KAPITTEL 11

Et praksisperspektiv: Bruk av TIMSS Advanced i matematikkundervisningen

Ingvill Merete Stedøy
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole
Matematikksenteret, NTNU, Trondheim
Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO
Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

I dette kapitlet beskrives eksempler på hvordan man i skolen kan bruke oppgaver og resultater fra TIMSS Advanced som inspirasjon til å lage praktiske undervisningsopplegg. De vinklingene og eksemplene som gis, er naturligvis preget av forfatternes egen erfaringsbakgrunn. Ideene til måter å undervise på er akkurat det, ideer og innspill, og ikke fasitsvar på hvordan ting skal eller bør gjøres.

11.1 Relevans av TIMSS Advanced for matematikkundervisningen

Mange spør om det er riktig å bruke tid og ressurser på at Norge skal delta i internasjonale undersøkelser som TIMSS Advanced og TIMSS. Hva kan vi bruke resultatene til? Kan resultatene og elevenes feilsvar eller mangel på svar hjelpe oss til å gjøre undervisningen bedre? Det kan være interessant å se hvilke oppgavetyper våre R2-elever klarer og ikke klarer. TIMSS Advanced kan avdekke mye mer enn bare hvordan norske elever presterer sammenliknet med elever i andre land. Går man dypere inn i resultatene fra disse studiene, og ikke bare ser på og sammenlikner de generelle prestasjonene, kan det reises mange interessante og viktige debatter.

I de neste delkapitlene tar vi opp og kommer med forslag til bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i undervisningen i skolen. Disse oppgavene er hentet fra kapittel 8, 9 og 10, som gir en systematisk gjennomgang av alle frigitte oppgaver i henholdsvis algebra, kalkulus og geometri fra TIMSS Advanced 2015.

Vi skal her kort skissere noen problemområder når man ser på de norske prestasjonsresultatene, og som er relevante for undervisningsskissene som følger i de neste delkapitlene.

Resultatene i TIMSS Advanced kan indikere at elever i Norge har problemer med å lese, forstå og bruke abstrakte symboler. Det ser ut til at de strever med å skille mellom parametere og variable, uavhengige og avhengige variabler.

Det er ikke tradisjon i norske læreplaner, lærebøker og oppgaver for å jobbe med transformasjon av funksjoner, sammensatte funksjoner og omvendte funksjoner. I dette kapitlet kommer vi blant annet med skisser til undervisningsopplegg som kan bidra til å bedre elevenes forståelse av funksjonsbegrepet.

Oppgavene fra TIMSS Advanced presentert i kapittel 9 avslører at begreper som grenseverdi og kontinuitet synes å være lite forstått av mange elever i R2. Dette er sentrale begreper i funksjonslære og kalkulus og viktig kunnskap med tanke på videre studier på universitetsnivå. For mer om dette se kapittel 12, som drøfter overgangen mellom videregående skole og universitet.

Resultatene på TIMSS Advanced-oppgaver tyder på at mange norske elever mangler dybdeforståelse for viktige matematiske begreper. Det vil kunne bidra til å øke den matematiske forståelsen hvis det ikke bare legges vekt på å løse en oppgave, men også på å diskutere hvorfor metodene fungerer i en gitt situasjon. Elevene kan trenes opp til å begrunne, bruke presise begreper, forklare og bevise, både skriftlig og muntlig, gjennom måten vi legger opp undervisningen på. Alle elever vil vinne på å vite *hvorfor*, ikke bare *hvordan*. Sammenlikninger mellom ulike land både i TIMSS Advanced og TIMSS grunnskole har i tidligere rapporter pekt på at det ser ut til å være en noe ensidig vekt på oppgaveløsning i Norge, mens det er mer diskusjoner og drøftinger i klassen i andre land (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010; Grønmo et al., 2012). Vi ser imidlertid tegn på at dette er i ferd med å endre seg i Norge, og vi vil i de neste delkapitlene gi flere eksempler som kan brukes til diskusjon og drøfting.

Resultatene fra TIMSS Advanced tyder også på at norske elever har et for begrenset spekter av strategier og løsningsmetoder. I Norge har vi tradisjon for å «hjelpe elevene gjennom» oppgaven. I den grad vi gir oppgaver som krever mellomregninger og delsvar, deles oppgavene i a, b, c og så videre. Elevene loses gjennom oppgaven, og de trenger i liten grad å se helheten ved å analysere oppgaven og vurdere og planlegge løsningsstrategier. I TIMSS Advanced er det en del oppgaver der elevene selv må finne ut hvordan de skal løse oppgaven trinn for trinn. Disse oppgavene viser seg å være vanskelige for norske elever. Vi tror elevene bør utfordres til å løse det vi kan kalle flertrinnsoppgaver. Det kan for eksempel skje i undervisningssituasjoner der elevene diskuterer og samarbeider, og der de legger opp strategier og metoder de trenger for å løse oppgaven. På den måten vil de være bedre forberedt til å klare slike oppgaver også i prøvesituasjoner. Vi gir noen eksempler på slike opplegg i dette kapitlet.

Resultatene på oppgavene i TIMSS Advanced gir indikasjoner på at norske elever i liten grad klarer å vedlikeholde kunnskaper fra tidligere år. Vi ser en tendens til at elevene griper til for avanserte metoder når de skal løse oppgaver som kunne vært løst med langt enklere metoder. De mer avanserte metodene har de lært nylig, mens de enklere ofte var pensum på lavere trinn. Eksempelvis prøver de med sinussetningen når oppgaven krever bruk av formlikhet, og når sinussetningen ikke kan brukes, gir de opp. Dette kan være et tegn på at elevene ikke har utholdenhet og evne til å forkaste en metode når den ikke virker, og i stedet prøve å angripe oppgaven på en annen måte.

Prestasjonsdata fra TIMSS Advanced tyder på at norske elever er lite vant til å løse oppgaver som ikke følger et mønster og oppsett de har sett før. Norske læreplaner har klare beskrivelser av at høy måloppnåelse innebærer at elevene skal kunne bruke det de har lært på nye problemstillinger og i nye sammenhenger (KD, 2006), men dette testes i liten grad på eksamen, i alle fall på del 1 (uten hjelpemidler). Vi ser muligheter for at bruk av oppgavene fra TIMSS Advanced kan bidra til at elevene utvikler seg faglig, og at de kan bli i bedre stand til å møte uvante problemstillinger og annerledes oppgaver enn det som presenteres i lærebøkene. Oppgaveformuleringene i TIMSS er ofte annerledes enn i norske eksamensoppgaver og oppgaver fra lærebøkene. Hvis vi lykkes med å utvikle elevenes evne til å anvende kunnskapen sin i nye sammenhenger og på nye situasjoner, vil det kunne styrke deres matematiske forståelse.

11.2 Forslag til bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i programfagene R1 og R2

I dette delkapitlet beskriver vi undervisningsskisser, dvs. forslag og ideer, til bruk i undervisningen av R-kursene i videregående skole. Forslagene er basert på relevante generelle resultater for norske elever nevnt i forrige delkapittel og er knyttet opp mot ulike oppgaver fra TIMSS Advanced.

Undervisningsskisse 1

Tema: Transformasjon av funksjoner

Den første undervisningsskissen er inspirert av geometrioppgave 8 i TIMSS Advanced (se figur 11.1).

Figur 11.1 Geometrioppgave 8 fra TIMSS Advanced 2015.

La $\sin\theta = k$.

Da er $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$

Ⓐ $\sqrt{1-k^2}$

Ⓑ $1-k$

Ⓒ $-k$

Ⓓ k

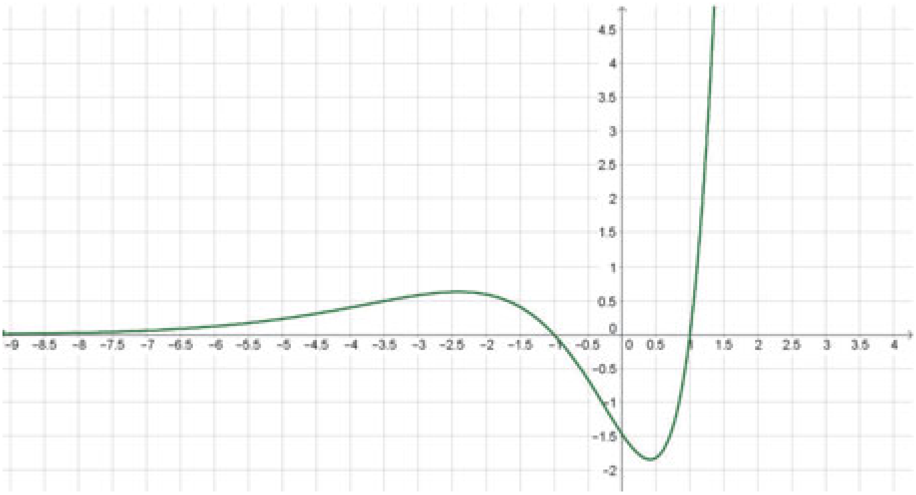
Denne oppgaven kan løses ved å tenke translasjon av funksjoner (se kapittel 10 for mer om denne oppgaven). Transformasjon av funksjoner, og spesielt translasjon, er et tema det fokuseres lite på i norske læreplaner og lærebøker. Ved å arbeide med dette temaet vil elevene kunne utvikle en dypere forståelse for sammenhengen mellom funksjonsuttrykket og grafen til en funksjon.

I denne undervisningsskissen tar vi for oss utforskning av transformasjoner og symmetriegenskaper for funksjoner, og vi foreslår ulike oppgaver som kan brukes til dette. Vi forslår også at elevene utfordres på geometrioppgave 8 (figur 11.1) fra TIMSS Advanced 2015, noe som kanskje fungerer best etter at de har jobbet med oppgavene vi foreslår. Oppgavene vil kunne hjelpe elevene når de skal jobbe med trigonometriske funksjoner og beskrive periodiske funksjoners «strekking», faseforskyvning og forflytning av likevektslinjen. Videre vil de kunne hjelpe på forståelsen av sammensatte funksjoner (se også undervisningsskisse 6) og visualisering av løsninger av differensiallikninger.

Del 1

I denne delen tar vi utgangspunkt i grafen til en funksjon, for eksempel den som er vist i figur 11.2. Læreren lager 5 kopier av grafen på samme ark, merker figurene a, b, c, d og e og deler så ut arkene til elevene.

Figur 11.2 Grafen til en funksjon f. Del 1 av undervisningsskisse 1.



Elevene får følgende oppgaver til det utdelte arket:

På arket ser du grafen til en funksjon f. Bruk én figur til hver deloppgave og tegn grafen til funksjonene i samme koordinatsystem som grafen til f for å se sammenhenger mellom grafene.

a) $f(x) + 2$ og $f(x) - 2$
b) $f(x + 2)$ og $f(x - 2)$
c) $2f(x)$ og $f(2x)$

d) $f(2x-2)$ og $f(2(x-2))$
e) $-f(x)$ og $f(-x)$

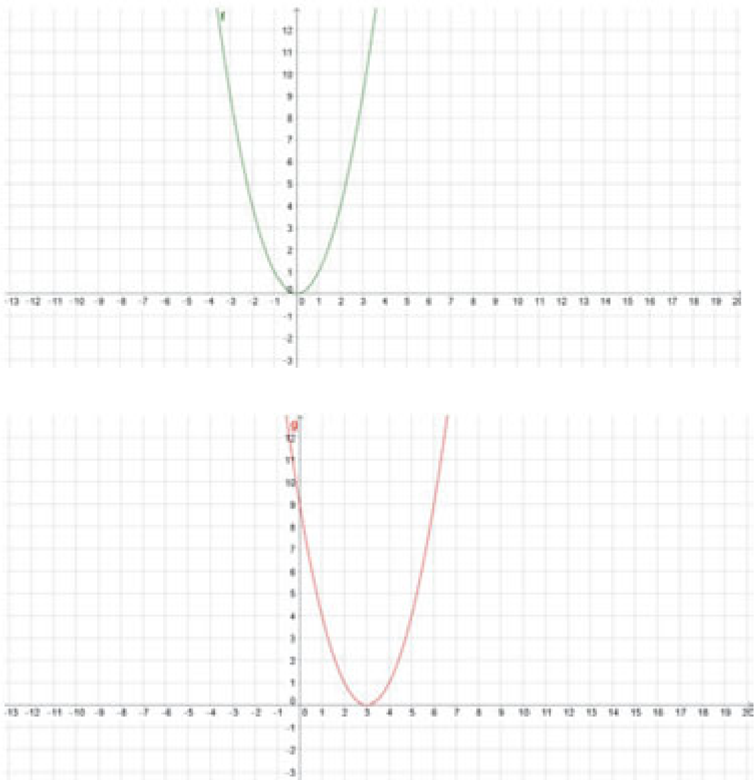
Beskriv for hver deloppgave hva som skjer med grafene du har tegnet sammenliknet med den opprinnelige grafen.

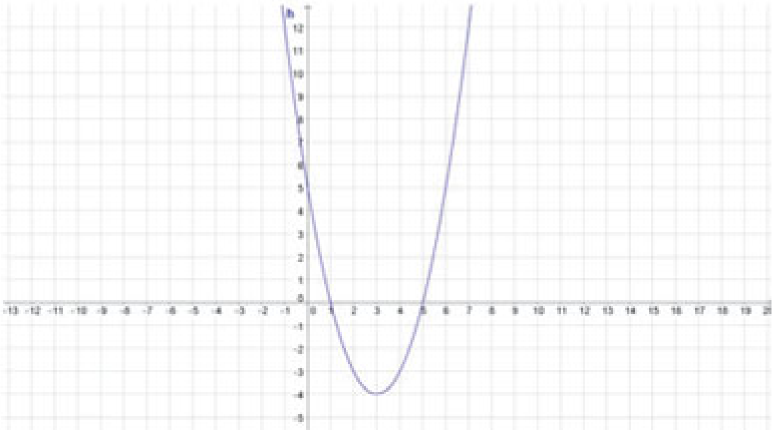
Del 2

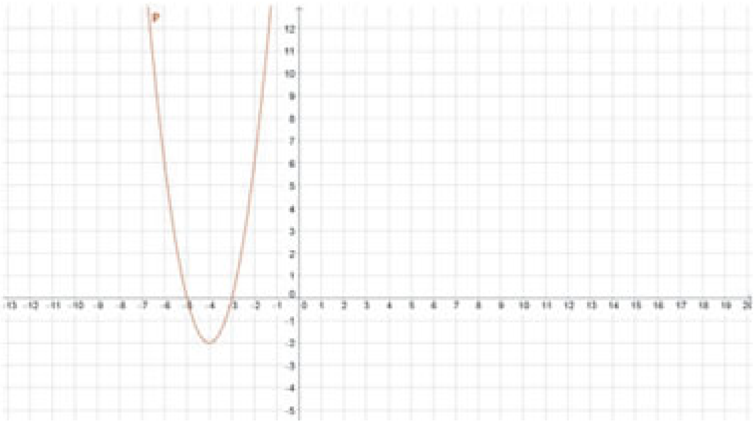
Del 2 bygger videre på del 1, der elevene nå får følgende oppgave til figur 11.3:

Nedenfor ser du fire parabler. Parabelen øverst til venstre er grafen til funksjonen $f(x) = x^2$. Bruk det du fant ut i oppgaven foran til å finne et funksjonsuttrykk for de andre parablene.

Figur 11.3 Figur til del 2 av undervisningsskisse 1.







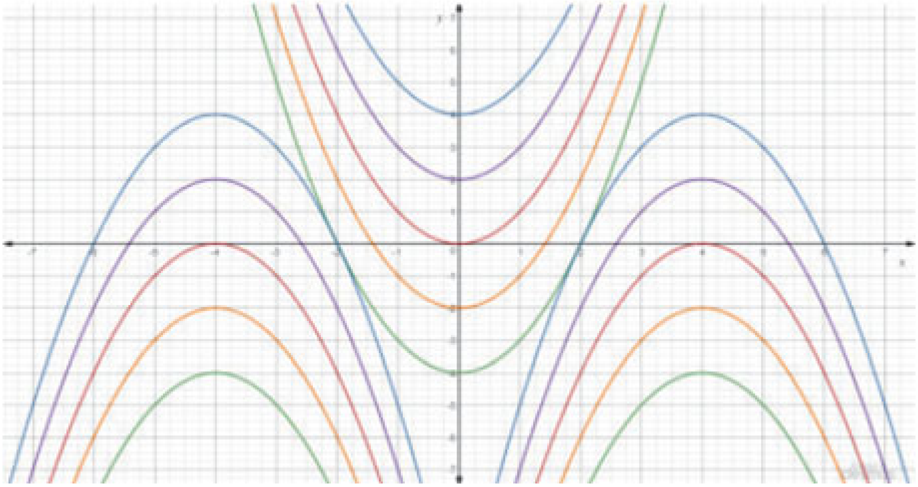
Del 3

I denne delen får elevene følgende oppgaver som er hentet fra https://nrich.maths.org:

I de to første oppgavene skal elevene bli bedre kjent med sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og graf (figur 11.4 og 11.5). Den tredje oppgaven (figur 11.6) kan også ses i sammenheng med undervisningsskisse 6, om sammensatte og omvendte funksjoner.

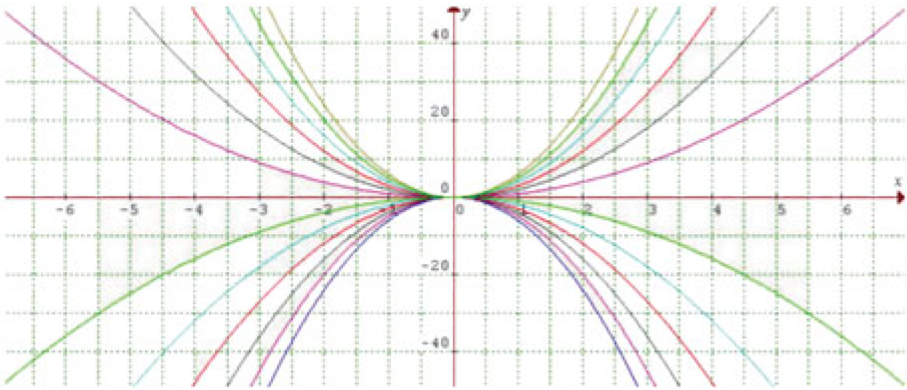
Oppgave 1: Illustrasjonen nedenfor viser grafene til femten ulike funksjoner. To av dem oppfyller likningene $y = x^2$ og $y = -(x-4)^2$. Finn likningene til de andre parablene.

Figur 11.4 Figur til oppgave 1 i del 3 av undervisningsskisse 1.



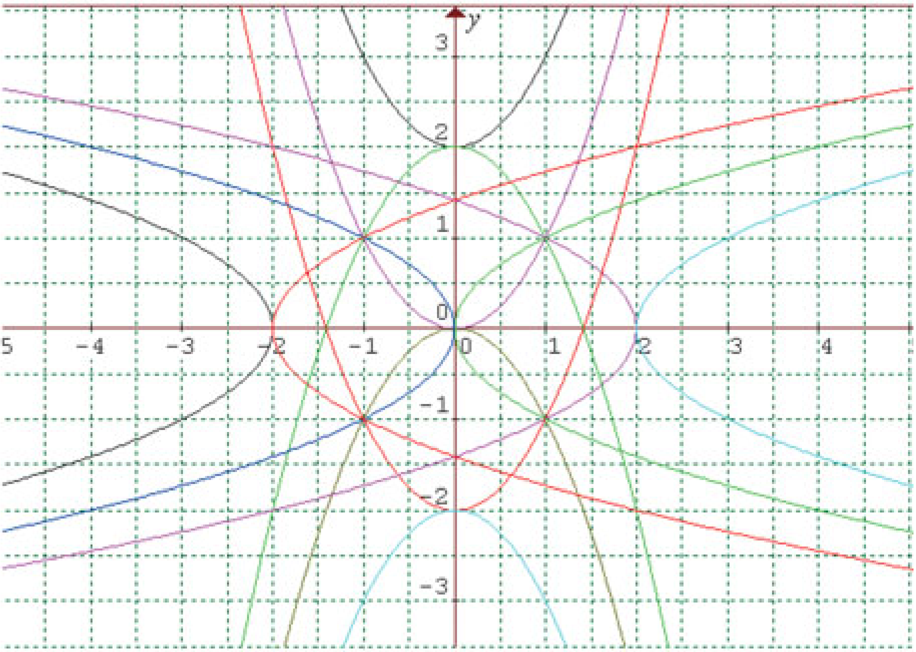
Oppgave 2: Kan du bestemme likningene til parablene i figuren nedenfor?

Figur 11.5 Figur til oppgave 2 i del 3 av undervisningsskisse 1.



Oppgave 3: Illustrasjonen nedenfor viser tolv grafer. Tre av dem oppfyller likningene $y = x^2$, $x = y^2$ og $x = -y^2 + 2$. Bestem likningene til de andre grafene.

Figur 11.6 Figur til oppgave 3 i del 3 av undervisningsskisse 1.

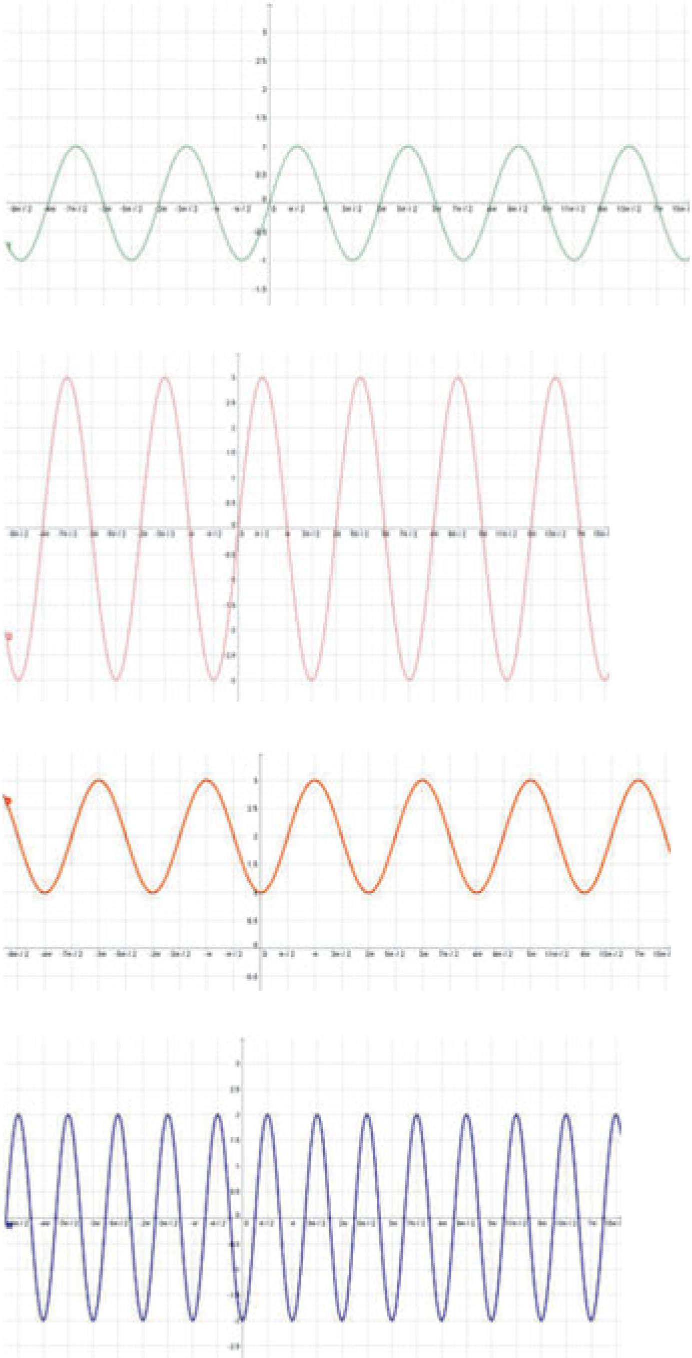


Del 4

I denne delen (figur 11.7) skal elevene sette sammen det de har lært i de andre delene og jobbe med harmoniske svingninger (sinusfunksjoner).

Elevene får følgende oppgave: Nedenfor ser du fire sinusfunksjoner. Grafen øverst til venstre er grafen til funksjonen $f(x) = \sin x$. Finn et funksjonsuttrykk for de andre sinusfunksjonene.

Figur 11.7 Figur til del 4 av undervisningsskisse 1.



Undervisningsskisse 2

Tema: Faktorisering

Denne undervisningsskissen tar utgangspunkt i noen av de problemene vi så at norske elever hadde når det gjaldt å løse algebraoppgave 1 i TIMSS Advanced 2015, se figur 11.8. I undervisningsskisse 11 bruker vi også denne oppgaven som forslag til opplegg i grunnskolen og starten av videregående skole.

Figur 11.8 Algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Dersom $x > 0$, $y > 0$, og $x \neq y$, så er $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ lik:

Ⓐ $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓑ $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓒ $\frac{1}{x - y}$

Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}$

Ⓔ $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x^2 - y^2}$

Denne oppgaven tester grunnleggende formelmanipulasjoner. De norske R2-elevene presterte svakt på oppgaven; bare 23 % av de norske elevene løste den mot et internasjonalt gjennomsnitt på 49 %. For å løse oppgaven må elevene ha en rimelig god forståelse av faktorisering og bruk av kvadratsetningene.

Faktorisering er et viktig grunnlag for å løse likninger. Mange norske elever synes å være usikre på hva som menes med faktorisering av algebraiske uttrykk med flere ledd. Vi ser ofte at elever for eksempel gjør følgende når de blir bedt om å faktorisere:

$$4x^3 - x = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x - x$$

Og så tenker de at de er ferdig med faktoriseringen, istedenfor å se direkte eller i to steg at

$$4x^3 - x = x(2x - 1)(2x + 1)$$

Elevene har for lite trening i å se på hele uttrykket og trenger øvelse for å vite hva de skal se etter. Det er mange som kan gjenkjenne konjugatsetningen når leddene er kvadrater, men som ikke ser at for eksempel

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Mange har vanskeligheter med å lage fullstendig kvadrat hvis det involverer brøkregning, slik som

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

selv om noen etter hvert løser denne ved å se eller gjette røttene til polynomet.

Vi anbefaler at elevene får arbeide mye med faktorisering av algebraiske uttrykk. Lag gjerne mange oppgaver, og utfordre elevene til å diskutere hvordan de kan se på uttrykket hva som er en god strategi før de løser oppgaven.

La elevene diskutere om uttrykk på formen $a - b$ kan faktoriseres. Start med $a^2 - b^2$. De fleste elevene vil vite at det kan faktoriseres ved hjelp av konjugatsetningen. Men det vil være uvant for mange elever å tenke at $(a - b) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ hvis $a > 0$ og $b > 0$.

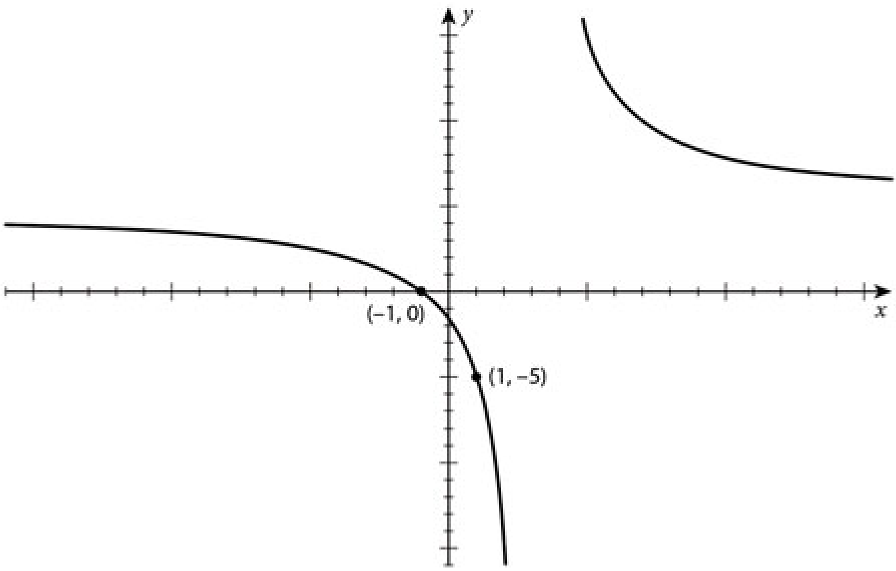
Etter at elevene har arbeidet med oppgaver av den typen vi har skissert over, kan det passe å gi dem algebraoppgaven i figur 11.8. I Norge valgte 27 % av elevene feilsvaret D. Det ser ut til at disse elevene har tenkt at man kan dele opp uttrykket i to brøker direkte, noe som indikerer svake kunnskaper om brøk og bruk av fellesnevner, og det er noe man kanskje ikke ville forvente av R2-elever.

Undervisningsskisse 3

Tema: Fra graf til funksjonsuttrykk

I denne undervisningsskissen vil vi gjøre bruk av algebraoppgave 12 fra TIMSS Advanced 2015, se figur 11.9.

Figur 11.9 Algebraoppgave 12 i TIMSS Advanced 2015.



Grafen til funksjonen $f(x) = \frac{ax+5}{x+b}$ er vist over. Finn verdiene til a og b.

$a =$ ________________

$b =$ ________________

Elevene i norsk skole blir sjelden utfordret i å finne funksjonsuttrykk for ulike funksjoner der de har ulike opplysninger om funksjonen. Resultatet for norske elever på denne oppgaven gir indikasjoner på det, ettersom bare 22 % i Norge løste oppgaven mot et internasjonalt gjennomsnitt på 33 %. Denne typen oppgaver er lite vektlagt i dagens læreplaner og lærebøker, i alle fall i R-matematikken.

Undervisningsskissen nedenfor tar sikte på å gi elevene slike utfordringer, samtidig som de skal reflektere over hvor mye de trenger å vite om funksjonen før de kan sette opp et funksjonsuttrykk. Det er ikke meningen at elevene skal bruke digitale hjelpemidler til dette opplegget.

Polynomer

Vi foreslår å starte med lineære funksjoner. Det er også et eget opplegg om det i undervisningsskisse 4.

1. En lineær funksjon f kan skrives på formen $f(x) = ax + b$, der x er den frie variabelen og a og b er konstanter som er unike for hver lineære funksjon.

   Diskuter følgende:
   - Hvor mange punkter må du ha for at det skal finnes nøyaktig én linje som går gjennom disse punktene?
   - Hvordan kan du bruke punktene til å bestemme a og b?
   - Er det flere måter å bestemme funksjonsuttrykket for den lineære funksjonen på?

2. Et andregradspolynom kan skrives på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$, der x er den frie variabelen og a, b og c er konstanter (a er forskjellig fra 0) som er unike for hver andregradsfunksjon.

   Diskuter følgende:
   - Hvor mange punkter må du ha for at det skal finnes nøyaktig én andregradsfunksjon som går gjennom disse punktene?
   - Hvordan kan du bruke punktene til å bestemme a, b og c?
   - Er det flere måter å bestemme funksjonsuttrykket for andregradsfunksjonen på?

3. Svar på de samme spørsmålene for tredje-, fjerde- og n-te-gradsfunksjoner (der n er et naturlig tall).

Brøkfunksjoner

Enkle brøkfunksjoner er på formen $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, der x er den frie variabelen, mens a, b, c og d er konstanter (c og d er ikke begge lik 0) som er unike for hver funksjon på denne formen.

Diskuter følgende:

- Hvor mange punkter må du ha for at det skal finnes nøyaktig én funksjon på denne formen som går gjennom disse punktene?
- Hvordan kan du bruke punktene til å bestemme a, b, c og d?
- Er det flere måter å bestemme funksjonsuttrykket for brøkfunksjonen på?

Hvis du kjenner noen av konstantene, kan du selvsagt klare deg med færre opplysninger.

Også her kan det passe å gi oppgaven fra TIMSS Advanced i figur 11.9 til elevene etter at de har vært gjennom noe av det vi har skissert foran. Diskuter gjerne med elevene hvordan man kan løse oppgaven, og eventuelt hva som kan ligge bak de ulike feilsvarene. For mer informasjon om oppgaven, se kapittel 8.

Undervisningsskisse 4

Tema: Rette linjer – likningsframstilling og parameterframstilling

I undervisningsskisse 3 tok vi opp og kom med noen forslag til undervisning om lineære funksjoner. Vi skal nå se litt nærmere på hvordan elevene kan jobbe med ulike framstillinger av rette linjer, og vi vil blant annet gjøre bruk av geometrioppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015, se figur 11.10.

Bare 23 % av de norske elevene svarer riktig på denne oppgaven i 2015, mens det i 2008 var 30 % av de norske elevene som svarte riktig. For mer informasjon om dette se kapittel 10. Måten oppgaven er presentert på, kan ha vært noe fremmed for norske elever. De er nok mer vant til å løse denne typen oppgaver ved bruk av vektorregning, med linjer presentert som parameterframstilling med retningsvektorer. Hadde oppgaven blitt presentert som en vektoroppgave / linjer skrevet med parameterframstilling kan det være at flere norske elever hadde svart riktig. Men som vi har påpekt flere andre steder i boka, er det en fordel om oppgaver til elevene presenteres på ulike måter, det er i seg selv en måte å øke deres matematiske forståelse på. Å bruke denne oppgaven fra TIMSS Advanced kan derfor bidra til det.

Figur 11.10 Geometrioppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Kva for ei av desse linjene er vinkelrett på linja $\mathbf{6x+2y=4}$ og går gjennom punktet $(-6, 5)$?

Ⓐ $3x - y = -23$

Ⓑ $3x - 7 = 13$

Ⓒ $3x - 9y = 9$

Ⓓ $x - 3y = -7$

Ⓔ $x - 3y = -21$

Mange norske elever lærer faktakunnskaper, men er lite vant til å lete etter sammenhenger, begrunnelser og bevis. Elevene vil gi ulike svar på spørsmålet «Hva må du vite for å kunne bestemme en rett linje?», avhengig av hvilke temaer elevene jobber med. Hvis det er lineære funksjoner som er temaet, vil elevene kanskje svare at de må vite stigningstallet og konstantleddet. Hvis vektorregning er temaet, vil elevene kanskje si at de må kjenne et punkt på linjen og en retningsvektor.

Hvis du spør elever i grunnskolen, vil de nok svare at to punkter bestemmer en rett linje. Hvis du har ett punkt, vil det være uendelig mange rette linjer som går gjennom punktet, og hvis du har tre punkter eller mer, er det ikke sikkert at alle ligger på samme rette linje. Dette kan elevene i grunnskolen være i stand til å utforske og innse.

La dette være utgangspunktet for spørsmål til elever i videregående skole. Still for eksempel et åpent spørsmål av typen:

Hvilke opplysninger må du ha for å kunne bestemme en rett linje?

Oppmuntre elevene til å komme med så mange forslag som mulig. Mulige svar kan da være:

- to punkter
- ett punkt og en parallell linje
- ett punkt og en normal linje
- ett punkt og en bestemt vinkel linjen skal danne med en annen linje

Ut fra disse forslagene kan elevene få i oppgave å lage eksempler på de ulike tilfellene, konstruere linjene, legge dem inn i et koordinatsystem, og finne en likningsframstilling og en parameterframstilling for linjene.

Til videre utforskning kan elevene svare på følgende spørsmål:

- Hva er sammenhengen mellom likningsframstilling og parameterframstilling?
- Hvordan kan du finne likningsframstillingen til en linje hvis du kjenner parameterframstillingen og omvendt?
- Hvis du har en parameterframstilling for to rette linjer, hvordan kan du se om de står normalt på hverandre? Hvordan kan du se om de er parallelle?
- Hvis du har en likningsframstilling for to rette linjer, hvordan kan du se om de står normalt på hverandre? Hvordan kan du se om de er parallelle?

Etter at elevene har vært gjennom et slikt opplegg, med refleksjoner og diskusjoner, er tiden inne til å gi dem geometrioppgave 1 fra TIMSS Advanced, se figur 11.10.

Undervisningsskisse 5

Tema: Sammensatte maksimerings- og minimeringsoppgaver

Eksamensoppgaver og oppgaver i lærebøker er ofte laget slik at elevene loses gjennom oppgavene. De kan bruke én og én ferdighet eller metode av gangen, og til slutt komme fram til svaret på et sammensatt problem. Elevene læres opp til å bruke strategiene Lithner kaller «husketenkning» eller «algoritmisk tenkning» (Lithner, 2008). Alt som er forståelsesmessig vanskelig er tatt ut av oppgavene de skal løse. Bare det aller letteste blir overlatt til eleven. Dette kan enten ligge i måten oppgaven er oppdelt og strukturert på, eller det kan skje når læreren stiller hjelpespørsmål og loser elevene gjennom løsningsprosessen.

Ved å jobbe på denne måten gjør vi elevene en bjørnetjeneste. Elevene våre får ikke øvelse i å se helheten. De får heller ikke øvelse i å tenke: «Hva må jeg vite for å kunne svare på det oppgaven spør etter?», for deretter å arbeide seg systematisk fram til dette ut fra en analyse av oppgaven og opplysningene som er gitt. De blir sjelden eller aldri utfordret i det Lithner kaller «kreativ matematisk tenkning» (Lithner, 2008). Dette er tatt opp i *Tangenten* 2, 2015, der Andresen beskriver en studie av elever i videregående skole (Andresen, 2015)

Nedenfor er det noen oppgaver som elevene kan jobbe med for å trene på slik tenkning, inkludert en TIMSS Advanced-oppgave.

Oppgave 1: Bestem det største arealet

Du skal lage en trekantet inngjerding inntil en husvegg. Trekanten skal være likebeint, slik at de to sidene som dekker gjerdet er like lange. Lengden av gjerdet er s.

Hva er det største arealet området som inngjerdes kan ha?

Finn flere måter å løse problemet på.

Bestem arealet når $s = 10$.

Oppgave 2: Bestem det største volumet

Du skal lage en eske av et rektangulært stykke papp. Langsidene i rektangelet er dobbelt så lange som kortsidene. Esken skal lages ved å skjære av like kvadrater i hvert hjørne og brette opp sidekantene.

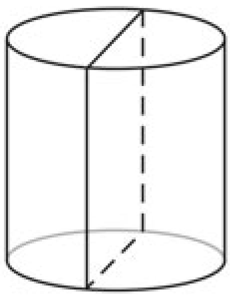
Bestem det største volumet esken kan ha.

Bestem det største volumet av esken når den korteste siden er 1 m.

Oppgave 3: Størst areal
Vis at hvis du har et rektangel med en gitt omkrets, er formen på det største arealet som rektangelet kan ha, et kvadrat.

Oppgave 4: TIMSS Advanced-oppgave
Kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced (figur 11.11). (Se kapittel 9 for mer om denne oppgaven.)

Figur 11.11 Kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced 2015.



Snittflata mellom ein sylinder og eit plan gjennom aksen til sylinderen er eit rektangel med omkrins lik 6 m. Radien til ein sylinder som tilfredsstiller dette vilkåret og som har størst mogleg volum, er

Ⓐ 2,5 m

Ⓑ 2 m

Ⓒ 1,5 m

Ⓓ 1 m

Ⓔ 0,5 m

Undervisningsskisse 6

Tema: Sammensatte funksjoner og omvendte funksjoner

Generell teori for sammensatte og omvendte funksjoner er i dag tonet ned i læreplanene for norsk videregående skole, og er tilnærmet fraværende i lærebøkene. Det er flere grunner til at man bør legge mer vekt på dette enn det gjøres i dag. Grundigere innføring i disse begrepene kan bidra til å øke den generelle forståelsen av funksjoner. Det vil også kunne bidra til å gjøre kjerneregelen for derivasjon mer forståelig for elevene.

Elevene møter funksjonsbegrepet allerede på ungdomstrinnet og ved starten av videregående skole. Elevers oppfatning av en funksjon er nært knyttet til en formel, en graf og en tabell. Vår erfaring er at mange elever ikke tenker på en funksjon som en tilordning eller avbildning fra en mengde (for våre elever tallmengde) inn i en annen. Hvorfor kan vi ikke introdusere en funksjon som en tilordning eller avbildning allerede på ungdomstrinnet?

Nedenfor følger en mulig introduksjon til funksjoner. Vi foreslår at dette kan gjøres med elever i videregående skole, selv om de skal kjenne funksjonsbegrepet godt fra ungdomstrinnet.

Enkelte elever er ikke fortrolig med notasjonen $f(x)$. De er vant til å skrive $y = x^2 - 1$ istedenfor $f(x) = x^2 - 1$. Når vi skal se på sammensatte funksjoner og omvendte funksjoner, er det nødvendig å bruke notasjonen $f(x)$. I videregående skole kan man definere begrepet funksjon omtrent som følger:

> *En funksjon er en tilordning, eller en regel, som tar et tall i en tallmengde (definisjonsmengden) og tilordner ett bestemt tall i den samme, eller en annen, tallmengde. Mengden av funksjonsverdier kalles verdimengden til funksjonen.*

Noen ganger kan regelen eller tilordningen skrives som en formel. La for eksempel f være funksjonen som dobler tallene i definisjonsmengden. Hvis definisjonsmengden er $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, får vi funksjonsverdiene

$$
\begin{array}{lll}
f(-1) = -2 & f(1) = 2 & f(3) = 6 \\
f(0) = 0 & f(2) = 4 & f(4) = 8
\end{array}
$$

Dermed er verdimengden $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$.
Vi kan skrive funksjonen med en formel: $f(x) = 2x$

La elevene velge definisjonsmengde og funksjon, beskrive den med ord og eventuelt formel og beregne verdimengden.

Hvis funksjonen g legger 4 til tallene, kan vi sette sammen funksjonene f og g. Hvis vi først anvender f og deretter g, får vi for eksempel

$$3 \xrightarrow[\cdot 2]{f} 6 \xrightarrow[+4]{g} 10$$

der f tar 3 til 6, og g tar 6 til 10.
Vis elevene notasjonen $g(f(3)) = g(6) = 10$.
La elevene finne $g(f(x))$ for de andre tallene i definisjonsmengden til f.
Kan vi lage en formel for $g(f(x))$?
Utfordre elevene: Hva skjer hvis vi først bruker g, og deretter f?

Vi utvider f og g slik at definisjonsmengden til begge funksjonene er alle reelle tall. Hva blir formelen for $g(f(x))$?

La elevene lage sammensatte funksjoner selv. De kan også øve seg i å dele opp en sammensatt funksjon i en serie av funksjoner. Hvordan kan funksjonen gitt ved $f(x) = e^{3x}$ ses på som en sammensatt funksjon?

Skriv gjerne slik:

$$f\colon x \rightarrow 3x \rightarrow e^{3x}$$

Da er f satt sammen av funksjonene gitt ved $g(x) = 3x$ og $h(x) = e^x$, slik at $h(g(x)) = h(3x) = e^{3x} = f(x)$.

Skriv funksjonene nedenfor som sammensatte funksjoner:

1) $f(x) = 2 + 3e^x$
2) $r(x) = \sin(2x + 3)$
3) $t(x) = \cos^2(4x)$
4) $k(x) = \sin^2(h(x))$

Å jobbe med sammensatte funksjoner på denne måten vil hjelpe elevene når de for eksempel skal bruke kjerneregelen for derivasjon. Det vil da kunne være lettere for dem å se hva som er kjernen, og om funksjonen kan ses på som sammensatt av to eller flere funksjoner.

Kalkulusoppgavene 12 og 1 fra TIMSS Advanced 2015 (figur 11.12 og 11.13) kan innarbeides i forbindelse med dette. For mer om disse oppgavene, se kapittel 9. I disse oppgavene kan elevene også finne ut hvilke funksjoner funksjonen som skal deriveres er satt sammen av.

Figur 11.12 Kalkulusoppgave 12 fra TIMSS Advanced 2015.

La h være en deriverbar funksjon av x.
Hva er den deriverte med hensyn på x av $\sin^2(h(x))$?

(A) $2\sin(h(x))h'(x)$

(B) $2\sin(h(x))\cos(h(x))h'(x)$

(C) $2\sin(h(x))\cos(h(x))$

(D) $2\sin(h(x))\cos(h'(x))$

Figur 11.13 Kalkulusoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Funksjonen f er definert ved $f(x)=e^{x^2}$. Da er $f'(x)$ lik

(A) e^{x^2}

(B) e^{2x}

(C) $2xe^{x^2}$

(D) $e^{x^2}+2x$

(E) $2e^{2x^3}$

Omvendte funksjoner

Det er mulig å ta sammensatte funksjoner litt videre og introdusere omvendte funksjoner. Det kan gjøres enkelt og intuitivt i starten hvis elevene har blitt introdusert for sammensatte funksjoner. Her foreslår vi en liten introduksjon:

Hvis f er funksjonen som dobler et tall, vil den omvendte funksjonen f^{-1} halvere tallet.

Vi skriver $f(x) = 2x$ og $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Da er $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \frac{2x}{2} = x$ og $f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$.

Når vi setter sammen en funksjon og dens omvendte funksjon og bruker denne sammensatte funksjonen på et tall x, kommer vi «tilbake til start», dvs. til tallet x vi startet med.

Elevene kan videre diskutere om alle funksjoner har en omvendt funksjon, og prøve å finne ut hvordan de kan finne uttrykket til den omvendte funksjonen f^{-1} fra funksjonsuttrykket til f.

Elevene kan også framstille både sammensatte og omvendte funksjoner grafisk. Dette kan kobles til undervisningsskisse 1 om transformasjon av funksjoner.

Undervisningsskisse 7

Tema: Kontinuitet og grenseverdier

I denne undervisningsskissen har vi latt oss inspirere av tre oppgaver fra TIMSS Advanced 2015. Det er kalkulusoppgavene 9, 10 og 11 (figur 11.14, 11.15 og 11.16), som man kan lese mer om i kapittel 9. Disse oppgavene kan innarbeides i diskusjonsoppgavene vi skisserer her.

Hvis vi ser på resultatene på disse oppgavene (se kapittel 9), er det få norske elever som klarer de to første, men mange får til den siste. Det kan se ut til at begrepene kontinuitet og grenseverdi, som er grunnleggende begreper i funksjonslære, ikke er særlig godt forstått av norske elever. Elevene har lært at i en brøk der telleren er konstant og nevneren «går mot uendelig», vil brøken «gå mot 0». Hvorfor får de ikke til den første grenseverdioppgaven? Vi tror noe av svaret ligger i at det ikke brukes nok tid på dette, og at elevene ikke har fått reflektere så mye over eksempler på uttrykk der grenseverdiene er overraskende. De har heller ikke sett eksempler på funksjoner som er diskontinuerlige overalt, eller som ser annerledes ut enn de «vanlige» funksjonene som er kontinuerlige overalt der de er definert.

Figur 11.14 Kalkulusoppgave 9 fra TIMSS Advanced 2015.

Finn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-a}{ax^2+2x}$, der $a \neq 0$.

(A) $\dfrac{1}{a}$

(B) $-\dfrac{a}{a+2}$

(C) ∞

(D) 0

Figur 11.15 Kalkulusoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

La f være en funksjon definert for alle reelle tall ved denne regelen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x = 1 \\ 2x \text{ hvis } x \neq 1 \end{cases}$$

Er f kontinuerlig i $x = 1$?

Begrunn svaret.

Figur 11.16 Kalkulusoppgave 11 fra TIMSS Advanced 2015.

Finn $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\left(\frac{1}{x}-2\right)}$

(A) -2

(B) 0

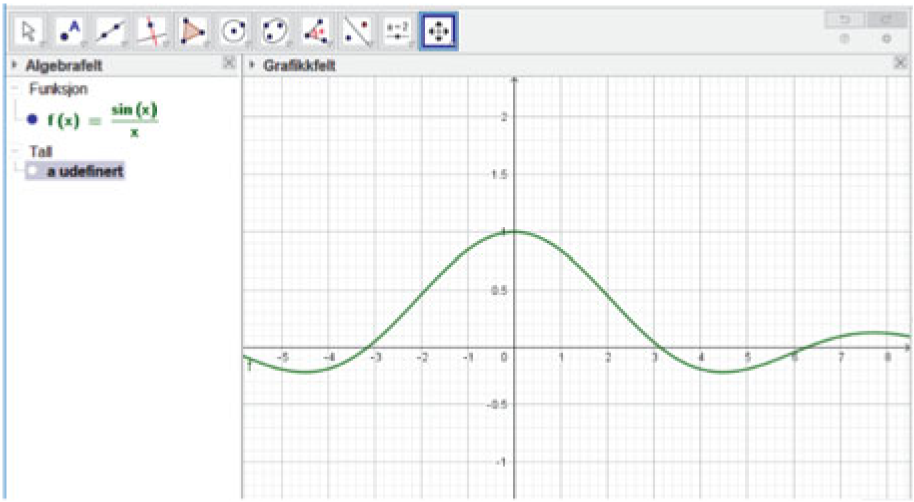
(C) $\dfrac{1}{4}$

(D) 4

Den formelle definisjonen av grenseverdi og kontinuitet går ut over pensum i videregående skole, og vi mener ikke at elevene skal bli fortrolige med såkalte epsilon–delta-argumenter, men de kan få en viss forståelse av ideene bak. For mer om dette, se kapittel 12. De kan også få se eksempler på spennende funksjoner, rekker som divergerer selv om det går sakte, og rekker som konvergerer. Vi vil nå gi noen forslag til diskusjonsoppgaver rundt disse temaene.

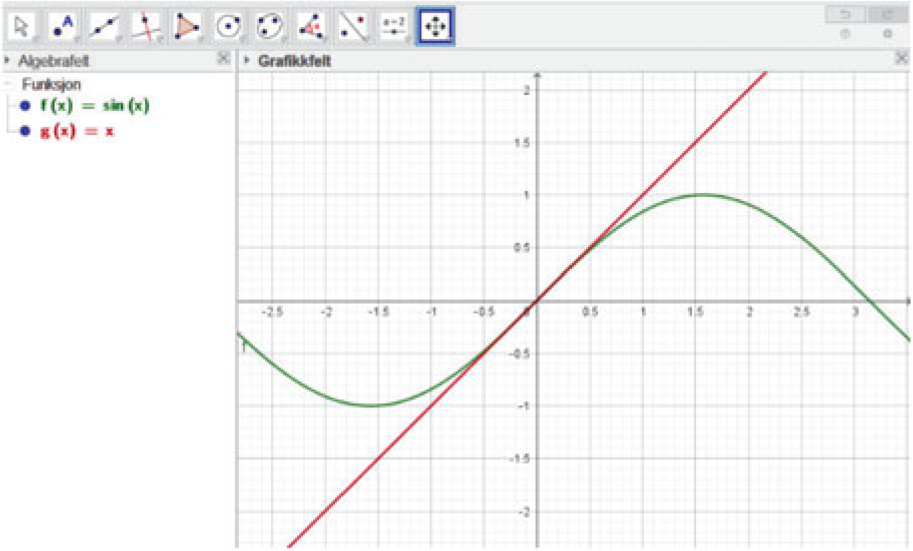
Elevene kan for eksempel se på funksjonen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. De kan tegne grafen til f i GeoGebra, forstørre og gjette hva grenseverdien $f(x)$ er. Dette gir et eksempel på et «nullnultedels-/null-over-null-uttrykk» som har en grenseverdi. I figur 11.17 har vi tegnet grafen til f i et passende intervall rundt 0. Der det står «a udefinert» i algebrafeltet, har vi spurt GeoGebra om funksjonsverdien $f(0)$. Selv om det kan se ut til at f er definert for $x = 0$ ut fra tegningen, er den ikke det.

Figur 11.17 GeoGebra-utsnitt til funksjonen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



Elevene kan også tegne inn funksjonene sin x og x i samme koordinatsystem, forstørre og se at de to grafene er nesten sammenfallende i nærheten av origo, men begge er 0 i origo. Vi har gjort dette i figur 11.18. Dette er verdt å snakke med elevene om, da dette er en nyttig grenseverdi å jobbe med.

Figur 11.18 GeoGebra-utsnitt: Grafene til funksjonene sin *x* og *x* i et passende intervall rundt 0.



Elevene kan også få diskutere funksjonen f gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ når } x \text{ er rasjonal} \\ -1 \text{ når } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

Hvordan ser grafen til denne funksjonen ut?

Uansett hvor lite intervall vi velger, vil grafen «hoppe» mellom verdiene -1 og 1. Dette er et eksempel på en funksjon som er diskontinuerlig i alle punkter.

Når det gjelder grenseverdier, kan det være interessant og nyttig for elevene å se på den harmoniske rekken:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Kan denne summen bli så stor vi bare vil?

Vi tror elevene kan være med på beviset for at summen går mot uendelig. Det berømte beviset til Nicole Oresme er ikke så vanskelig, og elevene kan synes det er spennende.

Beviset går ut på å samle ett, to, fire, åtte, seksten ledd og så videre, og sammenlikne med en mindre rekke, slik:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

$$>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty$$

Når den mindre rekken divergerer, må den harmoniske rekken også divergere, dvs. at summen $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+L$ kan bli så stor vi bare vil.

For elevene kan det oppleves som overraskende at den harmoniske rekken divergerer, når den uendelig geometriske rekken nedenfor konvergerer.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$$

Det kan virke motiverende for elevene å undre seg og bli kjent med eksempler der ikke alt er slik en skulle tro.

11.3 Bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i grunnskolen og ved starten av videregående skole

Noen av oppgavene som elevene fikk i TIMSS Advanced 2015, vil kunne løses av elever allerede på ungdomstrinnet eller ved starten av videregående skole. Vi vil her gi noen eksempler på slike oppgaver, og på hvordan de kan brukes. Motivasjon er viktig for læring, og når elevene opplever mestring, blir de mer motivert. Opplevelse av mestring henger sammen med oppgavens vanskegrad. Både for enkle og for vanskelige oppgaver kan virke mot sin hensikt.

Hvis flinke elever ikke får utfordringer som er tilpasset deres nivå, er det en fare for at de vil oppleve faget som lite spennende og interessant. (For mer om dette, se kapittel 7.) Noen, kanskje mange, elever vil kunne klare oppgaver som er beregnet på høyere alderstrinn. I dette avsnittet har vi forslag til oppgaver fra TIMSS Advanced 2015 som kan presenteres for elever på ungdomstrinnet eller i Matematikk 1T.

Etter at elevene har jobbet med oppgaven, kan man informere dem om at dette er en oppgave som er brukt i en internasjonal test for elever med full fordypning i slutten av videregående skole. At en elev greier å løse en oppgave som mange elever flere klassetrinn over sliter med, kan ha en innvirkning på elevens læring.

Det vi skriver her, er bare ideer til hvordan man kan bruke oppgavene, det er ikke svaret på hvordan det bør gjøres. Men mer variasjon i oppgavene som gis, og diskusjon med elever om løsning av oppgaver, kan bidra til økt læring. Vi har sett i tidligere internasjonale studier for grunnskole og videregående skole at man i Norge i mindre grad enn i en del andre land har lagt opp til diskusjoner og drøftinger i klassen (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). Vi ser imidlertid tegn på at dette er i ferd med å endre seg, og vi vil her gi flere eksempler som kan brukes til diskusjon og drøfting.

Undervisningsskisse 8

Tema: Pytagoras' setning og 30–60–90-graders trekanter

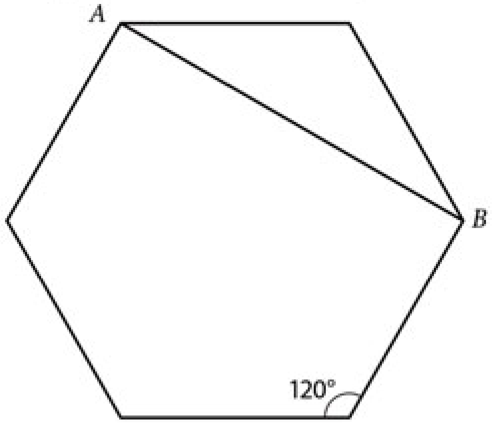
I denne undervisningsskissen foreslår vi å bruke geometrioppgave 9 fra TIMSS Advanced 2015 i undervisningen, se figur 11.19.

De fleste elevene i TIMSS Advanced i Norge løste denne oppgaven ved bruk av trigonometri, noe elevene ikke lærer i grunnskolen. Det interessante er at det er vel så enkelt å løse oppgaven uten å bruke trigonometri. Oppgaven kan løses ved å nedfelle høyden fra toppunktet i den angitte trekanten og bruke at i en trekant med vinkler 30°, 60° og 90° er lengden av den minste kateten lik halve lengden av hypotenusen. Bruker man deretter Pytagoras, som er lærestoff både på ungdomstrinnet og i 1T ved starten av videregående skole, får man at avstanden fra der den nedfelte høyden treffer grunnlinjen og ut til punkt B (eller A) er $\sqrt{3}$, så vi får avstanden $AB = 2\sqrt{3}$. Se kapittel 10 for mer om denne oppgaven.

Hvis oppgaven gis til elever i ungdomstrinnet, gir den utfordringer til talentfulle elever. Samtidig er ikke oppgaven vanskeligere enn at mange av elevene i grunnskolen vil kunne lære en del av å jobbe med den. Etter at elevene har jobbet med oppgaven, kan man informere demom at dette er en oppgave som er brukt i en internasjonal test for elever med full fordypning i slutten av videregående skole. Dette kan i seg selv virke motiverende.

Figur 11.19 Geometrioppgave 9 fra TIMSS Advanced 2015.

En regulær sekskant med sidelengde 2 er vist.



Hva er lengden av linjestykket *AB*?

Vis framgangsmåten.

Man kan også fortelle elevene at det bare var 8 % av de norske elevene i R2 som brukte metoden ovenfor til å løse oppgaven, mens 30 % løste den ved bruk av trigonometri, en metode som er vel så komplisert. Det kan se ut til at elever tenderer mot å velge de mest avanserte metodene (som de nylig har lært), men en strategi hvor man bruker litt mer tid på å studere oppgaven og vurdere hvordan den kan løses, kan være vel så effektiv. Ulike løsningsstrategier er også noe man kan snakke med elevene om.

Undervisningsskisse 9

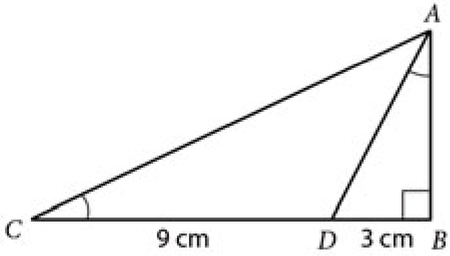
Tema: Formlike trekanter – beregning av sider

Vi vil i denne undervisningsskissen se på hvordan man kan bruke geometrioppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015 i undervisningen. Se figur 11.20.

Dette er en oppgave som kan løses ved bruk av formlike trekanter, der den store trekanten ABC er formlik med den mindre trekanten ABD. Allerede på

Figur 11.20 Geometrioppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

På figuren under er trekanten ABC rettvinklet, og vinkel ACB er lik vinkel DAB.



Hvis $CD = 9$ cm og $DB = 3$ cm, finn lengden til AB.

Svar: _________________ cm

ungdomstrinnet møter elevene oppgaver hvor de skal beregne lengden på sider i en trekant ved bruk av formlikhet. Dette er også sentralt lærestoff i 1T og R1.

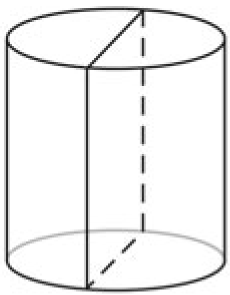
Hvis elevene finner de samsvarende vinklene, og setter opp forholdet $\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{AB}$, kan de klare å finne $AB = 6$ cm. Se kapittel 10 for mer om løsning av oppgaven. Selv om den kan løses ved å bruke formlikhet, noe som er pensum allerede på ungdomstrinnet, er den nok noe utfordrende. Det er ikke uten grunn at den er kategorisert kognitivt som resonnering i TIMSS Advanced. Utfordringen ligger antagelig i det at man må analysere nøye hvilke opplysninger man har, og hvordan man best kan angripe problemet, *før man går i gang* med å løse oppgaven. Men nettopp det å diskutere strategien for å løse en slik oppgave, kan være et godt utgangspunkt for læring. Som det påpekes i kapittel 10 om oppgaven, er dette en oppgave som ligger godt til rette for diskusjoner både i smågrupper og i full klasse. Man kan også ta opp ulike feilsvar og drøfte disse med elevene. At en del elever feilaktig får svaret $\sqrt{27}$, kan for eksempel være fordi de har prøvd å løse oppgaven ved bruk av formlike trekanter, men feilaktig har brukt lengden 9 istedenfor 12. Det å forstå andres feil kan også være en måte å øke den matematiske forståelsen på.

Undervisningsskisse 10

Tema: Geometri og funksjoner – maksimering ved bruk av GeoGebra

I denne undervisningsskissen har vi latt oss inspirere av kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced 2015. Se figur 11.21.

Figur 11.21 Kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced 2015.



Snittflata mellom ein sylinder og eit plan gjennom aksen til sylinderen er eit rektangel med omkrins lik 6 m. Radien til ein sylinder som tilfredsstiller dette vilkåret og som har størst mogleg volum, er

Ⓐ 2,5 m

Ⓑ 2 m

Ⓒ 1,5 m

Ⓓ 1 m

Ⓔ 0,5 m

Dette er en oppgave som må løses i flere trinn. Se kapittel 9 for mer om denne oppgaven. Flertrinnsoppgaver faller generelt vanskelig for elever. R2-elever kan løse oppgaven ved å sette opp et funksjonsuttrykk for volumet uttrykt ved radius og høyde i sylinderen, for deretter å derivere uttrykket med hensyn på radius og sette den deriverte lik 0 for å finne maksimumsverdien.

Elever på ungdomstrinnet har ikke lært om derivasjon, og de kan derfor ikke løse oppgaven på denne måten. Men de kan løse den på en alternativ måte. Elevene på ungdomstrinnet har kunnskap slik at de kan sette opp et uttrykk for volumet av sylinderen som funksjon av radius. Deretter kan de bruke GeoGebra, tegne inn funksjonen, og bestemme størst mulig volum med tilhørende radius ved å prøve seg fram, ev. ved hjelp av GeoGebra.

Et løsningsforslag til oppgaven kan se slik ut

Vi bestemmer høyden ved å bruke at omkretsen til rektangelet er 6:

$$2h + 4r = 6$$
$$h = \frac{6 - 4r}{2}$$

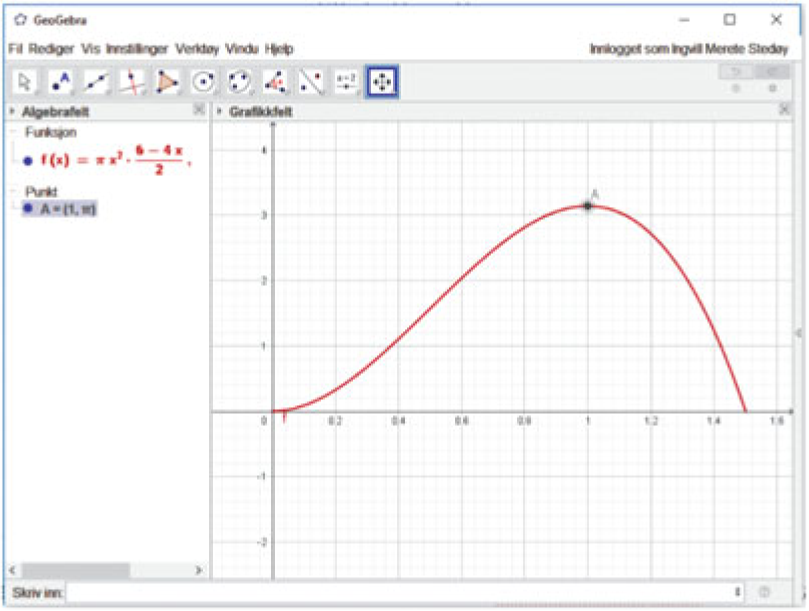
Sylinderens volum V som funksjon av radiusen r er da gitt ved:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{6 - 4r}{2}$$

Vi bruker GeoGebra til å tegne grafen til V. Vi må da skrive x istedenfor r, og velge kommandoen Funksjon(Funksjon>, <Start>, <Slutt>), med $\pi * x^2 * (6 - 4x)/2$ for funksjonen. Start er 0, og slutt er $3/2$. Så brukes kommandoen Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>) for å finne maksimum. Her skriver vi f for Funksjon, 0 for Start og 3/2 for Slutt. Figur 11.22 viser grafen til V.

Punktet A i figur 11.22 viser at volumet er størst når radiusen i sylinderen er 1. Da er volumet lik π. Det kan elevene også finne ut ved å sette inn $r = 1$ i volumfunksjonen som de fant før de tok i bruk GeoGebra. Elevene kan også utfordres til å prøve seg fram uten bruk av GeoGebra først.

Figur 11.22 Grafen til volumfunksjonen i undervisningsskisse 9.



Også dette er en oppgave som i utgangspunktet ligger utenfor det elevene har lært på ungdomstrinnet, men hvor de f.eks. ved hjelp av programmet GeoGebra kan løse den. Oppgaven er utfordrende – det var den også for elevene i videregående skole – fordi den krever at de analyserer og planlegger løsningen i flere trinn. Samtidig erfarer elevene at det å sette opp funksjonsuttrykket, noe som i seg selv er utfordrende, er en forutsetning for å kunne bruke GeoGebra i denne oppgaven.

Undervisningsskisse 11

Tema: Algebra – forståelse av kvadratsetninger

I denne undervisningsskissen har vi tatt utgangspunkt i algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015. Se figur 11.23.

Figur 11.23 Algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Dersom $x > 0, y > 0$, og $x \neq y$, så er $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ lik:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓑ $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓒ $\dfrac{1}{x - y}$

Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Ⓔ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x^2 - y^2}$

En av de utfordringene man står overfor i skolen, er problematikken rundt differensiering, ikke minst gjelder det elever med talent eller spesiell interesse for matematikk. For mer om dette, se kapittel 7. Høyt presterende elever kan med fordel få mer avanserte oppgaver enn det som er vanlig for ungdomstrinnet. Arbeid med kvadratsetningene er en del av pensumet på ungdomstrinnet, men det har for eksempel ikke de siste årene vært vektlagt å utvide brøker med kvadratrøtter i nevneren. For dyktige elever kan det å jobbe med slike problemstillinger være en måte å gi dem mer utfordringer på. Nedenfor viser vi noen eksempler på en type oppgaver elevene kan jobbe med som en innfallsvinkel til å løse algebraoppgaven i figur 11.23. For mer om denne oppgaven, inkludert løsning, se kapittel 8.

En mulig innfallsvinkel kan være å starte med å vise elevene noen eksempler av typen:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

og diskutere med elevene hvorfor dette blir riktig. Be dem gjerne gjøre flere liknende oppgaver, også med bokstavuttrykk. Når de behersker dette rimelig godt, kan man for eksempel se på en oppgave av typen:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Her kan man utfordre elevene til å forklare *hvorfor* dette blir riktig. Man kan så la elevene gjøre flere liknende oppgaver med bruk av konjugatsetningen, også med bokstavuttrykk. Før elevene prøver seg på TIMSS Advanced-oppgaven i figur 11.23 kan de for eksempel se på følgende oppgave:

$$\frac{a}{\sqrt{a}+2} = \frac{a \cdot (\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} = \frac{a(\sqrt{a}-2)}{a-4}$$

I et opplegg som det vi har skissert her, ligger det også til rette for å la elevene reflektere og diskutere mer generelt rundt potenser og kvadratrøtter.

Undervisningsskisse 12

Tema: Algebra – å lete etter tallmønster

I denne undervisningsskissen foreslår vi en variasjon til arbeidet med mønstergjenkjenning. I matematikk er det å lete etter og oppdage mønstre en av nøklene til å forstå og se sammenhenger i faget. Å lete etter mønstre er noe elevene kan øve på fra barnetrinnet og oppover. I læreplanen for grunnskolen finner vi følgende formulering etter 7. trinn: Elevene skal «utforske og beskrive strukturar og forandringar i geometriske mønster og talmønster med figurar, ord og formlar» (KD, 2006). Mange lærebøker legger opp til mønstergjenkjenning, men det er mye fokus på figurtall. Arbeidet med mønster kan varieres mer enn det gjøres i dag. Det er ingenting i veien for å starte med tallfølger og rekker tidlig på barnetrinnet.

Hvis man legger inn en litt myk start, kan algebraoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015 (figur 11.24) brukes til å utfordre elevene på ungdomstrinnet.

Figur 11.24 Algebraoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

Finn verdien til det algebraiske uttrykket

$$x - 2x + 3x - 4x + \ldots + 99x - 100x$$

når $x = 3$.

Svar: ________________

Dette er en oppgave hvor elevene selv må resonnere seg fram til mønsteret i en alternerende rekke av algebraiske uttrykk. Selv R2-elevene har ingen formel de kan bruke for å løse den. Oppgaven stiller derfor krav til det vi kan kalle abstrakt resonnering og mønstergjenkjenning. For mer om oppgaven og hvordan norske R2-elever presterte på den, se kapittel 8. Å prøve å løse oppgaven ved å regne ut summen direkte er en lite farbar vei.

Forslag til start på undervisningsopplegg

Utfordre elevene til å finne de neste leddene i tallfølgene:

1. $1, 2, 4, 6, 8, \ldots$
2. $1, 6, 11, 16, \ldots$
3. $1, 4, 9, 16, \ldots$
4. $x, 2x, 3x, 4x, \ldots$
5. $x, x^3, x^5, x^7, \ldots$

Lag gjerne flere oppgaver, og utfordre elevene til å lage egne mønstre. Når elevene har arbeidet en del med tallfølger, kan man introdusere rekker. Da er poenget å beregne summen, eller verdien av rekken. Oppgavene nedenfor kan fungere som øvingsoppgaver.

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =$
b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 30 =$
c) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 =$
d) $1 + 3 =$
e) $1 + 3 + 5 =$

f) $1 + 3 + 5 + 7 =$
g) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$
h) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 27 =$
i) $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x + 8x + 9x + 10x =$

Se om elevene klarer å finne en metode for å beregne det n-te leddet til rekkene i oppgave a, c, h og i.

Etter dette kan elevene prøve å bestemme verdien av alternerende rekker. Bruk for eksempel:

a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 =$

Ser elevene at to og to ledd blir -1 til sammen, slik at svaret blir -5? Neste utfordring kan være å ta med flere ledd.

b) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + 49 - 50 =$
c) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + 99 - 100 =$

Nå er ikke veien lang til TIMSS Advanced-oppgaven i figur 11.24. Hvis de først finner verdien av 10 ledd, kan de gå videre til 50 ledd, og ende opp med å løse oppgaven fra TIMSS Advanced.

d) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - 6x + 7x - 8x + 9x - 10x =$

Hva blir verdien når $x = 1$? Observer om elevene ser at de er tilbake i oppgave a.

Nå kan elevene prøve seg på oppgavene nedenfor.

A) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - \ldots + 49x - 50x =$
B) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - \ldots + 99x - 100x =$

Kanskje noen finner andre gode måter å gjøre det på.

La elevene diskutere ulike strategier. Be elevene beregne verdien av uttrykket i oppgave A og B når $x = 1$, når $x = 8$, når $x = 250$. Diskuter hvorfor det kan være en fordel å beregne verdien til rekkene generelt, og så kunne sette inn ulike verdier av x til slutt.

Nå kan dere lage liknende oppgaver. For eksempel:

$$2x - 4x + 6x - 8x + \ldots 18x - 20x =$$

Elevene kan lete etter ledd som «slår hverandre ut», og beregne verdien av uttrykket for ulike verdier av x.

La elevene diskutere hvordan leting etter mønstre kan bidra til å gjøre arbeidet med å løse et problem enklere.

Elevene kan få vite at rundt 20 % av R2-elevene fikk til oppgaven i figur 11.24. Rundt 10 % av et årskull av norske elever tar R2, og det betyr at rundt 2 % av hele årskullet klarer oppgaven. Hvis elever på ungdomstrinnet har arbeidet seg fram til en måte å løse den på, har de fått en erfaring av hvordan det å lete etter mønstre kan hjelpe dem til å løse matematikkoppgaver på et langt høyere nivå enn det de har lært regler for.

11.4 Avsluttende kommentarer

I de to foregående delkapitlene har vi presentert en samling undervisningsskisser og skolerelaterte eksempler basert på oppgaver fra TIMSS Advanced 2015. Listen er naturligvis ikke uttømmende, vårt formål er å eksemplifisere potensialet som ligger i å koble oppgavemateriale fra TIMSS Advanced til praktisk arbeid med undervisning i skolen.

I kapittel 13 diskuteres relevansen av TIMSS Advanced for læreplanrevisjonen («fagfornyelsen») som i øyeblikket pågår i Norge. Basert på erfaringer med stoff innenfor de emneområdene vi har berørt her, mener vi at det er viktig å ta en debatt blant annet om stoffrekkefølgen i matematikkursene man skal ha i videregående skole. Ønsker man dybdelæring, er det viktig å unngå fragmentering. (Se også delkapittel 5.3.)