NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Overgangsprosessen mellom representasjoner for funksjoner

En studie vedrørende feil i overgangsprosessen mellom representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell

Kamilla Mittet Brøste

Master i realfag

Innlevert: juni 2018

Hovedveileder: Heidi Strømskag, IMF

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min lektorutdannelse i realfag ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU). Studien ble gjennomført våren 2018. Det har vært både krevende og lærerikt, og har bydd på både oppturer og nedturer. Jeg vil benytte denne anledningen til å takke de som har hjulpet meg og veiledet meg underveis.

Først og fremst vil jeg takke skolen, læreren og elevene som ga av sin tid slik at jeg kunne gjennomføre undersøkelsen. I tillegg vil jeg rette en ekstra takk til de elevene som var villige til å gå ut av undervisningen for å delta i intervju.

Videre vil jeg takke min veileder, Liping Ding, for god veiledning gjennom hele prosessen. Jeg setter pris på at hun har tatt seg tid til å gi skriftlige tilbakemeldinger, samt møtes for å gå gjennom tilbakemeldingene sammen.

I tillegg vil jeg takke en venn, Sindre Syversen Flesvig, som er utdannet lektor i matematikk. Han har gitt meg konstruktive tilbakemeldinger og spørsmål underveis vedrørende skriftlig arbeid og mine tanker. Det har gitt meg en trygghet å kunne drøfte momenter jeg har vært usikker på med han.

Frode Rønning har også vært en støttespiller underveis i studien da jeg har kunnet kontakte han for faglig hjelp. Han har også korrekturlest oppgaven, noe jeg setter stor pris på.
Jeg vil spesielt takke for at han alltid tar seg tid til å svare og hjelpe så godt han kan.

Til slutt vil jeg takke Ida Rostveit for støtte underveis i skriveprosessen, både gjennom oppturer og nedturer. Hun har også korrekturlest oppgaven som har vært til stor hjelp.

Sammendrag

Formålet med denne masteroppgaven er å avdekke hvilke overgangsfeil elever muligens begår i overgangsprosessen mellom representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell. Videre undersøkes hva som skjer i overgangsprosessen ved eventuelle overgangsfeil. Dette studeres fordi tidligere internasjonal forskning viser at elever burde mestre overgangen mellom ulike representasjoner, samt at overgangen mellom de tre ovennevnte representasjonene er utfordrende for elever. Derfor ønskes det å studere om det også er utfordrende for norske elever. I tillegg er det dokumentert mangler vedrørende hvorfor overgangsfeilene forekommer, derfor studeres hva som skjer i overgangsprosessen ved feil.

Masteroppgaven bygger på studien gjennomført av Adu-Gyamfi, Bossé og Stiff (2012) som utviklet verifiseringsmodellen for å studere elevenes utfordringer i overgangen mellom representasjoner. I deres studie ble det avdekket tre overgangsfeil: implementeringsfeil, som omfatter feil utførelse av en algoritme, samt tolkning- og bevaringsfeil, som henholdsvis omfatter at egenskaper som er eksplisitt eller implisitt gitt i startrepresentasjonen ikke bevares i overgangen.

Studien er av kvalitativ karakter hvor datainnsamlingen ble gjennomført ved bruk av oppgavehefte og intervjuer. Forskningsdeltakerne i studien er en 1T-klasse, hvor fem av elevene ble intervjuet. Oppgaveheftet består av seks oppgaver som henholdsvis tar for seg de seks overgangstypene mellom representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell. Intervjuene ble brukt til å gå i dybden på overgangsprosessen. Under intervjuene ble det brukt lydopptak som senere ble transkribert. I analysen ble det dannet kategorier gjennom to faser. Første fase omfattet å samle overgangsfeilene i allerede eksisterende kategorier (implementering-, tolkning- og bevaringsfeil) ved bruk av verifiseringsmodellen som analyseverktøy, mens i andre fase ble det utviklet nye kategorier på bakgrunn av dataene ved bruk av åpen og aksial koding.

Studiens resultat viser at elevene sliter med overgangen mellom representasjonene, spesielt mellom funksjonsuttrykk og graf. I tillegg er alle overgangsfeilene enten en implementering- eller en tolkningsfeil. Implementeringsfeilene ble begått i overgangsprosessene hvor det kreves mange algebraiske steg i form av utregninger og manipulering av algebraisk utrykk. Tolkningsfeilene ble i stor grad begått i overgangene med funksjonsuttrykk som målrepresentasjon trolig grunnet krav om mønstergjenkjennelse.

Abstract
This study investigates the different translation errors students might make in the translation process between the representations graph, algebraic equation and table, and what happens in the translation process if an error occurs. Previous international research shows that students should master the translations, but that the translation between the three representations is challenging for students. Therefore, it is desirable to study whether this is also challenging for Norwegian students. There are documented deficiencies regarding why the translation errors occur. Therefore, the translation process in case of failure will be studied.

This thesis is based on the study of Adu-Gyamfi, Bossé and Stiff (2012), in which they constructed the Translation-Verification Model. This model can be used to study students' translation weaknesses or errors committed during the translation process. The study reveals three types of translation errors: implementation error, including incorrect execution of an algorithm, interpretation- and preservation error, where attributes respectively explicitly or implicitly given in the source representation are not retained in the translation.

The chosen methodological approach for the study is qualitative, where the data collection is carried out using of six items as well as interviews. Participants to answer the items were students from a class taking the mathematical course 1T[1] in a Norwegian high school, and five of the students participated in interviews. The six items asked the students to translate between the three representations. The interviews were carried out to study the translation process in more depth. During the interviews, audio recording was used which later was transcribed. The analysis produced categories through two phases. During the initial phase, the translation errors were coded into existing categories (implementation- and interpretation error) using the verification model as an analysis tool. In the second phase, new categories were developed based on the data through open and axial coding.

The findings of this study show that the students are struggling with the translation, especially the translation between algebraic equation and graph. All the translation errors are either an implementation- or interpretation error. Implementation errors were committed in translation processes requiring several algebraic steps like calculations and manipulation. Interpretation errors were largely committed in the translation where equation is target representation, probably due to the need of pattern recognition.

[1] 1T is a theoretical course in the first year of Norwegian high school mathematics.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Temaet for denne studien er overgangen mellom ulike representasjonsformer for lineære funksjoner, og det har blitt dokumentert at det er viktig at elevene mestrer dette. Deriblant har NCTM (2000) konkludert med at arbeid med ulike representasjoner av funksjoner vil kunne medføre en omfattende forståelse av funksjoner. I tillegg presenteres det av NCTM (2000) at læring kan fremmes når elevene mestrer bruken av ulike representasjoner innen matematikk. Videre viser læreplanmålet «gjøre rede for funksjonsbegrepet og kunne oversette mellom ulike representasjoner av funksjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2013) i læreplanen til 1T at mestring av overgangen mellom ulike representasjonsformer innen funksjonslære er viktig.

Duval (2006) har også kommet fram til at det er viktig at elevene utvikler evnen til å gå mellom ulike representasjonsformer. Han trekker blant annet fram at det er viktig for problemløsning, samt at det vil kunne fremme læring. I tillegg har Gagatsis og Shiakalli (2004) gjennom sin studie avdekket at mestring av overgangen vil virke positivt på evnen til problemløsning. Videre presiserer de at suksess i matematikkutdanning påvirkes av evnen til å gjennomføre overganger. Dette presiseres også av Watson, Jones og Pratt (2013) som i sin bok presenterer hvordan elever lærer matematikk og utvikler matematisk forståelse i alderen 9 til 19 år innen ulike matematiske temaer, slik som algebra og statistikk. Boken er basert på forskning og er blant annet utviklet for lærere. I boken er det et kapittel som omhandler ligninger, grafer og funksjoner, hvor de trekker fram at bruken av flere representasjonsformer og overgangen mellom dem er viktig for å utvikle en bedre forståelse for funksjonsbegrepet.

Selv om forskning viser at elevers mestring av overganger er viktig, er det derimot mye forskning som tilsier at elever sliter med slike overganger (Adu-Gyamfi, Bossé & Stiff, 2012; Duval, 2004; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Galbraith & Haines, 2000; Knuth, 2000;). Adu-Gyamfi et al. (2012) mener det er mange som har funnet ut at elever sliter med overgangen mellom representasjonene graf, tabell og funksjonsuttrykk, men at det derimot mangler forskning på hvorfor feilene forekommer.

Utfordringene tidligere forskning har avdekket i representasjonsoverganger og mangelen på forskning tilknyttet hvorfor feilene forekommer, har ført til fokuset i denne oppgaven: Hvilke feil forekommer og hva skjer underveis i overgangsprosessen når det oppstår feil? Dette vil kunne gi bidrag til å forstå overgangsfeilenes natur, samt studere overgangsutfordringene i en norsk kontekst. Ved å studere hvilke feil som begås og hva som skjer underveis i overgangen vil dette i tillegg kunne påvirke lærerpraksisen ved at lærere kan bli mer bevisste på elevenes utfordringer. Dette kan medføre reflekterte avgjørelser for læreren, slik som hvordan undervisningen skal legges opp eller hvilke oppgaver læreren skal bruke.

1.2 Forskningsspørsmål

Som nevnt over er hensikten med studien å se på hvilke feil elever muligens begår i overgangen mellom representasjoner for funksjoner, samt hva som skjer i prosessen når det forekommer feil. Dette har ført til følgende forskningsspørsmål:

Hvilke feil begås av en 1T-klasse i overgangsprosessen mellom ulike representasjoner for lineære funksjoner? Hva skjer i prosessen når det forekommer en overgangsfeil?

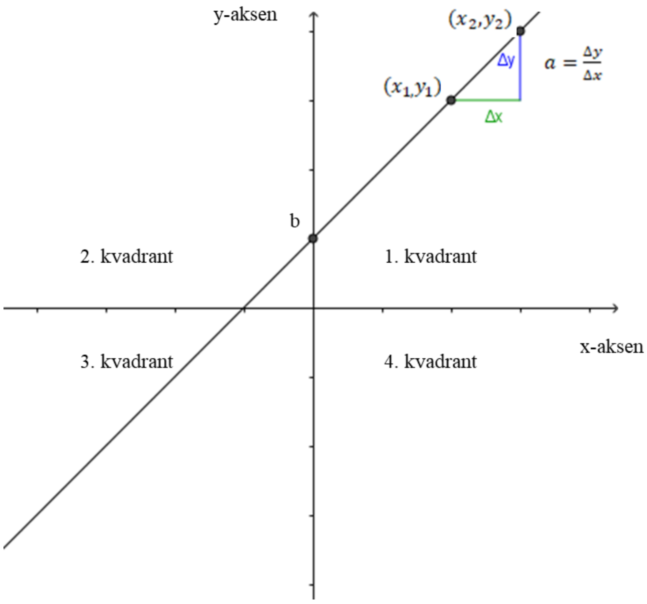
Ved å skulle se på hva som skjer i overgangsprosessen menes det i denne oppgaven å studere overgangsprosessen når det forekommer feil i forhold til start- og målrepresentasjon, altså i hvilke overgangstyper de ulike overgangsfeilene oppstår, samt å belyse mulige årsaker til fordelingen av overgangsfeilene med tanke på overgangstypene.

Studien begrenses til lineære funksjoner, grunnet oppgavens begrensing i tid og omfang. I tillegg studerer Adu-Gyamfi et al. (2012) lineære funksjoner, og da deres studie ligger til grunn for denne studien, er det naturlig med en avgrensning til lineære funksjoner. Representasjonene som skal studeres i denne studien er graf, funksjonsuttrykk og tabell. Dette er fordi disse representasjonene er sentrale innen funksjonslære, samt at Adu-Gyamfi et al. (2012) betraktet disse representasjonene i sin studie. Se mer vedrørende overgangene i kapittel 2.4.2 Overgangene i denne studien.

1.3 Begrepsavklaring vedrørende funksjonsbegrepet

I dette delkapittelet gis en begrepsavklaring på sentrale begreper vedrørende funksjoner som benyttes. Da grunnsteinen i studien er funksjoner er det nødvendig med en definisjon, samt hva som skiller lineære funksjoner fra andre funksjoner. En funksjon $f\colon A \to B$ kan defineres som en regel som for hvert element x i A gir ett, og bare ett, element $f(x)$ i B. Mengden A betegnes som definisjonsmengden og B som verdimengden (Lindstrøm, 2006). De kritiske egenskapene til funksjoner, vilkårlighet og entydighet, bevares i denne definisjonen. Med kritisk egenskap menes de egenskapene som må være oppfylt for at det kan betraktes som en funksjon. Vilkårlighet omfatter at mellom to vilkårlige mengder kan en hvilken som helst sammenheng være en funksjon. Entydighet innebærer at for hvert element i definisjonsmengden, A, skal det høre ett, og bare ett element i verdimengden, B (Schwarz & Hershkowitz, 1999).

En lineær funksjon er en funksjon med konstant stigning, og kan representeres ved en rett linje i et koordinatsystem bestående av fire kvadranter (se Figur 1). Da er den rette linjen grafen til funksjonen. Lineære funksjoner kan også representeres ved funksjonsuttrykk på formen $y = ax + b$. Her illustrerer a stigningen til den rette linjen, og kalles stigningstallet. Stigningstallet er gitt ved brøken $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, hvor Δ (uttales delta) står for endringen, da i henholdsvis x- og y-verdier, mens (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er to punkter på den rette linjen. b i funksjonsuttrykket kalles konstantleddet og viser til hvor grafen skjærer y-aksen i koordinatsystemet. Ved bruk av tabell som representasjon vil x-verdier med tilhørende y-verdi vises.



Figur 1: Koordinatsystem med fire kvadranter, samt avmerket stigningstall, a, og konstantledd, b.

1.4 Oppgavens oppbygning

Denne masteroppgaven består av seks kapitler. I etterfølgende kapittel, kapittel 2. Teori, vil tidligere forskning relevant for oppgaven presenteres for å illustrere kunnskapen som allerede eksisterer på forskningsfeltet. I tillegg vil det teoretiske rammeverket som analysen bygger på presenteres. I kapittel 3. Metode presenteres ulike metodiske valg som har blitt gjort underveis i studien, herunder blant annet hvilke datainnsamlingsmetoder som ble brukt og hvordan analyseprosessen foregikk. I kapittel 4. Analyse presenteres og analyseres datamaterialet. Her ligger fokuset på hvilke overgangsfeil elevene begikk. Titlene på delkapitlene illustrerer type overgangsfeil, samt hva elevene gjorde feil i overgangsprosessen da dette ble brukt til å kartlegge hvilke feil som ble begått. I kapittel 5. Diskusjon diskuteres hvilke overgangsfeil elevene begikk og hva som skjedde i overgangsprosessen da det oppstod feil. Dette gjøres i lys av i hvilke overgangstyper feilene ble begått og hva som kan ligge til grunn for at overgangsfeilene ble begått. I tillegg vil funnene fra analysen drøftes opp mot den presenterte teorien. Oppgaven avsluttes med kapittel 6. Konklusjon hvor hovedfunnene fra oppgaven som svarer på forskningsspørsmålet blir presentert, samt didaktiske implikasjoner og studiens bidrag til forskningsfeltet.

2. Teori

I dette kapittelet presenteres funksjonens plass i skolen og eksisterende forskning som er relevant for temaet i denne masteroppgaven, nemlig representasjoner og overgangen mellom dem. Dette blir presentert for å gi et bilde av eksisterende kunnskap på området. I tillegg vil dette være en viktig del i diskusjonen av studiens funn, da resultatene kan sammenlignes. For å avdekke mulige overgangsfeil vil verifiseringsmodellen utviklet av Adu-Gyamfi et al. (2012) brukes. Dette fordi de finner denne modellen egnet i analyseringen av elevers svakheter eller feil i overgangsprosessen, følgelig vil det presenteres teori vedrørende denne modellen og deres forskning.

2.1 Funksjonens sentrale plass i skolen

Det er godt kjent blant matematikere at funksjonsbegrepet er en viktig del av matematikken. Blant annet kan hva som undervises i skolen være en indikasjon på dette. Ved å studere læreplanene i 1T, R1 og R2 er det tydelig at funksjoner er et sentralt tema i disse teoretiske fagene i videregående skole. Det er i hver av læreplanene fire hovedområder, og funksjoner er ett av disse. I tillegg til at funksjoner er et av hovedområdene er det også et hovedområde som har fått en særdeles sentral plass i alle de tre læreplanene. I læreplanen til 1T er det tall og algebra, samt funksjoner som er de hovedområdene som har flest læreplanmål. Et av læreplanmålene under tall og algebra omfatter at elevene skal kunne omformulere uttrykk, samt å løse ligninger (Utdanningsdirektoratet, 2013). Dette er et læreplanmål som er relevant for oppgavene i oppgaveheftet, spesielt oppgave 3 (se Vedlegg A), da oppgavene krever at elevene må løse ligninger ved beregning av ulike x- og y-verdier. Det læreplanmålet som er mest relevant med tanke på denne studien er at elevene etter 1T skal kunne «gjøre rede for funksjonsbegrepet og kunne oversette mellom ulike representasjoner av funksjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Dette går direkte på det som undersøkes i denne studien, og gjennom dette kompetansemålet vises viktigheten av at elevene skal kunne gå mellom ulike representasjoner for funksjoner. Ved å ha studert læreplanene til 1T, R1 og R2 kommer det fram at funksjoner har en sentral plass i fagene, og at blant annet overgangen mellom ulike representasjoner for funksjoner vektlegges i 1T (Utdanningsdirektoratet, 2013). I tillegg til at funksjoner er viktig på videregående er det også et sentralt tema på høyere utdanning. Eksempelvis omfatter den matematikktunge sivilingeniørutdanningen flere matematiske emner hvor funksjonsbegrepet er en viktig basis (NTNU, 2017). Funksjoner har følgelig en viktig plass i matematikkfaget og det er dermed viktig at elevene mestrer dette i størst mulig grad. Derfor er det relevant å forske på elementer innen funksjonsbegrepet.

2.2 Eksisterende forskning vedrørende viktigheten med representasjoner og overgangen mellom dem i matematikk

Duval (2006) har gjennom sin forskning avdekket at bruken av representasjoner i matematikk er essensiell for dannelsen av den matematiske tenkningen, og han beskriver representasjoner som «noe som står for noe annet». Han hadde som mål å avdekke hvilke kognitive systemer som kreves for å få tilgang til matematiske objekter, samt om disse systemene er felles for alle kunnskapsprosesser, eller om noen av dem er spesifikke for matematisk aktivitet. Gjennom forskningen avdekket han at for å få tilgang til matematiske objekter kreves det representasjoner. Han viser også til en forskjell mellom matematikken og andre fagområder, slik som astronomi, fysikk, kjemi og biologi, når det gjelder nytteverdien til representasjoner. Uten dem ville det ikke vært mulig å gjennomføre matematiske prosesser, da den eneste muligheten til å få tilgang til de matematiske objektene er gjennom tegn og representasjoner. Dette er ulikt med andre fagfelt hvor oppfattelse og ulike instrumenter, slik som blant annet teleskop, måleinstrumenter og mikroskop, kan benyttes for å få tilgang til objektene. Det som er viktig å huske på, ifølge Duval (2006) er at objektet og representasjonen ikke er det samme, men representasjonen illustrerer objektet. Følgelig vil flere representasjoner kunne illustrere samme objekt, deriblant representasjonene graf og funksjonsuttrykk. Objektet for disse representasjonene vil være funksjonen de representerer. Dette viser til hvordan det innenfor matematikken er nødvendig med representasjoner for å få tilgang til objektet. Hvordan skulle en funksjon blitt presentert og informasjonen til den bestemte funksjonen kommet fram uten å bruke representasjoner slik som tabeller, grafer og funksjonsuttrykk? I følge Duval (2006) omhandler matematisk aktivitet å kunne gå mellom ulike representasjoner og han presenterer at evnen til å gå mellom ulike representasjoner er viktig for problemløsning og for å fremme læring.

Gagatsis og Shiakalli (2004) har også studert evnen til problemløsning i forhold til evnen til å gå mellom ulike representasjoner. De har gjennomført en undersøkelse vedrørende studenters evne til å gjennomføre overganger mellom ulike representasjoner for funksjoner og sett på viktigheten av at studenter mestrer slike overganger. I undersøkelsen studerte de evnen til 195 studenter ved universitetet i Kypros til å gå mellom følgende tre representasjoner for funksjoner: naturlig språk (verbalt), grafisk og algebraisk. Fokuset i studien var å undersøke studentenes evne til å gå mellom ovennevnte representasjoner, samt hvordan dette påvirker problemløsning. Det ble utlevert to tester til studentene, som hver bestod av seks overgangsoppgaver, hvor studentene måtte gjennomføre en overgang fra en representasjon (startrepresentasjonen) til en annen representasjon (målrepresentasjonen), samt en tabelloppgave og to tekstoppgaver (problemoppgaver presentert ved en tekst). De seks overgangsoppgavene i de to testene tok for seg samme overgang, forskjellen ligger i hva som brukes som startrepresentasjon (representasjonen som er oppgitt). Den ene testen bestod av seks oppgaver hvor startrepresentasjonen var naturlig språk, og studentene ble bedt om å gjennomføre overgangen fra naturlig språk til de korresponderende grafiske og algebraiske representasjonene (målrepresentasjonene). I den andre testen var det oppgitt en funksjon i grafisk representasjon (startrepresentasjon) i de seks oppgavene, og studentene ble bedt om å gjennomføre overgangen fra grafisk representasjon til de korresponderende representasjonene i form av naturlig språk og algebraisk notasjon (målrepresentasjon). Tabelloppgavene og tekstoppgavene var ulike i de to testene, men begge tabellene representerte lineære funksjoner. Studentene ble her bedt om å fullføre tabellen og tegne grafen. Når det gjelder tekstoppgavene ble studentene bedt om å skrive det algebraiske uttrykket, samt tegne grafen. Studentene ble testet individuelt og alle studentene gjennomførte de to testene samtidig, med to ukers mellomrom. I de seks overgangsoppgavene ble det gitt ett poeng hvis studentenes målrepresentasjon korresponderte med startrepresentasjonen, og null poeng ved feil svar. Dermed var det kun korrekt overgang som ble belønnet med poeng. Resultatet fra studien vedrørende behovet for å kunne gå mellom ulike representasjoner er at det er sammenheng mellom evnen til å gjennomføre overganger mellom ulike representasjoner og evnen til problemløsning. Dette viser at det er viktig at studentene klarer overgangen mellom ulike representasjoner da dette vil kunne virke positivt på deres evne til problemløsning.

2.3 Eksisterende forskning for overgangen mellom ulike representasjoner for funksjoner

Gagatsis og Shiakallis (2004) studie, presentert i kapittel 2.2 Eksisterende forskning vedrørende viktigheten til representasjoner og overgangen mellom dem i matematikk, avdekket i tillegg til en sammenheng mellom studenters overgangsevne og problemløsning at studentene ikke innså at de verbale og grafiske representasjonene var forskjellige representasjoner for samme funksjon. Det ble også avdekket at andelen overganger som ble vellykket gjennomført var færre når grafisk representasjon var involvert. I tillegg var det færre som klarte overgangen fra grafisk til verbal representasjon enn fra grafisk til algebraisk representasjon. Det var også en mindre prosentandel som klarte overgangen fra verbal til grafisk representasjon enn fra verbal til algebraisk representasjon. Studien avdekket at studentene slet betydelig med å håndtere de ulike representasjonene og å gjennomføre overganger mellom dem.

Det er flere som har forsket på overgangen mellom ulike representasjonsformer for funksjoner, deriblant Elia, Panaoura, Eracleous og Gagatsis (2007). De har studert funksjonsbegrepet gjennom tre tilnærminger: elevenes idé om hva en funksjon er, gjenkjennelse av funksjoner i ulike representasjonsformer og problemløsning som involverer overgangen fra en representasjon av en funksjon til en annen. Hovedmålet med denne studien var å studere interaksjonen mellom de tre ovennevnte tilnærmingene, altså elevenes tenkning vedrørende funksjoner og bruken av funksjoner. Undersøkelsen ble gjennomført med 179 elever i alderen 16 år fra tre videregående skoler[2] på Kypros. Forskningsinstrumentet var et oppgavehefte bestående av sju oppgaver. I første oppgave måtte elevene gi en definisjon på hva funksjoner er. I de tre neste skulle elevene avgjøre om ulike representasjoner (graf, pildiagram og algebraisk uttrykk) illustrerte forhold som betegnes som funksjoner eller ikke, og definisjonen i første oppgave måtte dermed anvendes. De tre siste oppgavene omfattet problemløsning hvor elevene måtte gjennomføre overganger mellom ulike representasjoner. Hovedfunnene i studien er at elever sliter med å gi en fullstendig definisjon for funksjoner og å løse problemer med funksjoner hvor elevene må gjennomføre en overgang mellom forskjellige representasjonsformer. Dette viser at elevene sliter med å se sammenhengen mellom ulike representasjoner. Det var spesielt de siste oppgavene, problemløsning, hvor det kreves overgang mellom representasjoner, elevene slet med. Oppgave 6 tok for seg overgangen fra grafen til en lineær funksjon til funksjonsuttrykket, noe kun 37,4 % av elevene klarte. I oppgave 7 skulle elevene lage et uttrykk for arealet av en trekant i forhold til en av dens sider (lineært), sjekke om forholdet defineres som en funksjon og til slutt i 7c) skulle grafen til funksjonsuttrykket funnet i a) tegnes. I sistnevnte oppgave var det 33,5 % som klarte å skrive funksjonsuttrykket (7a), mens kun 3,9 % klarte å tegne grafen til funksjonsuttrykket. Dette viser at elevene sliter med overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf.

[2] High schools

Knuth (2000) har også studert elevers kobling mellom graf og algebraisk representasjon i funksjonslære. Målet med hans studie var å studere elevenes evne til å velge og å gå mellom algebraiske og grafiske representasjoner til funksjoner. Det var 178 elever som besvarte oppgaver fra en stor videregående skole[3]. Hver av studentene besvarte én av seks oppgaver, følgelig fikk noen av elevene forskjellige oppgaver, mens andre fikk like. Alle oppgavene, utenom én, omhandlet lineære funksjoner, og var designet slik at alle bestod av en grafisk og en algebraisk representasjon. I analysen av elevenes besvarelser ble de enten karakterisert som en algebraisk løsning eller en grafisk løsning. Hvis det ble brukt ligning som hovedmetode for å finne en løsning ble det en algebraisk løsning, mens besvarelser hvor elevene brukte grafen eksplisitt for å komme fram til løsningen ble betegnet som grafisk løsning. Hovedfunnet i studien var at mer enn ¾ valgte en algebraisk løsning som sin hovedløsningsmetode, selv om den grafiske betraktes som den enkleste og mest effektiv. I tillegg var det mange elever som ikke klarte å se at den grafiske løsningen var en mulighet. Knuth (2000) studerte også faktorer som kunne ligge til grunn for at elevene foretrakk en algebraisk løsning framfor en grafisk løsning. En av grunnene mente han var at elevene ikke klarte å se at punktene som brukes i dannelsen av en graf er løsning av en ligning. Han presenterte også at undervisningen vektlegger algebraisk representasjon og manipuleringen med denne representasjonen. I tillegg viste denne studien at elevene ikke så en sammenheng mellom representasjonene, og dermed spesielt ikke klarte overgangen fra graf til ligning. Konklusjonen fra studien var at elever foretrekker en algebraisk løsning, og at de ikke klarte fleksibelt å velge og å gå mellom algebraiske og grafiske representasjoner.

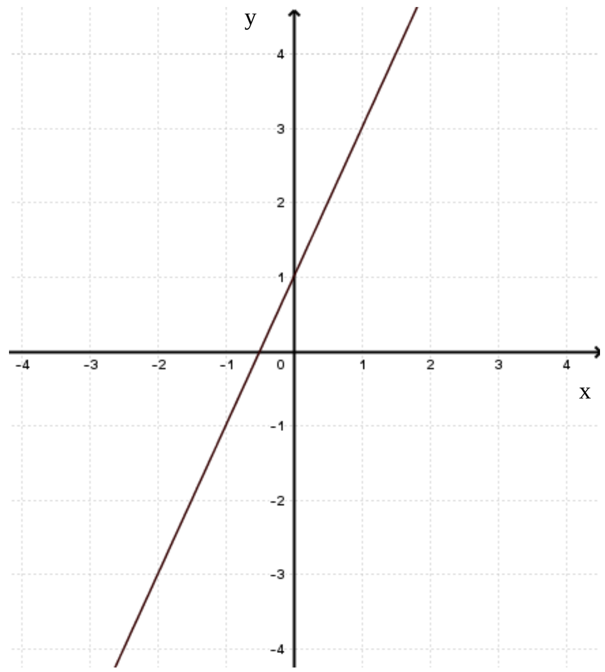
Galbraith og Haines (2000) har også gjennomført en studie vedrørende ulike representasjoner av funksjoner, da med polynomer av ulik grad (første-, andre-, tredje- og fjerdegradspolynomer). Det var 423 studenter (over tre år) som enten hadde matematikk som egen disiplin eller innlemmet i sin utdanning, slik som ingeniørvitenskap og teknologi, som gjennomførte undersøkelsen. De konstruerte tre typer oppgaver som studentene skulle besvare: mekaniske, fortolkende og konstruktive, som krever ulik form for kunnskap (se Galbraith & Haines, 2000). I studien brukte de 18 oppgaver, seks mekaniske, seks fortolkende og seks konstruktive. Oppgavene var designet slik at det var fem svaralternativer og studentene måtte gjennomføre overganger mellom ulike representasjoner av funksjoner, spesielt algebraisk og grafisk representasjon. Målet med studien var å avdekke andelen som

[3] High school

svarte de ulike svaralternativene i hver oppgave, samt avdekke hvordan studentene forstod parametrisering og hvordan de koblet algebraisk og grafisk representasjon gjennom ulike oppgavetyper. Gjennom studien kom det fram at vanskelighetsgraden i hovedsak avhenger av oppgavetypen. Mekaniske oppgaver virket mindre utfordrende enn fortolkende, som igjen virket mindre utfordrende enn konstruktive. Da det i denne masteroppgaven ikke brukes en inndeling i mekaniske, fortolkende og konstruktive oppgaver kommer ikke Galbraith og Haines' (2000) resultater vedrørende oppgavetypene til å betraktes mer i dybden. Videre result av Galbraith og Haines' (2000) studie var at studenter sliter med overgangen mellom graf og funksjonsuttrykk, og at de sliter med å se sammenhengen mellom de to representasjonsformene (for funksjoner som ikke er lineære). De har også ramset opp en smørbrødliste over observasjoner de har gjort (se Galbraith & Haines, 2000), men de resultatene som best kan sammenlignes med denne studien er nevnt her. I tillegg er en av oppgavene i deres studie verdt å nevne. Denne oppgaven (4M) omfattet overgangen fra to punkter til bestemmelsen av stigningstallet og konstantleddet i et lineært funksjonsuttrykk, følgelig kan man anse det som overgang fra tabell til funksjonsuttrykk. Her var det gitt fem svaralternativer. Tre av alternativene kan studentene betegne som riktige ved å gjøre feil i løsningen av ligningen. Det femte alternativet, ingen av alternativene er riktige, viser at studentene ikke vet hvordan de skal løse oppgaven. Det var en stor andel av studentene som klarte denne overgangen, hele 66,43 % av studentene valgte korrekt svaralternativ, og hvis man ser bort fra de studentene som ikke svarte på oppgaven var det hele 80,29 % som svarte rett. Det de derimot mener er urovekkende er at 10,64 % (12,86 % ekskludert de som ikke har svart på oppgaven) av studentene svarte alternativ fem, og ikke klarte å bruke noen form for matematisk kunnskap til å velge mellom en av de fire andre alternativene. Det var 33,58 % som gjennomførte en ufullstendig overgang, da ved enten feil svar eller uten svar.

2.3.1 Graf, funksjonsuttrykk og tabell som representasjoner for funksjoner

Den tidligere forskningen som er presentert over viser at graf, algebraisk uttrykk og tabell anses som representasjoner for funksjoner. Videre vil det brukes funksjonsuttrykk som representasjonsform, da de algebraiske uttrykkene som studeres i denne studien er funksjonsuttrykk. Duval (2006) beskriver representasjoner som «noe som står for noe annet». Dette er en beskrivelse som virker rimelig ved at det i denne sammenhengen er representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell som er dette «noe» som står for eller representerer funksjonen som er dette «noe annet». Under, i Figur 2, vises et eksempel på de tre representasjonene funksjonsuttrykk, graf og tabell (se mer i kapittel 1.3 Begrepsavklaring vedrørende funksjonsbegrepet), der alle representerer samme funksjon.

<table>
<tr><th>Funksjonsuttrykk</th><th>Graf</th><th>Tabell</th></tr>
<tr><td>$y = 2x + 1$</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><td>x-verdi</td><td>y-verdi</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Figur 2: Representasjonsformene funksjonsuttrykk, graf og tabell, som representerer samme lineære funksjon.

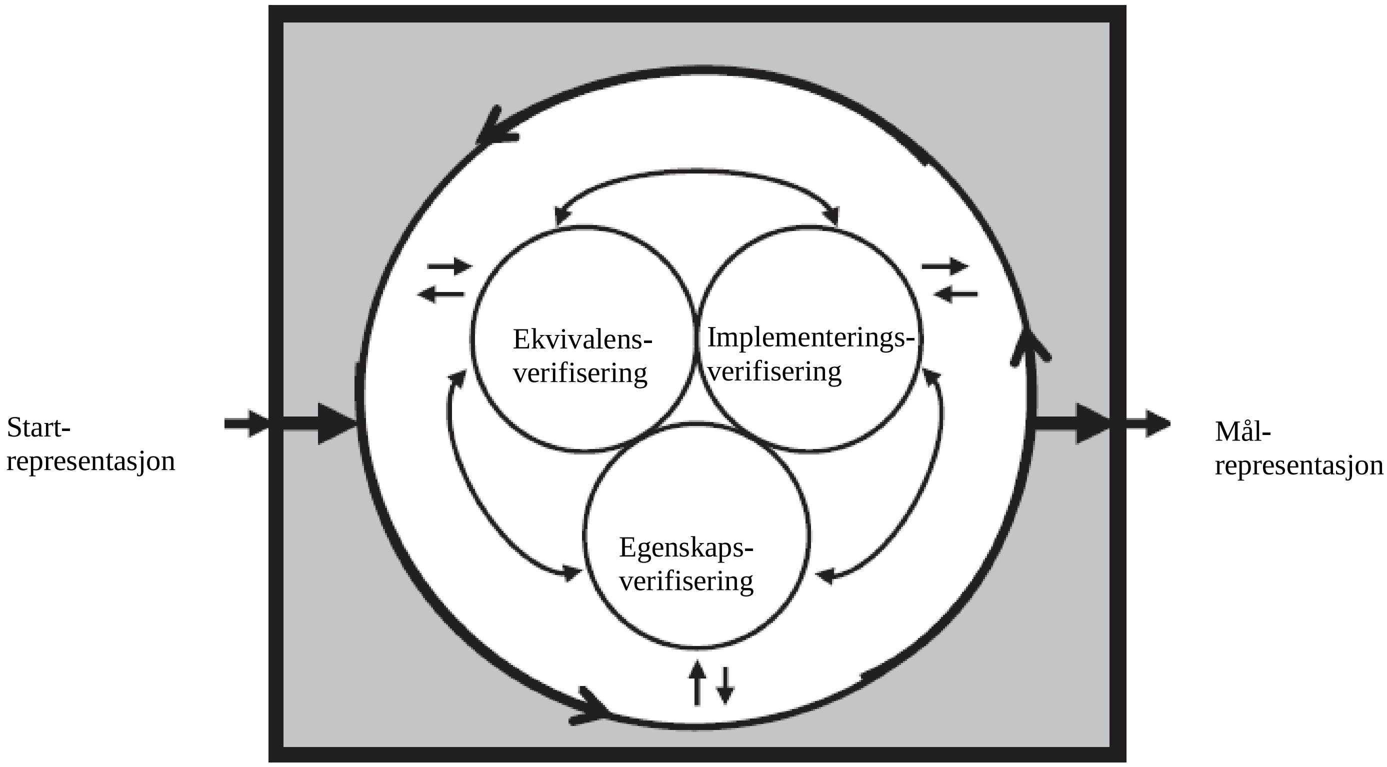
2.4 Verifiseringsmodellen

Over er det presentert at det er viktig at elever mestrer overgangen mellom ulike representasjoner, men samtidig at dette er utfordrende for dem. Adu-Gyamfi et al. (2012) definerer overgangsprosessen[4] som en prosess som består av en startrepresentasjon og en målrepresentasjon. Målet med overgangen vil være å bevare den matematiske meningen mellom disse representasjonene. Overgangsprosessen beskriver handlingene som er involvert i overgangen mellom representasjonene.

Ifølge Adu-Gyamfi et al. (2012) har de fleste forskere studert overgangsprosessen som en svart boks, det vil si at de kun betraktet overgangsprosessen som vellykket eller feilaktig gjennomført. Blant annet viser poenggivningen til Gegatsis og Shiakalli (2004) på overgangsoppgaver vedrørende funksjoner at de studerte overgangen som rett eller gal, altså som en svart boks. Flere studier har derimot vist at dette ikke er dekkende for å studere elevers svakheter eller feil i overgangen. Superfine et al. (2009) er blant dem som mener, på

[4] Min oversettelse av translation process.

bakgrunn av sin studie, at mye av den tidligere forskningen er mangelfull. Dette kommer av at tilnærmet all tidligere forskning har ansett overgangen mellom representasjoner i matematikken som en alt eller ingenting aktivitet. Det er dette Adu-Gyamfi et al. (2012) betegner som en svart boks, og de anser også dette som et forenklet syn på overgangsprosessen. På bakgrunn av dette ble det et behov for en modell som bedre kunne avdekke feilene i overgangsprosessen, og dette medførte en utvikling av en verifikasjonsmodell[5] (se Figur 3). Hensikten med modellen var å forklare elevers atferd i overgangsprosessen, samt avdekke om overgangen fra en startrepresentasjon til en målrepresentasjon er vanskeligere i forhold til andre start- og målrepresentasjoner. Adu-Gyamfi et al. (2012) mener at modellen gjør det lettere å avdekke elevers mangler eller feil i overgangsprosessen.



Figur 3: Verifiseringsmodellen. Hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2012, s. 161).

Verifiseringsmodellen går ut på at en elev må verifisere følgende tre faser, for å unngå feil i overgangsprosessen: *implementeringsverifisering*, *egenskapsverifisering* og *ekvivalensverifisering.* Fasenes rekkefølge er uvesentlig for å oppnå en vellykket overgang, men elevene må implisitt gjennomgå alle verifiseringene. Implementasjonsverifisering

[5] Min oversettelse av Translation-Verification Model.

omhandler elevenes verifisering av at en algoritmisk steg-for-steg aktivitet i overgangsprosessen har blitt korrekt utført. Dette er derimot ikke tilstrekkelig da elevene i tillegg må verifisere at egenskapene som er essensielle for startrepresentasjonen har blitt bevart i målrepresentasjonen. Denne verifiseringen stiller krav til å forstå de nødvendige egenskapene, hvordan de kan overføres og hvilke egenskaper som må bevares. Dette betraktes som egenskapsverifisering. Den siste, ekvivalensverifisering, går ut på at elevene må fastslå at representasjonene formidler samme informasjon. Forskjellen mellom egenskap- og ekvivalensverifisering er at førstnevnte verifiserer at egenskapene uttrykt i startrepresentasjonen bevares, mens i ekvivalensverifiseringen bekreftes det at egenskaper som implisitt kommer fram i startrepresentasjonen blir korrekt oversatt for å bevare den matematiske meningen.

2.4.1 Tre overgangsfeil

Med utgangspunkt i verifiseringsmodellen introduserer Adu-Gyamfi et al. (2012) tre typer feil som kan forekomme i overgangsprosessen: *implementeringsfeil, tolkningsfeil* og *bevaringsfeil.* Implementeringsfeil oppstår ved feil utførelse av en algoritme, og betegnes ofte som regnefeil. Dette kan blant annet forekomme dersom en elev ender opp med et negativt tall som svar ved multiplikasjon av to negative tall. Det betegnes også som implementeringsfeil hvis en elev bytter om på rekkefølgen av verdiene i et ordnet par eller forsømmer å legge ved et negativt tegn til et nummer. Tolkningsfeil oppstår når eleven ikke klarer å bevare alle egenskapene som eksplisitt kommer fram i startrepresentasjonen i overgangen. Eksempelvis hvis en elev finner feil stigningstall i funksjonsuttrykket fra verdiene i en tabell, betegnes det som en tolkningsfeil. Elever kan ofte bruke en overgangsrepresentasjon[6], en mellomliggende representasjon som brukes for å klare overgangen fra startrepresentasjonen til målrepresentasjonen, og da kan det også oppstå tolkningsfeil. Den siste, bevaringsfeil, oppstår når kun enkelte av egenskapene har blitt korrekt oversatt, men ikke alle. For at feilen skal kunne betraktes som en bevaringsfeil må en nøkkelegenskap hos startrepresentasjonen ikke være bevart i målrepresentasjonen. Dette kan blant annet forekomme hvis en elev plotter to punkter korrekt i koordinatsystemet og tegner en rett linje, grafen, mellom disse, men gjør dette unøyaktig slik at grafen skjærer x-aksen på feil sted. Da vil egenskapene mellom punktene være bevart, men ikke utenfor punktene.

[6] Min oversettelse av transitional representations.

Fra Adu-Gyamfi et al. (2012) sin studie virker det til at de betrakter det som to mulige utfall ved hver verifisering: enten er det gjort rett eller feil. Da vil enten det som blir verifisert for, eksempelvis algoritmen i implementeringsverifiseringen, være korrekt utført eller feil. Hvis det er feil utført vil det følgelig være en av de tre feiltypene som har blitt begått, da avhengig av hvilken verifisering som har blitt gjennomført. Dette vil brukes i analyseringen av datamaterialet og beskrives videre i kapittel 3.5.1 Analyseprosessen.

2.4.2 Overgangene i denne studien

I denne studien skal, på lik linje med studien til Adu-Gyamfi et al. (2012), representasjonene tabell, graf og funksjonsuttrykk studeres. Følgelig vil det være seks mulige overganger: tabell til graf, tabell til funksjonsuttrykk, graf til tabell, graf til funksjonsuttrykk, funksjonsuttrykk til tabell og funksjonsuttrykk til graf (se Tabell 1). Tabell 1 viser passende overgangsaktiviteter ved overgangen mellom de tre representasjonene tilhørende lineære funksjoner. I overgangen fra tabell til graf må elevene lese av posisjonen til ulike punkter fra tabellen, samt plotte punktene inn i et koordinatsystem. Punktene vil skrives (x, y) eller $(x, f(x))$. Deretter må en rett linje tegnes mellom punktene. Det er dette Adu-Gyamfi et al. (2012) kaller plotting av punkter. Overgangen fra tabell til funksjonsuttrykk krever at elevene klarer å utlede verdien til stigningstallet, a, og konstantleddet, b, fra tabellen. Hvis y-verdien til $x = 0$ er oppgitt i tabellen, kan konstantleddet leses rett fra tabellen. Uten denne verdien må derimot konstantleddet finnes på bakgrunn av stigningstallet og de andre y-verdiene i tabellen. Stigningstallet kan finnes ved å benytte to x-verdier med tilhørende y-verdier (se formel for utregning i kapittel 1.3 Begrepsavklaring vedrørende funksjonsbegrepet). Dette har Adu-Gyamfi et al. (2012) betegnet som kurvetilpasning. Her kreves det at elevene finner et tallmønster fra tabellen, samt at de har en forståelse av funksjonsuttrykket. Overgangen fra graf til tabell omfatter avlesning av x- og y-verdi i punkter på grafen, og dette betegnes av Adu-Gyamfi et al. (2012) som avlesning av ordnede par. Den andre overgangen fra graf, til funksjonsuttrykk, omhandler igjen at elvene må finne stigningstallet og konstantleddet til funksjonen og plassere disse verdiene inn i funksjonsuttrykket. Dette kaller også Adu-Gyamfi et al. (2012) kurvetilpasning. I overgangen fra funksjonsuttrykk til tabell må elevene regne ut tilhørende y-verdier til ulike x-verdier eller tilhørende x-verdier til forskjellige y-verdier, samt plassere disse i en tabell. Adu-Gyamfi et al. (2012) presenterer dette som dannelse av ordnede par. Den siste overgangen, fra funksjonsuttrykk til graf, kaller Adu-Gyamfi et al. (2012) skissering av funksjonsuttrykk. Her må elevene tegne en graf med stigningstall og konstantledd illustrert i funksjonsuttrykket, og mange elever går da via en tabell (overgangsrepresentasjon).

Tabell 1: Aktiviteter i overgangsverifiseringen. Hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2012, s. 162). Oppgavenumrene er henvisning til oppgavene som omhandler de bestemte overgangstypene i datainnsamlingen (se kapittel 3.4.1 Oppgaveheftet).

Fra \ Til	Tabell	Graf	Funksjonsuttrykk
Tabell		Plotte punkter (Oppg. 5)	Kurvetilpasning (Oppg. 2)
Graf	Avlede ordnede par (Oppg. 6)		Kurvetilpasning (Oppg. 4)
Funksjonsuttrykk	Danne ordnede par (Oppg. 1)	Skissere funksjonsuttrykk (Oppg. 3)	

2.4.3 Forskningsresultater til studien av Adu-Gyamfi et al.

I denne studien er spesielt forskningsresultatene til Adu-Gyamfi et al. (2012) viktige da studien bygger på deres forskning. Deres studie er bygget på bruken av verifiseringsmodellen (se kapittel 2.4 Verifiseringsmodellen) som analyseverktøy i analysen av elevers overgangsprosess til ulike representasjoner av funksjoner. De avdekket de tre feilkategoriene som presenteres i kapittel 2.4.1 Tre overgangsfeil. Undersøkelsen ble gjennomført med 43 matematikkstudenter ved et universitet i USA. Studentene skulle besvare seks oppgaver som omfattet de seks overgangsprosessene beskrevet i kapittel 2.4.2 Overgangene i denne studien. Gjennom studien ønsket de å finne svar på hvilke elementer ved overgangsprosessen som er misforstått av studenter i overgangen mellom ulike representasjoner tilhørende lineære funksjoner. Konklusjonen var at alle overgangsfeilene kunne betegnes som implementeringsfeil (33 % av feilene), tolkningsfeil (52 % av feilene) eller bevaringsfeil (15 % av feilene). I tillegg oppdaget de at overgangsfeilene forekom i et mønster. Blant annet ble det avdekket et mønster i tidspunktene de ulike feiltypene inntraff i overgangsprosessen. Først i prosessen var tolkningsfeil mest utbredt. Implementasjonsfeil forekom derimot med størst hyppighet i midten av prosessen, og skjedde følgelig som regel etter tolkningsfeil. I slutten av prosessen var det bevaringsfeil som var mest fremtredende.

Adu-Gyamfi et al. (2012) fant det også relevant å se på hvilke overganger som skapte mest utfordringer for elevene i sammenheng med type feil. Andelen feil innenfor de ulike overgangene vises i Tabell 2. Implementeringsfeil ble kun avdekket i overgangsprosesser hvor funksjonsuttrykk enten var start- eller målrepresentasjonen. Tolkningsfeil forekom i fem av overgangsprosessene. Det var kun overgangen fra graf til funksjonsuttrykk som ikke medførte en slik feil. I tillegg kom det fram at det var tabell som startrepresentasjon, enten til funksjonsuttrykk eller graf, som ga størst andel tolkningsfeil. Bevaringsfeilene derimot forekom kun når graf var målrepresentasjonen.

Tabell 2: Andelen feil i undersøkelsen til Adu-Gyamfi et al. (2012). Hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2012, s. 164).

Feiltype	Totalt	F til G	F til T	G til F	G til T	T til F	T til G
Implementasjonsfeil	33	4	10	10	0	9	0
Tolkningsfeil	52	7	7	0	11	17	10
Bevaringsfeil	15	12	0	0	0	0	3
Totalt:	100	23	17	10	11	26	13

F = funksjonsuttrykk, G = graf, T = tabell

3. Metode
I dette kapittelet skal valgene som er tatt begrunnes og metodene som er brukt i forbindelse med datainnsamling, samt bearbeiding og analyse av datamaterialet presenteres. Først presenteres valg av forskningsdesign med grunnlag i forskningsspørsmålet. Videre presenteres konteksten for undersøkelsen, datainnsamlingsmetodene, hvordan datamaterialet ble bearbeidet og analysert, etiske betraktninger som ble tatt og til slutt oppgavens validitet og reliabilitet.

3.1 Mål og forskningsdesign
Denne oppgaven har som hensikt å belyse hvilke overgangsfeil elevene eventuelt begår i overgangen mellom representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell, samt hva som skjer i overgangsprosessen hvis det oppstår en feil. Dette er innlemmet i forskningsspørsmålet: *Hvilke feil begås av en 1T-klasse i overgangsprosessen mellom ulike representasjoner for lineære funksjoner? Hva skjer i prosessen når det forekommer en overgangsfeil?* For å gjennomføre dette er det nødvendig å få et innblikk i elevenes overgangsprosess, og følgelig var det hensiktsmessig at elevene regnet oppgaver som omfattet disse overgangene (se kapittel 3.4 Datainnsamling). I tillegg, for å få et dypere innblikk i hva som skjedde i overgangsprosessen ved feil, ble intervju ansett som gunstig (se kapittel 3.4.2 Stimulert-gjenkallingsintervju). Dette ble gjennomført ved å intervjue én og én elev da fokuset var på hva den enkelte elev hadde tenkt og gjort, og ikke hva en diskusjon med andre elever kunne medføre. Undersøkelsen av elevers overgangsfeil studeres for å betrakte det i en norsk kontekst og da det mangler forskning på hvorfor overgangsfeilene forekommer (Adu-Gyamfi et al., 2012) anses dette som et bidrag til forskningsfeltet ved å studere hva som skjer i overgangsprosessen (se mer i kapittel 5.4 Studiens bidrag til forskningsfeltet).

Det ble ansett som gunstig å bruke en kvalitativ forskningsmetode til å svare på forskningsspørsmålet, da målet med kvalitativ forskning er å få tak i andre menneskers handlinger, meninger, tanker, kunnskap, følelser og opplevelser (Nilssen, 2012). I denne studien er målet å studere elevenes kunnskap eller evne til å gå mellom ulike representasjonsformer for lineære funksjoner, samt å studere hva de har gjort i overgangsprosessen. Kvalitativ forskning samler inn ulike biter som samlet danner et helhetlig bilde av det som studeres (Postholm, 2010), som i dette tilfelle vil være et bilde over elevenes overgangsfeil og overgangsprosess mellom representasjonene funksjonsuttrykk, graf og tabell.

Ved å se på hva som skjer i overgangsprosessen vil studien være prosessorientert, som er en vanlig tilnærming for kvalitative studier. Kvantitative studier er ofte mindre prosessorienterte, og fokuset i slike studier er ofte om det er et bestemt forhold eller hvor mye det forklares av andre variabler, i forhold til kvalitative studier hvor fokuset er på hvordan noe skjer (Robson & McCartan, 2015).

I tillegg, da forskningsspørsmålet etterspør hvilke overgangsfeil elevene begår og hva som skjer i prosessen ligger ikke svaret i numeriske data, men i verbale funn. Forklaringene til elevene var særdeles viktige for å få et innblikk i hva som skjedde i overgangsprosessen. Likevel ble det i studien generert noen numeriske resultater i form av tabeller (se kapittel 4.1 Et overblikk over elevenes overganger) for å gi et overblikk over elevenes overganger, men dette er ikke hovedfokuset. Det å presentere funnene verbalt, og i liten grad brukes numerisk data er en karakteristikk for kvalitativ forskning (Robson & McCartan, 2015).

3.2 Pilotprosjekt

Før denne studien ble det gjennomført et pilotprosjekt som ble brukt til forbedring av datainnsamlingen for å få data som bedre svarer på forskningsspørsmålet. I pilotprosjektet ble overgangsprosessen mellom funksjonsuttrykk og graf studert, og det ble brukt oppgavehefte og intervju som datainnsamling (Brøste, upublisert). Bruken av oppgavehefte og intervju ble ansett som gunstige datainnsamlingsmetoder da det ga nyttig informasjon vedrørende overgangsprosessen. Derimot ble det gjort noen modifiseringer. Blant annet ble det i denne studien brukt en egen kolonne til elevenes løsningsstrategi, noe som ikke ble ikke benyttet i piloten. På denne måten ble det tydeligere for elevene at de skulle vise hvordan de løste oppgaven. Videre ble hvilke oppgaver som ble benyttet og omfanget av hver overgang endret. Da det er seks overganger som ble studert i denne studien (se Tabell 1), og det kun var to overganger som ble studert i piloten, var det ikke mulig å ha like mange oppgaver per overgangstype som i piloten grunnet oppgavens omfang. Ved å ha én oppgave per overgangstype vil alle oppgavene bli vektlagt likt. Dette kan være problematisk hvis en av oppgavene er vanskeligere enn andre, men ved å velge oppgaver som tidligere har blitt brukt, enten av Adu-Gyamfi et al. (2012) eller i piloten, var målet å redusere slike utfordringer (se kapittel 3.4.1 Oppgaveheftet).

I tillegg ble pilotprosjektet brukt til å skaffe erfaring for gjennomføring av intervju. Fra intervjusituasjonen i piloten anses det som viktig å fokusere på hva elevene har gjort, og ikke hva de ville gjort når de på nytt ser på det. Videre ble erfaring om å sette opp stikkord, på forhånd av intervjuet, for hva eleven kunne beskrive som sin løsningsstrategi ansett som nyttig i intervjusituasjonen. Da kunne mulige løsningsstrategier utelukkes eller bekreftes. Det var derimot viktig at en forventet løsningsstrategi ikke påvirket tolkningen av intervjuene, og dette ble prøvd hindret ved å være bevisst på denne utfordringen og benytte respondentkontrollering (se kapittel 3.7.1 Kredibilitet).

3.3 Forskningsdeltakere

Studien ble gjennomført i en 1T-klasse på en relativt stor videregående skole i en stor norsk by. Ønsket om å gjennomføre undersøkelsen i en 1T-klasse kommer av at dette trinnets læreplan omfatter overganger mellom representasjoner, som er fokuset i studien. Den ene faglæreren var villig til å la sin klasse delta i undersøkelsen, og forskningsdeltakerne ble følgelig valgt på bakgrunn av dette. Dermed ble forskningsdeltakerne en 1T-klasse på 27 elever, hvor 21 av elevene var til stede da undersøkelsen ble gjennomført. Det var en relativt jevn fordeling av jenter og gutter som deltok i undersøkelsen.

3.4 Datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjennomført ved bruk av oppgavehefte (se Vedlegg A) og intervjuer med lydopptak. Begge disse innsamlingene skjedde i løpet av en uke, med to dagers mellomrom. Selve gjennomføringen av oppgaveløsningen ble gjennomført i elevenes klasserom og det var avsatt rundt 45 minutter til oppgaveregningen, mens intervjuet ble gjennomført i et grupperom nær klasserommet. Klasserommet og grupperommet ble valgt som sted for datainnsamlingen for at elevene skulle føle seg på hjemmebane (Sollid, 2013).

Det ble brukt to innsamlingsmetoder for å få et mer helhetlig bilde av elevenes overgangsprosess. Hovedtanken var at oppgaveheftet kunne være med på å besvare første del av forskningsspørsmålet: *Hvilke feil begås av en 1T-klasse i overgangsprosessen mellom ulike representasjoner for lineære funksjoner?* Dette ved å avdekke feil som kunne forekomme i overgangen, samt hvilke overgangstyper som var mest utfordrende. Intervjuet var ment for å kunne innhente mer detaljert informasjon vedrørende hva som skjedde underveis i overgangsprosessen, og følgelig svare på andre del av forskningsspørsmålet: *Hva skjer i prosessen når det forekommer en overgangsfeil?* Det er nettopp dette Kerlinger mener et intervju kan benyttes til, altså kunne gå mer i dybden på forskningsdeltakernes respons (i Cohen, Marion & Morrison, 2011). Intervju anses som den viktigste metoden innen kvalitativ forskning (Sollid, 2013), og intervju sørger for en større dybde i datainnsamlingen (Cohen et al., 2011). Ved å bruke intervju framfor spørreskjema, eller lignende datainnsamlingsmetoder hvor forsker ikke har mulighet til å kommentere eller stille spørsmål underveis, får forskeren mulighet til å følge opp interessante responser (Robson & McCartan, 2015). Gjennomføringen av pilotprosjektet avdekket også at intervju vedrørende elevenes besvarelser ga mer dybde ved at intervju kunne oppklare hvordan elevene hadde løst oppgavene der dette var usikkert. Intervjuene medførte at prosessen bak svarene kunne betraktes, og ikke kun svaret (Brøste, upublisert). I tillegg ved å bruke flere datainnsamlingsmetoder benyttes triangulering, som er viktig for oppgavens troverdighet (Guba, 1981), se mer om dette i kapittel 3.7 Validitet og reliabilitet.

3.4.1 Oppgaveheftet

Oppgaveheftet, som hele klassen besvarte, ble konstruert slik at elevene skulle gjennomføre overgangene mellom representasjonene funksjonsuttrykk, graf og tabell. Følgelig var det seks overgangstyper som måtte testes (se kapittel 2.4.2 Overgangene i denne studien), og dermed ble det benyttet én oppgave per overgangstype. Tabell 1 viser hvilke overgangstype de ulike oppgavene omfatter. Før utformingen av oppgaveheftet ble Adu-Gyamti et al. (2012) sin utforming av oppgaver studert, hvor de hadde delt hvert spørsmål inn i tre kolonner. Første kolonne bestod av spørsmålet og startrepresentasjonen, andre kolonne var tilegnet svaret og målrepresentasjonen, mens det i siste kolonne var laget plass til at elevene kunne vise sin løsningsstrategi. Dette ble funnet svært gunstig ved at det blir veldig tydelig for elevene at de skal vise sin løsningsstrategi, samt at svaret vil kunne komme tydelig fram. Dermed ble oppgavene i denne studien utformet på samme måte. I tillegg ble det presisert før utdeling av oppgaveheftet at elevene skulle vise hva de tenkte (løsningsstrategien), få fram utregninger og hvis de ikke klarte å komme fram til et svar kunne de gjerne skrive hva som var vanskelig. Ved å ta utgangspunkt i Adu-Gyamfi et al. (2012) sin studie ble det ansett som gunstig å benytte oppgavene de anvendte. Adu-Gyamfi ble kontaktet i forsøk på å få tilgang til oppgavene, men han hadde ikke oppgavene tilgjengelig lengre. Derimot er det presentert fire oppgaver i artikkelen som tar for seg overgangene funksjonsuttrykk til tabell, tabell til funksjonsuttrykk og funksjonsuttrykk til graf. Dermed ble tre av disse benyttet, da to av oppgavene omfatter samme overgang. De tre oppgavene hentet fra artikkelen er oppgave 1-3 i Vedlegg A.

I tillegg er det i forkant av denne studien gjennomført en pilotstudie hvor overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf ble studert i en annen 1T-klasse (Brøste, upublisert). Oppgaveheftet som da ble benyttet bestod av flere oppgaver for overgangen graf til funksjonsuttrykk. Gjennom dataanalysen i pilotstudien ble det observert at spesielt én av oppgavene ga mye nyttig informasjon, og denne oppgaven ble derfor også tatt i bruk i denne studien. Oppgaven fra piloten som omfatter overgangen fra graf til funksjonsuttrykk er oppgave 4 i Vedlegg A.

Videre skulle det benyttes oppgaver for overgangen mellom tabell og graf. Oppgaver som tar for seg slike overganger ble ikke presentert i artikkelen til Adu-Gyamfi et al. (2012). Heller ikke i piloten ble disse overgangene studert. Dermed ble det nødvendig å utvikle to oppgaver, disse er oppgave 5 og 6 i Vedlegg A.

3.4.2 Stimulert-gjenkallingsintervju

Etter at elevene hadde besvart oppgaveheftet ble det valgt ut representanter til intervju. For å kunne intervjue elevene måtte de ha levert et samtykkeskjema underskrevet av foresatte (se kapittel 3.6 Etiske betraktninger). Det var 14 av de 21 elevene som leverte samtykkeskjema, og det var blant disse at fem intervjudeltakere ble valgt. Utvelgelsen blant de 14 elevene ble gjort på bakgrunn av elevbesvarelsene som ble gjennomgått ved å betrakte svarene som rett (korrekt overgang), feil (feil i overgangen) eller ikke svart (har ikke gitt et svar) (se Tabell 3 i 4.1 Et overblikk over elevenes overganger). Oppgavene med feil overgang ble studert og det ble skrevet ned hva som var gjort rett og hva som var gjort feil i overgangsprosessen. Der det var usikkert hva som hadde skjedd i overgangen ble det skrevet mulig(-e) feilkilde(-r), som kunne kontrolleres gjennom et intervju. Hensikten med dette var å velge ut representanter til intervju som hadde begått feil i overgangsprosessen.

Målet med intervjuene var å avdekke hva som skjedde i overgangsprosessen når det forekom feil, følgelig ble det fokusert på elevenes løsningsstrategier, hva de gjorde og hva de tenkte. Grunnet gjenkallelsen av elevenes tankeprosess ved oppgaveløsningen betegnes dette som et stimulert-gjenkallingsintervju (Calderhead, 1981).

Da det i intervjuene var bestemte oppgaver som var i fokus, samt at målet var å avdekke løsningsstrategier, var det bestemte spørsmål som det var ønskelig å finne svar på, slik som hvordan bestemte oppgaver var løst. I tillegg ble det ansett som viktig å komme med oppfølgingsspørsmål der noe var uklart eller noe ble oppfattet som viktig å spørre om. Det var også ønskelig å kunne tilpasse rekkefølgen på spørsmålene underveis i intervjuene med grunnlag i samtalen. Dermed ble det ansett som gunstig å bruke et semi-strukturert intervju, hvor en intervjuguide fungerer som en sjekkliste for temaene som skal tas opp, men rekkefølgen og ordleggingen modifiseres ofte underveis i intervjuet med bakgrunn i flyten i intervjuet. I tillegg stilles det oppstillingsspørsmål som ikke er planlagt på forhånd (Robson & McCartan, 2015).

Intervjuguiden

Intervjuet ble innledet med en uformell prat. Deretter ble det gitt informasjon vedrørende intervjuets rammer (taushetsplikt, anonymitet og lydopptak) og intervjuets formål (se Vedlegg B). Informasjonen ble gitt for å forsikre at elevene visste hva de var med på, samt bekrefte at de fremdeles ville delta og at elevene var komfortable med lydopptak. Elevene ble også gitt mulighet til å stille spørsmål hvis noe var uklart. Deretter gikk intervjuet over til det faglige. Først ble det snakket litt løst om oppgavene for å innlede en samtale og ufarliggjøre intervjuet, samt at litt bakgrunnsinformasjon fra elevene kunne samles inn. De første konkrete spørsmålene, vist under, omhandlet stigningstall og konstantledd.

1) *Kan du skrive opp funksjonsuttrykket for en generell lineær funksjon?*
2) *Hva tenker du på hvis jeg sier stigning og stigningstall?*
3) *Hva tenker du på hvis jeg sier konstantledd?*

Målet med disse spørsmålene var å få en oppfatning av hva elevene kunne om funksjoner og hvilke begreper de kjente til tidlig i intervjuet. Da kunne begrepsbruken tilpasses og kunnskapen til elevene utnyttes videre i intervjuet. Deretter ble intervjuet brukt til å gå inn på bestemte oppgaver elevene hadde besvart. Da ble elevene bedt om å forklare hva han eller hun hadde tenkt og hvordan oppgaven ble løst. Dette ga et innblikk i løsningsstrategi, samt hva som gikk feil i overgangsprosessen, altså kunne dette brukes til å svare på den andre delen av forskningsspørsmålet: *Hva skjer i prosessen når det forekommer en overgangsfeil?* I tillegg ved å se på overgangsfeilenes natur vil det være lettere å finne hvilke overgangsfeil som begås, som er den første delen av forskningsspørsmålet. Videre ble det stilt oppfølgingsspørsmål hvis det ble oppfattet det som nødvendig. I intervjuene ble funnene oppsummert for å verifisere at elevene var enig i min tolkning, og til slutt ble det spurt om det var noe de ville legge til.

3.4.3 Forskerens rolle

Forskerens rolle er viktig i kvalitativ forskning, og det er viktig at forskeren skaper tillit og gode relasjoner med forskningsdeltakerne (Nilssen, 2012). Intervjuene ble innledet med en liten samtale vedrørende hva intervjuene skulle brukes til, samt at det viktigste var hva de hadde tenkt, ikke hvordan oppgaven burde løses. Dette ble gjort for å prøve å skape en viss grad av tillit og relasjon. På veien til intervjustedet ble det i tillegg snakket litt løst og intervjuet ble innledet med uformell prat. Det viktigste var at elevene følte seg trygge til å si hva de hadde tenkt og ikke ble stresset hvis de var usikre. Det ble derfor presisert underveis i intervjuene at de bare måtte ta seg god tid og at det gikk helt fint hvis de ikke husket hva de gjorde.

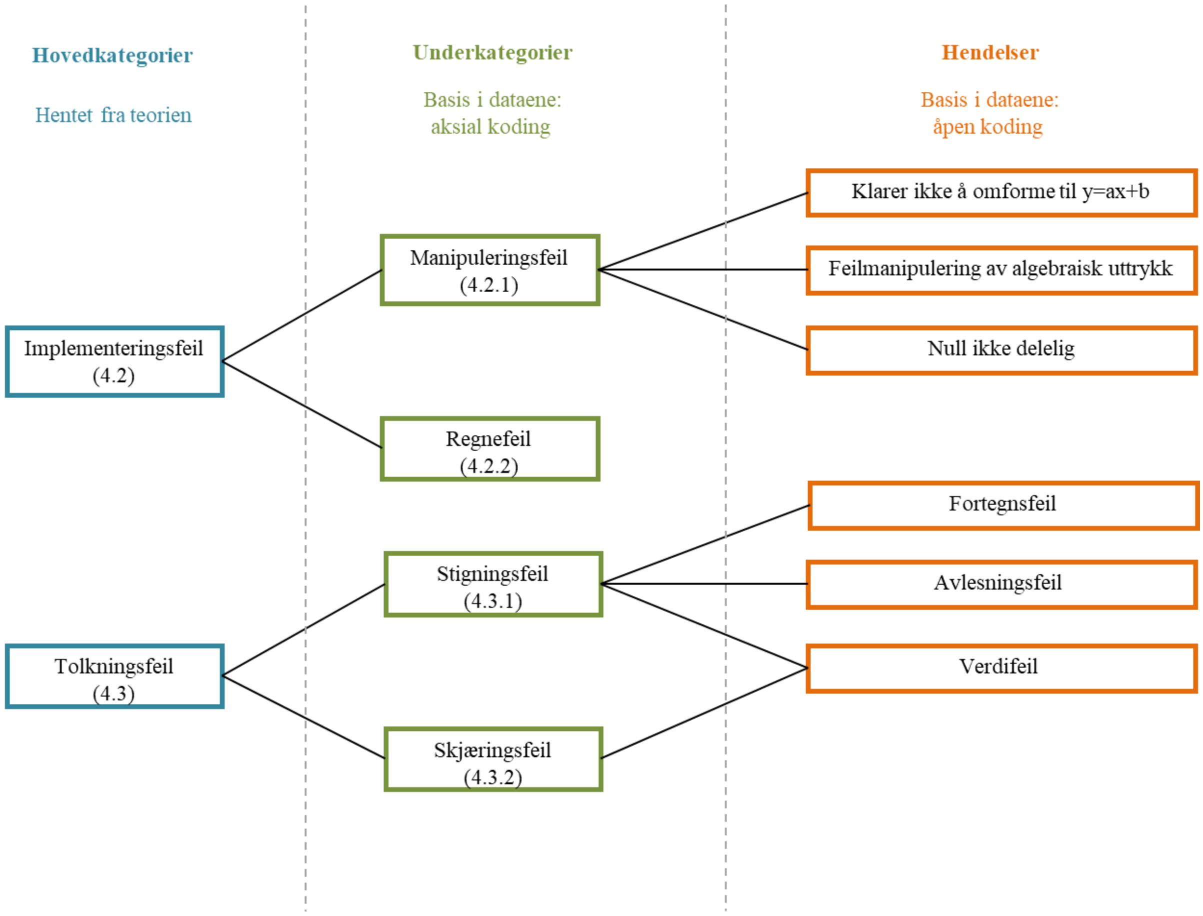
3.5 Transkribering og analysering av datamaterialet

Etter datainnsamlingen ble lydopptakene fra intervjuene transkribert. Dette omfattet å skrive ned det som ble sagt i intervjuene (lydopptakene) med en mest mulig korrekt gjengivelse (Nilssen, 2012), og på denne måten ble lydopptaket en muntlig tekst (Sollid, 2013). Til dette ble en transkriberingsnøkkel benyttet (se Vedlegg C). Etter transkriberingen ble datamaterialet, i form av elevbesvarelsene og transkriberingene, analysert for å danne kategorier.

3.5.1 Analyseprosessen

Analyseprosessen, hvor overgangsfeilene ble kategorisert, ble gjennomført i en todelt prosess hvor første fase ble gjennomført på bakgrunn av teorien, i form av verifiseringsmodellen og Adu-Gyamfi et.al. (2012) sine tre overgangsfeil (se kapittel 2.4.1 Tre overgangsfeil). I den andre fasen av prosessen ble kun dataene brukt som grunnlag for kategoriseringen. Kategorisering er å samle uttalelser i grupper som enten er forhåndsbestemt eller som oppstår underveis i analysen (Sollid, 2013).

Resultatet av analyseprosessen er vist under i Figur 4, der det er en inndeling i hovedkategorier, underkategorier og hendelser. Hovedkategoriene er hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2012) sin studie hvor de brukte verifiseringsmodellen til å avdekke at det finnes tre overgangsfeil; implementeringsfeil, tolkningsfeil og bevaringsfeil (Se kapittel 2.4.1 Tre overgangsfeil). Det ble ikke avdekket bevaringsfeil i elevenes overgangsprosess. I den andre fasen av analyseprosessen ble underkategoriene og hendelsene utviklet, med bakgrunn i dataene. Tallene i parentes er kapittelhenvisning til 4. Analyse, her blir dataene som ligger til grunn for plasseringen av overgangsfeilene i de ulike kategoriene presentert.

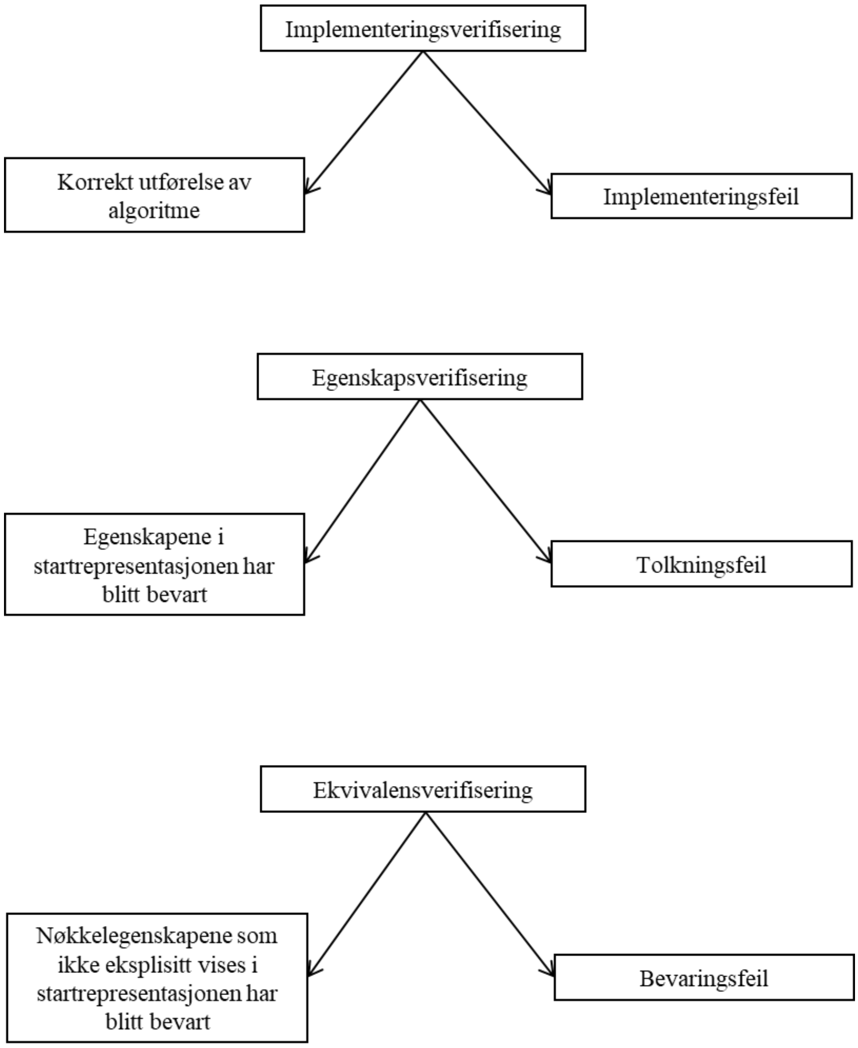


Figur 4: Kategoriseringen av overgangsfeilene med kapittelhenvisningen til kapittel 4. Analyse i parentes. Til venstre er hovedkategoriene, disse er hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2012). I midten er underkategoriene, mens til høyre er hendelsene, og disse har sin basis i datamaterialet.

Første fase i analyseprosessen - hovedkategoriene

Første del av analyseprosessen gikk ut på å identifisere overgangsfeilene i alle elevbesvarelsene og bruke det teoretiske rammeverket gitt av Adu-Gyamfi et al. (2012) ved å kategorisere overgangsfeilene etter de tre feiltypene: *implementering-*, *tolkning-* og *bevaringsfeil*. Til analysen ble besvarelsene til alle elevene studert, samt transkriberingene av lydopptak til de elevene som ble intervjuet. De oppgavene som ikke var besvart, ble ikke brukt da det ikke er mulig å vite grunnen til at de ikke besvarte. Derimot for de elevene som ble intervjuet ble det gjennom intervjuene avdekket hva som var utfordrende for elevene og følgelig kunne oppgavene som ikke var blitt besvart brukes i kategoriseringen (se kapittel 4.2.1 Manipuleringsfeil).

I første fase av analyseprosessen ble følgelig verifiseringsmodellen (se kapittel 2.4 Verifiseringsmodellen) brukt som analyseverktøy ved at det i hver oppgave ble gjennomført en implementeringsverifisering, egenskapsverifisering og ekvivalensverifisering (se kapittel 2.4 Verifiseringsmodellen). Som beskrevet i kapittel 2.4.1 Tre overgangsfeil tolkes verifiseringsmodellen slik at det i hvert av de tre verifiseringsstegene er to utfall, enten rett eller feil, og dette ble benyttet i analysen. Figur 5 viser hvordan verifiseringsmodellen ble brukt som analyseverktøy ved at det var tre uavhengige verifiseringer som ble gjennomført og hver av dem hadde to utfall. I implementeringsverifiseringen vil en verifisering som ikke avdekker noen feil bety at algoritmen er korrekt utført, men hvis en feil avdekkes vil feilen kategoriseres som en implementeringsfeil. Hvis det ikke blir avdekket en feil i egenskapsverifiseringen vil det bety at egenskapene i startrepresentasjonen er blitt bevart, men blir det derimot avdekket en feil vil denne kategoriseres som tolkningsfeil. Ingen feil i ekvivalensverifiseringen betyr at nøkkelegenskaper som ikke eksplisitt vises i startrepresentasjonen er bevart, men ved en avdekking av feil i denne verifiseringen vil overgangsfeil plasseres i bevaringsfeil. Det ble derimot ikke avdekket noen bevaringsfeil i denne studien (se Tabell 4 i kapittel 4.1 Et overblikk over elevenes overganger). Grunnlaget for dette analyseverktøyet presenteres i 2.4 Verifiseringsmodellen hvor hvert verifiseringssteg og de tre overgangsfeilene beskrives. Implementering- og tolkningsfeil danner hovedkategoriene i denne oppgaven, og alle overgangsfeilene som ble avdekket kunne betegnes som disse to feiltypene.



Figur 5: Illustrasjon av verifiseringsmodellen som analyseverktøy.

Andre fase i analyseprosessen - underkategoriene og hendelsene

Det ble ansett som nødvendig med en videre kategorisering etter første fase i analyseprosessen, hvor overgangsfeilene ble plassert i de tre feiltypene, da det ble observert stor variasjon i overgangsfeilenes natur innad i en hovedkategori. Følgelig ble det betraktet som nødvendig å lage et mer finmasket nett av kategorier under hovedkategoriene, og dermed ble det gjort en videre kategorisering av overgangsfeilene inn i underkategorier og hendelser (se Figur 4). Til den videre analysen ble overgangsfeilene til intervjukandidatene studert for å kunne gå mer i dybden på hva som skjedde i overgangsprosessen da det oppstod overgangsfeil ved å bruke både besvarelsene og transkriberingene.

I den andre fasen av analyseprosessen ble kategoriene (underkategoriene og hendelsene) kun etablert på bakgrunn av dataene, ikke fra eksisterende teori. Til denne analyseringen ble *åpen* og *aksial koding* brukt, som er begreper inspirert av forankret teorianalyse[7]. Forankret teori er en forskningsmetode hvor nye teoretiske ideer utvikles med basis i datamaterialet (induktiv tilnærming), det motsatte er å teste ut eksisterende teorier (deduktiv tilnærming) (Nilssen, 2012). I forankret teorianalyse vil kategorier utvikles på bakgrunn av datamaterialet, datamaterialet vil altså ikke kategoriseres inn i eksisterende kategorier (Robson & McCartan, 2015). Denne masteroppgaven er ikke basert på forankret teorianalyse da det blir benyttet allerede eksisterende kategorier: implementering-, tolkning- og bevaringsfeil (2.4.1 Tre overgangsfeil). Derimot kan begrepene åpen og aksial koding lånes fra forankret teorianalyse i den andre fasen av analyseprosessen da kategoriene ble utviklet fra dataene, og ikke med grunnlag i teorien.

Åpen koding

Den første kodingen som ble gjort for å danne kategorier under de tre hovedkategoriene var åpen koding. I en slik koding blir datamaterialet delt opp i adskilte deler ved å identifisere, kode, klassifisere og navngi de viktigste mønstrene i datamaterialet. I en slik fase vil det da dannes kategorier som videre skal bearbeides (Robson & McCartan, 2015), og i denne studien ble det studert hva som skjedde i overgangsprosessene ved feil overgang for så å navngi disse overgangsfeilene. Følgelig ble ytringer og fenomener satt navn på, og det er dette den åpne kodingen går ut på (Nilssen, 2012).

I den åpne kodingen ble det etablert sju kategorier: *klarer ikke å omformulere til* $y = ax + b$, *feilmanipulering av algebraisk uttrykk*, *null ikke delelig*, *regnefeil*, *fortegnsfeil*, *avlesningsfeil* og *verdifeil*. Seks av disse presenteres under hendelser i Figur 4 (til høyre), mens den siste, *regnefeil*, er plassert under underkategorier i Figur 4. Dette begrunnes under aksial koding. Dette er kategorier som går på trender hos enkeltelever eller hos flere elever. Følgelig kan hendelsene være begått av kun én elev, og det ble dermed ansett som mer passende å navngi de som hendelser fremfor kategori. Dataene som ligger til grunn for disse hendelsene vises i kapittel 4.2 Implementeringsfeil og 4.3 Tolkningsfeil.

[7] Torunn Klemp oversetter grounded theory analysis til forankret teorianalyse i Nilssen (2012).

Aksial koding

Etter åpen koding ble aksial koding brukt, og det handler om å koble sammen kategorier som er utviklet i den åpne kodingen (Nilssen, 2012; Robson & McCartan, 2015). Da ble hendelsene i Figur 4 studert for å se om noen kunne grupperes i samme kategori. Dette resulterte i at de sju kategoriene kunne plasseres i de fem underkategoriene (se Figur 4). Da ble hendelsene *klarer ikke å omformulere til* $y = ax + b$, *feilmanipulering av algebraisk uttrykk* og *null ikke delelig* gruppert sammen i underkategorien *manipuleringsfeil*. I tillegg ble kategoriene *fortegnsfeil*, *avlesningsfeil* og *verdifeil* plassert i underkategorien *stigningsfeil* og *skjæringsfeil*. Hendelsen *regnefeil* ble ikke plassert sammen med noen av de andre hendelsene i en kategori, og dermed ble *regnefeil* ansett som en underkategori.

Underkategoriene *manipuleringsfeil* og *regnefeil* hører til under implementeringsfeil, mens *stigningsfeil* og *skjæringsfeil* er underkategorier til tolkningsfeil. Da ingen av overgangsfeilene ble ansett som bevaringsfeil, vil det heller ikke være underkategorier eller hendelser under denne hovedkategorien (se Figur 4). I kapittel 4. Analyse vil kategoriseringen studeres nøyere og dataene som ligger til grunn for kategoriseringen vil presenteres.

3.6 Etiske betraktninger

I forskning, før gjennomføringen, underveis og i etterkant, er det viktig å gjennomføre etiske betraktninger, deriblant tilknyttet frivillig deltakelse og anonymitet (Robson & McCartan, 2015). Da forskningsdeltakerne i denne studien er under 18 år måtte foresatte gi godkjenning i form av et samtykkeskjema (se Vedlegg D) (Sollid, 2013), og studien ble meldt til NSD som ga tillatelse til å begynne å behandle personopplysninger. NSD tildelte studien prosjektnummer 56023 (se Vedlegg E). I samtykkeskjemaet ble det informert om studien, og etter utsendelse av samtykkeskjema fikk de foresatte og elevene tid på seg til å vurdere deltakelse. Formålet med studien, elevenes rolle og når data skulle slettes, ble igjen repetert for elevene før utdelingen av oppgaveheftet, samt at det ble spurt om elevene hadde spørsmål vedrørende studien og deres rolle. Det ble også understreket at det var frivillig deltakelse og at elevene kunne trekke seg når som helst uten begrunnelse både før utdelingen av oppgaveheftet og intervjuet. Lydopptaket ble heller ikke startet før elevene godkjente det. Ved at elevene fikk vite hva studien involverte, fikk tid til å vurdere deltakelse, det ble utlevert samtykkeskjema og det ble kontrollert om elevene hadde forstått forskningen og deres rolle, ble elevene gitt mulighet til å gi informert samtykke til å delta i studien (Robson & McCartan, 2015). Informert samtykke, altså at potensielle forskningsdeltakere gir sitt samtykke etter at forskeren har informert om prosjektet, er noe forskeren må innhente ifølge personvernombudet (Sollid, 2013). For at elevene skal betraktes som frivillige deltakere må elevene gi samtykke (Robson & McCartan, 2015). Siden det ble presisert flere ganger for elevene at de kunne trekke seg når som helst, samt at deltakerne måtte gi informert samtykke ble kravet om frivillig deltakelse prøvd bevart.

I tillegg til frivillig deltakelse er det viktig å gi forskningsdeltakere anonymitet (Robson & McCartan, 2015). For å bevare personvernet til deltakerne ble alle navnene til elevene anonymisert, og det blir dermed brukt pseudonymer i oppgaven. I studien var det noen elever som ikke var etnisk norske, men grunnet anonymitet har disse elevene blitt tildelt etnisk norske navn, da etnisitet ikke er avgjørende for studien. Skolens navn blir heller ikke benyttet for at å unngå at elevene kunne bli identifisert, da det er viktig at tilleggsinformasjon som kan føre til identifikasjon av deltakerne utover deres navn ikke publiseres (Robson & McCartan, 2015). I tillegg, som det kommer fram i prosjektvurderingen fra NSD (se Vedlegg E), omfatter anonymisering at forsker må slette direkte identifiserbare opplysninger som navn, slette indirekte opplysninger slik som skole, lærer, alder og kjønn, samt slette lydopptak. Derfor slettes alle identifiserbare opplysninger som koblingsnøkkelen mellom navn og pseudonymer. Kjønn ble ikke ansett som nødvendig å anonymisere da klassen bestod av en blanding av jenter og gutter, på lik linje med de fleste 1T-klassene i Norge, og det vil da ikke være mulig å bruke dette til å identifisere klassen og deltakerne. I tillegg vil alle lydopptak slettes. Slettingen vil bli gjennomført senest 15.08.18 ved prosjektslutt.

3.7 Validitet og reliabilitet

I tillegg til at forskeren må ta etiske betraktninger, burde forskeren også etterstrebe å øke studiens validitet og reliabilitet. Cohen et al. (2011) presenterer at validitet og reliabilitet er begreper som både kan anvendes i kvantitativ og kvalitativ forskning. Derimot vil det variere hva som legges i begrepene etter hvilken forskningsmetode som anvendes. Lincoln og Guba (1985) er blant dem som har funnet det gunstig å bruke andre kriterier for validitet og reliabilitet i kvalitativ forskning for å øke forskningens troverdighet, og disse er *kredibilitet, overførbarhet, avhengighet og bekreftbarhet*. Kredibilitet omhandler om den rapporterte forskningen framstår sannsynlig og tillitsvekkende. Studiens overførbarhet avhenger av om funnene kan anvendes i andre situasjoner. Avhengighet vil si om forskeren vil få de samme resultatene hvis studien blir gjennomført på nytt med tilsvarende deltakere i samme sammenheng. Bekreftbarhet omhandler i hvilken grad man kan etablere at resultatene utelukkende kommer fra forskningsdeltakerne og forholdene i studien, og ikke andre faktorer slik som motivasjon, interesser og perspektiver. Dette kan blant annet gå på om forskerens fordommer påvirker analysen av dataene, og følgelig da også resultatene i studien (Guba, 1981).

De ovennevnte begrepene har en kobling til begrepene validitet, reliabilitet og objektivitet. Indre validitet omhandler hva som faktisk ligger til grunn for de resultatene som oppnås (Lincoln & Guba, 1985), og har sin parallell med kredibilitet (Cohen et al., 2011; Lincoln & Guba, 1985). Ytre validitet, også kalt generaliserbarhet, viser i hvor stor grad resultatene kan generaliseres eller overføres til andre tilfeller (Lincoln & Guba, 1985; Robson & McCartan, 2015). Ytre validitet har sin parallell med overførbarhet (Cohen et al., 2011; Lincoln & Guba, 1985). Reliabilitet omfatter hvor pålitelige dataene er (Christoffersen & Johannessen, 2012), og har sin parallell til avhengighet (Cohen et al., 2011; Lincoln & Guba, 1985). Objektivitet går på i hvilken grad forskningen er objektiv og ikke går på forskerens subjektive meninger og holdninger (Guba, 1981). Objektivitet har sin parallell med bekreftbarhet (Cohen et al., 2011; Lincoln & Guba, 1985).

En studie kan ikke oppnå fullstendig validitet eller reliabilitet, men det er et mål for forskerne å oppnå størst grad av det. Det er flere grep eller tiltak som kan gjøres for å oppnå dette (Cohen et al., 2011). Under presenteres de tiltakene som er gjort i denne studien.

3.7.1 Kredibilitet

For å øke kredibiliteten ble triangulering benyttet. Trianguleringen i denne oppgaven var bruk av flere datainnsamlingsmetoder; oppgavehefte og intervju (Cohen et al., 2011; Guba, 1981; Robson & McCartan, 2015). Triangulering kan heve kvalitetssikringen (Sollid, 2013), og vil også virke positivt på avhengigheten og bekreftbarheten. I tillegg ble elevene bedt om å bekrefte tolkninger av sine ytringer under intervjuene. Dette kan anses som en type respondentkontrollering[8], følgelig vil også dette være med på å øke kredibiliteten (Guba, 1981; Robson & McCartan, 2015).

[8] Oversettelse av Gubas (1981) av member checking.

Under denne studien har en lektor i matematikk gitt tilbakemeldinger på tanker, skriftlig materiale, analysering av data og resultater[9]. Slik respons vil øke oppgavens kredibilitet ved testing av forskers økende innsikt og eksponering av spørsmål tilknyttet studien (Guba, 1981). Denne responsen vil være viktig for kredibilitet, men også for de andre kriteriene for troverdighet.

3.7.2 Overførbarhet

I kvantitativ forskning er det som oftest stort fokus på både ytre og indre validitet (Cohen et al., 2011), som har sine paralleller med henholdsvis overførbarhet og kredibilitet (Guba, 1981). I kvalitativ forskning derimot vektlegges indre validitet, mens ytre validitet til tider kan være irrelevant, da målet ikke er å generalisere, men kun representere det fenomenet som blir undersøkt (Cohen et al., 2011). Dette stemmer bra overens med denne studien ved at det er brukt relativt få forskningsdeltakere, følgelig kan ikke denne studien brukes til å trekke slutninger vedrørende alle norske 1T-elevers overgangsfeil og overgangsprosess. En slik overføring vil ikke være mulig.

Dette kan også trekkes opp mot Firestone (1993) som presenterer tre typer generalisering. Den ene omfatter en ekstrapolering fra utvalget i studien til en større populasjon. Dette er utfordrende i kvalitativ forskning (Cohen et al., 2011) som beskrevet over. Derimot er analytisk generalisering, som er generalisering til en relevant teori, mer aktuell (Firestone, 1993). I denne studien er ikke målet å se om resultatene kan gjelde for alle 1T-elever (en større populasjon), men å se om tidligere funn underbygges av funnene i denne studien. Da det er teori som ble brukt til å analysere dataene i denne studien vil resultatene fra denne studien gå inn i et større bilde over overgangsprosessen og feilene som begås i overgangen. På denne måten vil overførbarheten øke.

I tillegg kan en beskrivelse av konteksten[10] styrke overførbarheten (Guba, 1981). I kapittel 3.3 Forskningsdeltakere blir det presentert hvem som er forskningsdeltakere og på hvilken type skole studien ble gjennomført på. Dette vil legge et grunnlag for at andre forskere kan se konteksten forskningen gjennomføres i. Oppgavene legger også grunnlaget for konteksten, da oppgavene og deres opphav presenteres vil følgelig overførbarheten kunne øke.

[9] Guba (1981) bruker begrepet peer debriefing vedrørende dette.
[10] Guba (1981) benytter begrepet thick description vedrørende dette.

I tillegg legger oppgavene grunnlaget for konteksten, og da oppgavene og deres opphav blir presentert vil også dette kunne øke overførbarheten. Funnene er avhengige av den konteksten der forskningen fant sted (Tjora, 2012), følgelig er det viktig at konteksten presenteres.

3.7.3 Avhengighet

Det som betraktes som mest betydningsfullt med tanke på avhengighet er at forskeren etterlater en beskrivelse av prosessen med datainnsamling og dataanalyse[11] (Guba, 1981). Denne beskrivelsen omfatter at forskeren har full oversikt over aktivitetene i gjennomføringen av studien. Dette inkluderer rådata, forskningsjournal og detaljer vedrørende dataanalysen. Målet med å etterlate en slik beskrivelse er at andre kan studere prosessen og hvilke tolkninger som ble gjort underveis (Robson & McCartan, 2015). Beskrivelsen av datainnsamlingen i denne studien består av transkriberingene av lydopptak, oppgaveheftet, intervjuguiden, samt at de viktigste elevbesvarelsene for resultatene vises i kapittel 4. Analyse. I tillegg presenteres det i dette kapittelet, 3. Metode, hvordan datainnsamlingen ble gjennomført, samt analyseprosessen.

3.7.4 Bekreftbarhet

Bekreftbarheten påvirkes av forskerens syn og holdninger, ved at disse kan påvirke hvordan forskeren studerer innsamlet data. Dermed vil det være viktig at forskeren er så nøytral som mulig (Guba, 1981). I intervjuet ble elevene bedt om å forklare hva de har tenkt og gjort, og underveis, hvis det var noe som opplevdes uklart, ble elevene bedt om å være mer eksplisitte, samt at det ble brukt respondentkontrollering. På denne måten ble det gitt mindre rom for tolkning, og nøytraliteten vil følgelig øke. Inkludering av forskningsdeltakernes respons på forskerens tolkning kan heve kvalitetssikringen (Sollid, 2013). Videre vil diskusjonen av dataanalysen og etterfølgende resultater med overnevnt lektor, virke som en sikring på at det er dataene som har medført tolkningene i studien, og ikke forskers egne tanker og følelser. Dette vil kunne fremme bekreftbarheten (Guba, 1981).

[11] Guba (1981) benytter begrepet audit trail vedrørende dette.

4. Analyse

I dette kapittelet vil resultatene av analysen presenteres. Først presenteres et overblikk over elevenes overganger ved å se på hvor mange av elevene som gjorde feil i overgangsprosessen, andelen overgangsfeil begått av elevene innen hver hovedkategori, samt andelen feil begått av intervjudeltakerne innen hver underkategori. Videre blir dataene som har ligget til grunn for kategoriseringen i hovedkategorier, underkategorier og hendelser (se Figur 4) presentert. Denne kategoriseringen besvarer første del av forskningsspørsmålet: *Hvilke feil begås av en 1T-klasse i overgangsprosessen mellom ulike representasjoner for lineære funksjoner?* Navngivningen på de ulike kategoriene er illustrerende for hva som har skjedd feil i overgangsprosessen, som er den andre delen av forskningsspørsmålet.

4.1 Et overblikk over overgangsfeilene

For å gi et overblikk over elevenes overganger blir det i Tabell 3 presentert for hver oppgavetype andelen som har klart hver enkelt oppgave og andelen oppgaver som har blitt ufullstendig fullført. Sistnevnte har videre blitt inndelt i to typer: feil i besvarelsen og ikke svart. Førstnevnte omfatter besvarelser hvor elevene har kommet fram til et svar, men har gjort noe feil i overgangen. Besvarelser som betraktes som ikke besvart er besvarelser hvor elevene ikke har skrevet et svar. Bokstavene F, T og G representerer henholdsvis funksjonsuttrykk, tabell og graf.

Tabell 3: Andelen oppgaver som elevene har gjort rett og ufullstendig innen de ulike oppgavetypene. Under ufullstendig kommer de overgangsfeilene som er begått feil og de besvarelsene som ikke har blitt besvart.
F = funksjonsuttrykk, T = tabell, G = graf.

Overgangstype:	Oppgave:	Rett:	Ufullstendig:	Feil:	Ikke svart:
F → T	1	74 %	26 %	26 %	-
T → F	2	67 %	33 %	19 %	14 %
F → G	3	48 %	52 %	19 %	33 %
G → F	4	57 %	43 %	29 %	14 %
T → G	5	90 %	10 %	5 %	5 %
G → T	6	81 %	19 %	19 %	-

Denne studien har avdekket at det er en relativt høy prosentandel av elevene i den utvalgte 1T-klassen som har gjennomført en ufullstendig overgangsprosess (se Tabell 3), da i form av at oppgavene ikke ble besvart eller at det ble begått overgangsfeil. For hver oppgavetype er det mellom 10 – 52 % ufullstendige besvarelser. Dette viser at det er utfordrende for elevene å gjennomføre overgangsprosesser mellom representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell.

I tillegg til at studien viser at overgangen mellom de tre representasjonene er utfordrende, kommer det også tydelig fram at noen av overgangene er vanskeligere enn andre (se Tabell 3). I overgangen mellom tabell og graf forekommer det betraktelig mindre overgangsfeil enn mellom funksjonsuttrykk og tabell, samt mellom funksjonsuttrykk og graf. Videre viser studien at det er i overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf at det forekommer flest overgangsfeil.

Videre ble andelen overgangsfeil innen hovedkategoriene og underkategoriene funnet. Andelen feil innen de tre hovedkategoriene vises i Tabell 4. Til dette ble de 28 overgangsfeilene som ble begått brukt, og til å avdekke disse feilene ble alle besvarelsene studert. I Tabell 5 vises antall overgangsfeil som har forekommet (ikke i prosent) under hver underkategori. Til dette ble de 17 overgangsfeilene begått av intervjudeltakerne brukt.

Tabell 4: Andelen implementering-, tolkning- og bevaringsfeil blant de 28 overgangsfeilene. F = funksjonsuttrykk, T = tabell, G = graf.

Type oppgave / Type feil	F → T	T → F	F → G	G → F	T → G	G → T	Totalt
Implementeringsfeil	10,71 %	-	21,43 %	-	-	-	32,14 %
Tolkningsfeil	7,14 %	14,29 %	7,14 %	21,43 %	3,57 %	14,29 %	67,86 %
Bevaringsfeil	-	-	-	-	-	-	-
Totalt	17,85 %	14,29 %	28,57 %	21,43 %	3,57 %	14,29 %	100 %

Tabell 5: Antall overgangsfeil av de 17 overgangsfeilene begått av intervjudeltakerne innen hver av underkategoriene. F = funksjonsuttrykk, T = tabell, G = graf.

Type oppgave / Type feil	F → T	T → F	F → G	G → F	T → G	G → T	Totalt
Manipuleringsfeil	2	-	4	-	-	-	6
Regnefeil	1	-	-	-	-	-	1
Stigningsfeil	-	3	1	3	1	-	8
Skjæringsfeil	-	1	1	-	-	-	2

Andelen implementering-, tolkning- og bevaringsfeil (se Tabell 4) viser til hvilke overgangsfeil som forekommer og hvilke overgangsfeil det forekommer mest av. Totalt var 32,14 % av overgangsfeilene begått av elevene implementeringsfeil, mens 67,86 % var tolkningsfeil. Det ble ikke avdekket noen bevaringsfeil. Det er tydelig at det er flest tolkningsfeil, følgelig på forskningsspørsmålet hvilke overgangsfeil som begås vil det kunne konkluderes med at det forekommer både implementeringsfeil og tolkningsfeil, men at det er flest tolkningsfeil som begås.

Antall overgangsfeil innad i de ulike underkategoriene (se Tabell 5) vil også svare på første del av forskningsspørsmålet, altså hvilke overgangsfeil som begås. Da kategoriene ble utviklet med grunnlag i dataene vil det følgelig være slik at alle underkategoriene er overgangsfeil som ble begått. Likevel kan det ses hvilke overgangsfeil det oppstår mest av, og som det kommer fram i Tabell 5 så er det flest manipulerings- og stigningsfeil.

Innad i en oppgave kan det forekomme flere overgangsfeil. Dette kan være feil innen samme hovedkategori eller ikke, og feilene kan være i ulike underkategorier. Med dette menes det eksempelvis at det kan forkomme både en implementeringsfeil og en tolkningsfeil i samme oppgave, eller en manipuleringsfeil og stigningsfeil (se Petters besvarelse på oppgave 3 i kapittel 4.2.1 Manipuleringsfeil og 4.3.2 Stigning- og skjæringsfeil). Da vil dette betegnes som to overgangsfeil. Følgelig ved konstruksjon av Tabell 4 og 5 ble det brukt antall overgangsfeil og ikke antall oppgaver som var feil utført.

4.2 Implementeringsfeil

I dette kapittelet presenteres overgangsfeilene som tilhører hovedkategorien implementeringsfeil, som vil si at det har forekommet en feil i en algoritme i overgangsprosessen (se Kapittel 2.4.1 Tre overgangsfeil). Feilene som presenteres her ligger til grunn for underkategoriene og hendelsene som anses som implementeringsfeil. De to underkategoriene under implementeringsfeil er *manipuleringsfeil* og *regnefeil* (se Figur 4). Manipuleringsfeil oppstår når en elev ikke vet hvordan et algebraisk uttrykk skal manipuleres eller manipulerer uttrykket feil, mens regnefeil forekommer når eleven gjør en feil i bruken av de fire regneartene. Forskjellen mellom disse kan framstå som litt utydelig, men gjennom presentering av resultater under, vil dette bli tydeligere.

4.2.1 Manipuleringsfeil

Manipuleringsfeil kan videre deles inn i hendelsene *klarer ikke å omformulere til y=ax+b*, *feilmanipulering av algebraisk uttrykk* og *null ikke delelig* (se Figur 4). Dataene som presenteres under ligger til grunn for denne underkategorien og hendelsene.

Klarer ikke å omformulere til y=ax+b

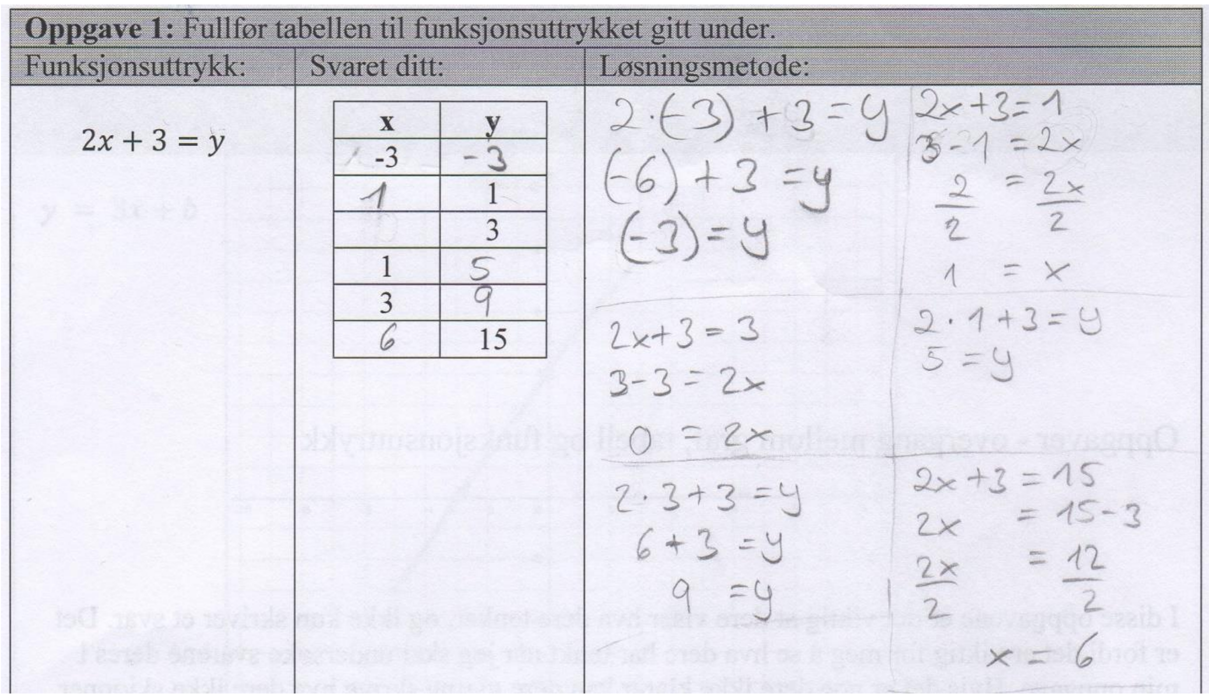
Hendelsen *klarer ikke å omformulere til y=ax+b* resulterte fra intervju med Mikkel, Lise og Trym. Ingen av disse hadde svart på oppgave 3, men gjennom intervjuene kom det fram hva som var utfordrende for dem. Til å illustrere utfordringen disse elevene møtte på brukes Mikkel sin forklaring på hva som var grunnen til at han ikke hadde oppgitt noe svar på oppgave 3:

97.	Mikkel:	Det er når det blir sånn 3y minus x, (forsker: mhm), så blir det litt sånn krøll, for når jeg tenker på y, så tenker jeg at den skal stå der (forsker: mhm), men jeg kunne jo ha flyttet den sånn som jeg tenker nå (forsker: mhm), men det blir liksom 3y, og da må jeg jo begynne å dele og sånn.
98.	Forsker:	Mhm, og det tenkte du ikke på når du gjorde det da?
99.	Mikkel:	Nei.
100.	Forsker:	Var det derfor at du ikke viste helt hva du skulle gjøre.
101.	Mikkel:	Ja, det ble litt mye tanker. Jeg måtte begynne å tenke. Også husket jeg ikke hvordan vi skulle gjøre det.

Her kommer det fram at Mikkel ikke viste hvordan han skulle løse oppgaven når funksjonsuttrykket ikke var representert på formen $y = ax + b$. Dermed klarte han ikke å besvare oppgaven. Dette er den samme utfordringen som Lise og Trym også møtte på. Dette legger dermed grunnlaget for denne hendelsen, og det anses som en manipuleringsfeil da elevene ikke klarer å manipulere funksjonsuttrykket slik at de får det på formen $y = ax + b$.

Feilmanipulering av algebraisk uttrykk

Lise og Petter begikk overgangsfeilen som klassifiseres som *feilmanipulering av algebraisk uttrykk*. Lises besvarelse (se Figur 6) og forklaring til hvordan hun har funnet x-verdien når y er 1 på oppgave 1 illustrerer dette:



Oppgave 1: Fullfør tabellen til funksjonsuttrykket gitt under.

Funksjonsuttrykk:	Svaret ditt:	Løsningsmetode:
$2x + 3 = y$	see table below	see working below

x	y
-3	-3
1	1
	3
1	5
3	9
6	15

$2 \cdot (-3) + 3 = y$
$(-6) + 3 = y$
$(-3) = y$

$2x + 3 = 1$
$3 - 1 = 2x$
$\frac{2}{2} = \frac{2x}{2}$
$1 = x$

$2 \cdot 1 + 3 = y$
$5 = y$

$2x + 3 = 3$
$3 - 3 = 2x$
$0 = 2x$

$2 \cdot 3 + 3 = y$
$6 + 3 = y$
$9 = y$

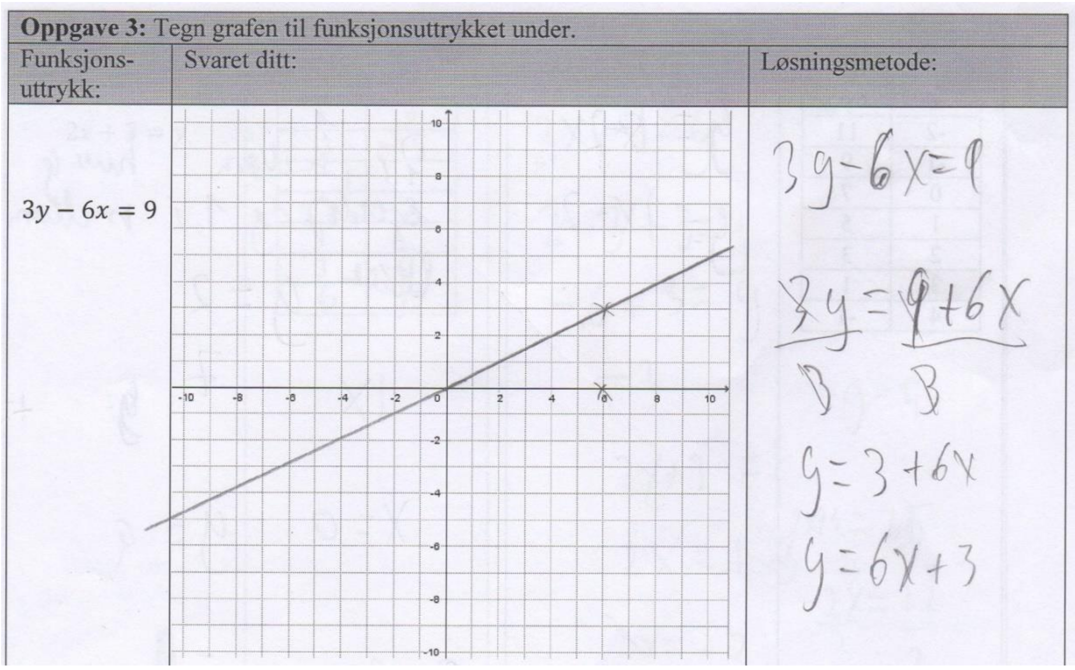
$2x + 3 = 15$
$2x = 15 - 3$
$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$
$x = 6$

Figur 6: Besvarelsen til Lise på oppgave 1.

115.	Lise:	Ja, da tenkte jeg 2x+3=1 (forsker: mhm), fordi y var 1 (forsker: mhm). Også prøvde jeg å finne ut x-en da, (forsker: mhm), hvor liksom ja.
116.	Forsker:	Vil du bare gå gjennom regningen din og se på den? For du har skrevet 2x+3=1 ja, også hva gjorde du videre da?
117.	Lise:	Ehh, [pause i 7 sek.]. Da prøvde jeg på å få x for seg selv (forsker: mhm), så da flyttet jeg 1-eren til andre siden.
118.	Forsker:	Ja, over til 3-eren på en måte?
119.	Lise:	Ja, ikke sant. Så da blir det jo minus, (forsker: mhm). Også hadde jeg jo 2x for seg selv, så da delte jeg den på 2 (forsker: mhm), slik at jeg kunne få x-en for seg selv.
120.	Forsker:	Mhm, men da flytter du 2x over til den siden [peker på høyre side av =] og 1-eren over til den siden [peker på venstre side av =].
121.	Lise:	Ja.
122.	Forsker:	Hva tenker du om fortegnene her?
123.	Lise:	Ja, jeg ser det.
124.	Forsker:	Hva da?
125.	Lise:	Egentlig burde det vært minus x i stedet for (forsker: ja), så egentlig så burde jeg har flyttet over til 1-eren (forsker: okei), for da får du -3, ikke sant, for da får du x som pluss (forsker: mhm). Og da kunne jeg tatt 2x dele på 2, og minus hva blir det da, minus 4, nei.

I besvarelsen kommer det fram at Lise satte inn x-verdier eller y-verdier inn i funksjonsuttrykket for å finne den tilhørende verdien som manglet i tabellen. Det er kun utregning av tilhørende x-verdi når y er 1 og når y er 3 som har skapt utfordringer for Lise. Sistnevnte tas opp under hendelsen *null ikke delelig*. Når y er 1 kommer det fram gjennom intervjuet og besvarelsen at Lise har gjort en feil i manipuleringen av uttrykket. Feilen har oppstått når Lise, ved bruk av hennes egne ord, «flytter over i ligningen». Feilen her skyldes altså at Lise trekker fra $2x$ fra venstre siden av likhetstegnet, men legger det til på høyre siden, følgelig blir fortegnene feil og hun fant dermed feil x-verdi.

Petter har begått en annen form for feilmanipulering. Dette illustreres gjennom besvarelsen (se Figur 7) og intervjuet til oppgave 3:



Figur 7: Besvarelsen til Petter på oppgave 3.

97. Petter: Oppgave 3, der har jeg liksom satt, der er jo funksjonen (forsker: mhm). -6x, nei 3y-6x, (forsker: mhm), der prøvde jeg, der har jeg regnet med sånn ligning (forsker: ja). Har laget en ligning (forsker: mhm), også har jeg prøvd å liksom fått y til å bli en funksjon (forsker: mhm), altså y er lik en funksjon (forsker: mhm). Da kom jeg fram til det der [peker på y =6x+3], (forsker: mhm). Er ikke helt sikker på om det er riktig, men det virket det (forsker: ja).

98. Forsker: Ja, hvis vi bare ser på regningen du har gjort da (Petter: mhm), så setter du opp 3y-6x =9 (Petter: mhm). Har du lyst til å forklare hva du gjør videre nedover i regningen?

99. Petter: Ja, jeg prøvde å få y-en alene (forsker: mhm). Også ser jeg at 9 er på andre siden her (forsker: mhm), og da er det jo bare å stryke dem mot hverandre. For 3 delt på 3 er jo 0 (forsker: mhm), og 9, nei 1, 9 delt på 3 er jo 3 for 3 ganger 3 er 9 (forsker: ja), og da får jeg 3 ikke sant (forsker: ja), da blir det y=3+6x.

100. Forsker: Mhm, hva med 6-tallet og 6x her? Du trenger ikke å forkorte noe der?

101. Petter: Jo kanskje jeg skulle ha gjort det? Nå som jeg ser på det, for jeg må jo dele på begge tingene hvis jeg deler på den ene. Så da blir det sikkert 2x da (forsker: mhm). 3+2x, blir kanskje riktig.

Petter forklarte at han kom fram til uttrykket $3y = 9 + 6x$, og at han deretter dividerte $3y$ og 9 på 3, men ikke $6x$ på 3. Da dette ble påpekt ble Petter usikker på om han hadde gjort rett eller ikke, og han vurderte at $6x$ også burde ha blitt dividert på 3. Grunnet feilmanipuleringen av uttrykket blir funksjonsuttrykket han bruker til å tegne grafen feil. Etter at han har regnet ut funksjonsuttrykket tegner han inn grafen i koordinatsystemet. Se mer om dette under *verdifeil* tilhørende underkategorien stigning- og skjæringsfeil (se kapittel 4.3.2 Stigning- og skjæringsfeil). Følgelig, som navnet tilsier, så er *feilmanipulering av algebraisk uttrykk* overgangsfeil hvor eleven begikk en feil i manipuleringen av et algebraisk uttrykk, og dermed anses dette som en manipuleringsfeil.

Null ikke delelig

Den siste hendelsen under manipuleringsfeil er *null ikke delelig*, og Lise begikk denne overgangsfeilen i oppgave 1 (se Figur 6). I intervjuet forklarer hun hvorfor hun ikke har skrevet en x-verdi tilhørende y lik 3 etter at det har blitt påpekt at hun i besvarelsen har regnet seg fram til $0 = 2x$:

97.	Lise:	Ja, men da hadde jeg bare 2x ikke sant, da hadde jeg ikke x (forsker: nei), og da viste jeg ikke hva jeg skulle gjøre, for du kan ikke dele 0 på 2 f.eks., altså 0 er jo 0 uansett, (forsker: ja). Da viste jeg ikke hvordan man kunne komme seg videre, for jeg tenkte at man kan ikke dele noe på 0, eller med 0 eller noe sånt.
98.	Forsker:	Ja, så du var usikker på om x skulle være 0 eller et annet tall?
99.	Lise:	Ja, så jeg bare stoppet (forsker: ja)[12].

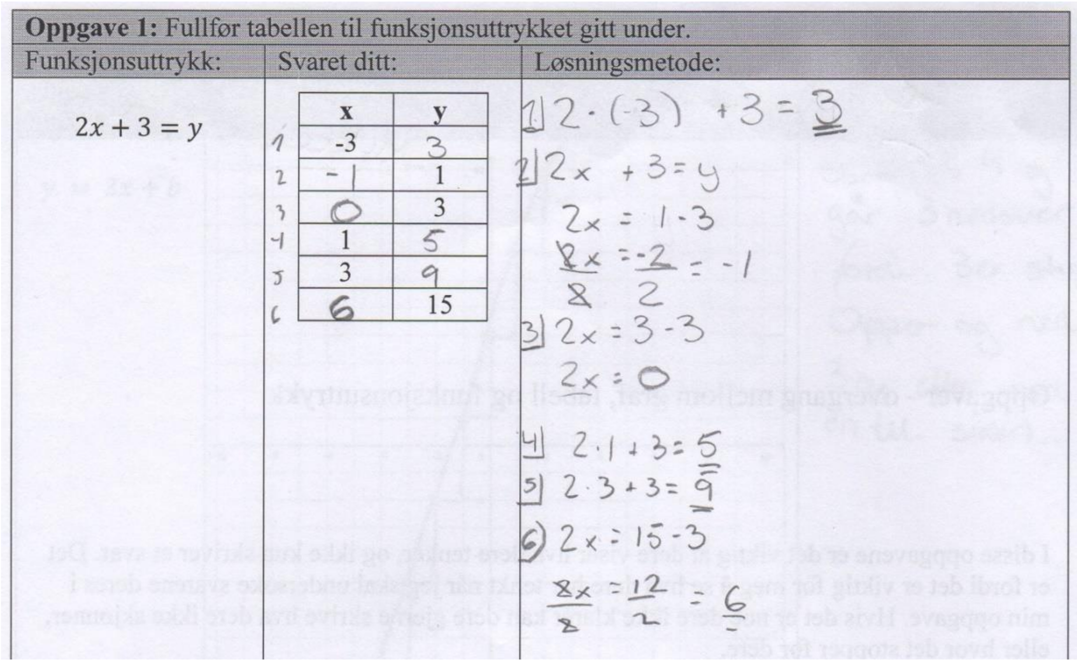
Her kommer det fram gjennom intervjuet at Lise tror at null ikke kan deles på et tall, altså at hun ikke kan dividere med 2 for å få $0 = x$. Lise gjorde alt rett fram til dette steget, men her viste hun ikke hvordan hun skulle manipulere uttrykket videre for å få en x-verdi, følgelig anses dette som en manipuleringsfeil.

4.2.2 Regnefeil

Den andre underkategorien under implementeringsfeil, regnefeil, ble ikke blitt delt videre opp i hendelser da denne underkategorien er så detaljert fra før av og ikke kan deles videre opp (se Figur 4). Det er fordi kategorien kun omfatter feil hvor addisjon, subtraksjon, multiplikasjon

[12] Unødvendig snakk som ikke tas med.

eller divisjon har gitt feil verdi. Mikkel sin besvarelse til oppgave 1 (se Figur 8) og intervju vedrørende hvordan han har fylt inn i tabellen ligger til grunn for denne underkategorien:



Oppgave 1: Fullfør tabellen til funksjonsuttrykket gitt under.

Funksjonsuttrykk:	Svaret ditt:	Løsningsmetode:
$2x + 3 = y$	see table below	1) $2 \cdot (-3) + 3 = 3$ 2) $2x + 3 = y$ $2x = 1 - 3$ $\frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ 3) $2x = 3 - 3$ $2x = 0$ 4) $2 \cdot 1 + 3 = 5$ 5) $2 \cdot 3 + 3 = 9$ 6) $2x = 15 - 3$ $\frac{2x}{2} = \frac{12}{2} = 6$

	x	y
1	-3	3
2	-1	1
3	0	3
4	1	5
5	3	9
6	6	15

Figur 8: Besvarelsen til Mikkel på oppgave 1.

83.	Mikkel:	Da har jeg sett hva y er, og x var 0 og y var 3, så da måtte jo konstantleddet være 3. Også gikk det jo, ..., også tok jeg og regnet ut i tillegg på siden, (forsker: mhm), og da tok jeg 2 ganger -3, så for å finne ut y da (forsker: mhm), for å finne ut y når x er -3, (forsker: mhm). For funksjonsuttrykket er jo 2x + 3 = y (forsker: mhm), så da tok jeg jo 2 ganger -3, for x er -3, også måtte jeg ta +3 i tillegg (forsker: mhm), og da ble det jo 3, på den første (forsker: mhm).
84.	Forsker:	Kan du bare se over den regningen en tur?
85.	Mikkel:	2 ganger -3 [Pause i 5 sek. mens Mikkel regner over]. Det skal være -3 ja.

Gjennom besvarelsen og intervjuet kommer det fram at Mikkel setter inn x- eller y-verdien som er oppgitt i tabellen og regner ut tilhørende y- eller x-verdi. Han regner rett utenom i den første utregningen. Der har han regnet ut $2 \cdot (-3) + 3$ og fått 3. Dette innser han at er feil i intervjuet, og han ser da at det skulle ha vært -3. Det vises altså at det må ha forekommet en regnefeil. Dette betraktes ikke som en manipuleringsfeil da uttrykket ikke manipuleres feil, men når det skal gjennomføres multiplikasjon og addisjon skjer det en feil som gjør at svaret fikk feil verdi.

4.3 Tolkningsfeil

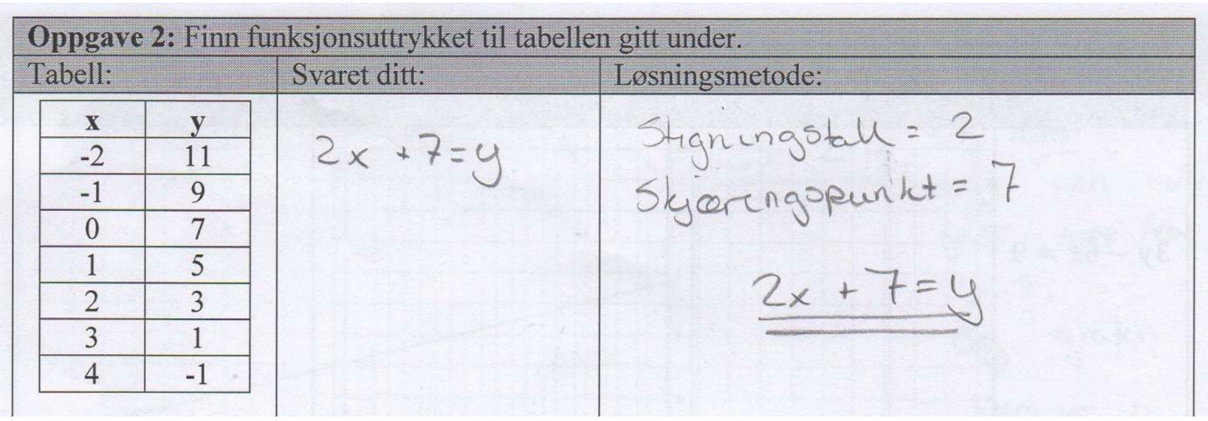
Overgangsfeilene som tilhører den andre hovedkategorien, tolkningsfeil, presenteres her, og feilene har oppstått fordi egenskapene til startrepresentasjonen ikke har blitt bevart i målrepresentasjonen (se kapittel 2.4.1 Tre overgangsfeil). Disse overgangsfeilene legger grunnlaget for underkategoriene *stigningsfeil* og *skjæringsfeil* (se Figur 4). Stigningsfeil inntreffer når eleven ikke har klart å finne rett stigningstall i funksjonsuttrykket eller har feil stigning på grafen. Skjæringsfeil forekommer hvis eleven ikke har rett konstantledd i funksjonsuttrykket eller at grafen skjærer y-aksen på feil sted.

4.3.1 Stigningsfeil

Stigningsfeil kan videre deles inn i hendelsene *fortegnsfeil*, *avlesningsfeil* og *verdifeil* (se Figur 4). Dataene som presenteres under legger grunnlaget for utviklingen av underkategorien stigningsfeil og hendelsene under denne underkategorien.

Fortegnsfeil

Hendelsen *fortegnsfeil* har blitt utviklet ved å studere Mikkels overgangsfeil på oppgave 2 og 5. På oppgave 2 brukes besvarelsen (se Figur 9) og Mikkels forklaring til å illustrere hendelsen *fortegnsfeil*:



Oppgave 2: Finn funksjonsuttrykket til tabellen gitt under.

Tabell:	Svaret ditt:	Løsningsmetode:
	$2x + 7 = y$	Stigningstall = 2 Skjæringspunkt = 7 $2x + 7 = y$

x	y
-2	11
-1	9
0	7
1	5
2	3
3	1
4	-1

Figur 9: Besvarelsen til Mikkel på oppgave 2.

32. Mikkel: Eh, det stod at det var 7, 0, (forsker: ja) at x-aksen var 0 og y var 7, så da tenkte jeg at det må være skjæringspunktet. Så da blir det 7 på skjæringspunkt (forsker: mhm). Også fant jeg ut at ... det steg med 2 på y-aksen, for det stod 11,9,7,5,3,2,1 (forsker: mhm), og da tenkte jeg at det må stige med to. Men .. det kunne jo faktisk gått nedover slik jeg ser det nå.

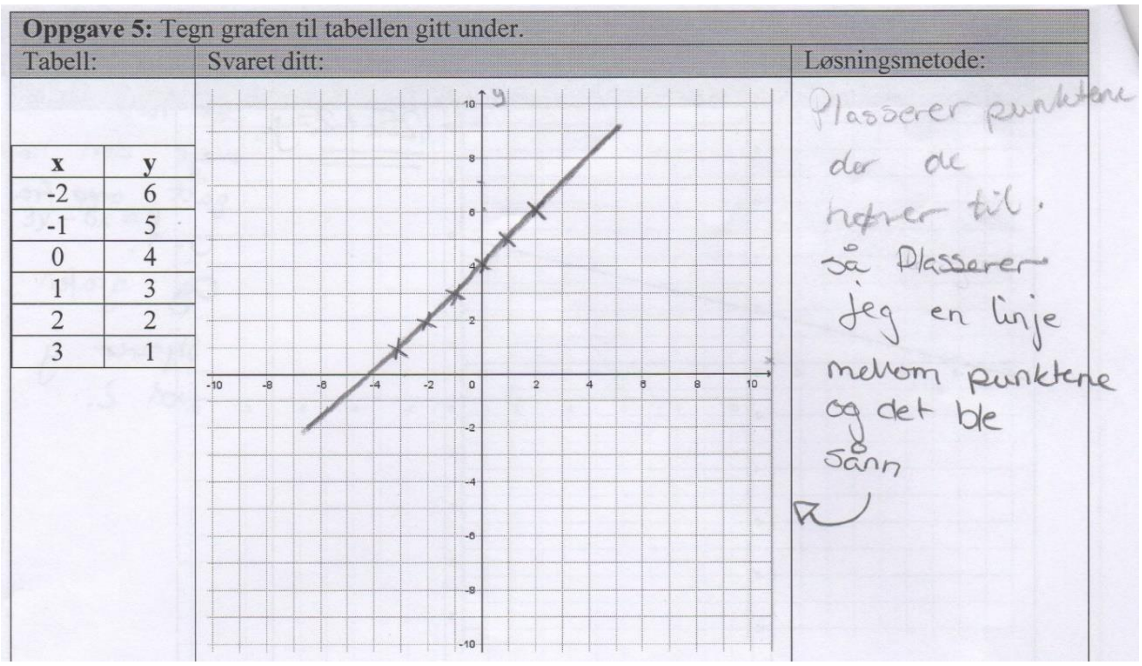
33. Forsker: Ja, hvorfor det?

34. Mikkel: Fordi, det starter på -2, (forsker: mhm) ..., nei starter på 4, så går det oppover (forsker: mhm). Ja det er litt vanskelig, det er usikkert. Jeg er litt usikker på.

35. Forsker: Ja, hvis det starter i 0 slik du snakka om, (Mikkel: mhm), (0,7)
36. Mikkel: Mhm, så blir det jo (0,7), også blir det -1 er 9, og da stiger det jo med to, (forsker: mhm), ..., så ja. ...
37. Forsker: Synes du det er litt vanskelig å vite om det er negativt eller positivt stigningstall?
Mikkel: ja, jeg synes
At det er litt vanskelig å se?
38. Mikkel: Ja.

Her kommer det fram at Mikkel forbinder begrepet stigningstall med parameteren a i $y = ax + b$, samt at han prøvde å finne stigningstallet ved å lese av tabellen. Det er her feilen oppstod. Mikkel er opptatt av å se etter *stigningen*, altså hvor mye y-verdiene i tabellen stiger. Følgelig peker ikke hans begrep «stigningstall» på samme matematiske objekt i de to representasjonene. I tabellen peker det på en stigning/økning mellom y-verdiene når x øker med én, og ikke en endring som både kan være positiv og negativ, mens det i funksjonsuttrykket peker på a. Følgelig skjedde det en overgangsfeil, og feilen betraktes som en *fortegnsfeil*, da det er fortegnet på stigningstallet som skaper utfordringen.

Mikkel har også begått en annen *fortegnsfeil*, og gjennom besvarelsen på oppgave 5 (se Figur 10) og intervjuet illustreres denne hendelsen:



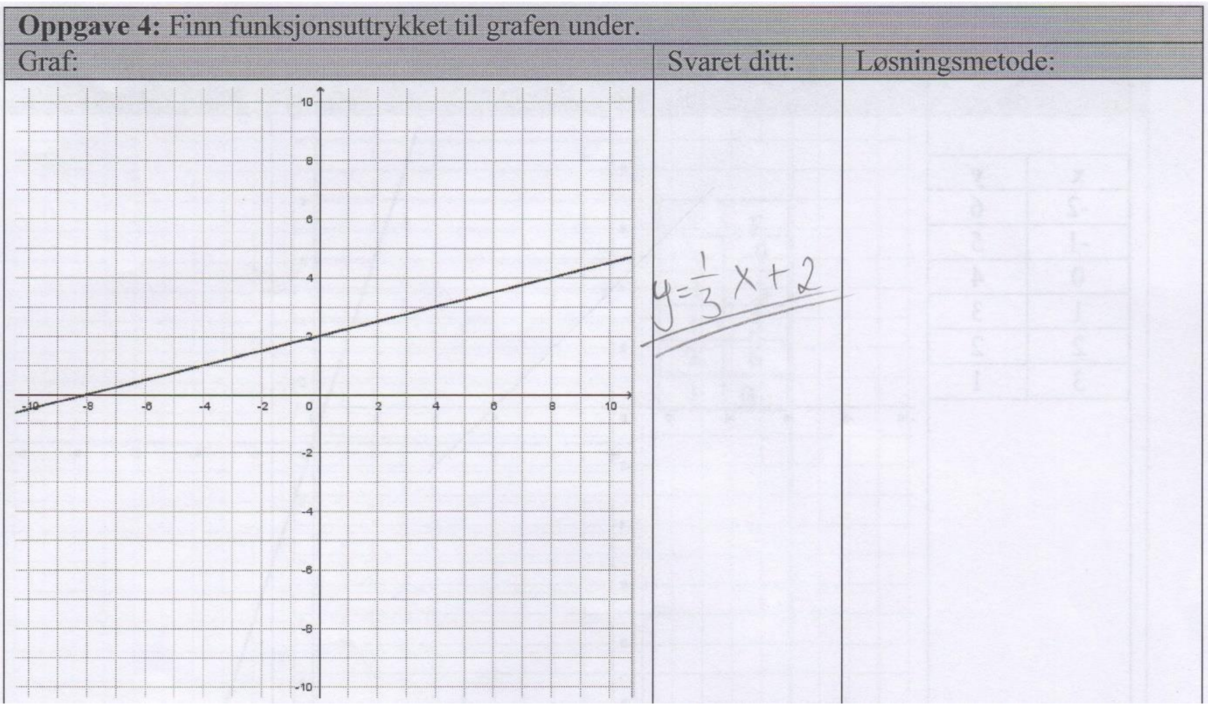
Figur 10: Besvarelsen til Mikkel på oppgave 5.

66.	Mikkel:	Ja, da tenkte jeg på, først på y-aksen (forsker: mhm), på skjæringspunktet, og tabellen som står her. Og da står det at x er 0, og da så jeg på grafen, (forsker: mhm), også så jeg at det var 0 ja, også tok jeg x, nei, eller y er lik 4, og da måtte jeg gå opp til 4, og det var 0 i tillegg, (forsker: mhm), så da setter jeg et kryss der for å markere hvor konstantleddet var. Også gikk jeg, så startet jeg med å ta -1 først, og da så jeg på x-aksen først, så gikk jeg en til venstre, for det er minus, (forsker: mhm), også gikk jeg opp til 3 (forsker: ja), eh, for det var, 3 der, nei 5 mener jeg, nei hvor gikk jeg, [pause i 5 sek], jeg ser faktisk at jeg har gjort feil her også. Andre veien skulle den stått.
67.	Forsker:	Ja, så igjen tror du det har gått litt fort i svingene at du egentlig vet hva du skulle ha gjort?
68.	Mikkel:	Ja.
69.	Forsker:	Finner punktene, du går til -1 (Mikkel: ja), også går du 5 opp?
70.	Mikkel:	Ja.
71.	Forsker:	Også setter du et kryss?
72.	Mikkel:	Ja.
73.	Forsker:	Er det det du på en måte har tenkt, men at det har skjedd noe?
74.	Mikkel:	Tenkt på 1 også blir det 5, også. (Forsker: ja). Snudd den omvendt.
75.	Forsker:	Ja, den går faktisk motsatt vei den gjør det (Mikkel: ja). Men da ser jeg på en måte hvordan du har funnet punktene (Mikkel: ja). Men synes du det på en måte er litt vanskelig med de negative tallene, *Mikkel: ja* at det fort blir litt sånn surr hvilken side av x-aksen det skal være på og sånn? *Mikkel: ja*
76.	Mikkel:	Ja, jeg synes det ja. Det blir liksom krøll.
77.	Forsker:	Ja, at det surrer seg litt liksom.

Fra besvarelsen kommer det fram at Mikkel har feil stigning på grafen, den skulle ha avtatt med én (dvs. stigningstall på -1), mens grafen til Mikkel øker med én (dvs. stigningstall på 1). Gjennom intervjuet kommer det fram at Mikkel skjønner at han har gjort feil, og at grafen skulle gått motsatt vei. Ved å se på besvarelsen og intervjuet kommer det fram at han ikke har tatt hensyn til fortegnene til x-verdiene, og bare startet på toppen av tabellen og sett på de negative verdiene som positive, og de positive verdiene som negative. Igjen er det tydelig at det er fortegnet som skaper en utfordring for Mikkel, og følgelig vil også denne overgangsfeilen betegnes som *fortegnsfeil*. Denne feilen kunne blitt ansett som en *verdifeil*, som presenteres senere, men siden det er tydelig at det er fortegnet som skaper problemer, har denne overgangsfeilen blitt plassert i denne hendelsen.

Avlesningsfeil

Den andre hendelsen under stigningsfeil er *avlesningsfeil*, og til grunn for denne hendelsen ligger Mikkels og Tinas besvarelse på oppgave 4 og intervjuene. Først forklarer Tina at hun har sett på hva som må legges til 2, konstantleddet, for å få y-verdien til grafen når x er lik 1, og at hun har kommet fram til at det er $\frac{1}{3}$, hun endrer så løsningsmetode. Denne forklaringen og besvarelsen (se Figur 11) til Tina illustrerer hendelsen *avlesningsfeil*:



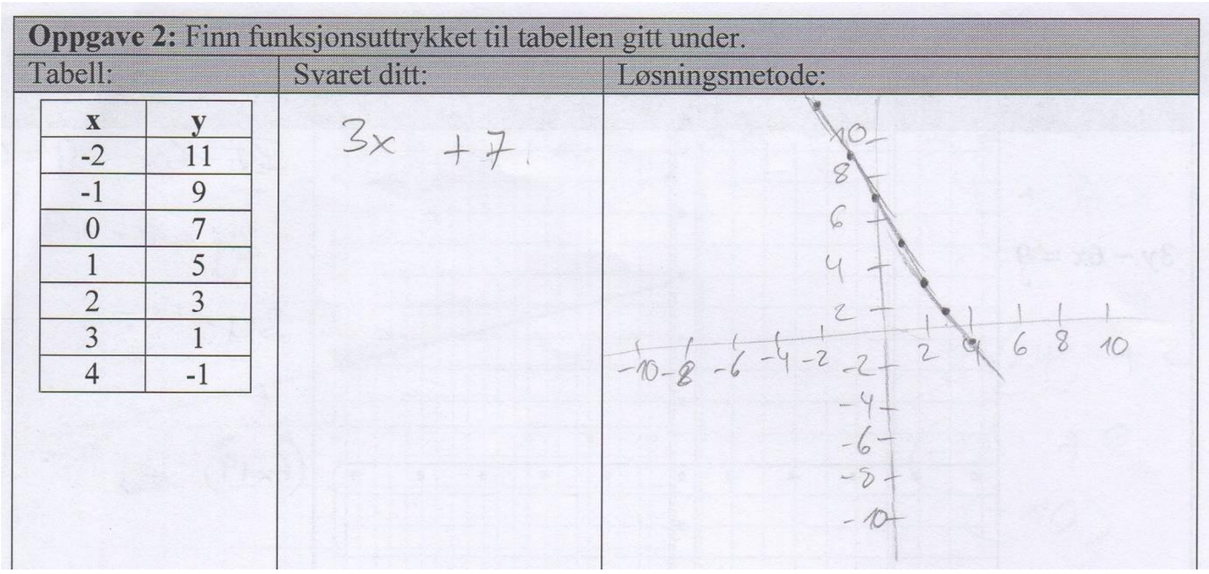
Figur 11: Besvarelsen til Tina på oppgave 4.

55.	Tina:	Jeg tror jeg leste av at det, ehm, ..., at den på en måte ble et helt tall (forsker: mhm) på 3 (forsker: åja). Ja, jeg tror jeg leste av sånn. Ehh.
56.	Forsker:	Men at det egentlig skulle, eller hva?
57.	Tina:	Ja, jeg tror det er ¼ som blir.
58.	Forsker:	Okei, så du har egentlig antall ruter bort, til du kan gå en hel opp?
59.	Tina:	Ja.
60.	Forsker:	Ja, også tenker du at antall ruter bort skal være under brøkstreken, er det sånn du tenkte?
61.	Tina:	Mhm.
62.	Forsker:	At du tenkte at det var 3 ruter bort også 1 opp?
63.	Tina:	Ja, det skal egentlig være ¼ (forsker: mhm) ser jeg. 4 ganger ¼ det blir 1 (forsker: ja) ikke sant +2 (forsker: ja), så det skal være ¼ ikke 1/3.

Fra besvarelsen kommer det fram at Tina har funnet feil stigningstall fra grafen. Gjennom intervjuet viser Tina at hun har sett etter hvilken x-verdi som gir at grafen har økt med én fra skjæringspunktet, (0,2), altså har 3 som y-verdi. Dette viser at Tina tenker rett, men hun har lest av at grafen har økt med én i x lik 3, og dermed fått stigningstallet $a = \frac{1}{3}$. Dette viser at hun har lest av aksene feil slik at stigningstallet ble feil, dermed kategoriseres denne overgangsfeilen som en avlesningsfeil. Mikkel har også begått samme feil, og har på lik linje med Tina lest feil av aksene når han skulle finne stigningstallet.

Verdifeil

Den siste hendelsen under stigningsfeil, *verdifeil*, ble utviklet ved å studere Lises overgangsfeil på oppgave 2 og 4. I oppgave 2 brukte Lise graf som overgangsrepresentasjon (se Figur 12). Hun har tegnet opp et koordinatsystem og plottet inn punktene fra tabellen og tegnet en graf mellom disse punktene. Grafen er unøyaktig, men fungerer som en riktig illustrasjon av tabellen. Lises bruk av grafen til å finne $a = 3$ illustrerer hendelsen verdifeil:



Oppgave 2: Finn funksjonsuttrykket til tabellen gitt under.

Tabell:	Svaret ditt:	Løsningsmetode:

x	y
-2	11
-1	9
0	7
1	5
2	3
3	1
4	-1

3x + 7

Figur 12: Besvarelsen til Lise på oppgave 2.

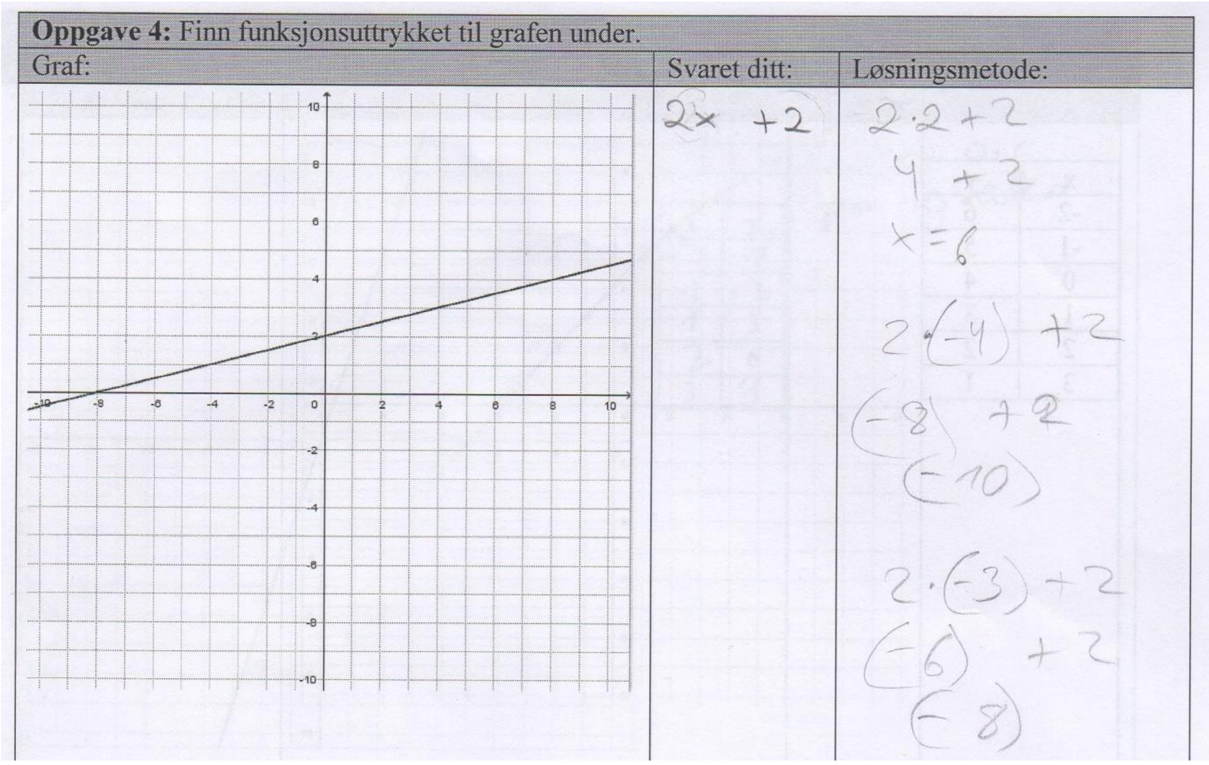
45. Lise: [13]Også tenkte jeg, okei, ja, jeg viste egentlig ikke helt hva jeg skulle gjøre med det første stigningstallet (forsker: nei), så jeg bare, hva var det jeg gjorde da? Altså jeg så at den krysset x-aksen på ca. på 3, (forsker: ja), så da tenkte jeg at jeg kan jo gå for det.
46. Forsker: Ja, så du brukte tallet der
47. Lise: Så jeg viste ikke helt (forsker: nei) hva som skulle skrives.
48. Forsker: Men det du tenkte var der grafen skjærer y-aksen, nei x-aksen.
49. Lise: Ja, ikke sant.

Her kom det fram at Lise tegnet grafen til tabellen, men hun klarte ikke å benytte seg av grafen til å finne stigningstallet. Hun brukte at stigningstallet er den x-verdien hvor grafen skjærer x-aksen, altså at grafen skjærer gjennom (a,0). Hun så at grafen skjærer x-aksen tilnærmet i x lik 3, følgelig brukte hun at $a = 3$. Her bruker Lise tallene fra grafen og

[13] Unødvendig snakk som ikke tas med.

koordinatsystemet, men hun bruker tallene feil. En verdifeil betraktes derfor som en feil bruk av verdier. Hendelsen plasseres under stigningsfeil da feil bruk av verdiene medførte feil stigningstall i funksjonsutrykket.

Lise gjorde også en annen verdifeil. Besvarelsen på oppgave 4 (se Figur 13) og forklaringen til hvordan hun fant stigningstallet $a = 2$ illustrerer hendelsen *verdifeil*:



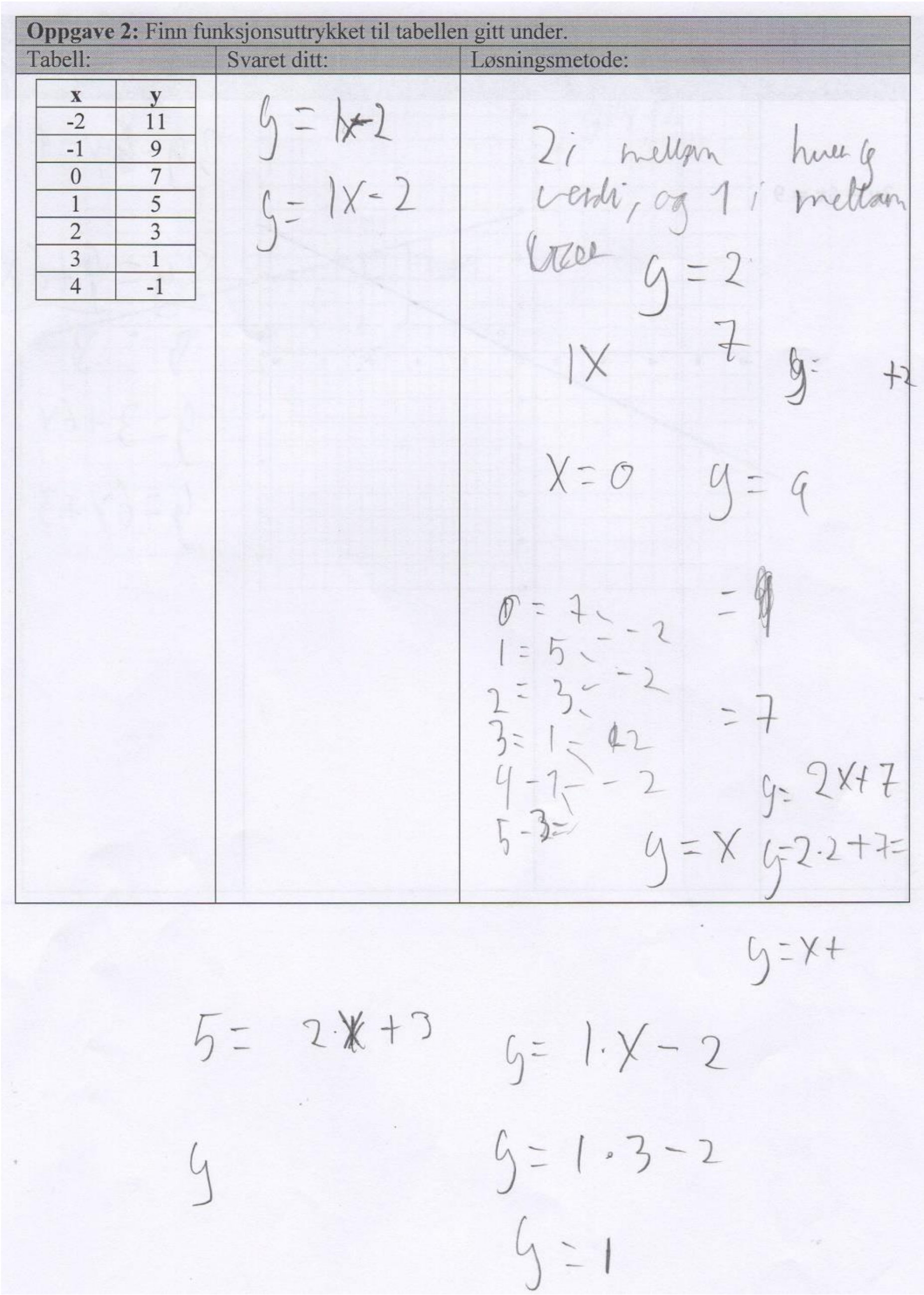
Figur 13: Besvarelsen til Lise på oppgave 4.

62.	Lise:	Jeg tenkte at det kan være, altså fordi den skjærer y-aksen på 2 da (forsker: ja), også så var det jo 2 opp fra 0 til 2 (forsker: mhm), så jeg bare okei 2x + 2.
63.	Forsker:	Ja, så da blir stigningstallet avstanden fra 0?
64.	Lise:	Ja, ikke sant.

Her kommer det fram at Lise viste at skjæringspunktet er 2. Dette punktet brukte hun så videre til å finne stigningstallet ved å se på avstanden fra 0 og opp til 2 på y-aksen. Siden avstanden er 2, brukte hun 2 som stigningstall. Nok en gang benyttet Lise seg av tallene til grafen og koordinatsystemet, men også i denne oppgaven brukte hun dem feil. Følgelig anses også dette som en *verdifeil*. Siden det er stigningstallet som blir feil, da verdiene ble brukt feil, anses dette som en stigningsfeil.

4.3.2 Stigning- og skjæringsfeil

I noen av oppgavene forekom det både stigning- og skjæringsfeil. Petter sin besvarelse på oppgave 2 og 3 består av begge feiltypene. Både i oppgave 2 og 3 anses feilene som *verdifeil*. Besvarelsen (se Figur 14) og forklaringen til hvordan han har kommet fram til funksjonsuttrykket i oppgave 2 illustrerer hvorfor overgangsfeilene plasseres i denne hendelsen:


Oppgave 2: Finn funksjonsuttrykket til tabellen gitt under.

Tabell: | Svaret ditt: | Løsningsmetode:

x	y
-2	11
-1	9
0	7
1	5
2	3
3	1
4	-1

Figur 14: Besvarelsen til Petter på oppgave 2.

28. Petter: Ja, for jeg var litt usikker først (forsker: ja), men jeg så liksom på grafen (forsker: mhm), hver gang x minska så ble det 2 mindre (forsker: mhm). Men jeg startet fra 0, for det var logisk, enklest for meg da (forsker: ja). Så hver gang det ble 1,2,3,4 (forsker: mhm) så ser vi på y-aksen at det ble 5, også ble det 3, også ble det 1 (forsker: ja), også ble det 0 til -1, derfor blir det -2 for hver gang. Så da laget jeg funksjonen y=1x-2, (forsker: mhm) tror det er riktig.

Petter skjønte selv at han hadde gjort feil ved at han satte inn x lik -1 i sitt funksjonsuttrykk, og oppdaget at dette ikke ble 9. Deretter forklarte hva han hadde gjort da han hadde kommet fram til funksjonsuttrykket $y = 1x - 2$, og denne videre forklaringen illustrerer hendelsen *verdifeil*:

35. Forsker: Okei, men hvordan har du kommet fram til, for du har skrevet 1x-2, (Petter: mhm). Sa du at 2-tallet kom fra forskjellen her (Petter: ja), at du hadde sett på at fra 11 til 9 så synker det med 2, og det er der du har -2 fra?
36. Petter: Mhm, kanskje jeg skulle satt -2x istedenfor.
37. Forsker: Ja, men hvor har du fått det 1-tallet foran x-en fra da?
38. Petter: Jeg vet ikke helt jeg, jeg tenkte bare at x-en ikke økte liksom.
39. Forsker: Mhm, ja at det var 1 mellom hver (Petter: ja), mellom hver x?
40. Petter: Mhm.
41. Forsker: Så da ser du egentlig at tallet foran x er endringen i x-verdiene her [peker på tallene i kolonnen til venstre i tabellen]?
42. Petter: Mhm.
43. Forsker: Og y, eller det tallet bak x her er endringen i y?
44. Petter: Mhm, det var det jeg tenkte ja, men jeg tror at det er feil ja.

Her kommer det fram at Petter så på endringene blant x-verdiene og y-verdiene i tabellen. Han har sett at y-verdiene synker med to, og har derfor satt konstantleddet som -2. Videre så han at endringen mellom x-verdiene i tabellen er 1, og har derfor satt stigningstallet som 1. Dette viser at han brukte tallene oppgitt i tabellen, men han brukte de feil for å finne stigningstallet og konstantleddet, følgelig anses dette som en *verdifeil*. Siden overgangsfeilen fører til feil stigningstall og kontstantledd anses dette som en stigning- og skjæringsfeil.

Petter begikk en *verdifeil* til, i oppgave 3. Etter at Petter hadde funnet funksjonsuttrykket $y = 6x + 3$ i oppgave 3 (se Figur 7), så skulle han tegne grafen til funksjonsuttrykket. Forklaringen til hvordan han gjorde dette etter at det ble påpekt at han hadde satt et kryss i 6 på x-aksen illustrerer hendelsen *verdifeil*:

63. Petter: Nei, da har jeg sett oi, det blir også feil, haha, jeg tenkte ikke så mye over det, men jeg har satt den på 0 også har jeg sett når 6-eren treffer 3-aksen, nei y-aksen treffer x-aksen (forsker: mhm), så har jeg satt et punkt mellom dem to. Men nå ser jeg kanskje at det blir feil. For jeg burde ha startet på 3, (forsker: mhm), også ville jeg ha krysset av 6x.

64. Forsker: Hva mente du nå at?

65. Petter: Liksom at jeg måtte sette inn en verdi for 6, f.eks. 6 ganger 1, 6 ganger 2 (forsker: ja), og satt inn sånne punkt.

66. Forsker: Ja.

67. Petter: Også kunne jeg laget sånn funksjon.

68. Forsker: Okei, men hva har du gjort nå? For jeg ser du har satt et kryss på x-aksen på 6-eren.

69. Petter: Ja, for det starter på 6 kanskje jeg tenkte da (forsker: mhm). Også 3-eren, 3-aksen, nei y-aksen er 3 har jeg skrevet her. At konstantleddet er 3 (forsker: mhm).

70. Forsker: Ja, så da finner du hvor det krysser, at grafen skal krysser i der det går opp fra 6 og der det går bort fra 3 (Petter: mhm), så setter du et kryss der?

71. Petter: Mhm.

72. Forsker: Så har den gått gjennom 0 her (Petter: mhm), er det fordi den alltid vil gjøre det eller?

73. Petter: Neei, jeg tror jeg har gjort feil, for den burde ha startet på 3.

Gjennom å studere besvarelsen (se Figur 7) og Petters forklaring ser det ut til at Petter har avsatt punktet $(6{,}3)$ i koordinatsystemet fordi 6 er stigningstallet og 3 er konstantleddet i funksjonsuttrykket han manipulerer seg fram til ($y = 6x + 3$). Altså har Petter tegnet en graf som går gjennom punktet (a, b). I tillegg går grafen gjennom origo. Her har Petter igjen brukt tallene, altså stigningstallet og konstantleddet som er i funksjonsuttrykket, men han har bukt dem feil. Følgelig anses dette som en *verdifeil*, og siden stigningen til grafen og skjæringen med y-aksen blir feil anses det som både en stigningsfeil og en skjæringsfeil.

Resultatene presentert under *verdifeil* i 4.3.1 Stigningsfeil og i 4.3.2 Stigning- og skjæringsfeil viser at en overgangsfeil kan anses som en *verdifeil* både når det har skjedd en stigningsfeil og når det har skjedd en skjæringsfeil (se Figur 4).

5. Diskusjon

Gjennom å studere besvarelsene og intervjuene med elevene er det tydelig at flere av elevene finner overgangsprosessen mellom de ulike representasjonene utfordrende. Som presentert i kapittel 4.1 Et overblikk over overgangsfeilene, er det en betydelig andel som har gjennomført en ufullstendig overgangsprosess (se Tabell 3). Dette stemmer overens med den tidligere forskningen som presenteres i kapittel 2.3 Eksisterende forskning for overgangen mellom ulike representasjoner for funksjoner, ved at også disse har en felles forståelse om at det er vanskelig for elevene å gjennomføre overganger mellom ulike representasjoner for funksjoner (Adu-Gyamfi et al., 2012; Elia et al., 2007; Gagatsis & Shiakallis, 2004; Galbraith & Haines, 2000; Knuth, 2000). Derfor er det interessant å se videre på elevenes overgangsfeil og overgangsprosesser.

I dette kapittelet skal resultatene diskuteres i lys av forskningsspørsmålet: *Hvilke feil begås av en 1T-klasse i overgangsprosessen mellom ulike representasjoner for lineære funksjoner? Hva skjer i prosessen når det forekommer en overgangsfeil?* Først vil det studeres hvilke overgangsfeil som ble begått av 1T-klassen i overgangsprosessen mellom de tre representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell for lineære funksjoner. Deretter vil hva som skjedde i overgangsprosessene ved overgangsfeil studeres i lys av hvilke overgangstyper de bestemte overgangsfeilene har forekommet i og mulige årsaker til elevenes overgangsfeil.

5.1 Implementering- og tolkningsfeil i overgangsprosessene

Som presentert i kapittel 3. Metode og 4. Analyse begikk 1T-klassen de to overgangsfeilene Adu-Gyamfi et al. (2012) har kodet etter. Gjennom bruken av verifiseringsmodellen som analyseverktøy (se kapittel 3.5.1 Analyseprosessen) ble det avdekket implementeringsfeil og tolkningsfeil (se Figur 4 og Tabell 4). Alle overgangsfeilene som ble begått av elevene kunne plasseres under én av disse overgangsfeilene. Det ble derimot ikke begått bevaringsfeil.

Videre gjorde bruken av intervju det mulig å undersøke overgangsprosessene og overgangsfeilene mer i dybden. Da kunne det utvikles nye kategorier (betegnet som underkategoriene og hendelsene i Figur 4) for hvilke overgangsfeil elevene begikk (se kapittel 3.5.1 Analyseprosessen). Det ble avdekket at implementeringsfeilene intervjudeltakerne begikk kunne deles inn i *manipuleringsfeil* og *regnefeil*. Videre ble det funnet at det var tre typer *manipuleringsfeil*: *klarer ikke å omformulere til* $y = ax + b$*, feilmanipulering av* *algebraisk uttrykk* og *null ikke delelig*. Tolkningsfeilene intervjudeltakerne begikk kunne også deles videre inn i to nye kategorier: *stigningsfeil* og *skjæringsfeil*. *Stigningsfeilene* ble videre sett på som *fortegnsfeil*, *avlesningsfeil* eller *verdifeil*. I tillegg ble også *skjæringsfeilene* som ble begått ansett som *verdifeil*. Hva som ligger til grunn for denne kategoriseringen blir presentert i neste delkapittel.

5.2 Overgangsprosessene hvor det forekom overgangsfeil

I overgangsprosessene hvor det forekom implementeringsfeil ble det begått en feil utførelse av en algoritme, mens når det forekom tolkningsfeil ble ikke egenskapene i startrepresentasjonen bevart (se kapittel 2.4.1 Tre overgangsfeil). Hva som skjedde i overgangsprosessen da det forkom en feil ble studert mer i detalj gjennom å utvikle underkategorier og hendelser. Navnene på disse kategoriene kan indikere hva som skjedde i overgangsprosessen (se Figur 4). I kapittel 4. Analyse presenteres data som la grunnlaget for kategoriseringen, samt en forklaring til hver kategori.

For å studere hva som skjedde i overgangsprosessen da det forekom implementeringsfeil er det nyttig å se på hendelsene under denne feiltypen. I overgangsprosessen hvor hendelsen *klarer ikke å omformulere til* $y = ax + b$ ble begått klarte ikke elevene å omformulere det algebraiske uttrykket oppgitt i oppgaven til denne formen. I *feilmanipulering av algebraisk uttrykk* gjennomførte elevene en feilmanipulering av et algebraisk uttrykk i overgangsprosessen, mens i *null ikke delelig* visste ikke eleven at null kan deles på et tall. Disse hendelsene har blitt plassert i underkategorien *manipuleringsfeil*, som følgelig omfatter overgangsfeil hvor elevene ikke vet hvordan de skal manipulere et algebraisk uttrykk eller har gjort en manipuleringsfeil i overgangsprosessen. I underkategorien *regnefeil* ble det gjort en feil i addisjonen eller multiplikasjonen i overgangsprosessen.

Videre er det nyttig å se på hendelsene under tolkningsfeil for å avdekke hva som skjedde i overgangsprosessene hvor denne feiltypen ble begått. I overgangsprosessen hvor hendelsen *fortegnsfeil* forekom gjorde fortegnene (i start- eller målrepresentasjonen) at elevene gjorde feil i overgangsprosessen. I hendelsen *avlesningsfeil* leste elevene av grafen og koordinatsystemet (startrepresentasjonen) feil slik at det medførte en overgangsfeil. I den siste hendelsen, *verdifeil*, brukte elevene verdiene oppgitt i startrepresentasjonen eller i overgangsrepresentasjonen feil i overgangsprosessen slik at det ble begått en feil. Disse hendelsene ble plassert i underkategorien *stigningsfeil* som omfatter feil (som er mer detaljert vist ved hendelsene) hvor elevene i overgangsprosessen fant feil stigningstall i funksjonsuttrykket (målrepresentasjon) eller tegnet en graf (målrepresentasjon) med feil stigning. Den andre underkategorien under tolkningsfeil, *skjæringsfeil*, er en overgangsfeil hvor det ble funnet feil konstantledd i funksjonsuttrykket (målrepresentasjon) eller at det ble tegnet en graf (målrepresentasjon) med feil skjæring mellom y-aksen og grafen. Det som skjedde i overgangsprosessene hvor det ble begått skjæringsfeil var at verdiene ble brukt feil, følgelig ble det betegnet som *verdifeil*, som er beskrevet over.

5.2.1 Tolkningsfeil er mest utbredt

For å studere overgangsprosessen er det nyttig å studere i hvilke overgangstyper feilene oppstod, da dette har betydning for hva som kreves i prosessen. Halvparten av overgangsfeilene ble begått i overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf. Det er et tydelig skille mellom hvilke av overgangstypene som medførte flest overgangsfeil (se Tabell 3 og 4). Mens overgangene mellom funksjonsuttrykk og graf har resultert i flest overgangsfeil, har overgangene mellom tabell og graf på sin side medført betydelig færre overgangsfeil (17,86 %). Tidligere forskning har avdekket at overganger med graf som representasjon skaper utfordringer for elevene i overgangsprosessen og at overgangen mellom graf og funksjonsuttrykk er utfordrende for elever (Elia et al., 2007; Gagatsis & Shiakallis, 2004; Galbraith & Haines, 2000; Knuth, 2000). Elia et al. (2007) avdekket i sin studie at spesielt overgangen fra funksjonsuttrykk til graf var vanskelig for elevene. Dette stemmer overens med resultatet i denne studien ved at det i denne overgangen ble begått flest overgangsfeil (28,57 % av overgangsfeilene) (se Tabell 4).

Vedrørende kategoriseringen av overgangsfeilene i implementering- og tolkningsfeil er sistnevnte mest utbredt da det oppstår flere tolkningsfeil (67,86 %), samt at de er fordelt utover alle oppgavetypene (se Tabell 4). Implementeringsfeil ble derimot kun avdekket i overgangsprosessen fra funksjonsuttrykk til tabell (10,71 % av overgangsfeilene) og fra funksjonsuttrykk til graf (21,43 % av overgangsfeilene) (se Tabell 4). Følgelig forekom implementeringsfeil i de overgangene hvor funksjonsuttrykk var startrepresentasjon.

Som i Adu-Gyamfi et al. (2012) sin forskning viser også denne studien at tolkningsfeil er mest utbredt. I tillegg er andelen implementering- og tolkningsfeil i denne studien relativt lik med deres funn. Hovedforskjellen ligger i at de avdekket bevaringsfeil, som ikke ble funnet i dataene i denne studien.

Adu-Gyamfi et al. (2012) avdekket, tilsvarende med denne studien, implementeringsfeil i overgangene med funksjonsuttrykk som startrepresentasjon. I tillegg avdekket de implementeringsfeil i overgangene hvor funksjonsuttrykk var målrepresentasjon. Dermed virker det som elevene i denne 1T-klassen synes det er mindre utfordrende å gjennomføre en overgangsprosess til funksjonsuttrykk enn fra funksjonsuttrykk med tanke på implementeringsfeil. Dette gjelder også ved å se på implementering- og tolkningsfeil samlet, altså at elevene begikk flere overgangsfeil i overgangene hvor startrepresentasjonen er funksjonsuttrykk, enn i overgangene hvor funksjonsuttrykk er målrepresentasjonen. Dette vises ved å se på andelen overgangsfeil innen hver oppgavetype (se Tabell 4), hvor 46,42 % av overgangsfeilene ble begått i overgangen fra funksjonsuttrykk, mens 35,72 % av overgangsfeilene forekom i overgangen til funksjonsuttrykk.

Vedrørende tolkningsfeil ble dette avdekket i Adu-Gyamfi et al. (2012) sin forskning i de fleste overgangstypene (se Tabell 2). Det som er ulikt med resultatene i denne studien er at de ikke avdekket tolkningsfeil i overgangen fra graf til funksjonsuttrykk, mens det i denne studien er i akkurat denne overgangen det oppstod flest tolkningsfeil. Hva som er årsaken til denne forskjellen er mest sannsynlig komplekst, og skyldes trolig flere faktorer. Datamaterialet i denne studien kan ikke brukes til å finne årsaker til denne forskjellen, men dette er noe som kan studeres videre. Følgelig legger dette funnet grunnlaget for videre studier.

Adu-Gyamfi et al. (2012) presenterer også at det er overgangsprosessen fra tabell som startrepresentasjon som er mest utfordrende for elevene i forhold til tolkningsfeil. Dette stemmer ikke overens med funnet i denne studien. De fleste tolkningsfeilene i denne studien oppstod da elevene gjennomførte overgangsprosessen med graf som startrepresentasjon (se Tabell 4). Her kommer det igjen fram en betydelig forskjell mellom studiene, men hva dette skyldes kan ikke besvares med datamaterialet i denne studien. Igjen er dette noe som kan studeres videre.

5.2.2 Overgangsprosessens natur påvirker overgangsfeilene

Ved å betrakte hvor overgangsfeilene forekom kan det videre studeres hva som kreves i disse overgangene. Det er urimelig å anta at det finnes én forklaring eller årsak til fordelingen av overgangsfeilene. Det er trolig et komplekst samspill mellom ulike faktorer, slik som undervisningen, lærebøkene og overgangsprosessenes natur. Dataene i denne studien kan ikke betrakte alle disse faktorene, men ved å studere hva som skjedde i overgangsprosessene ved overgangsfeil i lys av overgangstypene ble det mulig å avdekke mulige faktorer til fordelingen av overgangsfeilene. Det ble avdekket at hva som krevdes i overgangsprosessen kan påvirke andelen overgangsfeil innen hver overgangstype. For implementeringsfeil omhandler dette antall algebraiske steg som kreves i overgangsprosessen, mens andelen tolkningsfeil påvirkes av om det kreves mønstergjenkjennelse eller gjennomføring av en serie rett fram steg. Hva som ligger til grunn for denne antakelsen presenteres under.

Antall algebraiske steg

I samsvar med Adu-Gyamfi et al. (2012) virker det til at implementeringsfeil utvikler seg i takt med antall algebraiske steg assosiert med algoritmen. I oppgave 1 (fra funksjonsuttrykk til tabell) måtte elevene danne ordnede par ved å regne ut tilhørende x- og y-verdier til tallene i tabellen, som krevde seks utregninger. I tillegg, da x-verdiene skulle finnes var det nødvendig å manipulere uttrykket slik at x-en stod alene. Derav var det flere algebraiske steg i form av algebraisk manipulering og utregning som måtte gjennomføres i denne oppgaven. I oppgave 2 (fra tabell til funksjonsuttrykk) var det nødvendig å bruke verdiene i tabellen til å finne stigningstallet, a og konstantleddet, b. Konstantleddet kunne leses rett av tabellen, mens stigningstallet måtte utledes. For å finne stigningstallet kunne formelen $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ anvendes (se kapittel 1.3 Begrepsavklaring vedrørende funksjonsbegrepet). Det var ikke nødvendig med like mange algebraiske steg i denne oppgaven, men det ble likevel krevd algebraiske steg i form av utregning av stigningstallet. Oppgave 3 (fra funksjonsuttrykk til graf) krevde manipulering av det algebraiske uttrykket for å få det på ønskelig form, i tillegg ble det krevd at eleven måtte regne ut punkter for å plotte inn i koordinatsystemet eller bruke stigningstallet og konstantleddet til å skissere grafen. Dette vil følgelig være en oppgave med flere algebraiske steg i form av algebraisk manipulering og utregning av punkter. I oppgave 4 (fra graf til funksjonsuttrykk) ble det krevd få algebraiske steg, stigningstallet og konstantleddet kunne leses relativt rett av grafen. For å finne stigningstallet kunne elevene igjen anvende formelen $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. De to siste oppgavene krevde ingen algebraiske steg. Her kunne ordnede par leses rett av tabellen i oppgave 5 (fra tabell til graf) og plottes direkte inn i koordinatsystemet, mens i oppgave 6 (fra graf til tabell) kunne ordnede par leses rett av grafen og fylles inn i tabellen. Både i oppgave 1 og 3 ble det krevd flere algebraiske steg, i form av utregninger og manipulering av algebraiske uttrykk, og det er her implementeringsfeilene forekom. Derimot i oppgave 2, 4, 5 og 6 ble det krevd få eller ingen algebraiske steg, og her ble ingen implementeringsfeil avdekket. Følgelig virker det til at antall algebraiske steg har en sammenheng med antall implementeringsfeil.

Adu-Gyamfi et al. (2012) sin avdekking av implementeringsfeil i overgangene med funksjonsuttrykk som målrepresentasjon, og ikke bare i overgangene med funksjonsuttrykk som startrepresentasjon kan underbygge argumentet vedrørende antall algebraiske steg. Dette begrunnes med at det hos Adu-Gyamfi et al. (2012) ikke ble avdekket implementeringsfeil i overgangene mellom graf og tabell, som er de overgangene hvor det ikke krevdes algebraiske steg, mens det i de fire andre overgangene krevdes få eller mange algebraiske steg.

I tillegg kan suksessen i oppgave 5 og 6 begrunnes med forklaringen til Adu-Gyamfi et al. (2012) i deres studie vedrørende kravet om få steg i overgangsprosessen. Dette omfatter at det i de fire andre overgangene kreves flere steg i overgangsprosessen enn det gjør i de to ovennevnte oppgavene. Med dette menes det at blant annet i oppgave 3 måtte elevene manipulere uttrykket, danne ordnede par og plotte disse inn i koordinatsystemet (eventuelt å bruke stigningstallet og konstantleddet). Dette viser at det var tre steg som måtte gjennomføres i overgangsprosessen. Derimot i oppgave 5 trengte elevene kun å plotte inn punktene fra tabellen inn i koordinatsystemet i ett steg. Derav er antall steg i overgangsprosessen med på å belyse hvorfor det ikke forekom implementeringsfeil i overgangen mellom tabell og graf.

Etter analysen av overgangsfeilene og plasseringen av disse inn i hovedkategoriene ble besvarelsene til intervjudeltakerne kategorisert i underkategorier, og under implementeringsfeil er de fleste overgangsfeilene i underkategorien manipuleringsfeil (se Tabell 5). Dette kan komme av at algebraisk manipulering krever større grad av algebraiske ferdigheter enn ved addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon.

Mønstergjenkjennelse

Adu-Gyamfi et al. (2012) brukte egenskapstetthet[14] til å underbygge den største andelen overgangsfeil med tabell som startrepresentasjon i sin studie. Egenskapstetthet er en sammenligning av nøkkelegenskaper, karaktertrekk og/eller egenskaper iboende en gitt representasjon som gir unødvendig informasjon. Ved høy egenskapstetthet er det lite unødvendig informasjon, mens ved lav egenskapstetthet er det mer unødvendig informasjon. Tabell har lav egenskapstetthet, mens graf og funksjonsuttrykk har høyere. Dette begrunnes blant annet med at i en tabell kan skjæringspunktet med y-aksen være skjult blant andre verdier, mens skjæringspunktet med y-aksen og stigningen til grafen representert ved et funksjonsuttrykk vises direkte i funksjonsuttrykket og i en graf kan dette leses rett av. Følgelig argumenterer de for at overgangen fra tabell gir høyere andel overgangsfeil enn med graf eller funksjonsuttrykk som starterepresentasjon grunnet den lave egenskapstettheten til tabell. Dette kan til en viss grad korreleres til denne studiens resultater, men ikke utelukkende. Egenskapstettheten kan være med på å forklare den relativt høye andelen overgangsfeil i overgangen fra tabell til funksjonsuttrykk (14,29 %), men ikke den lave andelen overgangsfeil i overgangsprosessen fra tabell til graf (3,57 %), samt den høye andelen overgangsfeil i overgangen fra graf til funksjonsuttrykk (21,43 %). Det kan heller ikke gi en forklaring på hvorfor det har forekommet like mange overgangsfeil i overgangen fra tabell til funksjonsuttrykk som i overgangen fra graf til tabell (14,29 %) (se Tabell 4). Dermed finnes ikke egenskapstettheten som en dekkende forklaring til fordelingen av overgangsfeilene innen tolkningsfeilene.

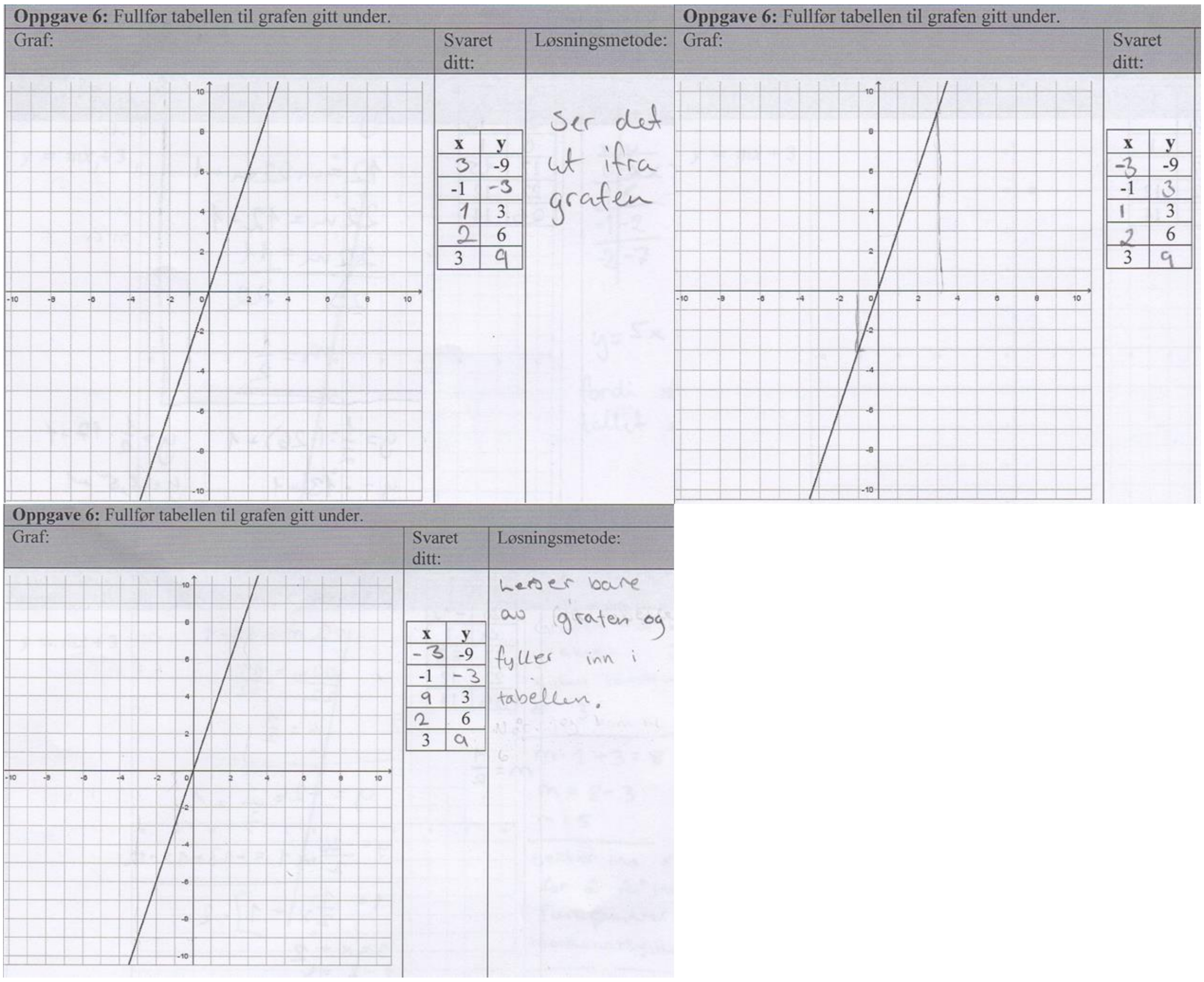
Den høye andelen feil i overgangsprosessen med graf som startrepresentasjon og funksjonsuttrykk som målrepresentasjon kan ifølge Leinhardt, Zaslavsky og Stein (1990) skyldes hva som kreves i overgangsprosessen. Det er i denne prosessen nødvendig for elevene å gjenkjenne et mønster i grafen for å finne stigningstallet og konstantleddet i funksjonsuttrykket. Dette betrakter de som vanskeligere enn å gjennomføre en serie av relativt rett fram steg slik som kreves i den motsatte overgangen (funksjonsuttrykk som startrepresentasjon og graf som målrepresentasjon). I denne overgangsprosessen må elevene danne ordnende par, plotte dem inn i koordinatsystemet og koble dem sammen med en rett linje, og dette er steg som er relativt rett fram. Dette stemmer godt overens med resultatet i denne studien da det er rundt en tredobling i andelen tolkningsfeil i overgangen fra graf til funksjonsuttrykk i forhold til motsatt vei.

[14] Min oversettelse av attribute density

Den betydelige andelen elever som sliter med overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf kan sees opp mot Knuth (2000) sin studie. Knuth (2000) presenterer at Schoenfeld, Smith og Arcavi anser overgangen fra ligning til graf som rett fram, og at det er forventet at elevene skal mestre koblingen mellom disse. Likevel viste studien til Knuth (2000) at elever sliter med denne koblingen. Dette kan sees opp mot resultatet i denne studien ved at den betydelige andelen overgangsfeil i overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf kan skyldes mangelen på å se sammenhengen mellom representasjonene. Denne studiens funn vedrørende at overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf medfører en betydelig andel overgangsfeil underbygger også resultatene fra studiene gjennomført av Elia et al. (2007), Gagatsis og Shiakallis (2004), Galbraith og Haines (2000) og Knuth (2000) som viser at overgangen mellom disse representasjonene er utfordrende for elever og studenter.

Videre kan overgangstypenes natur overføres til de andre overgangene i studien. Ved å sammenligne andelen tolkningsfeil i overgangen mellom funksjonsuttrykk og tabell er det en betydelig større andel tolkningsfeil med tabell som startrepresentasjon og funksjonsuttrykk som målrepresentasjon enn motsatt vei (se Tabell 4). I førstnevnte overgangsprosess måtte elevene, på lik linje med overgangen fra graf til funksjonsuttrykk, gjenkjenne et mønster da tallene i startrepresentasjonen måtte brukes til å utlede stigningstallet og konstantleddet. Derimot i den motsatte overgangen (funksjonsuttrykk som startrepresentasjon og tabell som målrepresentasjon) måtte ordnede par først dannes, før disse måtte plasseres i en tabell. Dette kan på lik linje med overgangen fra funksjonsuttrykk til graf betraktes som en serie av relativt rett fram steg. Dette kan begrunne at det er en stor forskjell, tilnærmet en dobling, mellom andelen tolkningsfeil begått av elevene i disse overgangene (se Tabell 4). Denne studiens funn vedrørende andelen overgangsfeil som ble begått i overgangen fra tabell til funksjonsuttrykk underbygger Galbraith og Haines' (2000) resultat i deres studie ved at det i begge studiene avdekkes en betydelig andel elever som gjennomfører en ufullstendig overgang (feil svar eller uten svar) og som begår en overgangsfeil (se Tabell 3 og 4).

I tillegg ved å studere overgangen mellom tabell og graf er det rimelig å betrakte begge disse overgangsprosessene som en serie av relativt rett fram steg. I overgangen med tabell som startrepresentasjon og graf som målrepresentasjon måtte elevene lese av ordnede par fra tabellen, samt plotte disse i koordinatsystemet og lage en rett linje mellom punktene. I den motsatte overgangen (graf som startrepresentasjon og tabell som målrepresentasjon) måtte elevene lese av ordnede par fra grafen og plassere disse i tabellen. Dermed er det rimelig å anta at andelen tolkningsfeil burde være relativt lik i de to overgangstypene, og at andelen burde være relativt lav. Likevel er det stor forskjell i andelen feil og det ble begått hele 14,29 % tolkningsfeil i sistnevnte overgangstype (fra graf til tabell) (se Tabell 4). Derimot ved et nærmere studium av besvarelsene over de fire overgangsfeilene som ble begått på oppgave 4 er det tydelig at tre av elevene egentlig visste hva de skulle gjøre, men begikk en feil som typisk kan betegnes som slurvefeil. I de tre besvarelsene ble kun ett av de ordnede parene feil (se Figur 15). Følgelig ved å utelukke disse feilene vil det være like stor andel overgangsfeil i de to overgangene, og andelen vil være lav.



Figur 15: Besvarelsen til tre av elevene som ikke ble intervjuet på oppgave 6.

Overgangsprosessenes natur kan følgelig belyse hvorfor det ble begått flest tolkningsfeil i overgangen fra graf til funksjonsuttrykk og fra tabell til funksjonsuttrykk. Det er fordi det i begge disse overgangsprosessene var nødvendig å finne et mønster for å utlede stigningstallet og konstantleddet. I begge disse overgangsprosessene var det funksjonsuttrykk som var målrepresentasjonen.

I tillegg viser suksessraten i forhold til hva som er start- og målrepresentasjon i overgangen mellom to representasjoner at det ikke er semantisk kongruens mellom representasjonene i denne studien, noe som stemmer overens med resultatene fra tidligere forskning (Adu-Gyamfi et al., 2012; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Representasjonene ville vært semantisk kongruente hvis overgangen mellom to representasjoner hadde gitt lik suksessrate uavhengig av hvilken vei overgangen forekom. Altså at suksessraten hadde vært lik for overgangen fra graf til funksjonsuttrykk som i overgangen fra funksjonsuttrykk til graf, samt fra graf til tabell som fra tabell til graf og fra funksjonsuttrykk til tabell som fra tabell til funksjonsuttrykk (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Under tolkningsfeil, er det på lik linje med implementeringsfeil, en forskjell på andelen feil innad i de to underkategoriene. Det ble avdekket åtte stigningsfeil og to skjæringsfeil blant overgangsfeilene begått av intervjudeltakerne (se Tabell 5), og for å betrakte grunnlaget for denne forskjellen anses det som gunstig å studere oppgave 2 og 4 hvor det ble begått flest stigningsfeil.

I oppgave 2 (fra tabell til funksjonsuttrykk) måtte elevene utlede stigningstallet og konstantleddet fra tabellen. Konstantleddet kunne avleses rett fra tabellen da punktet $(0,7)$ var representert. Derimot kunne ikke stigningstallet avleses direkte fra tabellen, men elevene måtte finne endringen i y-verdiene. Det er nettopp her Mikkel gjorde feil ved å se på stigningstallet som økningen til grafen, og ikke endringen i y-verdiene, og dermed ble fortegnet på stigningstallet feil (se kapittel Verdifeil i 4.3.1 Stigningsfeil). Det er derfor rimelig å anta at det forekom flere stigningsfeil enn skjæringsfeil i denne oppgaven da stigningstallet ikke kunne ses direkte fra tabellen. En annen mulighet for å finne stigningstallet og konstantleddet var ved å gå via overgangsrepresentasjonen graf ved å sette inn punktene inn i et koordinatsystem. Det er dette Lise gjør, men hun klarte ikke å bruke grafen til å finne stigningstallet. Her blir altså overgangsrepresentasjonen med på å skape en tolkningsfeil som Adu-Gyamfi et al. (2012) mener kan oppstå ved bruk av en slik representasjon.

I overgangen fra graf til funksjonsuttrykk, som Lise gjennomførte i oppgave 2 og som er overgangen som skal gjennomføres i oppgave 4, måtte også elevene finne stigningstallet og konstantleddet. Gjennom intervjuene kom det fram at alle betraktet stigningstallet som hvor mye grafen stiger eller øker med, mens konstantleddet er skjæringen med y-aksen (se Figur

16). På bakgrunn av dette kan det argumenteres for at det er lettere å finne konstantleddet enn stigningstallet. Med det menes at *skjæringen med y-aksen* kan ses direkte fra grafen og forklaringen er illustrerende for hvordan konstantleddet skal finnes, mens *stigningen eller økningen til grafen* må utledes og forklaringen er i mindre grad illustrerende for hvordan stigningstallet finnes. Det vil følgelig kunne anses som lettere å lese av hva konstantleddet er enn stigningstallet. Dette kan ses i feilen begått av Mikkel og Tina på oppgave 4 hvor de leste av konstantleddet rett, men i avlesningen av stigningstallet begikk begge en feil (se kapittel Avlesningsfeil i 4.3.1 Stigningsfeil). I tillegg begikk Lise stigningsfeil på oppgave 4 (se kapittel Verdifeil i 4.3.1 Stigningsfeil) som er svært illustrerende for argumentet om at forklaringene i forskjellig grad illustrerer hva elevene må gjøre. Lise klarte å finne konstantleddet, men når hun skulle finne stigningstallet, som hun vet representerer hvor mye grafen stiger med, gjorde hun feil. Hun trodde stigningstallet er avstanden fra origo til konstantleddet. Følgelig var forklaring for hva stigningstallet er korrekt i forhold til grafen i oppgaven, men dette hjalp henne ikke til å finne rett stigningstall.

12.	Petter:	Jeg ville ha skrevet y= et eller annet x (forsker: ja)+ der grafen har startet.
13.	Forsker:	Okei, så du har et tall foran x-en?
14.	Petter:	Ja, hvis det er en økning, hvis jeg ser det liksom. Som regel så er det vel det i graf så ja.
15.	Forsker:	Ja, så tallet før x-en sier noe om økningen?
16.	Petter:	Ja, til grafen.
17.	Forsker:	Ja, og det tallet, du sa + også et eller annet tall, hva var det det tallet var sa du?
18.	Petter:	Det kan være 2x+3 f.eks..
19.	Forsker:	Ja, hva sier det 3-tallet?
20.	Petter:	3-tallet sier hvor det starter på y-aksen (forsker: ja). Jeg husker ikke helt navnet på hva det heter nå.

16.	Tina:	y=ax+b, liksom?
17.	Forsker:	Ja. Du sier a og b, hva er det?
18.	Tina:	Stigningstall og krysning i y-aksen.
19.	Forsker:	Ja, så a er stigningstall er det det du mener?
20.	Tina:	Ja.
21.	Forsker:	Ja, hva sier et stigningstall deg?
22.	Tina:	Hvor mye grafen stiger.
23.	Forsker:	Ja. Også sier du at b-en er der det skjærer y-aksen?
24.	Tina:	y-aksen ja.

14.	Mikkel:	Mhm, stigningstallet er jo hvor mye det øker med for hver gang (forsker: mhm).
15.	Forsker:	Og stigning da, sier det deg, liksom stigningen til grafen sier det deg noe?
16.	Mikkel:	Stigningen til grafen er jo hvor høyt den går opp med (forsker: ja). Eller den kan jo gå nedover også da (forsker: ja).
17.	Forsker:	Konstantledd da, hva er det?
18.	Mikkel:	Er ikke det skjæringspunktet da?

13.	Trym:	Eh, .., 4x+3.
14.	Forsker:	Ja, det 4-tallet, hva er det det er?
15.	Trym:	Det er stigningstallet.
16.	Forsker:	Ja, og et stigningstall, hva sier det deg?
17.	Trym:	F.eks. jeg kan ta den ene grafen her da. Så er stigningstallet her *Forsker: på oppgave 4 ja* 0,25 (forsker: ja). Eller jeg tenkte ikke på at det er 0,25, men jeg tenkte sånn at hvis det ikke er halvparten, jeg ser at det ikke er halvparten (forsker: mhm) der ser jeg at det er halvparten, så er det sikkert 0,25.
18.	Forsker:	Ja, nei jeg skjønner. Så du ser på hvordan grafen øker da egentlig?
19.	Trym:	Ja.
20.	Forsker:	Eh, ja. Eh, du sa pluss et eller annet, nå husker jeg ikke hvilket tall du brukte, men la oss si at du sa 3x+2, (Trym: eh, ja, det der). Hva er det det 2-tallet sier?
21.	Trym:	Det er der det krysser y-aksen.

18.	Forsker:	Ja, når du sier 2x+2, hva tenker du at det 2 tallet før x-en er?
19.	Lise:	Stigningstallet.
20.	Forsker:	Ja, okei.
21.	Lise:	Også tenker jeg at den etter plussen er liksom den som skjærer y-aksen.
22.	Forsker:	Ja, okei, så det 2 tallet, du sa 2x+2, så da er det 2-tallet hvor det skjærer y-asken.
23.	Lise:	Ja, det var det jeg tenkte.
24.	Forsker:	Ja, vet du hva det 2-tallet før x-en er for noe, som du sa var stigningstallet.
25.	Lise:	Jeg vet ikke, eh altså det er jo, hvis det er det det er, (forsker: ja), som det er, så er det jo hvor mye grafen stiger da.
26.	Forsker:	Okei, så det sier økningen på grafen?
27.	Lise:	Ja.

Figur 16: Ytringer til de fem intervjudeltakerne vedrørende hva stigningstall og konstantledd er fra transkriberingene av lydopptakene.

I tillegg til at det er forskjell i andelen stigning- og skjæringsfeil er det også forskjell i andelen stigning- og skjæringsfeil mellom oppgavene slike feil ble begått (oppgave 2, 3, 4 og 5). Som beskrevet over må elevene i oppgave 2 og 4 finne stigningstallet og konstantleddet, mens i oppgave 3 og 5 er det ikke nødvendig for elevene å finne grafens stigning eller skjæringspunkt. Petter er den eneste som begikk en feil på oppgave 3. Han brukte stigningstallet og konstantleddet for å tegne grafen i koordinatsystemet, men dette gjorde han feil (se kapittel 4.3.2 Stigning- og skjæringsfeil). Mikkel er den eneste av intervjudeltakerne som gjorde feil på oppgave 5, da han satte punktene inn feil. Dette medførte en stigningsfeil (se kapittel Fortegnsfeil i 4.3.1 Stigningsfeil). Det kreves kun utregning eller plotting av punkter i oppgave 3 og 5. Dermed er det rimelig at det har forekommet flere stigning- og skjæringsfeil i oppgave 2 og 4.

6. Konklusjon

Denne studien har som mål å svare på forskningsspørsmålet *Hvilke feil begås av en 1T-klasse i overgangsprosessen mellom ulike representasjoner for lineære funksjoner? Hva skjer i prosessen når det forekommer en overgangsfeil?* Gjennom studien har det blitt avdekket at overgangene mellom representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell er utfordrende for elevene da det ble begått flere overgangsfeil i overgangsprosessene. Deriblant medførte overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf flest overgangsfeil.

Som svar på første del av forskningsspørsmålet vedrørende hvilke overgangsfeil elevene begikk kan det henvises til kategoriseringen i Figur 4. I denne figuren ble det blitt gitt navn til de forskjellige overgangsfeilene elevene begikk. Hovedkategoriene, implementeringsfeil og tolkningsfeil, danner skjelettet for overgangsfeilene som ble begått, mens underkategoriene og hendelsene går mer i dybden på overgangsfeilenes natur. Studien avdekker også at elevene begikk flest tolkningsfeil.

Som svar på andre del av forskningsspørsmålet, hva som skjedde i overgangsprosessen da det forkom feil, vil det igjen være rimelig å henvise til Figur 4, da navnene til underkategoriene og hendelsene illustrerer hva som skjedde i prosessene da det forekom overgangsfeil. Når det gjelder implementeringsfeil forekom dette i overgangsprosessene med funksjonsuttrykk som startrepresentasjon. Dette kan trolig skyldes at det i disse overgangene var nødvendig med flere algebraiske steg i form av utregninger og manipulering av algebraiske uttrykk. Når det gjelder tolkningsfeil ble dette avdekket i alle overgangstypene, men det var i overgangen fra graf til funksjonsuttrykk det ble begått flest tolkningsfeil. I tillegg ble det begått en relativt høy andel overgangsfeil i overgangen fra tabell til funksjonsuttrykk. Årsaken til at det nettopp var i disse overgangstypene det ble begått flest feil kan ligge i overgangsprosessenes natur ved at det i disse to overgangene ble krevd en mønstergjenkjennelse for å finne stigningstallet (se tanker vedrørende årsaken til høy andel overgangsfeil i overgangen fra graf til tabell i kapittel 5.2.2 Tolkningsfeil).

Studien viser at elevene foreløpig ikke mestrer læreplanmålet som omfatter at 1T-elever skal kunne gjennomføre overganger mellom ulike representasjoner for funksjoner (se kapittel 2.1 Funksjonens sentrale plass i skolen). Det er dermed viktig å se på hva denne studien kan bidra med for lærere og undervisningen. Dette vil det reflekteres over i neste delkapittel.

6.1 Didaktiske implikasjoner

Denne oppgaven har tatt for seg hvilke overgangsfeil elever i en 1T-klasse begikk og hva som skjedde i overgangsprosessen da disse feilene forekom. Videre har dette blitt koblet opp mot overgangstype og mulige årsaker til hvorfor feilene forekom. Dette legger didaktiske føringer ved at når læreren vet hvilke overgangsfeil elevene begår, hva som skjer når feilene forekommer og hvorfor de forekommer kan læreren legge opp undervisningen og oppgavearbeidet etter dette. Det er viktig at lærere ikke bare har god matematisk kunnskap, men besitter god undervisningskunnskap i matematikk[15]. Dette inkluderer matematisk kunnskap som er nødvendig for å lære bort matematikk, følgelig alt en lærer må gjøre for å støtte elevenes læring. Eksempelvis må læreren se at elevene begår feil, men enda viktigere hvorfor, da vil læreren kunne hjelpe elevene til å rette opp sine feil. I tillegg er det viktig at læreren er i stand til å forutse hva elevene mest sannsynlig kommer til å tenke og hva de vil finne forvirrende. Når læreren velger en oppgave er det viktig at vedkommende forutser hva elevene kommer til å gjøre og om de finner oppgaven lett eller vanskelig (Ball, Thames & Phelps, 2008). Denne studien kan være et bidrag til læreres undervisningskunnskap i matematikk ved å gi lærere et innblikk i hvilke feil som begås, hva som kan være årsaken til dette og hvilke overganger som byr på utfordringer. Dette kan bidra til at læreren kan forutse problemer elevene kan møte på.

I tillegg kan funnene i denne studien brukes av læreren til å vurdere hvilke overganger som må betraktes grundigere for at elevene skal kunne mestre overgangene. I læreboken Sinus matematikk: 1T skrevet av Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl og Hals (2014) presenteres lineære funksjoner i kapitelet førstegradsuttrykk. Dette er læreboken den utvalgte klassen benytter. Gjennom kapittelet førstegradsuttrykk fremstilles eksempler på funksjonsuttrykk, tabell og graf som representasjoner for samme funksjon. I tillegg blir det presentert hvordan elevene skal gjennomføre overgangen fra to punkter (kan betraktes som tabell) til graf, for så videre til funksjonsuttrykk. Det blir også fremstilt hvordan elevene kan finne stigningstallet fra to punkter slik at elevene kan bruke ettpunktsformelen i overgangen fra tabell til funksjonsuttrykk, ikke via graf. I tillegg blir det presentert hvordan elevene kan gjennomføre en overgang fra funksjonsuttrykk til graf uten å gå via en tabell, altså hvordan elevene kan bruke stigningstallet og konstantleddet til å tegne grafen. Ved å studere oppgavene presentert i boka er det tydelig at det er overgangen fra funksjonsuttrykk til graf, enten direkte eller via

[15] Oversettelse av mathematical knowledge for teaching.

tabell, som er mest vektlagt. I tillegg er det en del oppgaver som omfatter overgangen fra graf til funksjonsuttrykk, samt fra tabell til funksjonsuttrykk. Den eneste overgangen som ikke er innlemmet i noen av oppgavene er overgangen fra graf til tabell (Oldervoll et al., 2014). Siden det er en betydelig andel oppgaver som omfatter overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf kan dette være med å underbygge at dette er to overganger som er utfordrende for elevene. Derfor er det viktig at undervisningen vektlegger disse overgangene. Da det i mye større grad er vektlagt oppgaver for overgangen fra funksjonsuttrykk til graf enn motsatt vei i denne boken, vil dette kunne indikere at overgangen med graf som startrepresentasjon og funksjonsuttrykk som målrepresentasjon burde vektlegges enda mer. Lærerens valg av oppgaver vil ha påvirkning på elevenes kunnskapsutvikling (Schwarz & Hershkowitz, 1999), og hvis elevene finner overgangen fra graf til funksjonsuttrykk utfordrende kan det være hensiktsmessig å få elevene til å jobbe mer med denne overgangen.

I følge både Elia et al. (2007), Galbraith og Haines (2000) og Knuth (2000) sliter elever og studenter med å se sammenhengen mellom representasjoner for funksjoner, og Knuth (2000) har sett på at denne sammenhengen mangler mellom funksjonsuttrykk og graf for lineære funksjoner. Dermed kan det være viktig at undervisningen prøver å legge til rette for at elevene klarer å se sammenheng mellom representasjonene, muligens spesielt for overgangen mellom funksjonsuttrykk og graf hvor det begås flest overgangsfeil.

I tillegg til at studien kan anses som et bidrag for lærere og undervisningen relatert til å utvikle elevenes evne til å gjennomføre en vellykket overgangsprosess mellom representasjonene graf, funksjonsuttrykk og tabell, kan studien også betraktes som et bidrag til forskningsfeltet. Dette vil belyses i neste delkapittel.

6.2 Studiens bidrag til forskningsfeltet

Resultatene i denne studien støtter tidligere internasjonal forskning som har vist at det er utfordrende for elever og studenter å gå mellom ulike representasjonsformer for funksjoner. I denne oppgaven er det gitt flere eksempler på overgangsfeil under implementering- og tolkningsfeil, samt hva som skjedde i overgangsprosessen da disse feilene ble begått. I tillegg ved å studere hva skjer i overgangsprosessen blir ikke prosessen sett på som en svart boks. Dette er fordelaktig da tidligere forskning har ansett forskningsfeltet som mangelfullt grunnet rett eller gal tilnærming til overgangsprosessen i annen forskning (Adu-Gyamfi et al. (2012); Superfine et al. (2009)).

Analysen med verifiseringsmodellen som analyseverktøy ga et grovmasket nett, det vil si at alle overgangsfeilene kunne plasseres i de to feilkategoriene, implementering- og tolkningsfeil, men overgangsfeilene ble ikke studert i dybden. Det var bruken av intervju som gjorde det mulig å gå mer i dybden på overgangsfeilene da det ble studert mer detaljert hva som skjedde i prosessen. Dette var spesielt viktig i de besvarelsene hvor det ikke kom tydelig fram i løsningsstrategien hvordan oppgaven var blitt løst. I studien til Adu-Gyamfi et al. (2012) og i de andre studiene presentert i teorien ble ikke intervju brukt som datainnsamlingsmetode, det ble kun brukt oppgavehefte. Bruken av intervju gjorde det mulig å kategorisere overgangsfeilene inn i underkategorier og hendelser. Da ble det oppdaget at verifiseringsmodellen som analyseverktøy ga et grovmasket nett over overgangsfeilene, men at en modifisering av modellen for å skape et mer finmasket nett i dataanalysen kan være gunstig. Dermed har denne studien bidratt med å belyse at verifiseringsmodellen er godt egnet for å skape et overblikk over overgangsfeilene, men også vist veien til mulig videre forskning i form av en videreutvikling av modellen.

I tillegg til å ha gått mer i dybden på overgangsfeilene er studien gjennomført i en norsk kontekst, og følgelig kan studien bidra til å få et innblikk i hvilke overgangsfeil norske elever begår og hvilke overganger de finner spesielt vanskelige. Studien avdekket også at det var noen forskjeller mellom resultatene i denne studien og Adu-Gyamfi et al. (2012) sin studie. Datamaterialet i denne studien kan ikke gi en konklusjon på hvorfor det er forskjellige resultater, men dette kan igjen være noe som framtidige studier kan undersøke. Deriblant kan framtidige studier forske på om det er forskjell i den norske og amerikanske konteksten, da blant annet med tanke på hva som vektlegges i læreplaner, undervisningen og lærebøker.

Referanser

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Stiff, L. V. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School Science and Mathematics, 112*(3), 159-170. doi: 10.1111/j.1949-8594.2011.00129.x.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching – what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Brøste, K. M. (Upublisert). *Representasjonsovergang i funksjonslære. En pilotstudie av utfordringer knyttet til overgangen mellom representasjonsformene graf og funksjonsuttrykk*. Trondheim: NTNU.

Calderhead, J. (1981). Stimulated recall: A method for research on teaching. *The British Journal of Educational Psychology*, *51*, 211-217.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* London: Routledge.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Duval, R. (2004). *A crucial issue in mathematics education: the ability to change representation register.* Paper presentert på 10th International Congress on Mathematical Education, ICME-10, København, 4.-11. jul 2004.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*, 533-556. doi: 10.1007/s10763-006-9054-7

Gagatsis, A., & Shiakalli, M.(2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645–657. doi: 10/1080/0144341042000262953

Galbraith, P., & Haines, C. (2000). Conceptual mis(understandings) of beginning undergraduates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(5), 651–678. doi: 10.1080/002073900434350

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology Journal*, *29*, 75-91. doi: 10.1007/BF02766777

Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 500–507.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: task, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64. doi: 10.3102/00346543060001001

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, CA: Sage.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (3.utgave). Oslo: Universitetsforlaget AS.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget.

NTNU. (2017). *Studieplaner for masterstudier i teknologi (siv.ing/int.master) ved NTNU for 2017-2018*. Hentet 07.05.18 fra https://www.ntnu.no/studier/studiehandbok/teknologi/

Oldervoll, T., Orskaug, O, Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2014). *Sinus matematikk: 1T: lærebok i matematikk: studieforberedende program.* Oslo: Cappelen Damm.

Robson, C., & McCartan, K. (2015). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers*. Oxford: Blackwell.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 362-389

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 124-137). Oslo: Universitetsforlaget.

Tjora, A. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet 24.01.18 fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04?lplang=http://data.udir.no/kl06/nob

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19.* Oxford: Oxford University Press.

Vedlegg A: Oppgavehefte

Navn: ______________________________

Oppgaver - overgang mellom graf, tabell og funksjonsuttrykk

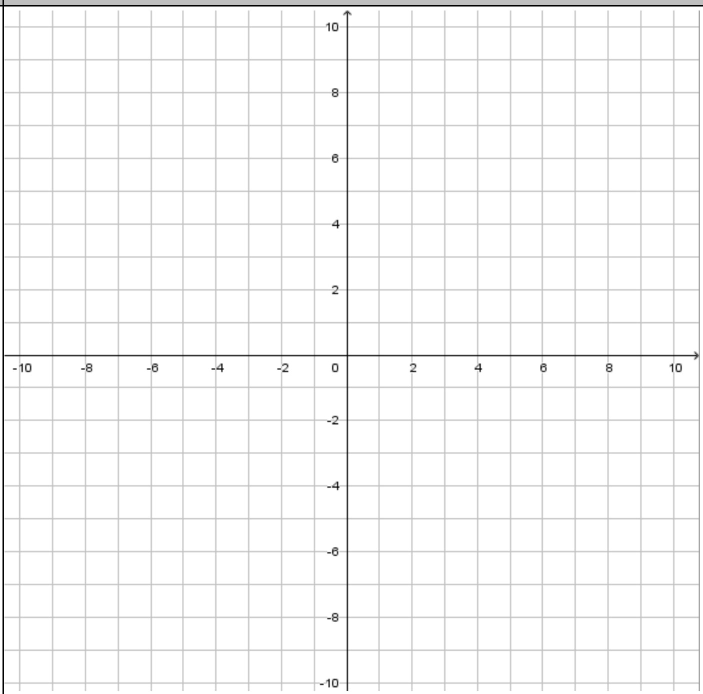
I disse oppgavene er det viktig at dere viser hva dere tenker, og ikke kun skriver et svar. Det er fordi det er viktig for meg å se hva dere har tenkt når jeg skal undersøke svarene deres i min oppgave. Hvis det er noe dere ikke klarer kan dere gjerne skrive hva dere ikke skjønner, eller hvor det stopper for dere.

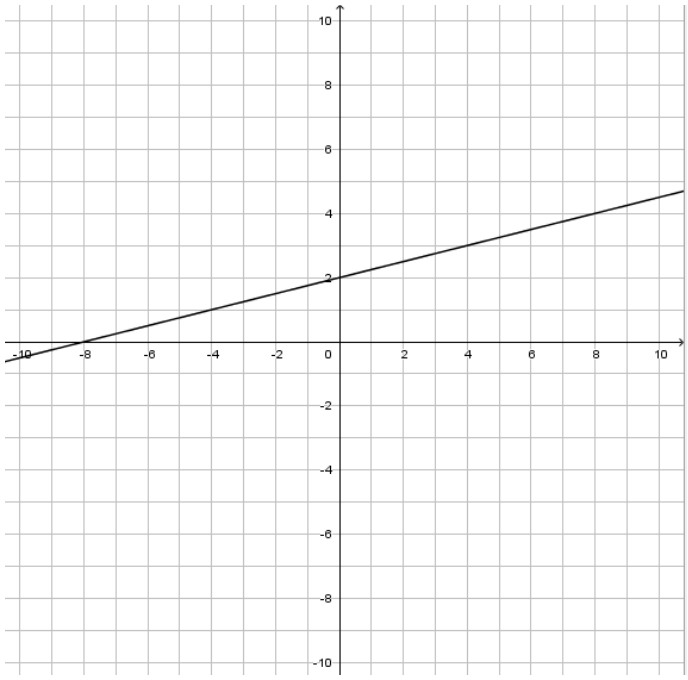
Husk at jeg er ikke ute etter å sjekke om dere klarer oppgaven eller ikke, jeg vil kun se på hvilke utfordringer dere støter på og hva dere har tenkt.

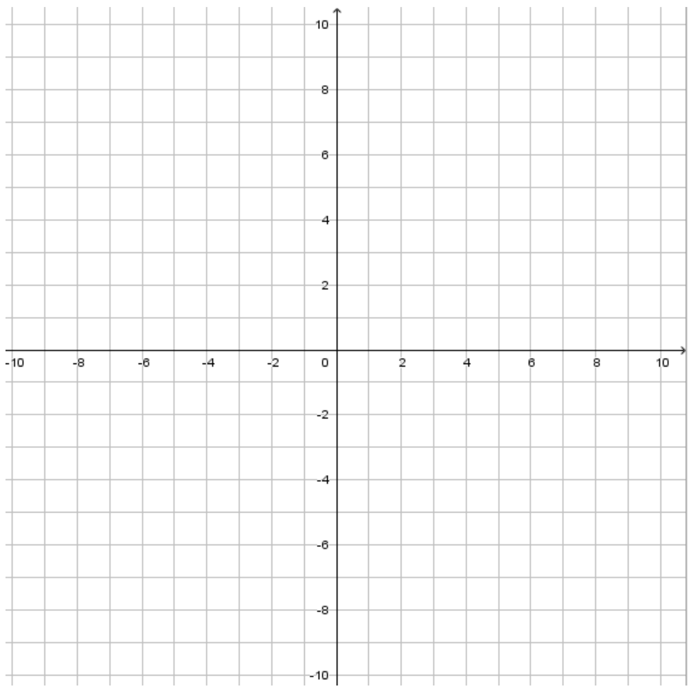
Lykke til og takk for at dere stiller opp og hjelper meg!

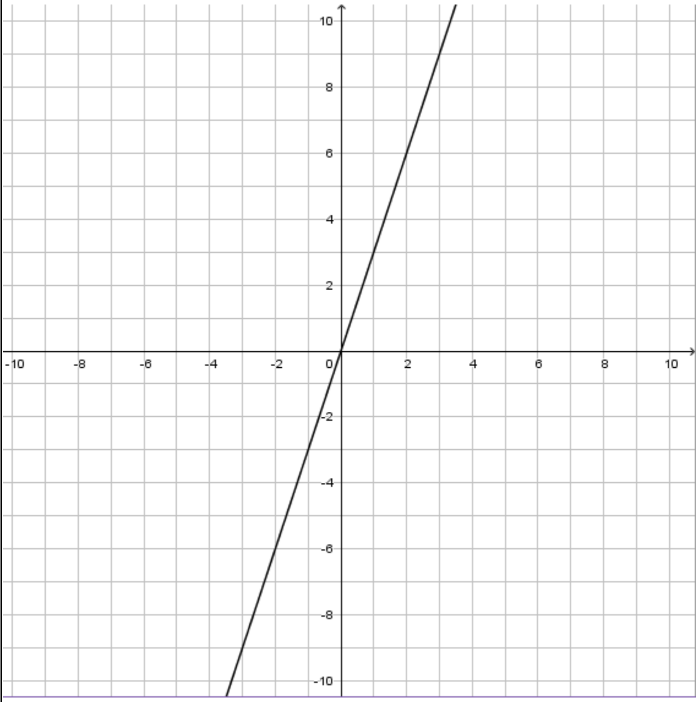
<table>
<tr><td colspan="3">Oppgave 1: Fullfør tabellen til funksjonsuttrykket gitt under.</td></tr>
<tr><td>Funksjonsuttrykk:</td><td>Svaret ditt:</td><td>Løsningsmetode:</td></tr>
<tr><td>$2x + 3 = y$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-3</td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td>15</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Oppgave 2: Finn funksjonsuttrykket til tabellen gitt under.</td></tr>
<tr><td>Tabell:</td><td>Svaret ditt:</td><td>Løsningsmetode:</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>11</td></tr><tr><td>-1</td><td>9</td></tr><tr><td>0</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>-1</td></tr></table></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Oppgave 3: Tegn grafen til funksjonsuttrykket under.</td></tr>
<tr><td>Funksjons-
uttrykk:</td><td>Svaret ditt:</td><td>Løsningsmetode:</td></tr>
<tr><td>$3y - 6x = 9$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Oppgave 4: Finn funksjonsuttrykket til grafen under.</td></tr>
<tr><td>Graf:</td><td>Svaret ditt:</td><td>Løsningsmetode:</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Oppgave 5: Tegn grafen til tabellen gitt under.</td></tr>
<tr><td>Tabell:</td><td>Svaret ditt:</td><td>Løsningsmetode:</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Oppgave 6: Fullfør tabellen til grafen gitt under.</td></tr>
<tr><td>Graf:</td><td>Svaret ditt:</td><td>Løsningsmetode:</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td></td><td>-9</td></tr>
<tr><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
</table>

Vedlegg B: Generell intervjuguide

Stimulert-gjenkallingsintervju

Takk for at du stiller opp til intervju!

Uformell prat (3 min)

Informasjon (2 min):
Jeg studerer lektor i realfag, og jeg skal skrive en master i matematikkdidaktikk, kort fortalt vil det si hvordan lære bort matematikk. I masteren min skal jeg se på hvilke utfordringer dere møter på når dere f.eks. skal tegne grafen til et funksjonsuttrykk, eller lage en tabell fra et funksjonsutrykk. I det intervjuet her er jeg ute etter å finne ut hva du har gjort når du har løst oppgavene og hva du har tenkt. Så det er fint om du klarer å huske hva du gjorde når du svarte på oppgavene.

Intervjuet skal altså brukes i min masteroppgave, men da vil alt du har sagt anonymiseres, det vil si at ingen skal kunne vite at det er akkurat du som har sagt det. Skolen blir også anonymisert. I tillegg har jeg taushetsplikt, så jeg skal ikke si til noen, ikke læreren din heller, hva du har svart.

Har du noen spørsmål? Er det noe du synes er uklart?

Jeg har tenkt til å bruke lydopptak da det er vanskelig for meg å rekke å skrive alt du sier. Går det derfor greit at jeg tar lydopptak?
Da starter jeg lydopptaket.

Overgangsfase (20 min):
Snakke litt løst om oppgavene, om eleven sytes det var vanskelig, om han eller hun er vant til å jobbe med slike oppgaver.
Gå mer konkret inn på noen av oppgavene som eleven har besvart for å finne ut hvordan eleven har tenkt:

1) Kan du skrive opp funksjonsuttrykket for en generell lineær funksjon?
2) Hva tenker du på hvis jeg sier stigning og stigningstall?
3) Hva tenker du på hvis jeg sier konstantledd?
4) Spørre om spesifikke oppgaver hvor eleven har hatt utfordringer i overgangen.

*Oppsummering (8 min)***:**

Oppsummer funn. Har jeg forstått det riktig? Vil du legge til noe?

Vedlegg C: Transkriberingsnøkkel

Transkripsjonskoder

[]	Uartikulert eller ikke hørbare ytringer
..	Pause (opp til 2 sek)
...	Pause (opp til 3 sek)
[markerer hendelser]	Markerer ikke-verbale hendelser som forekommer
(NN: interjeksjon)	Interjeksjon ved NN i løpet av en annens ytring
*NN: snakker samtidig *	Avbrytelse ved at NN snakker samtidig som den som har ytringen.

Vedlegg D: Samtykkeskjema

Kamilla Mittet Brøste
Smørblomstvegen 2, 7050 Trondheim
97474080, kamillmb@stud.ntnu.no

Trondheim, 29.01.18

Til foresatte for elever i 1. kl. ved [redacted].

Anmodning om tillatelse innsamling av elevbesvarelser, elevsamtaler og evt. lydopptak av intervju.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. Jeg skal i løpet av dette semesteret skrive en masteroppgave hvor jeg skal se på hvilke utfordringer 1T-elever møter i representasjonsovergangen mellom tabell, graf og funksjonsuttrykk. Formålet med studien er å se på hvilke utfordringer elever møter på når de skal gå mellom representasjonene graf og funksjonsuttrykk, graf og tabell, samt funksjonsuttrykk og tabell. Fokuset mitt er ikke å sjekke om hver enkelt får til oppgavene jeg deler ut eller ikke, men jeg ønsker å fokusere på hvilke typer utfordringer som oppstår for elevene. Valget av elever til studien ble gjort på bakgrunn av at de har 1T dette semesteret her.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å samle inn elevbesvarelser (oppgaver elevene har besvart), som omhandler funksjoner, og gjøre lydopptak av intervju av elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne samle inn besvarelsene, samt gjøre lydopptak av elever i 1. kl. ved [redacted]. Besvarelsen kommer til å ta rundt 45 minutter. Intervjuet er snakk om en kort samtale på rundt 30 min. Det vil kun være noen av elevene som blir plukket ut til intervju. Bakgrunnen for denne utvelgelsen ligger i besvarelsen av oppgavene. Jeg vil intervjue elever som har levert inn en besvarelse som jeg finner interessant i forhold til problemstillingen. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Ingen av elevene vil nevnes med navn og skolen vi anonymiseres i oppgaven. Det vil derfor ikke være mulig å identifisere den enkelte elev ved å lese oppgaven jeg skriver. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi begrunnelse. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Besvarelsen som skal samles inn vil bestå av noen matematikkoppgaver som omfatter funksjoner. Elevene bes svare på oppgavene etter beste evne, men er det noe de ikke klarer eller ikke vil svare på kan de svare blankt. Intervjuene vil bli gjennomført slik at eleven kan forklare mer i detalj hva han eller hun tenkte når oppgavene ble løst. Altså vil samtalen bygge på besvarelsen som jeg har samlet inn. Fokuset her ligger ikke på om eleven har svart rette eller galt, men hvordan eleven har tenkt for å komme fram til sin løsning. Opptakene vil kun bli hørt av meg og eventuelt min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Foresatte kan etter ønsker få se intervjuguiden. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 15.08.18.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side hvis dere er villig til å la deres barn være med på prosjektet i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Kamilla M. Brøste

Kamilla Mittet Brøste

Vedlegg E: Tilbakemelding fra NSD

NSD

Liping Ding

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 16.02.2018	Vår ref: 58802 / 3 / OOS	Deres dato:	Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 29.01.2018 for prosjektet:

58802	*Overgangen mellom representasjonsformer i funksjonslære*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Liping Ding*
Student	*Kamilla Brøste*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:

- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Ved prosjektslutt 15.08.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Marianne Høgetveit Myhren

Øyvind Straume

Kontaktperson: Øyvind Straume [redacted]

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Kamilla Brøste, kamillmb@stud.ntnu.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 58802

INFORMASJON OG SAMTYKKE
Du har opplyst at de foresatte til ungdommen blir kontaktet og gir skriftlig samtykker til at ungdommene kan delta. Vår vurdering er at informasjonsskrivet til utvalget er godt utformet, og vi har ingen innvendinger til dette. Personvernombudet presiserer at deltakelsen til ungdommene er frivillig, selv om de foresatte samtykker. Forsker må sørge for at barna forstår at deltakelse er frivillig og at de når som helst kan trekke seg dersom de ønsker det.

INFORMASJONSSIKKERHET
NTNU er behandlingsansvarlig institusjon for prosjektet. Personvernombudet forutsetter at du behandler alle data i tråd med NTNU sine retningslinjer for datahåndtering og informasjonssikkerhet. Vi legger til grunn at bruk av privat datamaskin og lydopptak på telefon er i samsvar med institusjonens retningslinjer.

PROSJEKTSLUTT
Prosjektslutt er oppgitt til 15.08.2018. Det fremgår av meldeskjema og informasjonsskriv at du vil anonymisere datamaterialet ved prosjektslutt. Personvernombudet gjør oppmerksom på at anonymisering innebærer å:
- slette direkte identifiserbare opplysninger som navn
- slette eller omskrive/gruppere indirekte identifiserbare opplysninger som skoleklasse, lærer, alder, kjønn
- slette lydopptak

For en utdypende beskrivelse av anonymisering av personopplysninger, se Datatilsynets veileder:
https://www.datatilsynet.no/globalassets/global/regelverk-skjema/veiledere/anonymisering-veileder-041115.pdf