jonas satt i egne tanker, og utsagn 53 kan tyde på at Jonas bevisst velger en fremgangsmåte der han jobber litt alene. En bevissthet om metodevalg faller innenfor den metakognitive aktiviteten refleksjon.

Elevene bygger videre på Jan sin mer konkrete oppsummering av Jonas sin nye oppfatning. I utdraget under kan vi se at elevene bruker den nye oppfatningen til den videre regneprosessen for å finne antall stjerner i hele figuren.

54. Jonas: Også ganger du med 3.
55. Jan: Også pluss 1. (…) x minus 1 er y, y pluss x også ganger 3, pluss 1.

Fremgangsmåten Jonas og Jan beskriver bekrefter at elevene velger oppfatningen om at figurene består av en midtstjerne og 3 separate armer. Vi ser i utsagn 55 at Jan oppsummerer regnemetoden i noe som kan ligne en formel. Jeg tolker det som at *x minus 1 er y, y pluss x* tilsvarer Jonas sin oppfatning om antall stjerner i en arm på en figur. Videre multipliseres armen med 3 for å finne alle armene. Deretter adderes 1, som tilsvarer stjernen i midten. Det som er interessant er at Jan velger å gjøre en slags oppsummering i utsagn 55 ved å uttrykke noe som ligner en formel. Jan tilegner de ulike elementene ved figurene, armene og midtstjernen, en merkelapp med regneoperasjoner, og setter disse sammen til en formel med variablene x og y. Det kan tyde på at Jan reflekterer over strukturen og egenskapene til de ulike elementene i figurene, og basert på dette gjort et valg om å representere oppfatningen verbalt i en formel.

Fra utdragene ovenfor ser vi at elevene kommer frem til en metode for å beregne antall stjerner i figurene, men de fortsatt ikke svarer på oppgaven de begynte på (se figur 10). I utdraget under ser vi at elevene gjør en vurdering av arbeidet de har gjort.

56. Erik: Jaja, men det er jo ikke dette vi skal finne ut da gutter.
57. Jonas: Jeg har på følelsen av at vi gjør ting en smule komplisert.
58. Jan: Enig. Hvordan oppgave er vi på egentlig?

Diskusjonen ovenfor fulgte umiddelbart etter at Jan uttrykte det som lignet en formel i utsagn 55. Det kan se ut som at Erik gjør en vurdering om fremdriften til gruppen og oppdaget at de fortsatt ikke har svart på oppgaven de startet på. Han deler dette med gruppen, og gjør de andre oppmerksomme på at det ikke var en formel de skulle finne i oppgave 3. Det kan også se ut som at Jonas i utsagn 57 gjør en vurdering av hvordan de til nå har jobbet med oppgaven, og mener de har løst oppgaven mer komplisert enn nødvendig. I utsagn spør Jan hvilken oppgave de jobber med, noe jeg mener vitner om at gruppen har mistet fokuset på hva de skulle finne frem til. Fra utdraget ovenfor kan det se ut som at elevene overvåker arbeidet de gjør, noe som er en regulerende metakognitiv aktivitet.

5.2.3 Initiativ til diskurs og utvikling av formel

Fra verbaliseringsnivået kan vi se at gruppe 2 kommer frem til en nyttig figurativ oppfatning i mønster 2, og i utsagn 55 ser vi at de etter hvert gjør forsøk på å verbalisere oppfatningen i et mer matematisk uttrykk. Vi skal se at elevenes oppfatning gir et fordelaktig utgangspunkt når de nå skal formulere en direkte formel. Vi skal også se hvordan notasjons- og begrepsforståelse spiller en rolle i symboliseringsnivået.

I det neste utdraget fra observasjonsdataene jobber elevene med oppgave 5, som spør etter en formel for mønsterutviklingen ved bruk av variablene *S* og *n* (se figur 11).

5. S er antall stjerner i en figur, og n er plassen figuren står på., det vil si figur på plass 1 har 4 stjerner (se figur). Finn sammenhengen mellom S og n der du uttrykker S ved hjelp av n.

Figur 11: Oppgave 5.

59.	Jan:	n pluss 0… nei. n pluss 1… nei, jo. n pluss 1 blir en a. a pluss n er lik b. b ganger 3 og pluss 1.
60.	Erik:	Det skjønte jeg ingenting av.

I utsagn 59 forsøker Jan å lage en formel for mønsterutviklingen som inneholder variabelen *n.* Jan gjorde også et forsøk på å lage en formel i utsagn 55, men den ble bestående av variablene *x* og *y*. Erik gir i utsagn 60 uttrykk for at han ikke skjønner uttrykket. Her ser vi at Erik ser ut til å ha behov for en mer tydelig forklaring enn hva Jan gir. I neste avsnitt ser vi et utdrag der Jan tar i bruk gestikulering og et eksempel for å forklare Erik hva han mener. Det følger en diskusjon om hvordan elevene skal uttrykke mønsterutviklingen ved hjelp av variabler.

61.	Jan:	1 (peker på figurtall 1) minus 1 er lik 0, det blir en a (peker på fiktiv figurtall 0). a pluss n, i det her blir 1. Det er liksom alle armene her (peker på stjernearmene i figurene).
62.	Erik:	Så du skal ha n minus 1, og a pluss 1 (nøler og ser på oppgavearket, peker med blyanten og mumler)… Det blir ikke S det der vet du.

Jan beskriver i utsagn 61 tankegangen bak formelen, og hva elementene i den står for. Vi ser at Erik i utsagn 62 gjentar deler av Jans utsagn 61. Erik nøler mens han gjentar, stirrer og peker rundt på oppgavearket med blyanten. Jeg tolker det som at Erik gjentar utsagnet for seg selv for å forstå hva Jan sier. Når Erik først blir stille og uttrykker at det Jan sier ikke blir *S*, tolker jeg det som en innledning til en diskurs der Jan må forklare videre for å få Erik til å forstå. I den videre diskusjonen skal vi se at Jan gjør et forsøk på å forklare hvorfor formelen gir *S*, og vi skal også se at Erik også ser ut til å vil kontrollere at formelen gjelder for andre figurer.

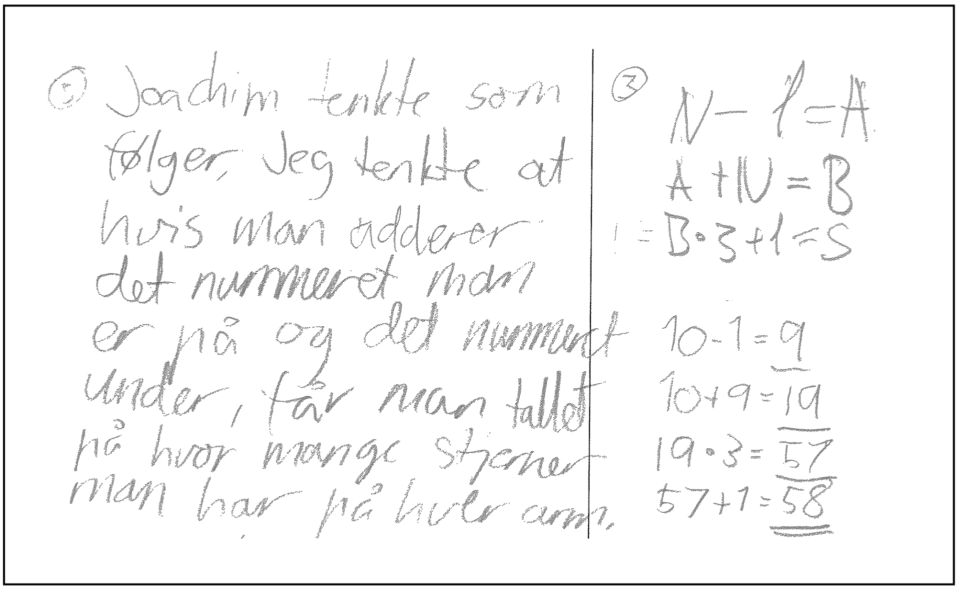
63. Jan: (tenker) Jo, for se her. Det blir jo ganger 3 (peker på 3 armer) pluss 1 (peker på stjerne i midten av figur). For hvis vi først finner 1 side, så ganger vi med 3 for å finne alle 3 sidene, pluss den i midten. Da har vi alle, da har vi hele S.

64. Erik: Men hvordan ska vi da gjøre det her i nummer 2?

65. Jan: 2, da blir det n er lik 2, n minus 1 er lik 1, som er lik a. også har vi a, det er nesten det samme som forrige. a pluss n er lik 3. Og da har vi 3 ganger 3, da har vi alle armene her, så pluss 1, er lik S.

Man kan tydelig se av diskusjonen at fremgangsmåten er basert på en figurativ oppfatning av mønsteret: *finner 1 side, finne alle 3 sidene*. Det er sannsynlig at den figurative oppfatningen elevene har av mønster 2 ligger til grunn for elevenes forsøk på å skrive en direkte formel. Vi så i utsagn 60 at Erik antydet at han ikke skjønte Jan sin forklaring i utsagn 59. I diskusjonen som fulgte gjorde Jan forsøk på å forklare med gestikulering og med figur 1 som eksempel. Vi ser også i utsagn 62 at Erik mener at Jan gjør en feil i å mene at han forklarer utregningen av *S*. Det kan antas at Erik gjør en kontroll av hva Jan sier. I det neste utsagnet ser vi at Jan tenker seg om, og det er sannsynlig at han gjør en kontroll av sin egen oppfatning. Jan kommer derimot frem til at forklaringen var riktig. I utsagn 64 kan vi se at Erik igjen tar opp tråden som om for å sjekke at antakelsene til Jan også gjelder for flere figurer i mønsteret. Jeg tolker utsagn 64 som at Erik vil få bekreftet at formuleringen av utviklingen gjelder for flere figurer i mønsteret. Å ta i bruk diskusjon på en slik måte kan tyde på at elevene vil kontrollere at sammenhenger og oppfatninger er riktige, noe som vil falle innenfor både refleksjon og overvåkning som metakognitive aktiviteter.

I figur 12 ser vi Jan sitt skriftlige arbeid da de ble bedt om å lage en formel for mønsterutviklingen.



Figur 12: Jan sitt skriftlige arbeid med mønster 2

Vi kan se fra figur 12 at elevene tar i bruk flere variabler for å beskrive sammenhengen mellom *S* og *n.* Vi kan også se at de skriver formelen i tre omganger. I utdraget under kan det forstås som at årsaken til at elevene ikke skrev en sammenhengende formel, var grunnet noe forvirring omkring variabelen *n.*

66. Erik: Men hvordan skal vi skrive dette da?
67. Jonas: Kan vi ikke… Vi må ta n pluss n'en som var før.
68. Jonas: Kan vi ikke bruke en stor og en liten n da?

Her kan vi se at elevene ikke greier å skrive ned en direkte formel, og det kan se ut som at Jonas i utsagn 67 forstår at det er variabelen *n* som er problemet. Jonas uttrykker at de må skrive *n pluss n'en som var før*. Jan har allerede i utsagn 59 gitt en oppskrift på hvordan de skal skrive formelen, men velger å bruke en variabel *a* fremfor å bare skrive $n+n-1$. Jonas foreslår i utsagn 68 at de kan bruke en stor og en liten *n*, som kan tolkes som et forsøk på å angi ny notasjon til en allerede eksisterende *n*. Elevenes problem ser ut til å ligge i både forståelsen av og bruken av variabelen *n*. De uttrykker at de må legge sammen to etterfølgende n'er, og foreslår å bruke en stor og en liten. Basert på utsagn 67 og 68 tolker jeg det som at elevene mener at *n-1* blir en ny *n* idet de skal se på flere enn ett figurtall. Derfor vil kanskje elevene uttrykke denne ved hjelp av en ny (stor) *n,* som i tilfellet over resulterer i en a. At de kan legge sammen et figurtall, *n,* med et annet, $n-1$, ser elevene ikke ut til å mene er mulig.

5.2.4 Oppsummering

Elevene i gruppe 2 hadde lite problemer i løsningsprosessen. Gjennom alle nivåene av løsningen viste de mye bruk av metakognitive aktiviteter. Både på oppfatnings- og verbaliseringsnivået hadde elevene en gjennomgående god diskurs der nye ideer ble presentert. Dette så i sin tur ut til å føre til videre refleksjoner om strukturen bak mønsterutviklingen, der ulike elementer i figurene ble klassifisert tilegnet egenskaper. Vi så også i verbaliseringsnivået at elevene gjorde en overvåkning av fremdriften til gruppa og en vurdering av hvordan de hadde løst oppgavene. På symboliseringsnivået dukket det derimot opp en svakhet hos gruppen, nemlig forståelsen av og bruken av variabelen *n.* Det som lignet på en svakhet hos gruppen så ut til å hindre de i å skrive en direkte formel for mønster 2, ved hjelp av variablene *S* og *n.* Elevene greide likevel å skrive en formel i tre ledd, med variablene *a*, *b*, og *n.*

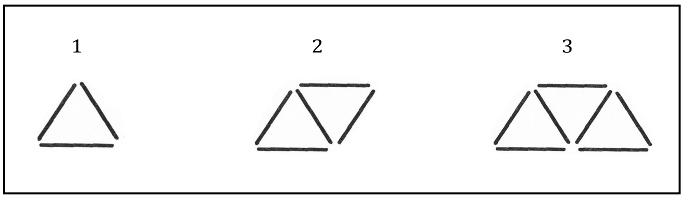
5.3 Mønster 3 – Ulik nytte av tidligere erfaringer

5.3.1 Tidligere erfaringer

Gruppe 1 viste, i arbeidet med mønster 1, at de var fokusert på rekursive sammenhenger i mønstrene. De fleste svarene viste seg å være basert på prøving og feiling med de tilgjengelige figurtallene på oppgavearket, som elevenes arbeid med mønster 1 under verbaliseringsnivået viste. De brukte hovedsakelig de numeriske hintene[8] på oppgavearket og det førte til at de fikk problemer med å uttrykke direkte formler for mønstrene. Gruppe 2 tok derimot tak i nyttige figurative oppfatninger i mønster 2, til tross for det opprinnelige fokuset på tall og rekursiv utvikling fra en figur til neste. Under ser vi to utdrag fra observasjonsdataene, et fra gruppe 1 og et fra gruppe 2. Det aktuelle mønsteret her er mønster 3 i oppgaveøkt 2 (se figur 13).

---

[8] Figurnumre og antall elementer i figurene.



Figur 13: Mønster 3.

Gruppe 1

69. Even: Du legger til 2 og 2 for hver gang, ikke sant. 4 (peker på figurtall) blir 9 (peker på figur), 5 blir 11, og 6 blir 13.

Gruppe 2

70. Jonas: Ok, men det blir jo det samme prinsippet som vi hadde sist da. Det her øker jo også med 2 da.

Den umiddelbare oppfatning av en lineær struktur ser ut til å ligge i den numeriske økningen som skjer mellom hver av figurene i følgen. Vi ser fra utsagn 69 og 70 at begge gruppene har en umiddelbar oppfatning om at figurene øker med 2 fyrstikker. Vi ser at Even sannsynligvis har en oppfatning om at dette er en kontinuerlig økning mellom figurene. Med "hver gang" tolker jeg det som at han har en oppfatning om at økningen er kontinuerlig og mellom etterfølgende figurer. Jonas derimot, uttrykker bare at noe "her" øker med 2. Han sier ingenting om når eller hvor det øker. Underveis i løsningsprosessen dukket det imidlertid opp nye oppfatning omkring mønsteret hos begge gruppene. I utdraget fra observasjonsdataene nedenfor legger Mia merke til at de kan regne seg frem til antall fyrstikker ved hjelp av ulike figurtall, noe elevene i gruppe 1 også gjorde i tidligere mønster.

Gruppe 1

71. Mia: (Leser neste oppgave. Tenker og peker på figurene med blyanten) Haha, det blir jo akkurat det samme jo.

72. Line: Hva blir det samme?

73. Mia: 2 (peker på figurtall) pluss 1 (peker på figurtall) blir 3 (peker på figur 1), 3 pluss 2 blir 5.

74. Line: 4 (peker på figurtall) pluss 3 (peker på figurtall) blir 7 (peker på figur 3), også videre. Ja, det funker jo det også. Men vi burde kanskje funnet en formel.

75. Even: Enig, men nå må vi ikke sette oss fast som sist gang.

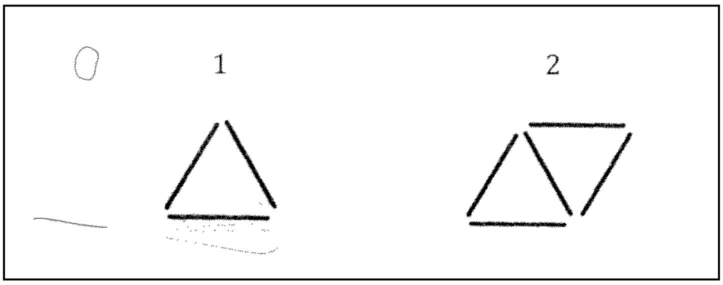
Av utsagn 71 og 73, og på bakgrunn av kjennskap til hvordan elevene løste mønster 1, tolker jeg det som at Mia mener utviklingen i forhold til figurtall skjer på samme måte som i den tidligere oppgaven, mønster 1. Det er sannsynlig at Mia mener to etterfølgende figurtall gir antall elementer i figuren med lavest figurtall. En slik oppfatning viste seg i mønster 1 å ikke hjelpe elevene med å finne en direkte formel for mønsterutviklingen. Even er oppmerksom på at gruppen angriper oppgavene i den andre økten på samme måte som tidligere. Han gjør de andre elevene oppmerksomme på dette i utsagn 75. Det kan tolkes som at Even er klar over at denne tankegangen ikke var nyttig i den forrige oppgaveøkten, og vil styre gruppa inn på andre fremgangsmetoder. Ut fra samtalene mellom elevene kan man se en antydning til at Even gjenkjenner at fremgangsmåten basert på prøving og feiling med figurtallene ikke vil hjelpe dem videre. På ingen av oppgavene greier elevene å finne frem til en direkte formel når de bruker rekursive sammenhenger mellom figurtallene som utgangspunkt. Det er sannsynlig at Even reflekterer over hvordan de løste oppgavene i den første økten, og dermed ser ut til å ville dreie fokuset bort fra en slik løsningsmetode.

I mønster 3 endrer elevene i gruppe 2 etter hvert oppfatning. Erik oppdager at det er en del av figurene som utgjør utgangspunkt for utviklingen mønsteret. Dette utgangspunktet skal vise seg å være en slags figur 0, eller en *grunnlinje*. Fra observasjonsdataene under ser vi også at Jonas trekker paralleller til mønster 2 i den første oppgaveteksten.

Gruppe 2

76.	Erik:	Å, vent litt. La oss gå ut i fra at det er en som er 0 da (Peker på blankt felt foran figur 1).
77.	Jan:	Og den har bare 1 strek!
78.	Erik:	Ja. Hvis vi da har n ganger 0 så blir det 0, og pluss 1 så får du 1! Som er grunntingen liksom.
79.	Jan:	Ja, det er det jeg mener.
80.	Jonas:	Ei grunnlinje liksom. Det var jo sånn siste time også, med stjernene. Der var det en i midten som var den samme hele tiden, det var bare de rundt som økte.
81.	Jan:	Og det er derfor vi plusser på 1.
82.	Erik:	Det er grunnlinjen, det er det mønsteret bygger på.

Figur 14 viser Jonas sin skisse av en grunnfigur 0.



Figur 14: Jonas sitt skriftlige arbeid

Elevene viser en refleksjon omkring elementer i figurmønsteret de kaller *grunnlinje*, og tilegner den egenskapen som et utgangspunkt for mønsteret. På grunnlag av denne refleksjonen og utdraget ovenfor, er det sannsynlig at elevene oppdaget den matematiske strukturen bak mønsteret. I utsagn 80 og 81 kan det se ut som at Jan og Jonas forklarer strukturen med at "pluss 1" vil alltid tilsvare grunnlinjen i figurene. Man kan også se fra utdraget at elevene utfyller hverandres forklaringer og utsagn etter hvert som diskusjonen går frem. Erik presenterte først en ide for de andre, og man kan forstå det som at elevene etter hvert skjønte hva Erik mente, og begynte å bidra og utfylle diskusjonen med informasjon. Jonas sammenligner situasjonen med en tidligere oppgave der de også hadde oppdaget et mønster som hadde et utgangspunkt i en del av figuren. Diskusjonen mellom elevene ser ut til å være svært fruktbar i form av at alle elevene deltar i dannelsen og utviklingen av en ny oppfatning og forståelse. Ved at elevene trekker paralleller til tidligere oppgaver kan det tyde på at de reflekterer over hvordan de best skal løse oppgavene. I mønster 2 skal det vise seg at elevene fant en direkte formel basert på oppfatningen av en grunnfigur. Det er sannsynlig at elevene har den forrige oppgaveøkten og mønster 2 i bakhodet når de videre i verbaliseringsnivået velger å fokusere på oppfatningen om en grunnfigur i mønster 3.

Fra datamaterialet kan det se ut som om det skjer en utvikling hos begge gruppene mellom de to oppgaveøktene. I eksemplene ovenfor kan det se ut som at begge gruppene reflekterer over det tidligere arbeidet de gjorde i den første oppgaveøkten. Vi kan se fra utdraget under at Mia og Erik bekrefter at de bevisst tenkte over den forrige oppgaveøkten når de startet på den andre.

Gruppe 1

83. Int.: Nå jobbet vi jo med slike oppgaver forrige gang også. Tenkte du over det mens du jobbet med disse?

84. Mia: Ja, det var det første jeg tenkte på, at det må være en sammenheng da. I forhold til antallet og nummeret og forskjellig.

Gruppe 2

85. Erik: Ja, jeg tenkte litt på hva vi gjorde sist gang og hvordan vi løste det da. For å finne ut hvordan vi skulle gjøre det nå da.

Her ser vi at Erik forklarer at de tenkte tilbake på den forrige oppgaveøkten når de skulle jobbe med mønster 3 i den andre økten. Det er sannsynlig at måten elevene jobbet på i den andre økten ble påvirket fra tidligere erfaringer, og vi skal også se i symboliseringsnivået at å knytte oppgavene opp mot fremgangsmåter og metoder som har vist seg tidligere å lykkes hjelper elevene med å uttrykke en direkte formel. Vi så også i utsagn 70, 71 og 80 at elever i begge gruppene hadde antydninger til å se tilbake på tidligere oppgaver. Det viser en refleksjon hos elevene der de bevisst ser tilbake på tidligere situasjoner, og bruker dette i videre oppgaveløsning.

Oppfatningsnivået hos gruppe 1 var preget av mye telling og bruk av hverdagslige begreper. Begreper som midten, nederst, øverst og under ble brukt for å beskrive hvordan figurene så ut og utviklet seg, noe som kan betraktes som lite konkrete beskrivelser. Det er rimelig å anta at en hverdagslig, og lite matematisk måte å uttrykke seg på, kunne bli til et hinder i verbaliseringsnivået da elevene skulle uttrykke et mer matematisk utsagn om mønsterutviklingen. En utfordring hos elevene i gruppe 1 ser ut til å være at de tar i bruk de samme fremgangsmåtene som i den første oppgaveøkten, til tross for at de sannsynligvis er klar over at disse fremgangsmåtene ikke hjalp dem tidligere.

5.3.2 Indeksproblemet

I dette avsnittet vil jeg se på ytringer som kan være matematisk nyttige for å komme til symboliseringsnivået i arbeidet med generaliseringsoppgaver. I verbaliseringsnivået kan vi se at det er gunstig for elevene å ha sett en matematisk nyttig struktur i mønsterutviklingen. For en gruppe som skal samarbeide er det rimelig å anta at det er viktig at man forstår hvordan andre tenker. Ved flere anledninger ble det observert tilfeller der elevene beskrev sine oppfatninger og tanker om oppgavene til medelevene, som for eksempel Line i utsagn 7 på oppfatningsnivået i mønster 1, og Jonas i utsagn 50 på verbaliseringsnivået i mønster 2. Å få tilgang til andres tanker gir en oppmerksomhet mot nye oppfatninger og tolkninger av oppgavene. Det er en svært nyttig strategi for forståelse om egen og andres tenkning elevene tar i bruk når de ber andre om å forklare sine tanker. Under er eksempel på at elevene ber hverandre om å forklare hvordan de tenker angående en oppgave eller et utsagn.

I utdraget under diskuterer elevene en oppgave som gikk ut på fjern generalisering, det vil si de skulle finne antall elementer i figur nummer *n* i mønster 3.

4. Finn en formel som gjør at du kan beregne antall fyrstikker som må til for å lage figur nr. n. Kall antall fyrstikker F.

Figur 15: Oppgave 4 i mønster 3

86.	Line:	For eksempel når vi skal finne hvor mange fyrstikker det er på nummer 3. n3 (peker på figur 3) er da n4 (peker på figurtall 4) pluss n5 (peker på figurtall 5)?
87.	Mia:	Men n er figuren. Hva tenker du nå?
88.	Line:	At hvis vi sier at n er (…) Da må vi heller si at nummer 3 (peker på figur 3) er lik nummer 4 pluss 5 (peker på figurnumre).
89.	Mia:	Ja, men hvis vi skal ha antall fyrstikker, det blir F er lik… F er lik 7 da.
90.	Line:	F er lik 7? Nei, vent nå. F er lik 3 pluss 4 (peker på figurnumre), men på figur 4 blir det 4 pluss 5, det blir 9 vet du! (…) Altså, når det er eksempel nummer 3 (peker på figur 3), så må vi nesten skrive at det er figurnummer 3 pluss figurnummer 4.

I eksemplet ovenfor tolker jeg Lines intensjon til å være at hun prøver å forklare hvordan hun kan finne antall fyrstikker i figur 3. Det ser ut til at Line forsøker å forklare ved hjelp av noe jeg tolker som bruk av indekser, selv om dette ikke kommer frem av verken det skriftlige materialet eller i intervjuene. Basert på videoopptakene og elevens peking på figurnumre, tolker jeg det som om hun mener at ”n3” er n_3, det vil si antall fyrstikker i figur nummer 3 i mønster 3. Hun bruker videre ”n4” og ”n5”, men dersom man også tolker disse som indekser vil ikke sammenhengen stemme. Her tolker jeg det som at, basert på peking og håndbruk i videoopptakene, Line mener figurnumrene fremfor antall fyrstikker til hver av figurene. Det kan se ut som om Line prøver å uttrykke den direkte formelen

$$a_n = (n+1) + (n+2) \qquad (5)$$

som viser seg å ikke beskrive mønsterutviklingen riktig. Vi kan se av utsagn 87 at Mia ikke forstår hva Line mener, og ved utsagnet ”Men *n* er figuren” kan det tolkes som at problemet ligger i Line’s bruk av både indekser og figurnumre. Vi kan se av utsagn 88 at Line velger også å vise med eksempler når Mia viser seg å ikke forstå. Line sin første ytring er også feilaktig, men feilen blir oppdaget i utsagn 89 som følge av at Mia ba Line forklare hvordan hun tenkte. Den direkte formelen Line forsøker å uttrykke i utsagn 90 vil da sannsynligvis være

$$a_n = n + (n+1) \qquad (6)$$

Ved å be om en forklaring blir Line nødt til å formulere seg på en annen måte, og vi kan se i utsagn 90 at hun kommer frem til en noe mer forståelig forklaring. Å be om forklaringer er en svært nyttig strategi elevene bruker for å klare opp i misforståelser og for å få se hverandres innfallsvinkler på oppgavene. Utsagnet ”hva tenker du nå?” er en nyttig egenskap som ifølge Mason (2005) kan trigge en refleksjon over trekk og egenskaper i et mønster. I utdraget over bar dette utsagnet trolig årsaken til at forvirringen om notasjonsbruken ble oppklart, og at de andre elevene ble i stand til å forstå Lines innfallsvinkel på oppgaven.

På verbaliseringsnivået blir det klart at å uttrykke det matematiske innholdet i figurmønstre er en utfordring for elevene. Beskrivelser og forklaringer bærer preg av et hverdagslig språk og noe mangel på matematiske begrep og notasjoner. Line sitt forsøk med bruk av indekser i mønster 3 skapte noe forvirring hos de andre elevene, og den matematiske verbaliseringen bærer lite preg av en tydelig og entydig beskrivelse. I både mønster 1 og 3 ser vi antydninger i elevenes arbeid til en oppfatning og verbalisering basert på egenskaper fra figurene. Likevel ser vi også at diskusjonene hovedsakelig dreier seg om figurtallene i oppgaveteksten, noe som kan tyde på at elevene ikke gir slipp på det numeriske fokuset. I begge eksemplene ovenfor kan vi se nytten i at elevene diskuterer oppgavene sammen. I arbeidet med mønster 3 så vi at elevene i gruppe 1 hadde problemer med å forstå hverandre. Gjennom diskusjoner fikk de likevel innsyn i hverandres oppfatninger og utfordringer angående notasjon/språkbruk ble løst.

I verbaliseringsnivået ser vi at gruppe 2 gjør et forsøk på å formulere oppfatningen omkring mønster 3 i en noe mer matematisk form. Gruppe 2 viste seg å ha gode kunnskaper når det gjaldt grunnleggende regning innenfor algebra. Det vil si, de hadde ingen problemer med å gjennomføre grunnleggende regneoperasjoner med variabler. Det var derimot et lite problem når det gjaldt begreper som *sammenheng* og forståelse for spørsmålsstillingen. Under ser vi et utdrag der elevene skal lage en formel for en mønsterutvikling.

91.	Jan:	Ok. (Leser oppgave) Finn en sammenheng mellom plassen til en figur og antall prikker. Jeg skjønte ikke helt. Det jeg ikke skjønner…
92.	Erik:	Hva er det du ikke skjønner nå?
93.	Lærer:	Trenger dere hjelp?
94.	Jan:	Jeg skjønner ikke spørsmålet. Eller jeg skjønner ikke hvordan svaret skal bli seende ut. Er det et tall, eller er det…

Problemet til Jan ser ut til å ligge i spørsmålsstillingen. Han har et problem med å knytte oppgaven opp mot hvordan en eventuell sammenheng skal formuleres. Elevene blir forklart at når de skal finne en sammenheng skal de forsøke å uttrykke en formel for hvordan utviklingen til mønsteret foregår. Etter en oppklaring fra læreren så arbeidet ut til å gå greit for elevene på gruppe 2, og det skal vise seg på symboliseringsnivået at de greide å uttrykke en direkte formel for mønsterutviklingen. Under er det to utdrag fra intervjudataene der elevene forklarer hva de kom frem til etter at de hadde fått en oppklaring fra læreren.

95.	Int.:	Kan du forklare meg kort hva dere kom fram til?
96.	Jan:	Ja, det var fordi at hvis du har nummeret og ganger det med 2, da får du… liksom alle fyrstikkene unntatt 1 da. Den der, 0.

(…)

97. Jonas: Vi fant ut at vi måtte gange med 2 siden det økte med 2, også plusse på 1 på grunn av at den ene grunnlinja som står igjen hele tiden, så får vi ut F. Altså antall fyrstikker.

98. Int.: Mm. Så du har på en måte en grunnlinje da i trekanten?

99. Jonas: Ja, den starten med den hele tiden, også øker det med 2 og 2 og 2…

Det er sannsynlig at oppklaringen fra læreren gjorde elevene i bedre stand til å verbalisere sammenhengen de hadde kommet frem til i oppfatningsnivået. Fra utdraget ovenfor kan vi tydelig se at elevenes arbeid i hovedsak dreier seg om oppfatningen om en grunnlinje og en økning fra denne på 2. I utsagn 97 verifiserer Jonas sammenhengen de fant ved hjelp av egenskapene til figurene og mønsterutviklingen. Jeg tolker det som at elevene har klare refleksjoner om strukturen bak mønsterutviklingen. At Jonas verifiserer på bakgrunn av dette, viser at han sannsynligvis gjør en kontroll av sammenhengen. Elevene viser her metakognitiv aktivitet både i form av refleksjon og overvåkning.

5.3.3 Bruk av eksempler og verifisering av formel

Fra verbaliseringsnivået hadde elevene i gruppe 1 vansker med å uttrykke det matematiske innholdet i mønsterutviklingen. Elevene har både i oppfatningsnivået og i verbaliseringsnivået vist et skifte i fokus mellom en figurativ generalisering og et fokus på etterfølgende figurtall. Under følger et utdrag fra observasjonsdataene der de igjen legger fra seg den figurative generaliseringen og ser ut til å bruke gjetting for å finne en formel for mønsterutviklingen.

100. Mia: Sa du n ganger n minus 1?

101. Even: Nei, 5 ganger n. Det vil si 2 er n (…) Da blir det 10 minus 1 det blir 9.

102. Mia: Ok, da prøver vi på den nummer 4. Hva du sa, n ganger…

103. Even: n ganger 5 minus 1… nei, det går kanskje ikke opp det.

104. Mia: Ja, for vi får ikke til å bruke dette for å finne ut nummer 4. For vi skal jo ha noe som fungerer for alle.

105. Line: Vi må jo bare prøve oss fram da.

Utdraget ovenfor viser at elevene ser ut til å gå fra generalisering til naiv induksjon, som beskrevet av Radford (2010). Utdraget viser også et av flere eksempler der gruppe

1 velger å bruke eksempler når de skal uttrykke sammenhenger i form av formler. Elevene klarer ikke å uttrykke sammenhenger ved algebraiske uttrykk og bruker bevisst en annen representasjonstype for å kunne gjennomføre oppgaven. Dette viser at gruppen reflekterer over metode- og representasjonsbruken, og velger alternative representasjonsmåter fremfor det som de tidligere ikke mestret, som en direkte formel. I utsagn 100 kan det tolkes som at Mia tar initiativ til en diskurs som dreier seg om å finne en direkte formel. Mia gjentar et forslag til en formel som Even tidligere hadde nevnt, og fra utsagn 102 tolker jeg det som at hensikten med diskursen er å teste om denne stemmer for flere figurer i følgen. Dette havner både under den metakognitive aktiviteten diskurs og innenfor Lees analyseringsnivå. I utsagn 103 og 104 kommer elevene frem til at formelen ikke gjelder for eksempelet Mia foreslår i utsagn 102. I utsagn 104 nevner Mia at formelen skal "fungere for alle", noe jeg tolker som at hun mener at formelen skal gjelde for alle figurer i følgen og det generelle tilfellet *n*.

Elevene i gruppe 1 brukte i arbeidet med mønster 1 gjetting når de skulle verbalisere utviklingen i mønsteret og lage en formel. Vi ser av utsagn 106 at Line sannsynligvis mener at elevene også her må gjette for å finne en formel til mønster 3, noe som leder elevene mot en naiv induksjon fremfor en generalisering. Jeg tolker dette som at elevene ikke greier å bruke egenskapene til figuren, eller å omdanne etterfølgende figurtall til algebraiske uttrykk, slik at de blir i stand til å danne en direkte formel. Dette er sannsynligvis grunnen til at elevene videre velger å bruke eksempler for å forklare mønsterutviklingen. Figur 16 viser Lines besvarelse i for av et eksempel på oppgaven 4 i mønster 3.

4. Finn en formel som gjør at du kan beregne antall fyrstikker som må til for å lage figur nr. n. Kall antall fyrstikker F. Eks nr 3. F = nr 3 + nr 4 = 7 fyrstik

Figur 16: Line sin besvarelse.

I den første oppgaveøkten forklarte flere av elevene at de sjelden, om noen gang, hadde jobbet med lignende oppgaver. Jeg oppfattet det som at å jobbe med generaliserings-oppgaver i sammenheng med figurmønstre var forholdsvis nytt for alle, og at alle hadde samme utgangspunkt ved starten av undersøkelsen med tanke på fremgangsmåter og løsningsstrategier. I den andre oppgaveøkten gjorde de bevisste valg av fremgangsmetoder basert på de erfaringene de hadde gjort i den første økten. I eksemplet under ser Jonas likheten i mønsterutvikling med en tidligere oppgave, og påpeker at formelen de skal frem til må være noe lik.

106. Jonas: Ok, men det blir jo det samme prinsippet som vi hadde sist da. Det her øker jo også med 2 da, så det blir nesten.

107. Erik: Hva var formelen sist gang da? x minus x… x ganger…

108. Jonas: Men husk at nå bruker vi ikke x, vi bruker n.

(…)

109. Erik: Her har vi 2 ganger 1 (peker på 2 fyrstikker i figur 1) pluss 1 (peker på 1 fyrstikk i figur 1), det blir 3 (sirkler rundt figur 1). Vi har 2 ganger 2 pluss 1 det blir 5.

110. Jan: n ganger 2 pluss 1?

111. Erik: n ganger 2 pluss 1 ja.

Elevene ser i eksempelet over tilbake på hvordan de løste en tidligere oppgave, og dette hjelper dem sannsynligvis med å finne frem til en formel i den aktuelle oppgaven. Ut fra utdraget ovenfor kan man tolke at elevene gjør bevisste valg i forhold til hvordan de løser oppgavene de jobber med. I utsagn 107 kan vi se at Erik tar tak i Jonas sin ide om at det må være en likhet i formlene, og at han gir eksepler for å forklare mønsterutviklingen. Jan foreslår i utsagn 110 en formel som Erik sier seg enig i. I utdraget under forklarer Jan formelen de hadde kommet frem til.

112. Int.: Også ble dere bedt om å finne en formel for å beregne antall fyrstikker..

113. Jan: Mmm. Da fant vi ut at det ble n ganger 2 pluss 1 er lik F. Og F var fyrstikker.

Etter at elevene formulerte utviklingen til mønster 3 følger en diskusjon der vi kan se at elevene analyserer den matematiske strukturen bak uttrykket og knytter denne opp mot figurene. Elevene ser ut til å utføre en analyse av den direkte formelen de lagde, samt en kontroll opp mot figurene i utviklingen om hvorvidt formelen stemmer.

114. Jonas: 3 (peker på figurtall) ganger 3 er 9, mens den der har 7 (peker på figur 3).

115. Jan: Ja, da er det derfor vi ikke tar n ganger 3, fordi det øker med 2.

116. Jan: Vi tar disse her 2 (peker på to fyrstikker i figur 1), så tar vi ikke den der. (Peker på en fyrstikk i figur 1) Det er jo egentlig sånn det er når vi tar n ganger 2. (…) Men siden den der er her (Peker på 1 fyrstikk/grunnlinje i figur 1) så må vi ta pluss 1, og det må vi hele tiden. I den her så er det 2 pluss 2 (peker på figur 2), siden det øker med 2…

Jeg tolker utdraget ovenfor til at elevenes hensikt er å verifisere formelen de fant, og de gjennomfører en kontroll av formelen sammen. I utsagn 114 og 115 gjør sannsynligvis Jonas og Jan en kontroll og utelukker at formelen kan inneholde 3 ganger *n*. Jan begrunner ved hjelp av figuregenskapene hvor de ulike elementene ”pluss 1” og ”2 ganger n” kommer fra. Basert på utdragene ovenfor tolker jeg det som at elevene viser en god forståelse for strukturen bak mønsterfølgen og de gjør gode verifiseringer i forhold til figurenes oppbygging. Dette vitner om gode analyser av strukturen bak figurene og en overvåkning av beregninger og formelen de fant, som faller innenfor den metakognitive aktiviteten refleksjon og Lees analyseringsnivå.

5.3.4 Oppsummering

Arbeidet i gruppe 1 var preget av et tilbakeblikk på den første oppgaveøkten. I oppfatningsnivået var elevene fokusert på ikke å bruke de samme fremgangsmåtene som tidligere. Gruppen endte opp med å bruke eksempler for å uttrykke mønsterutviklingen til mønster 3, som de også gjorde i mønster 1. Gruppe 1 hadde også et problem på verbaliseringsnivået. Line fant en sammenheng mellom figurtallene og antall elementer i figurene, men hadde problemer med å uttrykke denne verbalt til de andre elevene. Feil i både bruk av indekser og notasjoner tok mye av tiden til løsningen.

Felles for begge gruppene i arbeidet med mønster 3, var at de så tilbake på tidligere erfaringer. For gruppe 2 ble dette en fordel, siden de i den første oppgaveøkten hadde løst oppgavene på en god måte. Erfaringene fra den første oppgaveøkten kom til syne både på oppfatningsnivået og symboliseringsnivået, da elevene fant en grunnlinje og en formel. Arbeidet til gruppe 2 var preget av bedre diskurs og bedre refleksjoner om strukturen bak figurene og mønsterutviklingen, enn gruppe 1.

6 Diskusjon

Fokuset for studien var å se på hvordan elever sin metakognisjon påvirker løsning av generaliseringsoppgaver. I diskusjonskapittelet skal jeg se nærmere på hva resultatene i studien sier i forhold til forskningsspørsmålene:

Hvilke utfordringer møter elever i generaliseringsprosessen?

Hvordan påvirker elever sitt metakognitive arbeid løsningsprosessen?

Jeg vil i de første to delene ta for meg resultater som indikerer elever sine utfordringer. Dernest tar jeg for meg en del som beskriver den metakognitive reguleringen og aktiviteten som oppstår hos elevene. Alle tre delene vil knyttes opp mot problemstillingen underveis. Jeg vil også se hva resultatene sier i forhold til tidligere forskning gjort på temaet generalisering og metakognisjon innenfor hver del.

6.1 Å finne og bruke en nyttig oppfatning

I oppfatningsnivået fokuserte jeg på de umiddelbare ytringene hos elevene som kunne si noe om den første oppfatningen av mønstrene. I noen tilfeller var skillet mellom oppfatnings- og verbaliseringsnivået nærmest ikke til stede, og det kunne se ut til at elevene gikk direkte på verbaliseringen. Det som var felles for begge gruppene i oppfatningsnivået var at det var preget av mye telling, og den umiddelbare oppfatningen av et lineært figurmønster så ut til å ha et numerisk fokus. De første ytringene elevene i begge grupper gjør om alle mønstrene, omhandler den numeriske økningen i antall elementer mellom etterfølgende figurer. En slik oppfatning i seg selv er sannsynligvis lite nyttig når elevene senere skal finne en direkte formel for mønsterutviklingen, men den gir elevene et utgangspunkt å bygge videre på.

Den umiddelbare oppfatningen så imidlertid ut til å endre seg gjennom diskusjoner elevene imellom. Endringer av oppfatninger vitner om fleksibilitet hos begge gruppene, noe Lee (1987) mener er en viktig egenskap å vise når man jobber med generaliseringsoppgaver. Begge gruppene benyttet diskusjon aktivt for å dele oppfatninger og nye oppdagelser i mønstrene. Gjennom verbalisering så de umiddelbare oppfatningene ut til å endre seg i retning mot en mer algebraisk nyttig oppfatning. Gruppe 1 viste antydninger til å gå fra en rekursiv til en figurativ oppfatning i arbeidet med mønster 1. Et slikt skifte vil sannsynligvis være fordelaktig for elevene. En undersøkelse gjennomført av Becker og Rivera (2006) viste at ingen elever med et utgangspunkt i en rekursiv oppfatning greide å uttrykke direkte formler. Basert på diskusjonene elevene imellom og Lines figur (se fig. 5, kapittel 5.1.1), er det tydelig at elevene kommer frem til en algebraisk oppfatning basert på oppbyggingen av figurene. Det som viste seg å bli et problem for gruppe 1 var å ta i bruk denne oppfatningen på verbaliserings- og symboliseringsnivået. På verbaliseringsnivået gir elevene uttrykk for å skifte mellom det numeriske og det figurative fokuset. Med numerisk fokus sikter jeg i dette tilfellet til at elevene så ut til å legge fra seg figurene, og heller konsentrerte seg om figurnumrene i forhold til antall elementer i hver figur. Et tilsvarende fokus hadde elevene også i mønster 3.

Elevene så også ut til å gjette seg frem til en regnemetode for å beskrive sammenhengen mellom figurtall og antall elementer (se utsagn 21-23, s.45). Dette tyder på at elevene gikk fra å generalisere til å gjøre en naiv induksjon. Som beskrevet av Radford (2010), er gjetting en tegn på naiv induksjon. Radford mener da at arbeidet elevene gjør ikke kan sies å være generalisering. Elevene viser ingen antydninger til å gjøre fjerne generaliseringer. Kun på symboliseringsnivået, når en oppgave ber om det, gjør elevene forsøk på dette. På symboliseringsnivået viste elevene fortsatt enkelte tegn på at de hadde oppfatningen basert på figurenes egenskaper. Det er antydninger til at Mia generaliserer over flere figurer i kapittel 5.1.3, basert på en oppfatning om at figurene er bygd av to linjer. Til tross for Mias generalisering er ikke elevene i stand til å uttrykke en algebraisk formel, og de velger å ta utgangspunkt i et eksempel for å kunne forklare sammenhengen mellom figur n og antall elementer i figuren. Det viser at å gjøre fjerne generaliseringer ser ut til å være en utfordring for gruppe 1.

Gruppe 2 hadde i likhet med gruppe 1 umiddelbare oppfatninger som endret seg etter hvert som elevene diskuterte. Spesielt for gruppe 2 var at elevene hadde en figurativ oppfatning basert på en grunnstruktur som resten av utviklingen bygget på. I mønster 2 hadde elevene en oppfatning om en stjerne i midten, som elevene kalte utgangspunktet. I mønster 3 fant elevene et element i figurene de kalte grunnlinje. Elevene hadde en oppfatning om at disse to grunnfigurene hadde egenskapen om at de var figur 0 i følgen. Til tross for en figurativ oppfatning viste det seg at elevene i gruppe 2 ikke greide å uttrykke en direkte formel for mønster 2. Årsaken til dette var grunnet begrepsmessige utfordringen, som presenteres i kapittel 6.2. Det er likevel et tegn på at til tross for en figurativ oppfatning er man ikke automatisk i stand til å lage en direkte formel.

Funnene i kapittel 6.1 er i tråd med hva Lee (1996) fant i sine undersøkelser, nemlig at elever ikke har problemer med å se mønstre, men å finne frem til de som er algebraisk nyttige. Ifølge Lee hadde også elever problemer med å endre sine umiddelbare oppfatninger av en mønsterutvikling. Gjennom denne studien viste det seg at de umiddelbare oppfatningene gjerne ble utviklet, og i enkelte tilfeller erstattet, av nye ideer etter hvert som elevene diskuterte. Årsaken til dette kan være at min studie var det et poeng å la elevene jobbe sammen i grupper, mens dette ikke blir nevnt i Lees undersøkelse. Barbosa, Palhares og Vale (2007) gjennomførte en studie med 54 elever i alderen 11 til 12 år, der hensikten med studien var å undersøke hvilke strategier og utfordringer elever møtte når de jobbet med oppgaver som inneholdt figurmønstre. Resultatene viser et syn som støtter konklusjonen om at fokus på det numeriske ser ut til å hindre elevene i gruppe 1 i å lage direkte formler. Studien viste at elever så ut til å foretrekke å konvertere visuelle oppgaver, som for eksempel figurmønstre, til numeriske. Det viste seg at elever hadde problemer med å finne fjerne generaliseringer, og elevenes tendenser til å manipulere oppgavene numerisk kunne ha bidratt til disse problemene (Barbosa, et al., 2007). I min studie så man også at gruppe 1 hadde tendensene til å fokusere på det numeriske aspektet ved oppgavene, og også her viste det seg at de hadde problemer med å uttrykke direkte formler.

6.2 Begrepsmessige utfordringer

Når elevene skal forklare det matematiske innholdet i oppfatningene sine, blir det tydelig at det er en utfordring for elevene. Et hinder som dukket opp hos begge gruppene var forståelse for begreper som ”plass” og ”sammenheng”.

I arbeidet med en nær generalisering i mønster 1, viste det seg at elevene i gruppe 1 hadde problemer med å forstå oppgaveformuleringen (se figur 6). Elevene viste seg å ikke forstå hva plassen til en figur er. Gruppe 2 viste også noen problemer medbegrepet ”sammenheng”, og forståelse for spørsmålsstillingen i arbeidet med mønster 3. For å kunne lage en direkte formel for en mønsterutvikling er det en nødvendighet å forstå hva ”plass” og ”sammenheng” vil bety, siden disse begrepene blir også brukt i spørsmålsstillingen der elevene skal finne den direkte formelen.

Et annet begrepsmessig problem som gikk igjen hos begge gruppene var forståelsen for, og bruken av variabelen *n* som et generelt tilfelle. Hos gruppe 1 var problemet med *n* en videreføring av elevenes manglende forståelse for begrepet ”plass”. Til tross for en forklaring fra læreren på hva plassen til en figur var i arbeidet med mønster 1, viser ikke elevene noen antydninger til å knytte variabelen *n* opp mot begrepet ”plass”. I utsagn 29 uttrykker Even en feiloppfatning om bruken av *n,* og foreslår at *n* pluss *n* tilsvarer 3 pluss 4. I arbeidet med mønster 3 viser Line enda en feiloppfatning, der hun bruker variabelen *n* med indekser, og uttrykker ulike n’er som n4 og n5. Jeg tolker Lines intensjon til å være at hun vil forklare mønsterutviklingen ved å gi *n* ulike navn. Lines forklaring fører derimot til forvirring blant de andre elevene. Gruppe 1 greide ikke å utrykke direkte formler på noen av mønstrene de jobbet med. Årsaken til dette er sannsynligvis elevenes tilsynelatende svakhet i forståelse for og bruk av variabelen *n.*

I mønster 2 fant elevene i gruppe 2 en sammenheng der de kunne uttrykke den direkte formelen ved et ledd som forutsatte at man la sammen to etterfølgende figurtall. I mønster 3 viste derimot elevene ingen problemer med å bruke *n* i en direkte formel. Årsaken til dette er sannsynligvis at formelen i mønster 3 ikke forutsatte bruk av to etterfølgende figurtall. Dermed dukket ikke problemet med å uttrykke to ulike figurtall opp, og elevene var i stand til å lage en formel. For gruppe 2 så problemet ut til å være at de ikke greide å legge sammen to etterfølgende figurtall uttrykt ved *n.* Som en løsning på problemet foreslår Jonas i utsagn 68 å bruke to ulike *n*’er, som er en misoppfatning i bruk av *n.* For elevene i gruppe 2 så denne svakheten i bruk av *n* ut til å hindre elevene i å skrive en direkte formel for mønsterutviklingen i mønster 2. Figur 12 viser at elevene valgte å skrive formelen i tre ledd. Ved å gjøre dette unngikk de dermed problematikken ved å skrive to ulike figurtall i ett og samme uttrykk.

Resultatene stemmer overens med MacGregor og Stacey (1997), Mason (1996), og Radford (2000) sine undersøkelser, som viste at elever opp mot opp mot tenårene har problemer med å tolke algebraiske symboler som generaliserte tall eller som spesifikke ukjente. MacGregor og Stacey (1997) undersøkte årsaker til elever sine misforståelser og fant årsaker som kan utdype spesielt gruppe 1 sine problemer med å uttrykke direkte formler. En av disse var elever sine tendenser til å gjette på betydningen, og slik danne misoppfatninger, noe som kan forklare Lines problem når hun tok i bruk indekser for å forklare utviklingen. Vi så også at elevene selv tok initiativ til å gjette seg frem til en formel. Ifølge Mason (1996) er det typisk for lærere å vise hastverk med introdusere bokstaver og symboler i undervisningen. For elever som ønsker en forståelse for algebra og de som presterer lavere får vanskeligheter med å se relasjonen mellom mønstre og symbolbruk, og å skjønne tankegangen bak symbolbruk og regneoperasjoner (Mason, 1996). Om dette er tilfellet med elevene i undersøkelsen er usikkert, men det er slett ikke usannsynlig.

6.3 Metakognitivt arbeid

Diskurselementet viste seg å være en faktor som påvirket alle nivåene i generaliseringsprosessen. Elevene tok initiativ til en diskurs, og brukte denne som et middel for å øke den matematiske forståelsen. Elevene i gruppe 1 brukte diskursen til å presentere nye ideer og for å utdype egen og andres forståelse for oppgaven. I mønster 1 presenterte Line en ny oppfatning om mønsteret. Den videre diskursen var preget av forklaringer omkring oppfattelsen og kontrolleringer av at de andre elevene hadde forstått oppfatningen på samme måte som Line. Også i mønster 3 tok elevene i gruppe 1 i bruk diskursen, når de skulle finne en direkte formel for mønsterutviklingen. Hensikten med diskursen var å teste om formelen stemmer for flere figurer i følgen.

Elevene i gruppe 2 ser ut til å bruke diskursen på en litt annen måte enn elevene i gruppe 1. Gruppe 2 var mer preget av en diskurs der selve strukturen i figurene er i fokus. På oppfatningsnivået i mønster 2 viste elevene tegn til en innholdsrik diskurs der informasjon og ideer ble delt, vurdert og verifisert, og alle elevene deltok i diskusjonene og tilføyde meninger. I mønster 3 så vi lignende eksempel i oppfatnings- og symboliseringsnivået. I forhold til gruppe 1, viste elevene i gruppe 2 en mer innholdsrik diskurs. Innholdsrik i den forstand at alle elevene bidro i større grad og diskursen utviklet seg til å inneholde mer nyttige diskusjoner om strukturer og verifiseringer av figurene.

Diskursen, hos begge gruppene, så ut til å være en døråpner for de andre metakognitive aktivitetene. Refleksjoner og overvåkning følger gjerne etter initiativtaking til diskurs. For diskursen i en gruppe er det nødvendig at elevene overvåker formuleringene sine både verbalt og skriftlig, fordi de andre gruppemedlemmene skal forholde seg til hva du uttrykker (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Det blir her tydelig at diskurs er et verktøy som elevene bruker aktivt gjennom hele løsningsprosessen, og dette var gjennomgående hos begge gruppene. På oppfatningsnivået førte informasjonsutveksling av umiddelbare oppfatninger og synspunkter til at elevene fikk fyldigere oppfatninger og verbaliseringer. Gjennom diskusjon satte elevene ord på oppfatningene sine og det førte til mer konkrete verbaliseringer og også oppdagelse av nye sammenhenger. Dette viste seg hos gruppe 1 i arbeidet med mønster 1 på oppfatningsnivået, og hos gruppe 2 i arbeidet med både mønster 2 og 3 på verbaliseringsnivået.

Når det gjelder den metakognitive aktiviteten refleksjon, er det klart at dette var den mest fremtredende aktiviteten hos begge gruppene under oppgaveløsningen. Gruppe 1 var spesielt preget av refleksjoner om representasjonsmåter. De viste seg å ha utfordringer når det gjaldt å uttrykke direkte formler, dermed gjorde de bevisste valg på å vise sammenhengene de hadde funnet ved eksempler. Ved bevisst å bruke eksempler som representasjonsmåte ble elevene i stand til å svare på oppgavene om fjerne generaliseringer. Elevene viste også refleksjoner omkring strukturen bak mønsterutviklingen i mønster 1. Det var imidlertid overfladiske refleksjoner som elevene ikke gjorde nytte av. Grunnen til at elevene ikke greide å videreføre refleksjonene sine er sannsynligvis at en del av oppgaveløsningen var preget av lite diskusjoner, og en del regning og telling på egen hånd. Elevene så ikke ut til å samarbeide i like stor grad som elevene i gruppe 2, og dermed fikk de ikke full uttelling for diskusjonene og refleksjonene sine.

Gruppe 2 derimot brukte refleksjoner på en mer aktiv måte, noe som førte til at nyttige oppfatninger ble funnet og elevene ble i bedre stand til å uttrykke direkte formler. I mønster 2 på oppfatningsnivået reflekterte elevene over strukturen bak mønsterutviklingen, og de fant ulike måter å knytte utviklingen opp mot elementer i figurene. De fant gjennom diskusjoner en figurativ oppfatning om at figurene hadde en stjerne som et utgangspunkt, og resten som økende armer. Gjennom nye refleksjoner av utviklingen fant Jonas en måte å beregne armene på. Elevene greier som følge av dette å uttrykke en formel for mønsterutviklingen, gjennom å tilegne ulike deler av figuren til ulike elementer i formelen. Ved å tilegne deler av figurene egenskaper, og ved å lage en formel ut fra figurenes egenskaper, viser elevene i gruppe 2 gode refleksjoner omkring strukturen til mønsterutviklingen. Det er trolig refleksjoner omkring strukturen og egenskapene til figurene som gjorde elevene i stand til å utlede direkte formler, samt diskusjoner preget av deltakelse og initiativ.

Elevene viste også ved enkelte anledninger at de kontrollerte sammenhengene og formlene de hadde funnet, en slags verifisering gjennom bruk av eksempler. Den metakognitive aktiviteten overvåkning viste seg å være sporadisk, men til stede, hos begge gruppene. Mesteparten av resultatene viste enkelte kontroller de direkte formlene, dette gjaldt spesielt gruppe 2. I mønster 3 gjennomførte de også en verifisering av den direkte formelen de hadde kommet frem til. Gruppe 1 gjennomførte kontroller av at elevene hadde forstått hverandres oppfatninger og nye ideer underveis. Dette førte til at elevene hadde samme oppfatning om mønsteret, og hadde samme utgangspunkt for det videre arbeidet. Overvåkningen til gruppe 1 gikk stort sett ut på små lokale kontroller i den aktuelle oppgaven elevene jobbet med, og det var lite tegn til overordnede kontroller av fremdrift og måloppnåelse. Erik i gruppe 2 derimot viste en form for overvåkning om fremgangen gruppen benyttet i arbeidet med mønster 2. I tillegg til dette viste også gruppe 2 enkelte kontroller av hverandres oppfatninger.

Overvåkning så ikke ut til å være en prioritert del av elevenes arbeid, og det forekom noe sporadisk. Dette stemmer godt overens med Lees (1996) artikkel der hun beskriver at kontroller var lite utbredt blant elever. Årsaken til dette kan være at elevene ikke er vante med å kontrollere arbeidet de gjør, og heller ikke å overvåke en overordnet fremdrift av arbeidet. Om dette derimot er tilfellet hos elevene i studien er usikkert. Det er derimot antydninger til at de kontrollene elevene gjennomførte hadde en positiv effekt i at elevene fikk innsyn i hverandres oppfatninger, og elevene fikk verifisert noen av formelen, noe jeg anser som nyttig i forhold til den matematiske forståelsen.

Når det gjelder den metakognitive aktiviteten planlegging, var det lite å finne hos begge gruppene. I den første oppgaveøkten var det ingen tegn til at noen av gruppene gjennomførte noen som helst planlegging av hvordan de skulle angripe oppgavene. Det betyr ikke at elevene ikke planla noe, men det er ikke kommet frem i datamaterialet. En antydning til noe som kan tolkes som planlegging kommer frem på oppfatningsnivået i den andre oppgaveøkten. Begge gruppene så tilbake på tidligere oppgaver, og viste tegn til å la det videre arbeidet påvirkes av dette. Gruppe 1 viste gjennom en diskusjon at de "må ikke sette oss fast som sist gang", og de hadde et stadig tilbakeblikk til den tidligere oppgaven under arbeidet med mønster 3. Gjennom å påpeke dette gjorde eleven et bevisst forsøk på å dreie gruppearbeidet bort fra fremgangsmåter og tankegang som tidligere hadde vist seg å ikke gi resultater. Gruppe 2 derimot så ut til å ta utgangspunkt i en tidligere formel når de skulle lage en for mønster 3. Det er tydelig at elevene har ulike tilbakeblikk på tidligere erfaringer, og at dette sannsynligvis påvirker den videre løsningsprosessen. Om dette var en bevisst planlegging fra elevenes side er derimot usikkert. En tilsynelatende mangel på planlegging i forkant av oppgavene

7 Konklusjon og perspektivering

Fra resultatene så man at det kan være en utfordring for elevene å finne en algebraisk nyttig oppfatning med utgangspunkt i et numerisk fokus. Om en oppfatning er algebraisk nyttig er vanskelig å si på oppfatningsnivået. Det kom også frem at å finne en matematisk nyttig oppfatning er nødvendig for å være i stand til å uttrykke en direkte formel, men ikke nødvendigvis tilstrekkelig i seg selv. Elevene viste også utfordringer når det gjaldt å uttrykke det matematiske innholdet i en mønsterutvikling ved hjelp av *n*. Å ha en forståelse for variabelen *n* som et generelt tilfelle er sannsynligvis nødvendig for å uttrykke en direkte formel. Når det gjelder det metakognitive aspektet viste resultatene at den metakognitive reguleringen elevene gjør i en generaliseringsprosess sannsynligvis har en positiv effekt i alle steg av løsningsprosessen mot en direkte formel.

I forhold til generalisering, ser jeg klart nytten i en kategorisk inndeling, slik Lee (1996) gjør i sin artikkel. Jeg ser også behovet for mer utfyllende forskning angående elever sine vanskeligheter innenfor arbeid med generaliseringsoppgaver. Dette for å kunne avdekke flere mulige problemer, og for senere å kunne håndtere problemer som dukker opp. Det vil også være interessant å se på hvordan oppgavene kan utvikles videre og tilpasses slik at utfordringene blir mindre for elevene. Jeg mener at generaliseringsaktiviteter kan være en introduksjon til andre tema i skolematematikken, for eksempel funksjoner. Generaliseringsaktiviteter mener jeg kan fungere som en introduksjon til begreper som ”variabel” og ”ukjent”, og være en brobygger mellom ulike representasjonsmåter i undervisningen. En videre utvikling av oppgavene i denne studien kunne vært å endre representasjonene til å nærme seg for eksempel grafer. Ved å endre representasjonsmåtene i oppgavene kan elevene introduseres til nye tema gjennom generaliseringsoppgaver, og gi en alternativ fremgangsmåte i undervisningen. Det kunne vært interessant å se om generaliseringsoppgaver kunne gitt et grunnlag for både som en introduksjon til algebra og som en videreføring til mer komplekse tema som funksjoner og lignende. Det er flere vanskeligheter som dukker opp når elever jobber med generaliseringsoppgaver. Mason (1996) tar opp utfordringer som lærere må være oppmerksomme på. En av grunnene til at mange elever har gitt opp algebra tror jeg er hastverket lærere ofte har med å introdusere bokstaver og symboler i undervisningen. En annen utfordring elever møter er at mønstre og sammenhenger de oppdager ikke har noen nytteverdi i oppgavesammenhengen (Mason, 1996). Jeg ser et behov for ytterligere forskning som kan fokusere på undervisningsaspektet når elever jobber med generaliseringer. Det som kunne vært interessant å se på er hvorvidt læreren rolle har noen innvirking på hvordan elevene løser generaliseringsoppgaver, eller å se på hvordan læreren på best mulig måte kan legge til rette for at elevene får utbytte av generaliseringsoppgaver.

Det metakognitive aspektet ved læring og undervisning har vist seg for meg å være vanskelig å få tak på. Kompleksiteten som ligger i begrepet metakognisjon mener jeg vitner om et behov for mer forskning som kan gi en dypere innsikt i temaet. I studien har jeg sett antydninger til at metakognitive aktiviteter har en positiv påvirkning når elever jobber med generaliseringsoppgaver, og dette forteller meg at det metakognitive aspektet i læring og undervisning bør undersøkes videre. For meg har metakognisjon blitt en betegnelse på en klarere bevissthet om egen tenkning som kan bidra til å bedre tenkeevnen hos elever betydelig. Jeg tror at dersom metakognitiv regulering hos elevene blir inkludert i skolen kan man legge grunnlaget for at det går an å lære hvordan man skal lære, og trene seg opp til bedre læringsvaner slik at arbeidet går lettere. Det som kunne vært interessant er å se på hvordan lærere kan implementere metakognisjon i undervisningen. Jeg ser for meg at en opplæring i form av metakognitive instruksjoner for hvordan man kan ta i bruk ulike strategier vil kunne være nyttig.

Gjennom masterstudien har jeg lært mye om hvordan generaliseringsoppgaver kan brukes i undervisningen. Både metakognisjon og generalisering opptar en stor del i matematikkdidaktikkens forskningsfelt, men forskning på elever sin metakognisjon knyttet opp mot generaliseringsaktiviteter er vanskelig å finne. Jeg har gjennom studien argumentert for at generaliseringsaktiviteter kan være svært nyttig i undervisningen, og også at metakognisjon kan være til stor hjelp i læringsprosessen. Et naturlig steg videre vil for meg være å se på hvordan disse to temaene sammen kan bidra til å øke elever sin forståelse i matematikk, og gi bedre kvalitet på undervisningen. Studien har så vidt åpnet døren for et slikt fokus, men på langt nær det som jeg mener er nødvendig. Jeg håper studien kan være med på å rette søkelyset mot et nytt fokus i forskningsfeltet.

Referanseliste

Alexander, J. M., Johnson, K. E., Albano, J., Freygang, T., & Scott, B. (2006). Relations between intelligence and the development of metaconceptual knowledge. *Metacognition and Learning, 1*(1), 51-67.

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *Mathematics Education, 40*, 111-129.

Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Patterns and generalization: The influence of visual strategies *Proceedings of the 5th Congress og the European society for Research in Mathematical Education* (pp. 844-851). Larnaca: Cyprus Department of Education.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level *Proceedings of the 30th. PME International Conference* (Vol. 4, pp. 465-472). Praha: PME.

Cohors-Fresenborg, E., & Kaune, C. (2007). Modelling classroom discussions and categorizing discursive and metacognitive activities *Proceedings of the 5th Congress og the European society for Research in Mathematical Education* (pp. 1180-1189). Larnaca: Cyprus Department of Education.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. In O. Dysthe (Ed.), *Dialog, samspel og læring* (pp. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students´ reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

Garofalo, J., & Lester, F. K., Jr. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 163-176.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 193-223.

Imsen, G. (2008). *Elevens verden - Innføring i Pedagogisk Psykologi* (4 ed.). Oslo: Universitetsforlaget.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classroom that Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah, New Jersey: Erlbaum.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (Vol. 8, pp. 21-33). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28.

Lee, L. (1987). The status and understanding of generalised algebraic statements by high school students. In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th. PME International Conference*.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In C. Kiernan, L. Lee & N. Bednarz (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

Lester, F. K., Jr. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660-675.

Livingston, J. A. (2003). Metacognition: An overview. Retrieved 15.03, 2010, from http://www.julianhermida.com/metacognition.pdf

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & f. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th. PME International Conference* (Vol. 1, pp. 181-188). Tsukuba, Japan: PME.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In C. Kiernan, L. Lee & N. Bednarz (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: The Open University in ass. Paul Chapman Publishing.

Mellin-Olsen, S. (1990). Oppgavediskursen. In G. Nissen & J. Bjørneboe (Eds.), *Matematikkundervisning og Demokrati* (pp. 47-64): Statens Humanistiske Forskningsråd, Initiativet vedrørende Matematikkundervisning, RUC.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantiative, qualitative and mixed methods* (2 ed.). London: Sage Publications.

Mitchelmore, M. C. (2002). The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge. In D. Edge & Y. B. Har (Eds.), *Mathematics education for a knowledge-based era: Proceedings of the Second East Asia Regional Conference on Mathematics Education and the Ninth Southeast Asian Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 157-167). Singapore: Association of Mathematics Educators.

Montague, M., & Bos, C. S. (1990). Cognitive and metacognitive characteristics of eighth grade students' mathematical problem solving. *Learning and Individual Differences, 2*(3), 371-388.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2 ed.). Garden City, N.Y.: Doubleday.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In C. Kiernan, L. Lee & N. Bednarz (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 107-111). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students´ emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns - A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328.

Robson, C. (2002). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers* (2 ed.). Oxford: Blackwell Publishing.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students generalisation thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd. PME International Conference* (Vol. 4, pp. 161-168).

Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness *Instructional Science, 26*(1-2), 113-125.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (Vol. 22, pp. 141-153). Dordrecht: Kluwer.

Stillman, G. A., & Galbraith, P. L. (1998). Applying mathematics with real world connections: Metacognitive characteristics of secondary students. *Educational Studies in Mathematics, 36*(2), 157-194.

Veenman, M. V. J., Hout-Wolters, B. H. A. M. V., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: Conceptual and methodological considerations. *Metacognition and Learning, 1*(1), 3-14.

Vygotskij, L. S., & Cole, M. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Vedlegg 1 - Samtykkeskjema

Hilde Fossbakk
Tlf.: 95116130
Email: hildefo@stud.ntnu.no

Trondheim, 4.mars

Til foreldre/foresatte for elever på 9. trinn ved Ugla skole

Anmodning om tillatelse til videoopptak av undervisning og lydopptak av intervju

Jeg er masterstudent i Lektorprogrammet i Realfag ved NTNU, Program for Lærerutdanning. Dette studieprogrammet har som mål å utdanne lærere som vil være i stand til å gi en god matematikkundervisning for elever i skolen, og det fokuserer på hva som er nødvendig kunnskap å ha når det gjelder undervisning og læring av matematikk. Jeg skal nå gjennomføre mitt masterprosjekt som innebærer at jeg skal undersøke hvordan elever jobber med en spesiell type matematikkoppgaver, generaliseringsoppgaver. Jeg skal gjennom 2-3 skoletimer dele ut oppgaver som elevene skal løse i grupper, og jeg vil fokusere spesielt på en gruppe hver time for å samle inn datamateriale. I etterkant av timene vil jeg ta inn noen elever til intervju vedrørende disse oppgavene.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak av undervisningssekvenser og lydopptak av intervju med/av elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre videoopptak/ lydopptak av elever i 9. trinn ved Ugla skole. Det er snakk om 4-6 skoletimer for enkelte av elevene. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert så langt råd er, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Videoopptak vil være basert på normale undervisningssituasjoner i klassen, og opptakene vil bli lagt til rette slik at de i minst mulig grad skal kunne påvirke elevenes læring. Intervjuene fokuserer på elevenes arbeid i den foregående timen, og hvordan eleven løste disse oppgavene. Ingen personlige spørsmål vil stilles, det vil kun være fokus på det matematiske. Opptakene vil kun bli sett/hørt av meg og eventuelt min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at masteroppgaven er fullført, etter planen 1.juni, vil innsamlede data bli slettet.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer). Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til videoopptak/lydopptak i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen
Hilde Fossbakk

Vedlegg 1 - Samtykkeskjema

SVARSLIPP (stryk det som ikke passer)

Vi / jeg gir /gir ikke tillatelse til at det kan bli foretatt videoopptak av matematikkundervisning i klassen der _________________________________(elevens navn) er elev.

Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

____
(Sted og dato)

____
(underskrift fra foresatte/foreldre)

Vennligst returner svarslippen til læreren i klassen så snart som mulig.

INTERVJUGUIDE

1. Fortell meg om oppgavene. Hva gikk de ut på?
2. Har du jobbet med lignende mønsteroppgaver tidligere?
3. Hvis du har
   * husket du det mens du jobbet med disse oppgavene?
   * brukte du dette mens du løste disse oppgavene? Hvordan da?
4. Hvordan startet du å jobbe med oppgavene?
5. Hadde du en bestemt plan eller satte du bare i gang med å prøve noe?

Vi skal så se på hvordan du løste oppgavene.

a. Forklar hvordan mønsteret utvikler seg. Hvordan kom du frem til dette? Hvordan ser du at det utvikler seg?

b. Finnes det flere sammenhenger enn den du fant? Hvilke fant du?

c. Hvordan fant du antall prikker/stjerner for figur på plass 4? Forklar.

d. Hvordan fant du antall prikker/stjerner for figur på plass 10? Forklar,

e. Hva med n? Forklar.

f. Dersom du fant en direkte formel, hva er de ulike variablene/elementene her?

g. Kan du forklare formelen din ved hjelp av figurene?

h. Se på disse formlene: (endre etter aktuelt mønster)

   Antall stjerner = 1 + 3 * (n + n - 1)

   S = 3 * 2n - 2

   S = 4 + 3 * (n + n - 2)

   Hvilke av disse er riktige? Forklar.

i. Kan du forklare hva de ulike elementene i formlene er i figurene?

✓ Var det noen gang underveis at du stod fast, eller følte at ved å gjøre ting på en slik måte at det ville ta for lang tid?

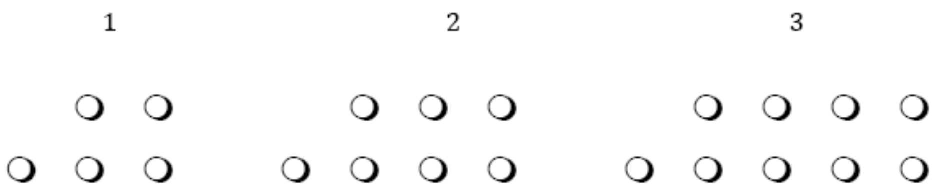
✓ Hva var vanskelig, og hva gjorde du for å løse problemet?

✓ Sjekket du at sammenhengen du fant stemte? Hvordan?

✓ Sjekket du underveis om mønsterutviklingen du fant faktisk stemte? Hvordan?

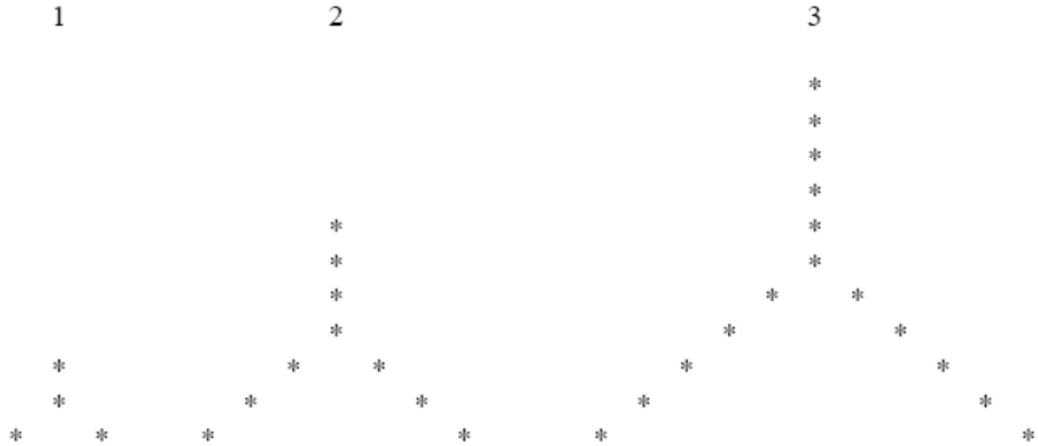
Vedlegg 3 – Elevoppgave 1, første oppgaveøkt

Mønster 1: Prikker



1. Hvordan utvikler dette mønsteret seg? Forklar med ord.
2. Hvor mange prikker har figur nr. 4?
3. Hva skjer med antall prikker etter hvert som mønsteret utvikler seg?
4. Finn en sammenheng mellom plassen til en figur og antall prikker den har. Se for eksempel på figur nr. 10.
5. Finn en sammenheng mellom figur på plass nr. n og antall prikker. Hvordan gjorde du dette?
6. Kan du finne flere måte å forklare denne sammenhengen på?

Mønster 2: Stjerner i kryss



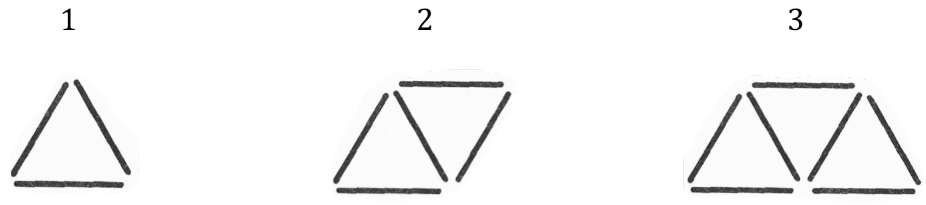
1. Hvordan vil figur på plass nr. 4 se ut? Hvor mange stjerner vil denne ha?
2. Forklar hva som skjer med stjernene etter hvert som mønsteret utvider seg.
3. Hvordan kan du finne ut hvor mange stjerner figur nr. 10 har? Forklar.
4. Foreslå en metode for å regne ut hvor mange stjerner som må til for å lage en hvilken som helst figur i denne mønsterfølgen.
5. S er antall stjerner i en figur, og n er plassen figuren står på., det vil si figur på plass 1 har 4 stjerner (se figur). Finn sammenhengen mellom S og n der du uttrykker S ved hjelp av n.
6. Se på disse formlene: er noen av disse riktige? Hvorfor/hvorfor ikke?

   Antall stjerner = 1 + 3 * (n + n - 1)

   S = 3 * 2n - 2

   S = 4 + 3 * (n + n - 2)

Mønster 1: Fyrstikker



1. Forklar med ord hvordan mønsteret utvikler seg videre. Hva skjer med antall fyrstikker?
2. Hva skjer med mønsteret / hvilken utvikling skjer mellom figur 3 og 4?
3. Hvor mange fyrstikker er det i figur nr. 6?
4. Finn en formel som gjør at du kan beregne antall fyrstikker som må til for å lage figur nr. n. Kall antall fyrstikker F.
5. Kan du ved hjelp av figurene forklare hvorfor denne formelen er riktig?
6. Se på disse formlene: er noen av disse riktige? Hvorfor/hvorfor ikke?

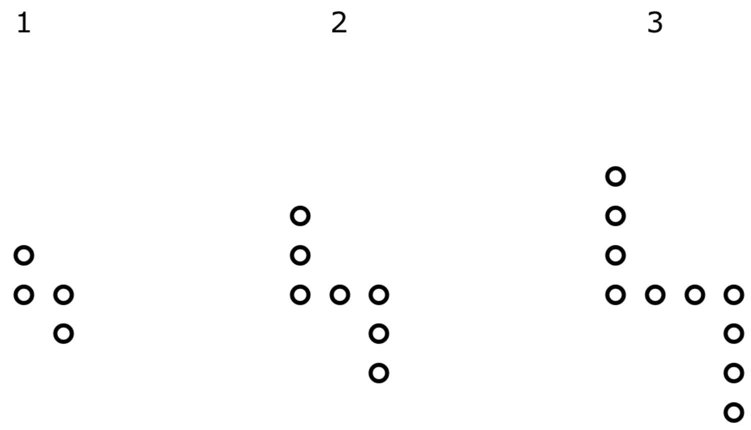
   $F = 1 + 2n$

   $F = 3 + n - 1$

   $F = 1 + n + n$

Vedlegg 4 – Elevoppgave 2, andre oppgaveøkt

Mønster 2: Sirkler i trappetrinn



1. Forklar med ord hvordan mønsteret utvikler seg videre.
2. Hvordan vil trappetrinn nr. 6 se ut? Forklar hvordan du kom frem til dette.
3. Hvordan vil trappetrinn nr. n se ut? Forklar.
4. Vi kaller nummeret på figuren n, og antall sirkler i figuren S. Finn en sammenheng mellom S og n som lar deg beregne hvor mange sirkler det er i figur nummer n.
5. Kan du finne flere sammenhenger?
6. Se på formelen $S = 2 * (n + 1) + (n - 1)$. Se nå på figurene i mønsteret. Hvor i figuren finner du $(n - 1)$? Hva med $(n + 1)$?
7. En annen elev har laget formelen $S = 3*(n + 1)$. Er denne riktig? Hvorfor/hvorfor ikke? Kan du forklare hvordan denne eleven har tenkt?

Vedlegg 5 - Løsningsark

FORKLARING	**LØSNING**
Hva gjør du og hvorfor? Ombestemte deg underveis, hvorfor? Forklar hva du gjør mens du løser oppgaven.	Beregninger eventuelt tegninger eller lignende.