Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet

HEIDI STRØMSKAG

For a scientific mind, all knowledge is an answer to a question. If there has been no question, there can be no scientific knowledge.

Gaston Bachelard (1938/2001, s. 25)

Denne artikkelen handler om hvordan egenskaper ved en didaktisk situasjon i matematikk påvirker studenters muligheter til å løse en algebraisk generaliseringsoppgave. Studien er gjennomført innenfor et lærerutdanningsprogram ved en høgskole, og datamaterialet består av matematikkoppgaven og et videoopptak av tre studenters samarbeid for å løse oppgaven. Transkripsjonen av videoopptaket er analysert ved den konstant komparative metoden, der teorien for didaktiske situasjoner i matematikk (TDS) er brukt for å forstå hvilke egenskaper ved den didaktiske situasjonen som begrenser studentenes muligheter for å løse oppgaven. Den observerte didaktiske situasjonen er en ordinær undervisningssituasjon i den forstand at den ikke er et resultat av didaktisk ingeniørvirksomhet basert på TDS. Resultatene fra analysen viser hvordan to faktorer skaper avstand mellom lærerens hensikt med den gitte matematikkoppgaven og studentenes aktivitet knyttet til oppgaven. Den ene faktoren handler om begrepet "matematisk setning" som studentene tillegger en annen betydning enn den læreren legger til grunn; den andre faktoren handler om lærerens bruk av et generisk eksempel uten at de generelle egenskapene til eksemplet blir diskutert. Studien bidrar til innsikt i sammenhengen mellom et miljø for en adidaktisk situasjon og den matematikkunnskapen som studenter har mulighet for å utvikle i det aktuelle miljøet.

Algebra er et viktig område i matematikken, som kan betraktes som språket som generalisering av kvantitet og relasjoner mellom størrelser kan uttrykkes og manipuleres gjennom (Whitehead, 1947; Kieran, 2004). Algebra er avgjørende for arbeid i andre matematiske

Heidi Strømskag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Strømskag, H. (2017). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 22 (2), 71–91.

områder som matematisk analyse, analytisk geometri og statistikk. Videre er algebraisk kunnskap relevant i yrkesliv og dagligliv, enten direkte eller som et verktøy (Katz, 2007; Kendal & Stacey, 2004). Det er imidlertid slik at elever opplever algebra som vanskelig å lære, noe som er godt dokumentert i forskningslitteraturen (eks. Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1992, 2007; Küchemann, 1981; MacGregor & Stacey, 1997). Studier viser også at algebra er vanskelig å undervise (Stacey, Chick & Kendal, 2004; Strømskag Måsøval, 2011; Watson, 2009).

I den gjeldende norske læreplanen for matematikk er "tall og algebra" et av hovedområdene for 5.-10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 3). Resultater fra internasjonale komparative studier viser at norske elever skårer dårligere enn gjennomsnittet i andre land i algebra: I *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS, 1995, 2003, 2007, 2011), som måler elevers kompetanse i matematikk og naturfag på 4./5. og 8./9. trinn i ca. 60 land, har norske elever prestert betydelig lavere enn gjennomsnittet innenfor området algebra (Grønmo, Onstad, Nilsen, Hole, Aslaksen & Borge, 2012). *Programme for International Student Assessment* (PISA), som måler i hvilken grad 15-åringer har tilegnet seg kompetanse innen lesing, matematikk og naturfag som er essensiell for å kunne fungere i et moderne samfunn, viser at norske elever skårer litt under gjennomsnittet i matematikk i 34 OECD-land (PISA har totalt 65 deltakerland eller "økonomier"). De norske prestasjonene i matematikk har vært relativt stabile i de fem PISA-testene siden 2000 (OECD, 2013). PISA 2012 viser imidlertid at norske elever er spesielt svake på oppgaver som er knyttet til å bruke matematisk formalkompetanse (Kjærnsli & Olsen, 2013). Herunder er algebra et viktig kunnskapsområde, som norske elever dermed viser svak kompetanse i.

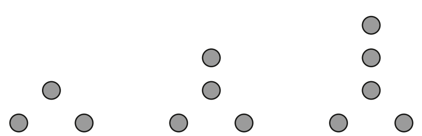
I lys av situasjonen beskrevet ovenfor, er det relevant å utvikle kunnskap om hva som gjør algebra komplekst å undervise og lære. Forskning på studenters generaliseringsprosesser viser at det ikke er mønstergeneralisering i seg selv som er problemet (i tilfeller der studenter ikke lykkes), men heller måten oppgaver er formulert på og måten stoffet undervises på, som skaper problemer (Moss & Beatty, 2006; Strømskag Måsøval, 2011; Noss, Healy & Hoyles, 1997). Det er derfor relevant å finne ut *hvordan* design av oppgaver om mønstergeneralisering, og den didaktiske tilnærmingen, påvirker studenters arbeid med slike oppgaver.

I denne artikkelen presenteres en analyse av en undervisningssituasjon knyttet til algebra, der tre studenter kommuniserer om løsningen av en oppgave om figurmønster, der også læreren (som har designet oppgaven) deltar[1]. Forskningsspørsmålet som er stilt er: *Hvilke egenskaper ved undervisningssituasjonen begrenser studentenes mulighet for å finne et algebraisk uttrykk for generaliteten i et figurmønster?* Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk (Brousseau, 1997) er brukt som rammeverk for å analysere datamaterialet, som består av matematikkoppgaven og et videoopptak av studentenes arbeid med oppgaven. Denne teorien er valgt fordi den handler om de didaktiske relasjonene mellom elementene som inngår i en undervisningssituasjon – læreren, studentene, og den tilsiktede matematikkunnskapen – der særegenhetene til den tilsiktede kunnskapen spiller en avgjørende rolle, særlig gjennom designet av oppgaven eller problemet som studentene skal løse. En analyse av den omhandlede kunnskapen (figurmønstre) presenteres i neste seksjon, etterfulgt av en kortfattet presentasjon av TDS. For en fullstendig introduksjon til TDS henvises leseren til (Brousseau, 1997; se også Strømskag Måsøval, 2011, Kap. 2; Warfield, 2007; Winsløw, 2006).

Teoretisk bakgrunn

Matematikken i figurmønstre

Et figurmønster i skolematematikken er representert ved noen geometriske konfigurasjoner oppstilt på linje, der utviklingen som kan observeres i de gitte konfigurasjonene tenkes å fortsette i det uendelige. Et eksempel er gitt i figur 1. En konfigurasjon refereres til som et element i mønsterfølgen, og bestanddelene i hvert *element* refereres til som *komponenter* (diskene i figur 1).

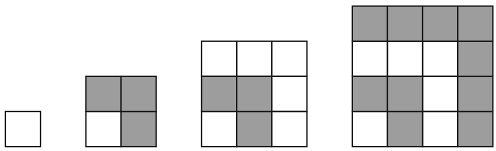


Figur 1. *De tre første elementene i et figurmønster som tenkes å fortsette i det uendelige*

Å generalisere et figurmønster algebraisk betyr å finne et generelt uttrykk for antallet komponenter i et vilkårlig element i mønsterfølgen, forstått som en formel for antallet komponenter i det n-te elementet, uttrykt ved hjelp av n. Denne formelen vil være et generelt uttrykk for det n-te elementet i *tallfølgen* som avbildes fra figurmønsteret.

Strømskag Måsøval (2011) har identifisert to typer figurmønstre, ut fra det matematiske objektet de sikter mot: Den ene typen betegnes som *ordinære figurmønstre* og sikter mot en *formel* for det n-te elementet i tallfølgen avbildet fra figurmønsteret. Mønsteret i figur 1 er et eksempel på denne typen. Det generelle elementet i tallfølgen avbildet fra et ordinært figurmønster kan representeres ved en eksplisitt eller en implisitt formel.

En eksplisitt (direkte) formel uttrykker antall komponenter i det generelle elementet som en *funksjon* av posisjonen. En implisitt (rekursiv) formel uttrykker antall komponenter i det generelle elementet som en *funksjon* av antall komponenter i det foregående elementet. Den andre typen figurmønstre betegnes som ekvivalensmønstre og sikter mot et teorem (en matematisk setning) i form av en påstand om ekvivalens mellom to ulike algebraiske uttrykk for det *n*-te elementet i tallfølgen avbildet fra figurmønsteret. Mønsteret i figur 2 er et eksempel på et *ekvivalensmønster* som illustrerer at det *n*-te kvadrattallet er ekvivalent med summen av de *n* første oddetallene, i matematisk notasjon: $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$ eller $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.



Figur 2. *De fire første elementene i et ekvivalensmønster som illusterer en generell numerisk sammenheng mellom kvadrattall og oddetall*

Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk

Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk er utviklet i Frankrike fra 1970-årene, med Guy Brousseau som ledende figur. Den er en vitenskapelig tilnærming til de vanskelighetene som er knyttet til undervisning og læring av matematikk, der særegenhetene til målkunnskapen spiller en avgjørende rolle i undervisningssituasjonen. TDS er blitt utviklet for å tjene som rammeverk for å analysere og beskrive enhver situasjon der det er en intensjon om å undervise noen en helt *bestemt matematisk kunnskap* (Brousseau, 1999, sitert i Sierpinska, 1999).

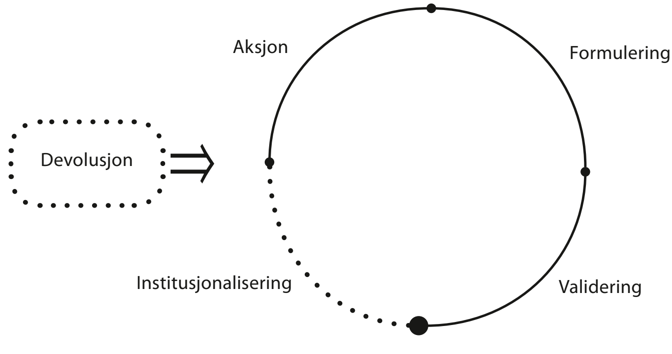
TDS' metodologiske prinsipp er basert på den epistemologiske antakelsen at en bestemt matematisk kunnskap kan representeres ved en (fundamental) *situasjon* som involverer oppgaver som kan løses på en optimal måte ved å bruke den tilsiktede kunnskapen (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006). Det er derfor avgjørende å finne ut hva som er nødvendige *betingelser* for at en situasjon skal implementere den tilsiktede kunnskapen (målkunnskapen), og videre, hvordan en slik situasjon kan designes og utvikles i en gitt utdanningsinstitusjon. Dette betinger viten om overgangen fra den aktuelle kunnskapen betraktet som et verktøy som skal brukes, til den aktuelle kunnskapen som noe som skal undervises og læres – en overgang Chevallard (1989) refererer til som en *didaktisk transposisjon* av kunnskap.

Begrepet *miljø* modellerer elementene i den intellektuelle og fysiske virkeligheten som studentene opererer i når de skal utvikle målkunnskapen (Laborde & Perrin-Glorian, 2005). Miljøet omfatter oppgaven eller problemet som skal løses; fysiske og symbolske redskaper som gjøres tilgjengelige (hjelpemidler, konkretiseringsmateriell, informative tekster, data, etc.); studentenes eksisterende kunnskaper; samt arrangement av klasserommet og regler for å operere i situasjonen (bl.a. bestemmende for hvem som skal samhandle med hvem). Et adekvat miljø har et *adidaktisk* potensial, som betyr at det gir studentene feedback slik at de kan avgjøre om den responsen de har produsert som følge av sin interaksjon med miljøet, fungerer eller ikke. Det kan for eksempel være at studentene har funnet en strategi for å løse problemet, men at dette ikke er den optimale løsningen (som læreren sikter mot). Da vil et adekvat miljø ha egenskaper (betingelser) som gjør at studentene – uten lærerintervensjon – blir stimulert til å revidere strategien eller modellen, slik at den gir en optimal løsning (i tråd med målkunnskapen).

En *adidaktisk situasjon* er en situasjon der studenten tar et matematisk problem som sitt eget og løser det på grunnlag av problemets indre logikk, uten lærerens veiledning og uten å prøve å finne ut lærerens intensjon med problemet. Ifølge Brousseau (1997) har læreren, i tillegg til å ha ansvaret for å lede utviklingen av den adidaktiske situasjonen, to hovedroller i en didaktisk situasjon: Den ene er å *devoluere* en adidaktisk situasjon til studentene. Dette betyr å introdusere problemet, informere om "reglene" for å operere i situasjonen, og få studentene til å akseptere ansvaret for den adidaktiske situasjon. Den andre hovedrollen er å *institusjonalisere* den kunnskapen som studentene utvikler i den adidaktiske situasjonen. Dette betyr å transformere responsen som er produsert av studentene til kulturell kunnskap representert ved konvensjonell notasjon, slik at den kan brukes utenfor den situasjonen der den er utviklet.

Begrepet *didaktisk kontrakt* henspiller på at interaksjonen mellom læreren og studentene styres av regler som er relatert til den spesielle matematiske kunnskapen som en didaktisk situasjon handler om (Brousseau, 1997). Disse reglene danner et sett av gjensidige forpliktelser og felles forventninger, som er resultat av en (oftest implisitt) forhandling. Den didaktiske kontrakten handler om relasjonene mellom de adidaktiske og didaktiske dimensjonene til en situasjon, og det er lærerens rolle å organisere disse (Artigue, Haspekian & Corblin-Lenfant, 2014). Dette skjer under devolusjonen, der læreren forhandler en didaktisk kontrakt som midlertidig tillater en overføring av ansvar med tanke på målkunnskapen, fra læreren til studenten. En didaktisk situasjon kan således forstås som bestående av en adidaktisk situasjon og en tilhørende didaktisk kontrakt (Artigue et al., 2014).

Etter devolusjonen følger fire situasjoner (eller faser) der lærerens rolle og kunnskapens status endres: aksjonssituasjonen, formuleringssituasjonen og valideringssituasjonen er (intensjonelt) adidaktiske situasjoner, mens institusjonaliseringssituasjonen ikke er adidaktisk. Basert på Brousseau (1997) er de fire situasjonene kort beskrevet i det følgende. *Aksjonssituasjonen* er der studentene engasjerer seg i det gitte problemet på grunnlag av dets indre logikk, uten lærerintervensjon. Studentene lager en representasjon av situasjonen som fungerer som en "modell" som guider dem i deres beslutninger. *Formuleringssituasjonen* er der studentenes formuleringer er nyttige for å operere indirekte på miljøet – det vil si, for å formulere en strategi for å operere på miljøet. Her har læreren en rolle som innebærer å hjelpe til med utvekslingen av observasjoner og sørge for å synliggjøre forskjellige formuleringer i klasserommet. *Valideringssituasjonen* er der studentene prøver å forklare et fenomen eller å verifisere en formodning. Her fungerer læreren som en leder av en vitenskapelig debatt og griper inn (ideelt sett) bare for å strukturere debatten og motivere studentene til å bruke mer presise matematiske begreper. *Institusjonaliseringssituasjonen* er der læreren informerer studentene om formell matematisk terminologi og trekker fram definisjoner og matematiske resultater som er viktige for at den kontekstualiserte kunnskapen (utviklet av studentene gjennom de tre foregående fasene) skal kunne oppnå status som kulturell kunnskap som kan brukes i settinger som er forskjellige fra den opprinnelige som læreren satte opp. Figur 3 illustrerer forløpet i en undervisningssituasjon i TDS: Læreren devoluerer en adidaktisk situasjon til studentene for virksomhet i aksjon, formulering og validering (ideelt sett utvikler situasjonen seg med faser i denne rekkefølgen). Læreren institusjonaliserer deretter resultatet av studentenes aktivitet i de adidaktiske fasene.



Figur 4. *Forløpet i en undervisningssituasjon, der de didaktiske fasene er representert med prikket linje og de adidaktiske fasene med hel linje*

Metodisk tilnærming

Forskningen som rapporteres i denne artikkelen er en del av en kvalitativ casestudie (Strømskag Måsøval, 2011) av to studentgruppers løsning av algebraiske generaliseringsoppgaver innenfor det fireårige programmet *Allmennlærerutdanning med vekt på realfag*, ved en høgskole. Forskningsdeltakerne i studien som presenteres her er en av de to studentgruppene (i casestudien) og en av lærerne som underviste dem Matematikk 1, som dataene er hentet fra. De tre studentene (Anne, Helen og Paul)[2] var i sitt første studieår, og gikk i en klasse med totalt 66 studenter. De har alle full fordypning i matematikk fra videregående skole (2MX og 3MX)[3] med meget gode resultater. Læreren, som var min kollega, hadde lang erfaring som matematikkdidaktiker da dataene ble samlet inn. Forskningsspørsmålet som er stilt er: *Hvilke egenskaper ved undervisningssituasjonen begrenser studentenes mulighet for å finne et algebraisk uttrykk for generaliteten i et figurmønster?* Dataene som har gitt svar på dette er: en matematikkoppgave som ble gitt til studentene, og den videofilmede episoden der de samarbeider om å løse oppgaven, der også læreren deltar. Den analyserte episoden er en ordinær undervisningssituasjon ved høgskolen i den forstand at den ikke er et resultat av didaktisk ingeniørvirksomhet basert på TDS. Min rolle har vært som ikke-deltakende observatør mens jeg videofilmet episoden som er analysert.

Analysen av matematikkoppgaven som studentene arbeidet med er forankret i analysen av begrepet figurmønstre og i TDS. Transkripsjonen av den beskrevne klasseromsepisoden har, sammen med resten av transkripsjonene av videomaterialet fra casestudien som denne studien er en del av, blitt analysert ved en åpen kodingsprosess, en såkalt *konstant komparativ analyse* (Corbin & Strauss, 2008). Dette innebærer at elementer i datamaterialet som er blitt tolket som begrensende for studentenes mulighet for å løse oppgaven, har blitt kodet ut fra rollen begrensningene spiller i forhold til målkunnskapen, og ut fra rollen de spiller i undervisnings-situasjonen. Disse kodene har så blitt gruppert i sju kategorier, som igjen har blitt gruppert i tre kjernekategorier.[4] Den siste konseptualiseringen i kjernekategorier er en abstraksjon som har vært guidet av TDS på den måten at de sju (under-)kategoriene har blitt relatert til begreper og modeller fra TDS. De tre kjernekategoriene er: ”begrenset feedbackpotensial i adidaktiske situasjoner”; ”kompleksitet forbundet med overgang fra en aksjonssituasjon til en formuleringssituasjon”; og ”kompleksitet forbundet med aktivitet i en valideringssituasjon”. Analysen som presenteres i denne artikkelen illustrerer kjernekategorien *Begrenset feedbackpotensial i adidaktiske situasjoner.* Den aktuelle episoden er valgt fordi den: (1) viser sammenhengen mellom det adidaktiske miljøet og studentenes løsning av oppgaven; og (2) hvordan målkunnskapen blir (utilsiktet) endret som følge av at læreren endrer miljøet.

Resultater

Resultatene fra analysen av det empiriske materialet presenteres i to deler. Først presenteres en kort analyse av matematikkoppgaven, som utgjør en viktig del av miljøet for målkunnskapen. Deretter presenteres en analyse av studentenes arbeid med oppgaven; denne analysen består av tre deler som hver forklarer en egenskap ved miljøet som begrenser studentenes muligheter for å utvikle målkunnskapen.

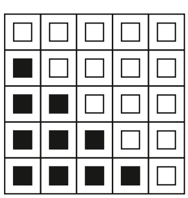
A priori analyse av matematikkoppgaven

Oppgaven som er gitt (figur 4) er designet av læreren, og er den siste av fire oppgaver (med flere deloppgaver) om figurmønstre, innenfor temaet algebra. Studentene arbeidet med de fire oppgavene i åtte undervisningstimer (á 45 minutter), fordelt på to dager med en ukes mellomrom. Figurmønstre var valgt av læreren som kontekst for algebra for å stimulere til bruk av algebraiske symboler i arbeid med å representere generaliteter, og videre, for å benytte geometriske konfigurasjoner som referanser for algebraiske uttrykk.

I en samtale med meg uttrykte læreren at den tilsiktede kunnskapen i oppgaven er en matematisk setning (et teorem) som uttrykker at summen

Oppgave
Thorvaldsens museum i København inneholder flere gulvmosaikker med matematisk innhold.[i] Vi så på en mosaikk forrige fredag, og her skal vi se på et nytt eksempel. Dette mønsteret kan tenkes bygd opp av like store kvadratiske felter som består av lyse og mørke mosaikkfliser.

På figuren nedenfor er mønsteret gjengitt skjematisk med ■ for hver av de mørke kvadratflisene i mosaikken og □ for hver av de lyse.



a) Hvis denne figuren var del av en følge figurer, hvordan ville den neste se ut?
b) Hvilke figurtall finner du i de lyse og mørke feltene, og i figuren som helhet?
c) Uttrykk det som figuren forteller om disse tallene som en matematisk setning.

[i] Bildet er hentet fra: Bjerg, M. Christensen, L., Hartz, V., Hessing, S., Korsgaard, J. et al. (2000). *Matematik til tiden*. Samsø: Forlaget Matematik.

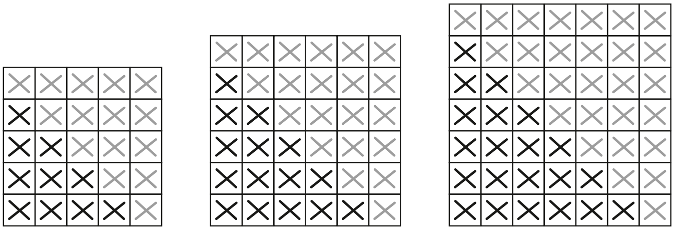
Figur 4. *Generaliseringsoppgave gitt til studentene* av to påfølgende trekanttall er lik kvadrattallet med samme posisjon som det største av de to trekanttallene. Denne setningen uttrykker ekvivalens mellom to uttrykk – en likhet som kan representeres i algebraisk notasjon ved for eksempel $T_{n+1} + T_n = n^2$, der $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ betegner det *n*-te trekanttallet. Figurmønsteret i oppgaven er således av typen ekvivalensmønster.

Oppgaven har tre deloppgaver som hver tenkes å utgjøre et miljø for en adidaktisk fase for teoremet det siktes mot: Å finne en fortsettelse av figurmønsteret representerer for studentene å finne en "modell" som leder dem mot teoremet (oppgave (a): *aksjon*). Å identifisere hvilke figurtall som utgjør den invariante strukturen i mønsteret representerer for studentene å utvikle (naturlig og algebraisk) språk for å uttrykke sine observasjoner (oppgave (b): *formulering*). Å uttrykke hva mønsteret forteller dem (i form av et generelt numerisk resultat) representerer for studentene å verifisere teoremet som det siktes mot (oppgave (c): *validering*). Det er relevant å bemerke at denne kategoriseringen av oppgaven med begreper fra TDS er basert på min konseptualisering i ettertid. Da dataene ble samlet inn var verken den observerte læreren eller jeg kjent med TDS.

Begrensning i muligheten til å formulere generelt numerisk resultat

Manglende kjennskap til den vitenskapelige betydningen av begrepet "matematisk setning"

Anne, Helen og Paul har tegnet de tre første elementene i et figurmønster (figur 5.) der det andre og tredje elementet er en fortsettelse av et mønster som starter med figuren som er gitt i oppgaven.



Figur 5. *Anne, Helen og Pauls fortsettelse av figurmønsteret*

Studentene har funnet ut at for det første elementet i dette figurmønsteret (5x5-kvadratet som er gitt i oppgaven) er antallet svarte komponenter (representert ved svarte x-er) lik summen av de fire første naturlige tallene, og antallet hvite komponenter (representert ved grå x-er) er lik summen av de fem første naturlige tallene. Studentene har observert at dette er en regelmessighet som stemmer også for de to neste elementene i mønsteret: De har verifisert at for det andre elementet (et 6 x 6-kvadrat) er antallet svarte komponenter lik summen av de fem første naturlig tallene og antallet hvite komponenter er lik summen av de seks første naturlige tallene, og likeledes for det tredje elementet (et 7 x 7-kvadrat).

I oppgave (b) og (c) lurer studentene på hva som menes med "figurtall" og "matematisk setning", og Paul går og henter læreren for å få hjelp. Med dette opphører den adidaktiske situasjonen. Læreren har forutsatt, som en del av det adidaktiske miljøet, at studentene har kjennskap til begrepene figurtall og matematisk setning (i betydningen teorem). Studentene har funnet et tilfredsstillende mønster, og identifisert strukturen i de tre første elementene i dette mønsteret. At de ikke kaller summen av naturlige tall for "trekanttall" er ikke avgjørende for generaliseringsprosessen: generaliteten i mønsteret kan uttrykkes ved at det n-te kvadrattallet er lik summen av de naturlige tall opp til $(n-1)$ pluss summen av de naturlige tall opp til n. At de ikke kjenner begrepet matematisk setning (i betydningen teorem) er derimot medvirkende til at generaliseringsprosessen stopper opp. Begrepet matematisk setning er det elementet i miljøet som er ment å sørge for at de empiriske observasjonene blir generalisert. Konklusjonen er at det adidaktiske miljøet som studentene opererer i ikke er i samsvar med den tilsiktede kunnskapen – miljøet gir ingen respons til studentene hvorvidt det de har funnet ut er tilstrekkelig for å løse oppgaven. I neste seksjon presenteres analysen av det som skjer når læreren kommer for å hjelpe dem med oppgaven.

Implisitt bruk av et generisk eksempel

Når læreren ankommer rommet hvor studentene sitter, finner følgende samtale sted (for transkripsjonskoder, se appendiks A):

590	Lærer:	"Hvilke figurtall" [leser fra oppgaven] da er det på en måte at vi er ned på et sånt grunnfjell med sånne standard ... eh tall .. som vi på en måte har i verktøykista. Og hvis vi ser på figuren som helhet [Anne: ja?] hva gjenkjenner dere? Kjenner dere igjen noen ting der?
591	Paul:	At det er fem i andre?
592	Lærer:	Ja.
593	Anne:	Ja, det er jo kvadrater. Og så ...
594	Lærer:	Ja, det er kvadrater ja ... kvadrattall.
595	Paul:	Og så har du ni og seksten med antall .. nei det .. ikke det. Ti kanskje det er?
596	Lærer:	Og så er det disse svarte og hvite. Kjenner dere igjen dem?
597	Anne:	Femten, tjueen ... hm ...

I ytring 591 fokuserer Paul på det første elementet i figurmønsteret (5 x 5-kvadratet). Jeg tolker hans neste ytring (595) til å referere til de svarte og hvite komponentene i dette 5x5-kvadratet. De numeriske verdiene han foreslår først er feil, men så foreslår han en ny verdi som stemmer med antall svarte komponenter i det første elementet. Læreren responderer ikke direkte på Paul sin respons, og når læreren spør om de gjenkjenner de svarte og hvite (ytring 596), responderer Anne med å oppgi antall svarte og hvite komponenter i det neste elementet (et 6x6-kvadrat). Dette synes å gjøre Paul usikker på hva læreren spør etter; han lurer på om det er kun det første elementet de skal betrakte eller om det er følgen med elementer læreren mener:

598	Paul:	Hvis vi skal se sammenhengen, det er bare det her vi skal se på nå? [I det han sier "her" ringer han rundt med blyanten 5x5-kvadratet gitt i oppgaven]. Det er ikke de neste figurene på en måte?
599	Lærer:	Dere kan godt se på den sånn som den står der ... eh ...
600	Paul:	Ikke videre nei.

Lærerens respons i ytring 599 tolker jeg som en bekreftelse på at han mener at det er tilstrekkelig for studentene å se på elementet som er gitt i oppgaven som grunnlag for å svare på oppgave (b) og (c). Dette er et resultat av at han betrakter 5x5-kvadratet som et generisk eksempel for elementene i figurfølgen, der 5x5-kvadratet illustrerer at summen av det fjerde og det femte trekanttallet er lik det femte kvadrattallet. Det er generisk i den forstand at det er en representant for klassen av elementer som har den egenskapen at de kan skrives som en sum av det ($n-1$)-te og det n-te trekanttallet. Disse generelle egenskapene er imidlertid ikke berørt i samtalen mellom læreren og studentene. Lærerens bruk av det generiske eksemplet er implisitt: han referer ikke til de generelle egenskapene ved eksemplet.

Påstanden fra læreren i dialogen ovenfor om at det er nok å se på ett element i figurmønsteret (generaliteten av 5x5-kvadratet) er i tråd med teksten i oppgaven (som han har formulert selv). Bruk av *entallsform* av substantivet "figur" indikerer at elementet gitt i oppgaven betraktes som generisk:

> Hvilke figurtall finner du i de lyse og mørke feltene, og i *figuren* som helhet? [Oppgave (b), trykk lagt til]
>
> Uttrykk det som *figuren* forteller om disse tallene som en matematisk setning. [Oppgave (c), trykk lagt til]

Etter å ha funnet ut at 5x5-kvadratet inneholder ti svarte og femten hvite komponenter, beskriver studentene strukturen til de neste elementene i figurfølgen. De observerer at elementene utvikler seg ved å legge til en ekstra rad (på toppen) med en komponent mer, og at antallet svarte komponenter i det neste elementet er lik antall hvite komponenter i det nåværende elementet. Læreren minner studentene på at de tidligere har skrevet ti som en sum av de fire første naturlige tall, og forteller dem videre at tall med denne strukturen refereres til som "trekanttall". Han referer til 5x5-kvadratet, som jeg tolker som et generisk eksempel (for han) når han fortsetter:

640 Lærer: Så det er det som er litt av cluet her altså. At den figuren .. må nesten bare si det altså, at den figuren der gir en slags sammenheng mellom trekanttall og kvadrattall.

Dette etterfølges av en kommentar fra Anne om at hun hadde vært usikker på hva som mentes med begrepet "figurtall". Etter noen vekslinger mellom henne og læreren, fokuserer hun igjen på begrepet "matematisk setning", som hittil ikke har vært tatt opp av læreren:

651 Anne: "Uttrykk det som figuren forteller om disse tallene som en matematisk setning" [siterer fra oppgaven]. [Lærer: ja?] Skal vi skrive det som en formel eller skal vi formulere det?

Ut fra at studentene senere ga løsningen på oppgave (c) som en formulering (i naturlig språk) av strukturen til det første elementet i følgen, er det sannsynlig at Anne i ytring 651 prøver å finne ut om læreren har som intensjon at de skal presentere løsningen på oppgaven som en formel (potensielt i matematisk notasjon), eller som en formulering (potensielt i naturlig språk). I sin respons fortsetter læreren å bruke det første elementet som et generisk eksempel:

652 Lærer: Ja, da kan dere liksom tenke på den der nå [peker på 5x5-kvadratet som de har tegnet]. Hvis dere ser på den som en helhet, hva for et kvadrattall er det den .. viser oss? Hva for et nummer?

653 Helen: Fem eller?

654 Anne: Hvilket nummer i rekka eller?

655 Lærer: Hvilket nummer i rekka av kvadrattall, ja.

656 Anne: Jeg kan jo tenke meg at det er ... nummer fem da.

657 Lærer: Ja, nummer fem.

658 Anne: For det hadde passet veldig fint for oss [smiler].

659 Lærer: Ja [studentene ler]. Ja da, men der har vi på en måte ikke så veldig mye valg altså. Det er nummer fem .. det er tjuefem .. det er kvadrattall nummer fem .. [Anne: mmm] og hvis vi da tenker på den som sammensatt av trekanttall, så kan dere tenke .. hva for et nummer i rekka av trekanttall er det som disse svarte og hvite representerer?

På Annes spørsmål i ytring 651, responderer ikke læreren med å forklare hva en matematisk setning er. I stedet retter han oppmerksomheten mot

5x5-kvadratet som studentene har tegnet. Læreren hadde ikke sett denne gruppens løsning på forrige oppgave (som var å formulere en matematisk setning), og han trodde at studentene var kjent med begrepet matematisk setning. Dette fortalte han i en samtale med meg etter episoden som er analysert her. Studentenes løsning av den forrige oppgaven innebar imidlertid ikke bruk av matematisk setning i betydningen teorem slik lærerens intensjonen var. Læreren tolker derfor Annes spørsmål om matematisk setning til å innebære et problem med å uttrykke den invariante strukturen i mønsteret, og ikke som et problem med begrepet matematisk setning i og for seg. Av den grunn, når læreren opererer på miljøet, prøver han å hjelpe dem med å oppdage strukturen til elementene, hvordan disse er bygd opp. Dette gjør han ved å bruke et generisk eksempel slik at de skal kunne utvikle den tilsiktede kunnskapen: en matematisk setning om ekvivalens mellom et kvadrattall og summen av to trekanttall. Men studentenes tolkning av lærerens eksempel som komplett i seg selv begrenser mulighetene for å løse oppgaven. I neste seksjon presenteres konsekvensen av at studentene tillegger begrepet "matematisk setning" en annen betydning enn den som læreren legger til grunn, og at læreren gjør implisitt bruk av et generisk eksempel.

En Topaze-effekt

Som forklart ovenfor benytter læreren et generisk eksempel for å illustrere den tilsiktede sammenhengen mellom trekanttall og kvadrattall. Stilt overfor studentenes vage formuleringer om strukturen i mønsteret, kommer læreren med mer og mer avgrensede spørsmål (ytringene 652, 655, 657 og 659). Kunnskapen som er nødvendig for å komme med svaret endres, likeledes meningen med denne kunnskapen: Det er mulig å svare på lærerens spørsmål i ytring 659 (at det er snakk om det fjerde og det femte trekanttallet) uten å måtte formulere noe om det generelle tilfellet. Dette betyr at målkunnskapen er forsvunnet, et fenomen som i TDS refereres til som en Topaze-effekt (Brousseau, 1997).[5]

Læreren forlater studentene etter ytring 659, og studentene samarbeider for å finne posisjonene til trekanttallene som inngår i det femte kvadrattallet. Denne oppgaven er forskjellig fra den opprinnelige, og er et resultatet av interaksjonen mellom studentene og læreren gjengitt ovenfor. Utfallet av studentenes engasjement med den "nye" oppgaven er en formulering i naturlig språk av egenskapen til et spesielt element i figurfølgen: at det femte kvadrattallet er bygd opp av det fjerde og det femte trekanttallet. Studentene er upresise i sine formuleringer – de uttrykker ikke sammenhengen mellom det femte kvadrattallet og summen av det fjerde og femte trekanttallet i klar tekst som en påstand om en likhet mellom to størrelser:

675 Anne: Em ... hele .. da er det ... kvadrattall nummer fem. Kan vi ikke bare skrive det da? [Paul: mmm] ... og ... og når vi snakker om ... hvite så er det ..

676 Helen: Eh ... trekanttall ... da er det ...?

677 Anne: Trekanttall nummer fem. [Helen: ja]. Er det ikke det?

678 Paul: Mmm

679 Anne: Det forrige er trekanttall nummer fire.

680 Helen: Matematisk setning ...

681 Anne: "Uttrykk det som ..." [leser fra oppgaven]. Vi har jo uttrykt det her da. Det er ikke noen set .. én lang setning .. men jeg vet ikke ... Hele figuren har jo .. er kvadrat. Ja, jo ... [ler]. Det er jo kvadrattall nummer fem [Helen: ja] ... Trekant .. men ... vi har jo uttrykt det nå, syns jeg [ser på Paul].

De gjør ikke noe forsøk på å generalisere denne egenskapen til å gjelde for et vilkårlig element i figurfølgen, verken i naturlig språk eller i algebraisk notasjon.

682 Paul: Ja, den som kan finne på noen *formel* for dette her, den er nå god da [ler].

683 Anne: Nei, men det står ikke [Paul: nei] at vi skal ha formel. [Paul: ja] Vi skal uttrykke det som en matematisk setning. Vi har uttrykt det nå. Det er ikke så veldig bra [ler], men vi har fått fram det relevante, tror jeg.

Anne spurte læreren om de skulle skrive den søkte matematiske setningen som en formel eller om de bare skulle formulere det (ytring 651). Paul og Annes ytringer (682 og 683) indikerer at de har tolket lærerens respons (ytring 652) på dette spørsmålet som at det var en formulering (i naturlig språk) om figurtallene i 5x5-kvadratet som var målet. Annes ytring i 683 tyder på at hun konkluderer med at en formel er forskjellig fra en matematisk setning. Studentene har gitt et svar på oppgaven i form av egenskapene til et 5x5-kvadrat. Dette er forskjellig fra den kunnskapen som oppgaven siktet mot – et generelt numerisk resultat uttrykt i algebraisk notasjon.

Diskusjon og konklusjon

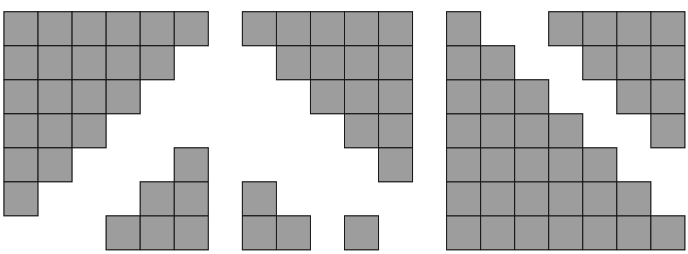
I åtte undervisningstimer fordelt på to dager (med en ukes mellomrom) jobbet klassen i små grupper med figurmønstre. Den ene dagen handlet det om to ordinære figurmønstre, den andre dagen om to ekvivalensmønstre (oppgaven analysert i denne artikkelen er den siste av disse). Læreren ga en kort introduksjon til begrepet figurtall den første dagen, der trekanttall og kvadrattall ble presentert som eksempler. De første geometriske konfigurasjonene av disse ble tegnet på tavla, og generaliseringen ble gitt i form av en funksjonsrelasjon mellom posisjon og antall komponenter. Kategoriseringen i ordinære mønstre og ekvivalensmønstre er gjort av meg ved analysen av datamaterialet; dette er ikke begreper som ble brukt av læreren i introduksjonen eller i oppgavene.

Som vist ovenfor lyktes ikke studentene med å generalisere mønsteret i oppgaven i form av et teorem. Analysen av studentenes arbeid med den første oppgaven om ekvivalensmønster (rapportert i Strømskag Måsøval, 2011) viser at de heller ikke i den oppgaven generaliserte mønsteret i form av et teorem (de oppfattet mønsteret som et ordinært mønster og generaliserte det i form av en funksjon mellom posisjon og antall komponenter). Ifølge analysen av kunnskapen knyttet til figurmønstre presentert ovenfor, er kunnskapen som det siktes mot forskjellig for ordinære mønstre og ekvivalensmønstre. Devolusjonen ble vanskeliggjort av at det ikke ble skilt mellom de to typene mønster – deres ulike egenskaper og hensikten med dem var ikke en del av den didaktiske kontrakten, heller ikke betydningen av matematisk setning som teorem. Undervisningssituasjonen resulterte i en Topaze-effekt, et fenomen som medfører at målkunnskapen forsvinner. Topaze-effekten er en konsekvens av de skjulte reguleringene av interaksjonen i det matematiske klasserommet – reguleringer som er skapt av de gjensidige forpliktelsene og forventningene som læreren og studentene har til hverandre. I den analyserte episoden endrer læreren oppgaven slik at det blir mulig for studentene å komme med et svar, men der svaret er knyttet til en annen kunnskap enn den opprinnelig tilsiktede. Dette holder den didaktiske relasjonen intakt, og fiksjonen om at læring har funnet sted kan vedvare.

Oppgaven analysert i denne artikkelen er designet med utgangspunkt i bildet av en gulvmosaikk (se figur 4), og det er gitt kun ett element (av et figurmønster som tenkes å fortsette i det uendelige). Dette, sammen med bruken av entallsform ("figuren"), skaper usikkerhet om intensjonen med oppgaven. Videre er det et problem med oppgavens design fordi studentene kommer med gyldige løsninger på oppgavene (a) og (b), men disse løsningene danner ikke et tilfredsstillende miljø for å kunne løse oppgave (c). Usikkerheten om intensjonen med oppgaven forsterkes av lærerens implisitte bruk av et generisk eksempel. Det er et vanlig fenomen i matematikkundervisning at vi lærere bruker eksempler for å vise generelle egenskaper ved matematiske objekter, men ikke uttrykker oss eksplisitt om de generelle egenskapene til eksemplet (Mason & Pimm, 1984; Rowland, 2000). Mason og Pimm (1984) peker på viktigheten av at lærere er tydelige på hva de ser som generelt i det spesielle, slik at studentene også kan få kjennskap til det generelle og bli kompetente i å generalisere. Generiske eksempler er viktige typer bevis for gyldigheten av matematiske uttrykk som representerer invariante strukturer i figurmønstre.

Forskningsspørsmålet som ble stilt i studien var: Hvilke egenskaper ved undervisningssituasjonen begrenser studentenes mulighet for å finne et algebraisk uttrykk for generaliteten i et figurmønster? Svaret kan oppsummeres ved tre egenskaper ved miljøet for den situasjonen de opererte i: (1) et misforhold mellom målkunnskapen og oppgavens design; (2) at studentene tillegger begrepet matematisk setning en annen betydning enn den som læreren legger til grunn; og (3) lærerens implisitte bruk av et generisk eksempel. At studentene ikke kjenner til begrepet matematisk setning i betydningen teorem, og at dette heller ikke klargjøres i løpet av interaksjonen med læreren, begrenser mulighetene deres til å forstå lærerens eksempel som generisk – og omvendt, fordi det ikke fokuseres på de generelle egenskapene til lærerens eksempel, begrenses mulighetene deres til å forstå begrepet matematisk setning i betydningen teorem. Analysen av episoden viser sammenhengen mellom den didaktiske situasjonen (en adidaktisk situasjon med en tilhørende didaktisk kontrakt) og studentenes løsning av oppgaven, som resulterer i produksjon av en Topaze-effekt.

Som nevnt ovenfor fungerer ikke løsningene på oppgave (a) og (b) som adidaktisk miljø for det generelle numeriske resultatet det siktes mot i oppgave (c). Den gitte oppgavens design er ikke påvirket av TDS, men jeg vil i det følgende skissere et tenkt miljø som er inspirert av TDS, der den tilsiktede matematiske setningen vil være en optimal løsning på et problem: Miljøet består av tall representert ved utklipte figurer (bygd opp av små kvadrater), der noen eksempler er vist i figur 6.



Figur 6. *Noen trekanttall representert ved figurer bygd opp av små kvadrater*

Oppgaven vil innebære: (1) å eksperimentere med ulike figurer som kan settes sammen til kvadrater (*aksjonssituasjon*); (2) å lage en oppskrift for å velge to figurer som kan settes sammen til et på forhånd valgt kvadrat (*formuleringssituasjon*); (3) å begrunne hvorfor oppskriften er riktig for et vilkårlig kvadrat (*valideringssituasjon*).

Det som er beskrevet ovenfor er rammene for et adidaktisk miljø. Oppskriften det siktes mot vil innebære at et kvadrat med sidelengde n settes sammen av to figurer, der den ene figuren har sidelengde n og den andre har sidelengde $(n-1)$. En viktig observasjon vil være at et figur med sidelengde n består av $(1+2+3+...+n)$ ruter. Dette inngår videre i observasjonen av at når to påfølgende figurer settes sammen til et kvadrat med sidelengde n vil antall ruter i radene i kvadratet være (fortløpende): $(0+n)$, $(1+(n-1))$, $(2+(n-2))$, ... , $(1+(n-1))$. Dette er summer som alle er lik n, og gir en begrunnelse for at resultatet er et $n \times n$-kvadrat (resonnementet kan gjøres algebraisk eller ved hjelp av et generisk eksempel). Presentasjon av at summen av de n første naturlige tallene kalles trekanttall, vil høre til institusjonaliseringssituasjonen. Miljøet skissert ovenfor har et adidaktisk potensial for den tilsiktede matematiske setningen – studentene vil ha *bruk* for denne kunnskapen til å løse problemet som er gitt, i tråd med TDS' metodologi.

Den forskningen som er rapportert her er relevant for matematikkdidaktikere og lærere på den måten at utviklingen av en undervisningssituasjon om algebraisk generalisering forklares gjennom målkunnskapens natur, samt egenskapene til det miljøet som studentene opererer i. Resultatene peker på viktigheten av at miljøet studentene opererer i har et adidaktisk potensial for å utvikle målkunnskapen. Artikkelen presenterer en analyse av en ordinær undervisningssituasjon ved hjelp av begreper og modeller fra TDS. Motivert av denne analysen er det – med utgangspunkt i TDS' metodologi – presentert et alternativt miljø for en (hypotetisk) adidaktisk situasjon som har til hensikt å utvikle den generelle sammenhengen mellom trekanttall og kvadrattall som artikkelen handler om. Det står imidlertid igjen å undersøke empirisk om det alternative miljøet er tilstrekkelig for å utvikle denne kunnskapen (i en bestemt utdanningsinstitusjon).

Referanser

Artigue, M., Haspekian, M. & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Red.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (s. 47–65). Cham: Springer.

Bachelard, G. (2001). *The formation of the scientific mind: a contribution to a psychoanalysis of objective knowledge* (M. M. Jones, Overs.). Manchester: Clinamen Press. (Originalt arbeid publisert i 1938)

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2006). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. I M. Bosch (Red.), *Proceedings of the fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1254–1263). Barcelona: Universitat Ramon Llull Editions.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques*. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: some introductory notes. I H. G. Steiner & M. Hejny (Red.), *Proceedings of the International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education* (s. 51–62). University of Bratislava. Hentet fra http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=122

Corbin, J. & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory* (3. utg.). Thousand Oaks: Sage.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram*. Oslo: Akademika Forlag.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59–78.

Katz, V. (2007). *Algebra: a gateway to a technological future*. Washington: The Mathematical Association of America.

Kendal, M. & Stacey, K. (2004). Algebra: a world of difference. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study* (s. 329–346). Dordrecht: Kluwer.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. Grouws (Red.), *Handbook of research on teaching and learning* (s. 390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study* (s. 21–33). Dordrecht: Kluwer.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. I F. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 707–762). Charlotte: Information Age Publishing.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (Red.). (2013). *Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforlaget.

Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (s. 102–119). London: John Murray.

Laborde, C. & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Introduction. I C. Laborde, M.-J. Perrin-Glorian & A. Sierpinska (Red.), *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (s. 1–12). Dordrecht: Springer.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1–19.
Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277–289.
Moss, J. & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, 1, 441–465.
Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 203–233.
OECD. (2013). *PISA 2012 results: what students know and can do – student performance in mathematics, reading and science (Volume I)*. Paris: Forfatteren.
Rowland, T. (2000). *The pragmatics of mathematics education: vagueness in mathematical discourse*. London: Falmer Press.
Sierpinska, A. (1999). *Discovery teaching/learning and the theory of didactic situations* (TDS-lecture 8). Hentet fra http://annasierpinska.rowebca.name/pdf/TDSLecture%208.pdf
Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Red.). (2004). *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.
Strømskag Måsøval, H. (2011). *Factors constraining students' appropriation of algebraic generality in shape patterns: a case study of didactical situations in mathematics at a university college* (Doktoravhandling). Universitetet i Agder.
Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter/
Warfield, V. M. (2007). *Invitation to didactique*. Bloomington: Xlibris.
Watson, A. (2009). Paper 6: algebraic reasoning. I T. Nunez, P. Bryant & A. Watson (Red.), *Key understandings in mathematics learning: a report to the Nuffield Foundation*. Hentet fra http://www.nuffieldfoundation.org/key-understandings-mathematics-learning
Whitehead, A. N. (1947). *Essays in science and philosophy*. New York: Philosophical Library.
Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer: en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Frederiksberg: Biofolia.

Notes

1 Studentene det refereres til er lærerstudenter, og læreren er matematikk-didaktiker som underviser dem i matematikk.

2 Navnene er pseudonymer.

3 2MX og 3MX var teoretiske matematikkfag i henholdsvis andre og tredje år i norsk videregående skole (etter læreplanen Reform 94), som ga grunnlag for å fortsette med realfaglige eller teknologiske studier ved universitet eller høgskole.

4 De sju (under-)kategoriene er: matematikkoppgavers design; begrepers klarhet; institusjonalisering av tidligere kunnskap; særegenheten til rekursive og eksplisitte tilnærminger; algebraisk syntaks; relevansen av begreper; og, gyldigheten av resonnementer. For en oversikt over relasjoner mellom kjernekategorier og underkategorier (med dimensjoner for underkategoriene på et kontinuum mellom ekstremverdier), se Strømskag Måsøval (2011, Kap. 9.1).

5 Topaze-effekten henspiller på Marcel Pagnols satiriske komedie "Topaze" fra 1928. Topaze er en lærer som gir en diktat til en svak elev. Når eleven har vanskeligheter med å stave et ord, avslører læreren mer og mer hvordan ordet skrives ved å lese det nesten bokstav for bokstav. På denne måten kan eleven skrive ordet uten selv å kunne stave det.

Appendiks A (Transkripsjonskoder)

...	Pause opptil 3 sekunder
..	En liten nøling
Kursiv	Trykk
[Tekst i parentes]	Redegjørelse for ikke-verbal handling
[NN: interjeksjon]	Interjeksjon av NN i løpet av en annen persons ytring

Heidi Strømskag

Heidi Strømskag er førsteamanuensis i matematikkdidaktikk ved Institutt for matematiske fag, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. Hennes forskningsinteresser omfatter undervisning og læring av algebra, oppgavedesign i matematikk, og det didaktiske forholdet mellom læreren, studentene og spesielle deler av matematisk kunnskap, i undervisningssituasjoner der intensjonen er at studentene skal lære denne kunnskapen.

heidi.stromskag@ntnu.no

Abstract

This article is about how features of a didactical situation in mathematics at a university college affect students' opportunity to solve an algebraic generalisation task. The study is conducted within a teacher education programme for primary and lower secondary education. The empirical material contains the mathematical task and a video recorded episode of three students' collaborative engagement with the task. The transcription of the episode is analysed by the constant comparative method, where the theory of didactical situations in mathematics (TDS) is used to conceptualise what features of the didactical situation that constrain the students' opportunity to solve the task. The observed didactical situation is a regular teaching situation in the sense that it is not a result of didactic engineering based on TDS. Analysis of the data shows how two factors create a gap between the teacher's intention with the mathematical task and the students' engagement with the task. The first factor is about the concept of "mathematical sentence" of which the students have a different conception than intended by the teacher. The second factor is about the teacher's use of a generic example without a discussion of its general properties. The study provides insight into the relationship between a milieu for an adidactical situation and the mathematical knowledge that the milieu enables the students to develop.