NTNU

Det skapende universitet

Koszul-algebraer over endelige kropper

Kari-Lise Frisvold Olsen

Master i matematikk

Oppgaven levert: Juli 2008
Hovedveileder: Øyvind Solberg, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgavetekst

Masteroppgaven er innen algebra, nærmere bestemt Koszul-teori for algebraer. Koszul-algebraer, ble først definert av Priddy, har en sentral rolle innen algebra, geometri og topologi. Projektive moduler er viktige for å finne invarianter av moduler og ringer, både for kommutative og ikke-kommutative ringer. Over Koszul-algebraer er det en stor klasse av moduler som har projektive oppløsninger med en fin lineær struktur. I tillegg er det kjent at alle Koszul-algebraer er kvadratiske algebraer, men det er ikke kjent en metode for å avgjøre når en kvadratisk algebra er Koszul eller ikke. Denne masteroppgaven vil gi en innføring i teorien for Koszul-algebraer, og spesielt undersøke kvadratiske algebraer over endelige kropper. Over endelige kropper så finnes det bare endelig mange kvadratiske algebraer. For konkrete eksempler så ønsker en å finne hvor mange av de kvadratiske algebraer som er Koszul og i tillegg undersøke isomorfi-klassene av disse.

Forord

Med denne masteroppgaven er jeg ferdig med mitt femårige opphold på NTNU Gløshaugen. Det har vært lærerike og givende år, både faglig og sosialt.

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært en utfordrende, men også en fin opplevelse. Tusen takk til mine medstudenter på gangen som har bidratt til mange trivelige pauser. Og en særlig takk til Trude Sundtjønn, både for ditt sosiale bidrag og for faglige diskusjoner av alle slag. En stor takk går til min veileder Øyvind Solberg. Tusen takk for all hjelp, og ikke minst din smittende faglige entusiasme og gode humør! Takk til Dag Madsen for hjelp til den siste finpuss på oppgaven, og svar på de spørsmål det innebar.

Til slutt en takk til Halvard Amble.

Trondheim juli 2008

Kari-Lise Frisvold Olsen

Innhold

Innledning

Denne oppgaven er i hovedsak en innføring i en del teori om Koszulalgebraer, hvor vi finner kriterier for, og konsekvenser av, at en veialgebra $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul. Teorien blir også satt ut i praksis gjennom en del eksempler der vi sjekker om Λ er Koszul for diverse quiver Γ, kropper k og relasjoner I.

Vi startet arbeidet med denne oppgaven med å regne på om $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul for kroppen $\mathbb{Z}_2$, quiveret

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2 \arrow[dr, "\gamma"'] & & 3 \arrow[dl, "\delta"] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

og kvadratiske I [1]. Undersøkte om $\Lambda = k\Gamma/I$ var Koszul ved å finne lineære oppløsninger av de graderte simple Λ-modulene. For dette eksempelet medførte det hverken veldig mye eller særlig kompliserte utregninger. Dette endret seg da vi startet med quiveret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

og ønsket å se om $\Lambda = k\Gamma/I$ var Koszul for blant annet $I = \langle \alpha^2 + \beta^2 \rangle$. Å skrive ned en basis for Λe_1 over k var ingen udelt hyggelig opplevelse. I det hele tatt var forsøkene på å regne ut lineære oppløsninger av de simple Λ-modulene en fin motivasjon for å sette seg inn i mer teori om Koszul algebraer.

Definisjonen av Koszul som blir brukt i denne oppgaven avhenger av å se Λ som en gradert k-algebra. Vi vil derfor etter å først ha gått gjennom noen grunnleggende definisjoner, se nærmere på graderte moduler og bevise en del teori for dem. Videre vil vi bevise at når Λ er Koszul så er også Λ kvadratisk, for slik å legitimere at vi kun sjekker om $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul for kvadratiske I. Så vil vi bevise at når Λ er Koszul, så er $E(\Lambda)$, Yonedaalgebraen til Λ, også Koszul. Dette er et steg på veien til å vise at når Λ er

[1] Vi anvender allerede her at dersom Λ er Koszul så er Λ kvadratisk.

Koszul så er $E(\Lambda) = k\Gamma/I'$ også Koszul, der I' er det kvadratiske dualet til I. Beviset av dette er ikke med i denne oppgaven, men vi har tatt det med som et teorem og bruker det i eksemplene. Oppgavens siste hovedbevis er beviset av at dersom Λ er kvadratisk og monomiell, da er Λ Koszul. Går så kort gjennom litt teori om Gröbnerbasis før vi til slutt presenterer oppgavens eksempler. Vi avgjør om $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul for forskjellige kropper, quiver og kvadratiske relasjoner, og her får vi god bruk for all teorien fra de tidligere kapitlene.

Følgende blir regnet som forkunnskaper i denne oppgaven: ringer, moduler, veialgebraer, representasjoner av veialgebraer og homologisk algebra.

Notasjon. I denne oppgaven vil en vei $\cdot \xrightarrow{a} \cdot \xrightarrow{b} \cdot$ skrives som ba.

Kapittel 1

Graderte moduler

Siden vår definisjon av en Koszul-algebra er avhengig av at den er gradert, skal vi i dette kapittelet se nærmere på noen egenskaper ved graderte moduler. I første seksjon vil vi se på hva en gradert modul er, og også se på de graderte tilfellene av noen andre definisjoner. Vi vil så gå gjennom hva vi i denne oppgaven vil anta om algebraen vi ser på, sammen med noen egenskaper dette gir. Vi vil i siste seksjon gå særlig inn på blant annet projektive dekker av graderte moduler. Vi vil da sitere og bevise en proposisjon som er gitt uten bevis i artikkelen [GMV96].

1.1 Graderte moduler

I denne seksjonen skal vi definere hva en gradert modul er. Det blir også gitt graderte versjoner av noen relaterte definisjoner.

Definisjon 1.1.1. La R være en ring. En representasjon av den underliggende abelske gruppen som en sum $\bigoplus_{i \epsilon \mathbb{N}} R_i$ kalles en *gradering av* R, dersom vi har at $R_i R_j \subset R_{i+j}$, for alle i, $j \in \mathbb{N}$. En ring R med en gradering er en *gradert ring.*

Definisjon 1.1.2. [NVO04] La M være en R-modul. Da er M en *gradert* R*-modul* hvis $M = \bigoplus_{i \epsilon \mathbf{Z}} M_i$, der M_i er additive undergrupper av M og $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$.

MERK. Lar M være en gradert R-modul. Vi merker oss at vi kan se R_0 som en ring via $R_0 \cong R/R_{\geq 1}$, har da at siden $R_0 M_j \subseteq M_{0+j} = M_j$ så er enhver M_j en R_0-undermodul av M.

Definisjon 1.1.3. La M være en gradert modul hvor vi skriver M i grad j som M_j. Dersom vi tar i skift av M, noe vi bruker notasjonen $M[i]$ på, vil det si at $M[i]_j = M_{j-i}$. Altså skal $M[i]$ forstås som at det som før var i grad 0 nå er flyttet til grad i, også videre for alle grader av M.

Definisjon 1.1.4. La M og N være graderte R-moduler. Og la $f: M \to N$ være en R-homomorfi. Da er f en *grad* 0 *homomorfi* dersom $f(M_i) \subseteq N_i$ for alle $i \in \mathbb{Z}$.

Definisjon 1.1.5. [AB74] En gradert k-algebra $R = \bigoplus_{i\epsilon\mathbb{N}} R_i$ er *generert av homogene elementer av grad* 1 hvis underringen generert av $R_0 \oplus R_1$ er hele R.

Definisjon 1.1.6. [GMV96] La $M = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} M_i$ være en gradert R-modul. Da er M *generert i grad* j hvis $M \neq (0)$ og $R_k M_j = M_{j+k}$, $\forall k$.

Definisjon 1.1.7. Vi sier at S er en *gradert simpel modul* dersom $M \subseteq S$, der M er en gradert undermodul medfører at $M = (0)$, eller $M = S$.

1.2 Algebraen vi ser på

I hele denne oppgaven vil Λ alltid være en splitt basisk endelig 1-generert k-algebra. Så vi skal i denne seksjonen definere hva det vil si at en algebra er splitt basisk endelig 1-generert. Videre er Λ isomorf med $k\Gamma/I$, der Γ er et endelig quiver og I er et ideal inneholdt i J^2, der J er idealet generert av pilene. Vi vil gå gjennom noen flere tilfeller av graderte definisjoner og bevise to lemmaer, deriblant en gradert versjon av Nakayama Lemma.

Definisjon 1.2.1. [GMV96] En gradert k-algebra Λ er *splitt basisk endelig 1-generert* dersom følgene tre punkter holder:

1. $\Lambda_0 \cong k \times k \times k \times \cdots \times k = k^{\times n}$ som ringer, for en $n \geq 1$,
2. hver Λ_i har endelig lengde over Λ_0,
3. Λ er generert i grad 1.

Følgende nyttige proposisjon godtar vi uten bevis.

Proposisjon 1.2.2. *[GMV96] La k være en kropp og Λ en splitt basisk endelig* 1*-generert gradert k-algebra. Da eksisterer et endelig quiver Γ og et gradert ideal I i $k\Gamma$ slik at $I \subset J^2$, der J er idealet generert av pilene og Λ er isomorf med $k\Gamma/I$ som graderte k-algebraer.*

Så siden vi alltid vil anta at Λ er en splitt basisk endelig 1-generert gradert k-algebra, har vi også alltid mulighet til å velge å se på Λ som en veialgebra.

Videre vil vi få bruk for følgende definisjoner:

Definisjon 1.2.3. [GMV96] Lar $\Lambda = k\Gamma/I$, der k er en kropp, Γ et quiver og I relasjonene. At en gradert Λ-modul M er *endeliggenerert* vil si at det eksisterer en grad 0-avbildning fra en endelig direkte sum av $\Lambda[s]$ (s skift av Λ) som er på M.

Definisjon 1.2.4. [GMV96] En *endeliggenerert gradert projektiv* $\Lambda = k\Gamma/I$*-modul* er en gradert modul som er isomorf med en endelig direkte sum på formen $\bigoplus_{j=1}^{m} \Lambda e_{i_j}[s_j]$, altså en endelig direkte sum av kopier av skiftede Λe_i'er. Her er e_i den trivielle veien i hjørne i.

Vi har to definisjoner for et gradert projektivt dekke av en endeliggenerert gradert Λ-modul M. Men vi vil vise at disse er ekvivalente i Punkt 6 på side 5.

Definisjon 1.2.5. Vi kaller $f \colon P \to M$ for et *gradert projektivt dekke* av M, dersom P er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul og f er både en grad 0-avbilding og en essensiell epimorfi.

Definisjon 1.2.6. (alternativ definisjon) Vi kaller $f \colon P \to M$ for et *gradert projektivt dekke* av M, dersom P er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul, f er en grad 0-avbildning og $\operatorname{Ker} f \subseteq JP$.

Vi kommer til å bruke følgende lemmaer når vi beviser kapittelets hovedproposisjon.

Lemma 1.2.7. *La R være en gradert projektiv Λ-modul. Gitt graderte moduler B og C, og grad 0-morfismer h og β slik at følgende diagram er eksakt:*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "h"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da eksisterer en grad 0-morfisme $\tilde{\upsilon} \colon R \to B$ slik at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dotted, "\exists\tilde{\upsilon}"'] & \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bevis. Siden R er projektiv vet vi at det eksisterer en morfisme $\upsilon \colon R \to B$ slik at $h = \beta\upsilon$. Siden R er gradert er $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$, så vi lar μ_i være inklusjonen fra R_i til R for alle i. Vi har at $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$ og lar π_l være projeksjonen fra B til B_l for en vilkårlig grad l.

$$\begin{tikzcd} & & & B_l & \\ R_i \arrow[r, hook, "\mu_i"] \arrow[urrr, bend left, "\pi_l\upsilon\mu_i = \upsilon_{i,l}"] \arrow[rrr, bend right, "\upsilon_i = \upsilon_{i,i}"'] & R \arrow[r, "\upsilon"] & B \arrow[r, two heads, "\pi_i"] \arrow[ur, "\pi_l"] & B_i \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

Vi lar $\pi_l\upsilon\mu_i = \upsilon_{i,l}$ for en generell grad l, mens $\upsilon_{i,i}$ er den delen av υ som sender noe fra grad i i R til grad i i B. Vi kaller morfismen som er satt sammen av alle υ_i'ene for $\tilde{\upsilon}$. Vi har altså

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\tilde{\upsilon}=(\upsilon_i)} & B \\ & & \\ (r_i) & \longmapsto & (\upsilon_i(r_i)) \end{array}$$

der $(r_i) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ og $(\upsilon_i(r_i)) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i = B$. Ser at dersom $\tilde{\upsilon}$ er en Λ-homomorfi vil den også være en grad 0-homomorfi. Vi skal nå vise at $\tilde{\upsilon}$ er en Λ-homomorfi. Vi lar $\lambda \in \Lambda_j$ og sjekker om denne likheten holder: $\tilde{\upsilon}(\lambda(r_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \lambda\tilde{\upsilon}((r_i)_{i\in\mathbb{Z}})$. Har at $\tilde{\upsilon}(\lambda(r_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \tilde{\upsilon}((\lambda r_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (\upsilon_{i+j}(\lambda r_i))_{i\in\mathbb{Z}}$. Vi har også at $\lambda\tilde{\upsilon}((r_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \lambda(\upsilon_i(r_i))_{i\in\mathbb{Z}} = (\lambda\upsilon_i(r_i))_{i\in\mathbb{Z}}$. Så likheten vi vil sjekke holder dersom $(\upsilon_{i+j}(\lambda r_i))_{i\in\mathbb{Z}} = (\lambda\upsilon_i(r_i))_{i\in\mathbb{Z}}$. Har at $(\pi_l\upsilon(\mu_{i+j}(\lambda r_i)))_{l\in\mathbb{Z}} = \upsilon(\mu_{i+j}(\lambda r_i)) = \lambda\upsilon(\mu_i(r_i)) = \lambda(\pi_t\upsilon(\mu_i(r_i)))_{t\in\mathbb{Z}} = (\lambda\pi_t\upsilon(\mu_i(r_i)))_{t\in\mathbb{Z}}$, der $t = l - j$. Så dermed har vi at $(\pi_l\upsilon(\mu_{i+j}(\lambda r_i)))_{l\in\mathbb{Z}} = (\lambda\pi_{l-j}\upsilon(\mu_i(r_i)))_{l\in\mathbb{Z}}$. Ser på denne likheten for $l = i + j$ og får da at $(\pi_{i+j}\upsilon(\mu_{i+j}(\lambda r_i))) = (\lambda\pi_i\upsilon(\mu_i(r_i))), \forall j \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. Det vi skulle sjekke var om $(\upsilon_{i+j}(\lambda r_i))_{i\in\mathbb{Z}} = (\lambda\upsilon_i(r_i))_{i\in\mathbb{Z}}$? Siden $\upsilon_{i+j} = \pi_{i+j}\upsilon\mu_{i+j}$ og tilsvarende for υ_i, har vi nå funnet det vi ønsket og vet dermed at $\tilde{\upsilon}(\lambda(r_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \lambda\tilde{\upsilon}((r_i)_{i\in\mathbb{Z}})$.

For å ha at $\tilde{\upsilon}$ er en Λ-homomorfi må vi også vise at $\tilde{\upsilon}(x+y) = \tilde{\upsilon}(x)+\tilde{\upsilon}(y)$. Vi har definert $\upsilon((x_i)) = (\pi_i\upsilon\mu_i(x_i))_{i\in\mathbb{Z}}$. Har at $\tilde{\upsilon}((x_i)_{i\in\mathbb{Z}} + (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = \tilde{\upsilon}((x_i + y_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (\pi_i\upsilon\mu_i(x_i + y_i))_{i\in\mathbb{Z}} = (\pi_\upsilon\mu_i(x_i) + \pi_i\upsilon\mu_i(y_i))_{i\in\mathbb{Z}} = (\pi_i\upsilon\mu_i(x_i))_{i\in\mathbb{Z}} + (\pi_j\upsilon\mu_j(y_j))_{j\in\mathbb{Z}} = \tilde{\upsilon}((x_i)) + \tilde{\upsilon}((y_j))$. Har dermed at $\tilde{\upsilon}$ er en Λ-homomorfi.

Skal nå vise at $\tilde{\upsilon}$ er slik at $\beta\tilde{\upsilon} = h$. Har at $\upsilon(r_i) = b_i + \sum_{j\neq i} b_j \in B = \sum_{i\in\mathbb{Z}}$, der r_i er ett element i $R_i \subseteq R$. Har at $h(r_i) = \beta\upsilon(r_i) = \beta(b_i + \sum_{j\neq i} b_j) = \beta(b_i) + \sum_{j\neq i}\beta(b_j)$. Siden $h(r_i) \in C_i$ og $\beta(b_i) \in C_i$, mens $\beta(b_j) \in C_j$, der $j \neq i$, må $\beta(\sum_{j\neq i} b_j) = 0$. Får dermed at $\beta(b_i) = h(r_i)$. Så da er $b_i = \tilde{\upsilon}(r_i)$. Vi har dermed at $h(r_i) = \beta\tilde{\upsilon}(r_i)$. □

Skal nå gi en gradert versjon av Nakayama Lemma.

Lemma 1.2.8. (Gradert versjon av Nakayama Lemma) *Lar $\Lambda = k\Gamma/I$ være en gradert algebra der k er en kropp, Γ et quiver og I er relasjonene. Lar M være en endeliggenerert gradert Λ-modul og $J = \Lambda_{\geq 1}$. Dersom $JM = M$, så er $M = (0)$.*

Bevis. Har at $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$. Siden M er en endeliggenerert gradert Λ-modul så eksisterer $\{m_1, \cdots, m_t\} \subseteq M$ som genererer M, der $m_i \neq 0$ er av homogen grad n_i. Vi kan anta at $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_t$. Dette gir at $M = M_{\geq n_1}$. Antar at $JM = M$, da må JM og M være like i hver grad. Ser at $JM \subseteq M_{\geq n_1+1}$, altså er $(JM)_{n_1} = (0)$. Men $(M)_{n_1} = M_{n_1} \neq 0$ dersom $M \neq 0$, altså må $M = 0$. □

1.3 Noen grunnleggende egenskaper ved graderte moduler

Skal nå sitere en proposisjon fra artikkelen [GMV96] og bevise den. Skal blant annet vise at når vi har en endeliggenerert gradert Λ-modul, så eksisterer et projektivt dekke av denne.

Proposisjon 1.3.1. *[GMV96] Lar $\Lambda = k\Gamma/I$, være en splitt basisk endelig 1-generert gradert k-algebra. Videre er $J = \bigoplus_{n\geq 1} \Lambda_n$. Lar M være er en endeliggenerert gradert Λ-modul og R være en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul på formen $\bigoplus_i \Lambda e_{l_i}$.*

1. *La $\bar{f}\colon R/JR \to M_j$ være en Λ_0-avbildning. Da utvides $\bar{f}$ til en grad 0-avbildning $f\colon R[j] \to M$*

2. *Beholder hypotesen fra 1, hvis M er generert i grad j og $\bar{f}$ er på, da medfører det at også f er på.*

3. *Beholder hypotesen fra 1, hvis $\bar{f}$ er en isomorfi, da er $\ker(f) \subset JR$.*

4. *Hvis M er genert i grad j, da eksisterer et gradert projektivt dekke $f\colon P \to M$, der P er generert i grad j.*

5. *M har et gradert projektivt dekke.*

6. *Hvis M har et gradert projektivt dekke $f\colon P \to M$ og det for en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul Q eksisterer en grad 0-avbildning $g\colon Q \to M$ som er på, der $\mathrm{Ker}(g) \subseteq JQ$. Da eksisterer en isomorfi mellom de graderte modulene $h\colon P \to Q$ slik at $gh = f$.*

7. *Anta vi har en korteksakt følge*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

av endeliggenererte graderte moduler, alle generert i grad j. Da eksisterer endeliggenererte graderte projektive moduler P, Q og R slik *at følgende diagram av graderte moduler og avbildninger kommuterer:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

der f, g og h graderte projektive dekker.

Bevis. 1. Skal nå starte med å se nærmere på hva R/JR er. Skal videre bruke at R er projektiv. Vi har at $R = \bigoplus_{i=1}^{t} \Lambda e_{l_i}$. Videre er Λ en gradert modul, så vi kan se på Λ som $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1 \oplus \ldots$. Vi har at $J = \bigoplus_{i \geq 1} \Lambda_i = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_3 \ldots \subset \Lambda$. Bruker dette til å se hva R/JR er. Har at $J(\Lambda e_{l_i}) = J e_{l_i}$, så vi får derfor at $JR = J(\bigoplus_{i=1}^{t} \Lambda e_{l_i}) = \bigoplus_{i=1}^{t}(J e_{l_i})$. (Fordi $I(A \oplus B) = IA \oplus IB$.) Ser da at $R/JR = (\bigoplus_{i=1}^{t} \Lambda e_{l_i})/(J(\bigoplus_{i=1}^{t} \Lambda e_{l_i}) = (\bigoplus_{i=1}^{t} \Lambda e_{l_i})/\bigoplus_{i=1}^{t}(J e_{l_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^{t}(\Lambda e_{l_i}/J e_{l_i}) \cong \Lambda_0 e_{l_i} = R_0$. Dette fordi $(A \oplus B)/(A' \oplus B') \cong A/A' \oplus B/B'$ dersom vi har at $A' \subseteq A$ og $B' \subseteq B$.

Bruker det vi har funnet sammen med at R er projektiv og at M_j er den delmengden av M som har grad j til å lage følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & R[j] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, dotted, "h"'] \\
 & & (R/JR)[j] = R_0[j] \arrow[d, "\bar{f}"] \\
M & M_{\geq j} \arrow[l, hook', "i"] \arrow[r, two heads, "p"] & M_{\geq j}/M_{\geq j+1} = M_j
\end{tikzcd}$$

der $\pi \colon r \mapsto r + JR[j]$. Siden vi har antatt at R er generert i grad 0, har vi at $R[j]$ er generert i grad j.

Siden avbildningene $i \colon m \mapsto m$ og $p \colon m \mapsto m + M_{\geq j+1}$ sender det som ligger i grad i til grad i for alle i, har vi at begge avbildningene er grad 0-avbildninger. Ser at $\pi \colon R[j] \to (R/JR)[j]$ er en grad 0-avbildning. Siden $\bar{f}$ går fra grad j til grad j,har vi at $\bar{f}$ er en grad 0-avbildning.

Vi ser dermed at $\bar{f}\pi$ er en grad 0-avbildning. Siden R er projektiv vet vi at det eksisterer en $h\colon R[j] \to M_{\geq j}$ slik at $ph = \bar{f}\pi$. Siden $\bar{f}\pi$ og p er grad 0-avbildninger ser vi fra Lemma 1.2.7 på side 3 at vi også kan velge h til å være en grad 0-avbildning. Vi kan dermed sette h sammen med grad 0-avbildingen i og få en grad 0-avbildning $ih\colon R[j] \to M$. Så ved å definere $f = ih$ er vi fremme.

2. Har at M er generert i grad j, det vil si at det eksisterer et generatorsett $\{m_1, \cdots, m_t\} \in M_j$ slik at $\forall\ m \in M_n$ så er $m = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i$, der $\lambda_i \in \Lambda_{n-j}$. Siden M er generert i grad j, er $M_{\geq j} = M$, så vi kan skrive diagrammet vi fant i Punkt 1 som:

$$\begin{tikzcd} & R[j] \arrow[dl, dotted, "\exists f"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & R_0 \arrow[d, "\bar{f}"] \\ M \arrow[r, two heads, "p"] & M_j \end{tikzcd}$$

der f er en Λ-homomorfi av grad 0. Ser på på diagrammet oppdelt i gradene. Ser at

$$R[j] = \begin{cases} R_0 & \text{i grad j} \\ R_1 & \text{i grad j+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} M_j & \text{i grad j} \\ M_{j+1} & \text{i grad j+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Og får dermed at diagrammet blir som følger:

$$
\begin{tikzcd}
 & R_0[j] \arrow[dddddl, "f_0"'] \\
 & R_1[j] \arrow[dddddl, "f_1"'] \\
 & R_2[j] \arrow[dddddl, "f_2"'] \\
 & \vdots \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
 & R_0[j] \arrow[d, "\bar{f}"] \\
M_j \arrow[r, two heads, "1_{M_j}"] & M_j \\
M_{j+1} \arrow[r] & 0 \\
M_{j+2} \arrow[r] & 0 \\
\vdots &
\end{tikzcd}
$$

Ser at $pf = 1_{M_j} f_0$. Har fra antakelsen at $\bar{f}\colon R_0 \to M_j$ er på. Siden diagrammet er kommutativt har vi at $\bar{f}\pi = 1_{M_j} f_0 = f_0$. Så siden $\bar{f}\pi$ er på, må også f_0 være på siden 1_{M_j} er en isomorfi. Vi har dermed at f er på generatormengden $\{m_1, \cdots, m_t\}$ av M, som vil si at $f\colon R[j] \to M$ er på.

3. Skal nå i tillegg anta at $\bar{f}$ er en isomorfi, og vise at dette medfører at $\operatorname{Ker} f \subseteq JR$. Bruker det vi har funnet så langt til å sette opp følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] & R[j] \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & M \arrow[d, two heads] \\
 & & R_0[j] \arrow[r, "\bar{f}"] & M_j
\end{tikzcd}
$$

Skal nå velge et vilkårlig element i $\operatorname{Ker} f$ og bruke diagrammet vi akkurat har satt opp, til å se at elementet ligger i JR.

Siden vi antar at $\bar{f}$ er en isomorfi har vi at $R_0[j] \cong M_j$. Lar $x \in R[j]$ og $f(x) = 0$, da har vi per definisjon valgt et vilkårlig element i $\operatorname{Ker} f$. Ser på x som et gradert element. Får da at $x = r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$, der $r_0 \in R_0$ ligger i grad j, $r_1 \in R_1$ ligger i grad $j+1$ og så videre. Når vi da anvender funksjonen f på x får vi at $f(x) = f(r_0) + f(r_1) + f(r_2) + \cdots$ og vi vet av konstruksjonen av f i punkt 1, at da er $f(r_0) \in M_j$,

$f(r_1) \in M_{j+1}$ og så videre. Ser da at dersom $f(x) = 0$, medfører det at $f(r_0) = 0$. Men f er en utvidelse av $\bar{f}$, og $\bar{f}\colon R_0 \to M_j$ gir at $f(r_0) = \bar{f}(r_0)$. Siden $\bar{f}$ er en isomorfi har vi derfor at dersom $\bar{f}(r_0) = 0$ så må $r_0 = 0$. Så vårt element $x \in \operatorname{Ker} f$ blir derfor på formen $x = r_1 + r_2 + \cdots$, der $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ og så videre som over. Det vil si at $x \in R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots = JR$. Og vi har nettopp det vi ønsket å finne, at $\operatorname{Ker} f \subseteq JR$.

4. Skal nå vise at dersom M er generert i grad j, så eksisterer et projektivt dekke $f\colon P \to M$, der P er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul generert i grad j og f er en grad 0-avbildning.

   Vet fra antakelsen at Λ_0 er semisimpel, noe som medfører at alle Λ_0-moduler er projektive [Rot79]. Siden M_j kun består av elementer i én grad, kan vi se på M_j som en Λ_0-modul. Som her vil si at M_j er en projektiv Λ_0-modul. Ønsker å bruke $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ som vår P. Vet at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er projektiv hvis og bare hvis $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j, -)$ er eksakt. Adjungeringsisomorfien [Rot79] gir at $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j, -) \cong \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(M_j, \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)) = \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(M_j, -)\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)$ som begge er eksakte siden Λ er projektiv over seg selv og M_j er en projektiv Λ_0-modul. Vi har dermed at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er projektiv.

   Skal nå definere en avbildning $\varphi\colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j \to M$ og bruke den til å komme frem til et projektivt dekke av M. Definerer φ ved

$$\begin{aligned} \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j &\xrightarrow{\varphi} M \\ \lambda \otimes m &\longmapsto \lambda m \end{aligned}$$

   Starter med å se at φ er en Λ-homomorfi ved å vise at $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ og at $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. Har at elementene i $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er på formen $\sum_{i=1}^t \lambda_i \otimes m_i$, der $\lambda_i \in \Lambda$ og $m_i \in M_j$. Lar $x = \sum_{i=1}^r (\lambda_i \otimes m_i)$ og $y = \sum_{i=1}^s (\lambda'_i \otimes m'_i)$ der $r, s \leq t$. Har da at $\varphi(x+y) = \varphi(\sum_{i=1}^r (\lambda_i \otimes m_i) + \sum_{i=1}^s (\lambda'_i \otimes m'_i)) = \varphi(\lambda_1 \otimes m_1 + \cdots + \lambda_r \otimes m_r + \lambda'_1 \otimes m'_1 + \cdots + \lambda'_s \otimes m_s) = \lambda_i m_i + \cdots \lambda_r m_r + \lambda'_1 m'_1 + \cdots + \lambda'_s m'_s = \varphi(x) + \varphi(y)$. Ser så på $\varphi(\lambda x)$ og sjekker at den er lik $\lambda\varphi(x)$. Har at $\lambda x = \sum \lambda(\lambda_i \otimes m_i) = \sum(\lambda\lambda_i \otimes m_i)$, så vi kan derfor anvende φ på (λx). Får at $\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda \sum_{i=1}^r (\lambda_i \otimes m_i)) = \varphi(\sum \lambda(\lambda_i \otimes m_i)) = \varphi(\sum(\lambda\lambda_i \otimes m_i)) = \lambda(\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_r m_r) = \lambda\varphi(x)$.

   Skal nå se på hva φ er i en enkelt grad, og slik finne en måte å justere avbildningen vår til å bli på i grad j. Dersom vi får at avbildningen vår er på i grad j vil hele φ være på, siden M er generert i grad j. (For φ på i grad j vil medføre at $m = \sum_{i=1}^t \lambda_i m_i = \varphi(\sum_{i=1}^t \lambda_i \otimes m_i)$.) Grad i av $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er $\Lambda_i \otimes_{\Lambda_0} M_j$. Lar φ_i være φ i grad i. Har da at

$\varphi_i(\Lambda_i \otimes_{\Lambda_0} M_j) = \Lambda_i M_j \subseteq M_{i+j}$, der M_{i+j} ligger i grad $i+j$. Har at

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i \oplus_{\Lambda_0} M_j & \xrightarrow{\varphi_i} & \Lambda_i M_j \\ \\ \mathit{grad}\ i & \longmapsto & \mathit{grad}\ i+j \\ \\ \mathit{grad}\ i+1 & \longmapsto & \mathit{grad}\ i+j+1 \end{array}$$

Ser at $\Lambda_i \otimes_{\Lambda_0} M_j$ må flyttes j grader, da får vi at $(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j)[j] \xrightarrow{\varphi} M$ sender grad i på grad i for alle i, og vi har dermed en grad 0-avbildning φ. I grad j får vi at $(\Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_j)[j] \xrightarrow{\varphi} M_j$. Siden $\Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_j \cong M_j$ fra definisjonen av tensorprodukt har vi at φ er på i grad j. Vi lar denne φ være vår f og $(\Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_j)[j]$ være vår P, der $f\colon P \to M$ er det projektive dekket vi søker.

Skal så vise at φ er en essensiell epimorfi. Lar X være en gradert modul og ψ være en grad 0-avbildning slik at $X \xrightarrow{\psi} \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j \xrightarrow{\varphi} M$. Anta at $\varphi\psi$ er på. Ønsker å vise at da er ψ på. Lar ψ_j være ψ restringert til X_j, da har vi i grad j følgende: $X_j \xrightarrow{\psi_j} \Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_j \xrightarrow{\varphi} M_j$. Ser at her blir $\varphi|_{\Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} M_j}$ en isomorfi fra definisjonen av tensorprodukt. Vet dermed at da må ψ_j være på, siden ψ_j sammensatt med en isomorfi er på. Trenger nå å vise at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er generert i grad j, for da vil vi ha at hele ψ er på når ψ_j er på. Hva er en generator for $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$? Kaller generatorsettet til M_j for $\{x_1, \cdots, x_t\}$. Lar $m = \sum_{i=1}^t \lambda_i x_i$, der $\lambda_i \in \Lambda_0$ og $m \in M_j$. Får da at $\lambda \otimes m = \lambda \otimes (\sum_{i=1}^t \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^t (\lambda \otimes \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^t (\lambda\lambda_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^t (\lambda\lambda_i 1_\Lambda \otimes x_i) = \sum_{i=1}^t \lambda\lambda_i (1_\Lambda \otimes x_i)$. Siden $1_\Lambda \in \Lambda_0$ har vi at $\{1_\Lambda \otimes x_i\}_{i=1}^t$ genererer $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$. Altså er $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ generert i grad j, så ψ er på, som igjen medfører at φ er en essensiell epimorfi. Siden M er endeliggenerert ser vi også av generatorsettet til P at også P må være endeliggenerert.

Dermed har vi vist at for M generert i grad j eksisterer et projektivt dekke $f\colon P \to M$, der $P = \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_j$ er generert i grad j.

5. Skal nå vise at M har et gradert projektivt dekke. Vi har at M er en endeliggenerert gradert Λ-modul, så vi har at det eksisterer $\{m_1, \cdots, m_n\}$ homogene elementer i M, det vil si $m_i \in M_{r_i}, \forall i = 1, \cdots, n$, som genererer M som Λ-modul. Kan anta at $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$. Så $M_{r_1} = (M/JM)_{r_1}$. Har fra Punkt 4 at M_{r_1} har et projektivt

dekke; $\varphi_{r_1} : \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \to M_{r_1}$. Siden $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1}$ er projektiv har vi at:

$$\begin{tikzcd} & \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \arrow[dl, dotted, "\exists \bar{\varphi}_{r_1}"'] \arrow[d, "\varphi_{r_1}"] & \\ M \arrow[r] & M_{r_1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Her er φ_{r_1} en grad 0-avbildning per definisjon av projektivt dekke og avbildningen fra M til M_{r_1} er en naturlig avbildning og dermed også en grad 0-avbildning. Vi kan derfor fra Lemma 1.2.7 på side 3 velge $\bar{\varphi}_{r_1}$ som en grad 0-avbildning. Så vi forsøker oss med $\bar{\varphi}_{r_1} : \Lambda \otimes_{\Lambda_0} M_{r_1} \to M$ som projektivt dekke for hele M. Dersom $\operatorname{Coker} \bar{\varphi}_{r_1} = 0$ har vi funnet vårt projektive dekke, dersom $\operatorname{Coker} \bar{\varphi}_{r_1} \neq 0$ må vi jobbe litt mer. Vi ser på den eksakte sekvensen

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} \bar{\varphi}_{r_1} \hookrightarrow M \longrightarrow M/\operatorname{Im} \bar{\varphi}_{r_1} \longrightarrow 0$$

Vi skriver $M/\operatorname{Im} \bar{\varphi}_{r_1} = N$. Har da at N er en endeliggenerert gradert Λ-modul, så det eksisterer $\{n_1, \cdots, n_t\}$ homogene elementer i N, det vil si $n_i \in N_{s_i}, \forall i = 1, \cdots, t$, som genererer N som Λ-modul. Kan anta at $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_t \leq r_n$, der s_1 er første r_j slik at $r_1 = r_2 = \cdots = r_{j-1} < r_j$. Vi skal nå se litt nærmer på N_{s_1}. Vi har at $N = M/\operatorname{Im} \bar{\varphi}_{r_1}$, der $\operatorname{Im} \bar{\varphi}_{r_1} = \Lambda \cdot M_{r_1} \subseteq M$. Vi ser på $\Lambda \cdot M_{r_1}$ i de ulike gradene og antar at $r_1 + j = s_1$.

$$\begin{array}{lll} \textit{i grad } r_1: & M_{r_1} & \\ \textit{i grad } r_1+1: & \Lambda_1 M_{r_1} & = M_{r_1+1} \\ \textit{i grad } r_1+2: & \Lambda_2 M_{r_1} & = M_{r_1+2} \\ & \vdots & \\ \textit{i grad } r_1+j-1: & \Lambda_{j-1} M_{r_1} & = M_{r_1+j-1} \\ \textit{i grad } s_1 = r_1+j: & \Lambda_j M_{r_1} & \subseteq M_{r_1+j} \end{array}$$

Så vi har at $M/\operatorname{Im} \bar{\varphi}_{r_1} = (M_{r_1} \oplus M_{r_1+1} \oplus \cdots \oplus M_{r_1+j-1} \oplus M_{r_1+j} \oplus \cdots \oplus M_{r_n})/(M_{r_1} \oplus M_{r_1+1} \oplus \cdots \oplus M_{r_1+j-1} \oplus \Lambda_j M_{r_1} \oplus \Lambda_{j+1} M_{r_1} \oplus \cdots \Lambda_{n-r_1} M_{r_1}) = (M_{r_1+j})/(\Lambda_j M_{r_1}) \oplus \cdots = N$. Så vi har at $N_{s_1} = (M_{r_1+j})/(\Lambda_j M_{r_1})$. Ser litt nærmere på $(M/JM)_{s_1}$. Ser først at $(M/JM) = (M_{r_1} \oplus M_{r_1+1} \oplus \cdots \oplus M_{r_1+j-1} \oplus M_{r_1+j} \oplus \cdots)/((0) \oplus \Lambda_1 M_{r_1} \oplus (\Lambda_2 M_{r_1} + \Lambda_1 M_{r_1+1}) \oplus \cdots \oplus M_{r_1+j-1} \oplus \Lambda_j M_{r_1} \oplus \cdots)$, der vi har at $\Lambda_1 M_{r_1} = M_{r_1+1}$, $(\Lambda_2 M_{r_1} + \Lambda_1 M_{r_1+1}) = M_{r_1+2}$ og så videre, og $(JM)_{r_1+j} = \Lambda_j M r_1 + \Lambda_{j-1} M_{r_1+1} + \cdots + \Lambda_1 M_{r_1+j-1} = \Lambda_j M_{r_1} +$

$\Lambda_j\Lambda_1 M_{r_1} + \cdots + \Lambda_j M_{r_1} = \Lambda_j M_{r_1}$. Så $(M/JM)_{s_1} = M_{r_1+j}/(\Lambda_j M_{r_1}) = N_{s_1}$ og vi har vist at $N_{s_1} = (M/JM)_{s_1}$.

Fra Punkt 4 har vi at N_{s_1} har et projektivt dekke $\psi_{s_1} \colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1} \to N_{s_1}$, som på samme måte som φ_{r_1} kan løftes til $\bar{\psi}_{s_1} \colon \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1} \to N$. Som igjen kan løftes til M, slik at vi har:

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1} \arrow[dl, dotted, "\exists\bar{\psi}"'] \arrow[d, "\bar{\psi}_{s_1}"] & \\
M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

der vi i igjen har fra Lemma 1.2.7 på side 3 at $\bar{\psi}$ kan velges som en grad 0-avbildning. Dersom Coker $\bar{\psi}_{s_1} = 0$ er vi forløpig fornøyd.

Hvis Coker $\bar{\psi}_{s_1} \neq 0$ ser vi på

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Lambda \otimes_{\Lambda_0} N_{s_1} \arrow[dl, dotted, "\exists\bar{\psi}"'] \arrow[d, "\bar{\psi}_{s_1}"] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im}\varphi_{r_1} \arrow[r, hook] & M \arrow[r] & N = (M/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & (M/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1})/\operatorname{Im}\bar{\psi}_{s_1} \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ser litt nærmere på $(M/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1})/\operatorname{Im}\bar{\psi}_{s_1}$. Har at $\operatorname{Im}\bar{\psi}_{s_1} = \operatorname{Im}\bar{\psi}/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1}$ siden diagrammet kommuterer. Har videre at $\operatorname{Im}\bar{\psi}/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1} = (\operatorname{Im}\bar{\psi} + \operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1})/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1}$, siden vi alltid kan legge til 0. Har dermed at $(M/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1})/\operatorname{Im}\bar{\psi}_{s_1} = (M/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1})/((\operatorname{Im}\bar{\psi} + \operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1})/\operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1}) = M/(\operatorname{Im}\bar{\psi} + \operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1})$. Tar nå å definerer $M/(\operatorname{Im}\bar{\psi} + \operatorname{Im}\bar{\varphi}_{r_1}) = N'$, og gjentar som for N og fortsetter slik. Siden M er endeliggenerert vil dette til slutt stoppe opp og vi har en endelig sum $M/JM = (M/JM)_{r_1} \oplus (M/JM)_{s_1} \oplus \cdots \oplus (M/JM)_{r'_1} = M_{r_1} \oplus N_{s_1} \oplus \cdots \oplus M'_{r'_1}$, som vi for ordens skyld døper om til $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_l$ for en endelig $l \in \mathbb{N}$. Tar den direkte summen av alle dekkene $\bigoplus_{i=1}^{t}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i)$ og dekker M/JM med denne. Vi vet at $\bigoplus_{i=1}^{t}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i)$ er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul, siden den er en direkte sum av endeliggenererte graderte projektive Λ-moduler og den direkte summen av projektive moduler er projektiv. Vi skal nå å vise at det eksisterer en f slik at $f \colon \bigoplus_{i=1}^{t}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i) \to M$ er et projektivt dekke av M. Vi har at

$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus_{i=1}^{t}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i) \arrow[dl, dotted, "\exists f"'] \arrow[d, "\bar{f}"] & \\
M \arrow[r, "\pi"] & M/JM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Siden $\bar{f}$ er en direkte sum av grad 0-avbildninger, er $\bar{f}$ selv en grad 0-avbildning, og π er en naturlig avbildnig og er dermed av grad 0. Vi kan derfor velge f som en grad 0-avbildnig fra Lemma 1.2.7 på side 3. Skal først vise at f er på. Har at for en $m \in M$ så er $m + JM = \bar{f}(x) = \pi f(x) = f(x) + JM$ for en $x \in \bigoplus_{i=1}^{t}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i)$. Altså er $m - f(x) \in JM$. Har at $m - f(x) + \operatorname{Im} f = m + \operatorname{Im} f$, så $M/\operatorname{Im} f = J(M/\operatorname{Im} f)$. Har at $M/\operatorname{Im} f$ er endeliggenerert gradert Λ-modul så dermed gir den graderte versjonen av Nakayama Lemma, Lemma 1.2.8 på side 4, at $M/\operatorname{Im} f = 0$, som vil si at $\operatorname{Im} f = M$, som igjen vil si at f er på.

Skal nå vise at $\operatorname{Ker} f \subseteq J(\bigoplus_{i=1}^{l}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i))$. At $\bigoplus_{i=1}^{l}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i) \to M$ er et projektivt dekke ser vi fra følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "f'"] & \bigoplus_{i=1}^{l}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & M \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\
& \bigoplus_{i=1}^{l}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i)/\bigoplus_{i=1}^{l}(J\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i) \arrow[r, "\sim"] & M/JM &
\end{tikzcd}$$

Eksakthet gir at $ff' = 0$, så dermed blir også $af' = 0$, siden $bff' = af'$. Dermed har vi at $\operatorname{Ker} f \subseteq \bigoplus_{i=1}^{l}(J\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i) = J(\bigoplus_{i=1}^{l}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i))$, og vi har at $f\colon \bigoplus_{i=1}^{l}(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X_i) \to M$ er et projektivt dekke av M.

6. Vi har følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & \\
& \operatorname{Ker} f \arrow[dr] & & & \\
& & P \arrow[dr, "f"] & & 0 \\
& & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & Q \arrow[ur, "g"] & & 0 \\
& \operatorname{Ker} g \arrow[ur] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

der $f\colon P \to M$ er et gradert projektivt dekke, Q er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul og g er en grad 0-homomorfi der $\operatorname{Ker} g \subseteq JQ$. Skal nå vise at det eksisterer en isomorfi $h\colon P \to Q$ slik at

$gh = f$ for to definisjoner av projektivt dekke. Der Definisjon 1 er at $f\colon P \to M$ er et gradert projektivt dekke av M dersom P er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul, f en grad 0-avbildning og $\operatorname{Ker} f \subseteq JP$. Definisjon 2 er at $f\colon P \to M$ er et gradert projektivt dekke av M dersom P er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul, f er både en grad 0-avbildning og en essensiell epimorfi. Ved å vise dette for Definisjon 1 får vi at alle projektive dekker er unike opp til isomorfi, og ved å vise det for Definisjon 2 får vi at de to definsjonene for projektive dekker er ekvivalente. Dermed vil vi senere i oppgaven ha mulighet til å benytte de to definisjonene om hverandre.

Viser først at vi har en isomorfi $h\colon P \to Q$ slik at $gh = f$ når vi bruker Definisjon 1. Siden P er projektiv, M og Q er Λ-moduler og g er på, følger det fra definisjonen av en projektiv modul at $\exists h\colon P \to Q$ slik at $f = gh$. Likedan gir Q projektiv, f på og at P og M er Λ-moduler at $\exists h'\colon Q \to P$ slik at $g = fh'$. Fra Lemma 1.2.7 på side 3 vet vi også at h og h' kan velges som grad 0-homomorfier.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & \\
& \operatorname{Ker} f \arrow[dr] & & & \\
& & P \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dotted, bend left, "\exists h"] & & 0 \\
& & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & Q \arrow[ur, "g"] \arrow[uu, dotted, bend left, "\exists h'"] & & 0 \\
& \operatorname{Ker} g \arrow[ur] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Har at $f = gh$ og $g = fh'$ som medfører at $f = fh'h$. Skal nå først vise at $h'h$ er en isomorfi, som medfører at h er en-til-en og h' er på. Ser at $f = fh'h$ vil si at $f(1_P - h'h) = 0$, og vi har at $\operatorname{Im}(1_P - h'h) \subseteq \operatorname{Ker} f \subseteq JP$. At $\operatorname{Ker} f \subseteq JP$ følger av vår Definisjon 1 av et projektivt dekke. Vi ønsker å anvende en gradert versjon av Nakayama Lemma, Lemma 1.2.8 på side 4, som her gir at dersom $J(P/\operatorname{Im} h'h) = P/\operatorname{Im} h'h$, så er $P/\operatorname{Im} h'h = (0)$. Vi velger en $p \in P$ og anvender avbildningen $(1_P - h'h)$ på denne, får da at $p - h'h(p) \in JP$. Har dermed at $p - h'h(p) = x$, der x er et element i JP. Dette gir at $p + \operatorname{Im} h'h = x + \operatorname{Im} h'h \in JP + \operatorname{Im} h'h$. Siden dette gjelder for alle $p \in P$ har vi at $P/\operatorname{Im} h'h = J(P/\operatorname{Im} h'h)$ og den graderte versjonen av Nakayama Lemma gir da at $P/\operatorname{Im} h'h = (0)$ og vi har at $P = \operatorname{Im} h'h$, altså er $h'h$ på.

Skal nå vise at $h'h$ også er en-til-en. Vi vet at $h'h$ er en grad 0-morfisme siden den er satt sammen av to grad 0-morfismer. Vi vet derfor at vi har følgende i grad i:

$$(h'h)|_i \colon P_i \twoheadrightarrow P_i$$

Siden alle moduler er faktor av en fri og P er endeliggenerert, så $\exists n \in \mathbb{N}$ slik at $\Lambda^n \to P \to 0$. Så i grad i har vi at $\Lambda_i^n \to P_i \to 0$ og $\dim_k \Lambda_i < \infty$. Dermed har vi at også $\dim_k P_i < \infty$. Og vi har at $(h'h)|_i \colon P_i \to P_i$ er en isomorfi. Siden dette gjelder for alle i, kan vi konkludere med at $h'h$, er en isomorfi. Dermed vet vi at h er en-til-en.

Skal nå vise at h også er på, ved å vise at hh' er på. Siden $f = gh$ og $g = fh'$, så er $g = ghh'$, som vil si at $g(1_Q - hh') = 0$, så $\operatorname{Im}(1_Q - hh') \subseteq \operatorname{Ker} g \subseteq JQ$. At $\operatorname{Ker} g \subseteq JQ$ har vi fra antagelsen. Ved samme fremgangsmåte som for $h'h$ får vi at siden vi for enhver $q \in Q$ kan anvende $(1_Q - hh')$ på denne og få at $q - hh'(q) = x$, $x \in JQ$, så er $q + \operatorname{Im} hh' = x + \operatorname{Im} hh' \in JQ + \operatorname{Im} hh'$. Siden dette gjelder for alle $q \in Q$ har vi at $Q/\operatorname{Im} hh' = JQ/\operatorname{Im} hh'$, og den graderte versjonen av Nakayama Lemma gir da at $Q/\operatorname{Im} hh' = 0$ som vil si at $Q = \operatorname{Im} hh'$. Altså er hh' på, som vil si at h er på. Og dermed har vi vist at $h \colon P \to Q$ er både en-til-en og på, altså en isomorfi.

Skal nå gjenta beviset, men ved å bruke Definisjon 2 av at $f \colon P \to M$ er et gradert projektivt dekke av M. Altså at P er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul og at f er både en grad 0-avbildning og en essensiell epimorfi.

Ser at det eneste stedet vi har benyttet at $\operatorname{Ker} f \subseteq JP$ er for å vise at $h'h$ er på, så det er denne delen som må løses annerledes. Vi har at $fh' = g$ og vi vet at g er på fra antagelsen. Siden f er en essensiell epimorfi vet vi at da må også h' være på. At h er på er allerede vist, så dermed må også sammensetningen $h'h$ være på og vi er fremme.

7. Vi skal nå starte med følgende korteksakte følge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

av endeliggenererte graderte moduler, alle generert i grad j og vise at det da eksisterer endeliggenererte graderte projektive moduler P, Q og R slik at følgende diagram av graderte moduler og avbildninger kommuterer:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

der f, g og h er graderte projektive dekker.

Har fra Punkt 4 at A og C har projektive dekker, kall dem $f\colon P \to A$ og $h\colon R \to C$, der P og R er generert i grad j og f og h er grad 0-homomorfier. Får da følgende diagram ved å skrive inn kjernene til de to avbildningene:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker} f \arrow[d] & & \operatorname{Ker} h \arrow[d] & \\
 & P \arrow[d, "f"] & & R \arrow[d, "h"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Hesteskolemmaet [Rot79] gir at det eksisterer en projektiv oppløsning Q av B som gir en eksakt sekvens av kjedekomplekser, og dermed har vi en eksakt sekvens av graderte moduler: $0 \to P \to Q \to R \to 0$. Skriver inn dette sammen med kjernen til g og kokjernene til f, g og

h. Får følgende:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker} f \arrow[d] & \operatorname{Ker} g \arrow[d] & \operatorname{Ker} h \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Coker} f = 0 & \operatorname{Coker} g & \operatorname{Coker} h = 0 &
\end{tikzcd}
$$

Anvender Slangelemmaet [Rot79]

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} h \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Coker} f = 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] & \operatorname{Coker} h = 0 &
\end{tikzcd}
$$

der eksakthet gir følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} h \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

At avbildningen fra $\operatorname{Ker} f$ til $\operatorname{Ker} g$ er en til en kommer også fra Slangelemmeaet siden avbildningen fra P til Q er en til en.

Da gjenstår det kun å vise at $g\colon Q \to B$ er et projektivt dekke. Prøver med $Q = P \oplus R$, har da at Q vil være en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul siden den er en direkte sum av to slike. Siden R er projektiv følger det av definisjonen av projektiv at det eksisterer en avbildning k slik at $h = \beta k$. Siden h og β begge er grad 0-avbildninger vet vi fra Lemma 1.2.7 på side 3 at vi kan velge k som en grad 0-avbildning. Vi anvender dette til å lage følgende avbildninger slik at diagrammet vårt kommuterer for $Q = P \oplus R$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} h \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "\binom{1_P}{0}"] \arrow[d, "f"] & P \oplus R \arrow[r, "(0\ 1_R)"] \arrow[d, "(\alpha f\ k)"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dotted, "k"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

der $(\alpha f\ k) = g$. Trenger å vise at $\operatorname{Ker}(\alpha f\ k) \subseteq J(P \oplus R)$ for å få at $(\alpha f\ k)\colon P \oplus R \to B$ er et projektivt dekke.

Velger $\binom{p}{r} \in \operatorname{Ker}(\alpha f\ k)$ og ser på hvordan denne avbildes i diagrammet.

$$
\begin{tikzcd}
\binom{p}{r} \arrow[r, mapsto, "(0\ 1_R)"] \arrow[d, mapsto, "(\alpha f\ k)"'] & r \arrow[d, mapsto, "h"] \\
0 \arrow[r, mapsto, "\beta"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Har at $h(r) = 0$ siden diagrammet kommuterer. Har dermed at $r \in \operatorname{Ker} h \subseteq JR$. At $\operatorname{Ker} h \subseteq JR$ er per definisjon, da $h\colon R \to C$ er et projektivt dekke.

Gjenstår nå å vise at $p \in JP$. Ser på $\binom{0}{r}$.

$$
\begin{tikzcd}
\binom{0}{r} \arrow[r, mapsto, "(0\ 1_R)"] \arrow[d, mapsto, "g"'] & r \arrow[d, mapsto, "h"] \arrow[dl, dotted, "k"'] \\
g\binom{0}{r} \arrow[r, mapsto, "\beta"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Ser at $g\binom{0}{r} \in \operatorname{Ker}\beta$. Har at $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$ siden sekvensen er eksakt, så vi kan trekke $g\binom{0}{r}$ tilbake til et element $a \in A$. Siden $f\colon P \to A$ er på finnes $p' \in P$ slik at $f(p') = a$. Får følgende:

$$
\begin{tikzcd}
p' \in P \arrow[d, mapsto] & \binom{0}{r} \arrow[r, mapsto, "(0\ 1_R)"] \arrow[d, mapsto, "(\alpha f\ k)"'] & r \arrow[d, mapsto, "h"] \arrow[dl, dotted, "k"'] \\
f(p') = a \arrow[r, mapsto, "\alpha"] & g\binom{0}{r} \arrow[r, mapsto, "\beta"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Anvender funksjonen $\binom{1_P}{0}\colon P \to P \oplus R$ på $p' \in P$ og får elementet $\binom{p'}{0}$. Anvender videre $g = (\alpha f\ \ k)\colon P \oplus R \to B$ på $\binom{p'}{0}$ og får $g\binom{p'}{0} \in B$.

$$
\begin{tikzcd}
p' \arrow[r, mapsto, "\binom{1_P}{0}"] \arrow[dd, mapsto, "f"] & \binom{p'}{0} \arrow[d, mapsto, "g"] & \binom{0}{r} \arrow[r, mapsto, "(0\ 1_R)"] \arrow[dd, mapsto, "g"] & r \arrow[dd, mapsto, "h"] \arrow[ddl, dotted, "k"'] \\
 & g\binom{p'}{0} \arrow[d, equal] & & \\
f(p') = a \arrow[r, mapsto, "\alpha"] & \alpha(a) \arrow[r, equal] & g\binom{0}{r} \arrow[r, mapsto, "\beta"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Der $g\binom{p'}{0} = \alpha(a)$ kommer av at den venstre delen av diagrammet kommuterer. Legger merke til at denne likheten sammen med $\alpha(a) = g\binom{0}{r}$ gir at $g\binom{p'}{0} = g\binom{0}{r}$. Ser at $g(\binom{0}{r} - \binom{p'}{0}) = g\binom{0}{r} - g\binom{p'}{0} = 0$. Som medfører at $[\binom{0}{r} - \binom{p'}{0}] \in \operatorname{Ker} g$. Har fra tidligere at $\binom{p}{r} \in \operatorname{Ker} g$, så dermed vet vi at $\binom{p}{r} - [\binom{0}{r} - \binom{p'}{0}] \in \operatorname{Ker} g$. Det vil si $\binom{p}{r} - \binom{0}{r} + \binom{p'}{0} = \binom{p+p'}{0} \in \operatorname{Ker} g$. Har dermed at $\alpha(f(p+p')) = 0$, siden diagrammet over gir at αf tilsvarer $g\binom{1_P}{0}$ som her tilsvarer g. Siden α er en-til-en medfører $\alpha(f(p+p')) = 0$ at $f(p+p') = 0$, som vil si at $(p+p') \in \operatorname{Ker} f$. Så siden $f\colon P \to A$ er et projektivt dekke har vi at $(p+p') \in JP$ siden $\operatorname{Ker} f \subseteq JP$ per definisjon av et projektivt dekke. Vi har tidligere sett at $r \in JR$, dette medfører at $k(r) \subseteq JB$. Ser av diagrammet over at dette medfører at $a \in JA$. Så $a = \sum_{end} t_i a_i$, der $t_i \in J$ og $a_i \in A$. Siden f er på har vi at $\exists p_i$ slik at $f(p_i) = a_i$. Så p' kan velges slik at $p' = \sum_{end} t_i p_i \in JP$, der $f(p') = a$. Så vi kan velge en $p' \in JP$ slik at $f(p') = a$. Har nå at $p' \in JP$ og vi har at $(p + p') \in JP$, som tilsammen gir at $p \in JP$. Vi har dermed at $\binom{p}{r} \in J(P \oplus R)$.

Husker at vi startet med å velge et vilkårlig element $\binom{p}{r} \in \operatorname{Ker}(\alpha f\ \ k)$. Vi har nå vist at $\binom{p}{r} \in J(P \oplus R)$. Dermed har vi at $\operatorname{Ker} g \in J(P \oplus R)$ og vi har at $g\colon P \oplus R \to B$ er et projektivt dekke av B.

$\square$

Kapittel 2

Når Λ er Koszul

I dette kapittelet skal vi vise at når Λ er Koszul, så er Λ kvadratisk. Først vil vi se en del på projektive oppløsninger for å definere begrepene som blir brukt i definisjonen av en Koszul-algebra. Vi vil også bevise noen proposisjoner som angår projektive oppløsninger, til bruk i beviset av at en Koszul-algebra er kvadratisk. Vi vil så definere hva det vil si at Λ er Koszul og se litt nærmere på dette, før vi i siste seksjon beviser at når Λ er Koszul, så er Λ kvadratisk.

2.1 Projektive oppløsninger

Følgende definisjoner og proposisjoner angående projektive oppløsninger vil bli brukt både i definisjonen av Koszul og når vi senere i dette kapittelet skal bevise at Koszul-algebraer er kvadratiske.

Definisjon 2.1.1. En projektiv oppløsning er *minimal* dersom den er satt sammen av projektive dekker. Det vil si at vi har

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "d_2"'] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"'] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & \operatorname{Ker} f_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \operatorname{Ker} f_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

slik at $f_0 \colon P_0 \to M$, $d_0 \colon P_1 \to \operatorname{Ker} f_0$ og $d_1 \colon P_2 \to \operatorname{Ker} f_1$ og så videre alle er projektive dekker.

Definisjon 2.1.2. La M være en gradert Λ-modul. Da er M en *lineær*

Λ-modul hvis $\exists$ en eksakt sekvens

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & K_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

der P_i er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul generert i grad i og f_i en Λ-homomorfi av grad 0. Vi kaller en slik sekvens for en *lineær* gradert projektiv oppløsning av M.

MERK. Observerer at dersom en gradert Λ-modul M er lineær, så er også alle syzygyer lineære dersom de blir skiftet til å være generert i grad 0.

Proposisjon 2.1.3. *En lineær gradert projektiv oppløsning er minimal.*

Bevis. Ser på følgende lineære graderte projektive oppløsning:

$$
\begin{tikzcd}
& & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& X_1 \arrow[ur] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}
$$

der P_0 er generert i grad 0 og X_1 er generert i grad 1. Siden P er generert i grad 0 har vi at $(P_0)_{\geq 1} = JP_0$. Dermed vet vi at $X_1 \subseteq JP_0$, som er definisjonen på et projektivt dekke. Ta $X_1[-1] = M$ og fortsett. $\square$

Skal nå presentere et generelt resultat om projektive oppløsninger.

Proposisjon 2.1.4. *En minimal projektiv oppløsning av en modul M er en direkte summand i alle andre projektive oppløsninger av M.*

Bevis. Vi lar $0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{d} P \xrightarrow{f} M \to 0$ være starten av den minimale projektive oppløsningen av M og lar $0 \to \operatorname{Ker} g \xrightarrow{b} Q \xrightarrow{g} M \to 0$ være starten på en vilkårlig projektiv oppløsning av M. Da kan vi lage følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "d"] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r, "b"] & Q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & v0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "d"] & P \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Der vi vet at s eksisterer siden P er projektiv og g er på, mens t eksisterer siden Q er projektiv og f er på. Ser av diagrammet at $f = fts$, og kan helt ekvivalent med første del av beviset av Punkt 6 på side 5 vise at dermed er ts en isomorfi. Vi definerer $\varphi =: ts$ og merker oss at siden φ er en isomorfi så eksisterer det også en φ^{-1}. Ser at $\operatorname{Im} s + \operatorname{Ker} t \subseteq Q$. Siden ts er en isomorfi må $\operatorname{Im} s \cong P$. Lar $q \in Q$ være et vilkårlig element. Kan da skrive $q = s\varphi^{-1}t(q) + q - s\varphi^{-1}t(q)$. Har at $s\varphi^{-1}t(q) \in \operatorname{Im} s$, så ønsker å vise at $(q - s\varphi^{-1}t(q)) \in \operatorname{Ker} t$. Anvender t på $(q - s\varphi^{-1}t(q))$ og håper på å få null. Får $t(q) - ts\varphi^{-1}t(q) = t(q) - \varphi\varphi^{-1}t(q) = t(q) - t(q) = 0$ og vi vet dermed at $\operatorname{Im} s + \operatorname{Ker} t = Q$. Skal nå vise at snittet av $\operatorname{Im} s$ og $\operatorname{Ker} t$ er null, slik at vi får at Q er en direkte sum av disse. Lar $q \in (\operatorname{Im} s \cap \operatorname{Ker} t)$. Siden $q \in \operatorname{Im} s$ må $q = s(p)$ for en $p \in P$. At $q \in \operatorname{Ker} t$ gir at $0 = t(q) = ts(p)$, siden ts er en isomorfi må da $p = 0$ som igjen medfører at $q = 0$. Dermed har vi at $Q = \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker} t \cong P \oplus \operatorname{Ker} t$.

Skal nå vise at også resten av den minimale projektive oppløsningen av M er en direkte summand i den vilkårlige projektive oppløsningen av M. Ser at vi nå kan skrive $0 \to \operatorname{Ker} g \xrightarrow{b} Q \xrightarrow{g} M \to 0$ som

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} t \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} sd & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker} t \arrow[r, "g=(\, g|_{\operatorname{Im} s} \; 0\,)"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Lar fortsettelsen av den minimale projektive oppløsningen av M være $\cdots P' \to P \xrightarrow{f} M \to 0$, og lar fortsettelsen på den projektive oppløsningen av Q være $\cdots Q' \to Q \xrightarrow{g} M \to 0$. Ser at da vil det minimale projektive dekket av $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} t$ være $P' \oplus \operatorname{Ker} t$, da P' er det projektive dekket av $\operatorname{Ker} f$ og $\operatorname{Ker} t$ er en direkte summand av en projektiv og dermed selv er projektiv. Setter opp diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f' \arrow[r] & P' \oplus \operatorname{Ker} t \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "s'"] & \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} t \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g' \arrow[r] & Q' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "t'"] & \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} t \arrow[r] \arrow[d, equal] & v0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f' \arrow[r] & P' \oplus \operatorname{Ker} t \arrow[r, "f'"] & \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} t \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Hvor vi vet at avbildningen s' eksisterer siden $P' \oplus \operatorname{Ker} t$ er projektiv og g' er på og at t' eksisterer siden Q' er projektiv og f' er på. Og vi kan vise at $Q' = P' \oplus \operatorname{Ker} t \oplus R$, for en projektiv modul R på akkurat samme måte som for $Q = P \oplus \operatorname{Ker} t$. Og slik vil dette fortsette. □

2.2 At Λ er Koszul

Vi skal nå definere hva det vil si at Λ er Koszul og også se litt nærmere på dette.

Definisjon 2.2.1. Vi sier at Λ er *Koszul* hvis alle graderte simple Λ-moduler generert i grad 0 er lineære.

Vi skal nå vise at siden vi ser på Λ som en gradert modul, $\Lambda = \bigoplus_{i\geq 0} \Lambda_i$, så er grad 0-delen av Λ, Λ_0, summen av alle de graderte simple modulene, opp til skift. Vi lar S være en gradert simpel venstre Λ-modul. Vi har at $\Lambda_{\geq 1}$ er et ideal som er inneholdt i Λ. Vi ser så på $\Lambda_{\geq 1}S$ som er en gradert undermodul av S, siden $IM = \{\sum_{end} a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M\} \subseteq M$ er en gradert undermodul for enhver gradert Λ-modul M og ethvert gradert ideal I i Λ. Siden S er simpel må $\Lambda_{\geq 1}S = (0)$ eller S. Så vi sjekker om det er mulig at $\Lambda_{\geq 1}S = S$. Vi velger en vilkårlig $x \in S$, der x er homogen av grad t og ulik null. Vi ser så på Λx som er en gradert undermodul av S. Vi har at $\Lambda x = \{\lambda x \mid \lambda \in \Lambda\}$. Så vi har at vår x er et ikke-null element i Λx. Så siden $\Lambda x \neq 0$ må $\Lambda x = S$. Vi har dermed at $\Lambda x = S = \Lambda_{\geq 1}S = \Lambda_{\geq 1}(\Lambda x) = \Lambda_{\geq 1}x$. Vi er dermed kommet til en motsigelse siden $1 \cdot x \in \Lambda x$ er av grad t, mens graden til alle homogene elementer i $\Lambda_{\geq 1}x$ er minst $t + 1$. Vi har dermed at hvis S er en simpel Λ-modul, så er $\Lambda_{\geq 1}S = (0)$. Vet at følgende gjelder generelt: dersom R er en ring, M en venstre R-modul, $I \subseteq R$ er et ideal og $I \cdot M = (0)$, så er M en venstre R/I-modul. Dermed har vi at S er en modul over $\Lambda/\Lambda_{\geq 1} \cong \Lambda_0 = k^n$. Vi har dermed at $S \cong \Lambda_0 e_i$ for en i.

Dermed kan vi bruke følgende definisjon av at Λ er Koszul.

Definisjon 2.2.2. Vi har at Λ er *Koszul* dersom Λ_0 har en lineær gradert projektiv oppløsning.

MERK. I denne oppgaven oppfatter vi Λ_0 som en Λ-modul via $\Lambda_0 \cong \Lambda/\Lambda_{\geq 1}$. Vi ser også Λ_0 som en ring på denne måten.

2.3 Koszul-algebraer er kvadratiske

Vi skal nå vise at alle Koszul-algebraer er kvadratiske, men aller først definere hva kvadratisk betyr.

Definisjon 2.3.1. La $\Lambda = k\Gamma/I$. Der k er en kropp og Γ et quiver. Hvis I er et ideal generert av elementer i grad 2, sier vi at I er *kvadratisk* og Λ kalles for en *kvadratisk algebra.*

Teorem 2.3.2. *Lar $\Lambda = k\Gamma/I$ der k er en kropp, Γ er et quiver og I er et ideal med $I \subset J^2$, der J er idealet generert av pilene. Har da at dersom Λ er Koszul, så er Λ kvadratisk. Det vil si at I er generert av elementer av grad 2.*

Bevis. Vi starter altså med en vilkårlig Koszul algebra $\Lambda = k\Gamma/I$ og skal komme frem til at I er generert av veier av lengde 2. Siden Λ er Koszul vet vi at grad 0 delen av Λ, Λ_0, har en lineær gradert projektiv oppløsning. Her vil andre syzygy være generert i grad 2. Så vi skal finne en minimal gradert projektiv oppløsning av Λ_0 og se på hva andre syzygy i oppløsning kan fortelle oss om I. Bruker derfor at $\Lambda = k\Gamma/I$ og at $\Lambda_0 = k\Gamma/J$ for å lettere kunne se hva andre syzygy sier om I.

En generell måte å finne en projektiv oppløsning på er å bruke at alle moduler er en faktor av en fri og at fri medfører projektiv. Vet fra Proposisjon 2.1.4 på side 22 at vi har en minimal projektiv oppløsning som en direkte summand i enhver projektiv oppløsning. Og siden lineær medfører minimal, er dette et godt sted å begynne. Har at $\Lambda = k\Gamma/I$ er projektiv, siden Λ alltid er projektiv over seg selv. Starten på en projektiv oppløsning av $k\Gamma/J$ er

$$\begin{tikzcd}
 & & k\Gamma/I \arrow[r, "f_0"] & k\Gamma/J \arrow[r] & 0 \\
 & J/I \arrow[ur, hook] & & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Vi har at $I \subseteq J^2 \subseteq J$, så $I \subseteq J$, og det er klart at f_0 er en på avbildning. Ser lett at kjernen av denne avbildningen blir J/I.Siden dette skal være en minimal projektiv gradert oppløsning trenger vi også at $\operatorname{Ker} f \subseteq Jk\Gamma/I$, se Definisjon 1.2.6 på side 3. Har at $J(k\Gamma/I) = Jk\Gamma/I = (Jk\Gamma + I)/I = (J + I)/I = J/I$. Har dermed at $\operatorname{Ker} f = Jk\Gamma/I$ som tilfredsstiller $\operatorname{Ker} f \subseteq Jk\Gamma/I$. Ser at f_0 er en grad 0-avbildning siden $k\Gamma/I$ er generert i grad 0 og $k\Gamma/J$ kun består av elementer i grad 0, så alt som er av grad $\geq 1 \in k\Gamma/I$ blir sendt på 0 i $k\Gamma/J$.

Ønsker å forsette den projektive oppløsningen av $\Lambda_0 = k\Gamma/J$ på følgende måte:

$$\begin{tikzcd}
 & & J/IJ \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "g"] & & k\Gamma/I \arrow[r] & k\Gamma/J \arrow[r] & 0 \\
 & I/IJ \arrow[ur] & & J/I \arrow[ur, hook, "g'"] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

der g er den naturlige avbildningen. Skal nå vise at dette er en projektiv oppløsning av $k\Gamma/J$, ved å vise at $0 \to I/IJ \to J/IJ \to J/I \to 0$ er eksakt og at J/IJ er projektiv. Skal videre vise at $g\colon J/IJ \to J/I$ er et projektivt dekke, sånn at vår oppløsning fortsetter å være minimal.

Siden I er et ideal har vi at $IJ \subseteq I$. Vi får derfor en på avbildning $g\colon J/IJ \to J/I$. Så når vi dekker J/I med J/IJ vil vi få kjernen I/IJ. Dermed vet vi at sekvensen $0 \to I/IJ \to J/IJ \to J/I \to 0$ er eksakt.

For å vise at J/IJ er projektiv skal vi bruke at $J/IJ \cong k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J$, og vise at $k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J$ er projektiv ved å vise at $\operatorname{Hom}_\Lambda(k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J, -)$ er eksakt. Starter med å vise hvorfor J/IJ og $k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J$ er isomorfe. Ser på den eksakte følgen: $I \xrightarrow{f} k\Gamma \to k\Gamma/I \to 0$, der $k\Gamma/I = \operatorname{Coker} f$. Anvender den kovariante høyreekesakte funktoren $- \otimes_{k\Gamma} J$ og får den eksakte følgen:

$$\eta\colon \qquad I \otimes_{k\Gamma} J \xrightarrow{f} k\Gamma \otimes_{k\Gamma} J \xrightarrow{g} k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J \longrightarrow 0$$

Anvender at $k\Gamma \otimes_{k\Gamma} J \cong J$ og får følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_{k\Gamma} J \arrow[r, "f"] & k\Gamma \otimes_{k\Gamma} J \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\wr"] & k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & J \arrow[r, "g'"] & k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lar $i \in I$ og $j \in J$. Ser at da vil disse avbildes i diagrammet over på følgende måte:

$$\begin{tikzcd}
i \otimes_{k\Gamma} j \arrow[r, mapsto] & i \otimes_{k\Gamma} j \arrow[d, "\wr"] \\
 & ij \in IJ
\end{tikzcd}$$

Ser at $\operatorname{Im} f \cong IJ$, så siden η er en eksakt følge gir at $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \cong \operatorname{Ker} g'$, har vi at $\operatorname{Ker} g' \cong IJ$. Ser dermed at det finnes en på avbildning g' fra J til $k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J$ og at kjernen til denne avbildningen er IJ. Som gir oss det vi skulle vise, at $J/IJ \cong k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J$.

Vet at $\operatorname{Hom}(P, -)$ er eksakt hvis og bare hvis P er projektiv. Trenger derfor bare å vise at $\operatorname{Hom}_\Lambda(k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J, -)$, hvor vi ser på $k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J$ som en venstre Λ-modul, er eksakt. Har at $\operatorname{Hom}_\Lambda(k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J, -) \cong \operatorname{Hom}_{k\Gamma}(J, \operatorname{Hom}_\Lambda(k\Gamma/I, -)) = \operatorname{Hom}_{k\Gamma}(J, \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)) = \operatorname{Hom}_{k\Gamma}(J, -) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)$. Vet at Λ er projektiv som Λ-modul over seg selv og J er en projektiv $k\Gamma$-modul fordi J er en undermodul av $k\Gamma$ og $k\Gamma$ er hereditær. Vet derfor at $\operatorname{Hom}_{k\Gamma}(J, -) \cdot \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)$ er eksakt, så dermed er $k\Gamma/I \otimes_{k\Gamma} J \cong J/IJ$ projektiv.

For å vise at $g\colon J/IJ \to J/I$ er et projektivt dekke trenger vi også å vise at $\operatorname{Ker} g \subseteq J^2/IJ$. Vi har at $\operatorname{Ker} g = I/IJ$, så vi må kontrollere at I/IJ er inneholdt i $J(J/IJ) = J^2/IJ$. Vårt utgangspunkt er at $I \subseteq J^2$, og dermed har vi at $I/IJ \subseteq J^2/IJ = J(J/IJ)$. Og vi har at de første leddene av en minimal projektiv oppløsning av $k\Gamma/J = \Lambda_0$ er som følger:

$$\begin{tikzcd}
 & & J/IJ \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & k\Gamma/I \arrow[r, "f_0"] & k\Gamma/J \arrow[r] & 0 \\
 & I/IJ \arrow[ur] & & J/I \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

der alle avbildniger er grad 0-avbildninger. Har allerede vist at f_0 er en grad 0-avbildning. Har at alle de andre avbildningene er grad 0-avbildninger da de er naturlige avbildninger, eller satt sammen av to naturlige avbildninger, som J/IJ til $k\Gamma/I$.

Vår antakelse er at Λ er Koszul, så dermed må andre syzygy, I/IJ, være generert i grad 2. Vi skal nå bruke dette til å vise at da er også I generert i grad 2, altså at I er et kvadratisk ideal. Starter med å se litt nærmere på I/IJ. Har at $I = I_2 \oplus I_3 \oplus I_4 \oplus \cdots$, der I_2 er elementene i grad 2, I_3 er elementene i grad 3 og så videre. Ser at IJ ikke har noen elementer som ligger i grad 2. Vi deler opp IJ på følgende måte: $IJ = 0 \oplus I_2J_1 \oplus (I_2J_2 + I_3J_1) \oplus (I_4J_1 + I_3J_2 + I_2J_3) \oplus \cdots$. Her er I_2J_1 delen av IJ som ligger i grad 3, $I_2J_2 + I_3J_1$ er delen av IJ som ligger i grad 4 og så videre. Vi bruker dette til å se på I/IJ på følgende måte: $I/IJ = I_2 \oplus I_3/I_2J_1 \oplus I_4/(I_2J_2 + I_3J_1) \oplus \cdots$. Vår utfordring blir nå å vise at elementer i de ulike gradene av I alle er generert i grad 2. Starter med å vise at dette stemmer for elementer i I_3 og i I_4, for deretter å ved induksjon se at dette også stemmer for elementer i de øvrige gradene.

Velger et vilkårlig element $x \in I_3$. Vi ønsker å vise at x er generert av I_2, som her vil si at $x \in J_1I_2 + I_2J_1$. Vi ser på restklassen til x i I/IJ. Siden x er av grad 3 vil restklassen til x i I/IJ ligge i I_3/I_2J_1. Definerer restklassen som følger: $\bar{x} =: x + IJ = x + I_2J_1$. Siden I/IJ er generert i grad 2 vet vi også at $\bar{x} \in I/IJ$ er generert i grad 2. Skriver generatorsettet til I_2 som $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_t\}$. Kan da skrive $\bar{x}$ som $\bar{x} = \sum_{i=1}^t j_i(\sigma_i + I_2J_1)$, der $j_i \in J_1$. Får videre at $\bar{x} = \sum_{i=1}^t (j_i\sigma_i + I_2J_1) = (\sum_{i=1}^t j_i\sigma_i) + I_2J_1$. Målet vårt er å få at $x \in J_1I_2 + I_2J_1$. Har nå at $\sum_{i=1}^t j_i\sigma_i$ generer den delen av x som er inneholdt i J_1I_2. Så vi ser på $x - \sum_{i=1}^t j_i\sigma_i$ og håper å få at denne differansen ligger i I_2J_1. Har nå at $\bar{x} = \sum_{i=1}^t j_i\sigma_i + I_2J_1 = x + IJ$. Vet at $a + IJ = b + IJ$ hvis og bare hvis $(a - b) \in IJ$ gjelder generelt, så dermed har vi at $x - \sum_{i=1}^t j_i\sigma_i \in I_2J_1$. Dermed har vi funnet det vi ønsket, nemlig at dersom vi ser på en vilkårlig $x \in I_3$, så er x et element i $J_1I_2 + I_2J_1$, det vil si generert av I_2.

Velger et vilkårlig element $x \in I_4$. Å vise at x er generert av I_2 vil her være å vise at $x \in I_2J_2 + I_3J_1 + J_1I_3 + J_2I_2$. Siden x er av grad 4 vil restklassen til x i I/IJ være $\bar{x} =: x + IJ = x + (I_2J_2 + I_3J_1)$. Ser på $I_2J_2 + I_3J_1$. Har at $I_2J_2 + I_3J_1 = (I_2J_1 + I_3)J_1 = (I_2J_1 + J_1I_2 + I_2J_1)J_1 = (I_2J_1 + J_1I_2)J_1 = I_2J_1^2 + J_1I_2J_1 = I_2J_2 + J_1I_2J_1$. Som gir at $\bar{x} = x + (I_2J_2 + J_1I_2J_1)$. Ser på $J_1I_3 + J_2I_2$ på tilsvarende måte og får at $J_1I_3 + J_2I_2 = J_1(I_3 + J_1I_2) = J_1(J_1 + I_2 + I_2J_1 + J_1I_2) = J_1(J_1I_2 + I_2J_1) = J_1^2I_2 + J_1I_2J_1 = J_2I_2 + J_1I_2J_1$. Har dermed at det vi ønsker å vise er at $x \in I_2J_2 + J_1I_2J_1 + J_2I_2$.

Som før vet vi at $\bar{x} \in I/IJ$ er generert i grad 2. Vi har at $\bar{x} = x + IJ = x + (I_2J_2 + J_1I_2J_1)$ og at I/IJ i grad 4 er $I_4/(I_2J_2 + J_1I_2J_1 + J_2I_2)$. Kan dermed skrive $\bar{x}$ som $\bar{x} = x + (I_2J_2 + J_1I_2J_1) = \sum_{i=1}^t j_i\sigma_i + I_2J_2 + J_1I_2J_1$, der $j_i \in J_2$. Målet vårt er å få at $x \in I_2J_2 + J_1I_2J_1 + J_2I_2$. Har nå at $\sum_{i=1}^t j_i\sigma_i$ generer den delen av x som er inneholdt i J_2I_2. Som sist ser vi at differansen $x - \sum_{i=1}^{t} j_i\sigma_i$ er inneholdt i $I_2J_2 + J_1I_2J_1$ fra de to likehetene $\bar{x} = \sum_{i=1}^{t} j_i\sigma_i + (I_2J_2 + J_1I_2J_1)$ og $\bar{x} = x + (I_2J_2 + J_1I_2J_1)$. Dermed har vi, som vi ønsket, funnet at dersom vi ser på en vilkårlig $x \in I_4$, så er x et element i $I_2J_2 + J_1I_2J_1 + J_2I_2$, som vil si at x er generert av I_2.

Antar at I_n er generert av I_2. Skal nå vise at da er også I_{n+1} generert av I_2. Vi velger et vilkårlig element $x \in I_{n+1}$ og ønsker å vise at $x \in I_2J_{n-1} + I_3J_{n-2} + \cdots + I_nJ_1 + J_1I_n + J_2I_{n-1} + \cdots + J_{n-1}I_2$. Vet at I_m, $m \leq n$ er generert i grad 2, så denne summen kan skrives om til $\sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0,x+y=n-1}^{n-1} J_xI_2J_y$. Har at $I_nJ_1 = \sum_{x=0}^{n-2}\sum_{y=0,x+y=n-2}^{n-2} J_xI_2J_y$, så IJ i grad $n+1$ blir $\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{t=1,s+t=n-1}^{n-1} J_sI_2J_t$ og vi har at restklassen til x i I/IJ er $\bar{x} =: x + IJ = x + \sum_{s=0}^{n-2}\sum_{t=1,s+t=n-1}^{n-1} J_sI_2J_t$. Siden IJ i grad $n+1$ er $\sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0,x+y=n-1}^{n-1} J_xI_2J_y$, så er $\bar{x} = x + IJ = x + \sum_{s=0}^{n-2}\sum_{t=1,s+t=n-1}^{n-1} J_sI_2J_t = \sum_{j=1}^{t} j_i\sigma_i + \sum_{x=0}^{n-2}\sum_{y=0,x+y=n-2}^{n-2} J_xI_2J_y$, der $j_i \in J_{n-1}$ og $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_t\}$ er generatorsettet til I_2. Dermed har vi at $x - \sum_{i=1}^{t} j_i\sigma_i \in \sum_{s=0}^{n-2}\sum_{t=1,s+t=n-1}^{n-1} J_sI_2J_t$. Og vi har dermed vist at dersom I_n er generert i grad 2, så er også I_{n+1} generert i grad 2. Så alle elementer i alle grader av I er generert i grad 2, som vil si at I er generert i grad 2. $\square$

Kapittel 3

Yoneda-algebraen til en Koszul-algebra

I dette kapittelet vil vi presentere Yoneda-algebraen til Λ, som vi skriver som $E(\Lambda)$. Og vi vil vise at dersom Λ er Koszul, så medfører det at også $E(\Lambda)$ er Koszul.

3.1 Yoneda-algebraen til Λ

I denne første seksjonen vil vi se på Yoneda-algebraen til Λ. Vi vil definiere $E(\Lambda)$ og gå kort gjennom isomorfien $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A) \cong e^i(C, A)$, der $e^i(C, A)$ er ekvivalensklassen til alle utvidelsene av A ved C, for å definere addisjon og multiplikasjon i $E(\Lambda)$ ved Baersum og sammensetning av følger. Vi vil også bevise noen proposisjoner som vi vil bruke for å bevise at $E(\Lambda)$ er Koszul når Λ er Koszul. Her vil vi blant annet se at når vi definerer $\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{i\geq 0} \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$, for en lineær Λ-modul M, da er $\mathcal{E}(M)$ generert i grad 0 som venstremodul over $E(\Lambda)$.

Definisjon 3.1.1. *Yoneda-algebraen* til Λ er

$$E(\Lambda) = \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \oplus \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \oplus \operatorname{Ext}^2_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \oplus \dots$$

Definerer addisjon og multiplikasjon ved å la $+$ være Baersummen, og $\cdot$ være sammensetning av følger. Får dermed at $(E(\Lambda), +, \cdot)$ er en gradert ring.

Vi vil se på $E(\Lambda)$, Yoneda-algebraen til Λ, der produkt er sammensetning av følger og sum er Baersum. Sammensetning av følger og Baersum er definert for følger i $e^i(C, A)$. Vi vil derfor definere $e^i(C, A)$ og se på sammenhengen mellom ekstensjoner og elementer i Ext-gruppen før vi ser på hva Baersum og sammensetning av følger er. Men aller først går vi gjennom en proposisjon vi vil benytte i gjennomgangen av at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A) \cong e^i(C, A)$.

Proposisjon 3.1.2. *Gitt en eksakt sekvens og en avbildning $\theta\colon Y \to U$ slik at vi har følgende kommutative diagram av moduler og modulavbildninger:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "d"] \arrow[dr, squiggly, "0"'] & Y \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "\theta"] & Z \arrow[r] & 0 \\
& U & &
\end{tikzcd}$$

der $\theta d = 0$. Da eksisterer en unik θ' slik at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "d"] \arrow[dr, squiggly, "0"'] & Y \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "\theta"] & Z \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\theta'"] & 0 \\
& U & &
\end{tikzcd}$$

Bevis. Skal vise at vi for enhver $z \in Z$ kan definere θ' ved å bruke θ på et tilhørende element $y \in Y$. Velger en vilkårlig $z \in Z$. Siden d' er på, kan vi uansett valg av z skrive $z = d'(y)$ for en $y \in Y$. Gitt at det eksisterer y og y' slik at $d'(y) = z = d'(y')$. Da vil $(y' - y) \in \operatorname{Ker} d'$ medføre at $(y' - y) \in \operatorname{Im} d$. Siden $\theta d = 0$ er $\theta(y' - y) = 0$, får vi at $\theta(y') - \theta(y) = 0$, som gir at $\theta(y') = \theta(y)$. Skal nå vise at θ' er en modulavbildning. Husker at alle $z \in Z$ kan skrives som $d'(y)$ for en $y \in Y$, så vi ser først på at $\theta(y) = \theta' d'(y)$ gir at $\lambda\theta(y) = \lambda\theta' d'(y) = \lambda\theta'(d'(y))$. Sammen med $\lambda\theta(y) = \theta(\lambda y) = \theta' d'(\lambda y) = \theta'(d'(\lambda y)) = \theta'(\lambda d'(y))$, gir det at $\lambda\theta'(d'(y)) = \theta'(\lambda d'(y))$. Dette gir oss at $\theta'(\lambda z) = \lambda\theta'(z)$. Ser at $\theta(y + y') = \theta'(d'(y + y')) = \theta'(d'(y) + d'(y'))$ og at $\theta(y + y') = \theta(y) + \theta(y') = \theta'(d'(y)) + \theta'(d'(y'))$. Har dermed at $\theta'(d'(y)+d'(y')) = \theta'(d'(y))+\theta'(d'(y'))$, som vil si at $\theta'(z+z') = \theta'(z)+\theta'(z')$. Dermed har vi at θ' er en veldefinert og unik modul-avbildning når vi definerer $\theta' =: \theta(d')^{-1}$. □

Skal nå definere $e^i(C, A)$ og vise at denne er isomorf med $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$.

Definisjon 3.1.3. Kaller *ekvivalensklassen til alle utvdielsene av A ved C* for $e^i(C, A)$, der i står for antall moduler mellom A og C. For eksempel vil et element η i $e^2(C, A)$ være en eksakt følge på formen: $\eta\colon 0 \to A \to B_1 \to B_2 \to C \to 0$. Og ekvivalensrelasjonen er at vi sier at to utvidelser $\eta\colon 0 \to A \to B \to C \to 0$ og $\eta'\colon 0 \to A \to B' \to C \to 0$ er ekvivalente dersom det finnes et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
\eta\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta'\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proposisjon 3.1.4. *Har at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$ og $e^i(C, A)$ er isomorfe, da det finnes en en-til-en korrespondanse både fra $e^i(C, A)$ til $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$, og fra $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$ til $e^i(C, A)$.*

Bevis. **(skisse)** Skal nå indikere hvordan disse korrespondansene fremkommer. Starter med å se på hvordan en for $i = 1$ kan gå fra $\eta\colon 0 \to A \to B \to C \to 0$ til $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A) = \operatorname{Ker} d_2^* / \operatorname{Im} d_1^*$, der d_2^* og d_1^* fremkommer ved å anvende $\operatorname{Hom}(-, A)$ på den projektive oppløsningen av C; $\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to C$, slik at $0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P_0, A) \xrightarrow{d_1^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P_1, A) \xrightarrow{d_2^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(P_2, A)$. En projektiv oppløsning av C og Comparison Theorem [Rot79] gir følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\theta"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ser av diagrammet at $\theta d_2 = 0$. Dette medfører at $\theta \in \operatorname{Ker} d_2^*$. Lar $\bar\theta = \theta + \operatorname{Im} d_1^* \in \operatorname{Ker} d_2^* / \operatorname{Im} d_1^* \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$. Kan gjøre det samme for en $i \geq 1$. Går da fra $e^i(C, A)$ til $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A) = \operatorname{Ker} d_{i+1}^* / \operatorname{Im} d_i^*$. Ser da på følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[dd] & P_i \arrow[rr, "d_i"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\theta"] & & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dd] & C \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & & P_i / \operatorname{Im} d_{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\bar\theta"] & 0 \arrow[d] & & & & \\
& 0 \arrow[r] & A \arrow[rr] & & B_i \arrow[r] & \cdots & B_1 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ser da at $\theta d_{i+1} = 0$, altså er $\theta \in \operatorname{Ker} d_{i+1}^*$. Så θ kan sees som $\theta + \operatorname{Im} d_i^* \in \operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$.

MERK. Har da at dersom avbildningen $\bar\theta$ er lik for to følger η og η' $\in e^i(C, A)$, så er dette tilstrekkelig for å regne de to følgene som like.

En kan også gå fra $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$ til $e^i(C, A)$. Skal nå kort gå gjennom hvordan dette gjøres, men uten utfyllende bevis. Starter med en $x \in \operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$, der $x = \theta + \operatorname{Im} d_i^*$ og $\theta \in \operatorname{Ker} d_{i+1}^*$ som over. Ser på diagrammet over og har at siden $\operatorname{Coker} d_{i+1} = P_i / \operatorname{Im} d_{i+1} = P_i / \operatorname{Ker} d_i = \operatorname{Im} d_i$, så har vi en avbildning $\lambda_i\colon P_i / \operatorname{Im} d_{i+1} \to P_{i-1}$. Som over vil θ indusere en avbildning θ', og vi får diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_i / \operatorname{Im} d_{i+1} \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "\theta'"] & P_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & C \arrow[r] & 0 \\
& A & & & & &
\end{tikzcd}$$

som ved pushout gir oss den ønskede følgen i $e^i(C, A)$, la oss kalle den η:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & P_i/\operatorname{Im} d_{i+1} \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "\theta'"] & P_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d] & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & P_{i-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Skal nå kort vise hva Baersum og sammensetning av følger er. Vi lar ξ være et element i $e^i(C, A)$ og lar $[\xi]$ betegne ekvivalensklassen. Baersummen av to ekvivalensklasser er da $[\xi] + [\xi'] = [(\nabla(\xi \oplus \xi'))\Delta]$. Det vil si at en legger sammen to følger, for eksempel $\xi\colon 0 \to A \to B \to C \to 0$ og $\xi'\colon 0 \to A \to B' \to C \to 0$ på følgende måte;

$$\begin{tikzcd}
\xi \oplus \xi'\colon & 0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nabla"] & B \oplus B' \arrow[r] \arrow[d] & C \oplus C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E' \arrow[r] & C \oplus C' \arrow[r] & 0 \\
{[\xi] + [\xi']}\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"] & 0
\end{tikzcd}$$

Der vi først har dannet summen $\xi \oplus \xi'\colon 0 \to A \oplus A \to B \oplus B' \to C \oplus C \to 0$. Så tatt en pushout via ∇ og f, også en pullback via Δ og g. Større eksempeler på Baersum kommer senere i oppgaven.

For å gange sammen to elementer i $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(C, A)$ ser vi på de tilhørende følgene i $e^i(C, A)$ og setter disse sammen. For eksempel ser vi at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)\operatorname{Ext}^1_\Lambda(E, C) = \operatorname{Ext}^2_\Lambda(E, A)$ ved å sette sammen de to følgene $0 \to A \to B \to C \to 0 \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ og $0 \to C \to D \to E \to 0 \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(E, C)$ på følgende måte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & D \arrow[r] & E \arrow[r] & 0 \\
& & & C \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Vi vil nå bevise noen proposisjoner som vi i neste seksjon vil bruke for å bevise at Λ Koszul medfører at $E(\Lambda)$ er Koszul.

Proposisjon 3.1.5. *Lar X være en vilkårlig Λ-modul. Da gjelder følgende isomorfi:* $\operatorname{Hom}_\Lambda(X, \Lambda_0) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(X/JX, \Lambda_0)$. *Dersom X er generert i grad 0 har vi også at* $\operatorname{Hom}_\Lambda(X, \Lambda_0) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(X/JX, \Lambda_0) = \operatorname{Hom}_\Lambda(X_0, \Lambda_0)$.

Bevis. Har alltid at følgende følge er eksakt: $0 \to JX \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/JX \to 0$. Anvender den kontravariante venstre-eksakte funktoren $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ og får den langeksakte følgen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(X/JX, \Lambda_0) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Lambda_0) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(JX, \Lambda_0) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Viser nå at π^* er en isomorfi. Vet at π^* er 1-1. For å vise at π^* også er på, kan en se på følgende;

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Lambda(X/JX, \Lambda_0) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Lambda_0) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(JX_{\geq 1}, \Lambda_0) \\ \alpha \arrow[r, mapsto] & \alpha\Pi & \\ & \beta \arrow[r, mapsto] & \beta i \end{tikzcd}$$

Bruker at $JX = \Lambda_{\geq 1}X$, og ser at avbildningene β og i går som følger:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "\beta"] & \\ \Lambda_{\geq 1}X \arrow[ur, hook, "i"] & & \Lambda_0 \end{tikzcd}$$

Siden Λ er generert i grad 0, kan vi skrive $\Lambda/\Lambda_{\geq 1}$ som Λ_0. Siden $\Lambda_{\geq 1} \cdot \Lambda/\Lambda_{\geq 1} = (0)$, har vi da at $\Lambda_{\geq 1} \cdot \Lambda_0 = (0)$. Ser dermed at $\beta(\Lambda_{\geq 1}X) \subseteq \Lambda_{\geq 1}\beta(X) \subseteq \Lambda_{\geq 1}\Lambda_0 = (0)$. Får dermed at $\beta i = 0$. Har dermed at $i^* = 0$ og følgens eksakthet gir oss da at π^* er en isomorfi, det vil si $\mathrm{Hom}_\Lambda(X/JX\Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Lambda_0)$. Dersom X er generert i grad 0 kan vi skrive $X/JX = X/\Lambda_{\geq 1}X = X_0$ for å få den siste likheten $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(X/JX, \Lambda_0) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_0, \Lambda_0)$. $\square$

Lemma 3.1.6. *Lar K_{i+1}, P_i og K_i være vilkårlige Λ-moduler slik at $0 \to K_{i+1} \to P_i \to K_i \to 0$ er en eksakt følge der $K_{i+1} \subseteq JP_i$. Da gjelder følgende isomorfi:* $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(K_i, \Lambda_0)$.

Bevis. Tilsvarende som for Proposisjon 3.1.5 på forrige side. $\square$

Proposisjon 3.1.7. *Anta at vi har en modulavbildning $f\colon X \to \Lambda_0$. Lar $\Pi\colon X \to X/JX$ bare være den naturlige projeksjonen. Da eksisterer en entydig avbildning i slik at vi har følgende kommutative diagram:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & \Lambda_0 \\ & X/JX \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Bevis. Vi bruker Proposisjon 3.1.5 på side 32 og får at

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Lambda(X/JX,\Lambda_0) \arrow[r, "\Pi^*", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\Lambda_0) \\ i \arrow[r, mapsto] & i\Pi \end{tikzcd}$$

Isomorfien gir at det for alle $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\Lambda_0)$ eksisterer en unik $i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X/JX,\Lambda_0)$ slik at $i\Pi = f$. Dermed vet vi at det eksisterer en entydig i slik at diagrammet kommuterer. $\square$

Definisjon 3.1.8. Definerer $\mathcal{E}(M)$ ved å lage en funktor

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{Ext}^i_\Lambda(-,\Lambda_0)\colon \qquad \mathrm{Gr}\,\Lambda \longrightarrow \mathrm{Gr}\,E(\Lambda)$$

$$M \longmapsto \mathcal{E}(M) = \bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

der $\mathrm{Gr}\,\Lambda$ står for kategorien av graderte moduler med grad 0-avbildninger og M er en gradert modul.

Proposisjon 3.1.9. *Lar $E(\Lambda)$ være Yoneda-algebraen til Λ, som definert i starten av seksjonen og lar M være et vilkårlig element i den fulle underkategorien av lineære Λ-moduler, $\mathcal{L}(\Lambda)$. Da er $\mathcal{E}(M)$ generert i grad 0 som venstremodul over $E(\Lambda)$.*

Bevis. Merker oss først at M er generert i grad 0, siden M er lineær. Og vi definerer $J = \Lambda_{\geq 1}$. Får da at $JM = M_{\geq 1}$ (fordi $\Lambda_i \times A_j \to A_{i+j}$). Får videre at $M/\Lambda_{\geq 1}M = M/M_{\geq 1} = M_0$.

Skal nå vise at $\mathcal{E}(M)$ er generert i grad 0 som venstremodul over $E(\Lambda)$ ved å komme frem til to eksakte sekvenser:

$$0 \to \Lambda_0 \to E \to \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \to P_{i-2} \to P_{i-3} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0 \quad \in \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

og

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E' \arrow[dr] & & E'' \arrow[r] & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ & & & P_{i-1}/JP_{i-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & \end{tikzcd}$$

der $P_{i-1}/JP_{i-1} \in \mathrm{add}\,\Lambda_0$ gir at når vi legger til en Z' slik at $P_{i-1}/JP_{i-1} \oplus Z' = \Lambda_0^n$ så kan vi se på $0 \to \Lambda_0 \to E' \to P_{i-1}/JP_{i-1} \to 0$ som et n-tuppel i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$ og $0 \to P_{i-1}/JP_{i-1} \to E'' \to P_{i-3} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$ som et n-tuppel i $\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M,\Lambda_0)$, for så å vise at sammensetningen av disse to følgene tilsvarer den øverste følgen. Hvordan dette blir for $i = 1$ er spesielt og tas for seg. Skal altså vise at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\,\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M,\Lambda_0) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0)$, som ved induksjon gir at $[\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^i\,\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0)$.

Bruker følgende notasjon for den lineære graderte projektive oppløsningen av M, $\mathbb{P}$, med tilhørende syzygyer.

$$\mathbb{P}:\quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & P_i \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & P_{i-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ & & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[dr] & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \Omega^1_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

Fra $\mathbb{P}$ får vi følgende eksakte sekvens:

$$0 \longrightarrow \Omega^i_\Lambda(M) \xrightarrow{\mu_i} P_{i-1} \xrightarrow{\pi_i} \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \longrightarrow 0$$

Velger en vilkårlig funksjon $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M), \Lambda_0)$, fordi $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M), \Lambda_0) \cong \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Viser først at dette er en isomorfi. Lar $\Omega^1_\Lambda(M) = M'$ og ser på følgende korteksakte sekvens: $0 \to M' \to P_0 \to M \to 0$. Anvender den kontravariante funktoren $\mathrm{Hom}(-, \Lambda_0)$ på sekvensen og får følgende eksakte sekvens:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \xrightarrow{i*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, \Lambda_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M', \Lambda_0) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P_0, \Lambda_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M', \Lambda_0) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, \Lambda_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(P_0, \Lambda_0) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Vi har fra Proposisjon 2.1.3 på side 22 at en lineær oppløsning også er minimal. Så siden $\mathbb{P}$ er en lineær oppløsing av M, er den satt sammen av projektive dekker. Dermed er $M' \subseteq JP_0$ og vi kan bruke Lemma 3.1.6 på side 33 og få at $i*\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, \Lambda_0)$ er en isomorfi. Har videre at $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(P, A) = 0 \;\forall\; A$ når P er projektiv. Får dermed følgende følge:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, \Lambda_0) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_\Lambda(M', \Lambda_0) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M', \Lambda_0) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, \Lambda_0) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Ser at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(M', \Lambda_0) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^1_\Lambda(M), \Lambda_0)$. Bruker dimensjonsskift og får at $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}_\Lambda(M), \Lambda_0)$. Gjør tilsvarende som over, men med den eksakte følgen $0 \to \Omega^i_\Lambda(M) \to P_i \to \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \to 0$, som dermed gir oss at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}_\Lambda(M), \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M), \Lambda_0)$. Disse to isomorfiene utgjør tilsammen den ønskede isomorfien $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(M), \Lambda_0) \cong \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$.

Lager følgende diagram som inneholder g:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, equal] & P_{i-1} \arrow[r, "\pi_i"] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] & 0 \\
 & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, hook, "\gamma"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "g"'] & JP_{i-1} \arrow[u, hook, "n"'] \arrow[d, "q"] & & \\
 & \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d] & JP_{i-1}/J^2P_{i-1} \arrow[l, dotted, bend left, "\omega"] & & \\
 & \Lambda_0 & & &
\end{tikzcd}$$

I diagrammet er γ bare μ_i restringert. Siden M er en lineær modul, følger det fra definisjonen at P_i er en endeliggenerert gradert projektiv Λ-modul $\forall i$. Har at $\pi_i\colon P_{i-1} \to \Omega^{i-1}_\Lambda(M)$ er et projektivt gradert dekke, og det følger da fra definisjonen av et projektivt gradert dekke at $\mathrm{Ker}\,\pi_i \subseteq JP_{i-1}$. Eksakthet gir at $\mathrm{Ker}\,\pi_i = \mathrm{Im}\,\mu_i$. Vi har dermed at $\mathrm{Im}\,\mu_i \subseteq JP_{i-1}$ som medfører at vi kan sette på avbildningen $n\colon JP_{i-1} \hookrightarrow P_{i-1}$ og få at diagrammet kommuterer.

Siden vi har $g\colon \Omega^i_\Lambda(M) \to \Lambda_0$, får vi ved å bruke Proposisjon 3.1.7 på side 33 at vi har avbildninger:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & \Lambda_0 \\
 & \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

slik at diagrammet kommuterer.

Har definert $\gamma' := \Lambda/I \otimes_\Lambda \gamma$ på bakgrunn av at $R/I \otimes_R M \cong M/IM$. Skal nå se på hvordan vi har fått en funksjon ω slik at $\omega\gamma' = \mathrm{Id}_{\Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M)}$. Både $\Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M)$ og JP_{i-1}/J^2P_{i-1} er generert i èn grad og kan dermed sees på som Λ_0-moduler. Siden Λ_0 er semisimpel har vi at alle eksakte sekvenser $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ i $\mathrm{Mod}\,\Lambda_0$ er spliteksakte, det vil si at $\exists f'\colon B \to A$ slik at $f'f = 1_A$. Så dersom vi viser at γ' er mono, vet vi at ω eksisterer. Skal nå vise at γ' er mono. Velger en vilkårlig $x \in \mathrm{Ker}\,\gamma'$. Ønsker å vise at $x = 0$, for det vil medføre at γ' er en monomorfi. Ser på denne delen av diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, hook, "\gamma"] \arrow[d, "p"] & JP_{i-1} \arrow[d, "q"] \\
\Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, "\gamma'"] & JP_{i-1}/J^2P_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Siden p er en på avbildning kan vi trekke x tilbake til $\Omega^i_\Lambda(M)$, slik at vi har at $x = \bar{x'} = p(x')$, for $x' \in \Omega^i_\Lambda(M)$. Vår antagelse er at $\gamma'(x) = 0$, som er nødvendig og tilstrekkelig for at $\gamma'(p(x')) = 0$ i JP_{i-1}/J^2P_{i-1}. Det vil si at $q(\gamma(x')) = 0$, som er nødvendig og tilstrekkelig for at $\gamma(x') \in J^2P_{i-1}$. Har at hvis $x' \in J\Omega^i_\Lambda(M)$, da er $x = 0$. Så hvis vi klarer å vise at $x' \in \Omega^i_\Lambda(M) \cap J^2P_{i-1}$ medfører at $x' \in J\Omega^i_\Lambda(M)$ er vi fremme.

Skal nå vise at $x' \in \Omega^i_\Lambda(M) \cap J^2P_{i-1}$ medfører at $x' \in J\Omega^i_\Lambda(M)$. Har selvfølgelig at $J\Omega^i_\Lambda(M) \subseteq \Omega^i_\Lambda(M)$. Videre har vi fra diagrammet over at $\Omega^i_\Lambda(M) \subseteq JP_{i-1}$, som medfører at $J\Omega^i_\Lambda(M) \subseteq J^2P_{i-1}$. Har dermed at $J\Omega^i_\Lambda(M) \subseteq J^2P_{i-1} \cap \Omega^i_\Lambda(M)$. Velger et element $x \in \Omega^i_\Lambda(M) \cap J^2P_{i-1}$ som er homogent av grad j. Har at $j \geq i+1$. Lar $\bar{x} = x + J\Omega^i_\Lambda(M) \in \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M)$. Antar at $\bar{x} \neq 0$, da vil x være en generator for $\Omega^i_\Lambda(M)$. Ser på en del av den projektive oppløsningen av M:

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[rr, "d_i"] \arrow[dr] & & P_{i-1} \\
& \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

der P_i er generert i grad i. Har derfor at det i P_i eksisterer en x' i grad i slik at $d_i(x') = x$. Har her at x' er av grad i og d_i er en homomorfi av grad 0. Dermed må x være av grad i, men vi har valgt x som et homogent element av grad j. Så da må $i = j \geq i+1$. Dette er umulig. Så dermed har vi at $\bar{x} = 0$, altså må $x \in J\Omega^i_\Lambda(M)$.

Benytter diagrammet over til å lage følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, hook, "l"] \arrow[dddd, bend right=60, "g"'] & P_{i-1} \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, equal, "m"] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & JP_{i-1} \arrow[r, hook, "n"] \arrow[d, "q"] & P_{i-1} \arrow[r, "n'"] \arrow[ddd, "g'"] & P_{i-1}/JP_{i-1} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
& JP_{i-1}/J^2P_{i-1} \arrow[d, "\omega"] & & & \\
& \Omega^i_\Lambda(M)/J\Omega^i_\Lambda(M) \arrow[d, "\bar{g}"] & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[r] & P_{i-1}/JP_{i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Der E kommer fra en pushout via $\bar{g}\omega q$ og n. Har at $n'm\mu_i = n'nl = 0$, siden $n'n = 0$, og kan dermed bruke Proposisjon 3.1.2 på side 30. Har dermed at f eksisterer.

Kaller P_{i-1}/JP_{i-1} for Z. Og har dermed at $Z \in \operatorname{add}\Lambda_0$.
Diagrammet over gir følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\eta\colon & 0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\Theta\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Anvender avbildningen f og deler av den projektive oppløsningen av M, tar pushout og får:

$$\begin{tikzcd}
\eta'\colon & 0 \arrow[r] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \Omega^{i-2}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\Psi_2\colon & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & \Omega^{i-2}_\Lambda(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tar Yoneda-produktet av Ψ_2 og deler av den projektive oppløsningen av M, som gir:

$$\begin{tikzcd}
\Theta'\colon & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & E_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & \Omega^{i-2}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Ser at Θ' er et element i $\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z)$. Tar Yoneda-produktet av Θ og Θ' og får:

$$\begin{tikzcd}
\eta_x\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[r] & P_{i-3} \arrow[r] & \ldots P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Ser at $\eta_x \in \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Tar igjen utgangspunkt i diagrammet som består av η, θ og avbildningene mellom dem. Men skal nå ta en pushout fra g, og få et element i $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$, ved å ta Yoneda-produktet mellom den nye følgen og deler av det projektive dekket av M. Starter altså med:

$$
\begin{tikzcd}
\eta\colon & 0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P_{i-1} \arrow[r] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] & 0 \\
& & \Lambda_0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Tar pushout og får:

$$
\begin{tikzcd}
\eta\colon & 0 \arrow[r] & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\Psi_1\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Tar Yoneda-produktet av Ψ_1 og deler av den projektive oppløsningen av M, som gir $\eta_y \in \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$:

$$
\begin{tikzcd}
\eta_y\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Så er alt klart for å sjekke om η_x og η_y er like. Bruker avbildningene vi har funnet til å lage følgende to diagrammer:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}\colon & \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r] & P_i \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & P_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd, "g'"] & & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[ddd, "f'"] & P_{i-3} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & M \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
& & & & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddl, "g"] & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddd, "f"] & & & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & \\
\eta_x\colon & & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[r] & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
& & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}\colon & \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r] & P_i \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & P_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd, "g''"] & & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & P_{i-3} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & M \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
 & & & & \Omega^i_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddl, "g"] & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & & & & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & \\
\eta_y\colon & & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-2} \arrow[r] & P_{i-3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & & & & \Omega^{i-1}_\Lambda(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
 & & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Har dermed fra merknaden i beviset av Proposisjon 3.1.4 på side 30 at η_x og η_y er like. Husker at η_x var Yoneda-produktet av Θ og Θ', så har dermed at $\eta_y = \Theta \cdot \Theta'$, der $\eta_y \in \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$, $\Theta \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)$ og $\Theta' \in \operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z)$. Så vi har nå vist at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0) \operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z)$ for $i \geq 2$.

Skal nå vise at dette også går for $i = 1$. Skal altså vise at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0) \operatorname{Hom}_\Lambda(M, Z)$. Lager på samme måte som tidligere følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda(M) \arrow[rr, "\mu_0"] \arrow[dl, equal] \arrow[ddd] & & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[ddd] & M \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda(M) \arrow[rr, hook, "\gamma"] \arrow[d] & & JP_0 \arrow[ur, hook] \arrow[d, "q"] & & & \\
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda(M)/J\Omega_\Lambda(M) \arrow[rr, "\gamma'"] \arrow[dr, "\bar{g}"] & & JP_0/J^2P_0 \arrow[ll, dotted, bend left, "\omega"] & & & \\
 & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Som vi skriver om, for så å ta en pushout via g og μ_0. Vi skriver også på en eksakt følge: $0 \to JP_0 \to P_0 \to P_0/JP_0 \to 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda(M) \arrow[rr, "\mu_0"] \arrow[d, equal] \arrow[ddddd, bend right=60, "g"'] & & P_0 \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[ddddd] & & M \arrow[r] \arrow[ddddd, equal] & 0 \\
& \Omega_\Lambda(M) \arrow[d, hook, "\gamma"] & & & & & \\
0 \arrow[r] & JP_0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "q"] & P_0 \arrow[rr] & & P_0/JP_0 \arrow[rr] & & 0 \\
& JP_0/J^2P_0 \arrow[d, "\omega"] & & & & & \\
& \Omega_\Lambda(M)/J\Omega_\Lambda(M) \arrow[d, "\bar{g}"] & & & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E \arrow[rr] & & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tar så pushout via $\bar{g}\omega q$ og i.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda(M) \arrow[rrr, "\mu_0"] \arrow[d, equal] \arrow[ddddd, bend right=60, "g"'] & & & P_0 \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[ddl, equal] \arrow[ddddd] & & M \arrow[r] \arrow[ddl] \arrow[ddddd, equal] & 0 & \\
& \Omega_\Lambda(M) \arrow[d, hook, "\gamma"] & & & & & & & \\
0 \arrow[r] & JP_0 \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[d, "q"] \arrow[drr] & & P_0 \arrow[rr] \arrow[drr] & & P_0/JP_0 \arrow[rr] \arrow[drr, equal] & & 0 & \\
& JP_0/J^2P_0 \arrow[d, "\omega"] & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E' \arrow[rr] & & P_0/JP_0 \arrow[r] & 0 \\
& \Omega_\Lambda(M)/J\Omega_\Lambda(M) \arrow[d, "\bar{g}"] & & & & & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rrr] \arrow[uurr, equal] & & & E \arrow[rr] \arrow[uur, dotted, "\exists! f'"] & & M \arrow[r] \arrow[uur, "\exists f"'] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Der det eksisterer en unik f' siden $0 \to \Lambda_0 \to E \to M \to 0$ er en pushout, og vi har avbildninger fra både P_0 og Λ_0 til E'. Siden vi nå har to eksakte rader, med avbildniger fra Λ_0 til Λ_0 og f' fra E til E' slik at diagrammet kommuterer eksiterer det også en avbildning $f\colon M \to P_0/JP_0$.

Siden $P_0/JP_0 = Z$ har vi nå fått:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[u, equal] & E \arrow[r] \arrow[u, dotted] & M \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0
\end{tikzcd}$$

som er det vi ønsket.

Vi har dermed at $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z)$, $\forall i \geq 1$. Skal nå gå fra at $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z)$, til å se at $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$.

At $Z \in \operatorname{add} \Lambda_0$ gir at $\exists\, Z'$ slik at $Z \oplus Z' = \Lambda_0^n$. Ser derfor på de to følgene

$$\eta_z: \quad \begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

og

$$\eta_{z\oplus z'}: \quad \begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E_0 \oplus Z' \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_1 \oplus Z' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & Z \oplus Z' \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Vi har her startet med de eksakte følgene:

$$0 \longrightarrow \Lambda_0 \xrightarrow{g} E_0 \xrightarrow{f} Z \longrightarrow 0 \qquad \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)$$

og

$$0 \to Z \xrightarrow{f'} E_1 \xrightarrow{f''} \cdots \to E_{i-1} \to M \to 0 \qquad \in \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z)$$

Legger til Z' på godt utvalgte steder og får følgende eksakte sekvenser, hvor Yoneda-produktet gir $\eta_{z\oplus z'}$:

$$0 \longrightarrow \Lambda_0 \xrightarrow{g} E_0 \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_{Z'} \end{pmatrix}} Z \oplus Z' \longrightarrow 0$$

og

$$0 \to Z \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & 1_{Z'} \end{pmatrix}} E_1 \oplus Z' \xrightarrow{(f'\ 0)} E_2 \to \cdots \to E_{i-1} \to M \to 0 \in \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z \oplus Z')$$

Ønsker å vise at η_z og $\eta_{z\oplus z'}$ er like, altså at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(Z \oplus Z', \Lambda_0) \cdot \mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z \oplus Z')$. Kontrollerer derfor at følgende diagram kommuterer:

$$
\begin{tikzcd}
\eta_z\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & E_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\left(\begin{smallmatrix} 1_{E_0} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] & & E_1 \arrow[r] \arrow[dd, "\left(\begin{smallmatrix} 1_{E_1} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] & E_2 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \arrow[r] & E_{i-1} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & & 0 \arrow[r] & Z \arrow[ur] \arrow[r] & 0 & & & & & \\
\eta_{z\oplus z'}\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E_0 \oplus Z' \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_{z'} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr] & & E_1 \oplus Z' \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & 0 \arrow[r] & Z \oplus Z' \arrow[ur] \arrow[r] & 0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Anvender Comparison Theorem [Rot79] og Proposisjon 3.1.2 på side 30 til å lage følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
& P_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dd] & P_{i-1} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\theta"] & & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[dd] & P_{i-3} \arrow[r] \arrow[dd] & P_{i-4} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[dd] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & & P_{i-1}/\operatorname{Im} d_i \arrow[ur] \arrow[dl, dotted, "\bar{\theta}"'] \arrow[ddl, dotted, "\bar{\theta}"] & & & & & & & \\
\eta_z\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & E_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta_{z\oplus z'}\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E_0 \oplus Z' \arrow[r] & E_1 \oplus Z' \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Vi ser at diagrammet kommuterer, altså at $\bar{\theta}$ går ned på Λ_0 i både η_z og $\eta_{z\oplus z'}$ og har da fra merknaden i beviset av Proposisjon 3.1.4 på side 30 at de to følgene er like. Vi har dermed at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z \oplus Z', \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z \oplus Z')$. Siden vi nå har at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z \oplus Z', \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z \oplus Z') \subseteq \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$, har vi kommet frem til at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, Z) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z \oplus Z', \Lambda_0)\cdot\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, Z \oplus Z') = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$. Der den siste likheten er at vi setter Λ_0^n inn for $Z \oplus Z'$.

Har at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$. Ønsker å vise at dette igjen er likt med $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Har alltid at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0) \subseteq \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$, så må nå vise at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0^n) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Lar $\gamma_j \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)$ og $\eta_j \in \operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$. Så et element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$ vil være på formen $\sum_{j=1}^t \gamma_j \cdot \eta_j$. Men siden $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$ er lukket under Baersum er det nok å vise $\gamma_j \cdot \eta_j \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$, $\forall j = 1, \cdots, t$. Så vi lar $\psi = \gamma_j \cdot \eta_j$ og skal nå vise at denne er et element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$:

$$
\begin{tikzcd}
\psi\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & F_0 \arrow[dr, "k"] & & F_1 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & 0 \arrow[r] & \Lambda_0^n \arrow[ur, "l"] \arrow[r] & 0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Lager n følger i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$ ved å ta en pullback via λ_j og k, der λ_j er den j-te inklusjonen. Lager n følger i $\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$ ved å ta en pushout via l og p_j, der p_j er den j-te projeksjonen:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "k'_j"] \arrow[d, equal] & F_{0j} \arrow[r] \arrow[d, "a_j"] & \Lambda_0 \arrow[dr] \arrow[dd, hook, "\lambda_j"] & & & & & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "b"] & F_0 \arrow[dr, "k"] & & 0 & F_1 \arrow[r] \arrow[ddd] & F_2 \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & \cdots \arrow[r] & F_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
& & & \Lambda_0^n \arrow[urr, "l"] \arrow[dr] \arrow[dd, "p_j"] & & & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & & \\
& & & \Lambda_0 \arrow[rr] & & F_{1j} \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & 0 \arrow[ur] & & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Tar Yoneda-produktene av to og to av de nye følgene og får n elementer i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$; θ_j:

$$
\theta_j\colon \quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & F_{0j} \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_{1j} \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & \cdots F_{i-1} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & \Lambda_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Tar den direkte summen av de n følgene θ_j, $j = 1, \cdots, n$, som vi skriver som $\theta = \oplus_{j=1}^n \theta_j$, og får et element i $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M^n, \Lambda_0^n)$:

$$
\theta\colon \quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0^n \arrow[r] & \oplus_{j=1}^n F_{0j} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \oplus_{j=1}^n F_{1j} \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_{i-1} \arrow[r] & M^n \arrow[r] & 0 \\
& & & \Lambda_0^n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Tar Baersummen av $\{\theta_j\}_{j=1}^n$. Dermed får vi vist at vi kan gå mellom $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)^n$ og $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0)$ når $i = 2$. Ser da lett at det også er greit for $i \geq 2$, ved å bytte ut M med $\Omega^{i-2}_\Lambda(M)$.

Når $i = 2$, får vi at η_j blir som følger: $0 \to \Lambda_0^n \xrightarrow{l} F_1 \xrightarrow{l'} M \to 0$. Og en pushout via l og p_j, der p_j er den j-te projeksjonen som gir oss n følger i

$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0$ blir som følger:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0^n \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p_j"] & F_1 \arrow[r, "l'"] \arrow[d, "t_j"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0^n \arrow[r, "l_j"] & F_{1j} \arrow[r, "l'_j"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Går fra $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, \Lambda_0)^n$ til $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, \Lambda_0)$

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{j=1}^n \theta_j\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0^n \arrow[r, "\bar{k}'"] \arrow[ddd, "\nabla"] & \oplus F_{0j} \arrow[rrrr] \arrow[drr] \arrow[ddd, "\nabla\bar{a}"] & & & & \oplus F_{1j} \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & M^n \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
& & & & & \Lambda_0^n \arrow[urr] \arrow[dr] \arrow[ddd, equal] & & & & \\
& & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & \\
& 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "b"] \arrow[ddd, equal] & F_0 \arrow[drr] \arrow[ddd, equal] & & & & \oplus F_{1j} \arrow[r, "\bar{l}'"] & M^n \arrow[r] & 0 \\
& & & & & \Lambda_0^n \arrow[urr, "\bar{l}"] \arrow[dr] \arrow[ddd, equal] & & & & \\
& & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & \\
\sum_{j=1}^n \theta_j\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & F_0 \arrow[drr] & & & & F_1 \arrow[r, "l'"] \arrow[uuu, "\bar{t}"] & M \arrow[r] \arrow[uuu, "\Delta"'] & 0 \\
& & & & & \Lambda_0^n \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & \\
& & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

der $\nabla\colon (\lambda_j)_{j=1}^n \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j$ og $\Delta\colon m \mapsto (m, m, \cdots, m)$. De resterende avbildningene er definert som følger; $\bar{k}' = \begin{pmatrix} k_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n' \end{pmatrix}$, $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, $\bar{l} = \begin{pmatrix} l_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_n \end{pmatrix}$, $\bar{l}' = \begin{pmatrix} l_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_n' \end{pmatrix}$, $\bar{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$. Har startet diagrammet med en pushout via $\bar{k}'$ og ∇ og brukt at parallelle linjer i en pushout har isomorfe kokjerner for å kunne ta Yoneda-produktet med en passende følge. Får at diagrammet kommuterer og at følgen andre rekke starter med er

$\gamma_j\colon 0 \to \Lambda_0 \xrightarrow{b} F_0 \to \Lambda_0^n \to 0$, siden vi vet at $a_j k'_j = b$, som medfører at $b\nabla = \nabla\bar{a}\bar{k}'$, fra konstruksjonen av $\bar{a}$ og $\bar{k}'$. Har videre tatt en pullback via l' og Δ og her utnyttet at parallelle linjer i en pullback har isomorfe kjerner for å få resten av følgen. Diagrammet kommuterer med en pullback fra l' og Δ, slik at vi i nederste rekke får følgen $\eta_j\colon \Lambda_0^n \to F_1 \xrightarrow{l'} M \to 0$. Det er fordi vi får at $\bar{l}'\bar{t} = \Delta l'$ fra likheten $l'_j t_j = l'$ og konstruksjonen av $\bar{l}'$ og $\bar{t}$. Baersummen gir oss dermed tilbake følgen vi startet med, $\psi = \gamma_j\eta_j$, som er det viktige resultatet vi får fra diagrammet.Vi har dermed at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0,)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0^n) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0)$.

Så dermed har vi at:

$$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M, \Lambda_0), \forall i \geq 2$$

Skal nå vise at dette også stemmer for $i = 1$. Det vil si at vi har at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)\cdot\operatorname{Hom}_\Lambda(M, Z)$ og skal vise at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\cdot\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Ikke helt ulikt som for $i \geq 2$, ser vi på følgende:

$$\begin{tikzcd}
\eta\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 & \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) \\
\theta\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1_{E'} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1_Z \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] & 0 & \\
\theta'\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & E' \oplus Z' \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1_{Z'} \end{smallmatrix}\right)"] & Z \oplus Z' \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

der $Z \oplus Z' = \Lambda_0^n$ og vi definerer $E' \oplus Z' = E^+$. Vi sier også at $\tilde{\alpha} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ og at $\tilde{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1_{Z'} \end{smallmatrix}\right)$. Vi ser at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$ fra følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tilde{f}'=\left(\begin{smallmatrix} f' \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}=\left(\begin{smallmatrix} f \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & E^+ \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \Lambda_0^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

For vi har da at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, Z) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$, som medfører at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, Z) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$, siden $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(Z, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, Z) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0)$ og $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0)$.

Vi har at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$ og ønsker å vise at dette igjen er lik $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Siden $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda_0)$, gjenstår det å vise at $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n) \subseteq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0)$. Lar $\gamma_j \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)$ og $\eta_j \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$, så et element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0^n)$ vil være på formen $\sum_{i=1}^t \gamma_j \cdot \eta_j$.

Siden $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0\Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$ er lukket under Baersum, er det nok å vise at $\gamma_j\cdot\eta_j \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0), \forall j = 1,\cdots,t$ for å vise at $\sum_{i=1}^t \gamma_j\cdot\eta_j \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$. Vi lar $\gamma_j\cdot\eta_j = \theta'\tilde{f}$.

$$
\begin{tikzcd}
\theta'\tilde{f}\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\tilde{f}'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & 0 \\
\theta'\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E^+ \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \Lambda_0^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

der vi ser at $\theta'\tilde{f} = \eta$. Skal nå finne $\theta'_i\tilde{f}_i$. Finner først θ'_i, ved å la λ_i være den i-te inklusjonen fra Λ_0 til Λ_0^n. Tar en pullback fra λ_i og $\tilde{\beta}$ for å få θ'_i

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & M \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dd, bend left=60, "\tilde{f}_i"] & \\
 & & & & \Lambda_0^n \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
\theta'_i\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "r'_i"] \arrow[d, equal] & E_i^2 \arrow[r, "r_i"] \arrow[d, "s_i"] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "\lambda_i"] & 0 \\
\theta'\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & E^+ \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \Lambda_0^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Har definert $\tilde{f}_i$ til å være $\pi_i\tilde{f}$, der π_i er den i-te projeksjonen fra Λ_0^n til Λ_0. Tar så en pullback via r_i og $\tilde{f}_i$ for å få $\theta'_i\tilde{f}_i$.

$$
\begin{tikzcd}
\theta'_i\tilde{f}_i\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[d, "\tilde{f}'_i"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_i"] & 0 \\
\theta'_i\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "r'_i"] & E_i^2 \arrow[r, "r_i"] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Tar den direkte summen av de n følgene $\theta'_i\tilde{f}_i$, $i = 1,\cdots n$ og får et element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M^n,\Lambda_0^n)$. Tar så Baersummen av dette resultatet og håper å ende opp med elementet vi startet med i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,\Lambda_0)$ som var $\theta'\tilde{f}\colon 0\to\Lambda_0\to E\to M\to 0$. Vi starter med å se på følgende kommuterende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
\oplus_{i=1}^n\theta'_i\tilde{f}_i\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0^n \arrow[r, "(\delta_i)"] \arrow[d, equal] & \oplus_{i=1}^n E_i \arrow[r, "(\gamma_i)"] \arrow[d, "(\tilde{f}'_i)"] & M^n \arrow[r] \arrow[d, "(\tilde{f}_i)"] & 0 \\
\oplus_{i=1}^n\theta'_i\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0^n \arrow[r, "(r'_i)"] \arrow[d, "\nabla"] & \oplus_{i=1}^n E_i^2 \arrow[r, "(r_i)"] \arrow[d, "\nabla(s_i)"] & \Lambda_0^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\theta'\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & E^+ \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \Lambda_0^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

der $\nabla\colon (\lambda_j)_{j=1}^n \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j$ og (r_i) er definert som $(r_i) =: \begin{pmatrix} r_1 & & & 0 \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_n \end{pmatrix}$ og tilsvarende for (γ_i), $(\tilde{f}_i')$, $(\tilde{f}_i)$, (r_i'), (δ_i) og (s_i). Vi vet at diagrammet kommuterer siden vi fra før har at $\tilde{f}_i'\delta_i = r_i'$, $\tilde{f}_i\gamma_i = r_i\tilde{f}_i'$, $s_i r_i' = \tilde{\alpha}$. Vi ser at ruten nederst til høyre kommuterer ved å se på

$$\begin{tikzcd}
e_i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (r_i(e_i)) \arrow[d, equal] \\
\sum_{j=1}^n s_i(e_i) & (r_i(e_i))
\end{tikzcd}$$

der vi legger merke til at $(r_1(e_1), r_2(e_2), \cdots, r_n(e_n)) = \tilde{\beta}s_1(e_1) + \tilde{\beta}s_2(e_2) + \cdots + \tilde{\beta}s_n(e_n)$, der $\tilde{\beta}s_1(e_1) = (r_1(e_1), 0, \cdots, 0)$ og så videre.

Vi starter med $\oplus_{i=1}^n \theta_i'\tilde{f}_i$ og tar med avbildningene fra den ned til θ'. Vi lager så følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
(3)\colon & 0 \arrow[rr] & & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & & E^y \arrow[rr] \arrow[dd] & & M \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 & \\
\oplus_{i=1}^n \theta_i'\tilde{f}_i\colon & & 0 \arrow[rr] & & \Lambda_0^n \arrow[rr, "(\delta_i)"] \arrow[dl, "\nabla"'] \arrow[dd, "\nabla"] & & \oplus_{i=1}^n E_i \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & M^n \arrow[rr] \arrow[dl, equal, "\Delta"'] \arrow[dd] & & 0 \\
(2)\colon & 0 \arrow[rr] & & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E^x \arrow[rr, "a"] & & M \arrow[rr] & & 0 & \\
\theta'\colon & & 0 \arrow[rr] & & \Lambda_0 \arrow[rr] & & E^+ \arrow[rr] & & \Lambda_0^n \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

ved å først lage (2) ved å ta en pushout via (δ_i) og ∇, også bruke at parallelle piler har isomorfe kokjerner i en pushout. Lager så (3) ved å ta en pullback via a og Δ, også bruke at parallelle piler har isomorfe kjerner i en pullback. Vi har nå at Baersummen er følgen (3), som vi ønsker at skal være lik $\theta'\tilde{f}$, som vil si at vi ønsker at E^y skal være lik E. Vi legger merke til at vi kan bruke avbildningen $\tilde{f}$ fra M i følge (3) til Λ_0^n i følgen θ'.

$$\begin{tikzcd}
& & & & M \arrow[d, "\tilde{f}"] & \\
\theta'\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & E^+ \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \Lambda_0^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi kan ta en pullback via $\tilde{\beta}$ og $\tilde{f}$, og slik få følgen (3). Men det var nettopp slik vi definerte $\theta'\tilde{f}$, så vi får følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
(3)\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & 0 \\
\theta'\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & E^+ \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \Lambda_0^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Baersummen er dermed følgen vi startet med, $\theta'\tilde{f}$. Og dermed har vi at:

$$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(M,\Lambda_0), \forall i \geq 1$$

Som gir at:

$$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0) = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\operatorname{Ext}^{i-2}_\Lambda(M,\Lambda_0), \forall i \geq 1$$

Fortsetter sånn og får at:

$$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0) = [\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^{i-1}\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

$$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0) = [\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^{i}\operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0), \forall i \geq 1$$

Som viser at $\mathcal{E}(M)$ som venstremodul over $E(\Lambda)$ er generert i grad 0, da $\mathcal{E}(M)$ genereres av $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$, som er grad 0-delen av $\mathcal{E}(M)$. □

Proposisjon 3.1.10. *Dersom vi har en eksakt sekvens:* $0 \to A \to B \to C \to 0 \in \operatorname{Gr}(\Lambda)$*, der* A*,* B *og* C *er generert i grad 0, og* $A, B \in \mathcal{L}(\Lambda)$*, så er også* $C \in \mathcal{L}(\Lambda)$*, der* $\mathcal{L}(\Lambda)$ *står for den fulle underkategorien av lineære* Λ*-moduler.*

Bevis. I grad 0 får vi følgende sekvens

$$\eta_0: \qquad 0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

som er eksakt over Λ_0. Har Λ_0 semisimpel, som medfører at C_0 er projektiv, som igjen medfører at $B_0 \cong A_0 \oplus C_0$. Anvender Punkt 7 på side 5 på vår korteksakte følge $0 \to A \to B \to C \to 0$, og får:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \oplus Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Der $P_0 \to A \to 0$ er et projektivt dekke med kjernen A', og tilsvarende for B og C. At A og $B \in \mathcal{L}(\Lambda)$ gir oss at A' og B' er generert i grad 1. Generatorsettet i C' kan hentes fra B' siden vi har en på avbildning fra B' til C'. Gjentar dette for den eksakte sekvensen $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ og så videre, får da at alle syzygyene er generert i riktig grad og dermed har vi at $C \in \mathcal{L}(\Lambda)$. □

3.2 Dersom Λ er Koszul er også $E(\Lambda)$ Koszul

Vi skal nå vise at dersom en splitt basisk endelig 1-generert k-algebra Λ er Koszul, da er også Yoneda-algebraen til Λ Koszul.

Teorem 3.2.1. *At Λ er Koszul medfører at Yoneda-algebraen til Λ, $E(\Lambda)$, også er Koszul.*

Bevis. Lar $E(\Lambda)_0$ være grad 0 delen av $E(\Lambda)$, altså er $E(\Lambda)_0 = \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Det vi skal bevise er at dersom Λ_0 har en lineær, gradert, projektiv oppløsning, så har $E(\Lambda)_0$ en lineær, gradert, projektiv oppløsning.

Benytter igjen funktoren fra Definisjon 3.1.8 på side 34,

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i\geq 0} \operatorname{Ext}^i_\Lambda(-,\Lambda_0)\colon \qquad \begin{aligned} \operatorname{Gr}\Lambda &\longrightarrow \operatorname{Gr} E(\Lambda) \\ M &\longmapsto \mathcal{E}(M) = \bigoplus_{i\geq 0} \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0) \end{aligned}$$

der $\operatorname{Gr}\Lambda$ står for kategorien av graderte moduler med grad 0-avbildninger. Lar $\mathcal{L}(\Lambda)$ være den fulle underkategorien av lineære Λ-moduler. Velger en vilkårlig modul $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Vet dermed at M er generert i grad 0, siden M er lineær. Definerer $J = \Lambda_{\geq 1}$. Får da at $JM = M_{\geq 1}$ (fordi $\Lambda_i \times A_j \to A_{i+j}$). Får videre at $M/\Lambda_{\geq 1}M = M/M_{\geq 1} = M_0$. Kan lage følgende sekvens $\eta\colon 0 \to M_{\geq 1} \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\Pi} M_0 \to 0$. Ser lett at denne er eksakt da $M_{\geq 1} \subseteq M$ medfører at i er en til en. Har videre at $M_0 = M/M_{\geq 1}$, som gir at Π er på. Vet at $\operatorname{Im} i = M_{\geq 1}$ siden i er 1-1 og $\operatorname{Ker}\Pi = M_{\geq 1}$, så dermed er $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker}\Pi$. Anvender den kontravariante venstre-eksakte funktoren $\operatorname{Hom}_\Lambda(-,\Lambda_0)$ på η, som induserer følgende eksakte sekvens [Rot79]:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0) \\ &\longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(M_{\geq 1},\Lambda_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,\Lambda_0) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_{\geq 1},\Lambda_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_\Lambda(M,\Lambda_0) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Vet at M er generert i grad 0, siden M er et vilkårlig valgt objekt fra kategorien $\mathcal{L}(\Lambda)$. Anvender Proposisjon 3.1.5 på side 32 og får at $\Pi^*\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$ er en isomorfi.

Har nå følgende sekvens:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(M_{\geq 1},\Lambda_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\varphi_1} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M_{\geq 1},\Lambda_0) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\varphi_2} \operatorname{Ext}^2_\Lambda(M,\Lambda_0) \longrightarrow \cdots$$

Ønsker å vise at φ_i er på. Legger merke til at summen av den midterste kolonnen over tilsvarer $\mathcal{E}(M_0)$ og summen av kolonnen til høyre tilsvarer $\mathcal{E}(M)$. Så for å vise at φ_i er en på avbildning $\forall i$, bruker vi at $\mathcal{E}(M)$ er generert i grad 0 som venstremodul over $E(\Lambda)$ fra Proposisjon 3.1.9 på side 34. Så φ'ene utgjør en gradert avbildning fra $\mathcal{E}(M_0)$ til $\mathcal{E}(M)$ som $E(\Lambda)$-moduler.

Skal nå vise at φ_i er på $\forall\ i$, ved å vise at det for alle $\mu \in \mathcal{E}(M)_i$ eksisterer en $\sigma \in \mathcal{E}(M_0)_i$ slik at $\varphi_i(\sigma) = \mu$. Ser på en $\mu \in \mathcal{E}(M)_i$, det vil si $\mu \in \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda_0) = [\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^i \operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$. Får dermed at $\exists k_j,\nu_j$ slik at $\mu = \sum_{j=1}^t k_j \cdot \nu_j$, der $k_j \in [\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^i$ og $\nu_j \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$. Vet fra $\operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$, at $\exists\ \nu'_j \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0)$ slik at $\varphi_0(\nu'_j) = \nu_j\ \forall\ j = 1,2,\ldots,t$. Kan derfor skrive $\mu = \sum_{j=1}^t k_j \cdot \varphi_0(\nu'_j)$. Ser på φ avbildningen i de ulike gradene:

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

$$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\varphi_1} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)\operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

$$[\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^2\operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0) \xrightarrow{\varphi_2} [\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^2\operatorname{Hom}_\Lambda(M,\Lambda_0)$$

$$\vdots$$

Ser på en $\lambda \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0) \in E(\Lambda)$ og en $\gamma \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M_0,\Lambda_0)$. Ser på $\varphi_1(\lambda\gamma)$. Siden φ er en modulavbildning der $\lambda \in$ ringen $E(\Lambda)$ har vi at $\varphi_1(\lambda\gamma) = \lambda\varphi_0(\gamma)$, siden γ er i grad 0. Lar λ_i være et element i $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$. Har da på samme måte at $\varphi_i(\lambda_i\gamma) = \lambda_i\varphi_0(\gamma)$.

Har dermed at $\mu = \sum_{j=1}^t k_j \cdot \varphi_0(\nu'_j) = \sum_{j=1}^t \varphi_i(k_j \cdot \nu'_j)$. Legger merke til at $k_j \cdot \nu'_j \in \mathcal{E}(M_0)_i = \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M_0,\Lambda_0)$. Så vi kan la vår $\sigma_i = \sum_{j=1}^t k_j \cdot \nu'_j$ og har dermed at φ_i er på $\forall i$.

Trenger at $\mathcal{E}(M_0)$ er en projektiv $E(\Lambda)$-modul. Skal nå se på hvordan projektive $E(\Lambda)$-moduler ser ut og håper på å kunne identifisere $\mathcal{E}(M_0)$ som en modul av denne typen. Vi har at $E(\Lambda)$ er en fri modul over seg selv. Har videre at $E(\Lambda) = \bigoplus_{i\geq 0}\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$. Siden Λ_0 er semisimpel har vi at $\Lambda_0 = \Lambda_0 e_1 \oplus \Lambda_0 e_2 \oplus \cdots \oplus \Lambda_0 e_n$, der e_i er den trivielle veien i hjørne i. Vi får dermed at $E(\Lambda) = \bigoplus_{i\geq 0}\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0 e_1 \oplus \Lambda_0 e_2 \oplus \cdots \oplus \Lambda_0 e_n,\Lambda_0) \cong$

$\bigoplus_{l=1}^{n}(\bigoplus_{i\geq 0}\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0 e_l, \Lambda_0)) = \bigoplus_{l=1}^{n}\mathcal{E}(\Lambda_0 e_l)$ som er en sum av projektive $E(\Lambda)$-moduler. Vet at M_0 er en Λ_0-modul. Siden Λ_0 er semisimpel, har vi også at M_0 er både semisimpel og projektiv som Λ_0-modul. Har dermed at $M_0 \cong (\Lambda_0 e_1)^{m_1} \oplus (\Lambda_0 e_2)^{m_2} \oplus \cdots \oplus (\Lambda_0 e_n)^{m_n}$ for noen $m_i \geq 0$. Så dermed er $\mathcal{E}(M_0) \cong \mathcal{E}((\Lambda_0 e_1)^{m_1} \oplus (\Lambda_0 e_2)^{m_2} \oplus \cdots \oplus (\Lambda_0 e_n)^{m_n}) \cong \bigoplus_{l=1}^{n}\mathcal{E}(\Lambda_0 e_l)^{m_l}$ for noen $m_i \geq 0$, der $\mathcal{E}(\Lambda_0 e_l)^{m_l}$ er projektiv $\forall l$. Har dermed at $\mathcal{E}(M_0)$ er en sum av projektive $E(\Lambda)$-moduler, som medfører at også $\mathcal{E}(M_0)$ er en endeliggenerert projektiv $E(\Lambda)$-modul.

Skal nå vise at dersom $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ så er også $M_{\geq n}[n] \in \mathcal{L}(\Lambda), \forall n \geq 1$. Starter med den eksakte sekvensen $0 \to M_{\geq 1} \to M \to M_0 \to 0$. Lar P_0 være et projektivt dekke av M. Siden $M_0 \subseteq M$, kan vi lage følgende diagram med eksakte rader:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{\geq 1} \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Anvender Slangelemmaet og får:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{\geq 1} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M_{\geq 1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Der X_1 er generert i grad 1 siden $M \in \mathcal{L}(\Lambda)$ og K_1 er generert i grad 1 siden $M_0 \in \mathcal{L}(\Lambda)$ ($M_0 \in \mathcal{L}(\Lambda)$ siden vi har antatt at Λ er Koszul.)

Får den eksakte sekvensen:

$$0 \longrightarrow X_1[1] \longrightarrow K_1[1] \longrightarrow M_{\geq 1}[1] \longrightarrow 0$$

Der $X_1[1], K_1[1]$ og $M_{\geq 1}[1]$ alle er genert i grad 0. Har også at $X_1[1]$, $K_1[1]$ $\in \mathcal{L}(\Lambda)$ fra definsjonen av en lineær modul.

Anvender Proposisjon 3.1.10 på side 49 på den eksakte sekvensen

$$0 \longrightarrow X_1[1] \longrightarrow K_1[1] \longrightarrow M_{\geq 1}[1] \longrightarrow 0$$

og får at $M_{\geq 1}[1] \in \mathcal{L}(\Lambda)$

Ser på

$$\kappa\colon \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{E}(M_{\geq 1})[1] \longrightarrow \mathcal{E}(M_0) \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}(M) \longrightarrow 0$$

der $d_0\colon \mathcal{E}(M_0) \to \mathcal{E}(M)$ er et projektivt dekke. Lar $M' = M_{\geq 1}[1] \in \mathcal{L}(\Lambda)$. Lager en tilsvarende sekvens for M':

$$\kappa'\colon \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{E}(M'_{\geq 1})[1] \longrightarrow \mathcal{E}(M'_0) \xrightarrow{d'_0} \mathcal{E}(M') \longrightarrow 0$$

der $d'_0\colon \mathcal{E}(M'_0) \to \mathcal{E}(M')$ er et projektivt dekke. Har at M' inneholder M_1 i grad 0, M_2 i grad 1, M_3 i grad 2 og så videre. Har dermed at $M'_{\geq 1}[1] = M_{\geq 2}[2]$. Så vi får at:

$$\begin{tikzcd}
\kappa'\colon & 0 \arrow[r] & \mathcal{E}(M'_{\geq 1})[1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}(M'_0) \arrow[r, "d'_0"] & \mathcal{E}(M_{\geq 1}) \arrow[r] & 0 \\
\kappa'_2\colon & 0 \arrow[r] & \mathcal{E}(M_{\geq 2})[1] \arrow[r] & \mathcal{E}(M_1) \arrow[r] & \mathcal{E}(M_{\geq 1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ser på κ'_2, men flytter den 1 grad, får da den eksakte følgen: $0 \to \mathcal{E}(M_{\geq 2})[2] \to \mathcal{E}(M_1)[1] \to \mathcal{E}(M_{\geq 1})[1] \to 0$. Får følgende projektive oppløsning av $\mathcal{E}(M)$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & \mathcal{E}(M_1)[1] \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & \mathcal{E}(M_0) \arrow[r] & \mathcal{E}(M) \arrow[r] & 0 \\
& \mathcal{E}(M_{\geq 2})[2] \arrow[ur] & & \mathcal{E}(M_{\geq 1})[1] \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Dermed har vi at $\mathcal{E}(M) \in \mathcal{L}(E(\Lambda))$ per definsjon.

Har at $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) \oplus \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) \oplus \mathrm{Ext}^2_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) \oplus \cdots$. Har at Λ er projektiv som Λ-modul over seg selv. Får derfor at $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0)$. Anvender Proposisjon 3.1.5 på side 32 og får at $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) = E(\Lambda)_0$. Har at $\Lambda \in \mathcal{L}(\Lambda)$ siden vi kan lage følgende projektive oppløsning av Λ:

$$0 \longrightarrow \Lambda = \Lambda \longrightarrow 0$$

Bruker det vi har funnet ut for M, en vilkårlig valgt modul i $\mathcal{L}(\Lambda)$, på Λ. Får følgende følge:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{E}(\Lambda_2)[2] \arrow[r] & \mathcal{E}(\Lambda_1)[1] \arrow[r] & \mathcal{E}(\Lambda_0) \arrow[r] & E(\Lambda)_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & & & \mathcal{E}(\Lambda) &
\end{tikzcd}$$

Vi har dermed funnet en metode for å finne en lineær gradert projektiv oppløsning av $E(\Lambda)_0$ når Λ er Koszul. Vi har dermed at Λ Koszul medfører at $E(\Lambda)$ også er Koszul.

$\square$

3.3 Et nyttig korollar

Korollar 3.3.1. *Dersom* Λ *er Koszul så er* $E(\Lambda)$ *generert i grad* 0 *og* 1 *som algebra, det vil si at* $E(\Lambda)$ *er* 1*-generert.*

Bevis. Dette følger av at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda_0) = [\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)]^i \operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda_0) \forall i \geq 1$, når M er et vilkårlig element i $\mathcal{L}(\Lambda)$. Vi har at $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(\Lambda)$ hvis og bare hvis Λ er Koszul. Så når Λ er Koszul kan vi sette inn Λ_0 for M i uttrykket over og får dermed at $E(\Lambda) = \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \oplus \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \oplus \operatorname{Ext}^2_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \oplus \cdots$ er 1-generert. $\square$

Kapittel 4

Dersom Λ er kvadratisk og monomiell

Målet med dette kapittelet er å vise at når Λ er kvadratisk og monomiell, da er Λ Koszul. Skal gjøre dette ved å vise både at Λ monomiell og kvadratisk medfører at $E(\Lambda)$ er endelig 1-generert og at vår definisjon av at Λ er Koszul er ekvivalent med at $E(\Lambda)$ er endelig 1-generert. Vi skal starte med å se at de to definisjonene er ekvivalente, før vi i neste seksjon definerer monomiell og viser at kvadratisk og monomiell medfører Koszul.

4.1 Når $E(\Lambda)$ er endelig 1-generert

Følgende teorem er et spesifikt tilfelle av et mer generelt teorem fra artikkelen [GMV96]. Beviset vi ser på her er derfor litt mer konkret i tillegg til at det er mer utfyllende enn det som er gitt i artikkelen.

Teorem 4.1.1. *Følgende er ekvivalent:*

1. $E(\Lambda)$ *er endelig* 1*-generert*

2. *Grad* 0*-delen av* Λ*, som vi skriver som* Λ_0*, har en lineær gradert projektiv oppløsning.*

Bevis. At Λ_0 har en lineær gradert projektiv oppløsning medfører at $E(\Lambda)$ er 1-generert, har vi allerede fra Korollar 3.3.1 på forrige side. Skal nå vise at Λ_0 lineær også medfører at $E(\Lambda)$ er endelig 1-generert. Vi ser først litt nærmere på $E(\Lambda)_1 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Vi har den eksakte følgen $0 \to \Lambda_{\geq 1} \to \Lambda \to \Lambda_0 \to 0$. Vi anvender den kontravariante venstre-eksakte funktoren $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ på den og får

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_{\geq 1}, \Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \to 0$$

der vi har $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0)$ fra Proposisjon 3.1.5 på side 32, som medfører at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_{\geq 1}, \Lambda_0)$. Vi vet at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda, \Lambda_0) = 0$ siden Λ er projektiv som Λ-modul over seg selv og kan derfor si at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_{\geq 1}, \Lambda_0) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Videre har vi at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_{\geq 1}, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_1, \Lambda_0)$ fra Proposisjon 3.1.5 på side 32, siden $\Lambda_{\geq 1}/(J\Lambda_{\geq 1}) = \Lambda_{\geq 1}/\Lambda_{\geq 2} = \Lambda_1$.

Siden Λ_1 ligger i kun én grad kan Λ_1 sees som en Λ_0-modul. Siden enhver modul er faktor av en fri så eksisterer en endelig $n \in \mathbb{N}$ slik at $\Lambda_0^n \to \Lambda_1 \to 0$. Anvender funktoren $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ og får $0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_1, \Lambda_0) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0)$. Men vi har tidligere vist at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0^n, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)^n$ som igjen er isomorf med $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda_0, \Lambda_0)^n \cong \Lambda_0^n$. Vi har fra definisjonen av Λ at $\Lambda_0 = k \oplus k \oplus \cdots \oplus k$, en endelig sum. Altså er Λ_0^n endeliggenerert som vektorrom over k, siden Λ_0 har endelig dimensjon over k. Dermed må også $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_1, \Lambda_0)$ være endeliggenerert som vektorrom over k siden det eksisterer en en-til-en avbildning fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_1, \Lambda_0)$ inn i Λ_0^n. Men $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_1, \Lambda_0) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) = E(\Lambda)_1$, så dermed har vi at $E(\Lambda)_1$ er endeliggenerert som vektorrom over k. Vi har også at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$ er endeliggenerert som vektorrom over k siden $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda_0, \Lambda_0) \cong \Lambda_0$. Og dermed har vi at $E(\Lambda)$ er endelig 1-generert.

Skal nå vise at dersom $E(\Lambda)$ er endelig 1-generert, så har Λ_0 en lineær gradert projektiv oppløsning.

Vi vet at Λ_0 har et gradert projektivt dekke, siden Punkt 5 på side 5 gir oss at en endeliggenerert Λ-modul har et projektivt dekke. Siden Λ alltid er projektiv over seg selv, kan vi dekke Λ_0 med Λ. Vil dermed få kjernen $\Lambda_{\geq 1}$, som tydelig er inneholdt i $J\Lambda = \Lambda_{\geq 1}$.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1[1] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Lambda \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
& \Lambda_{\geq 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Vet at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1$ er projektiv hvis og bare hvis $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1, -)$ er eksakt. Adjungeringsisomorfien [Rot79] gir at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1, -) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda_1, (\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda_1, -)\, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)$. Siden Λ er projektiv over seg selv, er $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)$ eksakt. Har at $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda_1, -)$ er eksakt siden Λ_1 ligger i kun én grad og dermed eren Λ_0-modul, som vil si at Λ_1 er projektiv siden Λ_0 er semisimpel. Har at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1[1]$ dekker over $\Lambda_{\geq 1}$ siden Λ er generert i grad 0 og 1.

Vi sier at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} X$ er generert i samme grad som X, siden et element i tensorproduktet er på formen $\lambda \otimes x = \lambda(1 \otimes x)$ og vi ser at $1 \otimes x$ er en generatormengde for tensorproduktet. Vi har at Λ_1 er en Λ_0-modul, så vi velger å se på denne som generert i grad 0. Har dermed at $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1$ er generert i grad 0. Vi flytter derfor denne en grad, til grad 1. Har her funnet noe som starter som en lineær gradert projektiv oppløsning av Λ_0.

Antar så at vi har en lineær oppløsning av lengde n:

$$\begin{tikzcd}
& P_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "\delta_n"] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\delta_1"] & & P_0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
\operatorname{Ker} f_n \arrow[ur, hook] & & \operatorname{Ker} f_{n-1} \arrow[ur, hook] & & & & \operatorname{Ker} f_0 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

der $\operatorname{Ker} f_n$ er generert i grad $n+1$. Dermed at har vi også at $\operatorname{Ker} f_n$ er endeliggenerert, skal nå vise hvorfor. Vi skal først vise at $\operatorname{Ker} f_0$ og $\operatorname{Ker} f_1$ er endeliggenererte som Λ-moduler, før vi generaliserer fremgangsmåten for $\operatorname{Ker} f_1$ til å vise at også $\operatorname{Ker} f_n$ er endeliggenerert som Λ-modul. Vi har antatt at $\operatorname{Ker} f_0$ er generert i grad 1, det vil si at Λ_1 er en generator. Men $\dim_k \Lambda_1 < \infty$, det vil si at $\operatorname{Ker} f_0$ er generert av et endeligdimensjonalt vektorrom over k, så $\operatorname{Ker} f_0$ er endeliggenerert som Λ-modul. Skal nå vise at $\operatorname{Ker} f_1$ er endeliggenerert. Vi har at $\operatorname{Ker} f_0$ er $\Lambda_{\geq 1}$, som har det projektive dekket $\Lambda \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1$. Vi kaller $\operatorname{Ker} f_1$ for X, og husker at X er generert i grad 2, så X kan sees som $X_2, X_3, \cdots$ i de ulike gradene. Dette blir seende ut som følger:

$$\begin{tikzcd}
& \Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1 \arrow[r, "\sim"] & \Lambda_1 \\
& \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1 \arrow[r, two heads] & \Lambda_2 \\
X_2 \arrow[ur] & \Lambda_2 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1 \arrow[r, two heads] & \Lambda_3 \\
X_3 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

og så videre nedover. Har dermed at $\dim_k X_2 = \dim_k \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1 - \dim_k \Lambda_2$, som er endelig siden $\dim_k \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda_1 \leq (\dim_k \Lambda_1)^2 < \infty$. Dermed har vi at X er endeliggenerert som Λ-modul. Dette kan generaliseres til at når $\operatorname{Ker} f_{n-1}$ er endeliggenert, så er også $\operatorname{Ker} f_n$ endeliggenerert som Λ-modul. Lar $\operatorname{Ker} f_{n-1}$ være Y, som vi i de ulike gradene kaller $Y_n, Y_{n+1}, \cdots$. Kaller $\operatorname{Ker} f_n$ for Y'. Vi vet at Y' er generert i grad $n+1$, så Y' består av

$Y'_{n+1}, Y'_{n+2}, \cdots$. Vi kan sette opp diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda_0 \otimes_{\Lambda_0} Y_n \arrow[r, "\sim"] & Y_n \\
 & \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} Y_n \arrow[r, two heads] & Y_{n+1} \\
Y'_{n+1} \arrow[ur] & \Lambda_2 \otimes_{\Lambda_0} Y_n \arrow[r, two heads] & Y_{n+2} \\
Y'_{n+2} \arrow[ur] & & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Har dermed at $\dim_k Y'_{n+1} = \dim_k \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} Y_n - \dim_k Y_{n+1}$, som er endelig siden $\dim_k \Lambda_1 \otimes_{\Lambda_0} Y_n \leq (\dim_k \Lambda_1)(\dim_k Y_n) < \infty$. Dermed har vi at $Y' = \operatorname{Ker} f_n$ er endeliggenerert som Λ-modul.

Siden $\operatorname{Ker} f_n$ er generert i grad $n+1$ og er endeliggenerert, vet vi fra Punkt 4 på side 5 at det eksisterer et projektivt dekke $\delta_{n+1} \colon P_{n+1} \to \operatorname{Ker} f_n$, der P_{n+1} er genert i grad $n+1$.

Skal nå vise at dette medfører at også $\operatorname{Ker} f_{n+1}$ er generert i grad $n+2$. For da vil også $\operatorname{Ker} f_{n+1}$ være endeliggenerert, som igjen fra Punkt 4 på side 5 gir at det eksisterer et projektivt dekke $\delta_{n+2} \colon P_{n+2} \to \operatorname{Ker} f_{n+1}$, der P_{n+2} generert i grad $n+2$. Og dermed vil vi ha at Λ_0 har en lineær oppløsning.

Skal nå anta at $\operatorname{Ker} f_{n+1}$ ikke er generert i grad $n+2$ for så å komme til en motsigelse, og dermed har vi vist at Λ_0 har en lineær oppløsning som vil si at Λ_0 er Koszul. Ser på

$$\begin{tikzcd}
P_{n+2} \arrow[rr, "f_{n+2}"] \arrow[dr] & & P_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & \cdots \\
 & \operatorname{Ker} f_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

der P_{n+1} er generert i grad $n+1$. Antar $\exists x \in \operatorname{Ker} f_{n+1}$ der x er en generator og at x er av grad $m \geq n+3$. Da er det en $e \in P_{n+2}$ som dekker x. Har at $x \in J^2 P_{n+1}$, siden x er av grad minst $n+3$ og $x \in \operatorname{Ker} f_{n+1}$. Lar $\bar{x}$ være restklassen til x i $\operatorname{Ker} f_{n+1}/J \operatorname{Ker} f_{n+1}$. Hvis $\bar{x} = 0$ vil det si at $x \in J \operatorname{Ker} f_{n+1} \subseteq P_{n+1}$ og dermed er ikke x en generator. Så vi vet at $\bar{x} \neq 0$. Da vil undermodulen generert av $\bar{x}$ være $\langle \bar{x} \rangle = \Lambda \bar{x} \subseteq \operatorname{Ker} f_{n+1}/J \operatorname{Ker} f_{n+1}$. La $\Lambda \bar{x} = M$. Har at $\operatorname{Ker} f_{n+1}/J \operatorname{Ker} f_{n+1}$ er en semisimpel Λ_0-modul. Det vil si at det eksisterer en M' slik at $M \oplus M' \cong \Lambda_0^t$, for en $t \geq 1$. Vi kan dermed ved en inklusjon i og en projeksjon π få følgende diagram:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "i"] & M \oplus M' \cong \Lambda_0^t \arrow[d, "\pi_i"] \\ & \Lambda_0 \end{tikzcd}$$

Siden antagelsen vår er at $\bar{x} \neq 0$, er $M \neq 0$. Så siden $i\colon m \mapsto (m, 0)$, er også $\Lambda_0^t \neq 0$. Vet dermed at $\pi_i \neq 0$ for minst en i. Så dermed har vi at $\exists \bar{g}\colon \operatorname{Ker} f_{n+1}/J \operatorname{Ker} f_{n+1} \to \Lambda_0$, der $\bar{g}(\bar{x}) \neq 0$. Vi lager oss følgende diagram

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f_{n+1}/J \operatorname{Ker} f_{n+1} \arrow[r, "\bar{g}"] & \Lambda_0 \arrow[d, equal] \\ \operatorname{Ker} f_{n+1} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "g"] & \Lambda_0 \end{tikzcd}$$

der $g = \bar{g}\lambda$. Til senere bruk legger vi merke til at $g(x) \neq 0$.

Har at $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(\Lambda_0, \Lambda_0) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ker} f_{n+1}, \Lambda_0) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ker} f_{n+1}/J \operatorname{Ker} f_{n+1}, \Lambda_0)$. Der den første isomorfien kommer av dimensjonsskift og den andre følger av Proposisjon 3.1.5 på side 32. Har dermed at vi kan velge en $g' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ker} f_{n+1}, \Lambda_0)$ og se den som et element $\theta g' \in \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Vi ser på:

$$\begin{tikzcd} \theta\colon & 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & P_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \theta g'\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & E \arrow[r] & P_n \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

der vi får $\theta g' \in \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Så for vår $g \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ker} f_{n+1}, \Lambda_0)$, kan vi se g som $\theta g \in \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Skal nå vise at $g \in \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(\Lambda_0, \Lambda_0)$, ikke ligger i $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_0, \Lambda_0) \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda_0, \Lambda_0)$, som vil være en motsigelse da vi har antatt at $E(\Lambda)$ er 1-generert. Så vi spør oss om $\theta g \in \operatorname{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_0, \Lambda_0) \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda_0, \Lambda_0)$? Vi ser på $\sum_{i=1}^t \theta_i \cdot \eta_i$, der $\theta_i \in \operatorname{Ext}_\Lambda^1(\Lambda_0, \Lambda_0)$ og $\eta_i \in \operatorname{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda_0, \Lambda_0)$.

Til η_i tilordner vi en $b_i\colon \operatorname{Ker} f_n \to \Lambda_0[n+1]$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_n \arrow[r] \arrow[d, "b_i"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "b_i'"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \Lambda_0[n+1] \arrow[r] & E_i \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Og til θ_i tilordner vi $a_i\colon \operatorname{Ker} f_0 \to \Lambda_0[1]$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_0 \arrow[r] \arrow[d, "a_i"] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "a_1'"] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda_0[1] \arrow[r] & E_i' \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

der Λ_0 er skiftet til $\Lambda_0[1]$ fordi $\operatorname{Ker} f_0$ er generert i grad 1.

Vi starter med

$$\begin{tikzcd}
P_{n+2} \arrow[dr] & & P_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_n \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Ker} f_{n+1} \arrow[ur] & & \operatorname{Ker} f_n \arrow[ur] & & & & & & \\
0 \arrow[ur] & & & & E_i \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
& & & \Lambda_0[n+1] \arrow[ur] \arrow[dd, equal] & & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & & & & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0[n+2] \arrow[r] & E_i'[n+1] \arrow[r] & \Lambda_0[n+1] \arrow[r] & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Vi setter inn den eksakte følgen $0 \to \operatorname{Ker} f_0 \to \Lambda \to \Lambda_0 \to 0$, etter å ha skiftet den med $[n+1]$.

$$\begin{tikzcd}
P_{n+2} \arrow[dr] & & P_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr, "c'"] \arrow[dd, "c"] & & P_n \arrow[r] \arrow[dd, "b_i'"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Ker} f_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dd, "\tilde{b}_i"] & & \operatorname{Ker} f_n \arrow[ur] \arrow[dd, "b_i"] & & & & & & \\
0 \arrow[ur] & & \Lambda[n+1] \arrow[dr, "c''"] \arrow[ddd, bend right, "a_i'"] & & E_i \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Ker} f_0[n+1] \arrow[ur] \arrow[dd, "a_i"] & & \Lambda_0[n+1] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & & & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_0[n+2] \arrow[r] & E_i'[n+1] \arrow[r] & \Lambda_0[n+1] \arrow[r] & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Har her at $b_i\colon \operatorname{Ker} f_n \to \Lambda_0[n+1]$ er en grad 0-avbildning, da den går fra $\operatorname{Ker} f_n$ som er generert i grad $n+1$ til $\Lambda_0[n+1]$ som har ikke-null elementer kun i grad $n+1$. Har videre at både avbildningen $c'\colon P_{n+1} \to \operatorname{Ker} f_n$ og avbildningen $c''\colon \Lambda[n+1] \to \Lambda_0[n+1]$ begge er grad 0-avbildninger. Kan dermed fra Lemma 1.2.7 på side 3 velge $c\colon P_{n+1} \to \Lambda[n+1]$ som en grad 0-avbildning. Siden $\tilde{b}_i$ er en restriksjon av c følger det dermed at også den er en grad 0-avbilding. At $a_i\colon \operatorname{Ker} f_0[n+1] \to \Lambda_0[n+2]$ er en grad 0-avbildning ser vi siden den går fra $\operatorname{Ker} f_0[n+1]$ som er generert i grad $n+2$ til $\Lambda_0[n+2]$ som kun lever i grad $n+2$. Dermed har vi at også sammensetningen $a_i\tilde{b}_i$ er en grad 0-avbildning.

Som abelske grupper er $e^{n+2}(\Lambda_0, \Lambda_0)$ isomorf med $\operatorname{Ext}_\Lambda^{n+2}(\Lambda_0, \Lambda_0) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ker} f_{n+1}, \Lambda_0)$. Så $\theta_i\eta_i$ kan bli representert av $a_i\tilde{b}_i \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Ker} f_{n+1}, \Lambda_0)$.

$$\begin{tikzcd}
P_{n+3} \arrow[r, "f_{n+3}"] & P_{n+2} \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & \operatorname{Ker} f_{n+1} = \operatorname{Im} f_{n+2} \arrow[d, "a_i\tilde{b}_i"'] \\
& & \Lambda_0[n+2]
\end{tikzcd}$$

Skal nå først vise at vi kan se på $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2} + \operatorname{Im}(f_{n+2})^*$ som et element i $\operatorname{Ext}^{n+2}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) = \operatorname{Ker}(f_{n+3})^*/\operatorname{Im}(f_{n+2})^*$. Vi har følgende kommutative diagram:

$$
\begin{tikzcd}
P_{n+2} \arrow[rr, "f_{n+2}"] \arrow[dr, "\delta_{n+2}"'] & & P_{n+1} & \\
& \operatorname{Ker} f_{n+1} \arrow[ur] \arrow[r, "\tilde{b}_i"] & \operatorname{Ker} f_0 \arrow[r, "a_i"] & \Lambda_0[n+2]
\end{tikzcd}
$$

Anvender den kontravariante funktoren $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ på $P_{n+3} \xrightarrow{f_{n+3}} P_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} P_{n+1}$ som gir

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+1}, \Lambda_0) \arrow[r, "(f_{n+2})^*"] & \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+2}, \Lambda_0) \arrow[r, "(f_{n+3})^*"] & \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+3}, \Lambda_0) \\
h \arrow[r, mapsto] & hf_{n+2} & \\
& h \arrow[r, mapsto] & hf_{n+3} \\
\operatorname{Ker}(f_{n+3})^* \arrow[uuur, hook] & &
\end{tikzcd}
$$

Og vi spør oss om $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2} \in \operatorname{Ker}(f_{n+3})^*$? Ser fra diagrammet at det er ekvivalent med at $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2}f_{n+3} = 0$. Har at $\operatorname{Im} f_{n+3} = \operatorname{Ker} f_{n+2} = \operatorname{Ker} \delta_{n+2}$, så dermed er $\delta_{n+2}f_{n+3} = 0$, som vil si at $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2}f_{n+3} = 0$ og vi har at $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2} \in \operatorname{Ker}(f_{n+3})^*$. Siden $\operatorname{Im}(f_{n+2})^* \subseteq \operatorname{Ker}(f_{n+3})^*$, har vi da at $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2} + \operatorname{Im}(f_{n+2})^* \in \operatorname{Ext}^{n+2}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$.

Det vi skulle vise var at $g \notin \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Vi har nå at $\sum_{i=1}^t \theta_i\eta_i$ kan representeres av $\sum_{i=1}^t a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2} + \operatorname{Im}(f_{n+2})^*$ som også er et element i $\operatorname{Ext}^{n+2}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Så hvis g skal være et element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$, må $\sum_{i=1}^t a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2} + \operatorname{Im}(f_{n+2})^* = g\delta_{n+2} + \operatorname{Im}(f_{n+2})^*$. Som er ekvivalent med at $\sum_{i=1}^t a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2} - g\delta_{n+2} \in \operatorname{Im}(f_{n+2})^*$. Skriver dette om til $(\sum_{i=1}^t a_i\tilde{b}_i - g)\delta_{n+2} = k \in \operatorname{Im}(f_{n+2})^*$? Vi hadde en $e \in P_{n+2}$, slik at e dekte x, der x var et element i $\operatorname{Ker} f_{n+1}$ av grad $m \geq n+3$. Anvender k på denne e-en og får at $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2}(e) = 0$ fordi $a_i\tilde{b}_i\delta_{n+2}(e) = a_i\tilde{b}_i(x)$, og $a_i\tilde{b}_i$ er en grad 0-avbildning til $\Lambda_0[n+2]$, hvor alle elementer ligger i grad $n+2$, mens vår x har graden $m \geq n+3$. Derfor er $k(e) = -g\delta_{n+2}(e) = -g(x) \neq 0$, da vi allerede har funnet at $g(x) \neq 0$. Men for en $t \in \operatorname{Im}(f_{n+2})^*$ har vi at $t = hf_{n+2}$ for en $h \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{n+1}, \Lambda_0)$. Hvis vi anvender t på e får vi at $t(e) = hf_{n+2}(e) = h(x)$, siden $\delta_{n+2}(e) = x \in$

$\operatorname{Ker} f_{n+1}$. Vi har at $h\colon P_{n+1} \to \Lambda_0$ alltid faktoriserer slik at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & \Lambda_0 \\
& P_{n+1}/JP_{n+1} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Men x er av grad større eller lik $n+3$, så $x \in JP_{n+1}$, og dermed blir $h(x) = 0$. Derfor har vi at $k \notin \operatorname{Im}(f_{n+2})^*$, så g kan ikke være et element i $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)\operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Vi har dermed at P_{n+2} må være generert i grad $n + 2$ og vår graderte minimale projektive oppløsning er lineær.

□

4.2 Når Λ er kvadratisk og monomiell

I denne seksjonen skal vi vise at når Λ er kvadratisk og monomiell, da er Λ Koszul. Siden vi i forrige seksjon viste at $E(\Lambda)$ er endelig 1-generert hvis og bare hvis Λ er Koszul, er vi fremme dersom vi viser at hvis Λ er monomiell og kvadratisk, så er $E(\Lambda)$ en endelig 1-generert algebra. Men vi skal først se på noen definisjoner og litt teori om en multiplikativ k-basis for $E(\Lambda)$.

Definisjon 4.2.1. Lar Λ være en k-algebra. Hvis $\Lambda \cong k\Gamma/I$ for et quiver Γ og et ideal I i $k\Gamma$ som er generert av veier, da er I *monomiell* og Λ er en *monomiell* algebra.

Definisjon 4.2.2. [GZ94] Vi lar Γ være quiveret til Λ og $\Gamma_1 = \{\textit{pilene}\} \subseteq \Gamma$. Vi lar $\Lambda = k\Gamma/\langle\mathcal{R}\rangle$, definerer $\Gamma_2 = \{\textit{relasjonene i } \mathcal{R}\}$ og lar p være en vei i Γ, slik at $p \in \Gamma_i$, $i \geq 2$. Lar $\mathcal{M} = \{p \textit{ vei i } \Gamma \mid 0 \neq \bar{p} \in \Lambda\}$. Definerer da Γ_{i+1}, $\forall i \geq 2$ som følger. Har at en vei p i Γ er en *i-prekjede* dersom $p = srq$ der $q \in \Gamma_{i-1}$, $rq \in \Gamma_i$, s er en ikke-triviell vei i $\mathcal{M}$ og sr inneholder en delvei som ligger i Γ_2. Da er Γ_i mengden av alle i-prekjeder som har den egenskapen at ingen ekte initial delvei er en i-prekjede.

Vi lar Γ være et quiver og $p \in \Gamma_i$. Lar videre e_p være idempotenten som korresponderer til endepunktet til veien p. Vi skal nå se hvordan vi da kan identifisere e_p med et element i $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$.

Gitt at vi har følgende minimale graderte projektive oppløsning av Λ_0:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & 0 \\
& & & & \Omega^2_\Lambda(\Lambda_0) \arrow[ur, hook] & & \Omega^1_\Lambda(\Lambda_0) \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

der $P_i = \bigoplus_{p\in\Gamma_i} \Lambda e_p$ for alle i. Vi har da at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) \cong \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0)$ ved dimensjonsskift. Videre anvender vi den kontravariante venstre-eksakte funktoren $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_0)$ på den eksakte sekvensen

$0 \to \Omega^i_\Lambda(\Lambda_0) \to P_i \to \Omega^{i-1}_\Lambda(\Lambda_0) \to 0$. Ved bruk av Lemma 3.1.6 på side 33 og at $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(P, A) = 0$ for alle A når P er projektiv, ser vi at

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^{i-1}_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, \Lambda_0) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0) \longrightarrow 0$$

Vi har dermed at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}(\Lambda_0), \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0)$. Anvender så Proposisjon 3.1.5 på side 32 og får at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0)/J\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0)$. Anvender så Lemma 3.1.6 på side 33 og får at $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0)/J\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i/JP_i, \Lambda_0)$. Oppsummerer det vi har så langt, og regner videre ved å bruke at $P_i = \bigoplus_{p \in \Gamma_i} \Lambda e_p$ for alle i.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0) &\cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{i-1}_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0) \\
&\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0) \\
&\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0)/J\Omega^i_\Lambda(\Lambda_0), \Lambda_0) \\
&\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i/JP_i, \Lambda_0) \\
&= \mathrm{Hom}_\Lambda(\bigoplus_{p \in \Gamma_i} \Lambda e_p / J(\bigoplus_{p \in \Gamma_i} \Lambda e_p), \Lambda_0) \\
&= \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\bigoplus_{p \in \Gamma_i} (\Lambda/J) e_p, \Lambda_0) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\bigoplus_{p \in \Gamma_i} \Lambda_0 e_p, \Lambda_0) \\
&\cong \bigoplus_{p \in \Gamma_i} e_p \Lambda_0
\end{aligned}$$

der $\dim_k(e_p\Lambda_0) = 1$. Så e_p kan identifiserers som et element i $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$ og $\{e_p\}_{p \in \Gamma_i}$ utgjør en k-basis for $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0, \Lambda_0)$.

Videre godtar vi følgende om e_p uten å bevise det.

Proposisjon 4.2.3. *[GZ94] La $\Lambda = k\Gamma/I$ være en monomiell algebra. La $p \in \Gamma_i$ og $q \in \Gamma_j$. Da er*

$$e_p \cdot e_q = \begin{cases} 0 & \textit{hvis } pq \notin \Gamma_{i+j} \\ e_{pq} & \textit{hvis } pq \in \Gamma_{i+j} \end{cases}$$

Vi godtar også følgende teorem uten å bevise det.

Teorem 4.2.4. *[GZ94] Lar Γ være et quiver og $p \in \Gamma_i$. Lar videre e_p være idempotenten som korresponderer til endepunktet til veien p. Vi identifiserer e_p med et element i $\mathrm{Ext}^i(\Lambda_0, \Lambda_0)$. Har da at mengden $\{e_p\}_{p \in \Gamma_i, i=0,1,2,\cdots}$ er en multaplikativ k-basis for $E(\Lambda)$.*

Vi skal nå vise at dersom Λ er monomiell og kvadratisk, da er $E(\Lambda)$ en endelig 1-generert algebra. Teoremet er hentet fra [GZ94]. Beviset som blir presentert her er svært likt beviset som er trykt i [GZ94], men er mer detaljert og forhåpentligvis også mer lettlest.

Teorem 4.2.5. *Dersom Λ er monomiell og kvadratisk, da er $E(\Lambda)$ en endelig 1-generert algebra.*

Bevis. Lar $\mathcal{R}$ være mengden av de monomielle, kvadratiske relasjonene slik at $\Lambda = k\Gamma/\langle\mathcal{R}\rangle$. Lar $\Gamma_1 = \{\textit{pilene}\} \subseteq \Gamma$, der Γ er quiveret til Λ. Lar $\mathcal{A} \subseteq \Gamma_1$ være mengden piler som opptrer i en relasjon i $\mathcal{R}$. Lar $p \in \Gamma$ være en vei, slik at $p \in \Gamma_i$, der $i \geq 2$. Når $i \geq 2$ så er alle piler som opptrer i en p i Γ_i i $\mathcal{A}$, så p en sammensetning av i piler fra $\mathcal{A}$, siden alle relasjoner i $\mathcal{R}$ er av lengde 2. Så vi har at $p = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, for $\alpha_i \in \Gamma_1$. Vi lar e_p være idempotenten som korresponderer til endepunktet til veien p, så her får vi da at $e_p = e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}\cdots e_{\alpha_n}$. Vi har vist at vi kan identifisere e_p med element i $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$, ved at $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0) \cong \bigoplus_{p\in\Gamma_i} e_p\Lambda_0$. Så vi har at $e_{\alpha_i} \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)$, som medfører at $e_p = e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}\cdots e_{\alpha_n} \in [\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_0,\Lambda_0)]^n$. Har fra Teorem 4.2.4 på forrige side at $\{e_p\}_{p\in\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\cdots}$ er en multiplikativ basis for $E(\Lambda)$, så derfor er $E(\Lambda)$ endeliggenerert som k-algebra med generatorene $\{e_p\}_{p\in\Gamma_1}$. □

Korollar 4.2.6. *Hvis Λ er kvadratisk og monomiell, så er Λ Koszul.*

Bevis. Følger direkte fra Teorem 4.2.5 og Teorem 4.1.1 på side 55. □

Kapittel 5

Diverse teori

5.1 Gröbnerbasis

I dette kapittelet skal vi gå kort gjennom en del teori om Gröbnerbasis hentet fra [Gre99]. Det vil ikke bli gitt noen bevis her, men det blir presentert tilstrekkelig informasjon om Gröbnerbasis til at vi er istand til å bruke Gröbnerbasis for å sjekke om en veialgebra er Koszul, noe vi vil gjøre i Kapittel 6 på side 69.

I dette kapittelet lar vi k være en kropp og V være et vektorrom. Vi lar $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in E}$, der E er et indeks-mengde, være en k-basis for en k-algebra R. Så når vi lar $R = k\Gamma$, da er $\mathcal{B}$ mengden av veier, trivielle og ikke-trivielle. Vi vil også la $>$ stå for en vel-ordning på $\mathcal{B}$, som vil si at $>$ er en total ordning av $\mathcal{B}$, der enhver ikke-tom undermengde av $\mathcal{B}$ har et minimalt element.

Proposisjon 5.1.1. *Lar $\mathcal{B}$ være en totalt ordnet mengde, da er $>$ en vel-ordning på $\mathcal{B}$, hvis og bare hvis det for enhver nedadstigende kjede $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$, der $b_i \in \mathcal{B}$, eksisterer en $n \in \mathbb{N}$, slik at $b_n = b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots$.*

Definisjon 5.1.2. Lar $\mathcal{B}$ være en basis for et vektorrom V og $>$ en vel-ordning på $\mathcal{B}$. Lar videre $v = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$ være et ikke-null element i V der $\alpha_i \in k$ og $b_i \in \mathcal{B}$. Da er b_i *tuppen til* v dersom b_i opptrer i v og $b_i \geq b_j$ for alle b_j som opptrer i v. Vi sier at b_i opptrer i V, dersom $\alpha_i \neq 0$.

Vi skriver tupppen til v som $\mathrm{Tip}(v)$. Dersom X er en undermengde av V, så er $\mathrm{Tip}(X) = \{b \in \mathcal{B} \mid b = \mathrm{Tip}(x) \text{ for en } x \neq 0 \in X\}$.

Definisjon 5.1.3. En vel-ordning $>$ på $\mathcal{B}$ er *tillatelig* dersom den tilfredsstiller følgende krav, der $p, q, r, s \in \mathcal{B}$.

1. hvis $p < q$, så er $pr < qr$ dersom både $pr \neq 0$ og $qr \neq 0$.

2. hvis $p < q$, så er $sp < sq$ dersom både $sp \neq 0$ og $sq \neq 0$.

3. hvis $p = qr$, da er $p > q$ og $p > r$.

Definisjon 5.1.4. Vi sier at en mengde av elementer X er *tuppredusert* dersom $\mathrm{Tip}(x)$ ikke deler $\mathrm{Tip}(y)$ for $x, y \in X$, når $x \neq y$. At $\mathrm{Tip}(x)$ ikke deler $\mathrm{Tip}(y)$ vil si at det ikke eksister $p, q \in \mathcal{B}$ slik at $p\,\mathrm{Tip}(x)q = \mathrm{Tip}(y)$.

Gitt at vi har en ordnet mengde av elementer $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ i R og et annet element $y \in R$. Vi kan da dele y med denne mengden, der *dele* her betyr å finne $m_1, \cdots m_n \in \mathbb{N}$ og elementer $u_{i,j}, v_{i,j}, r \in R$ for $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq m_i$ slik at

1. $y = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m_i} u_{i,j}x_i v_{i,j}) + r$.
2. $\mathrm{Tip}(y) \geq \mathrm{Tip}(u_{i,j}x_i v_{i,j})$ for alle i og j.
3. For $b \in \mathcal{B}$ som opptrer i r, så vil $\mathrm{Tip}(x_i)$ ikke dele b for $1 \leq i \leq n$.

Vi legger merke til at dette medfører at $\mathrm{Tip}(r) \leq \mathrm{Tip}(y)$. Og vi kaller r for en *rest* av divisjon av $x_1, \cdots, x_n$. En algoritme for en slik deling er gitt i [Gre99]. Vi vil bruke dette i forbindelse med å sjekke om en gitt basis er en Gröbnerbasis for et gitt ideal, og vil gå gjennom et eksempel på en slik deling etter å ha sitert det aktuelle teoremet, Teorem 5.1.8. Vi ser først på noen definisjoner som vil bli brukt i dette teoremet.

Definisjon 5.1.5. Hvis $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ er en ordnet mengde og y blir delt på X, da vil vi for resten r bruke følgende notasjon $y \Rightarrow_X r$.

Definisjon 5.1.6. La $f, g \in R$ og anta at vi har elementene $b, c \in \mathcal{B}$ slik at

1. $\mathrm{Tip}(f)c = b\,\mathrm{Tip}(g)$.
2. $\mathrm{Tip}(f)$ ikke deler b og $\mathrm{Tip}(g)$ ikke deler c.

Da er *overlapprelasjonen* av f og g ved b og c definert som $o(f, g, b, c) = fc - bg$. (Dersom $k \neq \mathbb{Z}_2$ er overlapprelasjonen gitt ved $o(f, g, b, c) = (1/C\,\mathrm{Tip}(f))fc - (1/C\,\mathrm{Tip}(g))bg$, der $C\,\mathrm{Tip}(v)$ står for koeffisienten til tuppen av v.)

MERK. Har at $\mathrm{Tip}(o(f, g, b, c)) < \mathrm{Tip}(f)c = b\,\mathrm{Tip}(g)$.

Definisjon 5.1.7. Et element $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, med $\alpha_i \in k^*$ og $b_i \in \mathcal{B}$, er *(venstre) uniformt* hvis for enhver $c \in \mathcal{B}$ så er enten $cb_i = 0$ for alle $i = 1, \cdots, n$ eller $cb_i \neq 0$ for alle $i = 1, \cdots, n$.

Teorem 5.1.8. *Lar R være en k-algebra med multiplikativ basis $\mathcal{B}$ og en tillatelig ordning $<$. La $\mathcal{G}$ være en mengde av høyre- og venstre uniforme, tuppreduserte elementer fra R. Anta at for enhver overlapprelasjon $o(g_1, g_2, p, q) \Rightarrow_{\mathcal{G}} 0$, der $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$. Da er $\mathcal{G}$ en Gröbnerbasis for $\langle \mathcal{G} \rangle = I$.*

Eksempel. Vi lar $\Lambda = k\Gamma/I$ der $k = \mathbb{Z}_2$, quiveret Γ er

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

og $I = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$. Vi får da at $\mathcal{B}$ er mengden av veier og vi lager en tillatelig ordning $<$ ved å si at $e_1 < \alpha < \beta < \alpha^2 < \beta\alpha < \alpha\beta < \beta^2$. Vi skal sjekke om $\langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$ er en Gröbnerbasis, så vi trenger ikke definere $<$ for veier av lengde 3 eller mer. Vi definerer $f = \alpha^2$ og $g = \alpha\beta + \beta\alpha$. Får da at $\mathrm{Tip}(f) = \alpha^2$ og $\mathrm{Tip}(g) = \alpha\beta$. Vi ser at vi får to overlapp, (1): $\mathrm{Tip}(f)\beta = \alpha\,\mathrm{Tip}(g)$ og (2): $\mathrm{Tip}(f)\alpha = \alpha\,\mathrm{Tip}(f)$. Så vi må regne ut $o(f, g, \alpha, \beta)$ og $o(f, f, \alpha, \alpha)$. Vi får at

$$\begin{aligned}
\sigma(f, g, \alpha, \beta) &= o(\alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha, \beta) \\
&= \alpha^2\beta - \alpha(\alpha\beta + \beta\alpha) \\
&= -\alpha\beta\alpha \\
&= \mathrm{Tip}\, g(-\alpha) \\
-\alpha\beta\alpha - g(-\alpha) &= -\alpha\beta\alpha + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2 \\
&= \beta\alpha^2 \\
&= \beta\,\mathrm{Tip}(f) \\
\beta\alpha^2 - \beta f &= \beta\alpha^2 - \beta\alpha^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Som vil si at $o(f, g, \alpha, \beta) \Rightarrow_{\mathcal{G}} 0$. For å sjekke overlapp (2) ser vi på $o(f, f, \alpha, \alpha) = f\alpha - \alpha f = \alpha^3 - \alpha^3 = 0$. Vi har dermed at også $o(f, f, \alpha, \alpha) \Rightarrow_{\mathcal{G}} 0$. Siden alle overlapp reduseres til null, har vi at $\mathcal{G} = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$ er en Gröbnerbasis for I.

Skal nå se på et teorem som gir en sammenheng mellom Gröbnerbasis og Koszul-algebraer.

Teorem 5.1.9. *La I være et kvadratisk ideal i en veialgebra $k\Gamma$. La $>$ være en tillatelig ordning på veiene slik at I har en kvadratisk Gröbnerbasis. Da er $k\Gamma/I$ en Koszul algebra.*

Eksempel. I det forrige eksempelet så vi at $\mathcal{G} = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$ er en Gröbnerbasis for I, når $\Lambda = k\Gamma/I$ der $k = \mathbb{Z}_2$, quiveret Γ er

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

og $I = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$. Siden $\mathcal{G}$ også er en kvadratisk Gröbnerbasis for I har vi fra Teorem 5.1.9 at $k\Gamma/\langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$ er Koszul.

5.2 Koszuldualet

Med utgangspunkt i artikkelen [GMV96] skal vi i denne seksjonen først presentere hvordan det det såkalte dualet til et kvadratisk ideal I, kan konstrueres fra det kvadratiske idealet I, når $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul. Vi har i Kapittel 3 på side 29 vist at når Λ er Koszul, så er også Yoneda-algebraen, $E(\Lambda)$, Koszul. I denne seksjonen vil vi sitere et teorem som sier enda mer, nemlig at når Λ er Koszul, så er $E(\Lambda) \cong k\Gamma/I'$, der I' er det såkalte dualet til I. Det er også sånn at dualet til I', la oss kalle det I'' er I, eller med andre ord; $E(E(\Lambda)) \cong \Lambda$. Vi har dermed at $k\Gamma/I$ er Koszul hvis og bare hvis $k\Gamma/I'$ er Koszul. Målet med denne seksjonen er å presentere dette, slik at vi kan undersøke om $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul, ved å undersøke om $k\Gamma/I'$ er Koszul, når vi går gjennom noen eksempler i neste kapittel. Vi vil godta teoremene fra [GMV96] uten å bevise dem.

Lar $\Lambda = k\Gamma/I$, der I er et kvadratisk ideal. Da finner vi det kvadratiske *dualet* til I, som vi kaller I' på følgende måte. Lar I_2 være k-vektorrommet generert av de kvadratiske generatorene av I og lar V_2 være k-vektorrommet generert av alle veier av lengde 2 i Γ. Vi har da at $I_2 \subseteq V_2$. Lar $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ være det duale vektorrommet til V og lar $\{p_i^*\}_{i=1}^n$ være den duale basisen til basisen for veiene $\{p_i\}_{i=1}^n$ av lengde 2. Det vil si at $p_i^*(a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n) = a_i$, der $a_j \in k$ for $j = 1, \cdots, n$. Hvis $v \in V_2$, da er $v = \sum_{i=1}^n a_ip_i$, hvor summen er over veier av lengde 2 og $a_i \in k$. Vi definerer $f_v \colon V_2 \to k$, ved $f_v = \sum_{i=1}^n a_ip_i^*$. Da er I' idealet generert av alle kvadratiske elementer ω slik at $f_v(\omega) = 0$ for alle $v \in I_2$.

Eksempel. Vi skal regne ut dualet til $I = \langle \alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2 \rangle$ når $\Lambda = k\Gamma/I$ der $k = \mathbb{Z}_2$ og quiveret Γ er

$$\alpha \circlearrowleft 1 \circlearrowright \beta$$

Vi har da at $V_2 = k\{\alpha^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2\}$ og $V_2^* = k\{(\alpha^2)^*, (\alpha\beta)^*, (\beta\alpha)^*, (\beta^2)^*\}$. Vi skal da finne alle kvadratiske elementer ω slik at $f_{\alpha\beta,\alpha^2+\beta\alpha+\beta^2}(\omega) = 0$. Vi vet at ω er på formen $a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2$, der $a_i \in k$. For at $f_{\alpha\beta,\alpha^2+\beta\alpha+\beta^2}(\omega) = 0$ må da $a_2 = 0$ og $a_1 = -a_3 - a_4$, siden $a_i \in \mathbb{Z}_2$ skriver vi $a_1 = a_3 + a_4$. Vi kan velge a_3 og a_4 vilkårlig og får at $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_3 + a_4, 0, a_3, a_4) = a_3(1, 0, 1, 0) + a_4(1, 0, 0, 1)$. Vi har dermed at det kvadratiske dualet til I er $I' = \langle \alpha^2 + \beta\alpha, \alpha^2 + \beta^2 \rangle$.

Teorem 5.2.1. *Dersom $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul, da er $E(\Lambda) \cong k\Gamma/I'$, der I' er dualet til I.*

Teorem 5.2.2. *La I være et kvadratisk ideal i $k\Gamma$, og I' det kvadratiske duale idealet til I. Vi lar dualet til I' være I''. Da har vi at $I'' = I$.*

Kapittel 6

Eksempler

I dette kapittelet vil vi gå gjennom tre eksempler, der vi finner ut for hvilke kvadratiske ideal I vi har at $k\Gamma/I$ er Koszul for en kropp k og et quiver Γ. Vi vil i alle eksemplene bruke Teorem 2.3.2 på side 24 som sier at alle Koszul-algebraer er kvadratiske, og kan derfor begrense oss til å se på kun kvadratiske ideal I. Men vi vil starte med et lite eksempel, der vi ellers ikke bruker noe mer av teorien vi har gått gjennom, men finner lineære oppløsniger av alle simple undermoduler, for å avgjøre om en algebra er Koszul. Så vil vi gå videre til stadig større eksempler, der vi tar i bruk stadig mer teori. Ved å ikke ta i bruk all teorien med en gang, blir det veldig tydelig i hvilken grad teorien vi har gått gjennom, effektiviserer det å avgjøre om Λ er Koszul. Sånn sett kan en si at dette kapittelet både oppsummerer og rettferdiggjør all teorien vi har gått gjennom i denne oppgaven.

Eksempel. Lar $\Lambda = k\Gamma/I$ der k er kroppen $\mathbb{Z}_2$ og Γ er quiveret

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2 \arrow[dr, "\gamma"'] & & 3 \arrow[dl, "\delta"] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

Og I er alle kvadratiske relasjoner, som vil si at vi har $I \in \{(\gamma\alpha - \delta\beta), (\gamma\alpha), (\delta\beta), (\gamma\alpha, \delta\beta)\}$.

Starter med $\Lambda = k\Gamma/\langle\gamma\alpha - \delta\beta\rangle = k\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\} + k\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}\} + k\{\bar{\gamma}\bar{\alpha}\}$.

Ser først at alle de projektive Λ-modulene er

$$\Lambda e_1 = P_1 = \begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ k \arrow[dr, "1"'] & & k \arrow[dl, "1"] \\ & k & \end{tikzcd} \qquad \Lambda e_2 = P_2 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ k \arrow[dr, "1"'] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$$\Lambda e_3 = P_3 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[dl, "1"] \\ & k & \end{tikzcd} \qquad \Lambda e_4 = P_4 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Og de 4 simple modulene som vi må sjekke at alle er lineære for at Λ_0 skal være lineær og dermed Λ Koszul, er

$$S_1 = \begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\ & 0 & \end{tikzcd} \quad S_2 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ k \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\ & 0 & \end{tikzcd} \quad S_3 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[dl, "0"] \\ & 0 & \end{tikzcd} \quad S_4 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Finner en projektiv oppløsning av S_1:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & P_2 & & & & & & & & P_1 & & & & & & & & P_0 & & & S_1 & \\ & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & & & k \arrow[dl] \arrow[dr] & & & k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \arrow[ddr] & & & & k \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] & \oplus & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl] \arrow[ddr] & & & & k \arrow[dr] & & k \arrow[dl] \arrow[r] & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ & k & & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & k & & & & k & & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & k & & & 0 & \\ & & & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \arrow[uur, hook] & & & & & & & & k \arrow[dr] & & k \arrow[dl] \arrow[uur, hook] & & & & & & \\ & & & & k & & & & & & & & & & k & & & & & & & \end{tikzcd}$$

Skifter P_1 med 1 grad og P_2 med 2 grader, og dermed ser vi at S_1 har en lineær oppløsning.

Vi har at S_2 og S_3 er symmetriske, så det er nok å sjekke en av dem. Vi ser på en projektiv oppløsning av S_2.

$$\begin{tikzcd} P_1 & & P_0 & \\ \Lambda e_4 \arrow[dr, "\sim"] & & \Lambda e_2 \arrow[r, "f_0"] & S_2 \\ & \operatorname{Ker} f_0 = \Lambda e_4 \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Vi skifter P_1 med 1 grad, og dermed har S_2 en lineær oppløsning.

Siden S_4 er projektiv, er det opplagt at S_4 har en lineær oppløsning. Vi har dermed at S_1, S_2, S_3 og S_4 alle er lineære Λ-moduler, dermed har vi at $\Lambda_0 \cong S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$ er en lineær Λ-modul, så $\Lambda = k\Gamma/\langle\gamma\alpha - \delta\beta\rangle$ er Koszul.

På samme måte som for $\Lambda = k\Gamma/\langle\gamma\alpha - \delta\beta\rangle$ kan vi også finne lineære oppløsinger for alle de simple undermodulene av $\Lambda = k\Gamma/\langle\gamma\alpha\rangle$, $\Lambda = k\Gamma/\langle\delta\beta\rangle$ og $\Lambda = k\Gamma/\langle\gamma\alpha, \delta\beta\rangle$. Dette eksempelet var noe av det første jeg gjorde i arbeidet med denne oppgaven, og da fant jeg lineære oppløsniger for alle de simple. Men nå ser vi at siden alle de resterende algebraene er kvadratiske og monomielle, så er de også Koszul, direkte fra Korollar 4.2.6 på side 64.

Vi skal nå se på et litt større eksempel. Vi vil gjennom hele eksempelet bruke Korollar 4.2.6 på side 64 som sier at dersom Λ er monomiell og kvadratisk, så er Λ Koszul.

Eksempel. Lar $\Lambda = k\Gamma/I$, der k er kroppen $\mathbb{Z}_2$, I er et kvadratisk ideal og Γ er quiveret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Vi lar I_2 stå for k-vektorrommet generert av kvadratiske generatorer av I og vi lar $V_2 = k\{\textit{veier av lengde } 2\}$. Vi har da at I_2 er et undervektorrom av V_2. Vi kaller $\dim_k I_2$ for dimensjonen til idealet I. Vi har at $I \subseteq \langle\gamma\alpha, \gamma\beta, \gamma^2\rangle$, så det kan se ut som om vi kan se på I i 3 dimensjoner. Men vi ser at idealet $\langle\gamma\alpha, \gamma\beta, \gamma^2\rangle = \langle\gamma\alpha, \gamma\beta + \gamma^2\rangle$, siden vi har at $\langle\gamma\beta + \gamma^2\rangle = \langle\gamma\beta + \gamma^2, \gamma\beta, \gamma^2\rangle = \langle\gamma\beta, \gamma^2\rangle$. For vi vet at $IR \subseteq I$, når I er et ideal i en ring R og vi har her at $(\gamma\beta + \gamma^2)e_1 = \gamma\beta$ og at $(\gamma\alpha + \gamma^2)e_2 = \gamma^2$. Vi kan derfor se på I i to dimensjoner.

Vi starter med å se på dimensjon 0, hvor vi får at $I = 0$, så vi må sjekke om $k\Gamma$ er Koszul. Har at grad 0-delen av $k\Gamma$ er $k\Gamma/J$, så vi må sjekke om $k\Gamma/J$ har en lineær oppløsning. Vi dekker $k\Gamma/J$ med $k\Gamma$, som er projektiv som $k\Gamma$-modul og generert i grad 0. Får dermed kjernen J og vi har følgende sekvens:

$$0 \longrightarrow J \hookrightarrow k\Gamma \longrightarrow k\Gamma/J \longrightarrow 0$$

Siden $k\Gamma$ er hereditær og J er en $k\Gamma$-modul, har vi at J er projektiv. Så den projektive oppløsningen av $k\Gamma/J$ stopper her. Vi har også at J er generert i grad 1. Dermed har vi at $k\Gamma/J$ har en lineær oppløsning, så $k\Gamma$ er Koszul.

Vi kan oppsummere dimensjon 1 med Tabell 6.1 på neste side. I Tabell 6.1 på neste side har vi i siste kolonne skrevet Koszul, når $\Lambda = k\Gamma/I_x$ er Koszul for idealet I_x. Vi sier at I_6 er symmetrisk med I_5, siden vi kan se at de blir like hvis vi bytter ut α med β, og det er derfor nok å vise at I_5 gir en Koszul-algebra, for å kunne si at både I_5 og I_6 gjør det. Vi får dermed at $k\Gamma/I$ er Koszul for alle idealer i dimensjon 1, ved å på samme måte som i

$I_1 = \langle \gamma^2 \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_2 = \langle \gamma\alpha \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_3 = \langle \gamma\beta \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_4 = \langle \gamma\alpha + \gamma\beta \rangle$	Lineær oppløsning	Koszul
$I_5 = \langle \gamma\alpha + \gamma^2 \rangle$	Lineær oppløsning	Koszul
$I_6 = \langle \gamma\beta + \gamma^2 \rangle$	Symmetrisk med I_5	Koszul
$I_7 = \langle \gamma\alpha + \gamma\beta + \gamma^2 \rangle$	Lineær oppløsning	Koszul

Tabell 6.1: Kvadratiske idealer i dimensjon 1

forrige eksempel, finne lineære oppløsniger av de simple undermodulene av idealene I_4, I_5 og I_7.

Vi ser så på dimensjon 2, der vi ser om $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul når $I = \langle f, g \rangle = \langle a_1\gamma\alpha + a_2\gamma\beta + a_3\gamma^2, a_4\gamma\alpha + a_5\gamma\beta + a_6\gamma^2 \rangle$, der $a_i \in \mathbb{Z}_2$ og f og g er lineært uavhengige. Vi må ha at både f og g er ulik null for å få et ideal i dimensjon 2, og vi må ha at g er ulik f. Dette gir $(2^3 - 1) \cdot (2^3 - 1 - 1) = 42$ ikke-null mulige I, så vi starter med å se på en del symmetrier og likheter som kutter ned på andelen idealer vi må sjekke. Vi sier at $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$, siden disse gir oss akkurat samme ideal. Et eksempel her er at vi sier at $\langle \gamma\alpha\ , \gamma\beta + \gamma^2 \rangle = \langle \gamma\beta + \gamma^2, \gamma\alpha\ \rangle$. Som vi allerede har gjort i dimensjon 1, sier vi at to idealer er symmetriske, dersom de blir like når en bytter om på α og β. Vi legger merke til at dette medfører at hvis vi for eksempel ser på alle idealer på formen $\langle \gamma\alpha, g \rangle$, har vi også oversikt over alle idealene på formen $\langle \gamma\beta, g \rangle$. Vi sier også at for eksempel $\langle \gamma\alpha, \gamma\alpha + \gamma\beta \rangle = \langle \gamma\alpha, \gamma\beta \rangle$ og lignende. Vi får derfor ingen idealer på formen $\langle$*ett element, tre elementer*$\rangle$ eller lignende, da de vil reduseres til $\langle$*ett element, to elementer*$\rangle$ og så videre. Etter disse likehetene og symmetriene sitter vi igjen med kun fire idealer som vi vil se etter om gir en Koszul-algebra Λ, se Tabell 6.2.

$I_1 = \langle \gamma\alpha, \gamma\beta \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_2 = \langle \gamma\beta, \gamma^2 \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_3 = \langle \gamma\alpha, \gamma\beta + \gamma^2 \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_4 = \langle \gamma^2, \gamma\alpha + \gamma\beta \rangle$	Dimensjon 1	Koszul

Tabell 6.2: Kvadratiske idealer i dimensjon 2

I Tabell 6.2 står det at alle de tre første idealene er kvadratiske og monomielle, så vi vet at de gir en Koszul-algebra fra Korollar 4.2.6 på side 64. Det er opplagt at de to første idealene er monomielle. Når det gjelder I_3 ser vi at også dette er idealet er monomielt, ved å vise at $\langle \gamma\alpha, \gamma\beta + \gamma^2 \rangle = \langle \gamma\alpha, \gamma\beta, \gamma^2 \rangle$, på samme måte som vi i starten av eksempelet viste at $\langle \gamma\beta + \gamma^2 \rangle = \langle \gamma\beta, \gamma^2 \rangle$. I Tabell 6.2 står det at I_4 er Koszul siden I_4

ligger i dimensjon 1. Det er fordi vi har at $(\gamma^2+\gamma\alpha+\gamma\beta)e_1 = \gamma\alpha+\gamma\beta$ og $(\gamma^2+\gamma\alpha+\gamma\beta)e_2 = \gamma^2$, så $I_5 = \langle \gamma^2, \gamma\alpha+\gamma\beta\rangle = \langle \gamma^2+\gamma\alpha+\gamma\beta\rangle$ som ligger i dimensjon 1.

Vi har nå vist at $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul for alle kvadratiske I, når $k=\mathbb{Z}_2$ og Γ er

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Eksempelet som nå blir presentert er oppgavens hovedeksempel. Selv om vi også her vil finne ut om enkelte algebraer er Koszule ved å sjekke om Λ_0 er lineær, vil vi i stor grad bruke teorien vi har gått gjennom tidligere i oppgaven. I tillegg til å bruke at Λ er Koszul medfører at Λ er kvadratisk, vil vi også bruke at Λ er Koszul dersom Λ er kvadratisk og monomiell, at $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul dersom I har en kvadratisk Gröbnerbasis. Og vi vil bruke det vi har gått gjennom om Koszuldualet, og benytte oss av at $k\Gamma/I$ er Koszul hvis og bare hvis $k\Gamma/I'$ er Koszul, der I' er det kvadratiske dualet til I. Det blir rimelig åpenlyst at teorien om Koszul-algebraer er svært nyttig, da eksempelet både er stort og mange av idealene I gjør bare det å skrive opp quiveret til Λe_1, for $\Lambda \cong k\Gamma/I$, til en rimelig komplisert affære.

Eksempel. Lar $\Lambda = k\Gamma/I$ der k er kroppen $\mathbb{Z}_2$, I et kvadratisk ideal og Γ er quiveret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Vi lar I_2 stå for k-vektorrommet generert av kvadratiske generatorer av I og vi lar $V_2 = k\{\textit{veier av lengde } 2\}$. Vi har da at I_2 er et undervektorrom av V_2. Vi kaller $\dim_k I_2$ for dimensjonen til idealet I. Siden $I \subseteq \langle \alpha^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2\rangle$ kan vi se på I i 4 dimensjoner.

I dimensjon 0 får vi at $I=0$, så vi må sjekke om $k\Gamma$ er Koszul. Har at grad 0-delen av $k\Gamma$ er $k\Gamma/J$, så vi må sjekke om $k\Gamma/J$ har en lineær oppløsning. Vi dekker $k\Gamma/J$ med $k\Gamma$, som er projektiv som $k\Gamma$-modul og generert i grad 0. Får dermed kjernen J og vi har følgende sekvens:

$$0 \longrightarrow J \hookrightarrow k\Gamma \longrightarrow k\Gamma/J \longrightarrow 0$$

Siden $k\Gamma$ er hereditær og J er en $k\Gamma$-modul, har vi at J er projektiv. Så den projekive oppløsningen av $k\Gamma/J$ stopper her. Vi har også at J er generert i grad 1. Dermed har vi at $k\Gamma/J$ har en lineær oppløsning, så $k\Gamma$ er Koszul.

Ser så på dimensjon 1. Vi skriver opp generatorsettene for I i Tabell 6.3 på neste side. der tallene i tabellen står for koeffisienten til den tilhørende generatoren, i generatorsettet til I_j. For eksempel er $I_5 = \langle \alpha^2+\alpha\beta\rangle$. Legger først merke til at I_5 er isomorf med I_{10}, bare bytt notasjon på α og β. På samme måte er også I_6 isomorf med I_9, I_{11} isomorf med I_{14}, og I_{12} isomorf med I_{13}. Så når det gjelder disse, er det nok å sjekke om en i hvert par er Koszul. Vi har dermed 11 distinkte idealer vi må sjekke.

	α^2	$\alpha\beta$	$\beta\alpha$	β^2
I_1	1	0	0	0
I_2	0	1	0	0
I_3	0	0	1	0
I_4	0	0	0	1
I_5	1	1	0	0
I_6	1	0	1	0
I_7	1	0	0	1
I_8	0	1	1	0
I_9	0	1	0	1
I_{10}	0	0	1	1
I_{11}	1	1	1	0
I_{12}	1	1	0	1
I_{13}	1	0	1	1
I_{14}	0	1	1	1
I_{15}	1	1	1	1

Tabell 6.3: Kvadratiske idealer i dimensjon 1

Fra Teorem 4.2.6 på side 64 vet vi at dersom Λ er kvadratisk og monomiell, så er Λ Koszul. Kan derfor med en gang si at i tabellen over er I_1, I_2, I_3 og I_4 Koszul.

Til og med Λe_1 er svært uoversiktelig for alle de resterende idealene, så vi går over til å bruke teorien om Gröbnerbasis. Bruker Teorem 5.1.9 på side 67 og sjekker om idealene har en kvadratisk Gröbnerbasis. Starter med å konstruere to forskjellige tillatelige ordninger $>$, kaller dem $>_1$ og $>_2$. Siden vi skal se på generatormengden til kvadratiske ideal er det nok for oss å definere de tillatelige ordningene våre for veier av lengde 2. For $>_1$ lar vi derfor $\alpha < \beta$ som induserer følgende ordning: $\alpha^2 < \beta\alpha < \alpha\beta < \beta^2$. For $>_2$ lar vi $\beta < \alpha$ indusere ordningen $\beta^2 < \alpha\beta < \beta\alpha < \alpha^2$. Disse tillatelige ordningene vil også bli brukt når vi regner i dimensjon 2.

Ser på $I_5 = \langle \alpha^2 + \alpha\beta \rangle$. Vi sjekker om $\mathcal{G} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta \rangle$ er en Gröbnerbasis for I. Vi bruker $>_1$, som gir at $\alpha\beta > \alpha^2$. Så tuppen blir $\alpha\beta$. Legger merke til at vi ikke har noen overlapp, da det ikke eksisterer $a, b \in \mathcal{B}$, der a og b ikke deler $\alpha\beta$ slik at $\alpha\beta a = b\alpha\beta$. Altså er $\mathcal{G} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta \rangle$ en kvadratisk Gröbnerbasis for I. Siden I har en kvadratisk Gröbnerbasis kan vi fra Teorem 5.1.9 på side 67 konkludere med at $k\Gamma/\langle \alpha^2 + \alpha\beta \rangle$ er Koszul.

Har heller ingen overlapp når vi tester om $\langle \alpha^2 + \beta\alpha \rangle$ er en Gröbnerbasis for $I_3 = \langle \alpha^2 + \beta\alpha \rangle$, om $\langle \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$ er en Gröbnerbasis for $I_8 = \langle \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$ og om $\langle \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$ er en Gröbnerbasis for $I_{11} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$. Har dermed fra Teorem 5.1.9 på side 67 at $k\Gamma/I$ er Koszul for I_3, I_8 og I_{11}. Fra isomorfien vi har fra å bytte notasjon på α og β, har vi dermed at $\Lambda = k\Gamma/I$

er Koszul for I_9, I_{10} og I_{14}.

For de resterende idealene gir hverken $>_1$ eller $>_2$ en kvadratisk Gröbnerbasis for I. For $I_7 = \langle \alpha^2 + \beta^2 \rangle$ og $I_{12} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \rangle$ ser vi på dualene i stedet. Vi har fra Teorem 5.2.1 på side 68 og fra Teorem 5.2.2 på side 68 at dersom $k\Gamma/I'$ er Koszul, så er også $k\Gamma/I'' = k\Gamma/I$ Koszul.

Regner først ut dualet til $I_7 = \langle \alpha^2 + \beta^2 \rangle$. Vi har at $V_2 = k\{\alpha^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2\}$ og $V_2^* = k\{(\alpha^2)^*, (\alpha\beta)^*, (\beta\alpha)^*, (\beta^2)^*\}$. Vi har dermed at $f_{\alpha^2+\beta^2} = (\alpha^2)^* + (\beta^2)^*$. Vi vet at I_7' er generert av alle kvadratiske elementer ω slik at $f_{\alpha^2+\beta^2}(\omega) = 0$. Vi har at ω er på formen $a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2$, der $a_i \in \mathbb{Z}_2$. Får da at $f_{\alpha^2+\beta^2}(\omega) = a_1 + a_4 = 0$, som gir at $a_1 = a_4$, mens a_2 og a_3 er vilkårlige. Vi får dermed $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_3, a_1) = a_1(1,0,0,1) + a_2(0,1,0,0) + a_3(0,0,1,0)$, som gir oss at $I_7' = \langle \alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta, \beta\alpha \rangle$.

Da heller ikke I_7' har en kvadratisk Gröbnerbasis ser vi på en vektorromsbasis for $k\Gamma/I_7'$:

$$\begin{tikzcd}
 & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\alpha \arrow[dr, "\alpha"'] & & \beta \arrow[dl, "\beta"] \\
 & \alpha^2 &
\end{tikzcd}$$

I og med at quiveret vårt er

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[loop left, "f_\alpha"] \arrow[loop right, "f_\beta"]
\end{tikzcd}$$

har vi kun en simpel vi må undersøke om har en lineær oppløsning, og kun en projektiv til å dekke den med. Vi har at Λe_1 har basisen $k\{\bar{e}_1, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}^2\}$ og quiveret vi kaller Λe_1 gir virkningen av ringen på Λe_1.

$$S_1 = \begin{tikzcd}
 & e_1 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\
0 \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\
 & 0 &
\end{tikzcd} \qquad \Lambda e_1 = \begin{tikzcd}
 & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\alpha \arrow[dr, "\alpha"'] & & \beta \arrow[dl, "\beta"] \\
 & \alpha^2 &
\end{tikzcd}$$

Den projektive oppløsningen av S_1 starter som følger:

$$\begin{tikzcd}
P_1 = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_1 \arrow[rr, dotted, "f_1"] \arrow[dr, "\delta_1"] & & P_0 = \Lambda e_1 \arrow[r, "f_0"] & S_1 \\
 & Je_1 \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

der f_1 induseres av pilene til og fra Je_1. Vi ser nøyere på avbildningen $\delta_1\colon P_1 \to \operatorname{Ker} f_0$ for å finne $\operatorname{Ker} f_1$. For fra konstruksjonen av f_1 har vi at $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} \delta_1$.

$$\begin{tikzcd}
& a_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & & b_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & & \\
a_2 \arrow[dr, "\alpha"'] & & a_3 \arrow[dl, "\beta"] & \oplus \arrow[drrrrr, "\delta_1"] & b_2 \arrow[dr, "\alpha"'] & & b_3 \arrow[dl, "\beta"] & & & \\
& a_4 & & & & b_4 & & & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\
& & & & & & & a_1 \arrow[dr, "\alpha"'] & & b_1 \arrow[dl, "\beta"] \\
& & & & & & & & a_2 + a_3 &
\end{tikzcd}$$

Her representerer det første quiveret $a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{\alpha} + a_3\bar{\beta} + a_4\bar{\alpha}^2 \in \Lambda e_1$ og tilsvarende for de andre quiverene. Så vi ser fra diagrammet at i kjernen til δ_1 må $a_1 = b_1 = 0$, videre må $a_2 = -b_3$ siden $a_2 + b_3 = 0$, mens a_3, a_4, b_2, b_3 og b_4 er fri. Vi skriver $a_2 = b_3$, siden vi er over $\mathbb{Z}_2$. Så vi bruker dette til å skrive generatorene av $\operatorname{Ker} f_1$ som $X_1, \cdots, X_5$. Vi definerer dem som følger: $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}\right)$, $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}\right)$, $X_3 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{smallmatrix}\right)$, $X_4 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}\right)$, $X_5 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}\right)$. Vi ser på hvilket basis-element X_i avbildes på når vi anvender henholdsvis α og β, og får slik følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[dr, "\alpha"] & & X_3 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & X_1 \arrow[dl, "\beta"'] \\
& X_5 & & X_4 &
\end{tikzcd}$$

Ser at $P_2 = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_1$. Finner $\operatorname{Ker} f_2$ på tilsvarende måte som vi fant $\operatorname{Ker} f_1$. Skriver P_2 som

$$\begin{tikzcd}
& a_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & & b_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & & c_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
a_2 \arrow[dr, "\alpha"'] & & a_3 \arrow[dl, "\beta"] & \oplus & b_2 \arrow[dr, "\alpha"'] & & b_3 \arrow[dl, "\beta"] & \oplus & c_2 \arrow[dr, "\alpha"'] & & c_3 \arrow[dl, "\beta"] \\
& a_4 & & & & b_4 & & & & c_4 &
\end{tikzcd}$$

og ser at P_2 avbildes på $\operatorname{Ker} f_1$ på følgende måte:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dr, "\alpha"] & & b_1 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & c_1 \arrow[dl, "\beta"'] \\
& a_2 + b_3 & & b_2 + c_3 &
\end{tikzcd}$$

Så i kjernen til $\delta_2\colon P_2 \to \operatorname{Ker} f_1$ må $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, $a_2 = b_3$ og $b_2 = c_3$. Vi ser derfor på $a_2, b_2, c_2, a_3, a_4, b_4$ og c_4 når vi lager 7 generatorer for $\operatorname{Ker} f_2$, som fremstiller kjernen på en ryddig måte. $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix} \right)$, $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{smallmatrix} \right)$, $X_3 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix} \right)$, $X_4 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix} \right)$, $X_5 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix} \right)$, $X_6 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix} \right)$, $X_7 = \left(\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 0 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \right)$. Ser på hvor X_i avbildes når vi anvender henholdsvis α og β, og får følgende diagram:

$$
\begin{tikzcd}
X_4 \arrow[dr, "\alpha"] & & X_2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & X_1 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & X_3 \arrow[dl, "\beta"'] \\
& X_7 & & X_6 & & X_5 &
\end{tikzcd}
$$

Vi oppsummerer og ser at starten på en projektiv oppløsning av S_1 er

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
P_3 \arrow[rrrrrrrr, "f_3"] \arrow[dr, "\delta_3"'] & & & & & & & & P_2 \arrow[rrrrrr, "f_2"] \arrow[dr, "\delta_2"'] & & & & & & P_1 \arrow[rrrr, "f_1"] \arrow[dr, "\delta_1"'] & & & & P_0 \arrow[r, two heads, "f_0"] & S_1 \\
k \arrow[dr, "\alpha"] & & k \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & k \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & k \arrow[dl, "\beta"'] & & k \arrow[dr, "\alpha"] & & k \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & k \arrow[dl, "\beta"'] & & k \arrow[dr, "\alpha"] & & k \arrow[dl, "\beta"'] & & & \\
& k & & k & & k & & & & k & & k & & & & k & & & &
\end{tikzcd}
$$

der $P_i = (\Lambda e_1)^{i+1}$. Vi ser at $\operatorname{Ker} f_i \subseteq JP_i$ for alle $i = 0, 1, 2$. Skifter P_i til grad $[i]$, og har dermed P_i generert i grad i. Og med tilsvarende argumenter som for kjernene over, får vi at P_i er generert i grad i og $\operatorname{Ker} f_i \subseteq JP_i$, $\forall i$.

Tilsvarende som for I_7 kan vi også for I_{12} og I_{15} regne ut I'_{12} og I'_{15}, se på vektorromsbasisene for disse og se at de er Koszul. Vi har dermed fått at i dimensjon 1 er alle Koszul.

Vi går så videre til dimensjon 2. Vi skal fortsette å se på $k\Gamma/I$ der $k = \mathbb{Z}_2$, I er et kvadratisk ideal og quivert er

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"]
\end{tikzcd}
$$

Men i dimensjon 2 må vi sjekke om $k\Gamma/I$ er Koszul når $I = \langle f, g \rangle = \langle a_1\alpha^2 + a_2\alpha\beta + a_3\beta\alpha + a_4\beta^2, a_5\alpha^2 + a_6\alpha\beta + a_7\beta\alpha + a_8\beta^2 \rangle$, der $a_i \in \mathbb{Z}_2$ og f og g er lineært uavhengige. Vi må ha at både f og g er ulik null, for å holde oss i dimensjon 2, og g må velges ulik f. Vi får dermed $(2^4 - 1) \cdot (2^4 - 1 - 1) = 210$ mulige idealer I. Vi vil derfor også her se på en del symmetrier og likheter som kutter ned på andelen idealer vi må sjekke. Vi sier at $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, siden disse gir oss akkurat samme ideal. Vi sier at to idealer er symmetriske, dersom de blir like når en bytter om på α og β og vi legger merke til at det medfører at dersom vi for eksempel har undersøkt alle idealer på formen $\langle \alpha^2, g \rangle$, har vi også oversikt over alle idealer på formen $\langle \beta^2, g \rangle$. Videre sier vi at for eksempel $\langle \alpha^2, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \rangle = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta^2 \rangle$ og lignende. Vi får derfor ingen idealer på formen $\langle$*tre elementer*, *tre elementer*$\rangle$ eller lignende, da de minst vil reduseres til $\langle$*to elementer*, *tre elementer*$\rangle$ og så videre. Etter disse likehetene og symmetriene sitter vi igjen med 29 distinkte idealer I, se Tabell 6.4 på side 83.

Skal nå forklare Tabell 6.4 på side 83 og komme med eksempler på utregningene tabellen presenterer. Vi har fra Korollar 4.2.6 på side 64 at dersom et ideal er kvadratisk og monomielt,så er $\Lambda \cong k\Gamma/I$ Koszul, og dermed vet vi at for de fire første idealene i tabellen, så er $\Lambda \cong k\Gamma/I$ Koszul.

Vi vet fra Teorem 5.1.9 på side 67 at $\Lambda \cong k\Gamma/I$ er Koszul, dersom I er et kvadratisk ideal som har en kvadratisk Gröbnerbasis. Så for de idealene som vi har funnet en kvadratisk Gröbnerbasis for, vet vi at $\Lambda \cong k\Gamma/I$ er Koszul. Et eksempel på utregning av en kvadratisk Gröbnerbasis, er hvordan vi finner dette for $I_{14} = \langle \alpha^2+\beta\alpha, \alpha\beta+\beta^2\rangle$. Vi starter med å finne tuppen til I_{14}. Vi setter $f = \alpha^2 + \beta\alpha$ og $g = \alpha\beta + \beta^2$. Vi anvender $>_1$, der $\beta > \alpha$. Får dermed at $\mathrm{Tip}(f) = \beta\alpha$ og $\mathrm{Tip}(g) = \beta^2$. Vi tester så om $G = \langle f, g\rangle$ er en Gröbnerbasis for I_{14}. Vi ser at vi har to overlapp: (1): $\mathrm{Tip}(g)\alpha = \beta\,\mathrm{Tip}(f)$, siden $\beta^2\alpha = \beta\beta\alpha$ og (2): $\mathrm{Tip}(g)\beta = \beta\,\mathrm{Tip}(g)$, siden $\beta^2\beta = \beta\beta^2$. Vi sjekker først (1) og får at

$$\begin{aligned}
o(g, f, \beta, \alpha) &= g\alpha - \beta f \\
&= (\alpha\beta + \beta^2)\alpha - \beta(\alpha^2 + \beta\alpha) \\
&= \alpha\beta\alpha - \beta\alpha^2 \\
&= \alpha\,\mathrm{Tip}(f) - \beta\alpha^2 \\
\alpha\beta\alpha - \beta\alpha^2 - \alpha f &= \alpha\beta\alpha - \beta\alpha^2 - \alpha(\alpha^2 + \beta\alpha) \\
&= -\beta\alpha^2 - \alpha^3 \\
&= -\mathrm{Tip}(f)\alpha - \alpha^3 \\
-\beta\alpha^2 - \alpha^3 + f\alpha &= -\beta\alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^3 + \beta\alpha^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Så det første overlappet er i orden. Vi sjekker (2) og får at

$$\begin{aligned}
o(g, g, \beta, \beta) &= g\beta - \beta g \\
&= \alpha\beta^2 + \beta^3 - \beta^3 - \beta\alpha\beta \\
&= \alpha\beta^2 - \beta\alpha\beta \\
&= \alpha\,\mathrm{Tip}(g) - \beta\alpha\beta \\
\alpha\beta^2 - \beta\alpha\beta - \alpha g &= -\beta\alpha\beta - \alpha^2\beta \\
&= -\mathrm{Tip}(f)\beta - \alpha^2\beta
\end{aligned}$$

Og får til slutt at $-\beta\alpha\beta - \alpha^2\beta + f\beta = 0$. Vi har dermed at begge overlappene reduseres til 0 og har dermed fra Teorem 5.1.8 på side 66 at I_{14} har en kvadratisk Gröbnerbasis, så $k\Gamma/I_{14}$ er en Koszul-algebra.

En del av idealene i Tabell 6.4 på side 83 har fått kommentaren at de kan regnes om til et annet ideal. Teknikkene vi bruker for å gjøre det for et ideal $I = \langle f, g\rangle$ er å bytte om på α og β, bytte plass på f og g og ved å trekke generatorene i I fra hverandre, som vil si at vi sier at $\langle f, g\rangle = \langle f-g, g\rangle$. Ved å trekke generatorene fra hverandre vil vi for eksempel få at $\langle \alpha\beta, \alpha^2+\alpha\beta\rangle = \langle \alpha\beta, \alpha^2\rangle$. Dersom vi kan regne et ideal om til et annet ved å bruke disse teknikkene, sier vi at de to idealene er like. Vi skal nå se et eksempel på en slik utregning, der vi skal vise at $I_{20} = I_{21}$. Vi husker at kroppen vi regner over er $\mathbb{Z}_2$, så for eksempel er $\alpha\beta = -\alpha\beta$.

$$\begin{aligned}
I_{20} &= \langle \alpha\beta + \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha\rangle \\
&= \langle \alpha\beta + \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha, \alpha\beta + \beta\alpha\rangle \\
&= \langle \alpha^2 + \beta\alpha, \alpha\beta + \beta\alpha\rangle \\
&= \langle \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha^2 + \beta\alpha\rangle \\
&= \langle \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha\beta + \beta^2\rangle \\
&= I_{21}
\end{aligned}$$

Så siden I_{21} gir at $\Lambda = k\Gamma/I$ er en Koszul-algebra, blir Λ også Koszul når vi lar I være I_{20}.

Vi har fra Teorem 3.2.1 på side 50 at dersom Λ er Koszul, så er også $E(\Lambda)$ Koszul. Videre har vi fra Seksjon 5.2 på side 68 om Koszuldualet at dersom $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul, så er $E(\Lambda) \cong k\Gamma/I'$ der I' er det kvadratiske dualet til I. Siden samme seksjon også gir et teorem om at det kvadratiske dualet til I' er I, kan vi sjekke om $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul ved å sjekke om $\Lambda \cong k\Gamma/I'$ er Koszul. Så hvis vi finner at I_y er dualet til I_x holder det å sjekke om en av dem gir en Koszul-algebra. I Tabell 6.4 på side 83 har vi for eksempel funnet at I_{18} er det kvadratiske dualet til I_{12}, utregningen av dette har vi allerede regnet som et eksempel på hvordan vi finner det kvadratiske dualet i Seksjon 5.2 på side 68.

Når det kommer til $I_6, I_7, I_{10}, I_{12}, I_{26}$ og I_{28} kan vi se at ingen av disse er Koszul-algebraer ved å lage projektive oppløsninger av enten dem selv eller de kvadratiske dualene deres, og se at disse ikke er lineære. For de fleste av dem er ikke engang P_3 generert i grad 3, men i grad 3 og 4. Der P_3 er fra en projektiv oppløsning på formen $\cdots P_4 \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to I_x \to 0$. Vi går gjennom ett eksempel på dette. Vi velger oss idealet $I_{10} = \langle \alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2\rangle$ og ser på en vektorromsbasis for $k\Gamma/I_{10}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & \alpha \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \beta \arrow[dl, "\beta"] \\
\beta\alpha & & \alpha_2 &
\end{tikzcd}$$

I og med at quiveret vårt er

$$\begin{tikzcd} V \arrow[loop left, "f_\alpha"] \arrow[loop right, "f_\beta"] \end{tikzcd}$$

har vi kun en simpel vi må undersøke om har en lineær oppløsning, og kun en projektiv til å dekke den med. Vi har at Λe_1 har basisen $k\{\bar{e}_1, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}^2, \bar{\beta\alpha}\}$ og quiveret vi kaller Λe_1 gir virkningen av ringen på Λe_1.

$$S_1 = \begin{tikzcd} & & e_1 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & & 0 \arrow[dl, "0"] \\ 0 & & 0 & \end{tikzcd} \qquad \Lambda e_1 = \begin{tikzcd} & & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ & \alpha \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \beta \arrow[dl, "\beta"] \\ \beta\alpha & & \alpha^2 & \end{tikzcd}$$

Vi starter den projektive oppløsningen av S_1 med å dekke den med $P_0 =: \Lambda e_1$. Så vi får $P_0 = \Lambda e_1 \xrightarrow{f_0} S_1$, får kjernen $\operatorname{Ker} f_0 = Je_1$ som vi igjen dekker med $P_1 =: \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_1$. Så vi har følgende start på en projektiv oppløsning av S_1:

$$\begin{tikzcd} P_1 = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_1 \arrow[rr, dotted, "f_1"] \arrow[dr, two heads, "\delta_1"] & & P_0 = \Lambda e_1 \arrow[r, "f_0"] & S_1 \\ & \operatorname{Ker} f_0 = Je_1 \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

der f_1 induseres av pilene til og fra Je_1. Vi ser nøyere på avbildningen $\delta_1 \colon P_1 \to \operatorname{Ker} f_0$ for å finne $\operatorname{Ker} f_1$. For fra konstruksjonen av f_1 har vi at $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} \delta_1$.

$$\begin{tikzcd} & & a_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ & a_2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & a_3 \arrow[dl, "\beta"] \\ a_5 & & a_4 & \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} & & b_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ & b_2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & b_3 \arrow[dl, "\beta"] \\ b_5 & & b_4 & \end{tikzcd} \xrightarrow{\delta_1} \begin{tikzcd} & & 0 \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "0"] & \\ & a_1 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & b_1 \arrow[dl, "\beta"] \\ a_3 & & a_2 + b_3 & \end{tikzcd}$$

Her representerer det første quiveret $a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{\alpha} + a_3\bar{\beta} + a_4\bar{\alpha}^2 + a_4\bar{\beta\alpha} \in \Lambda e_1$ og tilsvarende for de andre quiverene. Så vi ser fra diagrammet at i kjernen til δ_1 må $a_1 = b_1 = a_3 = 0$, videre må $a_2 = b_3$ og vi har at $a_4, a_5, b_2, b_3, b_4, b_5$ alle er fri. Vi skriver om generatorene av $\operatorname{Ker} f_1$ til å være på formen $X_1, X_2, \cdots X_6$, der vi lar X_1 ha a_2 og b_3 lik 1 og resten null. Som vil si at vi lar $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 1 \\ 0 & & 0 & \end{smallmatrix} \right)$. Vi ser da at vi ved å anvende α på X_1 får $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{smallmatrix} \right)$. Ved å anvende β på X_1 får vi $X_3 = \left(\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 1 & & 0 & \end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{smallmatrix} \right)$. De resterende basiselementene blir $X_4 = \left(\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{smallmatrix} \right)$, $X_5 = \left(\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{smallmatrix} \right)$ og $X_6 = \left(\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & 0 & & 0 \\ 1 & & 0 & \end{smallmatrix} \right)$. Vi får slik at basisen til $\operatorname{Ker} f_1$ blir på formen

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & X_4 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
X_2 & & X_3 & X_5 & & X_6
\end{tikzcd}$$

Vi ser at for å dekke over $\operatorname{Ker} f_1$ må definere $P_2 =: \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_1$.

$$\begin{tikzcd}
 & & a_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & & & b_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & & \\
 & a_2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & a_3 \arrow[dl, "\beta"] & \oplus & & b_2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & b_3 \arrow[dl, "\beta"] & & \\
a_5 & & a_4 & & & b_5 & {} \arrow[dr, "\delta_1"] & b_4 & & & \\
 & & & & & & a_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & {} & & b_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & & & & & a_2 & & a_3 & b_2 & & b_3
\end{tikzcd}$$

Vi får dermed at i $\operatorname{Ker} f_2$ så må $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, mens a_4, a_5, b_4 og b_5 er fri. Vi får dermed at $\operatorname{Ker} f_2$ blir

$$Y_1 \qquad Y_2 \qquad Y_3 \qquad Y_4$$

Vi tar et overblikk og ser at for at oppløsningen så langt skal være lineær, må vi skifte P_1 til grad 1 og P_2 til grad 2. Men dette gir at elementene i $\operatorname{Ker} f_2$ må være i grad 4, som vil si at P_3 må være generert i grad 4. Altså har S_1 ingen lineær oppløsning, så $k\Gamma/I_{10}$ er ikke Koszul.

Vi skal nå se på dimensjon 3 og dimensjon 4. Disse kan enkelt løses ved å se på følgende. Vi lar $\Lambda = k\Gamma/I$, og vi lar I_2 være k-vektorrommet generert av de kvadratiske generatorene av I. Så hvis for eksempel $I = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$, så er $I_2 = \{a \cdot \alpha^2 + b \cdot (\alpha\beta + \beta\alpha) \mid a, b \in k\}$. Siden en k-basis for alle veier av lengde 2 i Γ er $k\{\alpha^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta^2\}$, har vi alltid at $\dim_k I_2 + \dim_k I_2' = 4$, der I' er dualet til I. Vi får dermed at dimensjon 3 er dualt til dimensjon 1 og dimensjon 4 er dualt til dimensjon 0. Siden $k\Gamma/I$ er Koszul hvis og bare hvis $k\Gamma/I'$ er Koszul, der I' er dualet til I og $I'' = I$, får vi at vi har samme antall distinkte Koszul-algebraer i dimensjon 3 som i dimensjon 1 og samme antall i dimensjon 4 som i dimensjon 0. Så siden vi hadde 11 distinkte idealer i grad 1 som alle ga at $k\Gamma/I$ er Koszul, vil vi også i dimensjon 3 ha 11 distinkte idealer, der alle gir en Koszul-algeba. Og fra dimensjon 0 har vi at dimensjon 4 har ett kvadratisk ideal, og dette idealet gir en Koszul-algebra.

Mens vi i begge de to første eksemplene fikk at $\Lambda = k\Gamma/I$ var Koszul for alle kvadratiske ideal I, har vi her at dette er tilfelle i alle dimensjonene, untatt dimensjon 2. Dimensjon 2 er dimensjonen med flest distinkte ideal. Før vi så på dualene til idealene, og før vi så på hvilke idealer som kan regnes om til andre, hadde vi 29 ulike idealer. Av disse 29 var kun 16 av dem slik at $k\Gamma/I$ ble en Koszul-algebra.

$I_1 = \langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_2 = \langle \alpha^2, \beta\alpha \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_3 = \langle \alpha^2, \beta^2 \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_4 = \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle$	Kvadratisk og monomiell	Koszul
$I_5 = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_6 = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta^2 \rangle$		
$I_7 = \langle \alpha^2, \beta\alpha + \beta^2 \rangle$		
$I_8 = \langle \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_9 = \langle \alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha \rangle$	Dualet til I_6	
$I_{10} = \langle \alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2 \rangle$		
$I_{11} = \langle \alpha\beta, \beta\alpha + \beta^2 \rangle$	Dualet til I_7	
$I_{12} = \langle \alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2 \rangle$		
$I_{13} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta, \beta\alpha + \beta^2 \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{14} = \langle \alpha^2 + \beta\alpha, \alpha\beta + \beta^2 \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{15} = \langle \alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{16} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta, \alpha^2 + \beta\alpha \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{17} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2 \rangle$	Kan regnes om til I_{18}	
$I_{18} = \langle \alpha^2 + \beta\alpha, \alpha^2 + \beta^2 \rangle$	Dualet til I_{12}	
$I_{19} = \langle \alpha\beta + \alpha^2, \alpha\beta + \beta^2 \rangle$	Kan regnes om til I_{18}	
$I_{20} = \langle \alpha\beta + \alpha^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$	Kan regnes om til I_{21}	Koszul
$I_{21} = \langle \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha\beta + \beta^2, \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{22} = \langle \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{23} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \alpha\beta + \beta\alpha \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{24} = \langle \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2, \alpha^2 + \beta^2 \rangle$	Har kvadratisk Gröbnerbasis	Koszul
$I_{25} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha, \alpha^2 + \beta^2 \rangle$	Kan regnes om til I_{24}	Koszul
$I_{26} = \langle \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \alpha^2 + \beta\alpha \rangle$		
$I_{27} = \langle \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2, \alpha^2 + \beta\alpha \rangle$	Kan regnes om til I_{26}	
$I_{28} = \langle \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta \rangle$		
$I_{29} = \langle \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2, \alpha^2 + \alpha\beta \rangle$	Kan regnes om til I_{28}	

Tabell 6.4: Distinkte kvadratiske idealer i dimensjon 2

Sammendrag og videre arbeid

I denne oppgaven om Koszul-algebraer har vi latt Λ være en splitt basisk endelig 1-generert k-algebra. Vi har brukt at vi da kan se Λ på formen $k\Gamma/I$, der k er en kropp, Γ et quiver og I er relasjonene. Vi har vist at dersom Λ er Koszul, så er Λ kvadratisk, og at dersom Λ er Koszul, så er Yoneda-algebraen til Λ, som vi benevner som $E(\Lambda)$, også Koszul. Vi har også vist at dersom Λ er kvadratisk og monomiell, så er Λ Koszul. Dette har vi brukt for å kunne regne mer effektivt i flere eksempler der vi har sjekket om $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul for de kvadratiske idealene I. I eksemplene har vi også brukt at $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul hvis og bare hvis $E(\Lambda) \cong k\Gamma/I'$ er Koszul. Og vi har brukt at dersom I har en kvadratisk Gröbnerbasis, så er $k\Gamma/I$ Koszul, i tillegg til at vi også har undersøkt noen eksempler ved å finne lineære oppløsninger av Λ_0, eventuelt vist at Λ_0 umulig kan ha en lineær oppløsning.

I et videre arbeid med oppgaven ville kanskje en av de første tingene jeg ville ha sett mer på, vært et bevis av at når $\Lambda = k\Gamma/I$ er Koszul, så er $E(\Lambda) \cong k\Gamma/I'$, der I' er det kvadratiske dualet til I.

Ser at i eksempelet hvor vi så på $\Lambda = k\Gamma/I$ der $k = \mathbb{Z}_2$, I et kvadratisk ideal og Γ quiveret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

var alt i dimensjon 1 Koszul. Dette er ingen tilfeldighet da det er vist av Backelin [Bac82] at dersom vi har et quiver med kun ett hjørne og vi har at $\Lambda = k\Gamma/(f)$, der $(f) \in (k\Gamma)_2$, da er Λ Koszul. Så i et videre arbeid med oppgaven, kunne kanskje dette vært noe å sette seg inn i.

Videre hadde det selvfølgelig vært artig å se på flere eksempler, undersøke for hvilke ideal I vi har at $k\Gamma/I$ er Koszul, både for flere quivere Γ og for større kropper k. Med ubegrenset tid til dette kunne det jo ha vært interessant å se etter system i hvilke typer quivere en stor andel av de kvadratiske idealene I gir en Koszul-algebra $k\Gamma/I$. Og om dette varierer etter hvilken kropp k, en ser på. Her har jeg sett litt på $\Lambda = k\Gamma/I$, der I er et kvadratisk ideal, Γ er quiveret

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

for kroppen $k = \mathbb{Z}_3$. Vet at dimensjon 1 er Koszul fra Backelin, så vi kan gå rett på dimensjon 2. I dimensjon 2 får vi hele $(3^4 - 1) \cdot (3^4 - 1 - 1) = 80 \cdot 79 = 6320$ lineært uavhengige ideal I. Så en litt større kropp k medfører en drastisk større mengde ideal I som må undersøkes. Så å jobbe med dette eksempelet har vært å se på hva som kan samle I-ene i ekvivalensklasser og å starte på å lage et program som finner disse ekvivalensklassene.

Bibliografi

[AB74] Maurice Auslander and David A. Buchsbaum. *Groups, rings, modules*. Harper & Row Publishers, New York, 1974. Harper's Series in Modern Mathematics.

[Bac82] Jörgen Backelin. *A distributiveness property of augmented algebras, and some related homological results*. Ph. D. thesis, 1982.

[GMV96] Edward L. Green and Roberto Martínez Villa. Koszul and Yoneda algebras. In *Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994)*, volume 18 of *CMS Conf. Proc.*, pages 247–297. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Gre99] Edward L. Green. Noncommutative Gröbner bases, and projective resolutions. In *Computational methods for representations of groups and algebras (Essen, 1997)*, volume 173 of *Progr. Math.*, pages 29–60. Birkhäuser, Basel, 1999.

[GZ94] Edward L. Green and D. Zacharia. The cohomology ring of a monomial algebra. *Manuscripta Math.*, 85(1):11–23, 1994.

[NVO04] Constantin Năstăsescu and Freddy Van Oystaeyen. *Methods of graded rings*, volume 1836 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Rot79] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*, volume 85 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979.