

KOMPLEKS DYNAMIKK

- fra Wessels linjer til Douadys kanin

Silje Annette Vågø

Master i lærerutdanning med realfag

Oppgaven levert: September 2008

Hovedveileder: Kari Hag, MATH

Forord

Denne masteroppgaven avslutter mitt femårige studieløp ved lærerutdanning i realfag, studieretning matematikk og fysikk, på Norges teknisk naturvitenskapelige universitet. Oppgaven er på 30 studiepoeng. Takk til NTNU og mine medstudenter for et fint studium og en flott studietid.

I tillegg til å studere har jeg det siste året jobbet i halv stilling som lærer ved Ytre Namdal videregående skole. Dette har vært utfordrende både i forhold til tidsbruk og i forhold til å studere borte fra universitetet. Men med utsatt frist for levering av oppgaven, en god veileder og hjelpsomme ansatte ved skolen lot dette heldigvis seg gjøre. Nå som studietiden er over, gleder jeg meg veldig til å begynne i full stilling som lærer på en så trivelig skole.

Mest av alt vil jeg takke Kari Hag for inspirerende veiledning gjennom arbeidet med masteroppgaven. Kari har alltid vært imøtekommende, hjelpsom og positiv gjennom studieløpet, ikke minst gjennom det siste året som min veileder.

Matematikk har alltid vært det mest motiverende, morsomme og inspirerende faget for meg. I løpet av det siste året må jeg nok derimot innrømme at faget også til tider har vært det motsatte. Til slutt vil jeg takke samboeren min Vidar og familien min for all støtte når frustrasjonen over så mye matematikk har tatt overhånd. Hadde ikke klart dette uten dere.

Silje Annette Vågø
Rørvik, september 2008

Figuren på forsiden viser Mandelbrotmengden [19].

Innledning

Som matematikklærer har jeg vært opptatt av å finne ut hvordan jeg kan knytte masteroppgaven min til undervisningen (uten at oppgaven blir rent fagdidaktisk). Jeg ville skrive en faglig master innenfor kompleks analyse. Faget Matematikk X er det eneste faget i den videregående skolen som inneholder komplekse tall. Faget er et programfag for elever på studiespesialiserende utdanningsprogram som gjerne tas i tillegg til faget Matematikk R1 i det andre året på videregående skole. Faget skal gi en innføring i tallteori, komplekse tall og sannsynlighet og statistikk. Hovedområdet komplekse tall har blant annet disse kompetansemålene

- Eleven skal kunne gjøre rede for og presentere hovedtrekk i de komplekse tallenes historie fra renessansen til Caspar Wessel.
- Eleven skal kunne gjøre rede for og presentere et selvvalgt emne knyttet til anvendelse av komplekse tall.

Gjennom det første kompetansemålet ble jeg inspirert til å finne ut om historien til det komplekse planet og Caspar Wessel, noe den første delen av masteroppgaven handler om. I forbindelse med det siste kompetansemålet er fraktaler nevnt som et eksempel på anvendelse av komplekse tall som elevene kan fordype seg i. Enkle eksempler på iterasjon av komplekse funksjoner kan da være relevant i forhold til dette. I andre del av masteroppgaven har jeg sett på kvadratiske iterasjoner og eksempler på disse. På denne måten kan masteroppgaven knyttes til undervisningen.

En viktig referanse og inspirasjonskilde til denne masteroppgaven er Adrien Douadys video *The Dynamics of The Rabbit* [7]. Den viser på en fin måte dynamikken ved iterasjon av et bestemt kvadratisk polynom. Videoen har enkle og beskrivende figurer, er lett å forstå og passer godt for elever og studenter som kan litt om komplekse tall fra før. Dersom jeg hadde undervist i Matematikk X, ville jeg gjerne vist videoen for disse elevene. Jeg ville ikke forventet at elevene skulle forstå alt i videoen, men den kan absolutt være en inspirasjonskilde for dem til å arbeide videre med matematikk.

Sammendrag

Denne masteroppgaven er delt i to. Del I handler om Caspar Wessel og historien til det komplekse plan, mens del II handler om kompleks dynamikk og kvadratiske iterasjoner.

I del I ser jeg på de komplekse tallenes historie. Det var først i forbindelse med utviklingen av likningsteorien at matematikerne støtte på betydelige problemer med de komplekse tallene. Roten av negative tall dukket opp da man på 1500-tallet prøvde å finne løsninger av tredje- og fjerdegradslikninger. Matematikerne på den tiden var kun interesserte i reelle løsninger, og så på roten av negative tall som en umulighet. Men etter hvert støtte man på de komplekse tallene mer og mer. Eksistensen av tallene var ikke helt godtatt da Caspar Wessel skrev sin avhandling som inneholdt en geometrisk representasjon av tallene. Som landmåler var Caspar Wessel interessert i polygoner og orienterte linjestykker, og skrev en avhandling i 1799 med et forsøk på å finne en algebraisk representasjon av de orienterte linjestykkene. Gjennom dette arbeidet fant han også en geometrisk representasjon av de komplekse tallene, det komplekse plan. Dessverre for Wessel skulle det gå nesten hundre år før avhandlingen hans ble kjent.

Del II handler om kvadratiske iterasjoner. Et kvadratisk polynom kan unikt skrives på formen $P_c(z) = z^2 + c$, og en er interessert i å finne ut hva som skjer med følgen $\{P_c^n(z)\} = z, P_c(z), P_c(P_c(z)), P_c(P_c(P_c(z))), \dots$, av iterasjoner. Det utvidede komplekse planet \mathbb{C}_∞ deles inn i to deler, Fatoumengden og Juliamengden. I Fatoumengden vil følgen $\{P_c^n\}$ oppføre seg nokså pent og kanskje til og med forutsigbart, mens i eller i nærheten av Juliamengden vil den oppføre seg ustabilt eller kaotisk. De to eneste eksemplene der Juliamengden til $P_c(z)$ er en glatt kurve er for c -verdiene 0 og -2 . For alle andre verdier av c er Juliamengden til $P_c(z)$ en fraktalmengde. Dette er for eksempel tilfellet for $c \approx -0.122561 + 0.744862i$, der $P_c(z)$ gir en innfylt Juliamengde som kalles Douadys kanin. Det er også av interesse å se på mengden av verdier av c der banen til punktet 0 under iterasjon av P_c holder seg begrenset. Denne mengden kalles Mandelbrotmengden. I oppgaven vises noen egenskaper til Juliamengden og Mandelbrotmengden. Dynamikken til Douadys kanin er fint beskrevet i videoen *The Dynamics of the Rabbit* [7], og jeg kommenterer til slutt denne videoen.

Innhold

Forord	i
Innledning	ii
Sammendrag	iii
DEL I: Wessel og det komplekse plan	1
1 Caspar Wessel og historien til de komplekse tallene	1
1.1 Komplekse tall før Caspar Wessel	1
1.2 Caspar Wessel (1745-1818)	4
1.3 Historien etter Caspar Wessel	14
DEL II: Kompleks dynamikk og Douadys kanin	16
2 Teoretisk bakgrunn	16
2.1 Topologi	16
2.2 Funksjoner	18
2.3 Det utvidede komplekse planet	19
2.4 Rasjonale funksjoner	21
2.5 Iterasjon av rasjonale funksjoner	22
2.6 Fikspunkt	23
3 Kvadratiske iterasjoner	25
3.1 Kvadratiske iterasjoner og unik representasjon av kvadratiske polynomer	25
3.2 Julia og Fatou mengdene	26
3.3 Normale familier av funksjoner	28
3.4 Noen eksempler	32
3.4.1 $z \rightarrow z^2$	32
3.4.2 $z \rightarrow z^2 - 2$	34
4 Mer kompleks dynamikk	36
4.1 Mandelbrotmengden	36
4.2 Egenskaper til Juliamengden og Mandelbrotmengden	42
5 Douadys kanin	45
5.1 Kaninens opprettelse	45
5.2 Kaninens komponenter	51
5.3 Randen til kaninen	52
5.4 Området utenfor kaninen	52

6 Vedlegg	54
6.1 Matlab-koder	54
Referanser	57

DEL I: Wessel og det komplekse plan

1 Caspar Wessel og historien til de komplekse tallene

Begrepet komplekse tall er relativt nytt, men historien til de komplekse tallene starter for omtrent 2000 år siden. Problemstillinger som involverte kvadratroten av negative tall har deretter vært utforsket blant matematikere. Den norske landmåleren Caspar Wessel skrev avhandlingen *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning* som ble utgitt i 1799. Avhandlingen var et forsøk på å finne en analytisk og algebraisk representasjon av orienterte linjestykker (vektorer). Som et biprodukt av dette kom det komplekse plan; Wessel hadde funnet en geometrisk representasjon av de komplekse tallene. Dessverre for Wessel skulle det gå nesten hundre år før dette ble kjent. I mellomtiden hadde også Carl Friedrich Gauss og Jean Robert Argand gitt ut arbeider om det komplekse plan. Måten Caspar Wessel behandlet problemet med det komplekse plan på, gir han en utvilsom plass i historien blant banebrytende matematikere.

De viktigste referansene i denne delen er artikkelen *Caspar Wessel (1745-1818) Surveyor and Mathematician* av Bodil Branner og Nils Voje Johansen [14], artikkelen *Wessel's Work on Complex Numbers and its Place in History* av Kirsti Andersen [1] og Caspar Wessels egen avhandling *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning* [17].

1.1 Komplekse tall før Caspar Wessel

Den første kjente problemstillingen som involverte kvadratroten av negative tall er forklart av den greske matematikeren og oppfinneren Heron av Alexandria. Han levde i det første århundret e.Kr., og fikk problemer med røtter av negative tall da han arbeidet med å finne volumet av avkortede pyramider, noe han for øvrig ikke kom noen vei med.

Problemet med kvadratroten av negative tall dukket ikke opp igjen før under renessansen på 1500-tallet i forbindelse med løsning av tredje- og fjerdegradslikninger. På denne tida var matematikerne kun interesserte i reelle positive

røtter, men framgangsmåtene som ble brukt til å løse tredje- og fjerdegradslikninger ga mellomregninger der man støttest på kvadratrotten av -1 . I 1545 utga italieneren Girolamo Cardano (1501-1576) boka *Ars Magna (Den store kunst)* som inneholdt en algoritme for å finne en (positiv) rot av likningen

$$x^3 = ax + b,$$

der a og b er positive tall. Han skrev at likningen har nøyaktig én positiv løsning [1]

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}. \quad (1)$$

Cardano prøvde å unngå tilfeller der denne metoden gjorde at man støttest på roten av negative tall. På denne tiden var man som sagt ikke fortrolig med negative tall, og kvadratrotten av negative tall ble betraktet som en umulighet. Cardanos formel så ut til å gjelde selv om denne *umuligheten* oppsto, og i Rafael Bombellis (1526-1573) *L'algebra* fra 1572 ble det sett nærmere på disse *umulige tallene*. Bombelli mente at man ikke lenger kunne overse disse tallene, siden de var nyttige i likningsteorien. Han så for eksempel på likningen

$$x^3 = 15x + 4,$$

som har den positive roten $x = 4$. Ved å bruke Cardanos algoritme (formel (1)) på denne likningen fikk han

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Dermed måtte det være mulig at $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$. Bombelli fant ut at

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1};$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

og fikk dermed $x = 4$ som løsning i Cardanos formel.

Likningsteorien tvang altså matematikerne til å arbeide med komplekse tall. Matematikere etter Bombelli måtte akseptere disse nye tallene og at disse kunne være røtter i likninger. Matematikeren og filosofen René Descartes

(1596-1650) hadde likevel ikke sansen for disse tallene, og kalte dem *imaginære tall*, tall som bare fantes i fantasien.

De komplekse tallene gjorde det mulig for Albert Girard (1595-1632) i 1629 å formulere en ekvivalent versjon av algebraens fundamentalteorem som sier at at en polynomlikning av grad n har n røtter. Girard var ikke interessert i de *umulige* komplekse røttene, men de gjorde teoremet hans sant. Han prøvde ikke å bevise teoremet, men presenterte eksempler der han brukte det, inkludert tilfeller med komplekse røtter.

Matematikerne klarte etter hvert å addere og multiplisere komplekse tall, men fikk problemer i den videre analysen. De ville nok ha hatt mindre problemer hvis de hadde hatt en mer konkret tilnærming til de komplekse tallene. Descartes var den første som brukte uttrykket reell rot i 1637, og var enig med Girard når det gjaldt algebraens fundamentalteorem. Descartes påsto at en likning av grad n har n røtter, der noen av røttene var reelle, mens andre kun fantes i fantasien. Dessverre greide han ikke å vise at alle røttene kunne skrives på formen $a + b\sqrt{-1}$, der a og b er reelle. Etter Descartes begynte matematikerne å bruke uttrykkene reell og imaginær, og gradvis senere antok de at røttene i en n -tegradslikning kunne skrives på formen $a + b\sqrt{-1}$. Algebraens fundamentalteorem forble en antagelse helt til Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ga et slags bevis i 1799 der noen av stegene kun var bygd på intuisjon. Dette beviset korrigerer han selv i 1849.

Etter hvert ble det gjort forsøk på å representere de komplekse tall geometrisk, men uten hell. Dette var heller ikke så viktig for matematikerne på denne tiden, til tross for at Descartes i *La géométrie* hadde banet veien for en tolkning av reelle tall som punkter på ei linje.

Leonhard Euler (1707-1783) introduserte skrivemåten $i = \sqrt{-1}$, noe som forenklet regningene noe. Dette var antakelig inspirert av Descartes begrep *imaginær*. Euler ga ut et arbeid om transcendent funksjoner av komplekse tall i 1751 der det komplekse plan var underforstått. Han visualiserte de komplekse n -terøttene til 1 som hjørner i en regulær n -kant. Euler mente at man burde holde seg til analytiske og algebraiske metoder, og ville ikke primært se på noen geometrisk tilnærming. Ikke minst definerte Euler eksponentialfunksjonen med komplekse eksponenter og beviste sin kjente Eulers formel

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

Til historien om de komplekse tallene bør også Abraham De Moivre (1667-1754) med De Moivres formel fra 1730 nevnes

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

1.2 Caspar Wessel (1745-1818)

Eksistensen av de komplekse tallene ble ikke fullstendig akseptert før Caspar Wessel beskrev den geometriske tolkning av tallene. Wessel ga ut avhandlingen *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning* som ble presentert i *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab* i 1797 og utgitt i 1799. Avhandlingen ble i første omgang kun gitt ut på dansk, og det skulle dessverre gå nesten hundre år før den ble kjent.

Caspar Wessel ble født på Vestby i Akershus i 1745. Faren var kapellan og Wessel var den sjette i søskenflokket. Den første undervisningen fikk Wessel hjemme, men som 13-åring ble han tatt inn som elev ved Christiania katedralskole sammen med brødrene Johan Herman og Ole Christopher. Johan Herman skulle senere bli en kjent dikter. I tillegg til den vanlige undervisningen i Christiania fikk Caspar Wessel gratis privattimer hos en lærer som sies å ha betydd mye for ham. Spesielt lærte læreren ham å tegne, noe som Wessel senere som karttegger skulle ha stor nytte av. I 1763 begynte han ved København Universitet, der Johan Herman og Ole Christopher hadde begynt to år tidligere. Her valgte Caspar Wessel matematikeren og astronomen Christian Horrebow til veileder, noe som viser at han allerede da hadde en spesiell interesse for matematikk. Wessel fullførte anneneksamen i 1764 med gode karakterer, og valgte så å studere jus.

Caspar og de to brødrene fikk økonomisk støtte fra faren da de begynte i København, men etter hvert strakk ikke pengene til. Det var vanlig og ha jobb ved siden av studiene, og både Ole Christopher og Caspar fikk jobb som assistenter for landmålere i Danmark. Opplysningstiden var kommet til Europa med et ønske om å registrere, kartlegge og beskrive naturen og samfunnet. Dette førte til at *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab* i 1762 startet en vitenskapelig oppmåling av Danmark for å lage en kartserie i målestokk 1:120000. Ole Christopher ble assistent i landmålingen i 1762, men avanserte til landmåler i 1764. Caspar var da på utkikk etter en jobb, og Ole Christopher ansatte Caspar som sin assistent. Caspar ble i 1766 midlertidig landmåler og gjorde en så god innsats at han i 1769 ble forfremmet som landmåler. Dette gjorde for øvrig at han kom på etterskudd med studiene. Han avla juridisk eksamen først i 1778, men da med beste karakterer. Caspar valgte likevel å fortsette som landmåler. Dikterbroren Johan Herman skrev dette om Caspar [10]:

*Han tegner Landkort og Leser Loven,
Han er saa flittig som jeg er doven.*

Caspar Wessel giftet seg i 1780 med enken Cathrine Elisabeth Müller som hadde en femårig datter. I 1781 dro Wessel til Oldenburg for å utføre trekantmålingene der, noe som ble gjennomført i løpet av tre år. Ekteskapet til Wessel ser ikke ut til å ha vært vellykket, og tilbake i København i 1785 søkte han om separasjon. Separasjonen ble innvilget mot å betale Catherine Elisabeth Müller vel 50 prosent av lønnen, og Wessel flyttet i 1786 til Jylland hvor det var billigere å bo. I landmålingsjournalen fra 1787 innførte Wessel for første gang det komplekse planet. Dette gjorde han for å beskrive linjestykker i planet. Tallene inneholdt kvadratrotten av negative tall, og vi ser for første gang en geometrisk representasjon av disse *umulige* tallene. Fra før hadde Descartes banet veien for en tolkning av tall som punkter på ei linje, men Wessel viste at tall kunne oppfattes som liggende i et tallplan.

I de neste årene fullførte Caspar Wessel trigonometriske operasjoner også i Jylland, Schleswig og Holstein. Wessels navn hadde også vært fremme i debatten om å opprette et universitet i Christiania, etter et sterkt norsk ønske og krav. Wessels rykte som matematiker ble styrket, og han ble nevnt som en mulig professor i matematikk ved det nye universitetet.

I 1796 hadde Wessel videreutviklet sine ideer om orienterte linjestykker (vektorer) og det komplekse planet, og skrev sin avhandling *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning*. Wessel var en ganske beskjeden mann, og det var sannsynligvis venner som overtalte ham til å skrive ned sine ideer og publisere dem. Avhandlingen ble så godt mottatt at den ble tatt opp blant *Det Kongelige Danske Videnskabers Selskabs* skrifter. Det var faktisk første gang man trykte et arbeid av en forfatter som ikke var medlem av selskapet. Avhandlingen ble utgitt i 1799 på dansk, men dessverre var det ingen på dette tidspunkt som forstod hvor banebrytende den var. Det sies at det var svært forbausende at Wessel kunne skrive et så banebrytende arbeid i et så fattig matematisk miljø som man på den tiden hadde i København.

Etter at Caspar Wessel skrev sin avhandling, ble han forfremmet til inspektør i landmålingen og gikk av med pensjon i 1805. Som pensjonist fortsatte han med å tegne kart og gjorde beregninger knyttet til landmålingen. Det siste arbeidet utførte han i 1815 og han mottok Dannebrogordenen for sin store innsats. I 1818 døde Caspar Wessel 73 år gammel, og ble gravlagt i København.

Caspar Wessels avhandling ble ikke kjent før Sophus Andreas Christensen nevnte den i sin filosofiske doktorgradsavhandling *Matematikens Udvikling i Danmark og Norge i det XVIII Aarhundrede* fra 1895. Dette inspirerte den danske matematikeren Christian Juel til å studere Wessels arbeid. Han

publiserte teksten *En Redegjørelse for en Afhandling af Landmaaler Caspar Wessel fra 1799* i *Nyt Tidsskrift for Matematik* i 1895. I 1896 trykte Sophus Lie opp Wessels avhandling i *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* i Oslo. I forordet skrev Lie [17]:

Hvis Caspar Wessels Arbeide var kommet til sin Ret, saavilde han forlængst have vundet et fuldt saa stort Navn i Matematikens Rige som hans broder Johan Herman Wessel inden den nordiske Litteratur og som hans (grand)Onkel Petter Wessel Tordenskjold vandt som Kriger.

Om

Directionens analytiske Betegning,

et Forsøg,

anvendt fornemmelig

til

plane og sphæriske Polygoners Oplosning.

Af

Caspar Wessel,

Landmaaler.



Kiøbenhavn 1798.

Trykt hos Johan Rudolph Thiele.

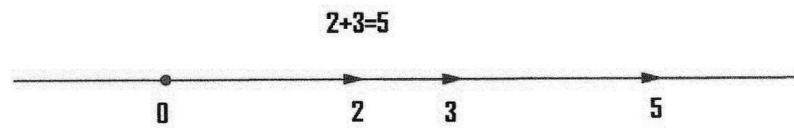
Figur 2: Forside til utgaven av Wessels avhandling gitt ut i 1798 [13].

Det skulle altså gå nesten hundre år før avhandlingen til Caspar Wessel ble oppdaget, og han fikk den heder og ære han fortjente. En viktig grunn til at avhandlingen ikke ble anerkjent før hundre år etter, var nok at den var skrevet på dansk, et språk som svært få i det matematiske miljøet i Europa leste. I 1887 ble avhandlingen oversatt til fransk, og først i 1929 til engelsk. En annen grunn til at avhandlingen ikke ble oppdaget tidligere var at det rundt år 1800 ikke var viktig for matematikerne å finne en geometrisk representasjon av de komplekse tallene, det sto ikke på matematikernes agenda. Hvis problemet virkelig hadde vært essensielt for datidens matematikere, ville noen av dem som leste dansk ha vært kjent med problemet og gitt avhandlingen større oppmerksomhet. Viggo Brun dokumenterte at Niels Henrik Abel lånte *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* med Wessels avhandling i 1822 [5]. Abel kunne ha gjort Wessels resultater kjent, men Abel var mer interessert i en avhandling om likningsteori skrevet av Carl Ferdinand Degen som også lå i skriftene.

Wessels avhandling med nye matematiske teorier kom som et resultat av hva han hadde utarbeidet gjennom arbeidet som landmåler i tillegg til at han selv var inspirert til å finne ut mer innenfor fagemnet. I avhandlingen gjorde han et forsøk på å gi en representasjon av rette linjestykker med bestemte retninger, og brukte dette til å løse problemer med plane og sfæriske polygoner. Han ønsket å finne uttrykk for linjestykker bestemt av lengde og retning, og finne måter å regne med dem på. Dette var naturlig for en landmåler som hadde støtt på mange problemer i forhold til trekkanter. Wessels største motivasjon for arbeidet med avhandlingen var ellers at han søkte en metode der han kunne unngå *umulige operasjoner*. Med disse *umulige operasjonene* mente han sannsynligvis kvadratrotten av negative tall, det vil si komplekse tall. Arbeidet med dette inspirerte altså Wessel til å finne en geometrisk representasjon av de komplekse tallene.

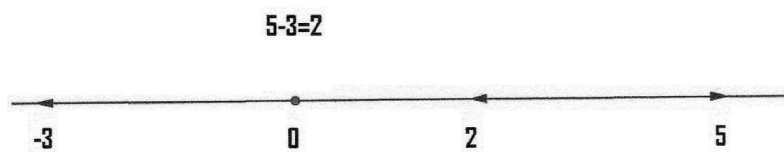
Utgangspunktet for Wessels avhandling var altså å utvikle en algebra for rette linjer. Wessel brukte uttrykket rette linjer for det vi kaller vektorer. Jeg kommer til å bruke Wessels uttrykk i denne teksten. Wessels linjer var definert av retning og lengde, og han så på alle parallelle linjer med samme lengde og orientering som ekvivalente. Første steg var å definere algebraiske operasjoner på disse rette linjene.

Addisjon med reelle tall kunne geometrisk fremstilles ved hjelp av en rett linje der tallene avbildes som piler (vektorer); for eksempel $2 + 3 = 5$ [5]:



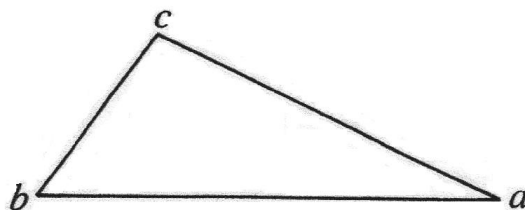
Figur 3: Illustrasjon av $2 + 3 = 5$.

På tilsvarende måte kunne man vise subtraksjon; for eksempel $5 - 3 = 2$ [5]:



Figur 4: Illustrasjon av $5 - 3 = 2$.

Multiplikasjon ble også grei å vise; for eksempel kunne multiplikasjonen $2 \cdot 3$ utføres ved å addere pilen 3 til pilen 3, og man endte opp i 6. Multiplikasjonen $2 \cdot (-3)$ ble utført på samme måte, det var bare retningen på pilene som var annerledes. For multiplikasjoner som $(-2) \cdot (-3)$ trengte man en ny regel; minus ganger minus gir pluss, og utførte regningen på samme måte som over.

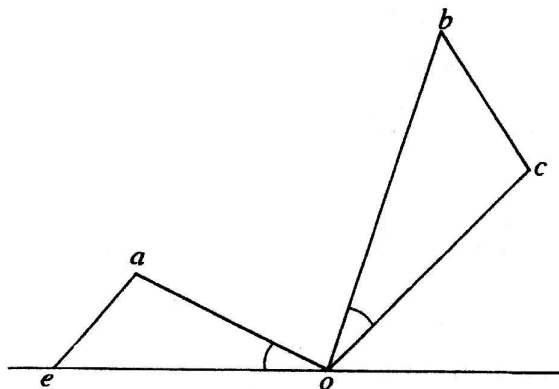


Figur 5: Illustrasjon av Wessels definisjon av addisjon [1].

Wessel ville generalisere denne regningen til å gjelde hans linjer i planet, med begynnelsepunkt i origo. For addisjon brukte Wessel den gamle definisjonen; man legger starten av den andre linja til slutten av den første ved parallellforskyvning, og summen er den rette linja som begynner der den første begynner og slutter der den andre slutter. Regelen blir også riktig for rette linjer på den reelle tallinja. På figur 5 illustreres hvordan Wessel definerte summen av ab og bc som lik ac . Videre viste han at addisjonen både var kommutativ og assosiativ. For firkanter med hjørner a , b , c og d viste han at

$$ab + bc + cd + da = 0. \quad (2)$$

Tilsvarende gjaldt for alle polygoner, noe som var essensielt for Wessels arbeid.



Figur 6: Illustrasjon av Wessels definisjon av multiplikasjon [1].

Wessel ønsket også å multiplisere to rette linjer. Han tok da utgangspunkt i en enhetslinje (med lengde 1) i samme plan som de to linjene. Ei rett linje er da entydig bestemt av lengde og retning. Retningen til linja var gitt ved vinkelen som linja dannet med enhetslinja i en bestemt rotasjonsretning (inntil 360 grader). Wessel orienterte enhetslinja i motsatt retning av det som brukes i dag, og på figur 6 er oe valgt som enhetslinje. La så oa og ob være to linjer som en vil multiplisere, og oc linjenes produkt, se figur 6. Wessel sa at også oc skulle ligge i samme plan som oa og ob og at [17][18]:

Productet af to rette Linier maa i alle Maader kunne formeres af den ene Factor, som den anden ar formeret af den positive eller absolute Linie, der sættes = 1.

Produktet er ei rett linje hvor lengden forholder seg til lengden av den ene faktor som lengden av den andre faktor forholder seg til lengden av enheten og retningen avviker så mye fra retningen til den ene faktor som retninga til den andre avviker fra enheten. Dette var analogt med Euklids definisjon av produktet av naturlige tall. I dag sier vi at en multipliserer to vektorer ved å multiplisere lengdene på vanlig måte og addere retningsvinklene, som er ekvivalent med Wessels definisjon. Hvis en ser på figur 6, førte Wessels definisjon til at trekantene oea og obc er formlike, noe som impliserer at

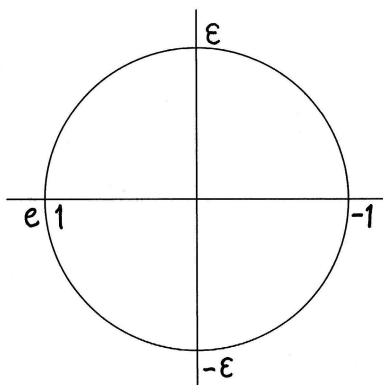
$$\angle eoc = \angle eoa + \angle eob;$$

$$|oc| : |ob| = |oa| : |oe| \implies |oc| = |oa| \cdot |ob|.$$

Når oa og ob har samme retning som enheten, svarer produktet oc til det vanlige produktet av to linjestykker på den reelle tallinja. Også regelen *minus ganger minus gir pluss* stemmer siden 180 grader pluss 180 grader blir 360 grader.

Wessel ville videre finne en måte å uttrykke rette linjer på slik at han kunne regne med dem. Til nå hadde man bare kunnet uttrykke linjer med retningsvinkel null (lengden ganger 1) eller 180 grader (lengden ganger -1). Her tok Wessel et steg som i dag virker naturlig, men som var ganske bemerkelsesverdig på hans tid. Han innførte en ny enhet ϵ (som i dag kalles i) med retningsvinkel på 90 grader, se figur 7. Ut fra definisjonen av et produkt ble

$$\epsilon \cdot \epsilon = -1 \quad \vee \quad \epsilon = \sqrt{-1}.$$



Figur 7: Enheten ϵ i Wessels komplekse plan [1].

Enhver rett linje kan dermed uttrykkes som $a + \epsilon b$, der a og b er reelle tall. Wessel fant så en algebraisk multiplikasjonsregel for rette linjer. Han hadde formelen

$$a + \epsilon b = r (\cos v + \epsilon \sin v),$$

der r er lengden til linja og v er retningsvinkelen. I tillegg til denne brukte han definisjonen av produkt og formlene for sinus og cosinus til summer av vinkler og fikk som forventet at

$$(a + \epsilon b) \cdot (c + \epsilon d) = ac - bd + \epsilon(ad + bc).$$

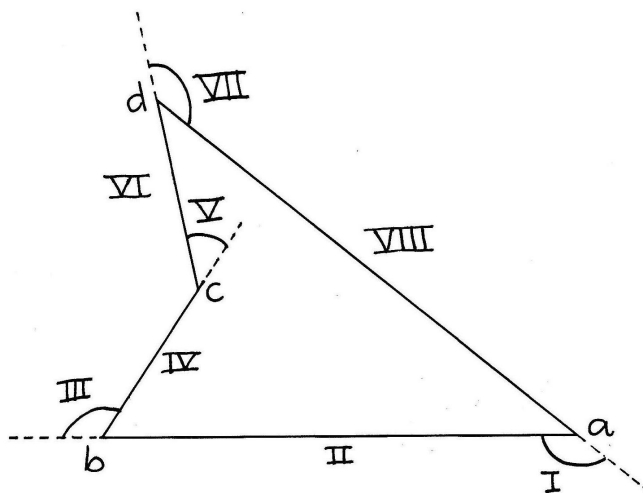
Indirekte hadde han bevist at komplekse tall og addisjon og multiplikasjon av disse kunne representeres geometrisk.

Wessel fortsatte med divisjon og røtter av komplekse tall og fikk de vanlige formlene som vi kjenner i dag. Når det gjelder komplekse m -terøtter, merket han ut fra definisjonen av produkt at

$$\left(\cos \frac{v}{m} + \epsilon \sin \frac{v}{m}\right)^m = \cos v + \epsilon \sin v.$$

Dette gir faktisk en annen utledning av De Moivres formel.

Wessel utledet også en universell trigonometrisk formel for å finne ukjente sider i et polygon. Han brukte firkanten $abcd$ på figur 8 som eksempel, noe også jeg vil gjøre.



Figur 8: Firkanten som Wessel brukte som eksempel [1].

I eksemplet bruker jeg Wessels notasjon der sider og vinkler er angitt som romertall. Sidene er partall og vinklene er oddetall. Wessel så på de ytre vinklene i firkanten. La derfor firkanten $abcd$ ha vinklene I , III , V og VII som vist på figur 8. Videre er lengden $|ab|$ til ab lik II , $|bc| = IV$, $|cd| = VI$ og $|ad| = VIII$. Wessel plasserte firkanten slik at siden ab hadde samme retning som enheten e . Han orienterte firkanten med klokka, noe som gir en motsatt orientering enn den vi vanligvis bruker på polygoner i dag. Wessel uttrykte sidene i firkanten på formen $r(\cos v + \epsilon \sin v)$ og satte

$$I' = \cos I + \epsilon \sin I \quad \text{og} \quad \bar{I}' = \cos I - \epsilon \sin I \quad \text{osv.}$$

Wessel brukte også sinus- og cosinussetningene for summer og differanser av vinkler

$$\begin{aligned} \sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v; \\ \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v. \end{aligned}$$

Dermed fikk han for dette eksemplet

$$ab = II [\cos 0^\circ + \epsilon \sin 0^\circ] = II;$$

$$bc = IV [\cos III + \epsilon \sin III] = IV \cdot III';$$

$$cd = VI [\cos(III - V) + \epsilon \sin(III - V)] = VI \cdot III' \cdot \bar{V}';$$

$$\begin{aligned} da &= VIII [\cos(III - V + VII) + \epsilon \sin(III - V + VII)] \\ &= VIII \cdot III' \cdot \bar{V}' \cdot VII'. \end{aligned}$$

Legg merke til at dersom firkanten hadde vært konveks ville vi bare hatt V' isteden for \bar{V}' i formlene over. Innsatt i formel (2): $ab + bc + cd + da = 0$ fikk han

$$II + IV \cdot III' + VI \cdot III' \cdot \bar{V}' + VIII \cdot III' \cdot \bar{V}' \cdot VII' = 0. \quad (3)$$

Fra denne formelen regnet Wessel ut ukjente elementer i firkanten.

La for eksempel siden VI og vinklene I og III være ukjente. Hvis Wessel for eksempel ville finne vinkel III , skrev han om likning (3) slik at koeffisienten til ϵ inneholdt kun én ukjent. Siden VI er ukjent, multipliserte han hele likning (3) med $\bar{III}' \cdot V'$ og fikk

$$II \cdot \bar{III}' \cdot V' + IV \cdot V' + VI + VIII \cdot VII' = 0. \quad (4)$$

For at likning (4) skal stemme må koeffisienten til ϵ være 0, det vil si

$$II \cdot \sin(V - III) + IV \cdot \sin V + VIII \cdot \sin VII = 0$$

⇕

$$\sin(V - III) = -\frac{IV \cdot \sin V + VIII \cdot \sin VII}{II}$$

⇕

$$\sin(III - V) = \frac{IV \cdot \sin V + VIII \cdot \sin VII}{II}. \quad (5)$$

Fra likning (5) kan dermed vinkel III bestemmes. På tilsvarende måte så Wessel på tilfellene der to sider og en vinkel, eller tre vinkler var ukjent.

Wessels avhandling inneholdt også bevis for Cotes' setning. Setningen sier at dersom en sirkel deles inn i n like store buer a_1a_2, \dots, a_na_1 og p er et punkt på linja mellom sentrum o og a_1 så er $(op)^n - (oa_1)^n = a_1p \cdot a_2p \cdot \dots \cdot a_np$ [17][18]. Dette demonstrerte hvordan de rette linjene og deres algebra kunne brukes selv om Wessels hovedmål var å løse trigonometriske problemer.

Som landmåler var Wessel interessert i sfæriske polynomer. Han innførte enda en ny enhet η som stod vinkelrett på både 1 og ϵ . Han kunne dermed uttrykke en rett linje i tre dimensjoner som $x + \eta y + \epsilon z$. Linjer i tre dimensjoner kunne adderes på samme måte som før, men å multiplisere dem ga ingen mening. Noen hevder at Wessels utvidelse til og betraktninger om det tredimensjonale tilfellet er en forløper for Sir William Rowan Hamiltons kvaternioner. Hamilton og Wessel fant begge ut at multiplikasjon av rette linjer i tre dimensjoner ikke ga noen mening, men Wessel unngikk problemet ved å se på ett plan av gangen. I avhandlingen utledet Wessel i tillegg mange andre trigonometriske formler og resultater som angikk sfæriske trekanter. Til sammen er avhandlingen hans et bemerkelsesverdig arbeid innen matematikk, selv om den ikke var verdsatt som det på hans tid.

1.3 Historien etter Caspar Wessel

Blant de som publiserte arbeid om den geometriske representasjonen av de komplekse tall på begynnelsen av 1800-tallet er Jean Robert Argand (1768-1822) den av mest betydning. I 1806 publiserte han anonymt en tekst som først ble kjent som et sammendrag i 1813 i en av Jacques Frédéric Français' tekster [1]. Etter dette gikk en debatt om de komplekse tallene i det matematiske miljøet. Men en geometrisk representasjon av tallene fikk likevel så liten oppmerksomhet på den tiden at matematikere kunne fortsette å utgi tekster om temaet uten å være klar over om noen forgjengere hadde gjort det samme.

Det komplekse plan ble tidligere ofte kalt *det gaussiske plan* etter den store tyske matematikeren Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Historisk sett ville det kanskje vært riktigere å kalle planet for *det wesselske plan*, siden Wessel kom med ideen før Gauss. Wessels fremstilling var også mer overbevisende. I 1831 publiserte Gauss en avhandling som gjorde at matematikerne på den tida fikk øynene opp for de komplekse tallene. I avhandlingen brukes for første gang uttrykket *komplekse tall* og skrivemåten $a + bi$. Avhandlingen forteller også at Gauss allerede i 1811 hadde en ide om det komplekse plan, og at dette var essensielt for hans begrep kompleks integral. Han brukte det komplekse plan til å formulere setningen som i dag går under navnet

Cauchys integralteorem, og er et av fundamentalteoremene innen kompleks integrasjonsteori.

Etter å ha arbeidet med komplekse tall i et par tiår, beskrev Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) og Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) historien til den geometriske representasjonen i 1847 og 1853, uten å kjenne til Wessels arbeid. Cauchy var en mester innen kompleks funksjonsteori og utledet nye versjoner av *Cauchys integralteorem*, som Gauss hadde formulert tidligere. Det bemerkelsesverdige er at Cauchy ikke aksepterte den geometriske representasjonen av de komplekse tallene før i 1847, men hadde likevel utledet de fleste av sine viktige bidrag til kompleks funksjonsteori før det, uavhengig av en geometrisk forståelse.

Hamilton introduserte komplekse tall som et tallpar (a_1, a_2) av reelle tall, og utviklet en algebra for disse. Han brukte også mye tid på å finne en algebra for tripler (a_1, a_2, a_3) i det tredimensjonale rom, men måtte som Wessel gi opp. Ved å gå til fire dimensjoner fant Hamilton tilfredsstillende resultater og innførte kvaternioner. Dette er en ikke-kommutativ utvidelse av de komplekse tallene. Det finnes ingen indikasjon på at Wessel tenkte på å inkludere den fjerde dimensjonen.

Blant de tidligste tekstene om å representere komplekse tall som linje-stykker i et tallplan, var Wessels avhandling den mest elegante og overbevisende. Når Wessel og andre fant ut at den imaginære kunne gis mening i geometrien, mente innflytelsesrike matematikere at analysen burde aritmetiseres. Wessels avhandling var dessverre dårlig timet, og fikk ikke den anerkjennelse den burde.

DEL II: Kompleks dynamikk og Douadys kanin

2 Teoretisk bakgrunn

Hovedemnet i denne delen av oppgaven er kvadratiske iterasjoner. Denne bakgrunnsdelen inneholder notasjoner og definisjoner som er nyttige når jeg senere skal beskrive de kvadratiske iterasjonene. Delen inneholder noen topologiske definisjoner, notasjoner og teoremer, samt litt teori om funksjoner, utvidelse av det komplekse planet, iterasjon av rasjonale funksjoner og klassifisering av periodiske punkter. Bevis gis ikke. Bakgrunnsstoffet er hovedsaklig hentet fra bøkene *Iteration of Rational Functions* av Alan F. Beardon [2], *Complex Analysis* av Theodore W. Gamelin [8] og *Topology* av James R. Munkres [12].

2.1 Topologi

Definisjon: Et *topologisk rom* er et par (X, T) som inneholder en mengde X og en topologi T på X . Et *metrisk rom* (Y, d) er en mengde Y sammen med en metrikk d . Metrikken $d(x, y) = |x - y|$ er standard (euklidisk) metrikk på \mathbb{R}^n .

Anta videre at (X, T) er et topologisk rom og $A \subset X$ er en mengde i X . Videre betegnes det topologiske rommet bare som X .

Definisjon: En delmengde A i X er en *åpen mengde* i X dersom A er inneholdt i samlingen T . A er *lukket* hvis komplementet til A er åpen.

Alternativt kan en åpen mengde i et metrisk rom $Y = (Y, d)$ defineres slik: En delmengde A i Y er *åpen* hvis for hver $x \in A$ så finnes en $\epsilon > 0$ slik at

$$B(x; \epsilon) = \{y | y \in Y : d(x, y) < \epsilon\} \subset A.$$

$B(x; \epsilon)$ kalles en *åpen ϵ -ball* om x .

En *omegn* til et punkt x er en åpen mengde som inneholder x , for eksempel en åpen ϵ -ball om x .

$X \setminus A = X - A = \{x \in X | x \notin A\}$ betegner den mengdeteoretiske differansen mellom X og A .

A^0 betegner det *indre* av A , og er definert som unionen av alle åpne mengder inneholdt i A . Et punkt x er et *indre punkt* i A dersom $x \in A^0$.

A' betegner mengden av *opphopingspunkt* til A . Et punkt x er et *opphopingspunkt* til A hvis enhver omegn til x inneholder et punkt $y \in A$ og $y \neq x$.

\bar{A} betegner *tillukningen* til A . *Tillukningen* til A defineres som snittet av alle lukkede mengder som inneholder A . En har også at $\bar{A} = A \cup A'$.

∂A betegner randen til A , det vil si mengden av alle randpunkt til A . Et punkt x er et *randpunkt* til mengden A hvis $x \in \bar{A}$ og x ikke er et indre punkt i A .

Definisjon: En delmengde A i et rom X er *tett* i X hvis $\bar{A} = X$.

Definisjon: En mengde $A \subset (Y, d)$ er *begrenset* hvis det finnes et tall M slik at for hvert par av punkter $a_1, a_2 \in A$

$$d(a_1, a_2) \leq M.$$

Definisjon: En mengde A er *uendelig* hvis den ikke er endelig. A er *tellbar uendelig* hvis det finnes en bijektiv funksjon $f : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$. A er *tellbar* hvis A er endelig eller tellbar uendelig.

Definisjon: En *seperasjon* av en mengde A er gitt ved et par U, V av åpne delmengder slik at $U \cup V \supset A$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ der $U \cap V \cap A = \emptyset$. A er *sammenhengende* hvis det ikke finnes en separasjon av A .

Definisjon: Vi kaller en åpen, sammenhengende mengde D for et *område*.

Definisjon: Gitt to punkter x og y i mengden A . En *kurve* i A fra x til y er en kontinuerlig funksjon $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ der $[a, b]$ er et lukket intervall på \mathbb{R} , slik at $\varphi(a) = x$ og $\varphi(b) = y$. Mengden A er *veisammenhengende* hvis det finnes en kurve mellom hvert par av punkter i A . Kurven φ kalles *lukket* dersom $\varphi(a) = \varphi(b)$.

En veisammenhengende mengde er sammenhengende, men en sammenhengende mengde er ikke nødvendigvis veisammenhengende.

Definisjon: En mengde A er *enkelt sammenhengende* hvis enhver lukket kurve i A kan deformeres kontinuerlig (i A) til et punkt i A .

Teorem 2.1 *En mengde $A \subset \mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ er enkelt sammenhengende hvis og bare hvis randen ∂A er sammenhengende.*

Definisjon: En *åpen overdekning* G av en mengde $A \subset X$ er en samling $G = \{G_\alpha\}$ av åpne delmengder i X slik at

$$A \subset \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}.$$

Definisjon: En delmengde $K \subset X$ er *kompakt* dersom hver åpne overdekning av K inneholder en endelig overdekning.

Teorem 2.2 *En delmengde $A \subset \mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og bare hvis A er lukket og begrenset.*

Definisjon: $A \subset X$ sies å være *følgekompakt* dersom enhver følge $\{x_n\}$ i A har en konvergent delfølge.

Teorem 2.3 *En delmengde A i et metrisk rom er følgekompakt hvis og bare hvis A er kompakt.*

Definisjon: Hvis $f : X \rightarrow X$, og E er en delmengde i X , så er E

1. *forlengs invariant* hvis $f(E) = E$;
2. *baklengs invariant* hvis $f^{-1}(E) = E$; og
3. *totalt invariant* hvis $f(E) = E = f^{-1}(E)$.

Vi har da

Teorem 2.4 *La g være en kontinuerlig, åpen avbildning av et topologisk rom X på seg selv og anta at E er totalt invariant. Da er også komplementet $X - E$, det indre E^0 , randen ∂E og tillukningen \bar{E} til E totalt invariant.*

Definisjon: La (X, d) være et metrisk rom. En følge $\{x_n\}$ av punkter i X er en *Cauchy-følge* i (X, d) hvis for gitt $\epsilon > 0$, så finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n, m \geq N$, så

$$d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Det metriske rommet (X, d) er *komplett* hvis hver Cauchy-følge i X konvergerer.

Teorem 2.5 *$A \subset \mathbb{R}^n$ er komplett hvis og bare hvis A er lukket.*

2.2 Funksjoner

Definisjon: En funksjon f fra et metrisk rom (X, d) til et metrisk rom (X', d') er *kontinuerlig* i punktet $x_0 \in X$ dersom for gitt $\epsilon > 0$ så finnes en

$\delta > 0$ slik at for alle $x \in X$ gjelder

$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

f er *kontinuerlig* hvis den er kontinuerlig i alle punkt $x \in X$.

Definisjon: La X og Y være topologiske rom og $f : X \rightarrow Y$ en bijeksjon, det vil si 1-1 og på. Hvis både funksjonen f og den inverse funksjonen $f^{-1} : Y \rightarrow X$ er kontinuerlige, så er f en *homeomorfi*.

Definisjon: En funksjon $f : X \rightarrow Y$ er en *åpen* avbildning hvis for alle åpne mengder $U \in X$, så er mengden $f(U)$ åpen i Y .

Definisjon: En familie Φ av funksjoner fra et metrisk rom (X, d) til et metrisk rom (X', d') er *ekvikontinuerlig* i et punkt $x_0 \in X$ hvis og bare hvis for alle $\epsilon > 0$ så finnes en $\delta > 0$ slik at for alle $x \in X$ og alle $f \in \Phi$ gjelder

$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

Familien Φ er *ekvikontinuerlig* i en delmengde E i X dersom den er ekvikontinuerlig i alle punkter $x \in E$.

Definisjon: En følge $\{f_j\}$ av funksjoner på X *konvergerer punktvis* hvis for hvert punkt $x \in X$, så konvergerer følgen $\{f_j(x)\}$.

Definisjon: En følge $\{f_n\}$ av funksjoner fra et metrisk rom (X, d) til et metrisk rom (X', d') *konvergerer uniformt* mot f hvis for gitt $\epsilon > 0$, så finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $x \in X$ og alle $n > N$, så er

$$d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Definisjon: En følge (f_n) av funksjoner på X *konvergerer lokalt uniformt* på mot f hvis hvert punkt x i X har en omegn der f_n konvergerer uniformt mot f .

Definisjon: En familie Φ er *uniformt begrenset* på X hvis det finnes en konstant $M > 0$ slik at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in X$ og alle $f \in \Phi$.

I resten av oppgaven vil vi se på komplekse funksjoner som er analytiske i \mathbb{C}_∞ .

2.3 Det utvidede komplekse planet

Det utvidede komplekse planet er det komplekse planet sammen med punktet uendelig forsynt med en passende topologi. Det utvidede komplekse planet

betegnes \mathbb{C}_∞ . For å forklare topologien i \mathbb{C}_∞ betrakter vi *Riemann-kula* \mathbb{S}^2 gitt som

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

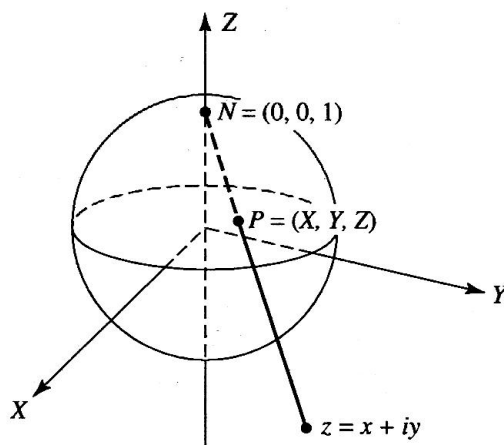
Riemann-kula gir en unik måte å visualisere det utvidede komplekse planet på, der alle komplekse tall samt punktet uendelig representeres som et punkt på kula. Avbildningen av det utvidede komplekse planet til Riemann-kula kalles den *stereografiske projeksjon* π .

$$\pi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{S}^2.$$

La $N = (0, 0, 1)$ være nordpolen på Riemann-kula og $z = x + iy \sim (x, y, 0)$ være et punkt i det komplekse plan $\mathbb{C} : Z = 0$. Tegn en rett linje gjennom N og z . Linja vil da skjære Riemann-kula i nøyaktig et punkt $P = (X, Y, Z)$ annet enn N . Den stereografiske projeksjonen π av z er da definert som punktet P :

$$\pi(z) = P.$$

Den stereografiske projeksjonen av ∞ er definert som N ; $\pi(\infty) = N$. Projeksjonen er med denne definisjonen en bijektiv avbildning fra \mathbb{C}_∞ til \mathbb{S}^2 .



Figur 9: Den stereografiske projeksjon [8].

Videre kan en konstruere en metrikk σ på \mathbb{C}_∞ . La $z, w \in \mathbb{C}_\infty$. Da defineres $\sigma(z, w)$ som den euklidiske avstanden i \mathbb{R}^3 mellom $\pi(z)$ og $\pi(w)$ på \mathbb{S}^2 :

$$\sigma(z, w) = |\pi(z) - \pi(w)|.$$

Geometrisk kan man utlede at

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z - w|}{(1 + |z|^2)^{1/2} (1 + |w|^2)^{1/2}}, \quad z, w \in \mathbb{C};$$

$$\sigma(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

slik at

$$\sigma(z, \infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} \sigma(z, w).$$

Dermed mister punktet uendelig sin spesielle betydning som det har med den vanlige euklidske metrikken.

Definisjon: En funksjon $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ er *holomorf* i D hvis den deriverte f' eksisterer i hvert punkt i D . En funksjon $f : D \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ er *meromorf* i D hvis hvert punkt i D har en omegn der enten f eller $1/f$ er holomorf.

Vi sier at en funksjon f som er definert i en omegn om ∞ er holomorf (eller meromorf) i ∞ dersom $z \rightarrow f(1/z)$ er holomorf (eller meromorf) nær 0. På \mathbb{C}_∞ kan man dermed se på rasjonale funksjoner og kvadratiske polynomer som analytiske.

2.4 Rasjonale funksjoner

Definisjon: En *rasjonal funksjon* er en funksjon på formen

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

der $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ og $Q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_nz^n$ er polynomer hvor ikke begge er identisk lik null.

Hvis $P(z) \equiv 0$, så er $R(z) \equiv 0$. Hvis $Q(z) \equiv 0$, så defineres $R(z) \equiv \infty$. Den konstante funksjonen ∞ regnes som en rasjonal funksjon. $R(\infty)$ defineres som $\lim R(z)$ når $z \rightarrow \infty$. Dersom P og Q ikke er relativt primiske, det vil si at de har felles røtter, så kan en forenkle slik at P og Q blir relativt primiske polynomer. Definisjons- og verd mengde for R er vanligvis gitt som Riemann-kula, slik at man unngår spesiell bearbeiding i polene der $Q(z) = 0$.

Definisjon: *Graden* til en rasjonal funksjon R er definert ved

$$\deg(R) = \max \{ \deg(P), \deg(Q) \},$$

der $\deg(S)$ er graden til et polynom S .

Definisjon: De rasjonale funksjonene av grad 1 kalles *Møbiustransformasjoner*. En Møbiustransformasjon $g(z)$ er dermed en avbildning fra \mathbb{C}_∞ til \mathbb{C}_∞ på formen

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

hvor $g(\infty) = a/c$ og $g(-d/c) = \infty$ hvis $c \neq 0$, og $g(\infty) = \infty$ hvis $c = 0$. Møbiustransformasjonen har en entydig invers (for $ad - bc \neq 0$)

$$g^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Definisjon: To rasjonale funksjoner R og S er *konjugerte* hvis det finnes en Møbiustransformasjon g slik at

$$S(z) = gRg^{-1}(z).$$

Dette gir en *ekvivalensrelasjon* \sim , og to polynomer P_1 og P_2 er dermed ekvivalente hvis

$$P_1 = M \circ P_2 \circ M^{-1},$$

for en Møbiustransformasjon M .

2.5 Iterasjon av rasjonale funksjoner

La $R: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ være en rasjonal avbildning og $z \in \mathbb{C}_\infty$. Velg et startpunkt $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ og gjør iterasjoner ved å repetere avbildningen R slik at en får en følge av punktene

$$z_0, z_1 = R(z_0), z_2 = R(z_1), \dots, z_n = R(z_{n-1}), \dots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

z_n blir dermed

$$z_n = R^n(z_0) = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n \text{ ganger}}(z_0). \quad (6)$$

Vi har at $R^0 = I$, hvor I er identitetsavbildningen, og $R^0(z_0) = z_0$.

Definisjon: *Banen* til z under R er definert som [6]

$$O_R^+(z) = \{R^n(z) \mid n \geq 0\}.$$

Banen kalles også *forover-banen* til z . Hvis R er en homeomorfi, kan en også se på *bakover-banen* til z under R som er gitt ved [6]

$$O_R^-(z) = \{R^n(z) \mid n < 0\}.$$

Generelt kan det være flere alternativer for z_{-1} for en gitt z_0 , og enda flere for z_{-2} og så videre.

2.6 Fikspunkt

Definisjon: La R være en rasjonal avbildning. Et punkt $\zeta \in \mathbb{C}_\infty$ kalles et *fikspunkt* for R dersom $R(\zeta) = \zeta$.

Anta at følgen z_n konvergerer mot w for en gitt z_0 . Siden R er kontinuerlig i w , gjelder

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n) = R\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = R(w).$$

Så hvis $z_n \rightarrow w$, så vil $R(w) = w$, og w er et fikspunkt for R .

Definisjon: Hvis $\zeta \in \mathbb{C}$, så finnes den deriverte $R'(\zeta)$ og

1. ζ er et *tiltrekkende fikspunkt* hvis $|R'(\zeta)| < 1$;
2. ζ er et *frastøtende fikspunkt* hvis $|R'(\zeta)| > 1$; og
3. ζ er et *nøytralt fikspunkt* hvis $|R'(\zeta)| = 1$.

Anta at z er tilstrekkelig *nært* et fikspunkt ζ . Da kan en gjøre tilnærmingen

$$|R(z) - \zeta| = |R(z) - R(\zeta)| = |R'(\zeta)| \cdot |z - \zeta|.$$

Dermed vil punkter som er tilstrekkelig nær et tiltrekkende fikspunkt nærme seg fikspunktet enda mer hvis en itererer ved R . Hvis startpunktet z_0 ligger tilstrekkelig nær et tiltrekkende fikspunkt ζ , så vil $z_n \rightarrow \zeta$ når $n \rightarrow \infty$. Punkter nær et frastøtende fikspunkt vil derimot gå lengre og lengre fra fikspunktet ved iterasjon. Den eneste måten z_n kan konvergere mot et frastøtende fikspunkt ζ på, er hvis $z_n = \zeta$ for n større enn en gitt $N \in \mathbb{N}$.

Definisjon: Et punkt $\eta \in \mathbb{C}_\infty$ er et *periodisk punkt* for R dersom $R^m(\eta) = \eta$ for en $m \in \mathbb{N}$. Da finnes en minste $n \in \mathbb{N}$ slik at $R^n(\eta) = \eta$, men alle $\eta_0 = \eta$, $\eta_1 = R(\eta)$, \dots , $\eta_{n-1} = R^{n-1}(\eta)$ er forskjellige. n kalles *perioden* til η , og mengden $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}\}$ kalles en *syklus av periode n* .

Definisjon: For et periodisk punkt $\eta_0 \in \mathbb{C}_\infty$ av periode n , defineres *egenverdien* ρ til syklusen som den deriverte av R^n i η_0 . Ved kjerneregelen får vi at

$$\rho = (R^n)'(\eta_0) = \prod_{i=0}^{n-1} R'(\eta_i).$$

En syklus er da

1. *tiltrekkende* hvis $|\rho| < 1$;
2. *supertiltrekkende* hvis $\rho = 0$;
3. *frastøtende* hvis $|\rho| > 1$;
4. *nøytral* hvis $|\rho| = 1$.

3 Kvadratiske iterasjoner

Hovedemnene i denne oppgaven er kvadratiske iterasjoner, Douadys kanin, Juliamengden og Mandelbrotmengden. Denne seksjonen blir en introduksjonsdel til dette, hvor jeg ser på kvadratiske iterasjoner, invariante mengder og normale familier av funksjoner. Her defineres også Juliamengden og jeg ser på to enkle eksempler der Juliamengden er en glatt kurve. I denne delen gis bevis til de viktigste teoremene. Til de resterende bevisene oppgir jeg referanser. De viktigste referansene er Beardons *Iteration of Rational Functions* [2] og Gamelins *Complex Analysis* [8].

3.1 Kvadratiske iterasjoner og unik representasjon av kvadratiske polynomer

Et kvadratisk polynom er gitt som

$$P(z) = Az^2 + Bz + C, \quad A \neq 0.$$

Det essensielle i denne oppgaven er å finne ut hva som skjer med følgen

$$z, P(z), P^2(z), P^3(z), \dots$$

Gitt $P_c(z) = z^2 + c$. Hvis det finnes en Møbiustransformasjon $M(z)$ slik at

$$P_c(z) = M \circ P \circ M^{-1}(z),$$

så er $P(z)$ ekvivalent med $P_c(z)$, og $P(\infty) = P_c(\infty) = \infty$.

La $M(z) = az + b$. Da har vi at $M^{-1}(z) = (z - b)/a$, og dermed er

$$\begin{aligned} M \circ P \circ M^{-1}(z) &= a \left(A \left(\frac{z-b}{a} \right)^2 + B \left(\frac{z-b}{a} \right) + C \right) + b \\ &= \frac{A}{a} z^2 + \left(-\frac{2bA}{a} + B \right) z + \left(\frac{Ab^2}{a} - Bb + aC + b \right). \end{aligned}$$

Setter vi $a = A$, $b = \frac{B}{2}$ og $c = \left(\frac{B}{2} - \frac{B^2}{4} + AC \right)$ slik at $M(z) = Az + \frac{B}{2}$, vil

$$\begin{aligned} M \circ P \circ M^{-1}(z) &= z^2 + \left(\frac{B}{2} - \frac{B^2}{4} + AC \right) \\ &= z^2 + c. \end{aligned}$$

$P(z) = Az^2 + Bz + C$ kan da unikt representeres på formen $P_c(z) = z^2 + c$. For å kunne forstå hva som skjer med alle kvadratiske polynomer under iterasjon, er det altså nok å se på de kvadratiske polynomene på formen P_c . Man er interessert i å finne ut hva som skjer med følgen

$$z, P_c(z), P_c^2(z), P_c^3(z), \dots$$

Det komplekse tallet z kan som kjent skrives som $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ der $r = |z|$ er lengden til z og θ er argumentet til z . Når man utfører iterasjonen $z \rightarrow z^2 + c$ på z vil det si at man kvadrerer lengden r til z , dobler argumentet θ og legger til konstanten c .

Polynomet P_c har et unikt *kritisk punkt* i $\omega = 0$, det vil si et punkt ω hvor $P'_c(\omega) = 0$. Parameteren c kalles den *kritiske verdien*: $c = P_c(0)$. Det er også av interesse å finne ut hva som skjer med det kritiske punktet under iterasjon. Dette vil vi se mer på i avsnitt 4.1 om Mandelbrotmengden. Merk at alle sykluser som inneholder det kritiske punktet 0, vil være supertiltrekkende ifølge definisjonen av egenverdi i avsnitt 2.6. Merk også at det kvadratiske polynomet P_c kan ha maksimalt en tiltrekkende syklus [3]. Denne vil dermed være supertiltrekkende.

Nest etter Möbiustransformasjoner er andregradsfunksjonene de enkleste rasjonale funksjonene, men man har likevel ikke klart å kartlegge dynamikken til andregradsfunksjonene fullstendig [4].

3.2 Julia og Fatou mengdene

Sett at vi er gitt to startpunkt z_0 og w_0 og gjør iterasjoner med R slik at en får følgene z_n og w_n . Det store spørsmålet innen iterasjonsteori er om følgene vil oppføre seg likt når $n \rightarrow \infty$ dersom w_0 er tilstrekkelig nær z_0 fra start. Dette kommer an på valget av z_0 , og man deler det komplekse planet (eventuelt Riemann-kula) inn i to disjunkte mengder F , *Fatoumengden*, og J , *Juliamengden*. Noe vagt kan vi si at Fatoumengden består av alle z_0 der z_n og w_n (for alle n) oppfører seg *likt* for en w_0 tilstrekkelig nær z_0 , mens Juliamengden består av alle z_0 der z_n og w_n ikke vil oppføre seg likt. Denne teorien begynte rundt 1918 med de franske matematikerne Pierre Fatou og Gaston Julia [2].

En bedre måte å si dette på er at et punkt z_0 er i Fatoumengden hvis for gitt en $\epsilon > 0$ så kan vi finne en $\delta > 0$ slik at hvis $|z_0 - w_0| < \delta$ så vil banene til z_0 og w_0 følge hverandre innenfor en avstand ϵ , det vil si $|R^n(z_0) - R^n(w_0)| < \epsilon$ for alle n [11]. Juliamengden er da komplementet til Fatoumengden.

Fatoumengden til R er altså definert ved ekvikontinuiteten til familien av iterasjoner $\{R^n\}$. I videre analyse er det mest hensiktsmessig å bruke Riemannkula \mathbb{C}_∞ og metrikken σ fra avsnitt 2.3. Før jeg gir en formell definisjon av Fatou- og Juliamengden, trenger vi et enkelt resultat om ekvikontinuitet. La Φ være en familie av avbildninger fra X til X' , der X og X' er metriske rom. Da finnes en største åpen delmengde i X der Φ er ekvikontinuerlig. Spesielt, hvis $f : X \rightarrow X$, så finnes en største åpen delmengde i X hvor familien av iterasjoner $\{f^n\}$ er ekvikontinuerlig [2].

Definisjon: La R være en ikke-konstant rasjonal funksjon. *Fatoumengden* $F(R)$ til R er den største åpne delmengden i \mathbb{C}_∞ der $\{R^n\}$ er ekvikontinuerlig. *Juliamengden* $J(R)$ til R er komplementet til Fatoumengden i \mathbb{C}_∞ , det vil si at $J(R) = \mathbb{C}_\infty - F(R)$.

Merk at ved denne definisjonen, er Fatoumengden åpen og Juliamengden kompakt. I dette avsnittet vil jeg også ta med de viktige egenskapene til Julia- og Fatoumengden som er beskrevet i de neste to teoremene.

Teorem 3.1 *For enhver ikke-konstant rasjonal avbildning R , og ethvert positivt heltall p , så er $F(R^p) = F(R)$ og $J(R^p) = J(R)$.*

Se bevis i [2] side 51. I beviset settes $S = R^p$ og man bruker ekvikontinuitet og Lipschitz ulikhet til å vise at $F(S) = F(R)$. Hvis man er interessert i å finne periodiske punkter, gjør teorem 3.1 at det er nok å bare studere fikspunkt ved å se på R^n i stedet for R .

Teorem 3.2 *La $P(z)$ være et polynom av grad $d \geq 2$ og la $A(\infty)$ være mengden av alle z slik at $P^n(z) \rightarrow \infty$. $A(\infty)$ er en åpen sammenhengende delmengde i \mathbb{C}_∞ som inneholder ∞ . Juliamengden J til $P(z)$ sammenfaller med randen til $A(\infty)$, og er en ikke-tom kompakt delmengde i \mathbb{C} . Hver begrenset komponent av $\mathbb{C} \setminus J$ er enkeltsammenhengende.*

Se bevis i [8] side 327. Ifølge definisjonen kan Juliamengden i enkelte tilfeller være tom. For de kvadratiske polynomene kan dette ikke være tilfellet ifølge dette teoremet. De to neste teoremene er også viktige i forhold til Fatou- og Juliamengden. Det første er av fundamental betydning.

Teorem 3.3 *La R være en rasjonal funksjon. Da er Fatoumengden F og Juliamengden J totalt invariant under R .*

Beviset finnes i [2] side 54. Ifølge teorem 2.4 er det nok å vise at F er totalt invariant. I tillegg er R surjektiv, det vil si på, og dermed holder det å vise at F er baklengs invariant.

Teorem 3.4 *La P være et polynom av grad ≥ 2 . Da er ∞ i Fatoumengden*

$F(P)$ til P , og komponenten $A(\infty)$ til F som inneholder ∞ er totalt invariant under P .

Se bevis i [2] side 54. Senere i oppgaven vises noen bilder av innfylte Juliamengder, som jeg selv har laget i Matlab. Den innfylte Juliamengden inneholder Juliamengden selv og eventuelle begrensede komponenter av Fatoumengden, og defineres slik:

Definisjon: La P være et komplekst polynom av grad ≥ 2 . Den *innfylte Juliamengden* til P , $K(P)$, defineres som mengden av alle $z \in \mathbb{C}$ slik at banen til z , $O^+(z)$, under P er begrenset. Det vil si

$$K(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid |P^n(z)| \not\rightarrow \infty\}.$$

Den innfylte Juliamengden K blir dermed komplementet til $A(\infty)$. Merk at $A(\infty) \subset F(P)$.

3.3 Normale familier av funksjoner

Definisjon: En familie Φ av komplekse funksjoner på $E \subset \mathbb{C}$ er en *normal familie* dersom enhver uendelig følge av funksjoner fra Φ inneholder en delfølge som konvergerer lokalt uniformt på E .

Det neste teoremet, Arzelà-Ascoli teoremet, gir en sammenheng mellom normale og ekvikontinuerlige familier av funksjoner. Dette teoremet har mange versjoner. Jeg velger å bruke versjonen fra boka *Complex Analysis* av Gamelin [8].

Teorem 3.5 Arzelà-Ascoli La E være en kompakt delmengde i \mathbb{C} , og la Φ være en familie av kontinuerlige komplekse funksjoner på E som er uniformt begrenset. Da er følgende ekvivalent:

1. Familien Φ er ekvikontinuerlig i hvert punkt $z \in E$;
2. Hver følge av funksjoner i Φ har en delfølge som konvergerer uniformt på E .

For å bevise Arzelà-Ascoli teoremet, benytter jeg følgende lemma [16].

Lemma 3.6 Anta at mengden S er tett i E . Hvis $f_j : E \rightarrow \mathbb{C}$ er en ekvikontinuerlig følge som konvergerer punktvis i S , så konvergerer $\{f_j\}$ uniformt i E .

Bevis: La $\epsilon > 0$ og $x \in E$. Siden $\{f_j\}$ er ekvikontinuerlig har vi at x har en omegn $U(x)$ slik at for $y \in U(x)$ og $j \in \mathbb{N}$ så vil

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon/5.$$

Siden E er kompakt har den en endelig overdekning

$$\{U(x_1), \dots, U(x_k)\}.$$

Siden S er tett i E , kan vi finne punkter $a_i \in U(x_i) \cap S$ for $1 \leq i \leq k$. Anta at $\{f_j\}$ konvergerer punktvis i S . Da finnes en $n_i \in \mathbb{N}$ slik at for $m, n > n_i$ og $1 \leq i \leq k$, så er

$$|f_m(a_i) - f_n(a_i)| < \epsilon/5.$$

La $n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$. For $x \in E$, så $x \in U(x_i)$ for en i ; $1 \leq i \leq k$. For $m, n > n_0$ har vi da

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_m(x_i)| \\ &\quad + |f_m(x_i) - f_m(a_i)| \\ &\quad + |f_m(a_i) - f_n(a_i)| \\ &\quad + |f_n(a_i) - f_n(x_i)| \\ &\quad + |f_n(x_i) - f_n(x)| \\ &< \epsilon/5 + \epsilon/5 + \epsilon/5 + \epsilon/5 + \epsilon/5 = \epsilon. \end{aligned}$$

$\{f_j\}$ er dermed en Cauchy-følge. Siden \mathbb{C} er komplett konvergerer derfor $\{f_j\}$ uniformt på E .

Bevis: Arzelà-Ascoli: Beviskissen er hentet fra [8] side 307. I beviset for (1) \Rightarrow (2) lar en $\{f_n\}$ være en følge i Φ og $\{S_n\}$ være en følge av punkter som er tett i E . Først brukes diagonal argumentet for å finne en delfølge $\{f_{n,n}\}$ som konvergerer for alle punkt S_n . Til slutt brukes teorem 3.6 til å vise at $\{f_{n,n}\}$ konvergerer uniformt på E . Beviset for (2) \Rightarrow (1) er et motsigelsesbevis.

(1) \Rightarrow (2):

STEG 1: Skal først vise at det finnes en tellbar og tett delmengde i den kompakte mengden E . Siden E er kompakt så har vi at enhver åpne overdekning av E inneholder en endelig overdekning som også dekker E . For $\epsilon > 0$, så har dermed mengden av ϵ -baller med sentrum i E en endelig overdekning. La $\epsilon = 1/n$ og la S_n være samlingen av sentrum til $1/n$ -ballene i den endelige overdekningen. Da er S_n en endelig delmengde i E som er slik at alle punkter i E ligger innenfor en sirkel med radius $1/n$ og sentrum i en av S_n . Unionen S av alle mengdene S_n er tellbar og tett i E .

STEG 2: La $\Phi = \{f_n\}$ for $n \in \mathbb{N}$. Det neste steget er å finne en delfølge til $\{f_n\}$ som konvergerer punktvis på S . Da brukes *diagonal argumentet*. Kall de tellbare elementene i S for $\{z_1, z_2, z_3, \dots\}$. Følgen $\{f_n(z_1)\}_{n=1}^\infty$ er begrenset og har en konvergent delfølge $\{f_{1,n}(z_1)\}_{n=1}^\infty$. Følgen $\{f_{1,n}(z_2)\}_{n=1}^\infty$ er begrenset og har en konvergent delfølge $\{f_{2,n}(z_2)\}_{n=1}^\infty$. Siden følgen $\{f_{2,n}\}_{n=1}^\infty$ er en delfølge av $\{f_{1,n}\}_{n=1}^\infty$, konvergerer den både i z_1 og z_2 . Ved å fortsette på denne måten får en en tellbar samling av delfølger av den første følgen $\{f_n(z_1)\}_{n=1}^\infty$:

$$\begin{array}{cccc} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{array}$$

der følgen i rad n konvergerer i punktene z_1, \dots, z_n og hver rad er en delfølge av raden over. Da er $\{f_{n,n}\}$ en delfølge som konvergerer i alle punkt i S .

STEG 3: Vi har nå at mengden S er tett i den kompakte mengden E , og at $\{f_{n,n}\}$ er en ekvikontinuerlig delfølge i $\{f_n\}$ som konvergerer punktvis i S . Ifølge teorem 3.6 konvergerer $\{f_{n,n}\}$ uniformt på E .

(2) \Rightarrow (1) :

Anta at hver følge av funksjoner i Φ har en delfølge som konvergerer uniformt på E , det vil si at Φ er normal i E . Anta at Φ ikke er ekvikontinuerlig i E . Da finnes en $\epsilon > 0$, følger av punkter $z_n, z'_n \in E$ og følge av funksjoner $f_n \in \Phi$ slik at

$$|z_n - z'_n| \rightarrow 0 \quad \text{mens} \quad |f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siden E er kompakt, kan vi ifølge teorem 2.3 velge delfølger i $\{z_n\}$ og $\{z'_n\}$ som konvergerer mot en felles grense $z'' \in E$. Siden Φ er normal finnes en delfølge i $\{f_n\}$ som konvergerer uniformt på E . Kall de tre delfølgene i $\{z_n\}$, $\{z'_n\}$ og $\{f_n\}$, for henholdsvis $\{z_{n_k}\}$, $\{z'_{n_k}\}$ og $\{f_{n_k}\}$. $\{f_{n_k}\}$ konvergerer uniformt mot en funksjon som vi kaller f , og denne vil være kontinuerlig på E . Vi kan da finne en k slik at

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| &< \epsilon/3; \\ |f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})| &< \epsilon/3; \\ |f(z'_{n_k}) - f_{n_k}(z'_{n_k})| &< \epsilon/3. \end{aligned}$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z'_{n_k})| &\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| \\ &\quad + |f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})| \\ &\quad + |f(z'_{n_k}) - f_{n_k}(z'_{n_k})| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

som gir en motsigelse til $|f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \geq \epsilon$ for alle n . Φ er dermed ekvikontinuerlig i E . ■

Arzelà-Ascoli teoremet kunne like gjerne vært formulert med E , en åpen mengde (de rasjonale punkter utgjør da en tett delmengde) og \mathbb{C} erstattet av \mathbb{C}_∞ , og sier oss at ekvikontinuitet i \mathbb{C}_∞ er det samme som normalitet. Teoremet gir oss en annen beskrivelse av Fatoumengdene, nemlig at $F(R)$ er den største åpne delmengden i \mathbb{C}_∞ der $\{R^n\}$ danner en normal familie.

Teorem 3.7 Vitali Anta at familien $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ av analytiske funksjoner er normal i et område D , og at f_n konvergerer punktvis mot en funksjon f i en ikke-tom, åpen delmengde W i D . Da kan f utvides til en funksjon F som er analytisk på D , og $f_n \rightarrow F$ lokalt uniformt på D .

Bevis: Beviset er hentet fra [2] side 56. Siden $\{f_n\}$ er normal i D , så finnes en delfølge i $\{f_n\}$ som konvergerer lokalt uniformt i D mot en funksjon F . F vil da være analytisk i D , og $F = f$ på W . Anta at $\{f_n\}$ ikke konvergerer lokalt uniformt på D mot F . Da finnes en kompakt delmengde K i D , en $\epsilon > 0$ og en delfølge $\{g_n\}$ i $\{f_n\}$ slik at for alle n , så er

$$\sup_K \sigma(g_n z, F z) \geq \epsilon.$$

Men ved normalitet finnes en delfølge $\{h_n\}$ i $\{g_n\}$ som konvergerer lokalt uniformt mot h på D . Da vil $h = f = F$ på W , og siden h er analytisk i D , må $h = F$ i D . Da vil

$$\sup_K \sigma(h_n z, F z) \rightarrow 0,$$

og siden $\{h_n\}$ er en delfølge i $\{g_n\}$, får vi en motsigelse. ■

Teorem 3.8 La D være et domene på Riemannkula \mathbb{C}_∞ , og la Ω være domenet $\mathbb{C}_\infty - \{0, 1, \infty\}$. Da er familien Φ av alle analytiske funksjoner $f : D \rightarrow \Omega$ normal i D .

Se bevis i [2] side 59. Det neste teoremet er en mer generell variant av det forrige.

Teorem 3.9 *La Φ være en familie av funksjoner som er analytiske i et område D i \mathbb{C}_∞ . Anta at det finnes en konstant $m > 0$ og at det for hver $f \in \Phi$ finnes tre forskjellige punkter a_f, b_f og c_f i \mathbb{C}_∞ slik at:*

1. $f \in \Phi$ tar ingen av verdiene a_f, b_f eller c_f i D ; og
2. $\min\{\sigma(a_f, b_f), \sigma(b_f, c_f), \sigma(c_f, a_f)\} \geq m$.

Da er Φ normal i D .

Se bevis i [2] side 58.

3.4 Noen eksempler

3.4.1 $z \rightarrow z^2$

Vi starter med å se på iterasjon av det enkleste andregradspolynommet

$$P_0(z) = z^2.$$

$P_0(z)$ har et supertiltrekkende fikspunkt i $z = 0$ siden $P_0'(0) = 0$, og et frastøtende fikspunkt i $z = 1$ siden $P_0'(1) = 2 > 1$. Punktet ∞ regnes også som et tiltrekkende fikspunkt [2].

Se på følgen

$$z_0 = z, z_1 = z^2, z_2 = (z^2)^2, \dots, z_n = z^{2^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi ser at $z_n \rightarrow 0$ når $|z_0| < 1$ og $z_n \rightarrow \infty$ når $|z_0| > 1$. Da gjenstår det å se hva som skjer på enhetssirkelen

$$C = \{z : |z| = 1\}.$$

Enhetssirkelen C er totalt invariant under P_0 , det vil si at $P_0(C) = C = P_0^{-1}(C)$. På C kan vi skrive $z = e^{i\theta}$, og oppførselen til punktene $P_0^n(e^{i\theta})$ på C er heller komplisert [2]. Avbildningen $z \rightarrow z^2$ dobler for hver iterasjon argumentet θ . På C gjelder

$$P_0^n(z) = e^{2^n i\theta}.$$

Dersom z kan skrives på formen

$$e^{2\pi i r/2^m}, \quad r, m \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

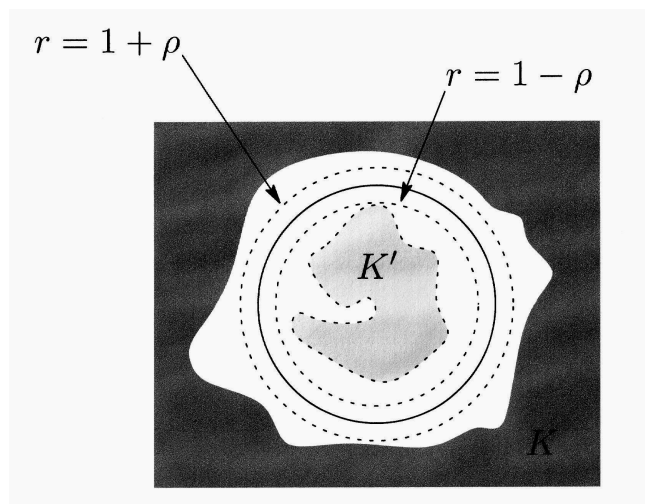
så er

$$P_0^n(z) = 1 \quad \text{for } n \geq m.$$

Punktene på formen (7) er tette i C . Ved å starte med et punkt på denne formen vil iterasjonene etter et endelig antall steg nå fikspunktet 1 og forbli der. Dersom en velger et startpunkt z_0 på C som ikke er på formen (7), vil ikke følgen z_n konvergere mot noe punkt. Dette ser vi ved å først anta det motsatte, nemlig at $z_n \rightarrow w$. Da må w være et fikspunkt til P_0 på C (se avsnitt 2.6), og dermed $w = 1$. Men 1 er et frastøtende fikspunkt til P_0 , og dermed er $z_n = w$ for en n . z_0 er da på formen (7) som gir en motsigelse.

Punktene som ikke er på formen (7) er også tette i C . Dermed har vi at enhver bue på C inneholder uendelig mange punkter som tilslutt når fikspunktet 1 og forblir der, og også uendelig mange punkter som ved iterasjonene flytter seg rundt om på C og aldri konvergerer mot noe punkt. Gitt et punkt z_0 på C . Da kan vi velge et punkt w_0 som også ligger på C og vilkårlig nær z_0 der iterasjonene z_n og w_n oppfører seg forskjellig. Juliamengden J for $P_0(z)$ inneholder dermed enhetssirkelen C .

Hvis z_0 og w_0 ligger i enhetsdisken $\{z : |z| < 1\}$, vil både z_n og w_n konvergere mot 0 og dermed oppføre seg likt. Dette gjelder også hvis punktene z_0 og w_0 ligger utenfor enhetssirkelen, siden alle disse punktene konvergerer mot ∞ . Dermed vil Fatoumengden F til $P_0(z)$ inneholde mengdene $\{z : |z| < 1\}$ og $\{z : |z| > 1\}$. En ser at familien $\{P_0^n\}$ av iterasjoner er ekvikontinuerlig overalt bortsett fra på enhetssirkelen. Juliamengden J til $P_0(z)$ er dermed enhetssirkelen.



Figur 10: For alle $z \in K$ så er $|P_0^n(z)| > (1 + \rho)^n$, så $P_0 \rightarrow \infty$ på K når $n \rightarrow \infty$. For alle $z \in K'$ så er $|P_0^n(z)| < (1 - \rho)^n$, så $P_0 \rightarrow 0$ på K' når $n \rightarrow \infty$ [11].

Vi vet at $P_0^n(z) = z^{2^n}$, og vil finne de periodiske punktene til P_0 . De periodiske punktene er fikspunktene for en iterasjon P_0^n , altså når

$$P_0^n(z) = z^{2^n} = z \quad \Rightarrow \quad z^{2^n-1} = 1.$$

Dermed er de periodiske punktene til P_0 på C de $(2^n - 1)$ -te røttene av 1. Siden dette gjelder for alle $n \in \mathbb{Z}$, er de periodiske punktene tette på enhets sirkelen C .

3.4.2 $z \rightarrow z^2 - 2$

Et annet enkelt eksempel er iterasjon av det kvadratiske polynomet

$$P_{-2}(z) = z^2 - 2.$$

Juliamengden i dette eksemplet er som vi skal se det lukkede intervallet $[-2, 2]$. Sammen med forrige eksempel er disse to tilfellene hvor $c = 0$ og $c = -2$ de eneste der Juliamengden av $z^2 + c$ er en glatt kurve. For alle andre verdier av c så er Juliamengden til $z^2 + c$ en fraktalmengde [8].

Jeg vil bestemme Juliamengden til $P_{-2}(z)$ gjennom oppgave 3.3.3. i [2] side 60. En har at

$$P_{-2}(z) = z^2 - 2, \quad P'_{-2}(z) = 2z, \quad P''_{-2}(z) = 2.$$

$P_{-2}(z)$ har frastøtende fikspunkt i $z = 2$ og $z = -1$. $P_{-2}(x)$ har minste verdi -2 i $x = 0$ på den reelle aksene. $P_{-2}(x)$ er videre en like funksjon som i intervallet $x \in [0, 2]$ vokser, noe som gir $P_{-2}(x)$ maksverdi 2 i $z = \pm 2$ for $x \in [-2, 2]$. Vi har dermed at hvis $-2 \leq x \leq 2$, så er $-2 \leq P_{-2}(x) \leq 2$, og intervallet $[-2, 2]$ er forlengts invariant under $P_{-2}(z)$. Den inverse funksjonen til P_{-2} er gitt ved

$$P_{-2}^{-1}(z) = \pm\sqrt{z+2}.$$

For x i intervallet $[-2, 2]$ vil $P_{-2}^{-1}(x)$ ha minste verdi -2 og største verdi 2 i $x = 2$. $P_{-2}^{-1}(x)$ for $x \in [-2, 2]$ stiger mellom $P_{-2}^{-1}(2) = -2$ og $P_{-2}^{-1}(2) = 2$, og $P_{-2}^{-1}(-2) = 0$. Dermed har vi at hvis $-2 \leq x \leq 2$, så er $-2 \leq P_{-2}^{-1}(x) \leq 2$, og intervallet $[-2, 2]$ er baklengs invariant under $P_{-2}(z)$. Siden

$$P_{-2}([-2, 2]) = [-2, 2] = P_{-2}^{-1}([-2, 2]),$$

er intervallet $[-2, 2]$ totalt invariant. Dermed er også komplementet til intervallet; $\mathbb{C}_\infty \setminus [-2, 2]$, totalt invariant ifølge teorem 2.4. (Se også teorem 3.4).

La $\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus [-2, 2]$. $\Phi = \{P_{-2}^n\}$ er en familie av analytiske funksjoner der hver funksjon i Φ ikke avbilder $z \in \Omega$ på noen av verdiene 0, 1 eller 2. I følge teorem 3.9 er $\Phi = \{P_{-2}^n\}$ normal i Ω . Ifølge Arzelà-Ascoli teoremet 3.5 er $\{P_{-2}^n\}$ ekvikontinuerlig i $\mathbb{C}_\infty \setminus [-2, 2]$, og ved definisjon av Fatoumengden har vi at

$$F(P_{-2}) \supset \Omega.$$

Juliamengden defineres som komplementet til Fatoumengden, så dermed har vi

$$J(P_{-2}) = (F(P_{-2}))^C \subset \Omega^C = [-2, 2].$$

Da vet vi at $F(P_{-2})$ er sammenhengende. Hvis man velger to punkter z_1 og z_2 i $F(P_{-2})$ kan man greit finne en kurve i $F(P_{-2})$ fra z_1 til z_2 . Dersom minst et av punktene ligger i Ω , er dette klart. Anta at $J(P_{-2}) \subsetneq [-2, 2]$ og de to punktene $z_1, z_2 \in F(P_{-2})$ ligger i intervallet $[-2, 2]$. Da kan man for eksempel velge en halvsirkel som kurve fra z_1 til z_2 som ligger i $F(P_{-2})$; altså er $F(P_{-2})$ veisammenhengende.

På $A(\infty)$ konvergerer $P_{-2}^n(z)$ punktvis mot ∞ , og ved Vitalis teorem 3.7 vil $P_{-2}^n \rightarrow \infty$ på $F(P_{-2})$. Men da må $F(P_{-2}) \cap [-2, 2] = \emptyset$. Dermed er Fatoumengden

$$F(P_{-2}) = \Omega = \mathbb{C} \setminus [-2, 2],$$

og Juliamengden

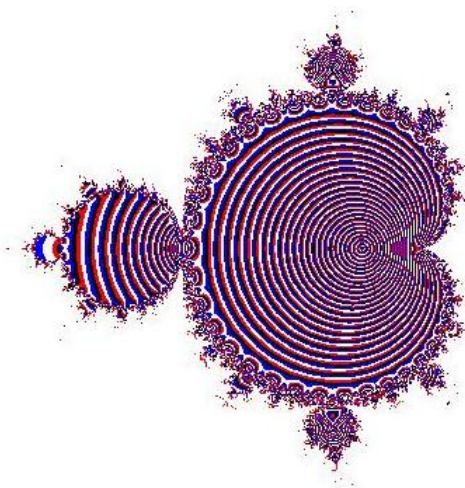
$$J(P_{-2}) = \Omega^C = [-2, 2].$$

4 Mer kompleks dynamikk

I denne delen skal vi se på Mandelbrotmengden, og videre på noen av egenskapene til denne mengden og Juliamengden. Referansene er gitt i teksten.

4.1 Mandelbrotmengden

Mengden på forsiden av denne oppgaven kalles Mandelbrotmengden. Den er definert som mengden av alle verdier av c hvor iterasjon av $P_c(z) = z^2 + c$ gir en følge som ikke går mot uendelig. Dette gir en mengde av punkter i det komplekse plan hvor randen former et fraktal. Mengden er oppkalt etter den fransk-amerikanske matematikeren Benoit Mandelbrot. Mandelbrot ble født i 1924 og er mest kjent for sitt arbeid innen fraktal geometri og gjennom Mandelbrotmengden. Mengden ble først studert av Pierre Fatou og Gaston Julia på begynnelsen av 1900-tallet, men de første bildene av mengden ble tegnet først i 1978 ved hjelp av datamaskiner. Matematisk er Mandelbrotmengden definert som mengden av komplekse verdier av c , der banen til 0 under iterasjon av $z_{n+1} = z_n^2 + c$ forblir begrenset [19].



Figur 19: Mandelbrotmengden.

Tidligere i denne oppgaven har jeg sett på iterasjon av

$$P_c(z) = z^2 + c,$$

for $c = 0$ og $c = -2$. Videre skal jeg se hva som skjer med følgen

$$z_0 = 0, z_1, z_2, z_3, \dots \tag{8}$$

av iterasjoner av $P_c(z) = z^2 + c$ når verdien til c endres. Funksjonene $P_c(z) = z^2 + c$ for $c = 0$, $c = -1$, $c = -2$ og $c = -3$ vil da gi følgene

$$\begin{aligned} P_0 &: 0, 0, 0, 0, \dots; \\ P_{-1} &: 0, -1, 0, -1, \dots; \\ P_{-2} &: 0, -2, 2, 2, \dots; \\ P_{-3} &: 0, -3, 6, 33, \dots \end{aligned}$$

Følgen i (8) endres avhengig av konstanten c . For startverdien $z_0 = 0$ gir P_0 en konstant følge, P_{-1} gir en syklus med periode 2, P_{-2} gir en følge som etter to iterasjoner er konstant, mens P_{-3} gir en følge som konvergerer mot uendelig.

$P_c(z) = z^2 + c$ vil for noen verdier av c ha et tiltrekkende fikspunkt i \mathbb{C} . $P_c(z)$ har to fikspunkt som vi kaller α og β i C som er løsningene av

$$z^2 - z + c = 0. \quad (9)$$

Da har vi at

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad \text{og} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \\ &\downarrow \\ \alpha + \beta &= 1 \quad \text{og} \quad \alpha\beta = c. \end{aligned}$$

Videre får vi dermed at

$$P'_c(\alpha) + P'_c(\beta) = 2\alpha + 2\beta = 2.$$

Fra tidligere har vi at et punkt ζ er et tiltrekkende fikspunkt til en rasjonal funksjon R dersom $|R'(\zeta)| < 1$. Både α og β kan dermed ikke være tiltrekkende, og $P_c(z)$ kan ha maksimum et tiltrekkende fikspunkt. Hvis $P_c(z)$ har et tiltrekkende fikspunkt α så må

$$|P'_c(\alpha)| = 2|\alpha| < 1.$$

Fra uttrykk (9) er $c = \alpha - \alpha^2$. Verdier av c som gir et tiltrekkende fikspunkt α er dermed avbildningen av

$$\{\alpha : |\alpha| < 1/2\},$$

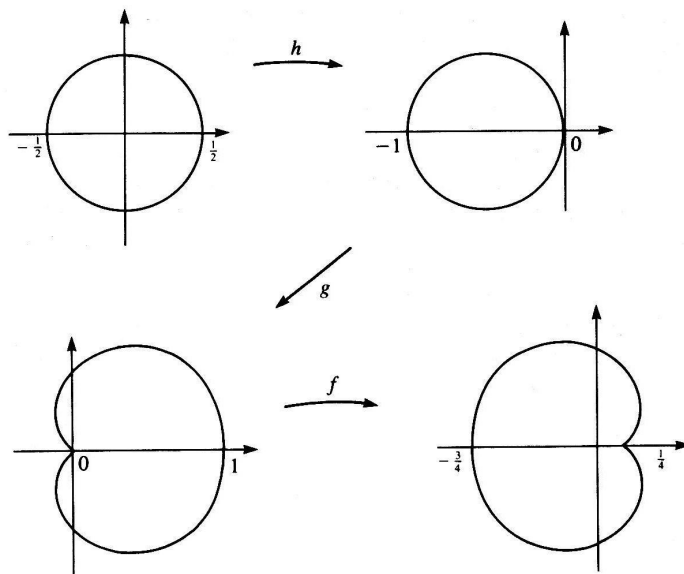
under funksjonen

$$z \rightarrow z - z^2.$$

Denne funksjonen kan skrives som $fgh(z)$, der [2]

$$h(z) = z - 1/2, \quad g(z) = z^2, \quad f(z) = 1/4 - z.$$

Mengden av c som gir et tiltrekkende fikspunkt blir dermed kardioiden på figur 20.



Figur 20: Kardioiden [2].

På tilsvarende måte kan vi finne hvilke verdier av c som gir en tiltrekkende syklus av periode 2. $z^2 + c$ gir en slik syklus for $c = -1$, der punktene 0 og -1 er tiltrekkende fikspunkt for den andre iterasjonen $(z^2 - 1)^2 - 1$ av $z^2 - 1$. Fikspunktene til den andre iterasjonen av P_c er løsningene av

$$P_c^2(z) - z = (z^2 + c)^2 + c - z = 0.$$

Fra før har vi at α og β er fikspunkt til $P_c(z)$. De er dermed også fikspunkt til $P_c^2(z)$, og vi har at

$$\frac{P_c^2(z) - z}{P_c(z) - z} = \frac{z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c}{z^2 - z + c} = z^2 + z + c + 1.$$

Anta at u og v også er fikspunkt til $P_c^2(z)$. De er da røtter til $z^2 + z + c + 1$ og vi kan skrive

$$\begin{aligned} P_c^2(z) - z &= (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1) \\ &= (z - \alpha)(z - \beta)(z - u)(z - v), \end{aligned}$$

der

$$u = \frac{-1 + \sqrt{-4c - 3}}{2} \quad \text{og} \quad v = \frac{-1 - \sqrt{-4c - 3}}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$uv = c + 1.$$

For at $\{u, v\}$ skal være en tiltrekkende sukklus med periode 2, må

$$P_c(u) = v \quad \text{og} \quad P_c(v) = u \quad \text{for} \quad u \neq v,$$

og

$$|(P_c^2)'(u)| \leq 1 \quad \text{og} \quad |(P_c^2)'(v)| \leq 1. \quad (10)$$

Ved kjerneregelen har vi at [2]

$$(P_c^2)'(u) = (P_c(P_c(u)))' = P_c'(P_c(u))P_c'(u) = P_c'(v)P_c'(u) = 4uv = 4(c + 1).$$

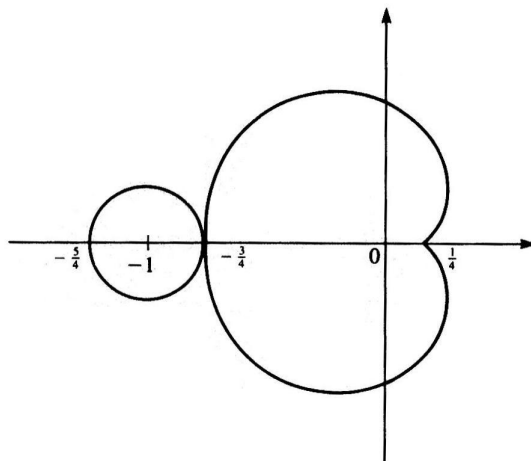
Fra (10) får vi da

$$|(P_c^2)'(u)| = 4|c + 1| < 1.$$

Mengden av c som gir en tiltrekkende syklus av periode 2 blir dermed

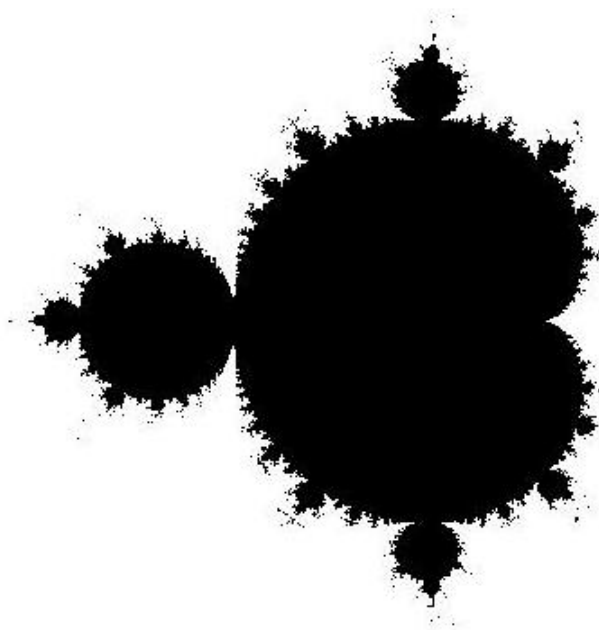
$$\{c : |c + 1| < 1/4\},$$

som gir disken med sentrum i $z = -1$ og radius $1/4$. Se figur 21.



Figur 21: Mengden av c som gir tiltrekkende fikspunkt og tiltrekkende syklus av periode 2 [2].

I kardioiden vil u og v være frastøtende fikspunkt til $P_c^2(z)$. For verdier av c innenfor kardioiden vil dermed $P_c(z)$ ha et tiltrekkende fikspunkt α og en frastøtende syklus $\{u, v\}$ av periode 2. Siden disken og kardioiden tangerer hverandre i punktet $z = -3/4$, vil punktene α , u og v gå mot den samme verdien $-1/2$ når $c \rightarrow -3/4$. I punktet $c = -3/4$ er $\alpha = u = v = -1/2$ slik at α blir et nøytralt fikspunkt og $P_c(z)$ har ingen *ekte* syklus av periode 2 [2]. For verdier av c i disken, vil α være et frastøtende fikspunkt og $\{u, v\}$ en tiltrekkende syklus av periode 2. Gjennom denne prosessen går den tiltrekkende egenskapen til α over til syklusen $\{u, v\}$. Ved å fortsette på denne måten vil den tiltrekkende egenskapen gå videre fra syklusen med periode 2 til en syklus med periode 4, så til en syklus med periode 8 og så videre [2]. Uten hjelp av datamaskiner blir det vanskelig å finne syklusene med periode $N \geq 3$, siden dette gir oss polynomer av grad 2^N . Ved å dividere med $P_c(z) - z$ som vi gjorde tidligere, vil man få polynomer av grad $2^N - 2$. Dette hjelper oss heller ikke videre, siden det ikke lar seg gjøre å løse likninger av grad større enn 4.



Figur 22: Mandelbrotmengden.

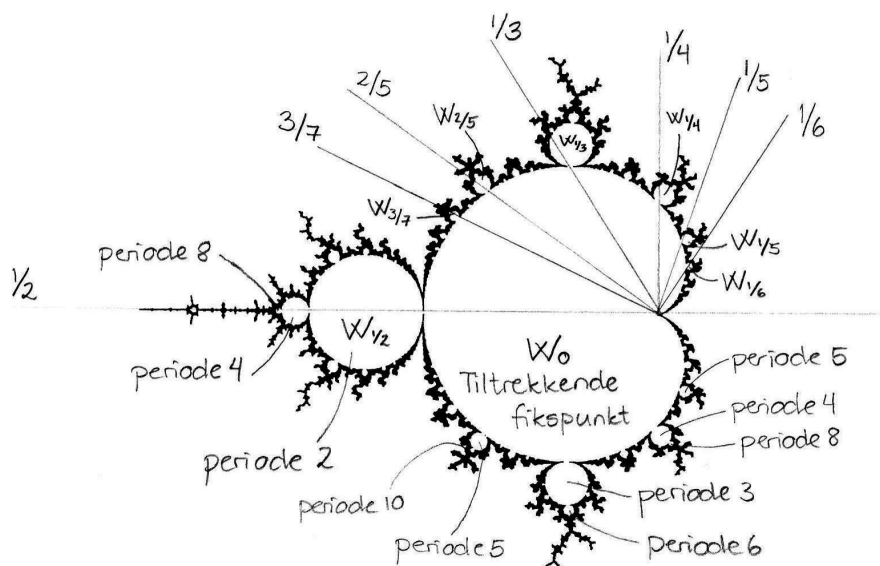
Mandelbrotmengden er som sagt definert som

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(0) \not\rightarrow \infty\} = \{c \in \mathbb{C} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |P_c^n(0)| < \infty\}.$$

Ved hjelp av datamaskiner kan man representere Mandelbrotmengden grafisk ved for eksempel å fargelegge alle verdier av c som er inneholdt i Mandelbrot-

mengden M svarte, og alle andre punkter hvite. Se figur 22. Bedre bilder kan lages ved å fargelegge punkter som ikke er i M etter hastigheten til følgen av iterasjoner av P_c^n mot uendelig. Se for eksempel forsidebildet som er hentet fra [19].

Alle verdier av c hvor iterasjon av P_c gir en tiltrekkende syklus er altså inneholdt i Mandelbrotmengden. Vi vet fra eksemplene vi har sett på i denne teksten at c -verdiene 0 , -1 og -2 ligger i Mandelbrotmengden. Verdien $c = 1$ vil for eksempel gi en følge som går mot uendelig: $0, 1, 2, 5, 26, \dots$. Punktet 1 er dermed ikke inneholdt i Mandelbrotmengden.



Figur 23: Noen av Mandelbrotmengdens hyperbolske komponenter [3].

La $H(M)$ være mengden av verdier av c hvor iterasjon av P_c gir en tiltrekkende syklus:

$$H(M) = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c \text{ har en tiltrekkende syklus}\}.$$

En sammenhengende komponent W av $H(M)$ kalles en *hyperbolsk* komponent til Mandelbrotmengden. (Mengden av alle c -verdier der P_c er hyperbolsk er $H(M) \cup (\mathbb{C} - M)$ [3]). Vi har at

$$W_0 = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c \text{ har et tiltrekkende fikspunkt}\};$$

$$W_{1/2} = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c \text{ har en tiltrekkende syklus av periode 2}\},$$

der vi fra tidligere har at W_0 er lik kardioiden og $W_{1/2}$ er disken med sentrum i -1 og radius $1/4$. Videre har vi at for hvert rasjonalt tall p/q der p og q er relativt primiske (deres største felles faktor er 1), så finnes en hyperbolsk komponent $W_{p/q}$ med en tiltrekkende syklus av periode q [19]. $2\pi p/q$ angir vinkelen i punktet $1/4$ mellom den positive reelle akse og tangeringspunktet til $W_{p/q}$ med kardioiden (se figur 23). Tilsvarende har hver komponent $W_{p/q}$ hyperbolske komponenter rundt seg og så videre. I kardioiden har vi et tiltrekkende fikspunkt som blir frastøtende i $W_{p/q}$ og en frastøtende syklus med periode q som blir tiltrekkende i $W_{p/q}$. Et viktig problem innen kompleks dynamikk er å finne ut om $H(M)$ er lik det indre til M . Problemet er ikke løst.

4.2 Egenskaper til Juliamengden og Mandelbrotmengden

I eksemplene på de kvadratiske iterasjonene som jeg har sett på i denne teksten, har vi sett at de tiltrekkende periodiske punktene til P_c ligger i Fatoumengden $F(P_c)$. Dette gjelder også generelt.

Teorem 4.1 *La R være en rasjonal funksjon av grad ≥ 2 . Da ligger de tiltrekkende periodiske punktene til R i Fatoumengden $F(R)$.*

Bevis: Beviset finnes i [2] side 104. La $\{\zeta_1, \dots, \zeta_q\}$ være en tiltrekkende syklus av R med periode q . Anta at ζ er et tiltrekkende fikspunkt til den rasjonale funksjonen R . Da er $|R'(\zeta)| < 1$ og dermed finnes et tall α slik at $|R'(\zeta)| < \alpha < 1$ og en disk D med sentrum i ζ slik at i D så er $|R(z) - \zeta| = |R(z) - R(\zeta)| < \alpha |z - \zeta|$. Dette viser at hver R^n avbilder D på seg selv, så D ligger i Fatoumengden $F(R)$ og $R^n \rightarrow \zeta$ uniformt på D . Ved Vitalis teorem 3.7 vil $R^n \rightarrow \zeta$ lokalt uniformt i komponenten av $F(R)$ som inneholder ζ . Siden $F(R^q) = F(R)$, får vi resultatet i teoremet. ■

Videre har en at de frastøtende periodiske punktene ligger i Juliamengden (se bevis i [2] side 109).

Anta at R er en rasjonal funksjon med grad ≥ 2 og E er en lukket, totalt invariant delmengde av Riemannkula. Da har E enten maks to punkter og $E \subset E(R) \subset F(R)$ eller så er E uendelig og $E \supset J(R)$. En annen måte å si dette på er at Juliamengden er den minste lukkede, totalt invariante mengden med minst tre punkter. Se [2] side 67-68. Ut fra denne egenskapen får vi en annen grunnleggende egenskap til Juliamengden. Denne er gitt ved neste teorem.

Teorem 4.2 *Anta at $\deg(R) \geq 2$. Dersom R har en totalt invariant Fatoukomponent F_0 , så er $J(R) = \partial F_0$.*

Bevis: Beviset finnes i [2] side 83. Anta at F_0 er en totalt invariant Fatoukomponent til R . Da er også tillukningen til F_0 , $\overline{F_0}$, totalt invariant ifølge teorem 2.4. Dermed er $J \subset \overline{F_0}$, og siden Juliamengden og Fatoumengden er disjunkte, er $J = \partial F_0$. ■

For et polynom er $A(\infty)$ totalt invariant ifølge teorem 3.4. Dermed er Juliamengden til polynomet lik $\partial A(\infty)$. Dette skal vi for eksempel se er tilfellet med Douadys kanin. Merk også at Juliamengden til et polynom P er lik randen til den innfylte Juliamengden, $K(P)$, siden $\partial K = \partial A(\infty)$. På denne måten kan en for polynomer definere Juliamengden uten å referere til normale familier av funksjoner [3].

Vi skal nå se på sammenhengenheten til Juliamengden og har følgende teorem.

Teorem 4.3 *La P være et polynom med $\deg(P) \geq 2$. Da er $A(\infty)$ enkelt-sammenhengende hvis og bare hvis Juliamengden er sammenhengende.*

Bevis: Resultatet kommer direkte fra teorem 4.2 og teorem 2.1. ■

Det er viktig å være oppmerksom på kritiske punkter, noe som det neste teoremet som ble bevist av Fatou og Julia i 1918-1919 viser. Jeg utelater beviset, men se for eksempel [2] §9.8. eller [3] for mer informasjon.

Teorem 4.4 *La $\Omega(P)$ være mengden av kritiske punkter til et polynom P . Da*

- $\Omega(P) \subset K(P) \iff J(P)$ er sammenhengende;
- $\Omega(P) \cap K(P) = \emptyset \implies J(P)$ er en Cantormengde.

Merk at en delmengde E av Riemannkula er en *Cantormengde* hvis den er ikke-tom, lukket, perfekt (har ingen isolerte punkt) og totalt usammenhengende (hver komponent av E er et enkelt punkt).

Siden de kvadratiske polynomene P_c bare har et kritisk punkt i 0, er Juliamengden til P_c sammenhengende hvis og bare hvis den innfylte Juliamengden til P_c inneholder 0. Dersom Juliamengden til P_c er sammenhengende er dermed $0 \subset K(P_c)$. Banen til 0 under P_c er da begrenset. Dette betyr at Mandelbrotmengden er mengden av alle $c \in \mathbb{C}$ hvor Juliamengden til P_c er sammenhengende.

La $R = \max(2, |c|)$, da gjelder følgende for $|z| > R$ [3]:

$$\frac{|P_c(z)|}{|z|} = \frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq |z| - \frac{|c|}{|z|} \geq |z| - 1 > 1. \quad (11)$$

Vi har dermed at hvis $|z| > R$, så $P_c^n(z) \rightarrow \infty$. Det betyr at den innfylte Juliamengden er inneholdt i disken med sentrum i origo og radius $R = \max(2, |c|)$. Videre har vi at

- Hvis $|c| > 2$, så $|P_c^2(0)| = |c^2 + c| > |c|$. Ved (11) vil $P_c^n(0) \rightarrow \infty$;
- Hvis $|c| \leq 2$ og $|P_c^n(0)| > 2$ for en n , så har vi ved (11) at $P_c^n(0) \rightarrow \infty$.

Hvis banen til 0 under P_c noen gang går utenfor disken med sentrum i origo og radius 2, så er ikke c inneholdt i Mandelbrotmengden. Siden hele mengden ligger innenfor disken med sentrum i origo og radius 2, er Mandelbrotmengden begrenset:

$$M \subset \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq 2\}.$$

Vi har for eksempel sett at $c = -2$ ligger i Mandelbrotmengden.

For å forstå dynamikken til Juliamengdene og Mandelbrotmengden videre, brukes *Greens funksjon*. For enhver kompakt mengde K i planet, finnes en Greens funksjon $G(K) : \mathbb{C} - K \rightarrow \mathbb{R}$ som er definert på komplementet til K . $G(K)$ kan unikt bestemmes som en harmonisk funksjon som har en logaritmisk pol i ∞ og går mot 0 mot ∂K . (z_0 er en pol hvis $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$). Dersom K er enten den innfylte Juliamengden for et polynom eller Mandelbrotmengden, kan man finne Greens funksjon. Greens funksjon $G_c : \mathbb{C} - K \rightarrow \mathbb{R}$ av en innfylt Juliamengde K_c viser seg å være [3]

$$G_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log (|P_c^n(z)|),$$

og har egenskapene [3]

1. G_c er harmonisk;
2. $G_c(P_c(z)) = 2G_c(z)$;
3. $G_c(z) = \log |z| + O_{P_c}^+(1)$ når $|z| \rightarrow \infty$;
4. $G_c(z) \rightarrow 0$ når $d(z, K_c) \rightarrow 0$.

G_c gir et uttrykk for hvor fort iterasjonen av P_c går mot uendelig. Se for eksempel Bodil Branners tekst *The Mandelbrot Set* [3] for mer informasjon om Greens funksjon og anvendelser.

5 Douadys kanin

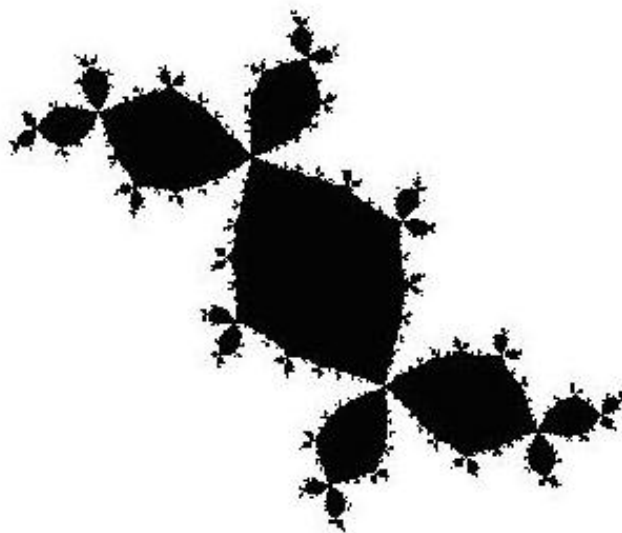
Douadys kanin er et eksempel på en innfylt Juliamengde som har fått navn etter den franske matematikeren Adrien Douady. Douady levde fra 1935 til 2006 og er mest kjent for sitt arbeid med dynamiske systemer. Den viktigste referansen til dette avsnittet er Douadys video *The Dynamics of the Rabbit* [7]. Siden denne delen av oppgaven hovedsaklig er en gjennomgang av videoen, bør en ha tilgang til videoen når en leser videre.

5.1 Kaninens opprettelse

Douadys kanin opprettes ved utføre iterasjonen $z \rightarrow z^2 + c_k$, der konstanten c_k er spesielt valgt som

$$c_k \approx -0.122561 + 0.744862i. \quad (12)$$

Hvorfor c_k har nøyaktig denne verdien, skal jeg beskrive senere. Som før starter man med en initialverdi $z_0 = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ og utfører iterasjonen ved å kvadrere lengden r , doble argumentet θ og legge til konstanten c_k . En får da en ny verdi z_1 og utfører den samme funksjonen på den. Hvis dette hele tiden repeteres, konstrueres banen $O^+(z_0)$ til initialverdien z_0 . Avhengig av hvilken startverdi z_0 man velger, vil denne banen enten gå lengre og lengre fra origo og til slutt *forsvinne* mot uendelig, tiltrekkes av en syklus av periode 3, eller oppføre seg mer uforutsigbart.



Figur 11: Douadys kanin.

La banene som går mot uendelig være hvite, og la de begrensede banene være svarte. Hvis man fargelegger banene til alle punkter $z \in \mathbb{C}$ på denne måten, vil Douadys kanin dannes. Dette har jeg forenklet utført i Matlab (se vedlegg) og fikk figur 11. Kaninen er den innfylte juliamengden til andregradsfunksjonen

$$P_{c_k}(z) = z^2 + c_k, \quad (13)$$

der c_k er gitt som i uttrykk (12) over.

Hvis en ser nærmere på kaninen og beveger seg rundt den, vil en se den samme formen overalt, uansett hvor mye en forstørrer bildet. På randen ser man et stort *øre* til venstre og et lite *øre* til høyre. Derfor kalles denne innfylte juliamengden for *kaninen*. En finner kopier i alle størrelser av disse ørene hele veien rundt kaninen, og hvis en forstørrer bildet rundt et punkt på randen ser en det samme mønsteret igjen og igjen. Det som kjennetegner fraktaler er nettopp at de har en slik similær struktur som forekommer på forskjellige nivåer av forstørrelse. Kaninen har dermed en *fraktal struktur*.

Hvis en starter med et punkt i det indre av den hvite regionen utenfor kaninen, så vil banen til dette punktet som sagt etter hvert forvinne mot uendelig. Det kan gå lang tid før banen begynner å bevege seg i en viss avstand fra origo, men når det først skjer, så *forsvinner* banen veldig fort.

Hvis en derimot starter med et punkt i den svarte regionen i kaninen, vil banen til punktet tiltrekkes en syklus med periode 3. Origo er symmetrisenter til kaninen og også et kritisk punkt til funksjonen P_{c_k} siden $P'_{c_k}(0) = 0$. Konstanten c_k er bestemt slik at startverdien 0 er periodisk med periode 3. La c være ukjent, c_k må da være en løsning av

$$0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow 0$$

$$\Updownarrow$$

$$P_c^3(0) = (c^2 + c)^2 + c = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c = c(c^3 + 2c^2 + c + 1) = 0. \quad (14)$$

Ut fra likning (14) er $c_1 = 0$ åpenbart en løsning. Men denne verdien gir enhetssirkelen som Juliamengde, noe som jeg beskrev i eksempel 3.4.1. Da står vi igjen med tredjegradslikningen

$$c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0. \quad (15)$$

For å løse tredjegradslikninga bruker jeg Cardanos formel [9]. Substituer $c = x - 2/3$, og innsatt i likning (15) får vi:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(x - \frac{2}{3}\right) + 1 = 0$$

↓

$$x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{25}{27} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - \frac{1}{3}x = -\frac{25}{27}.$$

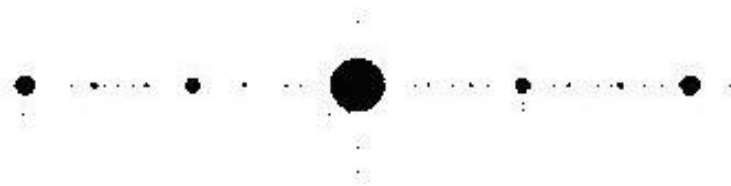
Cardanos formel [9] gir da den ene løsningen

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{1}{9}\right)^3 + \left(-\frac{25}{54}\right)^2} + \left(-\frac{25}{54}\right)} \\ &\quad - \sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{1}{9}\right)^3 + \left(-\frac{25}{54}\right)^2} - \left(-\frac{25}{54}\right)} \\ &\approx -1.088211. \end{aligned}$$

Dette gir den andre løsningen til likning (14)

$$c_2 = x_1 - 2/3 \approx -1.088211 - 2/3 = -1.754877666.$$

Den innfylte juliamengden for $P_c(z)$ for $c = c_2$ vises på figur 12, og kalles *Airplane set - Flymengden* [15].



Figur 12: Den innfylte Juliamengden for $P_{c_2}(z) = z^2 + c_2$.

For å finne de siste to løsningene c_3 og c_4 , må en dividere

$$\frac{c^3 + 2c^2 + c + 1}{c - c_2}. \tag{16}$$

Ved polynomdivisjon av brøken (16) står en igjen med andregradslikningen

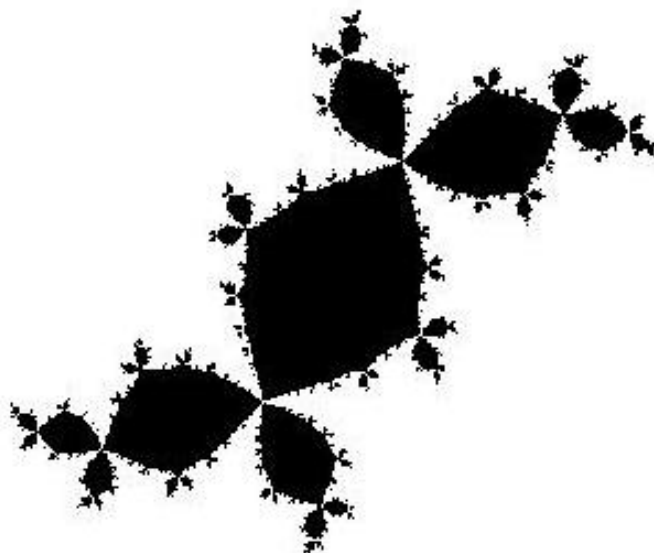
$$c^2 + 0.245122334c + 0.569840291 = 0,$$

som har løsningene

$$c_3 \approx -0.122561167 + 0.744861766i;$$

$$c_4 \approx -0.122561167 - 0.744861766i.$$

Her er løsningen $c_3 = c_k$, som gir kaninen, mens c_4 gir kaninen reflektert om den reelle akse. Se figur 13. Andre verdier av konstanten c ville gitt andre Juliamengder.

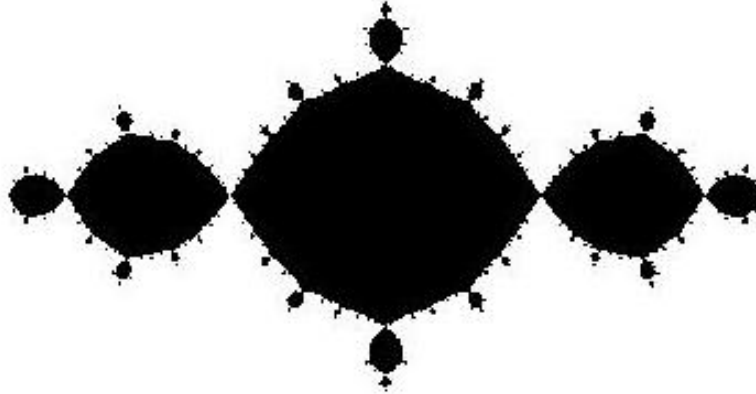


Figur 13: Den innfylte Juliamengden for $P_{c_4}(z) = z^2 + c_4$.

Dersom en for eksempel velger c slik at en får en tiltrekkende syklus av periode 2, hadde en fått $c = -1$ som er en av løsningene til

$$c^2 + c = 0.$$

Den innfylte Juliamengden til $P_{-1}(z) = z^2 - 1$ er illustrert på figur 14.



Figur 14: Den innfylte Juliamengden for $P_{-1}(z) = z^2 - 1$.

La oss gå tilbake til kaninen og se hva som skjer med punktene som ligger i den svarte regionen på figur 11. Ta en gruppe punkter i den svarte regionen med startverdier rundt origo, og utfør avbildningen P_{c_k} (gitt ved uttrykk (13)) en gang på disse punktene. Gruppen vil da *krympe* i omkrets og gå rundt c_k . Ved de neste to iterasjonene utvides gruppen litt igjen, og går først rundt punktet $c_k^2 + c_k$, så rundt origo igjen. Gruppen krymper igjen ved neste iterasjon. Sammentrekningen er størst når gruppa itereres fra området rundt origo siden ved kvadrering av små verdier gir enda mindre verdier; ($P'_{c_k}(0) = 0$). For hver syklus blir gruppa mindre og mindre i omfang og punktene i gruppa konsentreres mer og mer. Syklusen er altså tiltrekkende. Syklusen er i tillegg supertiltrekkende siden den inneholder det kritiske punktet 0. Alle de indre punktene til kaninen vil tiltrekkes denne syklusen.

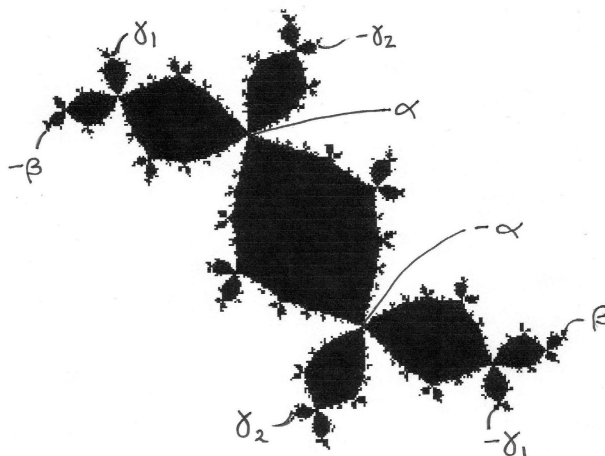
Spørsmålet er nå om det finnes andre punkter der banene verken går mot uendelig eller tiltrekkes syklusen av periode 3.

Fikspunktene til $P_{c_k}(z)$ er gitt som løsninger av $z^2 + c_k = z$:

$$\alpha \approx -0.276 + 0.480i;$$

$$\beta \approx 1.276 - 0.480i.$$

Punktet $-\alpha$ har samme avbildning som α under P_{c_k} . $-\alpha$ har to inverse bilder og disse to har igjen to inverse bilder og så videre. Til slutt får en uendelig mange slike inverser på randen av kaninen som alle ender i α og forblir der. Tilsvarende gjelder for punktet $-\beta$. Dermed har en et uendelig antall punkter på randen av kaninen som etter et endelig antall iterasjoner går til α eller β og forblir der.



Figur 15: Noen av de periodiske punktene til P_{c_k} .

P_{c_k} vil også ha andre periodiske punkter. For eksempel vil den ha en syklus av periode 2. Syklusen inneholder to punkter γ_1 og γ_2 som er løsninger av likningen

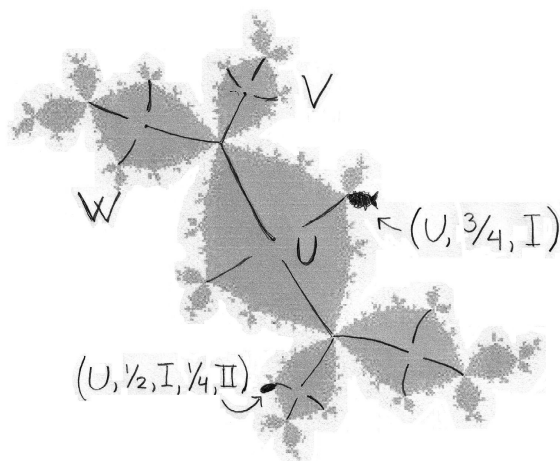
$$P_{c_k}^2(z) = (z^2 + c_k)^2 + c_k = z. \quad (17)$$

Da har vi at $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \dots$. Punktene $-\gamma_1$ og $-\gamma_2$ vil også avbildes på denne syklusen og forbli der. $-\gamma_1$ og $-\gamma_2$ har hver to inverse bilder som igjen har to inverse bilder og så videre, og en får også her et uendelig antall punkter som til slutt avbildes på syklusen med periode 2. Dette kan vi gjøre for alle perioder slik at vi får et uendelig antall punkter, men en tellbar mengde av punkter som verken forsvinner mot uendelig eller tiltrekkes syklusen med periode 3.

Topologisk finnes det en ikketellbar uendelighet av disse punktene [7]. La mengden K være den innfylte Juliamengden til $P_{c_k} = z^2 + c_k$, altså kaninen. En har da at det indre til K , K^0 , er åpen. Hvis en tar et punkt $z \in K^0$ så finnes en åpen ϵ -ball $B(z; \epsilon) \subset K^0$. Tilsvarende er komplementet til K , $\mathbb{C} \setminus K$, åpen. Hvis en for eksempel tegner en horisontal linje gjennom et punkt i det indre til K , så vil linja også inneholde punkt utenfor K . Altså må linja møte ∂K . Hvis en så beveger denne linja vertikalt nedover, vil linja dermed passere en ikketellbar uendelig mengde av randpunkt til K .

Juliamengden til $P_{c_k}(z)$ er altså randen til kaninen. Fra før vet vi at Juliamengden sammenfaller med randen til $A(\infty) = \{z | P_{c_k}^n(z) \rightarrow \infty\}$, og at hver begrenset komponent av Fatoumengden $F = \mathbb{C} \setminus J$ er enkeltsammenhengende. Fatoumengden har dessuten uendelig mange komponenter.

5.2 Kaninens komponenter



Figur 16: Adressering av kaninens komponenter [7].

En kan gi navn eller adresse til hver av komponentene til kaninen. Kall de tre komponentene som inneholder syklusen med periode 3 for U , V og W , se figur 16. Ved adresseringen trenger vi å definere *indre argument* til en komponent. Ta en *tynn sektor* som peker utover fra origo og se på de inverse avbildningene til denne. De inverse avbildningene utgjør mange nye slike tynne sektorer i hver av komponentene til kaninen. Hvis en roterer den tynne sektoren vi startet med rundt origo, skjer noe spesielt i en spesiell posisjon (se [7]); de tynne sektorene som utgjorde de inverse avbildningene former *gulrøtter* (som linjene i komponentene på figur 16 skal forestille). Disse gulrøttene danner en parametrisering av randen til komponentene fra 0 til 1, av indre argument. Indre argument lik 0 i U defineres i skjæringspunktet mellom komponentene U , V og W . En kan da adressere komponentene slik at hver komponent knyttet til U , V eller W adresseres ved indre argument til punktet komponenten knyttes til sammen med type I eller II . I svarer til den lille komponenten til høyre og II svarer til den store komponenten til venstre (når en går rundt mot urviseren). Eksempler på to slike adresseringer er gitt på figur 16. V og W har dermed adressene

$$V = (U, 0, I) \quad \text{og} \quad W = (U, 0, II).$$

En får på denne måten ganske korte adresser for komponenter som er svært små. I videre analyse brukes heller følger av komponenter enn følger av funksjoner.

En har videre denne sammenhengen mellom U , V og W under P_{c_k} :

$$U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow U \rightarrow \dots . \quad (18)$$

Avbildningen fra komponenten U til komponenten V under P_{c_k} er ikke en bijeksjon; den er *2 til 1*. Når U avbildes til V dobles det indre argumentet, og hvert punkt i V har to inverse bilder i U . Videre avbildes V bijektivt til W og W bijektivt til U .

Ta en komponent som er knyttet til U gitt ved indre argument og type I eller II . Da vil bildet til denne komponenten under P_{c_k} være komponenten av samme type knyttet til V , men med dobbelt indre argument. Neste avbildning blir komponenten av samme type knyttet til W og dobbelt indre argument, og så videre. For eksempel har vi denne avbildningen under P_{c_k} :

$$(U, 1/4, II) \rightarrow (V, 1/2, II) \rightarrow (W, 1/2, II) \rightarrow (U, 1/2, II) = W' \rightarrow U \rightarrow \dots .$$

Slik vil alle komponentene etter et endelig antall iterasjoner avbildes til syklusen i uttrykk (18).

5.3 Randen til kaninen

Juliamengden til $P_{c_k}(z)$ er som sagt randen til kaninen, ∂K . Randen avbildes på seg selv ved en 2-1 avbildning under P_{c_k} . Som før har vi

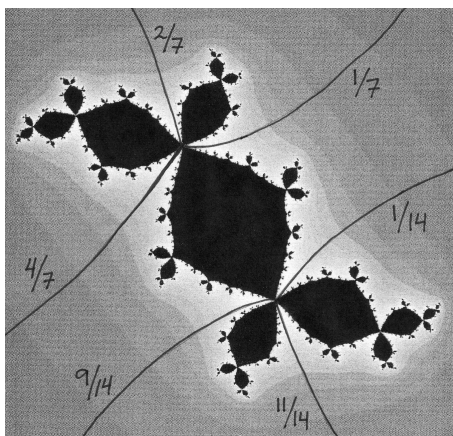
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{og} \quad P_{c_k}(z) = z^2 + c_k.$$

Operasjonen $r \rightarrow r^2$ strekker kaninen, $\theta \rightarrow 2\theta$ er en 2-1 avbildning som gir kaninen formen tilbake og $+c_k$ setter kaninen på plass. Det betyr at det er nok å starte med halve randen (ved å dele randen med en rett linje gjennom origo) for at kaninen gjennom P_{c_k} opprettes igjen.

5.4 Området utenfor kaninen

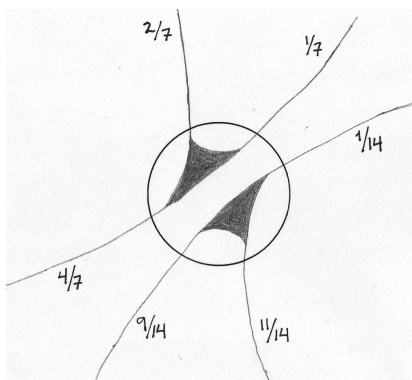
Funksjonen $P_{c_k}(z) = z^2 + c_k$ er også definert utenfor kaninen. En kan skyggelegge området utenfor kaninen i forhold til hvor fort punktene forsvinner mot uendelig når man itererer. En får da kurver rundt kaninen som på figur 17, der punkter i det lyse området utenfor kaninen trenger flere iterasjoner på å gå mot uendelig enn punktene i de mørke områdene. En kan også finne ytre argument utenfor kaninen tilsvarende de indre argumentene vi brukte ved adressering av komponentene til kaninen. Ta en tynn sektor rundt den

positive reelle akse og se på de inverse avbildningene til denne. Hvert punkt utenfor kaninen er dermed bestemt av hvor fort punktet forsvinner mot uendelig og ytre argument, på tilsvarende måte som hvert komplekse tall utenfor enhets sirkelen er bestemt av lengde og argument. En kan sammenligne området utenfor kaninen med området utenfor enhets sirkelen.



Figur 17: Douadys kanin og området utenfor [6][7].

La strålen til det ytre argumentet lik 0 tilsvare retningen til den positive reelle akse. Da vil de tre ytre strålene med vinkler $1/7$, $2/7$ og $4/7$ møtes på kaninen i fikspunktet α . Se figur 17. En kan definere en ekvivalensrelasjon på mengden av alle ytre vinkler ved at to vinkler er ekvivalente hvis de tilhørende ytre strålene møtes i samme punkt på kaninen. Dermed er vinklene $1/7$, $2/7$ og $4/7$ ekvivalente. Hver ekvivalensklasse kan videre representeres ved en *trekant* med krumme sider i enhetsdisken. Se figur 18. Vinklene $1/14$, $9/14$ og $11/14$ utgjør også en ekvivalensklasse som gir oss en trekant. På denne måten dannes uendelig mange ekvivalensklasser som hver representeres ved en trekant. Douadys video avsluttes med at disse trekantene *klypes* til punkter, og en får igjen kaninen.



Figur 18: Ekvivalensklasser representert ved trekanter [7].

6 Vedlegg

6.1 Matlab-koder

Noen av figurene i oppgaven er laget i Matlab. Her er kodene:

Figur 11:

```
c=-0.123+0.745*i;
m=600;
steps=50;
x=linspace(-1.5,1.5,m);
y=linspace(-1.5,1.5,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X+i*Y;
for k=0:steps;
Z=Z.*Z+c;
end
colormap ([0 0 0])
pcolor(exp(-abs(Z)));
shading flat;
axis('square','equal','off');
```

Figur 12:

```
c=-1.754877666;
m=600;
steps=100;
x=linspace(-1.5,1.5,m);
y=linspace(-1.5,1.5,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X+i*Y;
for k=0:steps;
Z=Z.*Z+c;
end
colormap ([0 0 0])
pcolor(exp(-abs(Z)));
shading flat;
axis('square','equal','off');
```

Figur 13:

```
c=-0.123-0.745*i;
m=600;
steps=50;
```

```

x=linspace(-1.5,1.5,m);
y=linspace(-1.5,1.5,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X+i*Y;
for k=0:steps;
Z=Z.*Z+c;
end
colormap ([0 0 0])
pcolor(exp(-abs(Z)));
shading flat;
axis('square','equal','off');

```

Figur 14:

```

c=-1;
m=600;
steps=100;
x=linspace(-1.5,1.5,m);
y=linspace(-1.5,1.5,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X+i*Y;
for k=0:steps;
Z=Z.*Z+c;
end
colormap ([0 0 0])
pcolor(exp(-abs(Z)));
shading flat;
axis('square','equal','off');

```

Figur 19:

```

m=1000;
steps=50;
x=linspace(-1.5,0.5,m);
y=linspace(-1,1,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X+i*Y;
Z2=0*Z;
for k=0:steps;
Z2=Z2.*Z2+Z;
end
colormap (flag(256))
pcolor(exp(-abs(Z2)));
shading flat;
axis('square','equal','off');

```

Figur 22:

```
m=1000;
steps=50;
x=linspace(-1.5,0.5,m);
y=linspace(-1,1,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X+i*Y;
Z2=0*Z;
for k=0:steps;
Z2=Z2.*Z2+Z;
end
colormap ([0 0 0])
pcolor(exp(-abs(Z2)));
shading flat;
axis('square','equal','off');
```

Referanser

- [1] Kirsti Andersen. *Wessel's Work on Complex Numbers and its Place in History. I [13]*. C.A. Reitzels Forlag, 1999.
- [2] Alan F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*. Springer-Verlag, 1991.
- [3] Bodil Branner. *The Mandelbrot Set. I Chaos and Fractals, The Mathematics Behind the Computer Graphics, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. American Mathematical Society, AMS Bookstore, 1989.
- [4] Ole Jacob Broch. *Hovedoppgave: Om yocopuslespillet og iterasjon av noen flertydige funksjoner*. Matematisk institutt, Universitetet i Bergen, 1999.
- [5] Viggo Brun. *Regnekunsten i det gamle Norge*. Universitetsforlaget, 1963.
- [6] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [7] Adrien Douady. *Video: The Dynamics of the Rabbit*. Association EcoutezVoir, 1997.
- [8] Theodore W. Gamelin. *Complex Analysis*. Springer-Verlag, 2001.
- [9] Hans Isdahl. Matematikk på nett - likninger. <http://62.63.40.20/fagstoff/likninger.htm>, 2007.
- [10] Nils Voje Johansen. *Caspar Wessel - Norges første matematiker*. I Forskningspolitikk (NIFU) nr 2, 2000.
- [11] Steffen Junge. *Foredrag: Holomorphic Dynamics, Iteration of quadratic polynomials and the Mandelbrot set*. Institutt for Matematiske fag, NTNU, 2008.
- [12] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [13] Bodil Branner og Jesper Lützen, editor. *Caspar Wessel - On the Analytical Representation of Direction - An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons*. Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, C.A. Reitzels Forlag, 1999.
- [14] Bodil Branner og Nils Voje Johansen. *Caspar Wessel (1745-1818) Surveyor and Mathematician. I [13]*. C.A. Reitzels Forlag, 1999.

- [15] Lennart Carleson og Theodore W. Gamelin. *Complex Dynamics*. Springer-Verlag, 1993.
- [16] Jussi Väisälä. *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes in Mathematics 229*. Springer Verlag, 1971.
- [17] Caspar Wessel. *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning*. Opptrykk med forord av Sophus Lie i Archiv for Matematik og Naturvidenskab, 1896.
- [18] Caspar Wessel. *On the Analytical Representation of Direction - An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons. I [13]*. C.A. Reitzels Forlag, 1999.
- [19] Wikipedia. Mandelbrot set.
[http : //en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set](http://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set), 2008.