

# Om Banachs fikspunktteorem og The Scottish Café

-Anvendelser av Banachs fikspunktteorem. -Kulturhistorisk bakgrunn for forståelsen av The Scottish Café.

**Torger Johannes Nilsen**

Master i matematikk  
Oppgaven levert: Juli 2006  
Hovedveileder: Per Hag, MATH



# Forord

Matematikk er morsomt, og det å være matematikklærer er ikke så mye dårligere. Det var dette jeg hadde i tankene da jeg i sin tid begynte å studere matematikk, og det har fulgt meg videre inn i arbeidet med masteroppgaven. Derfor ønsket jeg å fordype meg i et matematisk emne som på en eller annen måte skulle ha relevans til mitt daglige arbeid som matematikklærer.

Det var min veileder førsteamanuensis Per Hag som høsten 2003 viste meg *The Scottish book* og fortalte om matematikkmiljøet fra mellomkrigstiden knyttet til *The Scottish Café* i den polske byen Lvov. For meg virket dette stoffet umiddelbart tiltrekkende, og jeg bestemte meg ganske raskt for at dette skulle danne grunnlag for min masteroppgave. (For de som ikke kjenner noe til dette, kan jeg berolige med at videre lesning vil oppklare mye.)

For alle som har studert matematikk på et noe høyere nivå, er **Stefan Banach (1892-1945)** vanskelig å unngå. Jeg ble raskt klar over at Banach var en sentral skikkelse i miljøet knyttet til *The Scottish Café*. På dette tidspunktet hadde jeg et heller overfladisk forhold til Banach gjennom arbeid med metriske rom og Banachrom. Spesielt forbandt jeg navnet med *Banachs fikspunktteorem* som jeg kort tid før hadde hatt et inspirerende møte med. Da jeg begynte å tilnærme meg matematikken fra *The Scottish Café*, var det derfor naturlig å begynne arbeidet med dette teoremet. Jeg ble ganske raskt klar over at dette var ett av de første, store resultatene Banach produserte.

Det viste seg at arbeidet ble så interessant og omfattende at det vanskelig kunne kombineres med noe annet innenfor rammene for denne type oppgave. I all sin enkelthet viser teoremet hvordan ganske forskjelligartede problemer kan løses med den samme tilnæringsmåte hvis to betingelser er oppfylt. Vi vil komme tilbake til hvilke betingelser det her er snakk om. Et hovedanliggende for denne oppgaven blir derfor å vise hvordan Banachs fikspunktteorem er en generalisering av forskjellige metoder fra forskjellige tidsperioder og disipliner av matematikken. Teoremet har en svært bred anvendelsesflate, og de aller enkleste anvendelsene er pensum i den videregående skole. Banachs fikspunktteorem vil være den ytre rammen for det meste av det vi skal innom av matematikk.

Banach fikspunktteorem var både enkelt å forstå og bruke når de to nevnte betingelsene

var til stede. Det vanskelige arbeidet var oftest knyttet til om betingelsene virkelig var oppfylt. Undersøkelsen av dette ledet meg i forskjellige retninger. Jeg måtte bruke resultater fra områder som eksempelvis *lineær algebra*, *funksjonalanalyse*, *grafteori* og *numerisk matematikk*. Tildels måtte resultater fra ulike disipliner kombineres for å få fram de ønskede resultatene. Etter hvert som jeg arbeidet meg gjennom dette stoffet, satte jeg de ulike resultatene inn i en matematikkhistorisk sammenheng. Så langt det har vært mulig, blir leseren tatt med gjennom dette.

Parallelt med de matematiske studiene var det nødvendig for meg selv å plassere *The Scottish Café* både geografisk, kulturelt og historisk. Erfaring har lært meg at den aktuelle situasjonen oftest blir lettere å forstå ved en slik arbeidsmåte. Det viste seg at Lvov hadde skiftet navn til Lviv og ligger i dag i Ukraina. Dette var interessant i seg selv fordi jeg hadde en forestilling om at Lvov var i Polen. Så hvorfor navneskiftet og hvorfor ikke polsk? - Jeg skjønnte at skulle jeg ha mulighet til å besvare slike spørsmål, måtte jeg sette meg inn i den bakenforliggende historien. Dette medførte betydelig, men interessant lesning, og etterhvert var jeg i stand til bedre å skjønne noen av de historiske sammenhengene som *The Scottish Café* var en del av. Jeg fortsatte så lesningen av “den matematiske historien”. Med dette mener jeg litteratur som beskriver miljøet med tanke på matematikken som ble skapt. Dette førte til ytterligere interessant lesning. Jeg leste om Stefan Banach, om Stanislaw Ulam, om Hugo Steinhaus for å nevne noen. Ikke minst leste jeg så mye jeg kunne om *The Scottish Café*.

Da jeg begynte å samstille “den matematiske historien” med det jeg hadde lest forøvrig, oppdaget jeg at det var mange møtepunkter. Det gikk opp for meg at det gikk linjer fra den lille kaféen i Lvov inn i verdenshistorien blant annet ved at en fra *The Scottish Café*, Stanislaw Ulam ble med i *Manhattan-prosjektet* mot slutten av 2. Verdenskrig. Samtidig var det noe i historien om *The Scottish Café* som var vanskelig å forstå. Etter ytterligere lesning og arbeid med stoffet, begynte et nytt bilde av *The Scottish Café* å tre fram der jødenes situasjon i Polen i mellomkrigstiden var et sentralt element. Da alt dette ble klart for meg, bestemte jeg meg for å innpasse stoffet i oppgaven, og det er i hovedsak samlet i Kapittel 7. Det sentrale i dette kapitlet er å se utviklingen av den matematiske forskningen i *The Scottish Café* og i Lvov forøvrig i lys av den historiske utviklingen i Polen, Europa og Verden. Det handler altså om å sette *The Scottish Café* inn en kulturhistorisk sammenheng.

Når jeg nå står ved avslutningen av mitt mastergradstudium i matematikk, har jeg mange å takke:

Min veileder Per Hag har fra første gang jeg tok kontakt med NTNU vært inspirerende og gitt gode råd. Han har fulgt meg gjennom alle disse årene siden, og det var naturlig at han ble min veileder da jeg begynte arbeidet med masteroppgaven. I ettertid har jeg igjen og igjen fått erfare at dette var et heldig valg. Jeg vil takke for omtanke og engasjement gjennom hele prosessen, for et inspirerende samarbeid, for kritiske merknader og for gode

innspill.

Å være i et studentmiljø dette året har vært svært innspirende blant annet fordi det hver dag har vært mulig å diskutere matematiske problemstillinger med andre. Jeg vil takke alle som gjennom dette året har delt sine tanker og erfaringer med meg på denne måten. Spesielt vil jeg takke brødrene Asgeir Steine og Vegard Bertelsen som gjentatte ganger har latt seg engasjere av mine mange spørsmål. De har ved sin sjenerøsitet og tidvise genialitet gjort dette året både hyggelig og lærerikt. En spesiell takk også til de som jeg har delt kontor plass med og som etterhvert ble mine venner. De har også bidratt til å gjøre dette året minnerikt.

Min egen arbeidsplass Mosjøen videregående skole har på alle måter lagt forholdene til rette for meg, og jeg er svært takknemlig for dette. Mine kolleger Øyvind Bergh, Harry Breines og Hugo Raste har vært til stor hjelp. Øyvind Bergh har hjulpet med oversettelse av engelske tekster. Harry Breines har gjennom mange samtaler bidratt til forståelsen av Polen og mellomkrigshistorien. Hugo Raste har gitt nyttige kommentarer mot slutten av skriveprosessen. Hans Pedersen ved Helgeland Museum har kommet med gode innspill i forhold til det kulturhistoriske stoffet.

Sist, men ikke minst må jeg rette en stor takk til min egen familie og til min kone Halfrid. Uten deres deltakelse hadde det ikke vært mulig å gjennomføre dette studiet og slutføre oppgaven. Spesielt takk til min yngste datter Marte som har bidratt med alle håndtegnene i oppgaven!

Mosjøen, 8. juli 2006

Torger Nilsen



# Sammendrag

I **kapittel 1** gjøres klart hvilke forkunnskaper som er nødvendige for å kunne forstå og ha utbytte av å lese denne oppgaven. Det henvises også til litteratur som kan brukes som oppslagsverk hvis noen begreper under lesningen skulle være ukjente.

I **kapittel 2** klargjøres sentrale begreper som *fikspunkt*, *kontraksjon* og *kompletthet*. Dernext presenteres *Banachs fikspunktteorem* med bevis. Kapitlet peker også mot ulike anvendelser av teoremet.

**Kapittel 3** handler i sin helhet om den velkjente *Newtons metode*. I sin enkelthet demonstrerer den hvordan vi kan finne tilnærmede løsninger ved *iterasjoner*. Arbeid med denne metoden er derfor nyttig for forståelse av Banachs fikspunktteorem og anvendelser av teoremet i mer abstrakte sammenhenger.

I **kapittel 4** viser vi hvordan vi kan finne en tilnærmet løsning av *en partiell differensialligning* ved hjelp *Jacobi-iterasjon*. For å demonstrere metoden tar vi utgangspunkt i et velkjent varmeledningsproblem. Vi bruker Banachs fikspunktteorem for å vise at metoden kan brukes i vårt tilfelle. Dette leder oss inn i flere disipliner av matematikken, og vi får derved demonstrert ulike teknikker for å løse denne type problemer.

I **kapittel 5** dreier det seg om differensialligninger og integralligninger. Som vi skal se har *Picards entydighets- og eksistensteorem* nær tilknytning til Banachs fikspunktteorem. Vi vil få demonstrert hvordan metoden kan brukes til å finne tilnærmede løsninger og i noen tilfeller eksakte løsninger av ordinære differensialligninger. Vi gir også et enkelt eksempel på bruk av Banachs fikspunktteorem i forhold til en spesiell type integralligning, *Fredholm-ligninger*.

I **kapittel 6** bruker vi Banachs fikspunktteorem til å bevise *det inverse funksjonsteoremet*.

I **kapittel 7** er siktemålet å sette The Scottish Café inn i en kulturhistorisk sammenheng. Vi begynner med å skissere et historisk bakteppe hvor vi søker å gi en viss oversikt over Polens historie. Behandlingen av jøder i Polen fram til 1940 blir et hovedtema. Dernext beskriver vi historien til *The Scottish Café*. Vi gir også en vurdering av hvilke faktorer som hadde betydning for utviklingen av miljøet. Noe av hovedkonklusjonen er at utviklin-

gen av de sterke matematikkmiljøene i Polen i mellomkrigstiden langt på vei kan sees på som en del av nasjonsbyggingen i Polen. Utviklingen av det spesielle og særegne miljøet i *The Scottish Café* kan derimot sees som en reaksjon på antisemittismen i det polske samfunnet.

I **kapittel 8** finner vi noen refleksjoner over det vi har arbeidet med.



# Innhold

<b>Forord</b>	<b>i</b>
<b>Sammendrag</b>	<b>v</b>
<b>1 Grunnlag</b>	<b>1</b>
1.1 Matematisk analyse . . . . .	1
1.2 Lineær algebra . . . . .	1
1.3 Mengdelære . . . . .	2
1.4 Metriske rom . . . . .	2
<b>2 Banachs fikspunktteorem</b>	<b>3</b>
2.1 Innledning . . . . .	3
2.2 Noen sentrale begreper . . . . .	3
2.2.1 Fikspunkt og fikspunktteoremer . . . . .	3
2.2.2 Komplette metriske rom . . . . .	7
2.2.3 Kontraksjon . . . . .	7
2.2.4 Eksistens og entydighet . . . . .	8
2.3 Banachs fikspunktteorem . . . . .	9
2.3.1 Iterasjonsprosesser . . . . .	11
2.3.2 Feilmarginer . . . . .	11
2.3.3 Betingelsen $\alpha < 1$ . . . . .	12
2.4 Historisk bakgrunn . . . . .	12
<b>3 Newtons metode</b>	<b>15</b>
3.1 Den klassiske Newtons metode . . . . .	15
3.2 Historisk bakgrunn . . . . .	19
<b>4 Jacobi-iterasjon</b>	<b>21</b>
4.1 Innledning . . . . .	21
4.2 Presentasjon av problemet . . . . .	21
4.3 Termodynamikkens 1. lov . . . . .	22
4.4 Utledning av en harmonisk funksjon . . . . .	23
4.5 Middelverdiegenskapen hos harmoniske funksjoner . . . . .	26
4.6 Endelig differensmetode med 8 indre punkter . . . . .	27

4.6.1	Kompletthet i $\mathbb{R}^n$ . . . . .	29
4.6.2	Kriterer for at $(M\mathbf{x} + \mathbf{b})$ er en kontraksjon . . . . .	30
4.6.3	Resultater . . . . .	32
4.7	Endelig differansem metode med 45 indre punkter . . . . .	33
4.7.1	Nye problemstillinger . . . . .	33
4.7.2	Noen resultater fra lineær algebra . . . . .	36
4.7.3	Geršgorins disker . . . . .	37
4.7.4	Tausskys teorem . . . . .	38
4.7.5	Litt graf-teori . . . . .	39
4.7.6	Bevis av Tauskys teorem . . . . .	42
4.7.7	Potensmetoden . . . . .	43
4.7.8	Feilmarginer . . . . .	46
4.7.9	Resultater . . . . .	47
4.8	Historisk bakgrunn . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Differensial- og integralligninger</b>	<b>49</b>
5.1	Ordinære differensiallikninger . . . . .	49
5.1.1	Innledning . . . . .	49
5.1.2	Picards eksistens- og entydighetsteorem. . . . .	50
5.1.3	Løsning av ordinære differensialligninger . . . . .	54
5.2	Fredholm-ligninger . . . . .	57
5.3	Historisk bakgrunn . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Det inverse funksjonsteorem</b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b>The Scottish Café</b>	<b>67</b>
7.1	Historisk bakteppe . . . . .	67
7.1.1	Kilder . . . . .	67
7.1.2	Tidlig historie . . . . .	68
7.1.3	1. Verdenskrig . . . . .	69
7.1.4	Polen gjenfødt . . . . .	70
7.1.5	Befolkning . . . . .	71
7.1.6	Antisemittisme . . . . .	71
7.1.7	Enigma . . . . .	73
7.1.8	2. Verdenskrig . . . . .	74
7.1.9	Lvov . . . . .	75
7.2	Indre liv i The Scottish Café . . . . .	76
7.2.1	Kilder . . . . .	76
7.2.2	Den polske Matematikk-skolen og nasjonsbyggingen . . . . .	79
7.2.3	Noe biografisk stoff . . . . .	80
7.2.4	The Scottish Café . . . . .	84
7.2.5	Begynnelsen . . . . .	85
7.2.6	Utenlandske gjester . . . . .	86
7.2.7	The Scottish Book . . . . .	86

7.2.8	Slutten . . . . .	87
7.3	Atombomber og Montecarlo-metoden . . . . .	87
7.3.1	Manhattan-prosjektet . . . . .	88
7.3.2	Monte Carlo-metoden . . . . .	88
7.3.3	Hydrogenbomben . . . . .	89
7.4	Hvorfor oppsto The Schottish Café? . . . . .	90
<b>8</b>	<b>Til slutt</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliografi</b>	<b>97</b>



# Kapittel 1

## Grunnlag

Matematikken er et byggverk som det har tatt flere tusen år å reise. Fra våre tidligste år har vi lært den å kjenne først gjennom lek, så gjennom mer og mindre alvorlige øvelser før det i skolen ble noe mer alvor. Når vi nå skal arbeide med ett avgrenset matematisk emne, er det en vanskelig å bestemme seg for hvor vi skal begynne. Ideelt sett burde en starte fra en samling av aksiomer og ut i fra disse bygge opp en holdbar argumentasjon. Dette ville imidlertid sprengte enhver ramme for oppgaven, og vi ville sannsynligvis aldri komme til det vi primært ønsket å arbeide med. Sagt på en annen måte: Vi må velge et startpunkt og si at dette forventer vi er kjente resultater for dem som skal lese denne teksten. I dette kapitlet vil vi klargjøre dette.

### 1.1 Matematisk analyse

Mange av de tema som berøres i denne oppgaven er videreføring av resultater fra grunnleggende matematiske analyse. I den grad slike resultater blir benyttet, henvises det til *Lindstrøm, Kalkulus* [Lin96]. Det er mye litteratur som omhandler denne type stoff. Denne boken er på norsk og dekker minst like mye som tilsvarende engelske bøker.

### 1.2 Lineær algebra

Vi vil også bruke en del resultater fra lineær algebra forutsettes kjent. *Anton Rorres, Elementary Linear Algebra* [AR94] er den boken som det oftest vil bli henvist til. Det finnes mange andre relevante bøker.

### 1.3 Mengdelære

Mengdelæren er helt sentral for å forstå de temaer som taes opp i denne oppgaven. En viss kjennskap til dette er derfor helt nødvendig. Svært mange lærebøker i matematikk på høyere nivå har et kapittel der det gis en kort innføring i elementær mengdelære. Denne teksten bygger i hovedsak på *Gerald Folland, Real Analysis* [Fol99, s. 1-12]. En rekke andre bøker dekker de samme temaene.

### 1.4 Metriske rom

Det meste av det vi skal arbeide med, foregår i *metriske rom*. I vår tilnærming til stoffet, vil vi i særlig grad bygge på *Erwin Kreyszig, Real Analysis* [Kre78]. Hvis en ønsker en grunnleggende innføring om metriske rom, kan denne boken brukes.

De fleste resultater fra grunnleggende matematisk analyse kan overføres til metriske rom. Dette er ikke så overraskende fordi både de reelle tall  $\mathbb{R}$ , planet  $\mathbb{R}^2$  og rommet  $\mathbb{R}^3$ , er metriske rom. I noen grad vil vi, for å bedre oversikten og øke lesbarheten, referere resultater i teksten framfor å henviser til annen litteratur.

# Kapittel 2

## Banachs fikspunktteorem

### 2.1 Innledning

Vi starter med litt mystikk. Rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad n = 0, 1, \dots, x_0 > 0 \quad (2.1)$$

har ganske overraskende egenskaper. Uansett hvilken startverdi en velger hvor  $x_0 > 0$ , konvergerer følgen mot  $\sqrt{2}$ . Det viser seg faktisk at en hvilken som helst startverdi valgt fra  $\text{Re}z > 0$  i det komplekse planet, vil gi det samme resultat. Et eksempel på en slik følge er:

$$\begin{aligned} x_0 &= 50, & x_1 &= 25.02, & x_2 &= 12.5499, & x_3 &= 3.3347 \\ x_4 &= 1.9672, & x_5 &= 1.4919, & x_6 &= 1.4162, & x_7 &= 1.4142 \end{aligned}$$

I løpet av de neste sidene, vil vi bli i stand til å forstå hvorfor rekursjonsformelen har denne egenskapen, og hvilken sammenheng dette har med Banachs fikspunktteorem. Dette kapitlet bygger særlig på [Kre78, s. 299-303]. Ideer er også hentet fra [SWS97] og [KK01].

### 2.2 Noen sentrale begreper

Banachs fikspunktteorem fyller to linjer med tekst, men vi skal se at disse to linjene er svært innholdsrike. For å kunne forstå teoremet, er det nødvendig å kjenne de underliggende begrepene. Disse begrepene vil bli gjengangere gjennom hele oppgaven. Det er derfor tjenlig å gi disse begrepene en bredere drøfting tidlig i oppgaven.

#### 2.2.1 Fikspunkt og fikspunktteoremer

Begrepet *fikspunkt* møter vi allerede i tittelen av teoremet.

**Definisjon 2.1.** Et fikspunkt for en avbildning  $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  er et punkt  $x \in \mathbf{X}$  som avbildes på seg selv. Det vil si at  $Tx = x$ .

Et enkelt eksempel kan illustrere dette:

**Eksempel 2.2.** La  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  være definert ved  $f(x) = x/2 + 1/x$ .  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$  og dermed er  $x = \sqrt{2}$  et fikspunkt for  $f$ . Hvis vi sammenligner denne funksjonen med rekursjonsformelen (2.1), ser vi en klar sammenheng. Vi husker også at følgen i eksemplet konvergerer mot  $\sqrt{2}$ .

I matematikk handler mye om å løse ligninger. Vi lærer tidlig metoder som kan brukes til formålet. På ett tidspunkt kommer vi til ligninger som er svært vanskelige eller umulige å løse eksakt. I slike sammenhenger kan *tilnæringsmetoder* være anvendelig, og her kan fikspunktteori være til hjelp. Vi skal gi et enkelt eksempel som illustrerer hvordan det å finne et fikspunkt til en avbildning er det samme som å løse en ligning:

**Eksempel 2.3.** Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2 + 12}{7} \quad (2.2)$$

Vi kan så spørre om det finnes noen  $x_0$  slik at  $x_0 = f(x_0)$ . Dette gir ligningen

$$x_0 = \frac{x_0^2 + 12}{7}.$$

Det er ekvivalent med ligningen  $x_0^2 - 7x_0 + 12 = 0$  som har to løsninger  $x_0 = 3$  og  $x_0 = 4$ . Det betyr at  $f$  har fikspunkt i disse to verdiene.

Vi kan også bruke dette motsatt. Vi omformer en ligning til å bli et spørsmål om å finne fikspunktet til avbildning. Vi tar også med et eksempel som viser dette:

**Eksempel 2.4.** Cosinusfunksjonen kan en få et familiært forhold til allerede i den videregående skole. Å løse ligningen  $\cos(x) = x$  skaper likevel raskt bry til tross sin enkle form. I videregående skole løses den oftest geometrisk ved bruk av en kalkulator med graf-funksjon. I tråd med de idéer vi nå drøfter, er det å løse denne ligningen det samme som å finne et fikspunkt til  $\cos(x)$ . Vi har allerede sett at (2.1) kan brukes til å finne fikspunktet til  $f(x)$  i Eksempel 2.2. Kan rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = \cos(x_n) \quad (2.3)$$

gjøre samme nytten?

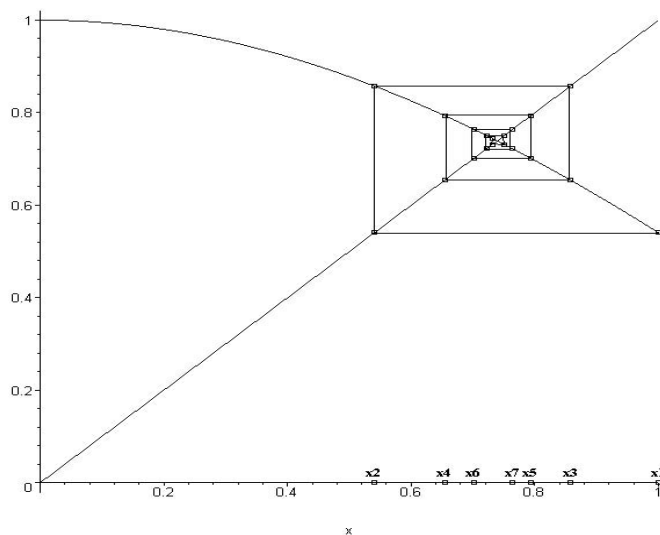
Vi vet ikke før vi har prøvd og velger  $x_0 = 1$  som gir rekursjonsfølgen når hvert ledd er avrundet til 4 desimaler:

$$x_1 = 0.5403 \quad x_2 = 0.8576 \quad x_3 = 0.6542 \quad x_4 = 0.7935 \quad (2.4)$$

$$x_5 = 0.7014 \quad x_6 = 0.7640 \quad x_7 = 0.7221 \quad x_8 = 0.7504 \quad (2.5)$$



Dette ser lovende ut. Vi kaller gjerne en slik gjentagende prosess for *en iterasjon*. Ved tilstrekkelig mange iterasjoner finner vi at  $\cos(0.7390851332) = 0.7390851332$ . Det er altså mye som tyder på at rekursjonsformelen faktisk konvergerer mot et fikspunkt, men enda kan vi ikke vite dette sikkert. Det er derfor interessant å studere hvordan dette arter seg geometrisk. I figur 2.1 er inntegnet funksjonene  $\cos(x)$  og  $x$ . Vi ser at funksjonene krysser hverandre i et punkt som ikke ligger langt fra  $x_7$  som er den siste verdien vi fikk plassert med leselig tekst. Vi har også trukket vannrette og loddrette linjer mellom punktene på grafen og tilsvarende punkter på  $x$ . Det ser ut til at lengden av disse linjene blir kortere og kortere dess lengre ut i iterasjonen vi kommer noe som er et uttrykk for at avstanden mellom  $\cos(x_n)$  og  $x_n$  blir mindre når  $n$  øker. Sammen danner disse linjene er slags "spiral" som ser ut til "å sirkle" rundt kryssningspunktet til  $\cos(x)$  og  $x$ . Det geometriske uttrykket underbygger også vår forestilling om at rekursjonsformelen gir et fikspunkt, men til forskjell fra situasjonen i Eksempel 2.1, kan vi ikke slå dette endelig fast. Vi vet bare at vi har likhet inntil 10 desimaler.



Figur 2.1: Fikspunktet til Cosinusfunksjonen

Vi er nå klar til å presentere vårt første fikspunktteorem

**Teorem 2.5.** *La  $[a, b]$  være et lukket og begrenset intervall på  $\mathbb{R}$  og la  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  være kontinuerlig. Da har  $f$  et fikspunkt på  $[a, b]$ .*

*Bevis.* Siden  $f$  er kontinuerlig, vil  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definert ved  $g(x) = x - f(x)$  også være en kontinuerlig funksjon. Slik  $f$  er definert er  $f(a) \geq a$ . Det medfører at  $g(a) \leq 0$ . Tilsvarende er  $f(b) \leq b$  som gir  $g(b) \geq 0$ . Hvis  $f(a) = a$  eller  $f(b) = b$  har funksjonen et fikspunkt. Vi antar derfor at dette ikke er tilfelle. Da  $g(a) < 0$  og  $g(b) > 0$ . Av

skjæringssetningen [Lin96, s.189] følger nå at det må finnes  $c \in [a, b]$  slik at  $g(c) = 0$ . Det gir  $0 = c - f(c)$  som viser at  $f$  har et fikspunkt.  $\square$

Et par eksempler viser at kravet om lukket intervall er nødvendig for å sikre at vi har fikspunkt selv om vi har kontinuitet.

**Eksempel 2.6.** Avbildningen  $T : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$  definert ved  $f(x) = x/2$  har ikke fikspunkt. Det eneste mulige alternativet var  $0 = f(0)$ , men  $0 \notin (0, 1]$ .

**Eksempel 2.7.** Avbildningen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definert ved  $f(x) = x + 1$ , har ingen fikspunkt.

Det finnes mange fikspunktteorem. Et av de mest berømte er *Brouwers fikspunktteorem*.

**Teorem 2.8** (Brouwers fikspunktteorem). *La  $C$  være enhetsballen i  $\mathbb{R}^n$  og  $T : C \rightarrow C$  en kontinuerlig funksjon. Da har  $T$  et fikspunkt i  $C$ .*

Vi har allerede bevist teoremet for  $n = 1$ . Dette er et spesialtilfelle av Teorem 2.5. Det er mye vanskeligere å bevise teoremet for  $n > 1$ . Vi tar ikke med dette beviset her.

Det er naturlig å spørre om Brouwers fikspunktteorem kan utvides til *uendelig-dimensjonale rom*. Dette kan ikke gjøres generelt. Vi skal vise et eksempel som stammer fra den japanske matematikeren **Shizuo Kakutani (1911-)** [SWS97, s.11]. Dette viser en avbildning uten fikspunkt på enhetsballen til *Hilbertrommet*<sup>1</sup>  $\ell^2$ . Før vi viser eksemplet, trenger vi en definisjon:

**Definisjon 2.9.**  $\ell^2$  er det metriske rommet av alle følger  $x = (\xi_n)_n$ ,  $y = (\eta_n)_n$  som er slik at  $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty$  med metrikken  $d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2\right)^{1/2}$  og  $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$ .

**Eksempel 2.10.** La  $C = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$  være enhetsballen i Hilbertrommet  $\ell^2$ . For enhver  $x = (x_1, x_2, \dots)$  i  $C$  definerer vi avbildningen  $T : C \rightarrow C$  ved

$$Tx = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Nå er  $\|Tx\| = 1$  og  $T$  er kontinuerlig. Vi skal nå vise at  $T$  ikke har noe fikspunkt ved å frambringe en selvmotsigelse.

Vi antar  $T$  har et fikspunkt  $y = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ . Følgelig er  $Ty = y$  og  $\|y\| = 1$ , men

$$\begin{aligned} Ty &= (\sqrt{1 - \|y\|}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \\ &= (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \\ &= y \\ &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots). \end{aligned}$$

Dette gir  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \dots, \xi_n = 0$  eller  $y = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ . Dermed har vi en selvmotsigelse og vi kan slutte at  $T$  *fikspunktfri* [SWS97, s. 11].

<sup>1</sup>For definisjon og grunnleggende teori om Hilbertrom, vises til [Kre78, s.128-134]

Brouwers fikspunktteorem fikk en utvidelse til *et uendelig-dimensjonalt rom* med *Schauders fikspunktteorem*. Vi referer også dette teoremet uten å ta med bevis:

**Teorem 2.11** (Schauders fikspunktteorem). *La  $\mathbf{X}$  være et Banachrom og  $C$  en lukket, begrenset og konveks delmengde av  $\mathbf{X}$ . Videre la  $T : C \rightarrow C$  være en kompakt avbildning. Da har  $T$  minst ett fikspunkt i  $C$ .*

[SWS97, s.12]

### 2.2.2 Komplette metriske rom

*Kompletthetsprinsippet* er opprinnelig en egenskap knyttet til de reelle tall. Metriske rom kan også ha denne egenskapen. Banachs fikspunktteorem kan bare anvendes i *komplette metriske rom*.

**Definisjon 2.12.** En følge  $(x_n)_n$  i et metrisk rom  $(\mathbf{X}, d)$  *konvergerer* hvis det finnes en  $x \in \mathbf{X}$  slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

Vi kaller  $x$  grensen for  $(x_n)_n$  og vi skriver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ eller } x_n \rightarrow x$$

**Definisjon 2.13.** En følge  $(x_n)_n$  i et metrisk rom  $(\mathbf{X}, d)$  er *en Cauchy-følge* hvis det for enhver  $\epsilon \geq 0$  finnes en  $N = N(\epsilon)$  slik at

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ for alle } m, n \geq N$$

**Definisjon 2.14.** Et metrisk rom  $X$  er *komplett* hvis enhver Cauchy-følge i  $X$  konvergerer til et element  $x \in X$ .

### 2.2.3 Kontraksjon

Kontraksjon er den andre betingelsen som må være oppfylt for at Banachs fikspunktteorem kan anvendes. Vi definerer begrepet *kontraksjon* i tilknytning til et annet sentralt begrep i matematisk analyse, *Lipschitzavbildning*:

**Definisjon 2.15.** La  $(\mathbf{X}, d)$  være et metrisk rom. En avbildning  $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  sier vi er *en Lipschitzavbildning* eller oppfyller en *Lipschitzbetingelse* hvis det finnes en konstant  $\alpha > 0$  slik at for alle  $x, y \in \mathbf{X}$  så er

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \tag{2.6}$$

Det minste tall som gjør at (2.6) er sann, kaller vi *Lipschitzkonstanten* til  $T$ .

**Definisjon 2.16.** En Lipschitz-avbildning  $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  sier vi er *en kontraksjon* hvis Lipschitzkonstanten  $\alpha < 1$ .

**Proposisjon 2.17.** La  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  være kontinuerlig og deriverbar i alle indre punkter. Hvis  $f'(x) \leq \alpha < 1$  for alle  $x \in [a, b]$ , vil  $f$  være en kontraksjon.

*Bevis.* Av sekantsetningen følger at det finnes en  $c \in (a, b)$  slik at  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ . Dette gir

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| |b - a| \leq \alpha |b - a|$$

som viser at  $f$  er en kontraksjon. □

**Eksempel 2.18.** Vi kan bruke Proposisjon 2.17 til å vise at funksjonen  $f(x) = x/2 + 1/x$  i Eksempel 2.2, er en kontraksjon.  $f'(x) = 1/2 - 1/x^2 < 1/2$  når  $x > 1$  som gir med gir oss dette resultatet direkte. Det samme gjelder  $\cos(x)$  i Eksempel 2.4.  $f'(x) = \sin(x) < 0.85$  når  $x \in [-1, 1]$ .

Vi skal se at en Lipschitz-avbildning er kontinuerlig. Før vi gjør det, tar vi med definisjonen av kontinuitet i metriske rom.

**Definisjon 2.19.** La  $(X, d)$  og  $(Y, \tilde{d})$  være metriske rom. En avbildning  $T : X \rightarrow Y$  er *kontinuerlig i et punkt*  $x_0 \in X$  hvis det for enhver  $\epsilon > 0$  finnes en  $\delta > 0$  slik at

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \epsilon \quad \text{for alle } x \text{ hvor } d(x, x_0) < \delta$$

$T$  er *kontinuerlig* hvis  $T$  er kontinuerlig i alle punkt av  $X$

**Proposisjon 2.20.** En Lipschitz-avbildning  $T$  i et metrisk rom  $X$  er en kontinuerlig.

*Bevis.* La  $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  være en avbildning slik at  $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ . Vi må altså vise at for enhver  $\epsilon > 0$  finnes det en  $\delta$  slik  $d(Tx, Tx_0) < \epsilon$  når  $d(x, x_0) < \delta$ .

Vi velger en vilkårlig  $\epsilon > 0$  og  $x_0 \in X$  og setter  $\delta = \epsilon/\alpha$ . La  $d(x, x_0) < \delta$ . Siden  $T$  er en Lipschitz-funksjon følger derfor at

$$d(Tx, Tx_0) \leq \alpha d(x, x_0) < \alpha \cdot \frac{\epsilon}{\alpha} = \epsilon.$$

Siden både  $\epsilon$  og  $x_0$  var vilkårlig valgt, har vi vist at  $T$  er kontinuerlig. □

## 2.2.4 Eksistens og entydighet

Banachs fikspunktteorem er både et eksistens- og entydighetsteorem. Å avklare eksistens og entydighet i forhold til løsning av matematiske problemer, er sentralt i matematisk analyse. Det er lett å finne eksempler som viser hvorfor dette er viktig å få belyst.

Differensialligninger har stor anvendelse på mange felter. En ingeniør som som arbeider med en slik ligning for et praktisk formål, vil gjerne vite om den løsningen han/hun finner virkelig eksisterer. I motsatt fall kan mye tid og krefter forspilles på noe som til sist viser

seg umulig. Hvis en løsning er funnet, vil det likeledes være betryggende å vite om dette er den eneste løsningen. Å ta feil i slike sammenhenger kan få store konsekvenser.

Vi tar også her med noen svært enkle eksempler som kan klargjøre begrepene nærmere:

**Eksempel 2.21.** Ligningen

$$2x = 1,$$

har ingen løsning i de hele tall  $\mathbb{Z}$ . I de rasjonale tall  $\mathbb{Q}$  har ligningen en entydig løsning.

**Eksempel 2.22.** Ligningen

$$x^2 = 2$$

har som vi ser to løsninger i de reelle tall  $\mathbb{R}$ . Det er altså ikke en entydig løsning.

## 2.3 Banachs fikspunktteorem

Banachs fikspunktteorem er bemerkelsesverdig enkelt i sin utforming. Det er, som vi skal se, bare to betingelser som skal være oppfylt. Selv om dette er strenge krav, gir teoremet likevel mange anvendelser.

**Teorem 2.23** (Banachs fikspunktteorem). *La  $(\mathbf{X}, d)$  være et metrisk rom. Anta at  $\mathbf{X}$  er komplett og la  $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  være en kontraksjon på  $\mathbf{X}$ . Da har avbildningen  $T$  nøyaktig ett fikspunkt.*

*Bevis.* Beviset inneholder følgende deler:

- (a) Vi konstruerer en følge  $(x_n)_n$  og viser at dette er en Cauchy-følge.
- (b) Vi viser at grenseverdien  $x$  for  $(x_n)_n$  er et fikspunkt for  $T$ .
- (c) Vi viser at fikspunktet er entydig.

**(a) En Cauchy-følge**

Vi velger en vilkårlig  $x_0 \in \mathbf{X}$ . Vi definerer nå en iterasjonsfølge  $(x_n)_n$  ved

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0. \quad (2.7)$$

Vi får altså en følge  $(x_n)_n$  ved gjentatt bruk av  $T$ . For  $m > 2$  følger nå av antakelsen i teoremet at:

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \leq \dots \leq \alpha^m d(x_1, x_0) \quad (2.8)$$

Av trekantulikheten, (2.6) og summasjonsformelen for geometriske rekker følger nå at for  $n > m$ :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Telleren i brøken,  $(1 - \alpha^{n-m})$  til (2.9) er mellom 0 og 1. Dette gir ulikheten:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \quad (2.10)$$

Siden  $\alpha < 1$ , kan høyresiden i ulikheten gjøres så liten vi bare ønsker ved å velge  $m$  stor nok. Dette viser at  $(x_n)_n$  er en *Cauchy-følge*, og siden  $X$  er komplett, er følgen konvergent. Den konvergerer mot en grense i  $X$  som vi kan kalle  $x$ .

**(b) Grensen  $x$  er et fikspunkt for  $T$**

Fra trekantulikheten og (2.10) følger at

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x).$$

For enhver  $\epsilon > 0$  kan vi nå velge  $m$  så stor at  $d(x, x_m) \leq \epsilon/2$  og  $d(x, x_{m-1}) \leq \epsilon/2$  fordi  $x_m \rightarrow x$ . Siden  $\epsilon$  er vilkårlig valgt, betyr det at  $d(x, Tx) = 0$  eller  $Tx = x$ . Altså er  $x$  et fikspunkt.

**(c)  $x$  er eneste fikspunkt**

Vi antar at  $T$  har to fikspunkt  $x, y$ . Dette gir  $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$  som bare er sann hvis  $d(x, y) = 0$  fordi  $\alpha < 1$ . Altså er  $x = y$  siden  $d(x, y)$  er en metrikk. □

Banach fikspunktsteorem har et nyttig korollar:

**Korollar 2.24.** *La  $T : X \rightarrow X$  være en avbildning i et komplett metrisk rom  $(X, d)$  og anta at  $T^m$  er en kontraksjon i  $X$  for et heltall  $m$ . Da har avbildningen  $T$  nøyaktig ett fikspunkt.*

*Bevis.* Av Teorem 2.23 følger at  $T^m$  har et entydig fikspunkt  $x_0$ . Følgelig er

$$T^{m+1}x_0 = T^mTx_0 = TT^mx_0 = Tx_0 \quad (2.11)$$

slik at  $Tx_0$  er også fikspunkt for  $T^m$ . Siden fikspunktet til  $T^m$  er entydig, må vi ha  $x_0 = Tx_0$ . Hvis  $Ty = y$ , altså at  $y$  er et fikspunkt for  $T$ , er  $T^2y = y$ ,  $T^3y = y$ ,  $\dots$ ,  $T^my = y$  som medfører at  $x_0 = y$ . Dette beviser entydighet. □

### 2.3.1 Iterasjonsprosesser

Av (2.7) kan vi konstruere rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (2.12)$$

Denne gir oss konvergerende iterasjonsprosesser når kriteriene i teoremet er oppfylt.

Vi har gjentatte ganger brukt funksjonene  $f(x) = x/2 + 1/x$  og  $\cos(x)$  til å illustrere begrepene i Banachs fikspunktteorem. Begge funksjonene er definert på komplette metriske rom. Videre har vi vist at de er kontraksjoner. Dermed er kriteriene i Banachs fikspunktteorem oppfylt, og av teoremet kan vi nå slutte at rekursjonsfølgene (2.1) og (2.3) virkelig konvergerer.

Korollar 2.24 forklarer hvorfor rekursjonsformelen (2.1) i innledningen konvergerer mot  $\sqrt{2}$  også når  $x_0 \in [\delta, \rightarrow)$ ,  $\delta \in (0, 1]$ . Hvis  $x_0 \in (0, 1]$  så er  $(x_1 = x_0/2 + 1/x_0) \in [1, \rightarrow)$ . Dermed vil  $T^2 : [\delta, \rightarrow) \rightarrow [\delta, \rightarrow)$  være en kontraksjon og rekursjonsformelen vil dermed konvergere mot et fikspunkt.

I mange tilfeller kan det være vanskelige, og i noen tilfelle umulig å regne seg fram til en eksakt løsning på et problem. Det er da vi tar i bruk metoder der vi kan finne *tilnærmede løsninger*. Slike *tilnæringsmetoder* har stor betydning i anvendt matematikk. Dette har gjort Banachs fikspunktteorem, ved rekursjonsformelen (2.12), til et nyttig redskap innenfor *numerisk analyse*. Vi har allerede vist hvordan rekursjonsformelen kan brukes til å estimere en løsning for ligningen  $\cos(x) = x$  og tilnærmede verdier for  $\sqrt{2}$ . Dette skal vi se enda flere eksempler på. Det er imidlertid et annet aspekt som er vel så viktig:

### 2.3.2 Feilmarginer

Når vi anvender tilnæringsmetoder, er det viktig å kunne fastslå hvor nøyaktig en løsning er, eller sagt på en annen måte: Innenfor hvilke feilmarginer befinner en bestemt løsning seg. Vi kan i så fall avgjøre om en løsning er god nok, og det er svært viktig informasjon av flere grunner. Det gir oss også trygghet for at vår løsning holder mål i forhold til det vi trenger, og det kan spare tid. Når vi arbeider med iterasjonsprosesser, kan vi avgjøre hvor mange iterasjoner vi bør gjennomføre.

Fra rekursjonsformelen (2.7) og beviset fra teoremet, er det forholdsvis greit å utlede to nyttige formler som vil kunne gi oss svar på denne type spørsmål:

**Korollar 2.25.** *Med betingelsene i Teorem 2.23 oppfylt, vil iterasjonsfølgen (2.7) av en tilfeldig valgt  $x_0$  konvergere mot et bestemt fikspunkt  $x$  for  $T$ . På grunnlag av de to første leddene i følgen, kan feilmarginen estimeres til:*

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \quad (2.13)$$

Vi kan estimere feilmarginen på grunnlag av de to siste leddene i iterasjonsfølgen ved:

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m). \quad (2.14)$$

*Bevis.* Når vi skal bevise (2.13), bruker vi både (2.10), trekantulikheten og det at  $(x_n)_n$  er en konvergent Cauchy-følge. Vi ser høyresiden i ulikheten

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

er uavhengig av når  $n > m$ . Siden  $x_n \rightarrow x$ , kan vi for en vilkårlig  $\epsilon > 0$ , finne en  $n > m$  slik at

$$d(x_m, x) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) + \epsilon$$

Siden  $\epsilon$  var tilfeldig valgt, gir dette (2.13).

Vi setter nå  $y_0 = x_{m-1}$  og  $y_1 = x_m$ . Når vi setter dette inn i (2.13) får vi

$$d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$$

som er ekvivalent med

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m)$$

og dette beviser (2.14). □

### 2.3.3 Betingelsen $\alpha < 1$

Betingelsen  $\alpha < 1$ , er en nødvendig betingelse for anvendelse av Banachs fikspunktteorem. Vi kan vise dette ved et enkelt eksempel:

**Eksempel 2.26.** Gitt avbildningen  $T : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  definert ved  $Tx = 1/x$ . For denne avbildningen gjelder  $|T(x) - T(y)| \leq 1|x - y|$ . Vi kan nå undersøke rekursjonsformelen  $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$ , men vil oppdage at følgen ikke konvergerer. Årsaken er ganske åpenbar siden ligningen  $x = x + 1/x$  ikke har noen løsning.

## 2.4 Historisk bakgrunn

Fikspunktens tidlige historie er særlig knyttet til den del av matematikken som kalles *topologi* [Kli72, s.1177-1179]. Etter hvert har fikspunktene også vunnet innpass i andre deler av matematikken, ikke minst analyse. Idag har fikspunkt-teori mange anvendelsesmuligheter både innenfor ingeniør- og økonomifag [SWS97, s.10-12].

Det finnes en rekke fikspunktteoremer. *Brouwers fikspunktteorem* som vi presenterte ovenfor er ett av de eldste og mest berømte. Det ble lansert i 1912 av den nederlandske matematikeren **Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966)**.



*Schauders fikspunktteorem* som er en utvidelse av Brouwers fikspunkt-teorem til uendelig-dimensjonelle rom, kom i 1930 ved **Julius Schauder (1899-1943)**. Schauder er også kjent for begrepet *Schauderbasis* som er et viktig begrep i funksjonalanalyse.[ORf]

**Stefan Banach (1892-1946)** var en polsk matematiker. Det meste av tiden han arbeidet som matematiker var han tilknyttet *Lvovs tekniske universitet*. *Banach fikspunktteorem* ble først utgitt i Polen i 1920 og senere på fransk i 1922. Teoremet var en viktig del av Banachs doktoravhandling “*On operations on abstract sets and their applications to integral equations*”.

*The Scottish Café* var en kafé i Lvov som fra ca. 1926 ble en samlingssted for Lvovs (Lvivs) matematikere (kart s. 70). Gjennom livlige diskusjoner ble det utover kveldene arbeidet med og løst matematiske problemer. Mye av den matematikken som ble skapt i Lvov i mellomkrigstiden hadde utspring fra diskusjoner i *The Scottish Café*. Noe av dette ble samlet i *The Scottish Book* som opprinnelig var en kladdebok som ble oppbevart på kaféen. Vi beskriver både *The Scottish Café* og *The Scottish Book* på henholdsvis side 76 og side 86. Banach var en av de sentrale skikkelsene i dette miljøet. Også Schauder som er nevnt ovenfor, var en del av miljøet. To andre sentrale deltakere var **Stanislaw Ulam (1909-1984)** og **Hugo Steinhaus (1887-1972)**. I avsnitt 7.2.3 på side 80 er det en nærmere biografisk presentasjon av både Steinhaus, Banach og Ulam.

Diskusjonen rundt eksistens og entydighet av løsninger har fulgt matematikken gjennom hele sin historie. Et av de tidligste eksemplene på dette finner vi i den kanskje tvilsomme historien om Hippasus av Metapontum (ca. 450 f.kr.) som oppdaget at  $\sqrt{2}$  ikke var et rasjonalt tall. Dette endte med at han ble kastet på havet for at denne oppdagelsen ikke skulle bli kjent siden oppdagelsen rokket ved Pytagoreernes verdensbilde [Kli72, s.32-33]. Det var også et slikt spørsmål vår egen Niels Henrik Abel ga svar på, da han beviste at den generelle 5'te-gradsligningen ikke har noen algebraisk løsning.

Det var den tyske matematiker **Rudolf Lipschitz (1832-1903)**, som i 1876 formulerte *Lipschitz betingelse*. Betingelsen ble knyttet til *Cauchy-Lipschitz' teorem*, et eksistensteorem for ordinære differensialligninger. Vi kommer tilbake til dette når vi skal arbeide med differensialligninger [Kli72, s.717-718].



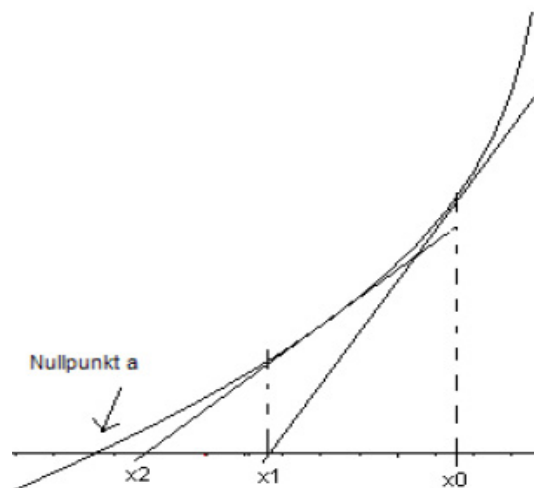
# Kapittel 3

## Newton's metode

### 3.1 Den klassiske Newton's metode

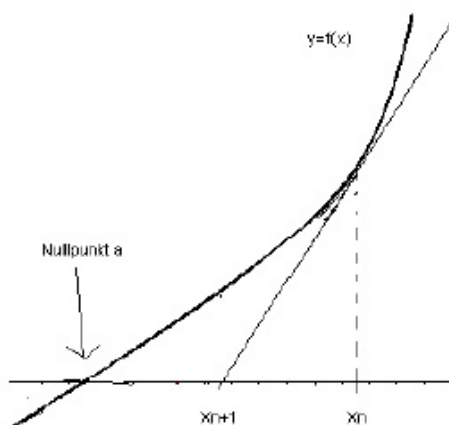
Dette kapitlet bygger særlig på [Lin96, s.284-290].

Anta at vi har en funksjon  $f(x)$  som vi ønsker å finne nullpunktene til. Hvis dette eksempelvis er et første eller 2. gradspolynom, har vi metoder som gjør at vi kan finne eksakte verdier for nullpunktene. Hvis funksjonene er mer kompliserte, trenger det ikke å være så enkelt å finne eventuelle nullpunkter. Den klassiske Newton's metode er en numerisk metode for å finne tilnærmede verdier for nullpunkter til funksjoner med en variabel. Den er et effektivt redskap når den virker, men ofte gir den ikke det resultatet en ønsker.



Figur 3.1: Newton's metode

Vi kan få en geometrisk forståelse av idéen til metoden ved å se på figur 3.1. Vi ser at funksjonen har et nullpunkt i  $a$ . Vi begynner med å velge en nærmest vilkårlig  $x_0$ . I punktet  $(x_0, f(x_0))$ , trekker vi tangenten til funksjonen og ser at denne skjærer  $x$ -aksen i et punkt vi kan kalle  $x_1$ . Vi observerer at  $x_1$  ligger mellom  $x_0$  og  $a$ . Vi kan gjennomføre operasjonen igjen og får da et nytt punkt  $x_2$  som ligger mellom  $x_1$  og  $a$ . Ved å gjennomføre operasjonen igjen og igjen, kommer vi nærmere og nærmere  $a$ . For hver gang får vi altså bedre og bedre tilnæringsverdier for  $a$ .



Figur 3.2: Newtons metode

På en naturlig måte gir dette oss rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} : \quad (3.1)$$

Anta at vi har gjennomført operasjonen som vist ovenfor  $n$  ganger. Vi har da en følge av punkter  $x_0, x_1, \dots, x_n$  og situasjonen som vist på Figur 3.2. Tangenten som går gjennom punktet  $(x_n, f(x_n))$  har stigningstall  $f'(x_n)$  og krysser  $x$ -aksen i  $(x_{n+1}, 0)$ . Dette gir ligningen

$$f(x_n) - 0 = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$$

som er ekvivalent med 3.1.

**Proposisjon 3.1.** *Punktene i Newtons metode er gitt ved:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.2)$$

hvor  $f(x)$  er en funksjon definert på intervallet  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . La  $c \in [a, b]$ ,  $f(c) = 0$  og  $f'(c) \neq 0$ . La videre  $f''(x)$  eksistere og være kontinuerlig på  $[a, b]$ . Da finnes det en  $\delta > 0$  slik at følgen  $(x_n)_n$  konvergerer mot  $c$  når  $x_0 \in [c - \delta, c + \delta]$ .

*Bevis.* Siden  $f''(x)$  eksisterer og er kontinuertlig på  $[a, b]$ , må nødvendigvis  $f''(c)$  være begrenset, altså at  $|f''(x)| < M$  for  $x \in [a, b]$ . Videre må  $f(x)$  være deriverbar i alle  $x \in [a, b]$ .

Vi definerer funksjonen  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ . Vi ser at  $g(c) = c$  fordi  $f(c) = 0$ . Deriverer vi  $g(x)$  får vi

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}. \quad (3.3)$$

Av (3.3) ser vi at  $\lim_{x \rightarrow c} g'(x) = 0$  siden  $f(c) = 0$ . Det må derfor finnes en  $\delta$  slik at  $|g'(x)| < \alpha < 1$  når  $x \in [c - \delta, c + \delta]$ . Proposisjon 2.17 gir dermed at  $g$  er en kontraksjon.  $[c - \delta, c + \delta]$  er et lukket intervall av  $\mathbb{R}$  og er følgelig komplett.

Av Banachs fikspunkt-teorem følger det at vi bare har ett fikspunkt på  $[c - \delta, c + \delta]$ . Dette må følgelig være punktet  $x = c$  siden  $g(c) = c$ . Rekursjonsfølgen 3.2 konverger derfor mot  $c$ .  $\square$

Når vi skal benytte Newtons metode, er forutsetningen for suksess at vi finner en passende startverdi. I motsatt fall kan vi få en følge som divergerer.

**Korollar 3.2.** *Anta at  $f(c) = 0$  og at  $f'(c) \neq 0$ . Anta videre at  $\delta > 0$  er valgt slik at*

$$\frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} \leq \alpha < 1 \quad (3.4)$$

*for alle  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ . Dersom  $x_0 \in (c - \delta, c + \delta)$ , vil  $(x_n)_n$  konvergere mot  $a$ .*

*Bevis.* Når denne betingelsen er oppfylt, viser beviset av Newtons metode at vi har en kontraksjon.  $\square$

**Eksempel 3.3** (Stigeproblemet). <sup>1</sup> Vi skal nå se på bruk av Newtons metode i forhold et problem som dukker opp i ulike sammenhenger fra tid til annen. Problemet virker i første omgang enkelt å løse, men nærmere undersøkelser viser at det ikke er tilfellet. Problemet lar seg løse med teknikker som er kjent i den videregående skolen.

Problemet gjelder en 10 meter lang stige som er reist mot en vegg. Mot veggen står en kasse med ytre mål  $1m \times 1m \times 1m$ . Stigen tangerer hjørnet på kassen som vist på Figur 3.3. Det gjelder å finne ut hvor høyt stigen kan nå oppover veggen. (Det finnes to løsninger, men vi er ute etter den løsningen hvor stigen når høyest). Vi vil presentere 3 metoder måter å løse dette problemet på:

---

<sup>1</sup>Dette problemet har jeg møtt ved en rekke anledninger, første gang da jeg selv gikk på ungdomsskolen. Felles for så godt som alle de som har presentert problemet for meg, har vært at de ikke har hatt noen løsning selv. *Newtons metode* var den første "tilfredstillende" løsningen jeg fant. Derfor tas det med i denne sammenhengen.

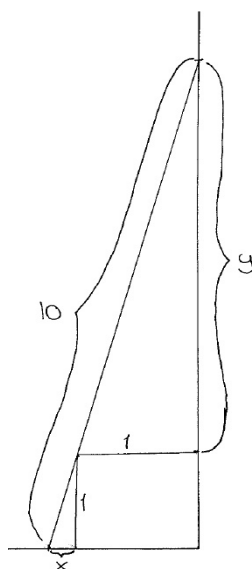
**Metode 1**

Ved å sammenligne formlike trekanten oppdager en raskt at  $y = 1/x$ . Pytagoras læresetning gir videre :

$$\begin{aligned}(1+x)^2 + (1+y)^2 &= 100 \\ 1 + 2x + x^2 + 1 + 2y + y^2 &= 100\end{aligned}\tag{3.5}$$

Setter vi nå inn  $y = 1/x$ , får vi 4' de grads ligningen:

$$\begin{aligned}1 + 2x + x^2 + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} &= 100 \\ x^4 + 2x^3 - 98x^2 + 2x + 1 &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$



Figur 3.3: Stige

Ved å bruke kjente formler, kan vi finne løsningen av denne 4'gradligningen [Rot01, s.11-14].

**Metode 2**

Her omformes problemet til finne nullpunkt for funksjonen  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 98x^2 + 2x + 1$ . Vi bruker Newtons metode for å finne en så god tilnærming som vi ønsker.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + 2x_n^3 - 98x_n^2 + 2x_n + 1}{4x_n^3 + 6x_n^2 - 196x_n + 2}$$

Siden stigen er på 10 meter, må nødvendigvis  $x$  være mindre enn 10. Vi velger  $x_0 = 9$  som gir følgen

$$x_0 = 9, x_1 = 8.9390, x_2 = 8.9380, x_3 = 8.9380.$$

Vi kan undersøke innenfor hvilke feilmarginer svaret befinner seg. Vi setter da  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ . Enkle beregninger gir  $|g'(x)| < 0.32$  når  $x \in (8.5, 10)$ . Formelene (2.13) og (2.14) (side 11) gir feilmarginer på henholdsvis 0.003 og 0.0004.

### Metode 3<sup>2</sup>

Det finnes imidlertid en metode der vi kan finne den eksakte løsningen av problemet. Ved substitusjonen  $y = 1/x$  i omformes ligningen til

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 100 = 0$$

som har delløsningen  $x + 1/x = -1 \pm \sqrt{101}$ . Vi kan se bort fra den negative løsningen. Ved å løse den nye andregradsligningen får vi den eksakte løsningen

$$x = \frac{\sqrt{101} - 1 - \sqrt{98 - 2\sqrt{101}}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{101} - 1 + \sqrt{98 - 2\sqrt{101}}}{2}$$

Tross elegansen i metode 3, er det usikkert om metoden gir den raskeste veien fram til et godt resultat. Det er eksempelvis ikke så lett å vurdere størrelsen på  $x$  og  $y$  fra uttrykkene ovenfor. For at uttrykkene skal ha praktisk anvendelse, må de fleste av oss omforme til desimaltall. Vi må bestemme hvor mange desimaler vi tar med. Da er det lite som skiller denne løsningen fra løsningen ved *Newtons metode*. Dette er uansett et eksempel på at hvis en ikke klarer å finne en eksakt løsning, kan det finnes alternative metoder som gir så gode løsninger vi kan ønske.

**Eksempel 3.4** (Å finne  $n$ 'te-røtter ved iterasjon). Det er åpenbar sammenheng mellom innledningseksemplet og Newtons metode. En kan finne nullpunktene for likningen  $f(x) = x^2 - 2$  ved Newtons metode.  $f'(x) = 2x$  som gir rekursjonslikningen  $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)/(2x_n) = x_n/2 + 1/x_n$ .

På samme måte kan en lage rekursjonslikninger til alle reelle  $k$ 'te-røtter. Vi setter  $f(x) = x^k - a$  som gir  $f'(x) = kx^{k-1}$ . Innsatt i formelen for Newtons metode gir dette rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{(k-1)x_n}{k} + \frac{a}{kx_n^{k-1}}.$$

## 3.2 Historisk bakgrunn

En kan finne forløpere til *Newtons metode* i det gamle Babylon. De hadde utviklet teknikker for å trekke kvadratrøtter som i realiteten er det samme som å anvende *Newtons metode* på ligninger av formen  $x^2 - a^2$ . I kinesisk-arabisk matematikk fantes tilsvarende,

<sup>2</sup>Denne løsningen var det min medstudent Vegard Bertelsen som fant.

men mer generelle metoder. Det vil si at de kunne anvendes på flere typer ligninger [BM91, s.411].

*Newtons metode* eller *Newtons-Raphsons metode* som den også kalles, ble første gang beskrevet av **Isaac Newton (1642-1727)** i 1685 i skriftene *De Analysi and Method of Fluxions*. Metoden ble forbedret av **Joseph Raphson (1648-1715)** i verket *Analysis Aequationum Universalis* i 1690. Raphson anvendte metoden på polynomer, men metoden har et mye videre bruksområde [Kli72, s. 381].

*Newtons metode* er også i dag en mye brukt numerisk metode men da i mer generalisert form. Nobelprisvinneren i økonomi fra 1975, **L. V. Kantorovich (1912-1986)** har utviklet metoden for å finne løsning av generelle operatorligninger. Han har også gitt flere konvergenskriterier, altså hvilke forutsetninger som må være oppfylt for at metoden skal kunne gi den ønskede løsningen [Suh03, s.638].



# Kapittel 4

## Jacobi-iterasjon

### 4.1 Innledning

*Jacobi-iterasjon* er en gammel metode for å løse lineære ligningssett. Vi tar utgangspunkt i ligningssettet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  for å forklare prinsippet for metoden:

La  $A$ ,  $D$  og  $M$  være  $n \times n$ -matriser hvor  $D$  er en diagonalmatrise som utelukkende består av diagonalelementene i  $A$  og  $M$  er definert ved ligningen  $A = D - M$ . Ligningssettet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  kan nå skrives på formen  $D\mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{b}$  som igjen kan omformes til  $\mathbf{x} = D^{-1}M\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}$ . Med utgangspunkt i den siste ligningen definerer vi *Jacobi-iterasjon*:

**Definisjon 4.1** (*Jacobi-iterasjon*). La  $A$ ,  $D$  og  $M$  være  $n \times n$ -matriser hvor  $D$  er en diagonalmatrise som utelukkende består av diagonalelementene i  $A$  og  $A = D - M$ . Da definerer vi *Jacobi-iterasjon* ved rekursjonsformelen

$$\mathbf{x}_{n+1} = D^{-1}M\mathbf{x}_n + D^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.1)$$

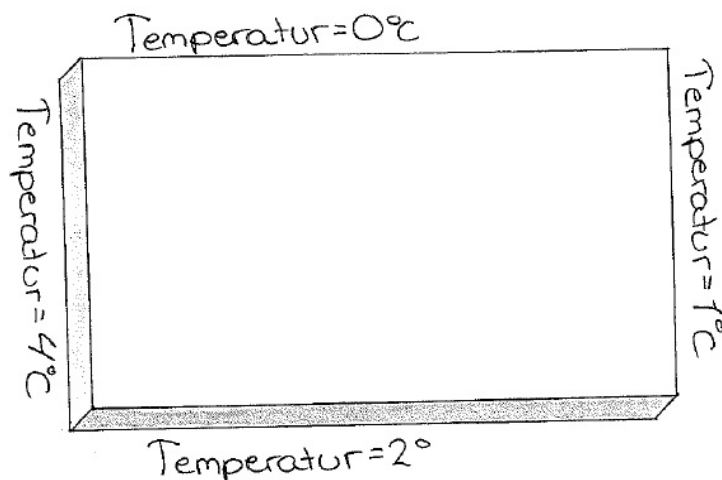
Idéen ved metoden er at vi ved å velge en startverdi  $\mathbf{x}_0$ , kan bruke (4.1) til å finne en tilnærmet løsning av ligningssettet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Som metode har *Jacobi-iterasjon* sine klare begrensninger ved at det bare er i spesielle tilfeller at den kan anvendes. Som vi skal se er det egenskapene til matrisen  $D^{-1}M$  som avgjør om metoden kan benyttes. Vi skal bruke Banachs fikspunktteorem for å utlede og forstå noen slike betingelser.

Vi bruker et velkjent problem knyttet til varmeledning når vi skal vise hvordan *Jacobi-iterasjon* kan anvendes. Idéen til denne tilnærmingen er hentet fra [AR94, s.675-684]

### 4.2 Presentasjon av problemet

En tynn rektangulær plate har de store flatene fullstendig varmeisolert. De fire kantene er tilknyttet forskjellige omgivelser med konstante, men forskjellige temperaturer  $0^\circ\text{C}$ ,



Figur 4.1: Plate

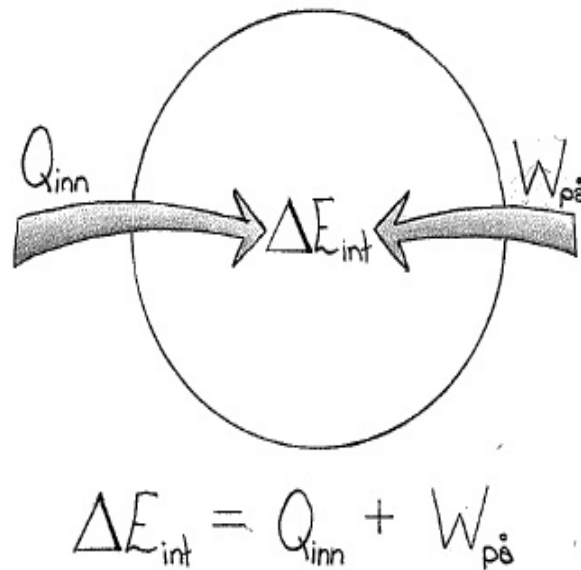
$1^{\circ}\text{C}$ ,  $2^{\circ}\text{C}$  og  $4^{\circ}\text{C}$  som vist på Figur 4.1. Vi skal finne ut hva som skjer med temperaturene i platen når det har gått så lang tid at det er oppstått en likevektstilstand. Det vil si at temperaturene i hvert punkt er konstant. Om mulig skal vi trekke isotermer gjennom platen. En isoterm er linje hvor alle punktene langs linjen har den samme temperaturen.

For at vi skal kunne gi en rimelig løsning av problemet, må vi vite noe om hvilke fysiske lover som gjelder for slike tilstander. Tidlig erfarer vi at en kald gjenstand kan varmes opp hvis den kommer i kontakt med noe som er varmere. Likeledes at noe som er varmt, blir nedkjølt hvis det kommer i et kaldt miljø. Varme brer seg altså fra et område med høyere temperatur til et område med lavere temperatur. Dette er blir mer presist uttrykt i *Termodynamikkens 1.lov*.

### 4.3 Termodynamikkens 1. lov

La oss betrakte et avgrenset system som vist på figur 4.2 på side 23.  $\Delta E_{int}$  er forandring av den indre energien i systemet.  $Q_{inn}$  er står for transporten av varmeenergi inn og  $W_P$  er det mekaniske arbeidet som utføres på systemet. Termodynamikkens 1. lov uttrykkes da ved:

**Termodynamikkens 1. lov** Forandringen av indre energi i et system er lik summen av varmetransporten inn i systemet og det mekaniske arbeidet utført på systemet. Dette gir ligningen  $\Delta E_{int} = Q_{inn} + W_P$  [TM04, 558-568].



Figur 4.2: Termodynamikken 1. lov

#### 4.4 Utledning av en harmonisk funksjon

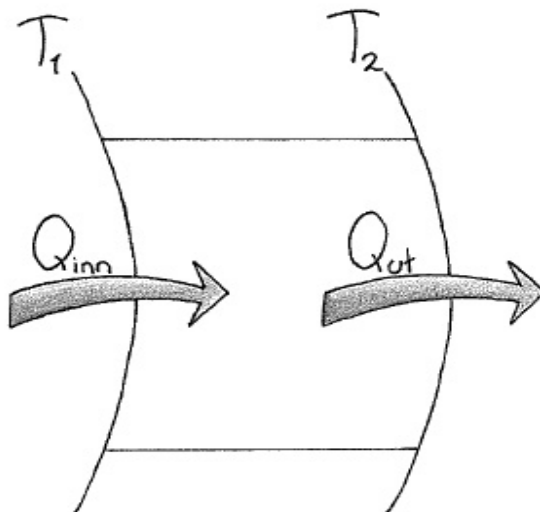
I vårt tilfelle betrakter vi et lite lukket utsnitt av platen  $\Omega$  med randen  $d\Omega$ . Dette er et lukket område i rommet, se Figur 4.3 på side 24. Vi tenker at langs linjene  $T_1$  og  $T_2$  er temperaturen konstant. Dette er altså isotermer. Energistrømmen vil bevege seg vinkelrett på en isoterm og gå fra et område med høyere temperatur til et område med lavere temperatur. Med  $Q_{inn}$  forstår vi som varmen som strømmen inn i systemet og med  $Q_{ut}$  varmen som strømmer ut. Det utføres ikke noe arbeid på systemet slik at  $dW_p = 0$ . Videre vil det etter en tid, oppstå en situasjon hvor temperaturen i hvert punkt er konstant. Det vil si at  $\delta Q_{inn} = 0$ . Det betyr at  $Q_{inn} = Q_{ut}$ . I en slik situasjon har vi *termodynamisk likevekt*.

Vi lar  $T = T(t, x, y, z)$  betegne temperaturen i punktet  $(x, y, z)$  ved tiden  $t$ . Vi antar at  $T \in C^2$ . Vi skal vise at  $T$  er en harmonisk funksjon. Det gjør vi ved at vise at  $T$  tilfredsstiller Laplace' differensialligning:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2)$$

Vi kan nå innføre  $\mathbb{F} = -\nabla T$ , temperaturgradienten som vi skal se er knyttet til hastigheten av energistrømmen i et gitt punkt til en gitt tid. Vi antar nå at spesifikk varme  $c$  er konstant i legemet og at massetettheten  $\rho_0$  er konstant. Da er  $\rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z$  massen av volumet  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Energimengden i dette område er gitt ved uttrykket

$$c\rho_0 T \Delta V$$

Figur 4.3: Utsnittet  $\Omega$ 

der vi antar at temperaturen  $T$  er konstant i dette området siden  $\Delta V$  antas å være liten. Vi definerer vektoren *energifluxen* ved

$$k\mathbb{F} = -k\nabla T$$

hvor  $k$  er ledningsevnen. Vi antar at  $k\mathbb{F} \cdot \mathbf{n} \Delta \Omega$  gir energistrømmen ut gjennom overflaten  $\partial\Omega$  pr. tidsenhet.  $\mathbf{n}$  er normalvektoren på overflaten. Bevaringsloven for energi uttrykt på integralform gir da:

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} c\rho_0 T dV = (-1)^2 \int \int_{\partial\Omega} k(\nabla T \cdot \mathbf{n}) dS$$

Vi antar at legemet har konstant tetthet, konstant spesifikk varme og konstant ledningsevne. Vi har da

$$c\rho_0 \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} dV = k \int \int_{\partial\Omega} (\nabla T \cdot \mathbf{n}) dS \quad (4.3)$$

Vi innfører nå *Gauss divergensteorem*.

**Teorem 4.2** (Gaus divergensteorem). *La  $\Omega$  være et regulært område i  $\mathbb{R}^3$  med orienterbar overflate med enhetsnormal  $\mathbf{n}$  (utover-rettet). La  $\mathbb{F}$  være et glatt vektor-felt som er definert på  $\Omega$ . Da gjelder*

$$\int \int \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbb{F}) dV = \int \int_{\partial\Omega} (\mathbb{F} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4)$$

Her er  $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$  der  $F_i \in C^1(\Omega)$  og  $\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$ .

I vårt tilfelle er  $\mathbb{F} = -\nabla T$  som innsatt i divergensuttrykket gir

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) dV = \int \int_{\partial \Omega} k (\nabla T \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.5)$$

Vi kan kombinere nå (4.3) og (4.4) ved å sette volumintegralene lik hverandre. Denne likheten gjelder for enhver lukket flate innenfor området vårt. Altså har vi:

$$c\rho_0 \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) dV \quad (4.6)$$

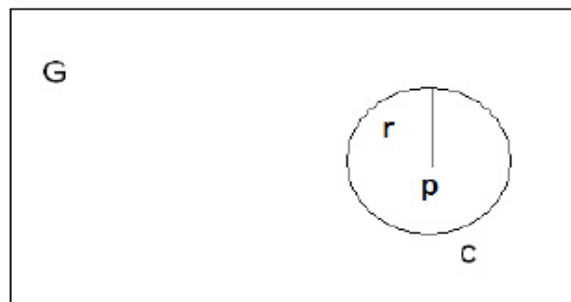
Dette gir oss så

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho_0} \nabla^2 T = K \nabla^2 T \quad (4.7)$$

der altså  $K$  betegner *diffusivitet*.

Hvis vi er i en likevekt-tilstand, vil  $\partial T / \partial t = 0$  og vi får Laplace's differensialligning  $\nabla^2 T = 0$  eller ekvivalent

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (4.8)$$



Figur 4.4: Mittelverdiegenskap

Vi har dermed vist at  $T$  er en harmonisk funksjon. Om vi dessuten antar at utstrekningen i  $z$ -retningen i området vårt er neglisjerbar har vi dessuten  $\partial T / \partial z = 0$ .  $T$  er derfor harmonisk i et 2-dimensjonalt område.

Å finne temperaturene i hvert punkt, handler dermed om å løse *Laplace-ligningen* med randverdier som vist på Figur 4.1. Dette er en vanskelig oppgave, og vi ønsker å finne en metode som kan gi oss en tilnærmet løsning. Det skal vise seg at tilstedeværelsen av en harmonisk funksjon, gir muligheter for å finne en metode som kan gi oss gode tilnærminger.

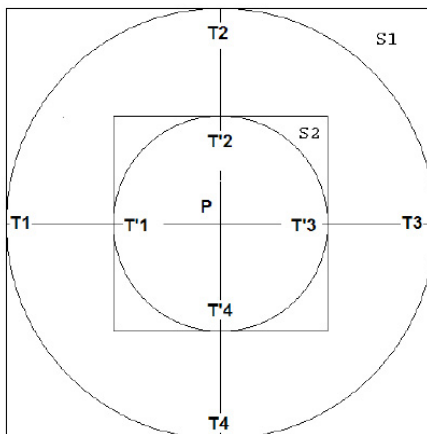
## 4.5 Middelveidiegenskapen hos harmoniske funksjoner

En funksjons *glatthet* avhenger hvor mange ganger den er kontinuerlig deriverbar. Fullstendig glatte funksjoner er uendelig mange ganger kontinuerlig deriverbar. Harmoniske funksjoner er derfor *ganske glatte*. Når vi vet at temperaturen er en harmonisk funksjon, blir derfor arbeidet vårt med temperaturfordelingen på platen nå mye enklere. Spesielt skal vi utnytte det som kalles *middelveidiegenskapen for harmoniske funksjoner*.

**Definisjon 4.3** (Middelveidi). La  $f$  være en harmonisk funksjon på området  $\mathbf{G}$ , (Figur 4.4 på side 25) og  $C$  en disk med senter i  $(0, 0)$ . Integralet

$$\mu = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\mathbf{x}|=r} f(\mathbf{x}) dS \quad (4.9)$$

sier vi er middelveidien for  $f$  langs randen av  $C$ .



Figur 4.5: Middeltemperatur

**Proposisjon 4.4.** La  $f$  være en harmonisk på en disk  $C$  og kontinuerlig på tillukningen  $\bar{C}$ . La videre  $x_0$  være senter i  $C$ . Da er  $f(x_0)$  lik middelveidien for  $f$  langs randen av  $C$ . Altså

$$f(0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\mathbf{x}|=r} f(\mathbf{x}) dS \quad (4.10)$$

Vi tar ikke med bevis, men viser til [Str92, s.162].

Med andre ord: middelveidien til en harmonisk funksjon langs enhver randsirkel vil ha samme verdi som funksjonsverdien i sentrum av sirkelen. Dette skal vi utnytte i vårt arbeid. Det gir oss følgende korollar:

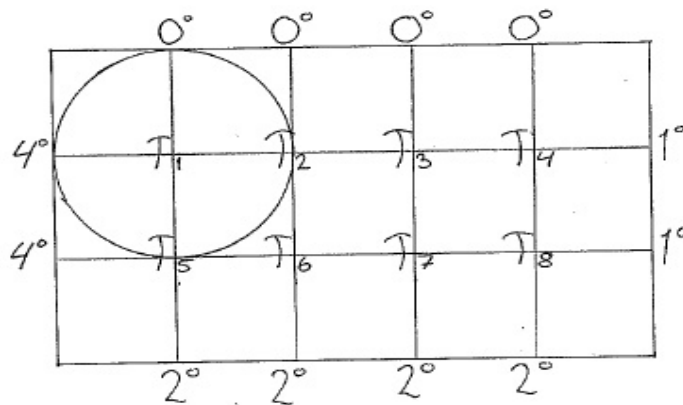
**Korollar 4.5.** *La temperaturfordelingen på en plate  $G$  være i termodynamisk likevekt og la  $P$  være et punkt på platen, Figur 4.4. For enhver sirkel  $C$  på platen og med sentrum i  $P$ , vil middeltemperaturen langs  $C$  være lik temperaturen i  $P$ .*

*Bevis.* Dette er en følge av at temperaturfordelingen på en plate er en harmonisk funksjon.  $\square$

Vi er interessert i å estimere temperaturen i sentrum  $P$  av en slik sirkel  $S_1$ . Vi sørger da for at  $P$  blir sentrum av et kvadrat som vist på Figur 4.5. Hvis vi nå vet temperaturene  $T_1, T_2, T_3$  og  $T_4$ , kan vi estimere  $T_P$  ved  $T_P = 1/4(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$ . Dette er et rimelig estimat som følge av Korollar 4.5. Det er ganske åpenbart at vi kan gjøre dette estimatet bedre både ved å ta med flere punkter langs  $S_1$  eller ved å gjøre kvadratet enda mindre, Figur 4.5. Det siste forutsetter at vi vet temperaturene i fire nye punkter  $T'_1, T'_2, T'_3$  og  $T'_4$  langs en nye sirkel  $S_2$ . Dette gir en nytt korollar:

**Korollar 4.6.** *For et indre kvadratisk nettpunkt  $P$  av sirkelen  $S_1$ , er temperaturen  $T_P$  tilnærmet lik gjennomsnittstemperaturen for de fire nabonettpunktene  $T_1, T_2, T_3$  og  $T_4$ . Altså*

$$T_P \approx \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4).$$



Figur 4.6: Endelig differensmetode 8 indre punkter

## 4.6 Endelig differensmetode med 8 indre punkter

Vi er nå klar til å begynne arbeidet med det konkrete problemet. Det er nærliggende å bruke det som kalles *endelig differansmetode*. *Endelig differansmetode* er en vanlig numerisk metode for å løse differensialligninger. I prinsippet går metoden ut på å finne

en tilnærmet løsning av den opprinnelig differensialligningen ved å omforme problemet til *en differensligning*. Metoden er beskrevet i en rekke bøker om numerisk matematikk, blant annet [Ise96, s.105-123].

Vi velger et enkelt eksempel som kan beskrives slik:

Vi deler platen inn i 15 like store kvadrater som vist på Figur 4.6. Dette gir åtte indre punkter på platen. Formelen i Korollar 4.6 som brukes til å estimere temperaturen i et indre punkt, kalles ofte for *fempunktsformelen* [Ise96, s.112]. Ved å anvende *fempunktsformelen* gir dette ligningene  $t_1 = 1/4(0 + t_2 + t_5 + 4)$  og  $t_2 = 1/4(0 + t_3 + t_6 + t_1)$ , osv. Gjennomført på alle åtte indre punkter, får vi et ligningsett med 8 ligninger. Dette ligningssettet kan settes på matriseformen

$$A\mathbf{t} = \mathbf{b} \quad (4.11)$$

hvor  $A$  er en  $8 \times 8$ -matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 1 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_8 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} \text{ er vektorer i } \mathbb{R}^8. \text{ (4.11) kan skrives på formen}$$

$$(I - M)\mathbf{t} = \mathbf{b} \quad (4.13)$$

hvor  $I$  er identitetsmatrisen og  $M$  er

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$



Et tredje alternativ er  $\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}$ .

Å løse et ligningssett med 8 ukjente, kan være utfordrende nok. Det finnes ulike metoder for formålet. Et alternativ er matriseoperasjonen  $\mathbf{t} = (I - M)^{-1}\mathbf{b}$ . Vi ønsker imidlertid å bruke *Jacobi-iterasjon* og da er det i så fall rekursjonsligningen

$$\mathbf{t}_{(n+1)} = M\mathbf{t}_{(n)} + \mathbf{b} \quad (4.15)$$

som er interessant. Her er  $\mathbf{t}_{(n+1)}$ ,  $\mathbf{t}_{(n)}$  og  $\mathbf{b}$  vektorer i  $\mathbb{R}^8$ . Parantesene om  $n$  og  $n + 1$  er brukt for å markere at dette er indekser for å unngå forveksling med temperaturene i Figur 4.6. Av Banachs fikspunktteorem følger nå at rekursjonsformlen (4.15) vil konvergere mot et fikspunkt hvis  $(M\mathbf{t} + \mathbf{b})$  er en kontraksjon og  $\mathbb{R}^8$  er komplett i forhold til en egnet metrikk. Dette fikspunktet vil i så fall være løsningen av ligningssettet (4.11).

#### 4.6.1 Kompletthet i $\mathbb{R}^n$

Vi definerer først en vektornorm:

**Definisjon 4.7.** La  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Vi definerer vektornormen  $\|\cdot\|$  ved

$$\|\mathbf{x}\| = \max_j |x_j| \quad (4.16)$$

Fra denne normen kan vi så indusere en egnet metrikk ved:

**Definisjon 4.8.** La  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Vi definerer metrikken

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \max_j |x_j - y_j| \quad (4.17)$$

Det er ikke vanskelig å vise at (4.16) er en norm og (4.17) er en metrikk, se [Kre78, s.5 og s.58-63].

**Proposisjon 4.9.**  $\mathbb{R}^n$  er et komplett metrisk rom med hensyn på metrikken definert ved (4.17).

*Bevis.* La  $(\mathbf{x}_m)_m$  være en vilkårlig Cauchy-følge i  $\mathbb{R}^n$  med hensyn på  $d$ . Vi bruker notasjonen  $\mathbf{x}_m = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$ . Siden  $(x_m)_m$  er en Cauchy-følge, vet at for enhver  $\epsilon > 0$  finnes det en  $N$  slik at

$$d(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_r) = \max_j \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right| < \epsilon \text{ når } m, r > N \quad (4.18)$$

Dette betyr at  $\left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right| < \epsilon$  når  $m, r > N$  for hver  $j$ . Følgelig er  $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$  en Cauchy-følge for fastholdt  $j$ . Siden dette er en følge av de reelle tall, konvergerer den mot en grense  $\xi_j \in \mathbb{R}$ . Ved å bruke disse  $n$  grensene, definerer vi  $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Det er åpenbart at  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Vi skal nå vise at  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$

La  $\epsilon > 0$  være gitt. Det finnes naturlige tall  $m_1, m_2, \dots, m_n$  slik at

$$m \geq m_j \implies \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right| < \epsilon$$

Lar vi så  $m_0 = \max_{1 \leq j \leq n} m_j$  har vi at

$$m \geq m_0 \implies \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right| < \epsilon$$

for alle indeksene  $j = 1, 2, \dots, n$ . Dette gir

$$m \geq m_0 \implies \max_{1 \leq j \leq n} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right| < \epsilon$$

som betyr at

$$d(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}) < \epsilon \quad m > m_0.$$

Dette viser at  $\mathbf{x}$  er en grense for  $(\mathbf{x}_m)_m$  som betyr at  $(\mathbf{x}_m)_m$  konvergerer mot  $\mathbf{x}$ . Siden  $(\mathbf{x}_m)_m$  er en tilfeldig valgt Cauchy-følge, har vi dermed bevist at  $\mathbb{R}^n$  er et komplett metrisk rom med hensyn på den aktuelle metrikken.  $\square$

#### 4.6.2 Kriterer for at $(M\mathbf{x} + \mathbf{b})$ er en kontraksjon

Vi tar først med et enkelt lemma:

**Lemma 4.10.**  $(M\mathbf{x} + \mathbf{b})$  er en kontraksjon hvis matrisemultiplikasjonen  $M\mathbf{x}$  er en kontraksjon med hensyn på en norm  $\| \cdot \|$ .

*Bevis.* La  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Dette gir

$$\|(M\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (M\mathbf{y} + \mathbf{b})\| = M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{4.19}$$

som beviser lemmaet.  $\square$

#### Rekkesum- og kolonnesumkriteriet

**Definisjon 4.11.** La  $M = [a_{jk}]$  være en  $n \times n$ -matrise. Vi definerer rekkesummen  $\alpha$  til  $M$  ved

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|. \tag{4.20}$$

Kolonnesummen  $\beta$  definerer vi ved

$$\beta = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}|. \tag{4.21}$$

Vi sier at  $M$  oppfyller rekkesumkriteriet hvis  $\alpha < 1$  og kolonnesumkriteriet hvis  $\beta < 1$

Vi skal nå bevise at Matrisemultipikasjonen  $M\mathbf{x}$  er kontraksjon i  $\mathbb{R}^n$  men hensyn på relevante normer når rekkesum- eller kolonnesumkriteriet er oppfylt. Vi vil gjennomføre bevisene i  $\mathbb{R}^2$ . Når vi gjør det på denne måten, vil notasjonen bli noe enklere enn for  $\mathbb{R}^n$ , men bevisene blir i prinsippet de samme. Hvis en altså forstår bevisene i  $\mathbb{R}^n$ , er det ikke vanskelig å overføre tankegangen til det generelle tilfellet. For bevis av det generelle tilfellet vises til [Kre78, s. 308].

**Proposisjon 4.12.** *Matrisemultipikasjonen  $M\mathbf{x}$  er en kontraksjon hvis rekkesumkriteriet er oppfylt.*

*Bevis.* La  $\mathbf{x} = [x \ y]^T$ ,  $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x|, |y|\}$  og  $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Vi skal bevise  $\|M\mathbf{x}\| \leq K \|\mathbf{x}\|$  med  $K < 1$

Vi har:

$$\|M\mathbf{x}\| = \max\{|\alpha x + \beta y|, |\gamma x + \delta y|\} \leq \max\{|\alpha| |x| + |\beta| |y|, |\gamma| |x| + |\delta| |y|\} \quad (4.22)$$

(Ulikheten i (4.22) kan være en likhet hvis alle verdiene er positive). Vi kan anta uten tap av generalitet at  $|x| \geq |y|$ . Vi har da videre

$$\begin{aligned} &\leq \max\{(|\alpha| + |\beta|) |x|, (|\gamma| + |\delta|) |x|\} = |x| \max\{(|\alpha| + |\beta|), (|\gamma| + |\delta|)\} \\ &= \|\mathbf{x}\| \max\{(|\alpha| + |\beta|), (|\gamma| + |\delta|)\} \end{aligned}$$

Hvis  $\max\{(|\alpha| + |\beta|), (|\gamma| + |\delta|)\} < 1$  er *rekkesumkriteriet* oppfylt. Følgelig er  $M\mathbf{x}$  en kontraksjon men hensyn på  $\|\cdot\|$  definert ved (4.16) når rekkesumkriteriet er oppfylt.  $\square$

Vi skal også vise at vi får en kontraksjon når *kolonnesumkriteriet* er oppfylt. Vi trenger da et par definisjoner: Vi innfører nå en ny vektornorm

**Definisjon 4.13.** La  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Vi definerer vektornormen  $\|\cdot\|$  ved

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|. \quad (4.23)$$

På tilsvarende måte som ovenfor induseres metrikken

**Definisjon 4.14.** La  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Vi definerer metrikken

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \quad (4.24)$$

Vi gjennomfører også dette beviset i  $\mathbb{R}^2$ . Grunnen er den samme som bemerket tidligere.

**Proposisjon 4.15.** *Matrisemultipikasjonen  $M\mathbf{x}$  er en kontraksjon med hensyn på  $\|\cdot\|_1$  definert ved (4.23) hvis kolonnesumkriteriet er oppfylt.*

*Bevis.* La  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ ,  $\|\mathbf{x}\|_1 = |x| + |y|$  og  $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Vi må nå vise at  $\|M\mathbf{x}\|_1 \leq K \|\mathbf{x}\|_1$  med  $K < 1$

Vi har

$$\begin{aligned} \|M\mathbf{x}\|_1 &= \left\| \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|_1 = |\alpha x + \beta y| + |\gamma x + \delta y| \\ &\leq |\alpha| |x| + |\beta| |y| + |\gamma| |x| + |\delta| |y| \end{aligned} \quad (4.25)$$

Vi kan få likhet i (4.25) hvis alle ledd er positive. Videre får vi:

$$= (|\alpha| + |\gamma|) |x| + (|\beta| + |\delta|) |y| \quad (4.26)$$

Vi antar uten tap av generalitet at  $|\alpha| + |\gamma| \geq |\beta| + |\delta|$ . Dette gir videre:

$$\leq (|\alpha| + |\gamma|)(|x| + |y|) = (|\alpha| + |\gamma|) \|\mathbf{x}\|_1 \quad (4.27)$$

Dette viser at når kolonnesummen er mindre enn 1, har vi en kontraksjon. □

Vi har altså vist at i  $\mathbb{R}^2$  er  $(M\mathbf{x} + \mathbf{b})$  en kontraksjon med hensyn på relevante normer når rekkesumkriteriet eller kolonnesumkriteriet er oppfylt. Vi har ikke vist at  $\mathbb{R}^n$  er komplett i forhold til metrikken  $d_1$ . Vi kan gjennomføre et ganske tilsvarende bevis for som i Proposisjon 4.9. Vi kan også bruke følgende resultater:

**Definisjon 4.16.** To normer  $\|\cdot\|_a$  og  $\|\cdot\|_b$  er *ekvivalente* på et lineært rom  $X$  hvis det finnes positive tall  $r_1$  og  $r_2$  som bare avhenger av valget av normer slik at  $r_1 \leq \|\mathbf{x}\|_a / \|\mathbf{x}\|_b \leq r_2$  for  $\mathbf{x} \in X$

**Proposisjon 4.17.** *Alle par av normer på et endelig-dimensjonalt lineært rom er ekvivalente.*

[LT85, s.353]

Siden  $\|\cdot\|_2$ -normen og  $\|\cdot\|_1$ -normen er ekvivalente i  $\mathbb{R}^n$ , er  $\mathbb{R}^n$  også komplett i forhold til  $\|\cdot\|_1$ -normen.

### 4.6.3 Resultater

Rekkesummen for  $M$  i (4.14) er  $\alpha = 0.75$ . Proposisjon 4.12 gir derfor at  $M$  er en kontraksjon. Banachs fikspunktteorem sikrer derfor at rekusjonsformelen 4.15 vil konvergere mot en fikspunkt. Jacobi-iterasjon kan brukes til å finne en så nøyaktig løsning som vi måtte ønske. Formlene (2.13) og (2.14) kan fortelle oss hvor mange iterasjoner som er nødvendige for å oppnå tilstrekkelig grad av nøyaktighet:

$$\text{Vi velger } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \end{bmatrix} \text{ som innsatt i rekursjonsligningen 4.15 gir } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 15/8 \\ 21/16 \\ 21/16 \\ 9/8 \\ 19/8 \\ 29/16 \\ 29/16 \\ 13/8 \end{bmatrix}.$$

Dette gir  $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = 21/16$ . Etter  $m$  iterasjoner kan vi dermed estimere løsningen innenfor feilmarginene:

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot \frac{21}{64} \quad (4.28)$$

Etter 10 iterasjoner er feilmarginen  $\epsilon_{10} < 0.02$ , for 15 og 21 iterasjoner henholdsvis  $\epsilon_{15} < 0.005$  og  $\epsilon_{21} < 0.001$ . Ved 21 iterasjoner gir dette den tilnærmede løsningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.88 \\ 1.12 \\ 0.85 \\ 0.79 \\ 2.41 \\ 1.75 \\ 1.47 \\ 1.32 \end{bmatrix}$$

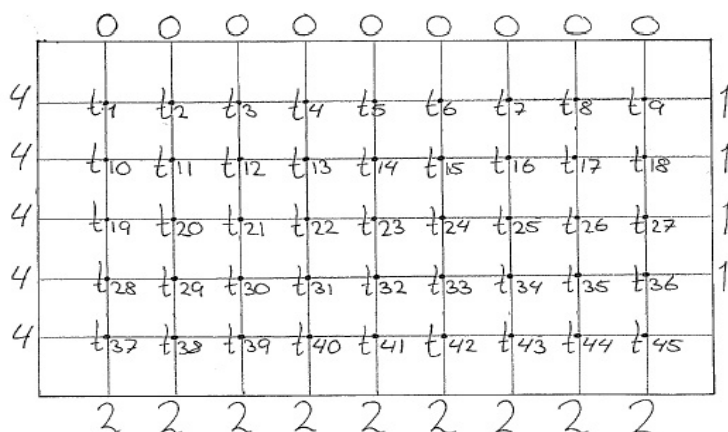
## 4.7 Endelig differansemetode med 45 indre punkter

### 4.7.1 Nye problemstillinger

Den løsningen vi har funnet, gir et relativt grovt bilde av hvordan temperaturfordelingen er på platen. Vi kan imidlertid, slik vi allerede har antydnet, få et enda bedre tilnærming ved å forminske maskevidden. Vi deler derfor hvert kvadrat i fire og får 45 indre punkter som vist på Figur 4.7.

Ved å bruke Korollar 4.6 og fempunktsformelen, kan vi generere et ligningssett med 45 ligninger som settes på matriseform. Vi kaller også den nye  $45 \times 45$ -matrisen for  $M$ , og  $\mathbf{b}$  er den tilsvarende  $45 \times 1$ -vektoren. Denne matrisen er for stor til å taes med i teksten. Vi kan likevel finne ganske mye ut om egenskapene til matrisen:

**Lemma 4.18.**  $45 \times 45$ -matrisen  $M$  som er framkommet ved den endelig differansemetoden som beskrevet ovenfor, er symmetrisk.



Figur 4.7: Flere indre punkter

*Bevis.* Hvis vi kan vise at for alle  $a_{(i,j)} = a$  finnes det et element  $a_{(j,i)} = a$ , har vi vist at matrisen  $M$  er symmetrisk.

Av Korollar 4.6 og Figur 4.7, er temperaturene gitt ved ligningen:

$$T_i = \frac{1}{4}(T_{i-9} + T_{i-1} + T_{i+1} + T_{i+9}) + k \quad (4.29)$$

Konstantleddet  $k$  trenger vi ikke å ta hensyn fordi det ikke får betydning for matrisen. Denne ligningen genererer nå eventuelt<sup>1</sup> følgende ikkenull-ledd i matrisen  $M$ :  $a_{(i,i-9)}$ ,  $a_{(i,i-1)}$ ,  $a_{(i,i+1)}$  og  $a_{(i,i+9)}$ . For alle ikkenull-ledd i matrisen gjelder  $a_{(i,j)} = 1/4$ .  $a_{(i,i-9)}$ ,  $a_{(i,i-1)}$ ,  $a_{(i,i+1)}$  og  $a_{(i,i+9)}$  er derfor lik  $1/4$  hvis de eksisterer.

$a_{(i,i-9)}$  eksisterer hvis  $i > 9$ ,  $a_{(i,i-1)}$  hvis  $i > 1$ ,  $a_{(i,i+1)}$  hvis  $i < 45$  og  $a_{(i,i+9)}$  hvis  $i < 37$ . De aller fleste elementene  $a_{(i,j)} = 0$  fordi hver ligning inneholder høyst 4 variable. Det er åpenbart at minst to av elementene må eksistere og at høyeste antall ikkenull-elementer i en rekke er 4.

Vi undersøker nå mulighetene:

Hvis  $a_{(i,i-9)} = 1/4$ , så medfører det at  $i > 9$ . Vi undersøker rekken  $i-9$ . I denne rekken vil ikkenull-elementene eventuelt være på formen  $a_{(i-9,i-18)}$ ,  $a_{(i-9,i-10)}$ ,  $a_{(i-9,i-8)}$  og  $a_{(i-9,i)}$ . Siden  $i > 9$ , vet vi at  $a_{(i-9,i)} = 1/4$ .

Hvis  $a_{(i,i-1)} = 1/4$ , er  $i > 2$ . Ikkenull-elementene i rekken  $i-1$  vil eventuelt være på

<sup>1</sup>Eventuelt er her brukt for å markere at ikke alle elementene trenger å eksistere. Ved å studere ligningen (4.29) og Figur 4.7 kommer dette ganske klart fram.

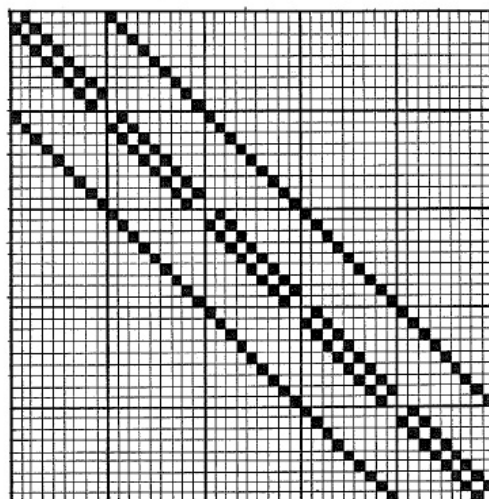
formen  $a_{(i-1,i-10)}$ ,  $a_{(i-1,i-2)}$ ,  $a_{(i-1,i)}$  og  $a_{(i-1,i+8)}$ . Siden  $i > 2$ , følger at  $a_{(i-1,i)} = 1/4$ .

Hvis  $a_{(i,i+1)} = 1/4$ , er  $i < 45$ . Ikkenull-elementene i rekken  $i + 1$  vil eventuelt være på formen  $a_{(i+1,i-8)}$ ,  $a_{(i+1,i)}$ ,  $a_{(i+1,i+2)}$  og  $a_{(i+1,i+10)}$ . Siden  $i < 45$ , vil  $a_{(i+1,i)} = 1/4$ .

Hvis  $a_{(i,i+9)} = 1/4$ , er  $i < 37$ . Ikkenull-elementene i rekken  $i + 9$  vil eventuelt være på formene  $a_{(i+9,i)}$ ,  $a_{(i+9,i+8)}$ ,  $a_{(i+9,i+10)}$  og  $a_{(i+9,i+18)}$ . Siden  $i < 37$ , er  $a_{(i+9,i)} = 1/4$ .

Vi har dermed vist at  $a_{(i,j)} = 1/4$  medfører at det eksisterer et element  $a_{(j,i)} = 1/4$ . Følgelig er matrisen  $M$  symmetrisk  $\square$

Av beviset til Lemma 4.18 at rekkesummen for matrisen  $M$  er 1 og av symmetri følger dermed at kolonnesummen også er lik 1. Av Figur 4.8 ser vi en skisse  $M$ . Her er de sorte feltene ikkenull-elementene og de hvite feltene er null-elementene. Tilsvarende struktur som det er ser på denne figuren, ser en ofte når den endelige differansemetoden anvendes. [Saa95, s.55].



Figur 4.8: Ny matrise

Var det utfordrende å løse ligningssett med 8 ukjente, gjelder det i enda større grad for et ligningssett med 45 ligninger. Vi omformer ligningssettet på samme måte som i tilfellet med 8 punkter og får rekursjonsformelen

$$\mathbf{t}_{(n+1)} = M\mathbf{t}_{(n)} + \mathbf{B}. \quad (4.30)$$

Vi har allerede funnet ut at både rekkesummen  $\alpha$  og kolonnesummen  $\beta$  for matrisen er lik 1. Dermed er verken *rekkesumskriteriet* eller *kolonnesumskriteriet* oppfylt. Vi har ovenfor vist at disse to kriteriene var *tilstrekkelige kriterier* for kontraksjon. Skal vi kunne bruke

*Jakobi-iterasjon* i dette tilfellet, trenger vi enda et sterkere kriterium. Det viser seg at vi finner det vi trenger i *Lineær algebra*.

#### 4.7.2 Noen resultater fra lineær algebra

De resultatene vi nå skal bruke fra *Lineær algebra*, inngår i grunnleggende kurs. For sammenhengens skyld tar vi dem med i denne teksten, men uten å føre bevis. Hvis noen begreper skulle være ukjente vises til [AR94, s. 365-373].

**Definisjon 4.19.** En kvadratisk matrise  $D$  er en *diagonalmatrise* hvis alle elementene bortsett fra diagonalelementene er lik 0. En kvadratisk matrise  $M$  er *diagonaliserbar* hvis det finnes en invertibel matrise  $P$  slik at  $PMP^{-1}$  er en diagonalmatrise. Vi sier at  $P$  *diagonaliserer*  $M$ .

**Proposisjon 4.20.** Hvis  $M$  er en  $n \times n$ -matrise, så er følgende ekvivalent:

- (a)  $M$  er ortogonalt diagonaliserbar.
- (b)  $M$  har en ortonormal mengde av egenvektorer.
- (c)  $M$  er symmetrisk

**Proposisjon 4.21.** Hvis  $M$  er symmetrisk, så vil

- (a) Egenverdiene til  $M$  vil være reelle
- (b) Egenvektorer fra forskjellige egenrom vil være ortogonale.

**Definisjon 4.22** (Spektralradius). Hvis  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  er egenverdiene til matrisen  $A$ , kaller vi  $\lambda_M = \max_{1 \leq j \leq k} |\lambda_j|$  for *spektralradien* til  $M$ .

**Definisjon 4.23.** La  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2] \ \cdots \ x_n$  være en vektor i  $\mathbb{R}^n$ . Vi definerer den euklidiske vektornormen ved

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (4.31)$$

Vi kommer nå til hovedresultatet i dette avsnittet:

**Proposisjon 4.24.** La  $M$  være en symmetrisk  $n \times n$ -matrise og  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Hvis  $\lambda_M < 1$ , så er matrisemultiplikasjonen  $M\mathbf{x}$  en kontraksjon.

*Bevis.* Vi skal vise at  $\|M\mathbf{x}\|_2 \leq \lambda_M \|\mathbf{x}\|_2$ .

Siden  $M$  er symmetrisk, finnes det  $n$  ortonormale egenvektorer, Proposisjon 4.20. Derfor kan  $\mathbf{x}$  uttrykkes på formen  $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$  hvor  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$  er ortonormale egenvektorer og  $\|\mathbf{x}\|_2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2}$ .



La  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  være egenverdiene til  $M$ . Vi har da at

$$\begin{aligned} \|M\mathbf{x}\|_2 &= \|M\alpha_1\mathbf{e}_1 + M\alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + M\alpha_n\mathbf{e}_n\|_2 \\ &= \|\alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{e}_n\|_2 \\ &= (\alpha_1^2\lambda_1^2 + \alpha_2^2\lambda_2^2 + \dots + \alpha_n^2\lambda_n^2)^{1/2} \\ &\leq \lambda_M(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2} = \lambda_M \|\mathbf{x}\|_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

som viser at matrisemultiplikasjonen  $M\mathbf{x}$  er en kontraksjon hvis  $\lambda_m < 1$ . □

$M$  i (4.30) er diagonaliserbar siden  $M$  er symmetrisk, Proposisjon 4.20. Det er derfor klart at vi kan bruke rekursjonsformelen  $\mathbf{t}_{(n+1)} = M\mathbf{t}_{(n)} + \mathbf{b}$  for å finne løsning av ligningssettet vårt forutsatt at vi vet at spektralradien  $\lambda_M < 1$ . Vi må derfor nå konsentrere oss om å vise at spektralradien  $\lambda_M < 1$ . Her kan Geršgorindiskene til  $M$  gi svært nyttig informasjon.

### 4.7.3 Geršgorins diskere

Dette og neste avsnitt bygger i stor grad på [Var00, s. 16-22] og [LT85, s. 371-377, 527-544].

**Definisjon 4.25** (Geršgorins diskere). La  $M = [a_{jk}]_{j,k=1}^n$  være en  $n \times n$ -matrise. Geršgorin-diskene til  $M$  er de  $n$  sirkelskivene

$$D_j(M) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| = \Lambda_j \right\}.$$

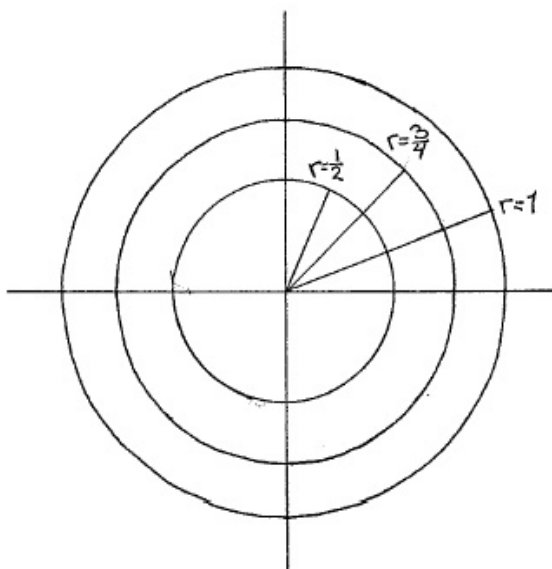
**Teorem 4.26** (Geršgorins teorem). La  $M = [a_{ij}]$  være en tilfeldig, kompleks  $n \times n$ -matrise. Hvis  $\lambda$  er en egenverdi til  $M$ , så finnes det  $r \in \{1, 2, \dots, n\}$  slik at

$$|\lambda - a_{rr}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{rk}| = \Lambda_r. \quad (4.33)$$

Herav følger at alle egenverdiene til  $M$  ligger i unionen av alle Geršgorin-diskene til  $M$ .

*Bevis.* La  $\lambda$  være en egenverdi for matrisen  $M$  og la  $\mathbf{x} \neq 0$  være en egenvektor som tilhører egenverdien  $\lambda$ . Vi normaliserer vektoren  $\mathbf{x}$  slik at den største komponenten har absoluttverdi 1. Dette kan vi oppnå ved å dele hvert ledd med absoluttverdien til den komponenten som har størst absoluttverdi. Siden  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  og  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  har vi at

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$



Figur 4.9: Geršgorin-diskene

Vi velger komponenten hvor  $|x_r| = 1$ . Av trekantulikheten følger det at

$$|\lambda - a_{rr}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj}| |x_r| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj}|$$

Dermed ligger  $\lambda$  i en av Geršgorin-diskene. Fordi  $\lambda$  var tilfeldig valgt, ligger følgelig alle egenverdiene i unionen av alle Geršgorin-diskene.  $\square$

Vi får et godt inntrykk av Geršgorin-diskene for matrisen  $M$  i ligning 4.30 ved figur 4.9. Siden alle diagonalelementene i  $M$  er null, vil alle Geršgorin-diskene være sirkler rundt origo. Av Teorem 4.26 følger  $\lambda_M \leq 1$  siden alle egenverdiene ligger på unionen av alle Geršgorin-diskene og unionen av disse diskene er  $|z| \leq 1$ . Kravet var imidlertid at vi skulle ha en ekte ulikhet, altså at  $\lambda_M < 1$ . For å vise dette, skal vi bruke *Tausskys teorem*

#### 4.7.4 Tausskys teorem

Tausskys teorem innbefatter flere nye begreper som vi må definere før vi kan presentere teoremet:

**Definisjon 4.27.** En *permutasjonsmatrise*  $P$  er en kvadratisk  $n \times n$ -matrise som er framkommet ved å omordne rekkene eller kolonnene i identitetmatrisen.

**Definisjon 4.28.** For  $n \geq 2$  sier vi at en kompleks kvadratisk  $n \times n$ -matrise  $M$  er *reduksibel* hvis det finnes en permutasjonsmatrise  $P$  slik at

$$PMP^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

hvor  $M_{11}$  er en  $r \times r$ -matrise undermatrise og  $M_{22}$  er en  $(n - r) \times (n - r)$ -matrise hvor  $1 \leq r \leq n$ . Hvis det ikke finnes noen slik matrise, sier vi at  $M$  er *irreduksibel*.

**Teorem 4.29** (Tauskys teorem). La  $M = [a_{ij}]$  være en irreduksibel, kompleks  $n \times n$ -matrise. Anta at egenverdien  $\lambda$  til  $M$ , er et randpunkt til unionen av alle Geršgorin diskene  $|z - a_{jj}| \leq \Lambda_j$ . Da vil alle  $n$  sirkler gå gjennom punktet  $\lambda$ .

[Var00, s. 20]

Vi venter med å bevise teoremet og ser heller på hvilke resultater det kan gi hvis forutsetningene i teoremet er oppfylt. Vi gjør det på denne måten for å bedre oversikten i argumentasjonen samtidig som beviset vil bli lettere å forstå på et senere tidspunkt.

Teoremet sier at hvis en av egenverdiene ligger på randen av unionen av Geršgorin diskene og  $M$  er en irreduksibel matrise, må alle  $n$  Geršgorin-disker gå i gjennom dette punktet. Ser vi på figur 4.9, erkjenner vi at dette er umulig fordi det finnes Geršgorin-disker som ikke har noen felles punkter. Forutsatt at  $M$  er en irreduksibel matrise, er følgelig spektralverdien  $\lambda_M < 1$ .

Vår oppgave er nå redusert til at vise at  $M$  er en irreduksibel matrise. Det viser seg at *graf-teori* er et tjenlig redskap for dette formålet.

#### 4.7.5 Litt graf-teori

Vi skal se at vi ved hjelp av graf-teori, kan gi begrepet irreduksibilitet en geometrisk forklaring slik at det blir lettere å avgjøre om  $M$  er en irreduksibel matrise.

**Definisjon 4.30.** La  $M = a_{ij}$  være en  $n \times n$ -kompleks matrise. Vi kaller punktene  $P_1, P_2, \dots, P_n$  for *hjørner*. For hvert element  $a_{ij} \neq 0$  trekker vi en *rettet kant*  $P_i \rightarrow P_j$ . Hvis  $a_{ij} = 0$  har vi ingen rettet kant fra  $P_i \rightarrow P_j$ .

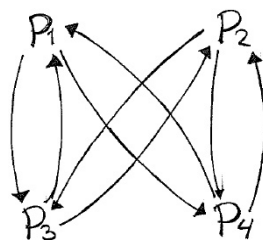
$P_r \rightarrow P_s = P_r \rightarrow P_l \cup P_l \rightarrow P_m \cup P_m \rightarrow P_s$  kaller vi en *sti* fra  $p_r$  til  $P_s$ .

Bildet av alle hjørner og rettede kanter kaller vi *den rettede grafen* til  $M$ .

**Eksempel 4.31.** Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

har den rettede grafen  $G(A)$  som vist på Figur 4.10. Siden  $a_{12} = 0$ , går det eksempelvis ingen rettet kant fra  $P_1$  til  $P_2$ . Fra  $P_1$  til  $P_3$  går det derimot en rettet kant siden  $a_{13} \neq 0$ .



Figur 4.10: Grafen til A

**Eksempel 4.32.** Matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

har den rettede grafen  $G(B)$  som vist på Figur 4.11.



Figur 4.11: Grafen til B

**Definisjon 4.33.** En rettet graf er *strengt sammenhengende* hvis det for ethvert par av  $(P_i, P_j)$  finnes en *sti* av rettede kanter som binder sammen  $P_i$  og  $P_j$ .

**Eksempel 4.34.** Det er greit å se av grafene til henholdsvis  $A$  og  $B$  at  $A$  er strengt sammenhengende og  $B$  ikke er strengt sammenhengende. Vi kan trekke en sti mellom hjørnene til  $A$ . Det går ikke noen sti fra  $P_2$  til  $P_1$  i  $B$ .

Vi skal nå se sammenhengen mellom den rettede grafen  $G(M)$  til en matrise  $M$  og egenskapen redusibilitet/irreduisibilitet.

**Lemma 4.35.** La  $M$  være en kompleks  $n \times n$ -matrise på formen

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

hvor  $M_{11}$  er en  $r \times r$ -matrise undermatrise og  $M_{22}$  er en  $(n - r) \times (n - r)$ -matrise hvor  $1 \leq r \leq n$ . Den rettede grafen  $G(M)$  er ikke strengt sammenhengende.

*Bevis.* La oss se på alle rettede kanter fra hjørnet  $P_i$  hvor  $i > r$ . Siden  $a_{ij} = 0$  for alle  $1 \leq j \leq r$ , vil det ikke gå noen rettet kant fra  $P_i$  til  $P_j$  for  $1 \leq j \leq r$ . Skal det gå en rettet kant fra  $P_i$  til  $P_j$ , må altså  $j \in \{r+1, r+2, \dots, n\}$ , men fra disse  $P_i$  går det ikke noen rettet kant videre til noe  $P_k$  med  $1 \leq j \leq r$ . Altså går det ingen sti fra  $P_i$  til noe  $P_k$  med  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Altså er ikke  $G(M)$  sammenhengende.  $\square$

**Lemma 4.36.** *La  $M$  være en strengt sammenhengende kompleks  $n \times n$ -matrise og  $P$  en  $n \times n$ -permutasjonsmatrise. Egenskapen strengt sammenhengende blir bevart gjennom matriseoperasjonen  $PMP^T$ .*

*Bevis.* Det er tilstrekkelig å vise at dette er sant når  $P$  er en elementær permutasjonsmatrise<sup>2</sup> fordi enhver permutasjonsmatrise er et produkt av elementære permutasjonsmatriser.

Vi antar derfor  $M$  har en strengt sammenhengende graf og at  $P$  er en elementær permutasjonsmatrise. Uten tap av generalitet kan vi anta at  $P$  er framkommet ved at den  $i'$ te og  $j'$ te rekken i indentitetsmatrisen har byttet plass. Matriseoperasjonen  $B = PMP^T$  medfører at den  $i'$ te og  $j'$ te rekken i  $M$  bytter plass og deretter at  $i'$ te og  $j'$ te kolonnen bytter plass.

Siden  $M$  har en strengt sammenhengende graf  $G(M)$ , finnes det en sti mellom kantene  $P_r$  og  $P_s$ . Det må derfor være en følge av ikkenullelementer i  $M$ ,  $a_{rq} \smile a_{qt} \smile \dots \smile a_{vj} \smile a_{jw} \smile a_{wk} \smile \dots \smile a_{mi} \smile a_{is}$ <sup>3</sup>. Vi kan finne den tilsvarende følgen av punkter i  $B$  ved å bytte alle  $i'$ er med  $j'$ er og motsatt. Setter vi dem sammen, ser vi

$$\begin{aligned} a_{rq} \smile a_{qt} \smile \dots \smile a_{vj} \smile a_{jw} \smile a_{wk} \smile \dots \smile a_{mi} \smile a_{is} \\ b_{rq} \smile b_{qt} \smile \dots \smile b_{vi} \smile b_{iw} \smile b_{wk} \smile \dots \smile b_{mj} \smile b_{js}. \end{aligned}$$

Vi merker oss at elementer som ikke ligger på den  $i'$ te eller  $j'$ te kolonnen/rekken, får de samme indeksene i  $B$ .

Forholdene mellom kantene i  $M$  og  $B$  blir tilsvarende:

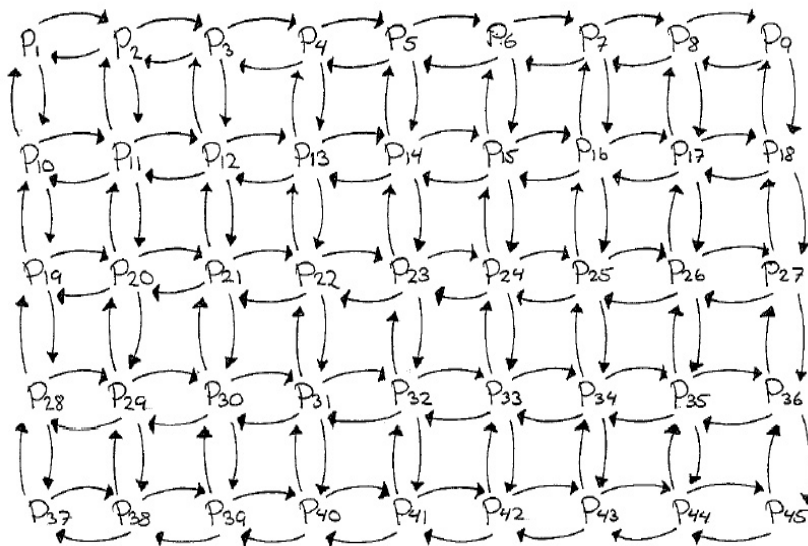
$$\begin{aligned} P_r \rightarrow P_q \rightarrow P_t \cdots \rightarrow P_v \rightarrow P_j \rightarrow P_w \cdots \rightarrow P_m \rightarrow P_i \rightarrow P_s \\ P_r \rightarrow P_q \rightarrow P_t \cdots \rightarrow P_v \rightarrow P_i \rightarrow P_w \cdots \rightarrow P_m \rightarrow P_j \rightarrow P_s. \end{aligned}$$

Av dette kan vi slutte at vi får den rettede grafen til  $B = PMP^T$  ved å bytte indeks på kantene  $P_i$  og  $P_j$  i grafen til  $M$ . Hvis  $G(M)$  er strengt sammenhengende, så gjelder dette også  $G(PMP^T)$ .  $\square$

**Proposisjon 4.37.** *En kompleks  $n \times n$ -matrise  $A$  er irreduisibel hvis den retningsbestemte grafen  $G(M)$  er strengt sammenhengende.*

<sup>2</sup>For definisjon av elementær matrise, se [AR94, s.50-51]

<sup>3</sup>Vi bruker her  $\smile$  for å vise sammenhengen mellom ikkenullelementene i matrisen

Figur 4.12: Grafen til  $M$ 

*Bevis.* Av Lemma 4.35 vet vi at en matrise på formen (4.34) ikke har en strengt sammenhengende graf. Følgelig er en matrise  $M$  med strengt sammenhengende graf ikke på formen på (4.34). Siden egenskapen *strengt sammenhengene* bevares under operasjonen  $PMP^T$  hvor  $P$  er en permutasjonsmatrise, Lemma 4.36, er en matrise  $M$  med strengt sammenhengende graf ikke på formen (4.34). Av Definisjon 4.28 følger dermed at  $M$  er irreduibel.  $\square$

Vi skal bruke det vi nå har gjennomgått til å vise at  $M$  er irreduibel. På Figur 4.12 ser vi grafen  $G(M)$ . Denne grafen er framkommet på samme måte som grafene  $G(A)$  og  $G(B)$  i henholdsvis Eksempel 4.31 og Eksempel 4.32. Selv om det er noe vanskelig, kan en også sammenligne Figur 4.12 og Figur 4.8. Når en studerer Figur 4.12 må en erkjenne at  $G(M)$  er strengt sammenhengende og dermed er  $M$  irreduibel. Følgelig er  $\lambda_M < 1$  og  $M(\mathbf{t}) + \mathbf{b}$  er kontraksjon. Av Banach fikspunktsteorem følger nå at rekursjonsformelen (4.30) vil konvergere mot et fikspunkt som er løsningen av ligningssettet vårt. Vi kan dermed bruke Jakobi-iterasjon.

#### 4.7.6 Bevis av Tauskys teorem

**Teorem 4.38** (Tauskys teorem). *La  $M = [a_{ij}]$  være en irreduibel, kompleks  $n \times n$ -matrise. Anta at egenverdien  $\lambda$  til  $M$ , er et randpunkt til unionen av alle Geršgorins diskene  $|z - a_{jj}| \leq \Lambda_j$ . Da vil alle  $n$  sirkler gå gjennom punktet  $\lambda$  som betyr at  $|\lambda - a_{jj}| = \Lambda_i$  for alle  $1 \leq i \leq n$ .*

*Bevis.* La  $\lambda$  være en egenverdi for  $M$  hvor  $\mathbf{x} \neq 0$  er den tilsvarende egenvektoren og  $|x_r| = 1 \geq |x_i|$  for alle  $1 \leq i \leq n$ . Av Teorem 4.26 følger at

$$|\lambda - a_{rr}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^n |a_{rk}| = \Lambda_r.$$

Vi hadde imidlertid antatt at  $\lambda$  ligger på randen av unionen av alle diskene  $|z - a_{jj}| \leq \Lambda_j$  og følgelig må  $|z - a_{rr}| = \Lambda_r$ . Derfor må også

$$|\lambda - a_{rr}| = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^n |a_{rk}| \cdot |x_k| = \Lambda_r.$$

Dette betyr at for alle  $a_{rl} \neq 0$  med  $l \neq r$ , må vi ha at  $|x_l| = 1$ . Hvis ikke gjelder ikke likheten. Siden  $M$  er irreducibel, finnes det minst en  $p \neq r$  hvor  $a_{rp} \neq 0$  og dermed kan vi slutte at  $|x_p| = 1$ . Vi kan nå gjenta argumentasjon når vi setter  $r = p$ , og vi husker at  $\lambda$  ligger på randen av alle diskene  $|z - a_{jj}| \leq \Lambda_j$ . Vi har derfor at

$$|\lambda - a_{pp}| = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n |a_{pk}| \cdot |x_j| = \Lambda_r.$$

Fra hypotesen vet vi at  $\lambda$  er et randpunkt på unionen av alle disker  $|z - a_{jj}| < \Lambda_i$ . Igjen kan vi bruke at  $|x_j| = 1$  for alle  $a_{pj} \neq 0$  med  $j \neq p$ . Fra beviset av Lemma 4.36 vet vi at siden  $M$  er irreducibel, finnes det en følge av punkter i  $M$ ;  $a_{rp} \smile a_{pr_1} \smile \dots \smile a_{r_{m-1}j}$  for enhver  $j, 1 \leq j \leq n$ . Vi kan dermed forsette denne prosessen til vi har kommet igjennom alle  $n$ . (Hvis vi ikke skulle komme innom alle elementene, ville vi hatt en redusibel matrise)

Vi kan derfor konkludere med at  $|\lambda - a_{jj}| = \Lambda_j$  for alle  $1 \leq j \leq n$  som beviser at de  $n$  sirklene  $|z - a_{jj}| = \Lambda_j$  går igjennom punktet  $\lambda$ .  $\square$

[Var00, s. 20-21]

### 4.7.7 Potensmetoden

Vi er nå kommet så langt at vi vet at vi kan bruke *Jacobi-iterasjon* for å finne en løsning av vårt problem. Spørsmålet som da reiser seg er hvor mange iterasjoner vi bør utføre før vi kan si oss fornøyd med resultatet? Formlene for feilmarginer (2.13) og (2.14) på side 11, kan gi oss svar på dette spørsmålet. For å kunne bruke disse formlene, må vi ha et estimat for spektralradien  $\lambda_M$ . Til nå vet vi bare at  $\lambda_M < 1$ . Det finnes imidlertid en metode som kan brukes til dette formålet som kalles *Potensmetoden*. Potensmetoden er en iterasjonsmetode som produserer en følge av verdier som konvergerer mot en egenverdi når betingelsene for dette er oppfylt [CK04, s.372].

**Definisjon 4.39** (Lineærfunksjonal). <sup>4</sup> En lineær funksjonal er en lineær operator med definisjonsmengde i et reelt eller kompleks vektorrom og verdimensjon i henholdsvis  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$ .

**Proposisjon 4.40** (Potensmetoden). La  $M$  være en diagonaliserbar  $n \times n$ -matrise med egenverdier som har følgende egenskaper:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Vi velger en vektor  $\mathbf{x}_0$  som ikke er en egenvektor<sup>5</sup> og lar rekursjonsformelen

$$\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n$$

definere en følge  $(\mathbf{x}_n)_n$ .

For en enhver lineær kompleks funksjonal  $\phi$  vil forholdet

$$r_k = \frac{\phi(\mathbf{x}_{k+1})}{\phi(\mathbf{x}_k)} \quad (4.35)$$

være estimat for spektralradien  $\lambda_M$  og

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \frac{\phi(\mathbf{x}_{k+1})}{\phi(\mathbf{x}_k)} = \lambda_M. \quad (4.36)$$

*Bevis.* La  $M$  være en diagonaliserbar  $n \times n$ -matrise med egenverdier som har følgende egenskaper:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Hver egenverdi  $\lambda_i$  har en tilhørende egenvektor  $\mathbf{u}_i$  slik at

$$M\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i.$$

og hvor  $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ . Vi velger nå en tilfeldig vektor  $\mathbf{x}_0$  og lar rekursjonsformelen

$$\mathbf{x}_{n+1} = M\mathbf{x}_n$$

definere følgen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= M\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= M\mathbf{x}_1 = M^2\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_3 &= M\mathbf{x}_2 = M^2\mathbf{x}_1 = M^3\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k &= M\mathbf{x}_{k-1} = M^k\mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

<sup>4</sup>Funksjonaler kan defineres mer generelt enn dette, men dette er alt vi trenger for vårt formål.

<sup>5</sup>Hvis en bruker en datamaskin i beregningene, kan en vanligvis velge  $\mathbf{x}_0$  fritt fordi *avrundingsfeil* i maskinen, gjør at iterasjonen ikke blir værende i undervektorrommet til egenvektoren!



Siden  $M$  er diagonoaliserbar, har vi  $n$  lineært uavhengige egenvektorer. Vi kan derfor uttrykke  $\mathbf{x}_0$  som en lineær kombinasjon av egenvektorene.

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n.$$

Siden vi kan multiplisere koeffisientene med hvert av leddene i egenvektorene, kan vi uten tap av generalitet sette

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n. \quad (4.38)$$

Bruker vi (4.38) som substitusjon i (4.37), gir det oss

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= M^k \mathbf{x}_0 \\ &= M^k \mathbf{u}_1 + M^k \mathbf{u}_2 + \cdots + M^k \mathbf{u}_n \\ &= \lambda_1^k \mathbf{u}_1 + \lambda_2^k \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n^k \mathbf{u}_n \end{aligned} \quad (4.39)$$

(4.39) kan skrives på formen

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k \left[ \mathbf{u}_1 + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{u}_2 + \cdots + \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{u}_n \right] \quad (4.40)$$

Siden  $|\lambda_1| > |\lambda_i|$  for alle  $i > 1$ , har vi at  $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ . Følgelig vil  $|\lambda_i/\lambda_1|^k \rightarrow 0$  når  $k \rightarrow \infty$ . Dermed kan (4.40) forenkles til

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1^k [\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_k] \quad (4.41)$$

hvor  $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{0}$  når  $k \rightarrow \infty$ .

Vi lar  $\phi \neq 0$  være en kompleks lineærfunksjonal på  $\mathbb{C}^n$ . Vi ser nå at

$$\phi(\mathbf{x}_k) = \lambda_1^k [\phi(\mathbf{u}_1) + \phi(\mathbf{v}_k)]. \quad (4.42)$$

Vi beregner nå forholdene  $r_1, r_2, \dots$  på følgende måte

$$r_k = \frac{\phi(\mathbf{x}_{k+1})}{\phi(\mathbf{x}_k)} = \lambda_1 \left( \frac{\phi(\mathbf{u}_1) + \phi(\mathbf{v}_{k+1})}{\phi(\mathbf{u}_1) + \phi(\mathbf{v}_k)} \right) \rightarrow \lambda_1 \quad \text{når } k \rightarrow \infty. \quad (4.43)$$

□

Hvis vi altså har en diagonaliserbar matrise  $M$  hvor egenverdien som gir spektralradien  $\lambda_M$ , har *algebraisk multiplisitet*<sup>6</sup> lik 1, kan vi bruke *potensmetoden* for å estimere spektralradien.

<sup>6</sup>For definisjon av algebraisk multiplisitet vises til [AR94, s.371-372]

### 4.7.8 Feilmarginer

Håpet var at vi skulle bruke potensmetoden til å beregne spektralradien, men dessverre dukker det opp et problem som forblir uløst:

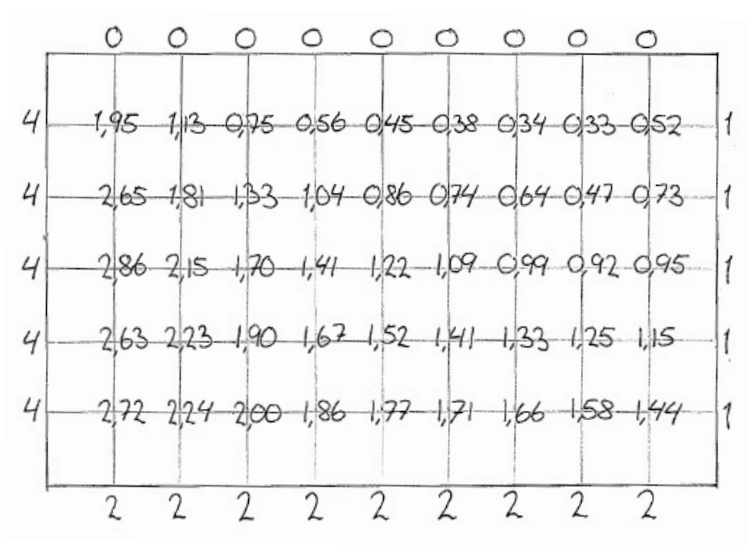
Vi kan vise at  $M$  har en positiv egenverdi  $\lambda_p$  lik spektralradien til  $M$  og som har algebraisk multiplisitet 1 siden  $M$  er reell, ikke-negativ og irreducibel. Dette er en følge av *Perron-Frobenius Teorem* som er referert nedenfor. Vi vet imidlertid ikke om det kan finnes en negativ egenverdi med samme absoluttverdi. I så fall har vi ikke kontroll når vi bruker potensmetoden.

**Definisjon 4.41.** En matrise  $A$  er ikke-negativ hvis ingen elementer i matrisen er negative. En positiv vektor er en vektor som bare har positive elementer.

**Proposisjon 4.42** (Perron-Frobenius teorem). Hvis  $A$  er en reell  $n \times n$ -matrise som er ikke-negativ og irreducibel, så gjelder:

- (a) Matrisen  $A$  har en positiv egenverdi  $\lambda$ , lik spektralradien til  $A$ .
- (b) Det finnes en positiv egenvektor tilknyttet egenverdien  $\lambda$ .
- (b) Egenverdien  $\lambda$  har algebraisk multiplisitet lik 1.

For bevis vises til [LT85, s. 536]



Figur 4.13: Temperaturfordeling

Om vi likevel anvender *Potensmetoden* observerer vi følgende: Ved å velge en positiv  $\mathbf{x}_0$ , vil  $\mathbf{x}_1$  og påfølgende vektorer være positive. Iterasjonsprosessen konvergerer mot 0.92.

Det er mye trolig at dette er en god tilnærming av spektralradius  $\lambda_M$ , men vi mangler teori for å slå dette endelig fast.

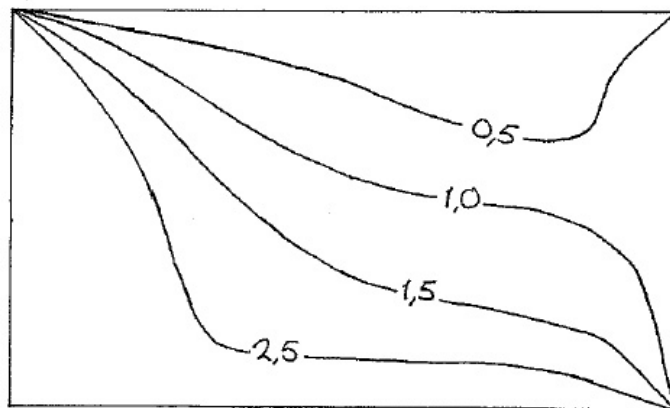
Om vi antar at dette er spektralradius, altså at  $\lambda_M \approx 0.92$ , kan vi bruke feilestimat-formelen (2.13) på side 11 til å beregne hvor mange iterasjoner vi bør gjennomføre. Ved henholdsvis 50, 100 og 120 iterasjoner en feilmargin på  $\epsilon_{50} = 2.24$ ,  $\epsilon_{100} = 0.04$  og  $\epsilon_{120} = 0.007$ . 120 iterasjoner er i alle fall godt nok.

#### 4.7.9 Resultater

Vi velger  $\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 7/4 \\ \vdots \\ 7/4 \end{bmatrix}$  fordi  $7/4$  er middelveien for 0, 1, 2, 4.

Dette gir oss resultatet som vist i Figur 4.13.

På grunnlag av dette kan vi trekke isotermer som vist på Figur 4.14



Figur 4.14: Isothermer

## 4.8 Historisk bakgrunn

*Jacobi-iterasjon* har navn etter den kjente tyske matematikeren **Carl Jacob Jacobi (1804-1851)**. Han har etterlatt seg arbeid innenfor flere områder av matematikken. Best kjent er kanskje *Jacobi-determinanten* som en raskt møter når en begynner med flerdimensjonal analyse. Sammen med *Gauss/Seidel-iterasjon* er *Jacobi-iterasjon* den mest

kjente metode for å finne løsninger av lineære ligningssett. *Gauss/Seidel-iterasjon* har navn etter de tyske matematikerne **Johann C. F. Gauss (1777-1855)** og **Philipp L. Seidel (1821-1896)**.

Iterasjonsmetodene innenfor lineær algebra har altså bakgrunn hos de betydeligste matematikerne i det 19. århundre. Det skulle gå over hundre år før metodene virkelig fikk praktisk anvendelse. Det skjedde ved utviklingen av datamaskinene fra avslutningen av 2. verdenskrig og til i dag. Etter hvert som maskinkraften er blitt større, har anvendelsen av slike metoder fått større og større betydning [Ise96, s. 219].

Tausskys teorem har navn etter **Olga Taussky-Todd (1906-1995)** og ble publisert i 1948. Olga Taussky-Todd ble født i Olmütz som da hun ble født lå i Østerrike, men som nå er en del av Tjekkia. Hun vokste opp i Wien dit familien flyttet da hun var tre år og der studerte hun også. Hun tok sin doktorgrad i 1930. Hun reiste en god del, særlig i den første delen av livet sitt. I en periode var hun i Göttingen og var da blant annet Hilberts sekretær [Rei96, s.201]. I årene rett før og under den 2. Verdenskrig var hun på de britiske øyer hvor hun traff sin mann, matematikeren John Todd. Paret flyttet til USA etter krigen hvor hun har vært tilknyttet flere universiteter. Olga Taussky-Todd har arbeidet på en rekke felter innenfor matematikk, ikke minst matriseteori [ORb].

## Kapittel 5

# Differensial- og integralligninger

Matematikk har gjennom historien blitt brukt til å beskrive fenomener i naturen. Det er få deler av matematikken som i så stor grad er knyttet til praktisk anvendelse som tilfellet er med differensialligningene og integralligningene. Hver for seg representerer begge disse emnene separate disipliner av matematikken. Det er likevel klare sammenhenger mellom disse feltene. For oss vil det være naturlig å se differensial- og integralligninger i sammenheng fordi vi vil tilnærme oss de to problemfeltene på ganske samme måte.

Når vi skal vise hvordan Banach fikspunktteorem kan anvendes i forhold til differensial- og integralligninger, gjør vi det i forhold til to bestemte typer av henholdsvis differensial- og integralligninger, ordinære differensialligninger og Fredholmlikninger. De metodene som vi bruker, har mye større anvendelsesområde enn vi får fram gjennom våre eksempler. En blir raskt overbevist om dette ved å lese i en noe avansert bok om differensialligninger, for eksempel [Inc56]. Dette kapitlet bygger i særlig grad på [Kre78, s. 314-423] og [Apo65, s. 464-488]

## 5.1 Ordinære differensiallikninger

### 5.1.1 Innledning

En ligning som binder sammen en funksjon med den/de variable og en eller flere av dens deriverte kaller vi *en differensialligning*. Et eksempel på en differensialligning er

$$x' = 2t(1 + x). \quad (5.1)$$

$x$  er her å forstå som en funksjon av  $t$ .

Løsningen av en slik ligning er én eller flere funksjoner som oppfyller (5.1). Er dette en funksjon av en fri variabel, kaller vi det *en ordinær differensialligning*. Differensialligninger som inneholder flere frie variable kalles *partielle differensialligninger*. Laplace-ligningen som vi arbeidet med i forrige kapittel, er en partiell differensialligning. Vi vil

arbeide med ordinære differensialligninger.

Vi kan kreve at en bestemt løsning skal gå igjennom et bestemt punkt  $(t_0, x_0)$ . Vi har da det vi kaller et *startverdiproblem*. Eksempel på et startverdiproblem er:

$$y' = 2t(1 + x) \quad x(0) = 0. \quad (5.2)$$

Det finnes flere klasser av ordinære differensialligninger, og metoder er utviklet for å finne løsninger av ligninger fra ulike klasser. Vi konsentrere oss om differensialligninger av 1. orden. Det vil si at ligningen bare inneholder den 1. deriverte.

### 5.1.2 Picards eksistens- og entydighetsteorem.

*Picards eksistens- og entydighetsteorem for 1. ordens differensialligninger* er et svært sentralt resultat når en arbeider med differensialligninger. Ved hjelp av dette teoremet, kan vi vite at bestemte typer differensialligninger har entydig løsning. Vi skal bruke Banachs fikspunktteorem til å bevise dette teoremet.

I beviset for teoremet vil vi trenge noen hjelperesultateter. Disse er knyttet til grunnleggende resultater i matematisk analyse og teori om metriske rom.

**Definisjon 5.1.** Anta at  $f$  og  $g$  er to funksjoner definert på en mengde  $A$ . Avstanden mellom  $f$  og  $g$  (over  $A$ ) er definert ved

$$d_A(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)| : t \in A\} \quad (5.3)$$

Dersom avstanden  $|f(t) - g(t)|$  kan bli vilkårlig stor, setter vi  $d(f, g) = \infty$

[Lin96, s.551]

**Definisjon 5.2** (Uniform konvergens). La  $(f_n)_n$  være en følge av funksjoner definert på en mengde  $A$ , og la  $f$  være en funksjon som også er definert på  $A$ . Vi sier at  $(f_n)_n$  *konvergerer uniformt* mot  $f$  på  $A$  dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_A(f, f_n) = 0. \quad (5.4)$$

[Lin96, s.552]

**Lemma 5.3.** La  $f_1, f_2, f_3 \dots$  være funksjoner definert på en mengde  $A$ . Anta at  $f_1, f_2, f_3 \dots$  er *kontinuerlig*, og at følgen  $(f_n)_n$  *konvergerer uniformt* mot  $f$  på  $A$ . Da er  $f$  *kontinuerlig* i  $A$ .

[Lin96, s. 554]

**Lemma 5.4.** La  $M$  være en *ikketom delmengde* av et metrisk rom  $(X, d)$ .  $M$  er *lukket* hvis og bare hvis  $x_n \in M, x_n \rightarrow x$  medfører at  $x \in M$ .

[Kre78, s. 30]

**Lemma 5.5.** *En underrom  $M$  av et komplett metrisk rom  $X$  er komplett hvis og bare hvis mengden  $M$  er lukket i  $X$ .*

[Kre78, s. 30]

**Teorem 5.6** (Picards eksistens- og entydighetsteorem). *Gitt startverdiproblemet*

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.5)$$

*La  $f$  være kontinuertlig på rektangelet*

$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \quad a, b > 0$$

*med sentrum i  $(t_0, x_0)$  som vist på Figur 5.1. Altså er  $f$  begrenset på  $R$ :*

$$|f(t, x)| \leq M \quad \text{for alle} \quad (t, x) \in R. \quad (5.6)$$

*Anta at  $f$  oppfyller en Lipschitz betingelse med hensyn på den andre variable. Det vil si at*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y| \quad (5.7)$$

*for ethvert par  $(x, y)$  på  $R$ . La  $J = [t_0 - c, t_0 + c]$  hvor*

$$c < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}. \quad (5.8)$$

*Hvis  $t \in I$ , la  $X_0(t_0) \equiv x_0$  og definer*

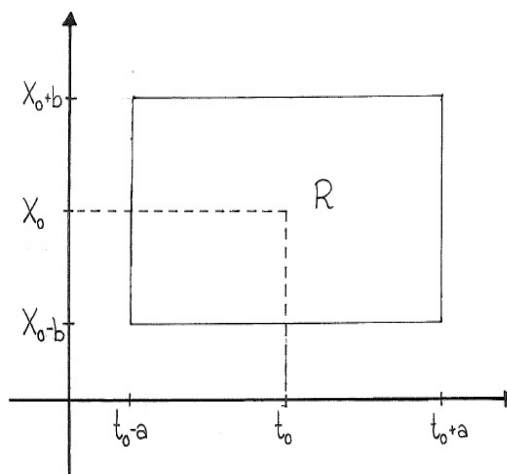
$$X_{n+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, X_n(s)) ds \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

*Da vil*

- a)** *Følgen  $(X_n(t))_n$  konvergere for enhver  $t \in J$*
- b)**  *$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t)$ , for enhver  $t \in J$ , være den entydige løsningen av startverdi-problemet (5.5) på intervallet  $J$ .*

*Bevis.* Vi deler opp beviset til 6 hoveddeler:

- Vi definerer det metriske rommet  $C(J)$  og viser at dette er komplett.
- Vi definerer  $\tilde{C}(J) \subset C(J)$  og viser at  $\tilde{C}(J)$  er komplett.
- Vi definerer transformasjonen  $T$  ved  $Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ .
- Vi viser at hvis  $Tx = x$ , så er  $x(t_0)$  en løsning av startverdi-problemet (5.5).
- Vi viser at  $T$  er en kontraksjon.
- Vi bruker Banach fikspunktteorem til å slutføre beviset.

Figur 5.1: Rektangelet  $\mathbf{R}$ 

**Funksjonsrommet  $C(J)$ :** La  $C(J)$  være det metriske rommet av alle kontinuerlige funksjoner på intervallet  $J = [t_0 - c, t_0 + c]$  med metrikken  $d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|^1$ ,

$$c < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}.$$

Vi skal vise at dette rommet er komplett.

La  $(x_m)_m$  være en Cauchy-følge i  $C(J)$ . For enhver  $\epsilon > 0$  finnes det da et naturlig tall  $N$ , slik at for alle  $m, n > N$ , gjelder det at

$$d(x_m, x_n) = \max |x_m - x_n| < \epsilon \quad \text{når } m, n > N. \quad (5.10)$$

For enhver  $t_0 \in I$  har vi dermed at  $|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \epsilon$ .  $(x_n(t_0))_n$  er en følge av reelle tall. Siden  $\mathbb{R}$  er et komplett metrisk rom, vil dermed  $(x_n(t_0))_n$  konvergere mot et reelt tall  $x(t_0)$  for enhver fastholdt  $t_0$ . Dette definerer punktvis en funksjon  $x(t)$  på  $I$ .

Vi må nå vise at  $x(t)$  er kontinuerlig. Av (5.10) følger det at når  $n \rightarrow \infty$ , vil

$$d(x_m(t) - x(t)) < \epsilon \quad \text{når } m > N.$$

For enhver  $t \in J$  gjelder derfor at

$$|x_m(t) - x(t)| < \epsilon \quad \text{når } m > N$$

<sup>1</sup>Vi kan her bruke max i stedet for sup fordi vi arbeider med kontinuerlige funksjoner på et lukket begrenset intervall.



Dette viser at  $(x_m(t))_m$  konvergerer uniformt til  $x(t)$ , Definisjon 5.2. Av Lemma 5.3 følger derfor at  $x(t)$  er kontinuerlig siden  $(x_m)_m$  er kontinuerlige funksjoner. Til sammen gir dette at  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_m(t) = x(t) \in C(J)$  som beviser kompletthet.

**Funksjonsrommet  $\tilde{C}(J)$ :** La  $\tilde{C}(J)$  være underrommet av  $C(J)$  som tilfredsstiller

$$|x(t) - x_0| \leq Mc \quad (5.11)$$

og  $(\tilde{x}_n)_n$  en Cauchyfølge i  $\tilde{C}(J)$ . Siden  $C(J)$  er et komplett metrisk rom, vet vi at  $(\tilde{x}_n)_n$  konvergerer mot et element  $\tilde{x} \in C(J)$ . Hvis vi kan vise at  $\tilde{x} \in \tilde{C}(J)$ , følger det av Lemma 5.4 at  $\tilde{C}(J)$  lukket. Lemma 5.5 gir i så fall at  $\tilde{C}(J)$  er et komplett metrisk rom.

Siden  $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$  kan vi for en vilkårlig  $\epsilon > 0$  finne  $N$  slik at  $d_\infty(\tilde{x}_N, \tilde{x}) < \epsilon$ . For enhver fastholdt  $t_1 \in I$  gjelder derfor at

$$\begin{aligned} |x_0 - \tilde{x}(t_1)| &= |x_0 - \tilde{x}_N(t_1) + \tilde{x}_N(t_1) - \tilde{x}(t_1)| \\ &\leq |x_0 - \tilde{x}_N(t_1)| + |\tilde{x}_N(t_1) - \tilde{x}(t_1)| \leq Mc + \epsilon. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Siden  $\epsilon$  er vilkårlig valgt, gir dette

$$|x_0 - \tilde{x}(t_1)| \leq Mc \quad (5.13)$$

som betyr at  $\tilde{x}(t_1) \in R$ . Følgelig er  $\tilde{x} \in \tilde{C}(J)$  som gir det ønskede resultatet.

**Transformasjonen  $T$ :** Vi definerer transformasjonen  $T$  ved

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (5.14)$$

$T$  er altså også en funksjon av  $t$ . Siden  $f(t, x(t))$  er kontinuerlig på  $R$ , følger det av *Analysens fundamentalteorem* [Lin96, s. 335] at  $Tx$  er deriverbar og derfor også kontinuerlig på  $R$ . Vi kan nå bruke (5.8) til å vise at  $Tx \in \tilde{C}(J)$ . For  $t \in I$  har vi at

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq Mc < b \quad (5.15)$$

som viser at  $Tx \in \tilde{C}(J)$  eller uttrykt på en annen måte:

$$T : \tilde{C}(I) \rightarrow \tilde{C}(J)$$

**Tilfellet  $Tx = x$ :** Hvis transformasjonen  $T$  har et fikspunkt, altså at

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds, \quad (5.16)$$

følger av *Analysens fundamentalteorem*[Lin96, s.335] at

$$x' = f(t, x(t)) \quad \text{og} \quad x'(t_0) = x_0. \quad (5.17)$$

Dette viser at hvis  $T$  har et fikspunkt  $x$ , vil dette være en løsning av startverdiproblemet (5.5).

**$T$  er en kontraksjon:** Vi skal nå vise at  $T$  er en kontraksjon for  $x \in \tilde{C}(I)$ . La  $x, y \in \tilde{C}(J)$ . Av (5.14) og fordi  $f$  oppfyller en Lipschitz-betingelse, følger det at

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \, ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t K |x(s) - y(s)| \, ds \leq K |t - t_0| d_\infty(x - y) \leq Kc d_\infty(x - y) \end{aligned}$$

Vi setter nå  $Kc = \alpha$  og kan sammenfatte ulikheten til

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq \alpha d_\infty(x, y) \quad (5.18)$$

Siden høyresiden i (5.18) er uavhengig av valg av  $t$ , kan vi ta maksimum på venstre side. Dette gir

$$d_\infty(Tx, Ty) \leq \alpha d_\infty(x, y). \quad (5.19)$$

Vi ser av 5.8 at  $\alpha < 1$  og følgelig er  $T$  en kontraksjon i  $\tilde{C}(I)$ .

**Bruk av Banachs fikspunktteorem:** Siden  $\tilde{C}(I)$  er en komplett metrisk rom og  $T : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$  en kontraksjon, følger av Banachs fikspunktteorem at  $T$  har et entydig fikspunkt  $X$ . Som vi har vist ovenfor, er dette fikspunktet løsning av startverdiproblemet (5.5). (5.9) vil følgelig konvergere mot  $X$ . Dette beviser a) og b).  $\square$

### 5.1.3 Løsning av ordinære differensialligninger

Vi skal nå se tre eksempler hvor vi prøver å bruke iterasjonsprosesser for løse ordinære differensialligninger med startverdibetingelser. Første startverdiproblem, presenterte vi i innledningen til dette kapitlet (5.2). Dette eksemplet er hentet fra [N.L00, s. 102].

**Eksempel 5.7.** Gitt startverdiproblemet

$$y' = 2t(1 + y) \quad y(0) = 0.$$

$f(t, y) = 2t(1 + y)$  er kontinuerlig på hele  $\mathbb{R}^2$  og vil følgelig være kontinuerlig på ethvert begrenset rektangel  $R$ . Lipschitz-betingelse i forhold til den andre variable vil være oppfylt for ethvert begrenset intervall av den første variable. Vi ser det ved for eksempel å la  $t \in [-K/2, K/2]$

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |2t(1 + x) - 2t(1 + y)| = |2t(x - y)| \leq K|x - y|.$$

Av kontinuitet følger at  $f(t, y)$  er begrenset på ethvert rektangel  $R = [-a, a] \times [-b, b]$ :

$$|f(t, y)| \leq M \quad \text{for alle} \quad t, y \in R.$$

Det er nå ikke vanskelig å finne  $c < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$  og forutsetningene i Teorem 5.6 er dermed oppfylt. Ved å integrere på begge sider får vi integralligningen

$$y(t) = \int_0^t 2s(1 + y(s)) \, ds$$

Vi kan nå bruke rekursjonsformelen

$$y_{n+1}(t) = \int_0^t 2s(1 + y_n(s)) \, ds.$$

til å finne en tilnærmet løsning av startverdiproblemet. Vi velger  $y_0(0) \equiv 0$  og dermed blir

$$y_1 = \int_{t_0}^t 2s(1 + 0) \, ds = t^2, \quad y_2 = \int_0^x 2t(1 + t^2) \, dt = t^2 + \frac{t^4}{4} \quad \text{og} \quad y_3 = t^2 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6}.$$

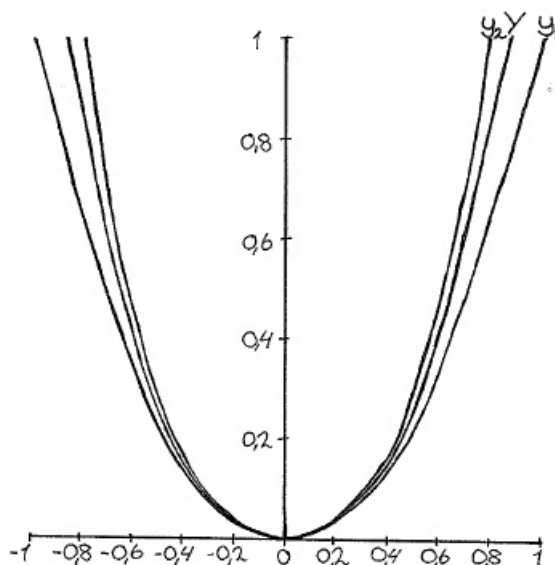
Ved induksjon kan vi vise at

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2} - 1,$$

som er den eksakte løsningen. I Figur 5.7 ser vi hvordan de ulike løsningene blir liggende i forhold til hverandre. Den eksakte løsningen  $Y$  ligger så nær  $y_3$  at vi ikke klarer å skille dem på figuren.

Dette startverdiproblemet kan også løses ved å separere variablene. Vi har imidlertid fått demonstrert at det er mulig å komme fram til eksakte løsninger ved en iterasjonsmetode. Dette er imidlertid mer unntak enn det er regel.

De neste to eksemplene er hentet fra [Apo65, s.466], og de er referert omtrent slik de er i denne boken. Dette er en ikke-lineær ligning, og vi drøfter ikke hvert av eksemplene noe nærmere. Vi skal beregne noen tilnærmingsløsninger for å se at denne metoden ikke alltid gir så gunstige løsninger som i eksemplet ovenfor:



Figur 5.2: Startverdiproblem eksempel 5.7

**Eksempel 5.8.** Gitt et nytt startverdiproblem

$$y' = t^2 + y^2 \quad y(0) = 0.$$

Av ligningen får vi rekursjonsformelen  $y_{n+1} = \int_0^x (t^2 + y_n(t)) dt$ . Dette gir følgen av funksjoner

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{t^3}{3} \quad y_2 = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \quad y_3 = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}. \quad (5.20)$$

På Figur 5.7 ser vi løsningene  $y_1, \dots, y_4$ <sup>2</sup>. I dette eksemplet er det ikke så enkelt å finne noen kjent grensefunksjon som iterasjonsfølgen følgen konvergerer mot. [Apo65, s.466]

**Eksempel 5.9.** Vi prøver oss nå på startverdiproblemet

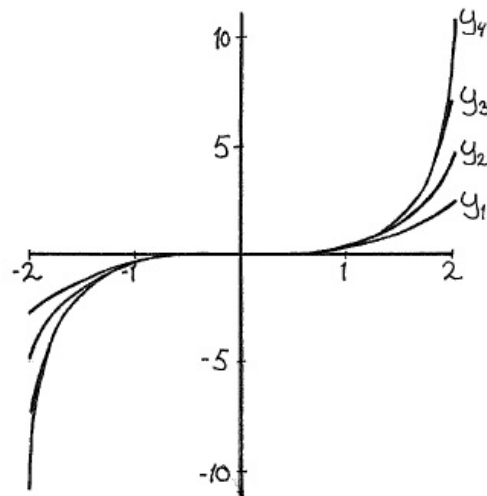
$$y' = 2t + e^y \quad y(0) = 0$$

Vi får her rekursjonsformelen  $y_{n+1} = \int_0^t (2s + e^{y_n(s)}) dt$

Dette gir følgen

$$y_1 = x^2 + 1, \quad y_2 = \int_0^x (2t + e^{t^2+t})$$

<sup>2</sup>Vi har ikke tatt med noe uttrykk for  $y_4$  i (5.20) fordi det krever mye plass. Det er imidlertid beregnet på samme måte som de andre funksjonene



Figur 5.3: Startverdiproblem eksempel 5.8

Her kommer vi ikke videre fordi det siste integralet ikke kan løses ved hjelp av elementære funksjoner. Det er imidlertid mulig å beregne integralet ved hjelp av numeriske metoder. [Apo65, s.466]

Disse eksemplene viser at det er mulig å løse differensialligninger ved iterasjonsmetoder. Imidlertid er nok bruken heller begrenset fordi en ofte vil møte vanskelige integraller. Den viktigste bruken av Banachs fikspunktteorem i forhold til differensialligninger er derfor å knyttet til å vise eksistens og entydighet av løsninger. [Apo65, s.466-467].

## 5.2 Fredholm-ligninger

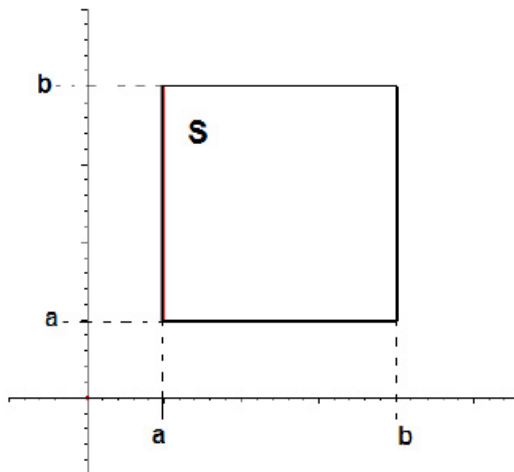
Mange problemer i mekanikk eller matematisk fysikk kan formuleres på formen

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\phi(s) ds. \quad (5.21)$$

hvor  $\phi$  er den ukjente funksjonen. Funksjonen  $f(x)$  er en kjent funksjon,  $K(x, s)$  kalles kjernen og  $\lambda$  parameteren til ligningen. Slike ligninger kalles for *integralligninger* og har mange anvendelser. En løsning  $\phi$  vil være enhver funksjon som passer inn i (5.21) på  $[a, b]$ .

Vi skal vise hvordan Banachs fikspunktteorem kan brukes til å bevise et eksistenteorem for en spesielle type ligninger som kalle *Fredholm-ligninger*. Integralligninger er stort felt og *Fredholm-ligninger* er en viktig klasse av slike ligninger. Det som vi tar med her kan knapt karakteriseres som en introduksjon til emnet. Det er likevel tatt med fordi Banachs

fikspunktteorem ble utviklet for å anvendes på integralligninger, jfr. avsnitt 2.4.



Figur 5.4: Kvadratet  $S$

**Teorem 5.10.** *Let  $K$  være kontinuerlig på kvadratet  $S = [a, b] \times [a, b]$  og anta at*

$$|K(x, y)| \leq M \quad M > 0 \quad (5.22)$$

for alle  $(x, y)$  på  $S$ . La  $f$  være en kontinuerlig funksjon på  $[a, b]$  og la  $\lambda$  være et reelt tall som tilfredsstillers ulikheten

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \quad (5.23)$$

Da finnes det nøyaktig en kontinuerlig funksjon  $\phi$  på  $C[a, b]$  som tilfredsstillers integral-ligningen (5.21).

*Bevis.* La  $C[a, b]$  være rommet av alle kontinuerlig funksjoner på  $[a, b]$  og definer en operator  $A$  på  $C[a, b]$  ved ligningen

$$A(\phi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\phi(t) dt \quad (5.24)$$

Det kan vises at  $A(\phi)$  er en kontinuerlig funksjon når  $\phi \in C[a, b]$  [Apo65, s.488]. Vi skal derimot vise at dette er en kontraksjon.

Vi velger to vilkårlige  $\phi_1$  og  $\phi_2$  og ser på differansen

$$A(\phi_1)(x) - A(\phi_2)(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)[\phi_1(t) - \phi_2(t)] dt. \quad (5.25)$$

Ved å bruke ulikheten (5.22) gir dette oss

$$|A(\phi_1)(x) - A(\phi_2)(x)| \leq |\lambda| M(b-a) \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty = \alpha \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \quad (5.26)$$

hvor  $\alpha = |\lambda| M(b-a)$ . Av (5.23) følger at  $A$  er en kontraksjon på  $C[a, b]$  fordi  $0 \leq \alpha < 1$ .  $C[a, b]$  er komplett med den uniforme metrikken. [Kre78, s.36]. Av Banachs fikspunktteorem følger det at  $A$  har et entydig fikspunkt i  $\phi \in C[a, b]$ . Denne funksjonen  $\phi$  tilfredsstiller integralligningen (5.21) [Apo65, s.488].  $\square$

### 5.3 Historisk bakgrunn

På slutten av det syttende århundre var det en rekke fysiske problemer som motiverte for undersøkelser og utvikling av denne disiplinen. Eksempel på slike problemer var pendelbevegelser, elastisitet og vibrerende strenger.

For å kunne gi en matematisk forklaring av slike fenomener kreves redskaper som kan beskrive *bevegelse*. Den såkalte *infinitesimal-* eller *differensialregningen* så dagens lys på denne tiden. Gjennom dette var en i stand til på en ny måte å kunne gi *bevegelse* og *forandring* en matematisk fortolkning.

På begynnelsen av 1700-tallet var det en langvarig diskusjon om hvem som hadde oppdaget *infinitesimalregningen*. Det var to kandidater som begge mente at de var opphavsmenn: Den tyske filosof og matematiker **Gottfried Leibniz (1646-1716)** og den berømte engelske matematikeren og fysikeren **Isaac Newton (1642-1727)**. Senere undersøkelser har vist at begge gjorde oppdagelsene uavhengig av hverandre. Det var imidlertid Leibniz som først gav ut en systematisk teori på området. Det er også hans notasjon og uttrykksmåte som i ettertid har blitt brukt.

Ganske raskt førte dette til matematiske uttrykk som både inneholdt en funksjon og dens deriverte. Som vi har vært inne på, har vi dermed en differensialligning. I 1693 ble for første gang begrepet **differensialligninger** innført. Både den nederlandske matematiker **Christiaan Huygens (1629-95)** og Leibniz brukte betegnelsen i artikler dette året.

Leibniz og de sveitsiske matematikerne **Jakob Bernoulli (1654-1705)** og **Johann Bernoulli (1667-1748)** var pionerer når det gjaldt å utvikle differensialligninger som disiplin. Når en studerer emnet, møter en derfor raskt ligninger og metoder som har navn etter disse. Andre kjente navn i denne sammenhengen er sveitseren **Leonhard Euler (1707-82)**, **Joseph Lagrange (1736-1813)** og **Jean d'Alembert (1717-83)** for å nevne noen. Vi kan enkelt si at en først prøvde å finne løsninger for differensialligningene gjennom kombinasjoner av elementære funksjoner. Når dette mislyktes søkte en løsninger gjennom forskjellige typer uendelige rekker, for eksempel Taylor- og Fourierrekker, [Kli72, s. 499]. En skilte tidlig mellom ordinære og partielle differensialligninger. Det viste seg likevel å være en klar sammenheng mellom de to feltene ved at partielle differensialligninger i noen tilfeller kunne omformes til et system av ordinære differensialligninger

ved separasjon av variabler.

Erfaring gjennom arbeid med differensialligninger viste raskt at en rekke ligninger ikke lot seg løse analytisk. Særlig fikk en problemer med ligninger av høyere orden enn 4. Dette førte til en intensivering av arbeidet med å finne metoder som gjorde det mulig å avgjøre om en ligning hadde en entydig løsning. I motsatt fall risikerte en å bruke mye krefter på noe som var uløselig. Det er flere som arbeidet med slike problemstillinger: Gauss, Cauchy og Lipschitz [Kli72, s.699-707,717-721]. *Metoden for gradvis tilnærming* ble først benyttet av den franske matematiker **Joseph Liouville (1809-82)**. Det var imidlertid en annen franskmann, **Émile Picard (1856-1941)**, som gav metoden en mer generell form [Kli72, s. 719]. Det er derfor hans navn som er knyttet til metoden. Som vi har sett er det en nær tilknytning mellom denne metoden og Banachs fikspunktsteorem.

De første *integralligningene* ble formulert på 1700-tallet. **Pierre-Simon Laplace (1748-1827)** var en av de første som arbeidet med emnet. I 1782 lanserte han det som vi idag kaller *Laplace-transformen*. Disse integralligningene kan blant annet brukes til å løse differensialligninger. *Fourier-transformen* er en annen av de klassiske integralligningene. Denne transformen har en svært stor anvendelse også i dag. **Jean B. J. Fourier (1768-1830)** brukte denne transformen til å løse *varmeledningsligningen*. Den første som klarte å utvikle en mer generell teori om emnet var den italienske matematikeren **Vito Volterra (1866-1940)**. Den svenske matematikeren **Erik Ivar Fredholm (1866-1927)** var en annen pionerene på området. Hilbert bygde videre på arbeidet til både Volterra, men først og fremst Fredholm. Gjennom dette arbeidet la Hilbert grunnlaget for det som i ettertid er blitt kalt *Hilbertrom*. Det var imidlertid Hilberts elev **Erhard Schmidt (1880-1959)** som egentlig beskrev denne type *vektorrom* [Kli72, 1052-1092].



## Kapittel 6

# Det inverse funksjonsteorem

*Det inverse funksjonsteorem* er et viktig teorem i flerdimensjonal analyse. Teoremet sier at en kontinuerlig deriverbar avbildning  $f$  er invertibel i en enhver omegn av ethvert punkt  $\mathbf{x}$  hvor den lineære avbildningen  $f'(\mathbf{x})$  er invertibel. Dette kapitlet bygger særlig på [Rud76, s204-223].

I det beviset for teoremet som vi skal gjennomføre er bruk av Banach fikspunktteorem ett av de sentrale elementene. Før vi presenterer teoremet og gjennomfører beviset, trenger vi noen hjelperesultater.

**Definisjon 6.1.** La  $A$  være en operator<sup>1</sup> fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^n$  og  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  med vektornorm  $|\mathbf{x}|$ . Vi definerer operatornormen  $\|A\|$  ved

$$\|A\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \quad (6.1)$$

**Lemma 6.2.** La  $L(\mathbb{R}^n)$  være mengden av alle lineære operatorer på  $\mathbb{R}^n$  og  $\Omega$  mengden av alle invertible lineære operatorer på  $\mathbb{R}^n$ .

(a) Hvis  $A \in \Omega$ ,  $B \in L(\mathbb{R}^n)$  og

$$\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1, \quad (6.2)$$

så er  $B \in \Omega$ .

(b)  $\Omega$  er en åpen delmengde av  $L(\mathbb{R}^n)$  og avbildningen  $A \rightarrow A^{-1}$  er kontinuerlig på  $\Omega$ .

[Rud76, s.209]

**Definisjon 6.3.** Anta at  $E$  er en åpen delmengde av  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  avbilder  $E$  på  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in E$ . Hvis det finnes en lineær avbildning  $A \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  slik at

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0, \quad (6.3)$$

---

<sup>1</sup>For definisjon av operator vises til [AR94, s.383]

sier vi at  $\mathbf{f}$  er deriverbar i  $\mathbf{x}$ . Vi skriver

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A. \quad (6.4)$$

Hvis  $\mathbf{f}$  er deriverbar i alle  $\mathbf{x} \in E$ , sier vi at  $\mathbf{f}$  er deriverbar på  $E$ .

**Lemma 6.4.** La  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  være en lineær operator og  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Da er

$$A'(\mathbf{x}) = A.$$

*Bevis.* Lineariteten til  $A$  gir  $A(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = A(\mathbf{h})$ . Når vi setter  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$  vil telleren i (6.3) alltid være lik null.  $\square$

[Rud76, s. 214]

**Korollar 6.5.** La  $\mathbf{f} : (\mathbb{R})^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  være definert ved  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . Da er

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = I$$

hvor  $I$  er identitetmatrisen i  $\mathbb{R}^n$ .

*Bevis.*  $\mathbf{x} \equiv I\mathbf{x}$ . Ved å bruke Lemma 6.4 får vi det ønskede resultatet.  $\square$

**Definisjon 6.6.** En deriverbar avbildning  $\mathbf{f}$  av en åpen mengde  $E \subset \mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^n$  er kontinuerlig deriverbar i  $E$  hvis  $\mathbf{f}'$  er en kontinuerlig avbildning fra  $E$  til  $\mathbb{R}^n$ . Klassen av kontinuerlige deriverbare avbildninger fra  $E$  til  $\mathbb{R}^n$  kaller vi  $C^1(E)$ .

**Definisjon 6.7.** En linjestykke mellom to elementer  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  i et vektorrom  $X$  er mengden av alle  $\mathbf{z} \in X$  som oppfyller

$$\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \quad \alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.5)$$

En delmengde  $M \subset X$  er *konveks* hvis linjestykket mellom  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  for alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ , er inneholdt i  $M$ .

**Lemma 6.8.** La  $E \subset \mathbb{R}^n$  være en konveks, åpen mengde. Anta at  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f}$  er deriverbar på  $E$  og det finnes et reelt tall  $M$  slik at

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \leq M$$

for alle  $\mathbf{x} \in E$ . Da er

$$|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| \leq M |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \quad (6.6)$$

for alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ .

[Rud76, s.218]

**Teorem 6.9** (Inverse funksjonsteorem). Anta at  $\mathbf{f}$  er en  $C^1$ -avbildning av en åpen mengde  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$  er invertibel for en  $\mathbf{a} \in E$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ .

(a) Da finnes det åpne mengder  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  slik at  $\mathbf{a} \in U, \mathbf{b} \in V$ ,  $\mathbf{f}$  er en-til-en på  $U$  og  $\mathbf{f}(U) = V$ .

(b) Hvis  $\mathbf{g}$  er den inverse av  $\mathbf{f}$  (som eksisterer som følge av (a)) definert på  $V$  ved

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{for} \quad \mathbf{x} \in U, \quad (6.7)$$

da er  $\mathbf{g} \in C^1(V)$

*Bevis.* Dette beviset bygger i stor grad på [Rud76, 221-223].

(a) Vi setter  $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A$  og velger en  $\lambda$  slik at

$$2\lambda \|A^{-1}\| = 1. \quad (6.8)$$

Siden  $\mathbf{f}'$  er kontinuert i  $\mathbf{a}$ , finnes det en åpen disk  $U \subset E$  med senter i  $\mathbf{a}$  slik at

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - A\| < \lambda \quad \text{for} \quad \mathbf{x} \in U. \quad (6.9)$$

For hver  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  definerer vi en funksjon

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad \mathbf{x} \in E \quad (6.10)$$

Det er i forhold funksjonen  $\phi$  vi skal anvende Banachs fikspunktteorem. Vi ser av (6.10) at  $\phi$  har et fikspunkt hvis og bare hvis  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ .

Vi finner  $\phi'(\mathbf{x})$  ved å bruke Definisjon 6.3, Lemma 6.4 og Korollar 6.5:

$$\begin{aligned} \phi'(\mathbf{x}) &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \phi(\mathbf{x})|}{|\mathbf{h}|} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|I\mathbf{h} - A^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))|}{|\mathbf{h}|} \\ &= I - A^{-1}\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A^{-1}(A - \mathbf{f}'(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Av (6.8) og (6.9) følger det at

$$\|\phi'(\mathbf{x})\| = \|A^{-1}(A - \mathbf{f}'(\mathbf{x}))\| \leq \|A^{-1}\| \|A - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| < \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{2}$$

for  $\mathbf{x} \in U$ . Lemma 6.8 gir nå at

$$|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (6.11)$$

for  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ . Dette betyr at  $\phi$  er en kontraksjon på  $U$ .

$\phi$  har ikke mer enn ett fikspunkt i  $U$ . Vi kan vise det ved å anta at det finnes to fikspunkt  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$ .  $\phi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1$  og  $\phi(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2$  gir  $\|\phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2)\| = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$  som strider imot

(6.11).

Siden  $\phi$  ikke har mer enn et fikspunkt, vil  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  ikke kunne inntreffe for mer enn en  $\mathbf{x} \in U$ . Følgelig er  $\mathbf{f}$  injektiv på  $U$ . Vi lar nå  $V = \mathbf{f}(U)$  og velger en  $\mathbf{y}_0 \in V$ . Da er  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  for én  $\mathbf{x}_0 \in U$ .

La så  $B$  være en åpen disk med senter i  $\mathbf{x}_0$  og med radius  $r > 0$  så liten at tillukningen  $\overline{B} \subset U$ . Vi vil bevise at når  $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$  så er  $\mathbf{y} \in V$ . Dette beviser i så fall at  $V$  er en åpen mengde.

Vi velger nå en fastholdt  $\mathbf{y}$  slik  $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$ . Av (6.10) er følgelig

$$\phi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \quad (6.12)$$

som gir:

$$|\phi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| = |A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)| < \|A^{-1}\| \lambda r = \frac{r}{2} \quad (6.13)$$

Hvis  $\mathbf{x} \in \overline{B}$  følger det derfor av (6.11) og trekantulikheten at

$$|\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \leq |\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_0)| + |\phi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \frac{r}{2} \leq r. \quad (6.14)$$

Dette viser at  $\phi(\mathbf{x}) \in B$ . Av 6.11 er følgelig  $\phi$  er kontraksjon fra  $\overline{B}$  på  $\overline{B}$ .

$\overline{B}$  er en lukket delmengde av  $\mathbb{R}^n$ . Kompletthet i  $\mathbb{R}^n$  følger av Proposisjon 4.9 og Proposisjon 4.17. Banachs fikspunktteorem gir derfor at  $\phi$  har et entydig fikspunkt  $\mathbf{x} \in \overline{B}$  som gir  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  for denne  $\mathbf{x}$ . Altså har vi at  $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(\overline{B}) \subset \mathbf{f}(U) = V$  som viser at  $V$  er åpen. Dermed er a) bevist.

b) Vi velger en  $\mathbf{y} \in V$ ,  $\mathbf{y} + \mathbf{k} \in V$ . Av a) følger nå at det finnes en  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in U$  slik at  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{y} + \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ . Ved å bruke  $\phi$  som i (6.10) gir dette oss

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{h} - A^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = \mathbf{h} - A^{-1}\mathbf{k}$$

Av (6.11) følger det at  $\|\mathbf{h} - A^{-1}\mathbf{k}\| \leq 1/2 \|\mathbf{h}\|$ . Trekantulikheten gir oss nå at  $\|A^{-1}\mathbf{k}\| \geq 1/2 \|\mathbf{h}\|$  og

$$\|\mathbf{h}\| \leq 2 \|A^{-1}\| \|\mathbf{k}\| = \lambda^{-1} \|\mathbf{k}\|. \quad (6.15)$$

(6.8) og (6.9) gir videre at  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\| \|A^{-1}\| < 1/2$ . Av Lemma (6.2) følger derfor at  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  har en invers som vi kan kalle  $T$ .

$$\mathbf{y} + \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \implies \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})) = \mathbf{x} + \mathbf{h}$$

Dermed gjelder at

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T(\mathbf{k}) &= \mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - T\mathbf{k} = \mathbf{h} - T\mathbf{k} = -T(\mathbf{k} - T^{-1}\mathbf{h}) \\ &= -T[\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}] \end{aligned}$$

Vi har her brukt at  $\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$  og  $T^{-1} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})$ . Sammenholdt gir dette oss

$$\mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T(\mathbf{k}) = -T[\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}]$$

og videre

$$|\mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T(\mathbf{k})| \leq \|T\| |\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}|.$$

Av (6.15) følger at  $|\mathbf{K}| \geq \lambda |\mathbf{h}|$ . Dette gir ulikheten

$$\frac{|\mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T(\mathbf{k})|}{|\mathbf{k}|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|}. \quad (6.16)$$

Når  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , ser vi av (6.15) at  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ . Høyre side av siste ulikhet går mot 0 når  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ . Det samme må derfor skje med venstreside. Dette beviser at  $\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = T$ .  $T$  er valgt slik at  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$ . Dermed har vi

$$\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = [\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))]^{-1} \quad (6.17)$$

for  $\mathbf{y} \in V$ .

Siden  $\mathbf{g}$  er deriverbar, er  $\mathbf{g}$  en kontinuerlig avbildning av  $V$  på  $U$ .  $\mathbf{f}'$  er en kontinuerlig avbildning av  $V$  på mengden  $\Omega$  av alle invertible elementer i  $L(\mathbb{R}^n)$ . Av Lemma 6.2.b, vet vi at inversjonen er en kontinuerlig avbildning fra  $\Omega$  på  $\Omega$ . Ved å kombinere dette med (6.17) følger det at  $\mathbf{g}'$  er kontinuerlig og følgelig er  $\mathbf{g} \in C^1$ .  $\square$



## Kapittel 7

# The Scottish Café

Når vi skal sette *The Scottish Café* inn i en kulturhistorisk sammenheng, begynner vi med å trekke noen linjer langt bak i historien og følger disse linjene fram til det aktuelle tidsrommet da *The Scottish Café* var i funksjon. Dess nærmere vi kommer mellomkrigstiden, øker vår grundighet og mengden av detaljer. Lvov er byen hvor begivenhetene utspiller seg, og vi setter byen inn i denne historiske sammenhengen. Dette blir vårt historiske bakteppe.

Vi beskriver så det indre livet i *The Scottish Café*, men relaterer både kilder og konkrete opplysninger til det historiske bakteppet som allerede er skissert. Ved en slik tilnærming håper vi å få svar på noen av de spørsmålene som vi stiller. To slike spørsmål er: *Hvorfor oppsto The Scottish Café?* og *Hvilken betydning har dette miljøet fått?*

Før en går i gang med teksten som nå følger, anbefales det å gå tilbake til avsnitt 2.4 på side 12. Noen begreper og personer fikk her en foreløpig presentasjon. Dette kan være nyttig å få repetert når vi nå skal gå dypere inn i dette stoffet.

### 7.1 Historisk bakteppe

#### 7.1.1 Kilder

Kildene som brukt for å skissere den historisk bakgrunnen er i hovedsak *Aschehougs og Gyldendals Store norske leksikon* 2005-utgave [Lek05], *Aschehougs verdenshistorie* 1982 [HSTT82] og boka *Jødehat* [EHL05] av Eriksen, Harket og Lorenz 2005. Når [Lek05] og [HSTT82] er valgt har det sammenheng med at de gir en framstilling av stoffet som de fleste vil kunne slutte seg til. [EHL05] gir en sammenfatning av antisemittismens historie fra antikken til i dag. Dette er den nyeste og mest omfattende behandling av dette stoffet som er utgitt på norsk.

### 7.1.2 Tidlig historie

Polen som stat har en bortimot tusen år lang historie. Landets utstrekning og grenser har vært forskjellige, og den innflytelse polakkene har hatt på europeisk politikk, har vært skiftende.

Polen har med sine store sletter gode muligheter for jordbruk og matproduksjon. De store elvene i landet ga gode transportmuligheter for varer. Handelen har derfor vært utstrakt både mot øst, vest, sør og nord. Et sletteland ligger imidlertid også åpent til for angripere. Mange av de omkringliggende folkegruppene har ønsket tilgang til landområdene og rikdommene i landet. Polen har opp i gjennom hele sin historie blitt angrepet utallige ganger og i fra alle kanter. Landet har en begivenhetsrik og svært blodig historie [Lek05, Polen-Historie].

Den romersk-katolske kirke har hatt stor innflytelse i Polen. Fra 1600-tallet har de fleste polakker vært katolikker. I de periodene der Polen har vært delt, har den romersk-katolske kirke vært et bærende element for polsk nasjonal identitet [EHL05, s. 422]. Det har ikke alltid vært lett å være ikke-katolikk i Polen. Dette gjelder i særlig grad jøder, men også kristne trossamfunn som den gresk-ortodokse og armenske kirke i Polen. Ved siden av den katolske kirke, er dette de eldste kristne kirker i Europa [Lek05, Polen-religion].



Figur 7.1: Polen-Historiske kart, 1772-1795 [Lek06]

I tidsrommet fra ca. 1400 til 1772 var Polen på sitt største. Landet strakte seg da fra Østersjøen og nesten helt til Svartehavet. Dette var en union mellom Polen og Litauen



(kart Figur 7.1). I hovedsak lå grensene fast i denne perioden. Landet rommet langt mer enn polakker. Det var blant annet litauere, russere, ukrainere, hviterussere og jøder innenfor grensene. På tross av størrelsen hadde landet en svak statsdannelse og makten lå i provinsene og hos adelen. På denne tiden ble «Polsk riksdag» et uttrykk for kaos og anarki. Polens nasjonalforsamling, «Riksdagen», var i disse årene fullstendig handlingslammet ved ordninger som krevde absolutt konsensus før vedtak kunnes settes ut i live. En eneste representant fikk dermed makt til å trenere et hvert nytt vedtak. Dette førte til at Polen ble et lett bytte for aggressive naboer [HSTT82, X,s.50].

I 1772 ble stormaktene Russland, Preussen og Østerrike enige om å dele Polen mellom seg. I flere omganger ble Polens områder redusert og ved Wienerkongressen i 1815 var staten opphørt å eksistere. Vi kan se hvordan Polen ble oppdelt på kartet ovenfor (Figur 7.1). Byen Lvov hvor The «Scottish Cafe» ligger, ble dermed en del av det Østerrikske kronland Galicja. Det samme gjaldt Kraków-området hvor Stefan Banach ble født. Slik holdt grensene seg helt til 1. Verdenskrig til tross for en god del uro i de polske områdene [HSTT82, X,s.50].

På slutten av 1800-tallet var det en betydelig utvandring til USA i fra Øst-Europa. Dette kom som følge av vanskelige levekår i disse områdene og utsikter til et bedre liv i den nye verden. Spesielt ble jødernes situasjon vanskelig etter mordet på tsar Aleksander den 2. i 1881. Dette utløste omfattende *pogromer* mot den jødiske befolkningen som medførte at det oppsto en strøm av jøder som flyktet vestover og en del av disse endte i USA [EHL05, s. 269-]. Det er noe vanskelig å finne ut hvor mange etniske polakker som emigrerte fordi det bodde polakker både i Østerrike, Tyskland og Russland. Det var uten tvil en betydelig polsk innvandring til USA i disse årene [Lek05, USA].

### 7.1.3 1. Verdenskrig

Det skulle en krig til før Polen igjen ble et land på europakartet. Da den 1. verdenskrig brøt ut 28. juli 1914, fantes det polakker på begge sider av fronten. Noen kjempet på Sentralmaktenes side mens andre var lojale mot Tsaren og Russland. Under krigens gang var det mange utenfor Polen som arbeidet for at landet skulle gjenoppstå som uavhengig stat. Ikke minst en gruppe utvandrede polakker øvde sterk innflytelse på presidenten i USA, Woodrow Wilson. Wilson holdt den 8. januar 1918 en tale i Kongressen som fikk stor betydning for Polen. I 14 punkter summerte han opp hva en fredsslutning burde innebære. Ett av punktene var «Opprettelse av et uavhengig Polen med adgang til havet».

Krigføringen skapte etter hvert så store humanitære problemer i Russland at det oppsto opprør flere steder i dette landet. Dette ble så alvorlig at Tsaren til slutt ble styrtet. Mens krigshandlingene pågikk og etter to påfølgende revolusjoner, var et nytt regime på plass med Lenin som leder. Etter revolusjonene ble det umulig for Russland å fortsette krigen. Da de russiske troppene, ved freden i Brest-Litovsk 3. mars 1918, trakk seg ut av 1. verdenskrig, var grensen for Russland flyttet langt østover. Samtidig var det borgerkrig på flere fronter innad i Russland [HSTT82, X,s.46].



Figur 7.2: Polen-Historiske kart, 1918-1945[Lek06]

#### 7.1.4 Polen gjenfødt

Ved det tyske sammenbruddet i november 1918 ble staten Polen proklamert med Josef Pilsudski som statssjef. Polens stilling ble senere stadfestet i fredsforhandlingene etter krigen (Kart Figur 7.2). Her ble prinsippet om *folkernes selvbestemmelsesrett* lagt stor vekt på ved grensefastsettelsen. Det måtte derfor gjennomføres en rekke folkeavstemninger før de endelige grensene kunne fastsettes. Stormaktene hadde også et klart ønske om at de nye landene skulle utvikle demokratiske styresett [Lek05, Polen-Historie].

I 1918 ble det proklamert en vestukrainsk republikk i Lvov [Lek05, Lviv]. Dette ble ingen varig statsdannelse. Allerede i 1919 ble Lvov erobret av polakkene og innlemmet i Polen.

Josef Pilsudski hadde planer om ytterligere polsk ekspansjon. Han ønsket at hele Ukraina skulle tilhøre Polen. Den polske hæren nådde fram til Kiev i det nåværende Ukraina. Her ble hæren stoppet av den røde arme og drevet tilbake. I august 1920 sto russerne ved Warszawa. Ved fransk hjelp lyktes polakkene å drive russerne tilbake. Østgrensen for Polen ble ved freden i Riga i mars 1921 trukket slik at mange hviterussere og ukrainere ble innlemmet i Polen. Lvov ble en del av Polen. I den mest aktive tiden for *The Scottish Café* var altså Lvov under polsk herredømme, og gjennom hele mellomkrigstiden forble byen polsk.

Etter at Polen fikk sin grunnlov i 1921, fortsatte landet noen år som et famlende demokrati. I 1926 ledet Josef Pilsudski et statskupp. Landet ble da raskt et nasjonalistisk militærdiktatur. Politisk forfølgelse var ikke uvanlig. Josef Pilsudski ble den sterke mann i Polen gjennom det meste av mellomkrigstiden. I utenrikspolitikken var Josef Pilsudski både antirussisk og antitysk. Han søkte derimot en nærmere tilknytning til Frankrike.[HSTT82, X,s.54-55]

### 7.1.5 Befolkning

Etter erobringene i 1921 hadde så mye som 31% av Polens befolkning minoritetsbakgrunn: 17% ukrainere og hviterussere, 9% jøder, 3% litauere og 2% tyskere. Polen ble dermed ikke en statsdannelse hvor befolkningen helt eller i det vesentlige utgjør en språklig, kulturell og historisk enhet.

I det nye Polen krevde den katolske kirken er sterk innflytelse. Det skulle opprettes et "Kristus Polen". Dette var med å utvikle en sterk polsk nasjonalisme som rettet seg mot minoritetsgruppene.

Mange fra minoritetsgruppene hadde i utgangspunktet forhåpninger til de nye polske staten. De som ikke delte den katolske tro fikk raskt grunn til å føle seg som "fremmede" i den nye staten. Dette gjaldt blant annet tyskerne som stort sett var lutheranere. Områdene som hadde tilhørt det gamle Preussen hadde mye tysk og tysktalende befolkning. I 1921 ble mange av disse fordrevet fra sine bosteder, noen forlot frivillig . Medlemmer av den armenske kirke og den gresk-ortodokse kirke opplevde også vanskeligheter i den nye Polen. [EHL05, s.422],[Lek05, Polen-Befolkning].

En befolkningsgruppe var imidlertid spesielt utsatt:

### 7.1.6 Antisemittisme

Jødene var tallrike i et belte som strakte seg fra Svartehavet og til Østersjøen. Gjennom mange århundrer hadde jødene blitt presset østover i Europa. På samme måte ble var jødene uønsket øst for en opptrukket grense i Russland [EHL05, s. 272]. Polen er et av landene som ligger i dette beltet. Det at så mange bodde der, hadde flere årsaker, men viktigst var nok at her ble jødene bedre behandlet enn ellers i Europa. De fleste polakker var og er romersk-katolske. Katolikker hadde ikke lov til å ta renter på lån. Derfor ble det slik at jødene tok seg av bankiervirksomheten og kunne dermed dekke behovet for kreditt.

Den polske og jødiske befolkningen levde da stort sett i fred med hverandre. De fleste jøder levde i egne samfunn i landsbyer eller ghettoer i byene der de selv tok seg av de

ulike samfunnsoppgavene. I kristne høytider var det likevel vanlig at det oppsto gateoppløp, såkalte *pogromer* som ofte endte med ødeleggelse av eiendom og blodsutgytelse. Myndighetene forholdt seg i stor grad passive til slike overgrep.[Lek05, Jødernes historie]

Det jødiske samfunnet i Øst-Europa var på ingen måte noen enhetlig gruppe. Det gav seg utslag i ulike religiøse retninger av jødedommen og i forskjellig kulturell utfoldelse. Flertallet lot seg ikke assimilere, men holdt fast ved sin kultur og sitt språk, *jiddisch* og ønsket å leve i egne *ghettoer*. Mindretallet ønsket å være mest mulig alminnelige. De tok del i samfunnslivet som andre innbyggere i landet og kunne også organisere seg også politisk. I den siste gruppen fantes mange intellektuelle, forretningsdrivende, advokater og finansfolk [EHL05, s.422]. Vi har allerede vært inne på hvordan mordet på tsar Aleksander 2. utløste store pogromer i Russland med en påfølgende strøm av jødiske flyktninger inn i Europa. Disse gruppene, som ofte blir kalt *øst-jøder*, ble et vanlig syn i mange europeiske byer.

Antisemittismen fikk i stor grad de samme uttrykk i de fleste land i Europa. *Øst-jødene* med sin noe spesielle framtoning vakte avsky de fleste steder hvor de dukket opp, og det finnes uttalige eksempler på overgrep i forhold til denne gruppen. Antisemittismen rettet seg imidlertid også i mot den delen av det jødiske samfunnet som ønsket assimilering. Jødene ble beskyldt for å stå i ledtog med fremmede makter eller for å være med i en internasjonal konspirasjon som arbeidet for verdensherredømme. Dette er blant annet budskapet i publikasjonen *Sions vises protokoller* som først kom ut i Russland i 1903 og ganske raskt fikk oversettelser i så godt som alle vesteuropeiske land. Etterhvert kom det krav om at jøder skulle fratras offentlige stillinger som leger og lærere. En god del yrker ble dermed i realiteten stengt for jøder [EHL05, s.269-440].

Ved opprettelsen av Polen hadde landet forpliktet seg gjennom internasjonale avtaler til å garantere minoritetenes rettigheter. Dette var imidlertid forordninger som var påtvunget utenfra og hadde liten og ingen gjenklang hos majoriteten av befolkningen. Lorenz og Dahl skriver i *Jødehat*:

*Forestillingen om en jødisk verdenssammensvergelse mot den polske nasjonalstaten fløt sammen med en økonomisk motivert antisemittisme og de tradisjonelle kristne stereotypene. Jødene var kristusmordere, skjendet nattverdsbrødet og begikk ritualmord. At de ble spredt over hele verden, var straffen for å ha drept Kristus- samtidig som dette ble brukt for å bevise at kristendommen var det rette tro. Siden ledende sovjetiske kommunister som Trotskij, Sinovjev og Kamenjev kom fra jødiske familier, anvendte den katolske kirken og de politiske høyresiden dette for å introdusere begrepskoblingen jøde=kommunist. Dette skulle bli grunnleggende for kirkenes syn på jødene fram til i dag. Forestillingen om en internasjonal jødisk sammensvergelse fikk støtte da "Sions vises protokoller" ble utgitt på polsk i desember 1919 (nye utgaver kom i 1926, 1930, 1934 og 1936). Andre antisemittiske skrifter og pamfletter fulgte i samme spor [EHL05, s.426].*

Når overgrep skjedde, var myndighetene i stor grad passive. Eksempel på dette var da det jødiske nasjonalrådet stilte seg nøytral i den polsk-ukrainske krigen i Lvov i 1918. Det uløste en program i byen hvor 150 jøder ble drept. Disse overgrepene fortsatte også etter at polakkene hadde inntatt Lvov i 1919. På samme måte som i øvrige europeiske land ble arbeidsmulighetene for jøder vanskeligere utover 20-tallet [EHL05, s.426].

Også innenfor universitetsmiljøene i Polen spredte det seg utover 20-tallet sterke antisemittiske holdninger. Om dette skriver Lorenz og Dahl i *Jødehat*

*Studentene krevde en "avjødning" av universitetene, spesielle separate sitteplasser for jødiske studenter i auditoriene og seminarrommene, og en begrensning i tallet på jødiske studenter, særlig i fagene jus og medisin. I 1932 ble det for første gang reist et krav om numurus nullus, dvs et universitet helt uten jøder i Warszawa. Et år tidligere var jødiske studenter ved universitetene i Kraków, Warszawa, Lwów blitt fysisk angrepet av sin sine polske medstudenter.*

*I slutten av 1935 opprettet den tekniske høyskolen i Lwów<sup>1</sup> separate "jødebenker" som første høyere undervisningsinstitusjon. Dette ble fulgt opp av regjeringen via undervisningsministeren i november 1937, da han oppfordret universitetene til å opprette spesielle "ghettobenker" for jødiske studenter [EHL05, s.428].*

Denne utviklingen ble altså i realiteten støttet av myndighetene i landet som rettnok tok avstand fra voldsbruk, men viste *forståelse* for bakgrunnen for den økende voldsbruken mot jødene. På mange måter var overgrepene tidlig på 30-tallet minst like alvorlige som de en opplevde i Tyskland. Ved Pilsudskis død i 1935 økte volden ytterligere [EHL05, s.424-435].

### 7.1.7 Enigma

Gjennom hele mellomkrigstiden søkte Polen å balansere sin eksistens mellom stormaktene Sovjetunionen og Tyskland. Etterrettingsvirksomhet ble svært viktig for polakkene. Det var tilfelle både under den polsk-sovjetiske krig i 1919-1921 og på 30-tallet i forholdet til Tyskland. Enigma var en tysk oppfinnelse for å kunne sende kodede meldinger. Både tyskerne selv og de andre stormaktene betraktet det som umulig å lese Enigma-kodede meldinger. Polakkene ga likevel ikke opp, og et miljø av polske matematikere med **Marian Rejewski (1905-1980)** i spissen, klarte tidlig på 30 tallet å lese kodede meldinger fra Enigma. De var dermed godt orientert om tyskernes krigsplaner fram til 1938 da Enigma ble ytterligere forbedret. Fra da av klarte ikke lenger polakkene å lese tyskernes meldinger.

Deres erfaringer fikk derimot stor betydning for den britiske og allierte etterretningen. For disse var det en stor overraskelse da de i 1939 ble kjent med polakkenes suksess med å avkode Enigma. Polen satte i utenrikspolitikken sin lit til beskyttelse fra Storbritannia

<sup>1</sup>Dette er en av institusjonene som både Ulam og Banach var tilknyttet

og Frankrike. Det var derfor naturlig at den kunnskapen og erfaringen som polakkene hadde utviklet, ble gitt til disse landene. Det skjedde rett før Polen ble angrepet. Britisk og fransk etterretning kunne dermed fortsette der polakkene sluttet. Krigshistorien har i ettertid sterkt vektlagt etterretningskrigens betydning for krigens utfall. I denne krigen hadde de polske matematikerne en svært viktig rolle [Sin00, s. 139-185].



Figur 7.3: St.Paraskeva ca. år 1300

### 7.1.8 2. Verdenskrig

Ved den tysk-sovjetiske pakten den 23. august 1939, ble Polen i realiteten delt mellom Sovjet og Tyskland [HSTT82, X, s. 188]. 1. september samme år angrep Tyskland Polen, og den delen av Polen som skulle tilfalle Tyskland, ble da ganske raskt erobret. Byen Lvov lå innenfor sovjetisk interesseområde og ble inntatt av russerne 17. september. Både den tyske og sovjetiske invasjonen førte til store lidelser for den polske befolkningen. Tyskerne var spesielt grusomme mot jødene: ca. 3 mill. polske jøder ble drept under den 2. verdenskrig. For mange jøder ble redningen å flykte til USA. Dette gjaldt også en del intellektuelle. Sovjetunionen på sin side ønsket å ramme den politiske, militære og intellektuelle eliten i Polen. Mellom én og to millioner polakker ble deportert østover og måtte leve under de usleste forhold. Dødstallene ble naturlig nok svært høye og en god del ble også likvidert [Lek05, Polen-Historie].

I juni 1941 gikk Tyskland til angrep på Sovjetunionen. Lvov kom da raskt under tysk herredømme. Noe av det første som skjedde, var at tyskerne likviderte store deler av de intellektuelle i Lvov. Dette begynte om natten den 3. juli, 1941. Krigsårene som nå fulgte

ble vanskelige. Det ble i stor grad en kamp om å overleve. Noen valgte å samarbeide med okkupasjonsmakten mens mange valgte aktiv opposisjon [Kal96] [Lek05, Polen-historie].

Ved fredslutningen etter den 2. verdenskrig forble Polen en selvstendig stat, men var i det store og hele dominert av Sovjetunionen. Polen var fra 1945 til 1989 en kommunistisk folkerepublikk. I 1989 ble de sterke båndene til Sovjetunionen brutt. Landet har fra 2004 vært medlem av EU [Lek05, Polen-historie].

### 7.1.9 Lvov

Lvovs<sup>2</sup> historie er nært tilknyttet Polens historie. Byen har gjennom århundrer vært et viktig handelssentrum. Ikke minst var jødene og armenerne sentrale i utviklingen av handelen i byen. Lvov ble også et vitenskapelig senter da byen fikk universitet i 1661.



Figur 7.4: Utsyn fra Rynoks plass

Fra 1772 var Lvov-området en del av Østerrike. 1800-tallet var preget av betydelige uroligheter, men mot slutten av hundreåret roet imidlertid forholdene seg noe blant annet ved at polakkene ble innrømmet større nasjonal frihet. Polsk ble offisielt språk i Galicja fra 1861. Dermed kunne undervisning foregå på polsk. Situasjonen for polakkene i dette området var også generelt bedre enn for polakker som bodde i Preussen eller Russland. På tross av betydelige sosiale problemer, var altså dette et område hvor viktige samfunnsinstitusjoner var i funksjon. En av disse institusjonene var universitetsutdanning

---

<sup>2</sup>I denne oppgaven vil vi bruke Lvov som navn på byen selv om navnet i dag er Lviv. Årsaken til dette er at i den perioden som vi beskriver, var Lvov det offisielle navnet.

med polsk som forelesningsspråk. Dette tiltrakk seg polske studenter fra andre deler av Østerrike [Lek05, Polen-Historie].

I byen finnes det katedraler for både romersk-katolsk, gresk-ortodoks og armensk kristendom som viser at byen har vært møtested for flere kulturer. Fra 1998 er byen ført opp på *UNESCOs Liste over verdens natur- og kulturarv* [Ukj01]. Det er den spesielle og rike arkitekturen i byen som har gitt denne statusen. Byen må ha hatt tilgang på betydelig økonomiske ressurser over tid for å kunne finansiere så mye arkitektur. Det er tatt med noen bilder som viser noe av arkitekturen i byen. [Lek05, Lviv].



Figur 7.5: Jernbanestasjonen i Lviv

Byen har hatt flere navn alt etter hvem som har hatt makten i byen. Da byen var en del av Østerrike var navnet *Lemberg*. I mellomkrigstiden, da byen var polsk, var navnet *Lvov*. Lvov ble ved fredsslutningen etter den 2. verdenskrig en del av Ukraina som var en sovjetrepublikk til 1991. Da ble Ukraina erklært og anerkjent som selvstendig republikk. Byen har i dag navnet Lviv som er det russiske navnet på byen. Byen har 732 800 innbyggere og er en industriby og jernbaneknutepunkt for den vestlige delen av Ukraina. En kan si at Lvov geografisk ligger på grensen mot både øst og vest.

## 7.2 Indre liv i The Scottish Café

### 7.2.1 Kilder

*The Scottish Café* er nevnt i en rekke sammenhenger. Likevel viser det seg at primærkildene til stoffet ikke er så mange, og det er begrenset hva som finnes i engelsk oversettelse. De viktigste kildene som er brukt i denne oppgaven er Roman Kaluza *Through a reporter's eyes, The Life of Stefan Banach* [Kal96], Daniel Mauldin *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café* [Mau79], Stanislaw Ulam *Adventures of a Mathe-*



*matician* [Ula91] og Kazimierz Kuratowski *A half century of Polish mathematics* [Kur73].

[Mau79] er den siste utgivelsen av *The Scottish Book*. Hoveddelen av boka omhandler problemene fra den opprinnelige boken med kommentarer, men i boken finnes også fem foredrag fra en konferranse om *The Scottish Book* som ble holdt ved *North Texas State University* i mai 1979. Tre av disse foredragene er spesielt interessante som kilder til kunnskap om *The Scottish Café*. Dette gjelder foredragene til Ulam, **Mark Kac (1914-1984)** og **Antoni Zygmund (1900-1992)**. De to første var aktive på *The Scottish Café* og var flyktninger i USA under krigen. Zygmund var også en utvandret polsk matematiker, men ikke fra Lvov.

[Kal96] er en bok om Stefan Banachs liv. En stor del av boken beskriver likevel den aktuelle perioden og siden Banach var så sentral i miljøet, blir dette en viktig kilde. Kaluza er polsk og er dermed i stand til å undersøke polskspråklige kilder.

[Kur73] har undertittel *Remembrances and Reflections* og bygger i stor grad på Kuratowskis egne minner og notater. Hovedmålet med boka er å gi en forklaring på hvorfor en fikk utviklingen av det ofte blir kalt for *den polske Matematikk-skolen* [Kur73, s.1]. Han tar utgangspunkt i tiden før 1. Verdenskrig, men dekker i hovedsak det halve hundreåret fra 1918 og til ca. 1970.

[Ula91] er en selvbiografi av Ulam. Ulam var polsk jøde fra Lvov og de to første kapitlene i boken omhandler hans oppvekst og studier i Lvov. *The Scottish Café* blir ganske utførlig beskrevet.

I det meste er kildene forholdsvis samstemte, og det er derfor ikke så vanskelig å beskrive det indre liv på kaféen. Imidlertid er det ett forhold som forbigås i nærmest taushet, og det er behandlingen av jødene i Polen i mellomkrigstiden. Dette er påfallende sett i forhold til det vi allerede vet om situasjonen for jødene i Polen, jfr. avsnitt 7.1.6. En betydelig del av Lvovs innbyggere var jøder og som vi senere skal se, hadde en god del av de aktive i *The Scottish Café* jødisk bakgrun. Det er grunn til å vurdere dette noe nærmere.

I [Mau79] er dette ikke noe tema i det hele tatt. Det er kanskje ikke så rart fordi de aktuelle foredragene er å betrakte som “festtaler” i forbindelsen av feiringen av *The Scottish Book*. Mellom *The Scottish Café* og den aktuelle konferransen hadde det også vært en krig der tyskerne presterte en antisemittisme som langt overgikk det en så i Polen i mellomkrigstiden. I denne sammenligningen kunne det en opplevde i Lvov 50 år tidligere, fortone seg noe “bagatellmessige”.

De eneste overgrep mot jøder som [Kal96] nevner, er utført av tyskerne. Polsk antisemittisme er altså ikke nevnt. Han gir en beskrivelse av Lvov på 1920-tallet som lyder slik:

*Datidens Lvov var et viktig senter for polsk kultur og vitenskap. De som bodde*

*der er samstemte i at det var en vakker og usedvanlig by. Av de 200 000 innbyggerne var om lag halvparten romersk-katolsk, en tredjedel jødisk, og så var det en stor gruppe gresk-katolske. Det var faktisk tre erkebiskoper i Lvov som representerte hhv en romersk, gresk og armensk utgave av katolisismen. I denne blandingen av kirkesamfunn, nasjonaliteter og kulturer utviklet handel og industri seg raskt, og kunst og vitenskap begynte å blomstre på en måte man knapt hadde sett før - spesielt innenfor naturvitenskapene. [Kal96, s.14]*

Det er all grunn til å stille spørsmål ved denne noe idylliske beskrivelsen av Lvov i lys av det vi ovenfor har vært igjennom om pogromene som hadde vært i Lvov noen få år før og om antisemittismen generelt i det polske samfunnet og spesielt ved universitetene.

[Kur73] nevner heller ikke overgrep mot jøder utenom de som er utført av tyskerne under den 2. verdenskrig. Dette blir viet et helt kapittel; *3. The Period of nazi Occupation* [Kur73, s. 80-90]. [Kur73, s. 90] bringer en liste av matematikere med utspring i Polen som ikke lengre bor i landet. Han reflekterer ikke over at de aller fleste av disse har jødisk bakgrunn.

En episode fra januar 2005 kan kanskje kaste lys over Kaluzas og Kuratowskis taushet om de jødiske matematikernes situasjon. Nrk-journalist Hans-Wilhelm Steinfeld hadde i forbindelse med 60-årsjubileet til frigjøringen av Auschwitz et oppslag der han hevdet at polske nazister i Ukraina og jødehat var en sort flekk i polsk historie. Påstandene førte til sterke reaksjoner i Polen. Storavisen *Rzeczpospolita* skrev at dette var et av de verste eksemplene på «anti-polske» uttalelser den siste tiden. Så stor oppsikt vakte saken at Polens utenriksminister Adam Daniel Rotfeld erklærte krig mot «historieforfalskning» og uttalte:

*Det er land som Tyskland, USA, Canada og Norge som med bevisst arroganse forfalsker historiske fakta.*

Det virker åpenbart at antisemittisme er en del av Polens historie som polakker gjerne snakker om [SK].

Ulam i [Ula91] er derimot ikke helt taus selv om han uttaler seg svært forsiktig. I forbindelse med utbruddet av 1. verdenskrig uttaler han at mange av de polskspråklige hadde anti-østeriske holdninger. De kunne altså gjerne tenke seg å bli løsrevet fra Østerrike. Derimot ønsket hans familie å forbli i Østerrike [Ula91, s. 10]. Dette er nok et uttrykk for at det opplevdes trygghet å være en minoritet blant flere i et imperium som Østerrike enn i nasjonalstat som Polen. Ulam forteller videre at faren opprinnelig ønsket at Ulam skulle overta farens advokatpraksis i Lvov, men at den økende antisemittismen utover 20-tallet gjorde dette umulig. En akademisk karriere virket også uoppnåelig. Han valgte derfor en teknisk utdanning, og dette førte ham inn i matematisk forskning [Ula91, s.23]. Han nevner at Steinhaus var en av få med jødisk bakgrunn som har fått et profesorat [Ula91, s.41].

Ulams forsiktighet kan ha flere forklaringer. En forklaring kan være den samme som nevnt ovenfor. Tysk antisemittisme var så mye mer omfattende enn den polske i mellomkrigstiden. Det kan også tenkes at hans erfaringer har lært ham at noe bør en være forsiktig med å snakke høyt om, særlig hvis en har tenkt å besøke Polen.

### 7.2.2 Den polske Matematikk-skolen og nasjonsbyggingen

*The Scottish Café* nevnes ofte i sammenheng med *Den polske Matematikk-skolen*. *Den polske Matematikk-skolen* besto i 1918 av to separate miljøer, miljøet i Lvov og miljøet i Warszawa. Da Polen ble en selvstendig i 1918, var det bare to polske universiteter hvor det ene lå i Lvov og det andre i Krakow. Vi husker at i Galicja i Østerrike, var polsk universitetspråk, og ved opprettelsen av den nye polske staten var disse områdene blitt en del av Polen. I de delene av det nye Polen som hadde vært russiske eller tyske, som blant annet gjaldt Warszawa, hadde polsk ikke hatt den samme frie stillingen. Når Kuratowski i [Kur73] skal forklare framveksten av *den polske Matematikk-skolen*, hevder han at dette var ledd i en allmen strategi innenfor etnisk-polske miljøer. Allerede på 1800-tallet skulle utvikling innen naturvitenskap vært sett på som en mulighet for å framheve polsk nasjonsbygging:

*Det var en alminnelig overbevisning at dyrkingen av naturvitenskap og utnyttelsen av dette potensialet ville på en eller annen måte kunne sikre gjenskapningen av nasjonen* [Kur73, s. 2].

Det matematiske miljøet i Polen var i 1918 delt i ulike separate miljø. Det var imidlertid flere som holdt høyt faglig nivå, og de var samlet godt orientert om hva som foregikk av matematisk forskning både i øst og vest. Det gjelder matematikere som **Hugo Steinhaus (1887-1972)**, **Kazimierz Kuratowski (1896-1980)**, **Stanislaw Zaremba (1863-1942)**, **Zygmunt Janiszewski (1888-1920)**, **Stefan Mazurkiewicz (1888-1945)** og **Waclaw Sierpinski (1882-1969)** for å nevne noen. Sistnevnte hadde gode kontakter i Sovjet-unionen og Moskva. [ORa], [ORi], [ORc], [ORd], [ORh]

Matematikeren **Zygmunt Janiszewski (1888-1920)** lanserte i 1918 en strategi for utvikling av polsk matematikk som var i tråd med tankegangen ovenfor. I en artikkel dette året hevdet han at Polen kunne vinne anerkjennelse blant andre land ved å samle alle krefter om studiet av ett felt i matematikken. Det feltet som pekte seg ut, var *topologi* som på denne tiden var et ganske nytt forskningsfelt. Denne idéen vant gjenklang i de polske matematikkmiljøene noe som måtte bety at det allerede var stor interesse for *topologi* i Polen. I særlig grad gjaldt dette miljøene i Lvov og Warszawa. Dermed hadde en klart å binde sammen to forskningsmiljøer som i utgangspunktet lå i forskjellige land [Kur73, s.29-31].

Som et ledd i Janiszewskis plan kom det i 1920 ut et nytt tidsskrift, *Fundamenta Mathematicae*, på polsk som skulle være et spesialtidsskrift for *Topologi*. Mange tvilte på at

det var mulig å etablere et slikt tidsskrift på et språk som ble lest av så få, men skeptikere ble gjort til skamme. *Fundamenta Mathematicae* fikk den stillingen som Janiszewski hadde håpet, og tidsskriftet ble lagt merke til i Europa forøvrig. At *Polens matematiske selskap* ble dannet i siste år av 1. Verdenskrig, var også med å samle de polske matematiske miljøene [Kur73, s.29-33,s 50].

Når polskfødte matematikere på en konferanse om *The Scottish Book* i 1979 snakker om denne tiden, kan flere tolkes slik at de virkelig opplevde å være en del av nasjonsbyggingen. Ulam sier blant annet:

*Jeg går tilbake til den polske Matematikk-skolen, til kaféene og til The Scottish Book - og da vil jeg påpeke at de emnene som ble studert, innebar en viss nytanking. Selve begrepet mengdelære var fortsatt ganske nytt, og topologi med utspring i mengdelæren var enda nyere. Teorien om funksjoner over reelle variable, og tanken om funksjonsrom ble til en viss grad unnfanget og utviklet i Polen - spesielt i Lvov [Mau79, s. 6].*

En annen polsk-amerikansk matematiker, **Antoni Zygmund(1900-1992)**, uttrykker noe av det samme i et foredrag på den samme konferansen:

*Den polske Matematikk-skolen i perioden 1919-1939 var et interessant fenomen, først og fremst på grunn av stedet og omstendighetene rundt framveksten av den. En kan si at før 1919 hadde det vært polske matematikere, men ikke noen polsk Matematikk-skole. Den raske veksten av polsk matematikk etter 1919 var delvis spontan - godt hjulpet av den nylige frigjøringen av landet fra utenlandsk okkupasjon - og delvis et resultat av omhyggelig planlegging [Mau79, s. 29].*

Det var betydelig samarbeid og kontakt mellom miljøene i Lvov og Warszawa. For eksempel var Kuratowski i Lvov fra 1928-33. Tarski var det meste av tiden i Warszawa, men var mye i Lvov. Miljøet i Lvov gikk etterhvert i en noe annen retning enn i Warszawa ved å bli et av de sterkeste miljøene innen *funksjonalanalyse*. Fra 1929 begynte *Studia Mathematica* å komme, og det var et spesialtidsskrift for nettopp *funksjonalanalyse* [Kur73, s.29-50].

Både miljøet i Lvov og miljøet i Warszawa hadde utstrakt kontakt med andre miljøer i Europa både gjennom besøk og gjenbesøk og konferranser både i Polen og utenfor Polen. Det må understrekes at denne kontakten både gikk mot vest og øst. Ikke minst hadde miljøet i Lvov gode kontakter i Sovjetunionen [Kur73, s.57-75].

### 7.2.3 Noe biografisk stoff

Fra nå av vil vi konsentrere oss om det som skjedde i Lvov og spesielt miljøet som deltok i samlingene i *Cafè Szkocka* eller *The Scottish Café* som etablissementet er blitt kalt i amerikansk oversettelse. Dette var personer som på en eller annen måte var tilknyttet universitetsmiljøet i Lvov: som studenter, forskere eller professorer. Miljøet var så stort

at det ikke er tjenlig å studere bakgrunnen for hver enkelt. Vi skal derimot se på bakgrunnen og utviklingen til tre av de mest sentrale skikkelsene i *The Scottish Café*.

**Hugo Steinhaus (1887-1972)** Steinhaus kom fra en velstående jødisk familie. Han begynte sin matematikkstudier i Lvov, men flyttet etter kort tid Göttingen. Dermed kom han i kontakt med et matematikkmiljø som inneholdt navn som Felix Bernstein, Carathéodory, Courant, Herglotz, Klein, Koebe, Landau, Runge, Toeplitz og Zermelo. Han tok doktorgrad i matematikk i Göttingen i 1912 under veiledning av **David Hilbert (1862-1943)**.



Figur 7.6: Hugo Steinhaus

Da han kom til Polen og senere Lvov rundt 1915, hadde han derfor bakgrunn fra ett av de sterkeste miljøene i Europa på denne tiden. Han ble en sentral skikkelse i Lvov både gjennom sine egne arbeider og kunnskap og ved å være en inspirator for de yngre i miljøet.

Steinhaus har gitt ut flere bøker som retter seg mot et publikum uten matematikkbakgrunn; *One Hundred Problems in elementary Mathematics* [Ste64] og *Mathematical Snapshots* [Ste83]. Dette er også i dag lesverdige bøker. Steinhaus har i stor grad vært med å fortelle historien om *The Scottish Café* [ORe].

**Stefan Banach (1892-1946)** Stefan Banach var etnisk polakk. Han ble født i Ostrowsko, en landsby 50 km sør for Kraków som lå i det østerrikske Galicja. Det kan se ut som han på mange måter hadde en vanskelig oppvekst. Han fikk imidlertid utdanning selv om han ikke utmerket seg i særlig grad. Da han begynte på høyere utdanning, måtte han arbeide som hjelpelærer for å finansiere studiene. Studiene tok derfor lang tid og resultatene var heller ikke så imponerende. Han utmerket seg i matematikk og naturfag, men mente selv at matematikk ikke var noe å satse på fordi det meste allerede var opp-

daget. Ved en tilfeldighet kom Banach i kontakt med Steinhaus. Det skjedde i Krakow våren 1916. Steinhaus beskriver omstendighetene slik:

*På en slik spasertur overhørte jeg ordene “Lebesgue-mål”. Jeg gikk bort til parkbenken og presenterte meg for de to unge matematikk-elevene. De fortalte meg at de var i følge med en tredjemann ved navn Witold Wilkosz som de overstrømmende lovpriste. Ungdommene var Stefan Banach og Otto Nikodym<sup>3</sup>. Etter dette møttes vi jevnlig, og ... vi bestemte oss for å etablere et matematisk selskap [ORg]*



Figur 7.7: Stefan Banach(1892-1945)

At dette var en ung mann med evner langt utover det vanlige, ble raskt klart, og matematikk ble fra da av en sentral del av Banachs liv. Steinhaus har da også selv sagt at hans største bidrag til matematikken var oppdagelsen av Banach [ORe].

Det kan virke som Banach hadde en noe ustrukturert arbeidsstil. Han likte å løse problemer, men tok seg ofte ikke den nødvendige tid til å skrive ut detaljene. Det var mye mer interessant å begynne på noe nytt. Som følge av dette fikk han aldri tatt noe hovedfag. Fra 1920 fikk han likevel en assistentstilling ved Lvov teknisk universitet<sup>4</sup>. Mens han var her, ble doktoravhandlingen ferdig i 1922, og den bar tittelen: *On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations*. Denne avhandlingen blir sett på som en milepæle i matematikkens historie. Om dette skriver den kjente matematikkhistorikeren Morris Kline:

*En annen tilnærming til abstrakte rom, der idéen om en norm ble brukt, ble også initiert av Riesz. Den vanlige definisjonen av normrom ble imidlertid utformet i årene 1920 til 1922 av Stefan Banach (1892-1945), Hans Hahn (1879-1934), Edvard Helly (1884-1943) og Norbert Wiener (1894-1964) Til*

<sup>3</sup>Otto Nikodym ble også en betydelig matematiker blant annet kjent for “Radon-Nikodym mål”

<sup>4</sup>Ed dette universitet ble det noen få år senere innført “jødebenker”

*tross for at det er mye overlapping i disse mennenes arbeid, slik at det er vanskelig å avgjøre spørsmålet om hvem som sa hva først, så er det Banachs arbeid som hadde den største betydningen [Kli72, s.1087].*

I 1922 ble han ansatt som dosent ved *Jan Kazimierz Universitet* in Lvov.

Som vi har vært inne på var han en de mest sentrale deltakerne i miljøet på *The Scottish Café*. Han fikk fra 1922 en fast stilling ved universitetet. Dermed kom også den personlige økonomien hans i orden. Utover 20- og 30-tallet hadde Banach er betydelig produksjon. Han fikk etterhvert et betydelig kontaktnett både i Polen, i Russland og i Vest-Europa.

Banach hadde et godt forhold til de russiske myndighetene da Lvov ble inntatt i september 1939. Han kunne da også fortsette sin matematiske forskning under det russiske styret. Det ble mye vanskeligere da tyskerne inntok byen i juli 1941. Fra da av måtte han livnære seg på annen måte. Han levde et svært strevsomt liv under den tyske okkupasjonen av Lvov. Det å komme levende gjennom denne perioden var ingen selvfølge, særlig ikke for en som hadde samarbeidet tett med russiske myndigheter. Mot slutten av den 2. verdenskrig opptok hans sin matematiske virksomhet men en gang russerne inntok byen igjen. Da var han allerede alvorlig svekket av sykdom og han døde i 1945, ikke mer enn 53 år gammel [ORg] [Kal96, s.85-91].

**Stanislaw Ulam (1909-1984)** Ulam kom fra jødisk familie som nok hadde lagt vekt på å tilpasse seg mest mulig samfunnet den var en del av, og i hjemmet snakket de polsk. Han ble med i miljøet på *The Scottish Café* mens han ennå var student. Han tok doktorgrad 1933 med Banach som veileder. I de to påfølgende årene var han en god del på studiereiser i Europa. Han fikk blant annet kontakt med den ungarske matematikeren **John von Neumann (1903-1957)** noe som resulterte i at han ble invitert til USA i 1935 hvor han både studerte og arbeidet ved *Princeton*. Han var flere ganger i årene som fulgte i Lvov og opprettholdt dermed kontakten med miljøet der.

Han var han på reise til USA da Polen ble angrepet og kom med i 2. Verdenskrig. Som en av mange intellektuelle fra Europa, ble Ulam i USA gjennom hele krigen. Med sin jødiske bakgrunn kunne han umulig reise tilbake til Polen. Han flyttet aldri tilbake til Polen etter krigen.

Ulam er den som nok den som i størst grad har bidratt til å gjøre *The Scottish Café* kjent. Han har også skrevet bøker beregnet på et bredere publikum, *Problems in Mathematics*, en selvbiografi *Adventures of a Mathematician* [Ula91] og *Mathematics and Logic* [KU68]. I den siste boken er **Marc Kac**, en annen av de andre matematikerne fra Lvov, medforfatter.



Figur 7.8: Stanislaw Ulam

#### 7.2.4 The Scottish Café

*The Scottish Café* var et kaffehus og som sådan en del av en gammel kulturtradisjon i Europa. Slike kaffehus fantes fra midten av 1600-tallet i de fleste europeiske byer som Wien, Praha, Berlin, London og Paris. Det fortelles at det første kaffehuset oppsto i Wien i 1683. Wien hadde i tiden før, over en lang periode vært beleiret av tyrkerne. Da tyrkerne trakk seg tilbake etterlot de seg en stor sekk med noe i. En mann ved navn **Georg Franz Kolschitzky** fikk ta hånd om innholdet som viste seg å være kaffe. Kaffen ble raskt en populær drikk. Kolschitzky skaffet seg etter hvert monopol på videre leveranser. Dermed var grunnlaget lagt for det første kaffehuset.

Kaffehusene ble, overalt hvor de oppstod, et treffsted og arena for diskusjon og engasjement. Ofte lå det en betydelig opposisjon til det bestående i aktiviteten i kafène. De forskjelligste individer og aktiviteter kunne samles på disse kafeene. Både bøker og blader er blitt skrevet ved et kafébord. Det er blitt spilt sjakk, dam og domino. Utlån av aviser var også vanlig, og en engasjert debatt om innholdet ble ofte resultatet. Det at det på en slik kafé utviklet seg et matematikkmiljø når forholdene ellers lå til rette for det, er derfor ikke så merkelig, snarere tvert i mot.

Det er framsatt flere forklaringer på hvorfor kaffehusene fikk en slik plass i europeisk kultur. Trangboddhet i de store byene er pekt på som en av årsakene. Nattlosjiet var for mange ikke annet enn en seng som en kanskje også måtte dele med andre. I en slik situasjon ble kafeene et rimelig oppholdssted i tiden før en kunne gå til ro. Inngangsbilletten for å få sitte ved et kafébord, var prisen på en kopp kaffe, og det hadde de fleste råd til. Hvis en ikke hadde råd, var det oftest mulighet til kreditt. [Hjo96, s.7-13]





Figur 7.9: The Scottish Café

### 7.2.5 Begynnelsen

Ett av matematikkens fortrinn er at redskapene som trenges, knapt er mer enn noe å skrive med og noe å skrive på. Noe å skrive på kan være en bordplate, og i historien om *The Scottish Café* var det dette som skjedde.

Det var flere kafeer i området rundt universitetet, og *Café Roma* var først det mest populære møtestedet. Ved ett tilfelle ble Stefan Banach nektet kreditt. I sinne forlot han kafeen og gikk til *The Scottish Café*. Deretter ble dette det faste samlingsstedet. *The Scottish Café* var et etablissement i veneziansk stil. Kaféen hadde små bord med marmorplater. Disse platene viste seg godt egnet for å skrive matematiske formler på. Eierne av kaféen likte i begynnelsen dette dårlig, men aksepterte likevel aktiviteten. Skribleriene lot seg vaske bort og de herrene som regelmessig kom, var tross alt professorer fra universitetet og andre intellektuelle. Det gav status til stedet [Kal96, s.61].

Det hele begynte med uformelle sammenkomster i etterkant av de ukentlige møtene i den lokale klubben av *Polens matematiske selskap*. Etter hvert fant flere og flere veien til *The Scottish Café*. Sammenkomstene fikk etterhvert et visst mønster: De fleste kom mellom kl. 17 og 19. De satte seg alltid rundt de samme bordene. De kunne så arbeide konsentrert om problemer langt utover kveldene. Imidlertid var det også plass til annet enn ren matematikk. Det ble diskutert høylydt, vitsene satt løst og de spilte sjakk og andre spill. I tillegg til dette ble det drukket store mengder med kaffe, men også sterkere drikker. Det er noe vanskelig å anslå når aktiviteten på *The Scottish Café* eksakt startet. Fra 1926-27 virker det som miljøet var aktivt i den form som vi beskriver her [Kal96, s.61].

Miljøet hadde en fast kjerne. I tillegg til de vi allerede har nevnt, var det mange andre som allerede da eller senere har gitt viktige bidrag til matematisk forskning: **Stanislaw Mazur (1905-1981)**, **Otto Schreier (1901-1929)**, **Juliusz Pawel Schauder (1899-1943)**, **Kazimierz Kuratowski (1896-1980)**, **Otton Marcin Nikodym (1887-1974)**, **Samuel Eilenberg (1913-1998)**, **Wlydyslaw Orlicz (1903-1990)**, **Mark Kac (1914-1984)** og **Józef Marcinkiewicz (1910-1940)**. I forhold til størrelsen på universitetsmiljøet og byen Lvov, er dette en imponerende samling av betydelige matematikere [Kal96, s. 61-62].

### 7.2.6 Utenlandske gjester

*The Scottish Café* ble også gjestet av ikke-polske og utenlandske matematikere. **Maurice René Fréchet (1878-1973)** var i kafeen i 1937. **Henri Lebesgue (1875-1941)** besøkte Lvov i 1938. I løpet av dette oppholdet var også han innom kafeen. Russiske matematikere besøkte Lvov i de første krigsårene. Det gjelder blant annet **Pavel Aleksandrov (1896-1982)** og **Sergei Sobolev (1908-1989)** [Mau79].

### 7.2.7 The Scottish Book

Det var først i 1935 at en begynte å gjøre notater fra disse samlingene i *The Scottish Café*. Banachs kone, Lucja, skaffet en vanlig kladdebok til formålet. Denne viste seg å være utilstrekkelig og derfor ble det anskaffet en annen som passet bedre til formålet. I denne boken ble kravet til form skjerpet. En førte problemene inn på oddetallssidene og det ble avsatt plass til løsningen på neste side. Hvert problem ble datert og fikk sitt nummer. Ofte ble det også satt opp en pris for løsningen av problemet. Ved dette var grunnlaget lagt for den *The Scottish Book*. Boken inneholder i alt 193 problem, 32 fra 1936, 13 fra 1937, 9 fra 1938, 7 fra 1940 og 4 fra 1941 [Mau79].

Det var stort sett de vanlige deltakerne på *The Scottish Café* som skrev i *The Scottish Book*. Noen var spesielt aktive. Banach har skrevet 14 problemer og 11 sammen med Mazur eller Ulam. Ulam har skrevet hele 40 alene og 15 sammen med andre, Mazur 24 og 19 sammen med andre og Steinhaus i alt 11. Av de utenlandske besøkende har blant annet Frechet, Aleksandrov og Sobolev skrevet inn problemer i boken.

Det kanskje mest kjente problemet, er *Problem 153*. Problemet dreide seg om hvorvidt det finnes *Separable Banachrom* uten en *Schauder basis*<sup>5</sup>. Problemet ble formulert av Mazur og er datert den 6. november 1936. Premien for å løse problemet var en levende gås. I 1972 ble det løst av den svenske matematikeren **Per Enflo**. Enflo fikk ved en tilstelning overrakt en levende gås av Mazur.

---

<sup>5</sup>For definisjon av *Separabel* og *Schauder basis* vises til [Kre78, s.21 og s.69]

### 7.2.8 Slutten

*The Scottish Café* fungerte som her har beskrevet i underkant av 20 år. Det skulle bli en sørgelig slutt. Den 2. Verdenskrig kom med sine redsler og grusomheter.

Ulam og hans bror Adam var på vei med båt til USA da Polen ble angrepet av Tyskland. Ulam beskriver krigsutbruddet slik:

*Vi var i åpen sjø da meldingen om avtalen mellom Russland og Tyskland ble kunngjort over skipets radio. I en tilstand av underlig opphisselse sa jeg til Adam da jeg hørte nyheten: "Dette er slutten for Polen". På et kart i skipets salong trakk jeg en linje gjennom midten av Polen og sa, som en Kassandra: "Slik vil Polen bli delt". Vi var, for å si det mildt, rystet og bekymret [Ula91, s. 114]*

Ulam ble, som vi vet, i USA gjennom hele krigen. For dem som var igjen i Polen, var nok situasjonen enda mer alvorlig. For de aller fleste ble forholdene svært vanskelige. Etter først russiske og deretter tyske utrenskninger skjønner vi at miljøet i *The Scottish Café* måtte bryte sammen. Siste problem i *The Scottish Book* er datert 31. mai 1941. Da tyskerne inntok Lvov i juli 1941, var det umulig å fortsette virksomheten.

De mange av deltakerne som var jøder levde spesielt farlig, og Schauder var en av jødene som mistet livet. Det finnes to versjoner av hvordan dette skjedde. I den ene ble han forrådt og angitt til Gestapo. I den andre ble han fanget og skutt under en tysk razzia etter jøder. Det er ikke muig å vite hvilken som er riktig [ORf].

På forunderlig vis ble *The Scottish Book* bevart gjennom krigsårene. Sannsynligvis var det Steinhaus som tok vare på boka. I 1956 ble den sendt til Ulam som da bodde i USA. Han oversatte boken til engelsk. Den sirkulerte først som et stensilert kompendium. På denne måten ble den kjent av mange, og kravet kom om at den måtte utgis på ordinær måte. Dette skjedde i 1977. Boka ble svært populær både fordi problemene engasjerte og på grunn av historien bak boken. Det er arrangert flere konferanser på grunnlag av boka [Mau79, s.9].

## 7.3 Atombomber og Montecarlo-metoden

Historien om *The Scottish Café* slutter likevel ikke selv om samlingene i kaféen måtte opphøre ved tyskernes inntok i Lvov i 1941. Både i og utenfor Polen fikk miljøet sin fortsettelse. Steinhaus for eksempel ble boende i Polen og tok initiativ til *The New Scottish Book* som er en bok bygd opp på samme måte som den opprinnelige boken. Flere andre matematikere fra *The Scottish Café* ble værende i Polen og har i etterkrigstiden ført polske matematikk videre. Vi skal følge historien videre for noen av de som måtte forlate Europa. Ulam og Kac ble, som vi har sett, flyktninger i USA under krigen og ble værende der videre. Dette hadde de til felles med en rekke intellektuelle. USA hadde behov for folk som kunne fysikk og matematikk. Ikke minst var dette tilfellet i det som kalles *Manhattan-prosjektet*:

### 7.3.1 Manhattan-prosjektet

Ulam forteller selv i sin bok [Ula91], hvordan han, etterhvert som krigen utviklet seg, følte et sterkt behov for å bidra med noe i krigen. Han tok selv kontakt med sin venn, den ungarske matematikeren **John von Neumann (1903-1957)**, fordi han visste at han allerede var involvert i arbeid med å utvikle nye våpen.

Dette førte til at Ulam i 1943 ble rekruttert til å være med i Manhattan-prosjektet som hadde som mål å utvikle den første atombomben. Prosjektet ble ledet av **Robert Oppenheimer (1904-1967)** og ble lagt til Los Alamos i New Mexico. Flere av de mest sentrale personene i dette prosjektet var europeere. Blant disse var de kjente fysikerne **Nils Bohr (1885-1962)** og **Enrico Fermi (1901-1954)**. Bombene som ble sluppet over Hiroshima og Nagasaki viste at prosjektet hadde lyktes, men konsekvensene var enorme.

Ulam hadde til da vært vant bare å arbeide med ren matematikk. Både det å arbeide med anvendelser og det samarbeide med andre forskere var nytt for Ulam, men denne overgangen klarte han bra. Arbeidsformen minnet ham faktisk om *The Scottish Café* cite[s.34]Adventures. Mye av denne regningen var faktisk håndregning, men etterhvert ble også datamaskiner tatt i bruk [Lek05, Atombombe] [Ula91, s.141-171].

Mens Ulam var engasjert i dette arbeidet fikk han ideen til *Monte Carlo-metoden*. At det altså er en forbindelse mellom *The Scottish Café* og *Monte Carlo-metoden* er nok ikke så godt kjent:

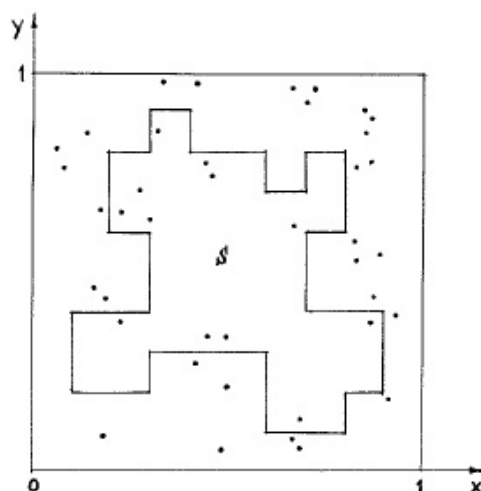
### 7.3.2 Monte Carlo-metoden

*Monte Carlo-metoden* er betegnelse for en klasse numeriske metoder som brukes til å løse problemer som vanskelig lar seg løse analytisk eller ved tradisjonelle numeriske metoder. Særlig i høyere dimensjoner har metoden vist seg overlegen i forhold til andre metoder. Metoden anvendes derfor innenfor en rekke felter som for eksempel statistikk, fysikk og økonomi [Ukj]. Et elementært eksempel kan vise noe av ideen bak metoden:

**Eksempel 7.1.** Vi ønsker å vise finne arealet  $S$  som er vist på figur 7.10. Vi har ikke tid til å måle arealet opp eksakt. Vi genererer heller 40 tilfeldige punkter på arealet og teller hvor mange som faller innenfor  $S$ . Det er 12 og vi estimerer arealet av  $S$  til å bli  $12/40 = 0.3$ . Hvis vi ønsket større nøyaktighet, er det bare å generere flere punkter [Sob94].

Ulam forteller selv om hvordan han fikk ideén til metoden:

*Idéen til det som seinere ble kalt Monte Carlo-metoden kom til meg mens jeg holdt på å legge kabal i en sykdomsperiode. Jeg fant at det kunne være mye mer praktisk å skaffe seg en oversikt over sannsynligheten for at en kabal skulle gå opp (en Canfield-kabal eller noe tilsvarende, der spillerens dyktighet*



Figur 7.10: Bruk av Monte Carlo-metoden for å finne arealet til  $S$

*ikke er viktig) ved å legge ut kortene, eller å eksperimentere med prosessen og bare legge merke til antallet ganger kabalen gikk opp - framfor å forsøke å beregne alle kombinasjonsmulighetene som er et eksponensielt økende tall, så stort at det er umulig å anslå, unntatt i svært elementære tilfeller. Dette er intellektuelt sett en overraskelse og, om ikke direkte ydmykende, så inngir det en følelse av beskjedenhet overfor grensene som finnes for rasjonell eller tradisjonell tenking. I en tilstrekkelig komplisert problemstilling er faktisk utprøving bedre enn en undersøkelse av alle kjedene av muligheter. [Ula91, s.196-197]*

Det epokegjørende nye mot slutten av 2. Verdenskrig var muligheten til å bruke datamaskiner. Her viste *Monte Carlo-metoden*<sup>6</sup> seg svært anvendelig og fikk stor betydning for utviklingen av den enda sterkere *hydrogenbomben*.

### 7.3.3 Hydrogenbomben

Det er den ungarskfødte fysikeren **Edward Teller(1908-2003)** som er regnet som hovedpersonen bak utviklingen av hydrogenbomben. Teller var med i utviklingen den første atombomben, og hadde allerede da ideen til den enda kraftigere *hydrogenbomben*. Etter krigen fikk Teller overbevist President Truman om at det var fornuftig å begynne arbeidet med hydrogenbomben [Lek05, Teller].

<sup>6</sup>Ulam var ikke den første som kjente til Monte Carlo-metoden. Det er imidlertid han som har gitt metoden navn og den første til å bruke innenfor anvendt vitenskap. Dette hadde sammenheng med at den teknologiske utviklingen var nådd tilstrekkelig langt for å kunne utnytte slike metoder.

Ulam hadde ikke store betenkeligheter da han i 1952 ble spurt om å delta i dette prosjektet. Han mente at det var viktig for verdensfreden at “gode stater” som USA var ledende på dette feltet. I ettertid innså han at han nok ikke hadde ant rekkevidden av det han var med på, selv om han ikke på noen måte angret.

I arbeidet med utviklingen av hydrogenbomben var Ulam svært sentral. Blant annet viste han at Tellers første projektskisse ikke kunne realiseres. For prosjektet var dette ikke noen god nyhet, og hele prosjektet var en tid truet. Imidlertid fikk Ulam idéen til et modifisert opplegg, og dette viste seg å løse problemene [Ula91, vii-xx].

## 7.4 Hvorfor oppsto The Schottish Café?

Vi skal forsøke å gi svar på dette spørsmålet selv om ingen av de kildene som er brukt til denne oppgaven, gir fyldestgjørende svar. Derimot er de ganske samstemte når de forklarer utviklingen av *den polske matematikk-skolen*, og det er det naturlig å se disse to “institusjonene” i sammenheng. Uten *den polske matematikk-skolen* virker det urealistisk at det skulle kunne oppsto en kafé som *The Scottish Café*. Eksistensen av *den polske matematikk-skolen* synes derfor å være en nødvendig betingelse for *The Scottish Café*, men dette kan likevel ikke forklare alt. Spørsmålet som reiser seg er hvorfor en kafé blir sentrum for den mest kreative utfoldelsen og ikke universitetet?

Verken Ulam eller Kac sier noe om dette i [Mau79]. Kaluza gir heller ikke noe klart svar utover å antyde at selve byen, miljøet og gleden ved den nyvundne friheten la grunnlaget for et slikt samlingssted [Kal96, s. 14]. Noe av det samme blir uttrykt i [Kur73] hvor det hevdes at kaféliv var svært viktig for folk både i Lvov og Warszawa [Kur73, s. 43]. At kaféens stilling i Lvov hadde betydning, er innlysende, men at dette var eneste årsak virker usannsynlig fordi det fantes andre og mer egnede lokaliteter og sammenhenger for slik aktivitet. Som vi har vært inne på, har kaféhusaktiviteter ofte hatt i seg en viss opposisjon til det bestående. Når matematisk forskning legges til et kafélokale, kan dette derfor like mye handle om hvordan situasjonen var på universitetet. Fantet det forhold i universitetsmiljøene som kunne forklare at forskningsaktivitet ble lagt til en nærliggende kafé. Svaret er at det gjorde det:

I denne oppgaven har vi brukt mye tid på å dokumentere en økende og utstrakt antisemittisme ved universitetene i Polen gjennom hele mellomkrigstiden, jfr avsnitt 7.1.6. Lvov var ikke på noen måte bedre enn andre universitetsbyer, heller tvert i mot. Ved Lvovs tekniske høyskole, som de fleste av deltakerne på *The Scottish Café* hadde bakgrunn fra, finner vi faktisk mange av de verste eksemplene på antisemittisme. Antisemittismen og de utslag denne fikk i Polen og Lvov, kan dermed være nøkkelen til forståelse av fenomenet *The Scottish Café*.

Det er to forhold som kan framheves: For det første var mange studier stengt for jødiske

studenter. Den jevne polakk hadde selvsagt ingen anelse om hva mengdelære, topologi og funksjonalanalyse var. Det at jøder arbeidet med slikt, ville derfor ikke provosere på samme måte som at jøder ville bli lærere, leger eller advokater m.m. Hvis dette var en gjengs oppfatning innenfor jødiske miljøer, ville det føre til en forholdsmessig stor del jødiske ungdommer som valgte slike studieretninger. For de andre gjorde de anti-jødiske stemningene i universitetsmiljøene det vanskelig og umulig for jødiske studenter å delta aktivt i diskusjoner i forbindelse med forelesninger og annen aktivitet ved universitetene. Et mulig svar på disse utfordringene var å flytte diskusjonene ut av universitetet og til en sammenheng hvor etnisk bakgrunn ikke betydde noe. En slik sammenheng var *The Scottish Café* som for jødiske matematikere kunne fungere som et slags eksil, et sted der det var mulig å tenke, skrive og tale fritt.

En slik årsaksforklaring er denne oppgaven nok alene om. I alle fall finnes ikke antydninger om slike sammenhenger i de kildene som er brukt til denne oppgaven. I drøftingen av disse kildene, avsnitt 7.2.1 på side 76, er det påpekt noen mulige årsaker til at de ulike kildene i så liten grad sier noe om antisemittismen til tross for at den hadde betydning også innenfor matematikkfeltet. Det som der blir trukket fram, kan forklare hvorfor ingen har påpekt en slik sammenheng før. Viktigst her er den polske motviljen mot å erkjenne og ta et oppgjøre med antisemittismen i sitt eget land. Reaksjonene som er dokumentert ved Steinfelds uttalelser viser at enda i 2005 kunne dette skape sterke følelser. Det er da naturlig å tenke at det var enda vanskeligere tidligere å ta opp slike forhold.





# Kapittel 8

## Til slutt

Vi startet i kapittel 2 med litt mystikk. Det var rekursjonsformelen  $x_{n+1} = x_n/2 - 1/x_n$  og hvordan den arter seg for når  $x > 0$  som skapte denne mystikken. Det meste av mystikken ble borte i løpet av det samme kapittelet, men litt mystikk er fortsatt tilbake. En våken leser har kanskje merket seg at en av påstandene i denne innledningen aldri ble bevist: det at følgen konvergerer mot  $\sqrt{2}$  også i  $\text{Re}z > 0$ . Dette vil forbli et mysterium når denne oppgaven er gjennomlest, men kanskje er det heller ikke så vanskelig å løse dette mysteriet?

Som vi husker, var det Banachs fikspunktteorem som var nøkkelen til forståelsen av denne følgens egenskaper og natur. For å kunne anvende teoremet måtte vi besvare følgende to spørsmål: Hadde vi et komplett metrisk rom? Hadde vi en kontraksjon? I så fall visste vi at vi hadde et entydig fikspunkt og kunne da bruke en iterasjonsprosess for å finne dette fikspunktet.

Disse spørsmålene har blitt gjentatt igjen og igjen gjennom hele oppgaven. Vi startet i det som for de fleste av oss er ganske kjente omgivelser, de reelle tall  $\mathbb{R}$ , med funksjoner med en variabel og ganske elementære problemstillinger. Raskt ble det vanskeligere, men spørsmålene var likevel de samme. Dette gav mange *gjentakelser*, men enda viktigere muligheten til *gjenkjennelse*. Ved å arbeide på denne måten har vi blant annet vist at vi kan bruke en elementær teknikk som *Newtons metode* til kaste lys over mer kompliserte metoder som *Jacobi-iterasjon* og løsning av differensialligninger ved *metoden for gradvis tilnærming*. Disse igjen kan bygge bro til andre og mer generelle metoder og sammenhenger.

Fikspunktteori er i dag en stor disiplin med mange anvendelser både innenfor naturvitenskap og økonomi. I fikspunktteorien har Banachs fikspunktteorem en grunnleggende og sentral plass. Dette teoremets generalitet går langt utover det som vi har maktet å vise. En møter ofte begrepet *Banachs kontraksjonsprinsipp* som er en understrekning av teoremets generelle karakter. Forhåpentligvis kan denne oppgaven være en god start til forståelse av dette prinsippet.

Denne oppgaven har ikke bare handlet om matematikk, men også om forholdet mellom matematikk og kultur og hvordan den matematiske historien er en del av den generelle historien. Vi har sett hvordan matematisk forskning lar seg påvirke av ytre forhold. Samtidig har matematikken påvirkningskraft, og det er i et slikt spenningsfelt at all matematisk forskning må og bør befinne seg. Hvis en ikke tar med begge disse aspektene kan noen sammenhenger lett gå tapt.

Vi har beskrevet noen mørke tiår av europeisk historie. Det finnes likevel noen lyspunkter og ett slikt lyspunkt er *The Scottish Café*. Det taler medlemmene av dette miljøet til ære at de ikke fulgte de sterke nasjonalistiske og nazistiske strømningene som gikk over Polen og Europa gjennom disse årene. Derimot bygde de opp et fellesskap som kunne skape på tross av skiller som rase, ideologi og religion.

# Bibliografi

- [Apo65] Tom M. Apostol. *Calculus Volume II*. Blaisdell, 1 edition, 1965.
- [AR94] Howard Anton and Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra, Applications version*. Wiley, 7 edition, 1994.
- [BM91] Carl W. Boyer and Uta C. Merzbach. *A History of Mathematics*. Wiley, 2 edition, 1991.
- [CK04] Ward Cheney and David Kencaid. *Numerical Mathematics ang Computing*. Thomsen, 4 edition, 2004.
- [EHL05] Trond B. Eriksen, Håkon Harket, and Einhart Lorenz. *Jødehat*. Damm, 1 edition, 2005.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, 2 edition, 1999.
- [Hjo96] Daniel Hjort. *Kaféliv*. En bok för alla, 1 edition, 1996.
- [HSTT82] Redaktører Knut Helle, Jarle Simonsen, Sven Tagil, and Kåre Tønnesen. *Aschehougs verdenshistorie*. Aschehoug, 1 edition, 1982.
- [Inc56] E.L Ince. *Ordinary differensial equations*. Dover, 1 edition, 1956.
- [Ise96] A Iserles. *A first Course in Numerical Analysis of Differensial Equation*. Cambridge University Press, 1 edition, 1996.
- [Kal96] Roman Kaluza. *Through a reporter´s eyes, The Life of Stefan Banach*. Birkhauser, 1 edition, 1996.
- [KK01] Mohamed A. Khamsi and William A. Kirk. *An Introduction to Metric Spacis and Fixed Point Theory*. Wiley, 1 edition, 2001.
- [Kli72] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford, 1 edition, 1972.
- [Kre78] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1 edition, 1978.

- [KU68] Mark Kac and Stanislaw Ulam. *Mathematics and Logic*. Dover, 1 edition, 1968.
- [Kur73] Kazimierz Kuratowski. *A half century of Polish mathematics, Remembrances and Reflections*. Pergamon Press, 1 edition, 1973.
- [Lek05] Store Norske Leksikon. *Aschehougs og Gyldendals Store norske leksikon*. Kunnskapsforlaget, 4 edition, 2005.
- [Lek06] Store Norske Leksikon. *Aschehougs og Gyldendals Store norske leksikon*, 2006. [http://kfmedia.kunnskapsforlaget.no//snl/p/polen-\(historie\)-1900.swf](http://kfmedia.kunnskapsforlaget.no//snl/p/polen-(historie)-1900.swf) 11.05.2006.
- [Lin96] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. Universitetsforlaget, 2 edition, 1996.
- [LT85] Peter Lancaster and Miron Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, 2 edition, 1985.
- [Mau79] Daniel Mauldin. *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café*. Birkhauser, 1 edition, 1979.
- [N.L00] N.L.Carothers. *Real Analysis*. Cambridge, 1 edition, 2000.
- [ORa] J J O'Connor and E F Robertson. Kazimierz Kuratowski. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kuratowski.html>,14.06 2006, 10:42.
- [ORb] J J O'Connor and E F Robertson. Olga Taussky-todd. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taussky-Todd.html>,29.06 2006, 15:31.
- [ORc] J J O'Connor and E F Robertson. Stanislaw Zaremba. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zaremba.html>,14.06 2006, 10:42.
- [ORd] J J O'Connor and E F Robertson. Stefan Mazurkiewicz. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mazurkiewicz.html>,14.06 2006, 10:42.
- [ORe] J J O'Connor and E F Robertson. *Hugo Steinhaus*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steinhaus.html>, 10.05.2006 11.00.
- [ORf] J J O'Connor and E F Robertson. *Juliusz Pawel Schauder*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schauder.html>, 10.05.2006 11.00.
- [ORg] J J O'Connor and E F Robertson. *Stefan Banach*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach.html>, 10.05.2006 11.00.
- [ORh] J J O'Connor and E F Robertson. Waclaw Sierpinski. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sierpinski.html>,14.06 2006, 10:42.

- [ORi] J J O'Connor and E F Robertson. Zygmunt Janiszewski. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Janiszewski.html>,14.06 2006, 10:42.
- [Rei96] Constance Reid. *Hilbert*. Copernicus, 1 edition, 1996.
- [Rot01] Karl Rottmann. *Matematisk formelsamling*. Spektrum forlag, 6 edition, 2001.
- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGRAW-HILL, 1 edition, 1976.
- [Saa95] Yousef Saad. *Iterative Methods for Sparse linear Systems*. PWS Publishing Company, 1 edition, 1995.
- [Sin00] Simon Singh. *Koder*. Aschehoug, 1 edition, 2000.
- [SK] Ole Kristian Strøm and Zbigniew Kuczynski. Hans Wilhelm Steinfeld. <http://www.vg.no/pub/vgart.hbs?artid=102399> 10.05.2006 10:00:00.
- [Sob94] Ilya M. Sobel. *A Primer for the Monte Carlo Method*. CRC Press, 1 edition, 1994.
- [Ste64] Hugo Steinhaus. *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. Dover, 1 edition, 1964.
- [Ste83] Hugo Steinhaus. *Mathematical Snapshots*. Dover, 1 edition, 1983.
- [Str92] Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations*. Wiley, 1 edition, 1992.
- [Suh03] Erdogan S Suhubi. *Functional Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1 edition, 2003.
- [SWS97] Sankatha Singh, Bruce Watson, and Pramila Srivastava. *Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-map Principle*. Kluwer Academic Publishers, 1 edition, 1997.
- [TM04] Paul A. Tipler and Gene Mosca. *PHYSICS for scientists and Engineers*. W.H. Freeman and Company, 1 edition, 2004.
- [Ukj] Ukjent. Monte Carlo Method. [http://en.wikipedia.org/wiki/Monte\\_Carlo\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method),15.06 2006, 11:42.
- [Ukj01] Ukjent. *Architectural guide-book*. Mapti-M, 1 edition, 2001.
- [Ula91] Stanislaw Ulam. *Adventures of Mathematician*. University of California Press, 1 edition, 1991.
- [Var00] Richard S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Springer, 2 edition, 2000.