

# Høytalersimulering med mode-basert metode

**Karen Brastad Evensen**

Master i fysikk og matematikk

Innlevert: juni 2014

Hovedveileder: Jon Andreas Støvneng, IFY

Medveileder: Bjørn Kolbrek, Institutt for Elektronikk og Telekomunikasjon, NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for fysikk



---

## OPPGAVETEKST

*Metoden for beregning av lydfelt i horn v.h.a. modematching skal utvides til å kunne brukes på flere områder innen høyttalersimulering. Det er av interesse å simulere konkave vibrerende strukturer, f.eks. høyttalerelementer, der strukturen blir representert ved en trappetrinn-lignende tilnærming av geometrien. Forskjellen fra horn er at hastigheten ved veggen i aksiell retning ikke er null. Mange høyttalerelementer har en støvhette eller faseplugg som står ut fra midten av elementet, og en del horn har også en sentralt plassert struktur som er med og definerer hornformen. En viktig del av oppgaven er derfor å utvide metoden til å kunne brukes på konsentriske geometrier.*

---



---

# Sammendrag

I denne masteroppgaven er det tatt utgangspunkt i modellering av sirkulære horn ved Modal metode som beskrevet i [1]. Denne metoden er blitt videreutviklet til å fungere for konkave, vibrerende strukturer ved at det er blitt addert en ekstra volumhastighet i akseilretning for å simulere bevegelige vegger. Strukturen det sees på i denne oppgaven er et høyttalerelement med geometri bestående av en serie sylindre med stadig økende tverrsnitt. Fullstendige uttrykk for det nye systemet er blitt utarbeidet med unntak av projeksjon av impedans over diskontinuitet mellom to påfølgende sylindre hvor det, som en approksimasjon, er brukt samme uttrykk som for sirkulære horn. Resultatene fra simuleringene av et slikt system ved Modal metode er blitt funnet til å stemme godt overens med BERIM-simuleringer og til å gi bedre resultater enn andre beskrivelser av høyttalerelement i litteraturen, her representert ved Olson- og Geddesmetode.

Ettersom flere høyttalerelement har en sentralt plassert struktur som er med på å definere formen, er deretter metoden blitt videreutviklet til å gjelde for konsentriske horn. Nye uttrykk for projeksjon bortover et konsentrisk rør, projeksjon fra et konsentrisk rør til et annet og projeksjon fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør er blitt utarbeidet. Disse uttrykkene er deretter blitt brukt til å simulere et fullstendig horn med delvis konsentrisk og delvis sirkulær geometri, og dette helt uten approksimasjoner. Resultatene fra simuleringene ved Modal metode viser svært stor grad av overenstemmelse med resultater fra BERIM-simuleringer både for inngangsimpedans og for lydtrykkrespons i fjernfeltet.



---

# Summary

In this master thesis a method has been developed for predicting the behaviour of sound propagation in a concave, vibrating structure based on the description of the Modal Propagation Method given for circular horns in [1]. This development of the method consists of adding a second volume velocity in the axial direction to simulate moving walls. The structure studied in this thesis is a loudspeaker element where the geometry of the element is approximated by a series of subsectional cylindrical elements with continuously varying cross-sectional area.

In this thesis complete expressions for the new system has been developed, with the exception of the projection of impedance across the discontinuity between two consecutive cylinders where, as an approximation, the same expression as for a circular horn is used. The results of numerical simulation of a loudspeaker element based on these expressions has been found to be relatively consistent with results from BERIM-simulations and to perform better than other methods of loudspeaker simulation described in the literature, here represented by Olson- and Geddes method.

As several loudspeaker elements have a centrally located structure that partially defines the shape, the method has been developed to apply for concentric horns. New expressions for projection across a concentric tube, projection from a concentric tube to another and projection from a concentric tube to a circular tube has been developed. These expressions have been used to simulate a complete horn with partial concentric and partial circular geometry and this without any approximations. The results of the simulations based on Modal Propagation Method are very consistent with results from BERIM-simulations for both input Impedance and for sound pressure response in the far field.





---

# Forord

Denne rapporten er resultatet av masteroppgaven «*Høyttalersimulering med mode-basert metode*» fremstilt av stipendiat Bjørn Kolbrek, under veiledning av professor Ulf R. Kristiansen. Oppgaven er gitt av akustikkgruppen ved Institutt for Elektronikk og Telekommunikasjon våren 2014, men er presentert som resultatet av faget TFY4510, Fysikk Masteroppgave, som er obligatorisk i tiende semester av sivilingeniørstudiet i Teknisk Fysikk ved NTNU.

Oppgaven er utført med Bjørn Kolbrek som hovedveileder på akustikk og Jon Andreas Støvneng som kontaktperson på Institutt for Fysikk. Jeg vil derfor rette en stor takk til Bjørn Kolbrek for uvurderlig hjelp og veiledning i prosessen med utarbeiding av oppgaven og til Jon Andreas Støvneng for all praktisk tilrettelegging underveis. I tillegg vil jeg takke Jan Evensen for tålmodig korrekturlesning.

Trondheim 10. juni 2014



# Innhold

<b>Sammendrag</b>	<b>i</b>
<b>Summary</b>	<b>iii</b>
<b>Forord</b>	<b>v</b>
<b>Innholdsfortegnelse</b>	<b>vii</b>
<b>Tabelliste</b>	<b>ix</b>
<b>Figurliste</b>	<b>xi</b>
<b>Symbolliste</b>	<b>xiv</b>
<b>Akronymer</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
1.1 Bakgrunn . . . . .	1
1.2 Motivasjon . . . . .	2
1.3 Struktur . . . . .	3
<b>2 Teori</b>	<b>5</b>
2.1 Multimodal bølgeforplantning i sirkulært horn . . . . .	5
2.1.1 Bølgeforplantning i sirkulært rør . . . . .	6
2.1.2 Projeksjon langs rør . . . . .	9
2.1.3 Projeksjon over diskontinuitet . . . . .	11
2.2 Multimodal bølgeforplantning i høyttalerelement . . . . .	15
2.2.1 Projeksjon over diskontinuitet . . . . .	15
2.3 Alternative metoder for beskrivelse av høyttalerelement . . . . .	18
2.3.1 BERIM . . . . .	18
2.3.2 Geddes metode . . . . .	18
2.3.3 Olsons metode . . . . .	19

---

2.4	Multimodal bølgeforplantning i konsentriske horn . . . . .	21
2.4.1	Bølgeforplantning i konsentrisk rør . . . . .	21
2.4.2	Projeksjon over diskontinuitet . . . . .	25
2.5	Beregning av lydtrykkrespons, direktivitetsindeks og strålingsimpedans . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Resultater</b>	<b>29</b>
3.1	Implementasjon . . . . .	29
3.1.1	Høytalerelement . . . . .	29
3.1.2	Konsentrisk horn . . . . .	31
3.2	Numeriske Simuleringer . . . . .	32
3.2.1	Høytalerelement . . . . .	32
3.2.2	Byggestener for konsentrisk horn . . . . .	36
3.2.3	Konsentrisk horn . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Diskusjon</b>	<b>47</b>
4.1	Høytalerelement . . . . .	47
4.1.1	Lydtryknivå i fjernfeltet . . . . .	47
4.1.2	Konvergens for Modal metode . . . . .	52
4.2	Byggestener for konsentrisk horn . . . . .	53
4.3	Konsentrisk Horn . . . . .	54
4.4	Videre Arbeid . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>60</b>
	<b>Appendiks</b>	<b>63</b>
A.1	Normaliseringsintegral . . . . .	63
A.2	Integral over produkt av Besselfunksjoner . . . . .	63
B.1	Simuleringsparametre for byggestener for konsentrisk horn . . . . .	64
C.1	MATLAB-kode . . . . .	65
C.1.1	Valg av projeksjonsmatrise på bakgrunn av geometri . . . . .	65
C.1.2	Projeksjon fra konsentrisk til konsentrisk rør . . . . .	67
C.1.3	Projeksjon fra konsentrisk til sirkulært rør . . . . .	69
C.1.4	Nullpunkter i konsentrisk rør . . . . .	70

# Tabeller

3.1	Simuleringsparametre for Høytalerelement . . . . .	33
3.2	Tabellen viser simuleringsparametre for horn med delvis konsentrisk geometri. . . . .	43
4.1	Tabellen viser kjøretid, $\Delta_{SPL,95\%}$ for de ulike metodene i de tre ulike måleposisjonene og feilen i direktivitetsindeks $\Delta_{DI,95\%}$ for alle de tre metodene. . . . .	51
4.2	Tabellen viser absolutt feil for MPM-simuleringer av resistans og reaktans ved inngangen relativt til BERIM-simuleringer, som må aksepteres for at 95% og 99% av frekvensene skal falle innenfor. . . . .	55
B1	Tabellen viser verdiene på simuleringsparametrene for byggestenene for konsentrisk horn. . . . .	64



# Figurer

1.1	Figuren illustrerer hvordan en serie sylinderelement kan brukes til å konstruere et horn. De blå pilene ut fra sentrum representerer volumstrømmen ut av hornet. . . . .	2
2.1	Figuren viser de geometriske størrelsene brukt som utgangspunkt i beskrivelsen av bølgeforplantning i et sirkulært rør. Her gir $b$ rørets radius og $\theta$ plasseringen i planet normalt på propagasjonsretningen $z$ . . . . .	6
2.2	Figuren viser den ikke-normaliserte lydtrykkprofilen i radiell retning for ulike moder i en sylindrisk bølgeleder som funksjon av normalisert radius, hvor $r = 1$ er ekvivalent med $r = R$ . . . . .	8
2.3	Ovenfor vises et todimensjonalt utsnitt av et sirkulært rør med to parallelle plan 0 og 1 normalt på propagasjonsretningen $z$ separert av en avstand $d$ . . . . .	9
2.4	Ovenfor er en illustrasjon av diskontinuiteten som oppstår når to sirkulære rør med tverrsnitt $S_1$ og $S_2$ kobles sammen, i tilfellet der $S_2 > S_1$ . . . . .	11
2.5	Figuren viser hvordan volumhastigheten i rørelement 1 faller inn på rørelement 2 etter diskontinuiteten når de vertikale skilleveggene mellom rørelementene $S_2 - S_1$ er fullstendig harde. . . . .	13
2.6	Figuren illustrerer hvordan et høyttalerelement kan konstrueres ved hjelp av Modal metode. De røde pilene illustrerer den ekstra volumhastigheten fra de vertikale veggene i diskontinuitetene, som skiller konstruksjonen av et høyttalerelement fra konstruksjonen av et horn. . . . .	15
2.7	Figuren viser hvordan volumhastigheten gjennom plan 1 før diskontinuiteten (blå) faller inn på plan 2 sammen med den ekstra volumhastigheten fra skilleveggen mellom rørelementene (rød) når denne svinger med. . . . .	16
2.8	Figuren viser geometrien som det er tatt utgangspunkt i når lydtrykket finnes fra et høyttalerelement ved hjelp av Geddés metode. Figuren er hentet fra [2]. . . . .	19
2.9	Figuren viser de aktuelle geometriske størrelsene brukt i Olsons utarbeidelse av lydtrykket i fjernfeltet for et høyttalerelement og er hentet fra [3]. . . . .	20

2.10	Figuren viser de geometriske størrelsene brukt som utgangspunkt i beskrivelsen av bølgeforplantning i et konsentrisk rør. Her gir $a$ rørets indre radius, $b$ rørets ytre radius og $\theta$ gir plasseringen normalt på propagasjonsretningen $z$ .	21
2.11	Figuren er hentet fra [4] og gir geometrien brukt i artikkelen ved utledning av trykkprofil i radiell retning.	23
2.12	Figuren viser geometrien brukt til utledning av elementene i projeksjonsmatrisen for overgangen fra et konsentrisk rør til et annet konsentrisk rør med andre geometriske størrelser.	25
2.13	Figuren viser geometrien brukt i utledningen av projeksjonsmatriseelementene i overgangen fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør.	27
3.1	Figuren viser geometrien til høyttalerelementet som er brukt i simuleringene.	32
3.2	Figuren viser lydtrykkrespons i fjernfeltet for en lytterposisjon $\theta = 0$ funnet fra simuleringer ved hjelp av MPM, Olsons metode, Geddes metode og BERIM.	34
3.3	Figuren viser lydtrykkrespons i fjernfeltet for en lytterposisjon $\theta = 45$ funnet fra simuleringer ved hjelp av MPM, Olsons metode, Geddes metode og BERIM.	34
3.4	Figuren viser lydtrykkrespons i fjernfeltet for en lytterposisjon $\theta = 90$ funnet fra simuleringer ved hjelp av MPM, Olsons metode, Geddes metode og BERIM.	35
3.5	Figuren viser direktivitetsindeksen som funksjon av frekvens funnet fra BERIM-simuleringer, MPM-simuleringer og simuleringer av Olson og Geddes metode.	35
3.6	Figuren viser geometrien brukt til testing av projeksjonsmatrisen funnet for diskontinuiteten som oppstår i overgangen fra et konsentrisk rør til sirkulært rør.	36
3.7	Figuren viser hastighetsfordelingen funnet etter diskontinuiteten fra konsentrisk rør til sirkulært rør som illustrert på figur 3.6 etter en planbølge er påtrykt systemet.	37
3.8	Figuren viser den akustiske impedansen ved røret funnet ved hjelp av BERIM- og MPM-simuleringer for 64 moder for overgangen fra konsentrisk til sirkulært rør som gitt på figur 3.6.	37
3.9	Figuren viser geometrien brukt for å kontrollere projeksjonsmatrisen fra et konsentrisk rørelement til et annet når den indre radiusen ble holdt konstant og den ytre ble økt fra $b_1$ til $b_2$ .	38
3.10	Figuren viser hastighetsfordelingen etter en planbølge er blitt projekttert over den første diskontinuiteten på figur 3.9	38
3.11	Figuren viser hastighetsfordelingen etter en planbølge er blitt projekttert over begge diskontinuitetene på figur 3.9	39
3.12	Figuren viser den akustiske impedansen ved røret funnet ved hjelp av BERIM og MPM for 64 moder.	39
3.13	Figuren viser geometrien som brukes til å teste projeksjonsmatrisen fra et annulært hornelement til det neste, der den ytre radiusen holdes konstant mens den indre avtar.	40



3.14	Figuren viser hastighetsfordelingen etter den første diskontinuiteten på figur 3.13 når denne påtrykkes en planbølge. . . . .	40
3.15	Figuren viser den normaliserte akustiske impedansen ved inngangen funnet fra BERIM- og MPM-simuleringer for $N = 64$ . . . . .	41
3.16	Figuren viser geometrien brukt for å studere projeksjonen over en diskontinuitet der både indre og ytre radius endres. . . . .	41
3.17	Figuren viser hastighetsfordelingen etter den første diskontinuiteten på figur 3.16 når inngangen påtrykkes en planbølge. . . . .	42
3.18	Figuren viser den akustiske impedansen ved røret funnet ved hjelp av BERIM- og MPM-simuleringer for to simultane diskontinuiteter som vist på figur 3.16. . . . .	42
3.19	Figuren viser hornet med delvis konsentrisk og delvis sirkulær geometri med de geometriske størrelsene som er brukt i simuleringene. . . . .	43
3.20	Figuren viser normalisert reaktans for konsentrisk horn ved inngangen for BERIM- og MPM siuleringer når $N = 64$ . . . . .	44
3.21	Figuren viser normalisert resistans for konsentrisk horn ved inngangen for BERIM- og MPM siuleringer når $N = 64$ . . . . .	44
3.22	Figuren viser MPM og BERIM simulert lydtrykkfordeling i tre ulike lytterposisjoner definert ved $\theta = 0^\circ$ , $\theta = 45^\circ$ og $\theta = 90^\circ$ når det i MPM-simuleringene er brukt 64 moder. . . . .	45
3.23	Figuren viser direktivitetsindeksen for BERIM-simuleringer og MPM-simuleringer med $N = 4$ , $N = 16$ og $N = 64$ . . . . .	46
4.1	Histogrammet viser antall frekvenser $N_f$ med avviket $\Delta_{SPL}$ i lydtrykkresponsen funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer for en lytterposisjon $\theta = 0^\circ$ . . . . .	48
4.2	Histogrammet viser antall frekvenser $N_f$ med avviket $\Delta_{SPL}$ i lydtrykkresponsen funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer for en lytterposisjon $\theta = 45^\circ$ . . . . .	49
4.3	Histogrammet viser antall frekvenser $n_f$ med avviket $\Delta_{SPL}$ i lydtrykkresponsen funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer for en lytterposisjon $\theta = 90^\circ$ . . . . .	50
4.4	Histogrammet viser antall frekvenser $N_f$ med avviket $\Delta_{DI}$ i direktivitetsindeks funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer. . . . .	50
4.5	Figuren viser differansen $\Delta_{DI,N} = DI_{N=64} - DI_N$ som funksjon av antall moder. . . . .	52
4.6	Histogrammet viser den absolutte feilen $\Delta_Z$ for de ulike frekvensene, her for reaktans og resistans funnet fra MPM-simuleringer relativt til reaktans og resistans funnet fra BERIM-simuleringer. . . . .	54
4.7	Figuren viser $\Delta_{DI,95\%}$ , som er avviket i direktivitetsindeksen funnet fra MPM-simuleringer relativt til BERIM-simuleringer som må aksepteres for at 95% av frekvensene i frekvensvektoren skal falle innenfor. Dette er gitt som funksjon av moder brukt i MPM-simuleringene. . . . .	56

---

## SYMBOLLISTE

$N$	=	antall moder
$r_1$	=	Intre radius for sirkulært rør
$r_2$	=	Ytre radius for sirkulært rør
$R$	=	Ytre radius for sirkulært rør (Kemps notasjon)
$a_1$	=	Intre radius for konsentrisk rør før diskontinuitet
$a_2$	=	Intre radius for konsentrisk rør etter diskontinuitet
$b_1$	=	Ytre radius for konsentrisk rør før diskontinuitet
$b_2$	=	Intre radius for konsentrisk rør etter diskontinuitet
$n$	=	Modeindeks før diskontinuitet
$m$	=	Modeindeks etter diskontinuitet
$\gamma$	=	Nullpunkter til $J'_0$
$\theta$	=	Plassering i horisontalplanet til sylinder og vinkel til måleposisjon
$\varphi$	=	Nullpunkter til karakteristisk ligning for konsentrisk rør.
$\psi$	=	Trykkfordeling i radiell retning
$\alpha$	=	Radielt bølgetall for sirkulært rør
$\rho$	=	Tetthet
$c$	=	Lydhastighet
$d$	=	Avstand mellom to plan det projekteres over
$\mathbf{F}$	=	Projeksjonsmatrise for $S_1 < S_2$
$\mathbf{V}$	=	Projeksjonsmatrise for $S_2 < S_1$
$U$	=	Vektor med volumhastighet
$p$	=	trykk
$P$	=	Vektor med modale trykkamplituder
$J$	=	Besselfunksjon av første type
$Y$	=	Besselfunksjon av andre type
$\eta$	=	Normaliseringsfaktor
$k_n$	=	Bølgetall
$k$	=	Fritt feltsbølgetall
$u, v$	=	Partikkelhastighet
$S$	=	Tverrsnittareal
$DI$	=	Direktivitetsindeks
$l$	=	Hornlengder

## AKRONYMER

MPM	=	Modal Propagation Method
BEM	=	Boundary Elements Method
BERIM	=	Boundary Elements Rayleigh Integral Method

# Innledning

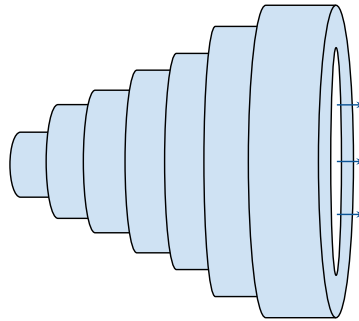
## 1.1 Bakgrunn

Ettersom hornet spiller en svært viktig rolle i både musikalsk og elektronisk sammenheng, er dette blitt modellert mye, noe som er utførlig beskrevet i litteraturen. Tradisjonelt modelleres horn ved hjelp av Websters hornligning [5], som gir en grei beskrivelse så lenge trykkvariasjonene i hornet kun forekommer langs hornets symmetriakse. Da er det kun planbølgemoden som er eksitert og trykkfordelingen i radiellretning er helt uniform.

Så lenge tverrsnittet til hornet holdes lite i forhold til bølgelengden, er dette en korrekt sammenheng, men når tverrsnittet økes, vil det også bli eksitert moder av høyere orden og det oppstår variasjoner i trykkfordelingen også i radiell retning. Noen av de nye modene som eksiteres vil propagere langs hele hornet og påvirke lydtrykkfordelingen ved munnningen, mens andre vil dø ut før de kommer så langt. Alle vil dog bidra til å svekke energien til planbølgemoden, noe som gjør at en løsning av Websters ligning ikke lenger gir en tilstrekkelig beskrivelse av systemet.

Ettersom den analytiske løsningen av lydtrykkfordelingen fra et horn kun er anvendelig på få, begrensede geometrier, og da for moder av lav orden, er det blitt forsøkt utviklet en rekke ulike metoder der horngeometrien diskretiseres, som gjør det mulig å også inkludere moder av høyere orden. Av Alfredson [6] ble det foreslått en metode der hornveggene ble konstruert av en serie underseksjoner som har sider parallelle med hornkonturen, der diameteren til en seksjon er litt større enn diameteren til den foregående. Dersom en analytisk løsning av bølgeligningen er mulig å finne for hver seksjon, var tanken at hver av disse kan kobles over diskontinuitetene som oppstår i det man beveger seg fra en seksjon til en annen. Det er dog få geometrier der bølgeligningen er separabel, og dermed analytisk løsbart, og enda færre har overflater som ligner hornkonturer. Et vanlig valg er derfor å bruke sylindriske seksjoner med varierende radius, da en sylindrisk bølgeleder representerer en slik geometri der bølgeligningen er løsbart. Konstruksjonen av et lineært horn ved slik kombinasjon av sylindriseksjoner er illustrert på figur 1.1.

Metoden beskrevet av Alfredson [6], var en iterativ metode og den har mange likheter med en analytisk metode beskrevet av Pagneux et al [7] som er videreutviklet i doktor-



**Figur 1.1:** Figuren illustrerer hvordan en serie sylinderelement kan brukes til å konstruere et horn. De blå pilene ut fra sentrum representerer volumstrømmen ut av hornet.

gradsavhandlingen til Kemp [1]. På originalspråket betegnes metoden *Modal Propagation Method*, men i denne oppgaven omtales den som Multimodal metode, Modal metode, eller ved akronymet MPM. Modal metode er allerede blitt studert i Bjørn Kolbreks prosjekt- og masteroppgave [8], hvor den blant annet er blitt videreutviklet til å gjelde for rektangulære horn og det er blitt utført en analyse av nøyaktighet og kjøretid. I doktorgradsavhandlingen er metoden blitt brukt til å beskrive musikkinstrumenter med hornform, men det finnes også eksempler på at metoden er blitt brukt til høyttalersimuleringer som [9] og [10].

## 1.2 Motivasjon

Et av hovedformålene med denne masteroppgaven er å gjøre nettopp dette, videreutvikle Modal metode til å kunne brukes til simulering av høyttalerelement. Dette gjøres her, ved at det som beskrevet ovenfor konstrueres en tilnærming til en konkav elementstruktur bestående av en serie sylindre med økende radius, som til sammen utgjør en trappetrinnliggende tilnærming til geometrien. Forskjellen mellom metoden anvendt på høyttalerelement og metoden anvendt på horn, består i at det ved simulering av høyttalerelement må kompenseres for at elementet er en vibrerende struktur, og ikke utelukkende består av harde vegger, som er tilfellet for horn. Derfor inkluderes det en hastighet ved veggene i aksial retning, som er forskjellig fra null. Dette er ikke tidligere blitt presentert i litteraturen.

Som nevnt i oppgaveteksten, har mange høyttalerelement en søvhet eller faseplugg som står ut fra midten av elementet. En del horn har også en ekstra struktur plassert på hornets sentralakse som dermed er med på å definere horngeometrien. En viktig del av oppgaven er derfor å utvide metoden til å kunne brukes på konsentriske geometrier. Heller ikke dette er tidligere blitt studert i litteraturen med utgangspunkt i Modal metode. Det som dog har blitt gjort, er studier av radiell lydtrykkfordeling i rektangulære horn med bøy. Denne vil være lik den radielle lydtrykkfordelingen i koniske sylinderelement, da det i begge tilfeller oppstår en ekstra grensebetingelse når det sees på lydtrykkfordelingen i radiell retning. Dette er studert i blant annet [11], [12], [13] og [4], og brukes som sikkerhetsnett når ligningene for konsentrisk horn utledes i denne oppgaven. Med et blikk på disse utvikles derfor fullstendige uttrykk som gir hvordan metoden fungerer for konsent-

riske geometrier. I tillegg utvikles det uttrykk for overgangen fra konsentrisk geometri til sirkulær geometri, da dette er av særlig praktisk nytteverdi.

## 1.3 Struktur

I oppgaven presenteres først et sammendrag av teorien presentert i [1] og [7]. Deretter beskrives det hvordan sammenhengene i disse kildene endres når det sees på en vibrerende konisk struktur i motsetning til en hard hornstruktur. Med utgangspunkt i dette utledes det fullstendige uttrykk som kan brukes til modellering av høyttalerelement ved Modal metode og det redegjøres for forenklinger som brukes i denne masteroppgaven.

Deretter presenteres teorien bak et par andre metoder som kan brukes til å simulere høyttalerelement, for at bakgrunn for disse skal være kjent når det i resultat- og diskusjonskapitlet gjøres en vurdering av resultatet for Modal metode, på bakgrunn av blant annet resultatene fra disse metodene.

Når den relevante teorien for høyttalerelement fullstendig er redegjort for, tas det igjen utgangspunkt i sammenhengene gitt i [1] og det utledes fullstendige uttrykk for multimodal bølgepropagering langs et konsentrisk rør og uttrykk for projeksjon over en diskontinuitet fra et konsentrisk rør til et annet. Deretter utledes uttrykkene som er nødvendige for å beskrive projeksjon fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør, ettersom dette er av særlig praktisk nytteverdi, da strålingsimpedansen fra et sirkulært rør er lett tilgjengelig i motsetning til strålingsimpedansen fra et konsentrisk rør.

Etter den teoretiske basisen for oppgaven er presentert, beskrives det hvordan de nye uttrykkene er implementert i MATLAB, og hvordan disse tar utgangspunkt i implementasjonen gjort av Bjørn Kolbrek i forbindelse med hans prosjekt- og masteroppgave. I tillegg spesifiseres det særlig hvordan forandringene påvirker koden når det nå sees på høyttalerelement og konsentriske horn kontra sirkulære horn.

Deretter presenteres resultatene fra simulering av et høyttalerelement sammenlignet med resultater fra de andre presenterte metodene. I tillegg testes de nye uttrykkene funnet for projeksjon over diskontinuitet fra konsentrisk til konsentrisk rør og fra konsentrisk til sirkulært rør i særlig grad. Når hver mulig overgang er studert, simuleres et fullstendig horn med delvis konsentrisk og delvis sirkulær geometri, og resultatene fra samtlige simuleringer diskuteres. I tillegg vurderes det hvordan metoden kan forbedres og eventuelle andre bruksområder.



# Kapittel 2

## Teori

I innledningen ble det beskrevet hvordan et horn kan konstrueres ved hjelp av en serie sylindriske bølgeledere med stadig varierende tverrsnitt, og det ble nevnt at multimodal bølgepropagering langs et slik horn grundig er blitt studert i doktorgradsavhandlingen til Jonathan Kemp [1]. Som nevnt, er målet med denne masteroppgaven å videreutvikle Modal metode til å gi en god beskrivelse av høyttalerelement og horn med konsentrisk geometri. I dette kapitlet presenteres derfor først et sammendrag av den grunnleggende teorien for sirkulære horn gitt i [1]. Med denne som utgangspunkt utledes deretter nye uttrykk som gjør det mulig å beskrive et sirkulært høyttalerelement, til forskjell fra sirkulære horn, som er blitt gjort tidligere. Deretter sees det på hvordan uttrykkene fra [1] kan bearbeides til å fungere for multimodal bølgepropagasjon langs et horn med delvis konsentrisk, og delvis sirkulær geometri.

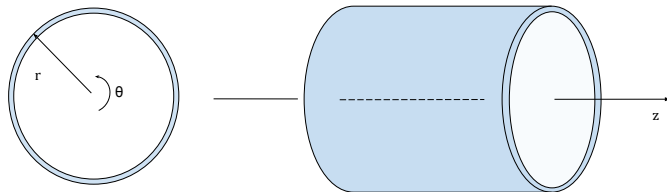
### 2.1 Multimodal bølgeforplantning i sirkulært horn

Ettersom metoden presentert i [1] går ut på å konstruere horn ved hjelp av en serie påfølgende sylindre, som illustrert på figur 2.1, sees det innledningsvis på hvordan lyden propagerer i en generell, uendelig lang, uniform sylinder. Denne forutsettes å ha sentralakse i z-retningen og det legges til grunn at lyden propagerer i adiabatisk, lineære og tapsfrie medium. Når dette er gjort, står man igjen med en konkret, generell modell for lydtrykkfordelingen i én sylinder.

Deretter vises det hvordan man ved projeksjon bortover et sylinderelement, og projeksjon over diskontinuiteten som oppstår i koblingen mellom to sylinderelementer, kan bruke kjente størrelser som strålingsimpedans ved en påtrykt bølge til å bestemme trykk, volumstrøm og impedans hvor som helst i hornstrukturen.

### 2.1.1 Bølgeforplantning i sirkulært rør

Første steg for å kunne beskrive multimodal bølgeforplantning over en serie sylinderelementer, er å studere hvordan en bølge vil propagere bortover et helt, sylindrisk rør. Det tas her utgangspunkt i et rør med geometri som vist på figur 2.1.



**Figur 2.1:** Figuren viser de geometriske størrelsene brukt som utgangspunkt i beskrivelsen av bølgeforplantning i et sirkulært rør. Her gir  $b$  rørets radius og  $\theta$  plasseringen i planet normalt på propagasjonsretningen  $z$ .

Røret ovenfor er i praksis en sylindrisk bølgeleder, med konstant tverrsnitt og fullstendig harde vegger i  $r = R$ , som eksiteres av en lydkilde i  $z = 0$ . Ettersom akustisk energi ikke kan unnsnippe en lukket flate bestående av harde vegger, vil det oppstå stående bølger i  $r, \theta$ -planet grunnet konstruktiv og destruktiv interferens mellom innfallende og reflektert bølge. Foreløpig er det ingen andre grensebetingelser som begrenser den akustiske energien langs rørets sentralakse, og bølgens komponent i  $z$ -retning vil derfor bli en propagerende bølge.

Typisk eksiteres bølgelederen av mer enn én akustisk mode og den totale trykkfordelingen i cylinderen vil være gitt som summen av disse, som hver propagerer med sin egen bølgelengde langs bølgelederens sentralakse. Det som da studeres er såkalt multimodal bølgeforplantning og i følge [1], er det gitt at lydtrykkbidraget fra hver enkelt av modene vil være gitt som løsningen av den tredimensjonale bølgeligningen. Denne er kjent som Helmholtz ligning, [14], og er fra prinsippet om bevarelse av bevegelsesmengde og massebevarelse gitt ved

$$(\Delta + k^2)p = 0. \tag{2.1}$$

I ligningen ovenfor er  $k$  bølgetallet i fritt felt, som er gitt ved  $k = \omega/c$ ,  $p$  det akustiske trykket og  $\Delta$  er Laplace-operatoren som kan uttrykkes som en sum av komponenten i  $z$ -retning og komponenten i  $xy$ -planet

$$\Delta = \Delta_{\perp} + \Delta_z. \tag{2.2}$$

Ettersom vi ser på sylinderens symmetri er det hensiktsmessig å uttrykke vektoroperatoren i sylinderkoordinater, og ligningen vi ønsker å løse for å finne trykkfordelingen til hver enkelt mode får dermed formen



$$(\Delta + k^2)p = \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + k^2 \right) p = 0. \quad (2.3)$$

Helmholzligningen er, som nevnt i innledningen, separabel i tilfellet for sylindergeometri [14], og den generelle løsningen er godt kjent i teorien. Fra [1] har man at denne i polarkoordinater, for én enkelt mode består av produktet mellom trykkprofilen i propagasjonsretningen  $P(z)$ , trykkprofilen i xy-planet  $\psi(x, y) = \psi(r, \theta)$  og i tillegg en tidsavhengig faktor fasefaktor  $e^{j\omega t}$

$$p(r, \theta, z, t) = P(z)\psi(r, \theta)e^{j\omega t}. \quad (2.4)$$

Som nevnt, har man da fra superposisjonsprinsippet at den totale trykkfordelingen i sylinderen matematisk kan uttrykkes som en sum av bidragene fra hver av de eksiterte modene. Det resulterende totale trykket er da gitt ved

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\psi_n(r, \theta)e^{j\omega t}, \quad (2.5)$$

hvor indeksen  $n$  angir det aktuelle modenummeret. Fra denne kan også et generelt uttrykk for partikkelhastigheten  $u_z$  finnes fra Eulers ligning [14] og denne kan da fra definisjonen av volumhastighet  $U_n(z) = u_z S$  brukes til å bestemme volumhastigheten gjennom røret, hvor  $S$  er rørets tverrsnitt.

### Trykkprofil i radiell retning

Ettersom Helmholtz ligning for sylinderensymmetri er separabel, kan problemet for trykkprofilen i radiellretning, når man antar aksesykketriske trykkfordelinger, reduseres til

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi_n(r) = -\alpha_n^2 \psi_n(r). \quad (2.6)$$

Denne kan igjen omskrives til Bessels ligning av første orden som har kjent, generell løsning [1] på formen

$$\psi_n(r, \theta) = c_1 J_0(\alpha_n r) + c_2 Y_0(\alpha_n r), \quad (2.7)$$

hvor  $\alpha_n$  matematisk sett er egenverdien til den  $n$ 'te moden, mens størrelsen fysisk representerer bølgetallet i radiell retning og er null i tilfellet for plane bølger. I tillegg er  $J_0$  Besselfunksjon av første type av nulte orden og  $Y_0$  er Besselfunksjon av andre type av nulte orden.

Trykkprofilen i radiellretningen  $\psi_n(r, \theta)$  vil variere med egenskapene til bølgelederen, som bestemmer formen til  $c_1$  og  $c_2$ , samt de mulige verdiene til  $\alpha_n$ . I et tapsfritt miljø og for en sylinder med harde vegger vil man kun ha grensebetingelsen

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial r} = 0, \quad r = R. \quad (2.8)$$

Ettersom  $Y_0$  har en singularitet i origo, må alle de fysisk realiserbare løsningene for tilfellet med hul sylinder ha  $c_2 = 0$ . Ved innsetting av  $\psi_n(r, \theta) = c_1 J_0(\alpha_n r)$  i grensebetingelsen,

gir disse at de mulige verdiene for det radielle bølgetallet vil være  $\alpha_n = \gamma_n/R$ , hvor  $\gamma_n$  er nullpunktene til den deriverte av  $J_0$ , som er det samme som nullpunktene til  $J_1$ .

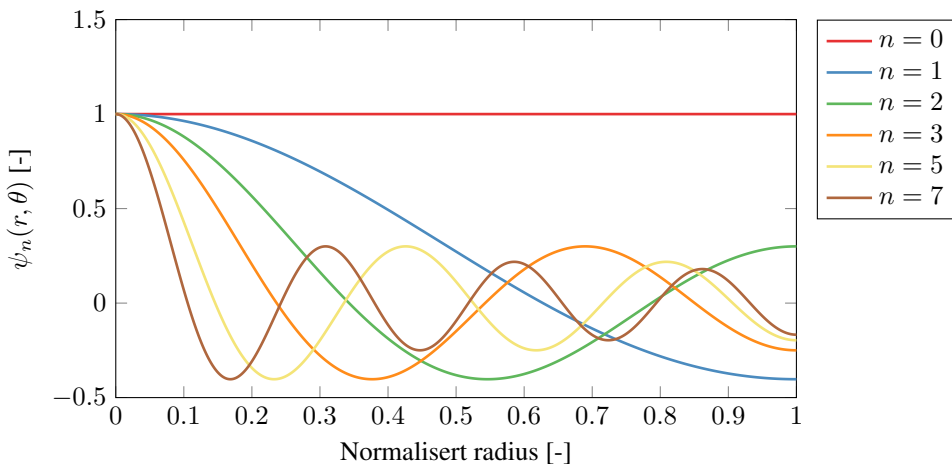
Dermed gjenstår det kun å bestemme formen til  $c_1$  som finnes fra normalisering gitt ved ortogonalitetsrelasjonen i [7],

$$\int_S \psi_n \psi_m dS = S \delta_{nm}. \quad (2.9)$$

Resultatet av dette er funnet i [1] til å være at  $c_1 = 1/J_0(\gamma_n)$  som medfører at den normaliserte, trykkprofilen i radiell retning for et sylindrisk rør med harde vegger og radius  $R$  er gitt ved

$$\psi_n = \frac{J_0(\gamma_n r/R)}{J_0(\gamma_n)}. \quad (2.10)$$

Lydtrykkprofilen i røret, normalt på propagasjonsretningen, vil altså ha et amplitudemønster bestående av  $n$  nodale sirkler, noe som er illustrert på figur 2.2.



**Figur 2.2:** Figuren viser den ikke-normaliserte lydtrykkprofilen i radiell retning for ulike moder i en sylindrisk bølgeleder som funksjon av normalisert radius, hvor  $r = 1$  er ekvivalent med  $r = R$ .

Av denne kan det også sees at moden med  $n = 0$  er planbølgemoden som representerer en uniform trykkfordeling normalt på propagasjonsretningen.

### Trykkprofil i propagasjonsretning

I tillegg til en trykkfordeling normalt på propagasjonsretningen  $\psi_n(r, \theta)$  sees det fra løsningen av Helmholtz ligning gitt i (2.4) at også bølgeforplantningen i  $z$ -retningen må kartlegges for å kunne bestemme trykkfordelingen i et sirkulært rør. Fra [1] er det gitt at  $P_n(z)$  i et rør med uniformt tverrsnitt er gitt ved

$$P_n(z) = (A_n e^{-jk_n z} + B_n e^{jk_n z}) e^{j\omega t}, \quad (2.11)$$

hvor  $A_n$  er den komplekse amplituden til bølgekomponenten i positiv  $z$ -retning og  $B_n$  den komplekse amplituden til komponenten i negativ propagasjonsretning.

I uttrykket ovenfor er  $k_n$  bølgetallet til den  $n$ 'te moden i propagasjonsretningen som i [1] finnes til

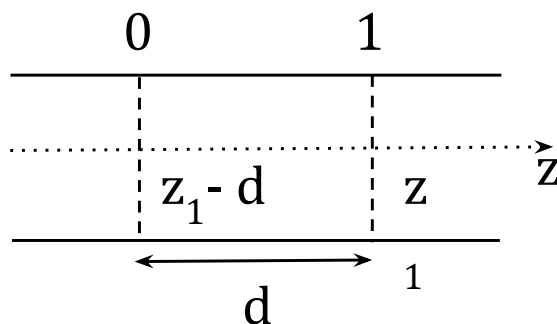
$$k_n = \pm \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}. \quad (2.12)$$

Fra uttrykket for  $k_n$  er det tydelig at bølgetallet i  $z$ -retningen er direkte avhengig av bølgetallet i fritt felt  $k$  og bølgetallet i radiell retning  $\alpha_n$  og at vi vil få utdøende bølger når  $\alpha_n > k$ , ettersom bølgetallet  $k_n$  da vil bli rent imaginært. Her velges fortegnet til kvadratrotene slik at bølgen beskrevet i (2.11) dør ut når bølgetallet blir imaginært.

### 2.1.2 Prosjeksjon langs rør

Ligningene ovenfor gir en generell beskrivelse av lydtrykkfordelingen i en sylinder som vist på figur 2.1, men konkrete verdier for trykkamplitudene til hver mode  $P_n$  kan kun finnes dersom man har utførlig kjennskap til kilden som eksiterer røret. Metoden som benyttes i denne oppgaven går, som nevnt i innledningen, ut på å bestemme trykk og volumhastighet hvor som helst i røret basert på en kjent strålingsimpedans som projekteres bortover hornet.

I det følgende sees det på et sylinderelement som vist på figur 2.3 hvor man projekterer den kjente størrelsen et skritt  $d$  i negativ  $z$ -retning.



**Figur 2.3:** Ovenfor vises et todimensjonalt utsnitt av et sirkulært rør med to parallelle plan 0 og 1 normalt på propagasjonsretningen  $z$  separert av en avstand  $d$ .

Typisk kjenner vi impedansen ved enden av røret, da strålingsimpedansen ofte er mulig å beregne. For tilfellet med sirkulære rør er det vist hvordan dette gjøres i avsnitt 2.5. Under beskrives det hvordan denne kan brukes til å bestemme impedansen på hvert punkt i røret og videre hvordan denne kan gi både volumhastigheten og trykket.

### Impedans

Dersom den kjente impedansen til enhver tid betegnes ved matrisen  $\mathbf{Z}^{(1)}$ , finnes impedansen for et kontinuerlig rørelement et steg  $d$  bakover i  $z$ -retning,  $\mathbf{Z}^{(0)}$ , fra [1] til å være

$$\mathbf{Z}^{(0)} = (j\mathbf{D}_3)^{-1}\mathbf{Z}_c - \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{Z}_c(\mathbf{Z}^{(1)} + (j\mathbf{D}_3)^{-1}\mathbf{Z}_c)^{-1}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{Z}_c, \quad (2.13)$$

hvor elementene i de ekstra matrisene er definert som

$$D_2(n, m) = \begin{cases} j \sin(k_n d) & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (2.14)$$

$$D_3(n, m) = \begin{cases} \tan(k_n d) & n = m \\ 0 & n \neq m, \end{cases} \quad (2.15)$$

og den karakteristiske impedansen er gitt ved

$$Z_c(n, m) = \begin{cases} k\rho c/k_n S & n = m \\ 0 & n \neq m. \end{cases} \quad (2.16)$$

Dersom strålingsimpedansen er kjent, vil denne da være den første  $\mathbf{Z}^{(1)}$  matrisen som gjør det mulig å finne impedansen ved halsen ved hjelp av å stegvis regne seg bakover.

### Volumhastighet

Ovenfor ble det nevnt at stålingsimpedansen ut fra et rør ofte er kjent. Denne er som regel gitt for tilfellet når røret eksisteres av en planbølge, altså er også volumhastigheten ved  $z = 0$  ofte også kjent størrelse.

Fra [1] har man at dersom rørelementet vist på figur 2.3 eksisteres av en kjent volumhastighet gitt ved vektoren  $U^{(0)}$ , vil volumhastigheten et steg  $d$  i positiv  $z$ -retning fra munningen  $U^{(1)}$  kunne finnes fra følgende sammenheng

$$U^{(1)} = (-\mathbf{D}_2\mathbf{Z}_c^{-1}(\mathbf{Z}^{(0)} - \mathbf{Z}_c) + \mathbf{E})U^{(0)}, \quad (2.17)$$

hvor elementene i  $\mathbf{E}$ -matrisen er definert som

$$E(n, m) = \begin{cases} e^{-jk_n d} & n = m \\ 0 & n \neq m. \end{cases} \quad (2.18)$$

Ettersom impedansen ved inngangen  $\mathbf{Z}^{(0)}$  kan finnes fra ligningene gitt i avsnittet ovenfor, gjør disse sammenhengene oss i stand til å bestemme volumhastigheten hvor som helst i røret. Neste steg blir deretter å bruke disse størrelsene til å bestemme trykket.

## Trykk

Ovenfor ble det vist hvordan man på bakgrunn av en kjent kildestyrke (volumhastighet) og en kjent strålingsimpedans kan beregne volumhastigheten og impedansen hvor som helst i et rett, sylindrisk rør. Fra definisjonen av akustisk impedans,  $P = \mathbf{Z}U$ , er det mulig å bruke denne informasjonen til å bestemme trykket i hvert delelement i røret.

$$P^{(0)} = \mathbf{D}_1 P^{(1)} + \mathbf{D}_2 \mathbf{Z}_c U^{(1)}, \quad (2.19)$$

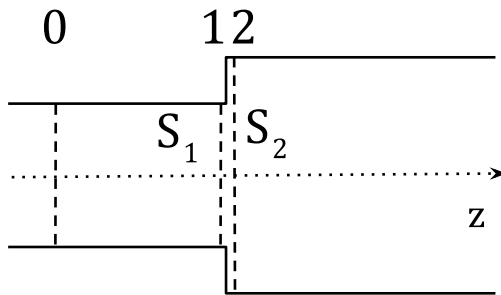
hvor elementene i  $\mathbf{D}_1$  er gitt ved

$$D_1(n, m) = \begin{cases} \cos(k_n d) & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (2.20)$$

De matematiske uttrykkene som er nødvendige for å bestemme lydtrykk, volumhastighet og impedans hvor som helst i et rett rør er nå gjort rede for. Det neste naturlige steget blir derfor å se på hvordan disse matematiske sammenhengene endres nå som de kjente størrelsene ikke bare propagerer langs et rør med konstant tverrsnitt, men propagerer over en diskontinuitet.

### 2.1.3 Prosjeksjon over diskontinuitet

Ligningene presentert ovenfor for en propagerende bølge i en uniform sylinder med konstant radius, gir hvordan lydtrykkfordelingen i hvert sylinderelement kan bestemmes som en sum av modener. Når disse sylinderelementene kobles sammen, vil uttrykkene funnet ovenfor påvirkes av at det oppstår en diskontinuitet når tverrsnittet endres fra  $S_1$  til  $S_2$ , som illstrert på figur 2.4. En propagerende bølge vil da oppleve devis refleksjon og transmisjon i overgangen, og den matematiske beskrivelsen blir mer komplisert ettersom det vil være ulike radielle trykkfordelinger i de to sylindrerne,  $\psi_n$  og  $\psi_m$ , som nå må kobles.



**Figur 2.4:** Ovenfor er en illustrasjon av diskontinuiteten som oppstår når to sirkulære rør med tverrsnitt  $S_1$  og  $S_2$  kobles sammen, i tilfellet der  $S_2 > S_1$ .

Når man ser på multimodal bølgeforplantning langs et rør, vil de av modene som eksisteres som har lavest orden, ha plane til relativt plane bølgefronter. Disse vil bevege seg

problemfritt langs røret, men når modene får høyere orden, vil disse ha ikke-uniform lydtrykkfordeling i radiellretning og den  $n$ 'te moden i sylinderelement 1 vil ikke direkte eksitere den  $n$ 'te moden i element 2, men derimot en serie nye moder. For hver enkelt mode i element 1 blir det altså dannet et tilhørende lydfelt i element 2 bestående av summen av de eksiterte modene. Det oppstår altså en kobling mellom modene.

Nedenfor redegjøres det først for hvordan kontinuitet i trykk over en diskontinuitet kan brukes til å beskrive denne koblingseffekten. Deretter finnes det uttrykk for projeksjon av volumhastighet og impedans over en slik diskontinuitet.

### Trykk

Fra bevarelse av energi blir det klart at lydtrykket over diskontinuiteten vist på figur 2.4, der tverrsnittarelaet endres fra  $S_1$  til  $S_2$ , må være kontinuerlig. I det følgende benevnes  $p^{(1)}$  som trykket på overflate 1, som er diskontinuiteten sett fra venstre side, og  $p^{(2)}$  som trykket på overflate 2 som er diskontinuiteten sett fra høyre side. Med denne notasjonen får kontinuitetsrelasjonen for trykk formen

$$p^{(1)} = p^{(2)} \quad \text{på } S_1, \quad S_1 < S_2. \quad (2.21)$$

Når denne kombineres med ortogonalitetsrelasjonen gitt i ligning (2.9), gis det i [1] at de komplekse modeamplitudene  $P_n^{(1)}$  på overflate 1 avhenger av de komplekse modeamplitudene på overflate 2,  $P_n^{(2)}$ , ved sammenhengen

$$P_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm} P_m^{(2)}. \quad (2.22)$$

Videre betegnes  $\psi_n^{(1)}$  og  $\psi_m^{(2)}$  modeprofilene i radiell retning på henholdsvis overflate 1 og overflate 2, mens  $n$  er modeindeksen før diskontinuiteten og  $m$  er modeindeksen etter. Uttrykket for elementene i projeksjonsmatrisen  $F_{nm}$  for denne notasjonen er grundig utledet i [1] og finnes der til å være

$$F_{nm} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \psi_n^{(1)} \psi_m^{(2)} dS. \quad (2.23)$$

I tillegg kan sammenhengen mellom  $P_n^{(1)}$  og  $P_m^{(2)}$  gitt i (2.22) uttrykkes på matrisform som

$$P^{(1)} = \mathbf{F}P^{(2)}, \quad S_1 < S_2. \quad (2.24)$$

Ovenfor er  $P^{(1)}$  en vektor av modale trykkamplituder på overflate 1,  $P^{(2)}$  en vektor av de tilsvarende størrelsene på overflate 2 og  $\mathbf{F}$  er en matrise bestående av elementene  $F_{nm}$ . Denne sammenhengen gjelder for  $S_2 > S_1$  men uttrykkene for  $S_2 < S_1$  kan utledes på samme vis, men med den forskjellen at indeksene (1) og (2) bytter plass ettersom projeksjonen da utføres motsatt vei. Trykkrelasjonen i dette tilfellet får formen

$$P^{(2)} = \mathbf{V}P^{(1)}, \quad S_2 < S_1, \quad (2.25)$$

hvor elementene i projeksjonsmatrisen  $\mathbf{V}$  er gitt ved

$$V_{nm} = \frac{1}{S_2} \int_{S_2} \psi_n^{(2)} \psi_m^{(1)} dS. \quad (2.26)$$

I avsnitt 2.1.1 finnes trykkprofilen i radiell retning  $\psi(r, \theta)$  for et sirkulært rør, og uttrykket for denne er gitt i ligning (2.10). Når dette settes inn i ligning (2.23) og i ligning (2.26) er det i [1] funnet at projeksjonsmatrisene i de to tilfellene er gitt ved henholdsvis

$$F_{nm}(\beta) = \frac{2\beta\gamma_m J_1(\beta\gamma_m)}{(\beta^2\gamma_m^2 - \gamma_n^2)J_0(\gamma_m)} \quad (2.27)$$

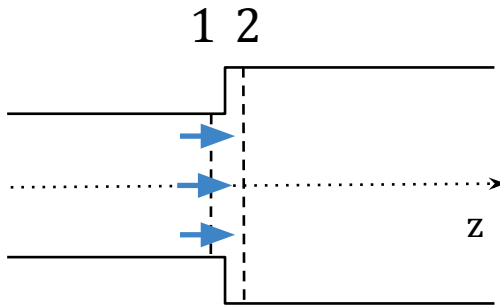
og

$$V_{nm}(\beta) = F_{nm}\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad (2.28)$$

hvor man har definert størrelsen  $\beta = R1/R2$ .

### Volumhastighet

Når tverrsnittet endres i overgangen fra et sylinderelement til et annet, blir det tydelig, at grunnet fullstendig harde vegger i radiell retning, må partikkelstrømmen gjennom overflate 1 på figur 2.5 være lik partikkelstrømmen gjennom overflate 2.



**Figur 2.5:** Figuren viser hvordan volumhastigheten i rørelement 1 faller inn på rørelement 2 etter diskontinuiteten når de vertikale skilleveggene mellom rørelementene  $S_2 - S_1$  er fullstendig harde.

I tillegg blir det klart at partikkelhastigheten gjennom arealelementet  $S_2 - S_1$  vil være null når den vertikale vegg er en fullstendig hard vegg. De gjeldende kontinuitetsligningene for partikkelhastigheten i z-retning i tilfellet der  $S_2 > S_1$  er dermed

$$\begin{aligned} v_z^{(1)} &= v_z^{(2)} & \text{på} & & S_1, & S_1 < S_2 \\ v_z^{(2)} &= 0 & \text{på} & & S_2 - S_1, & S_1 < S_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ettersom volumhastighet er definert som  $U = vS$ , kan kontinuitetsligningene for partikkelhastigheten brukes til å vise at sammenhengen mellom volumstrøm før og etter diskontinuiteten er gitt ved

$$U_n^{(2)} = \sum_m^{\infty} F_{mn} U_m^{(1)}, \quad (2.30)$$

hvor  $\mathbf{F}$  er den samme projeksjonsmatrisen som er gitt i (2.23), men med motsatte indekser. På matrisenotasjon finnes da sammenhengen mellom volumhastigheten før og etter diskontinuiteten for tilfellet der  $R_1 < R_2$  til å være

$$U^{(2)} = \mathbf{F}^T U^{(1)}, \quad S_1 < S_2, \quad (2.31)$$

mens tilsvarende volumhastighet for tilfellet der  $R_2 < R_1$  er gitt ved

$$U^{(1)} = \mathbf{V}^T U^{(2)}, \quad S_2 < S_1. \quad (2.32)$$

### Projeksjon av Impedans over diskontinuitet

I avsnittene ovenfor er det blitt presentert generelle uttrykk for trykkfordelingen og partikkelhastigheten i propagasjonsretningen og i den radielle retningen for en sylinder med fullstendig harde vegger. Uttrykket for lydtrykkfordeling i radiell retning er blitt brukt til å finne projeksjonsmatrisene  $\mathbf{F}$  og  $\mathbf{V}$ , som sammen med uttrykk funnet fra kontinuitetsligninger, kan brukes til å gi sammenhengen mellom lydtrykket og volumhastigheten i overgangen mellom to sylinderelement. Kombinasjonen av disse, samt definisjonen av akustisk impedans, gjør det så mulig å finne et uttrykk for projeksjon av impedans over en diskontinuitet.

Dette gjøres ved at lydtrykket i sylinderelement før og etter diskontinuiteten først uttrykkes ved den akustiske impedansen, som gitt under

$$P^{(1)} = \mathbf{Z}^{(1)} U^{(1)}, \quad (2.33)$$

$$P^{(2)} = \mathbf{Z}^{(2)} U^{(2)}. \quad (2.34)$$

Deretter elimineres  $P$  og  $U$  ved hjelp av uttrykkene funnet i de foregående avsnittene, som for trykket er gitt ved ligning (2.24) og for volumhastighet ved ligning (2.31). Når dette er gjort, kan de nye sammenhengene kombineres til følgende uttrykk for impedansen før diskontinuiteten

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{F} \mathbf{Z}^{(2)} \mathbf{F}^T, \quad S_1 < S_2, \quad (2.35)$$

for tilfellet der  $S_1 < S_2$ , og tilsvarende lik

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z}^{(2)} (\mathbf{V}^T)^{-1}, \quad S_2 < S_1, \quad (2.36)$$

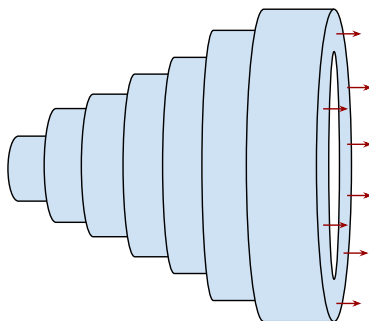
for  $S_2 < S_1$ .

I de foregående avsnittene er det blitt redegjort for hvordan en kjent volumhastighet eller strålingsimpedans kan projekteres bortover et sylinderelement, og over en diskontinuitet fra et element til et annet. Med utgangspunkt i disse sammenhengene er det mulig å konstruere flere typer horn med ulik geometri. Neste steg blir å se på hvordan ligningene ovenfor endres når det videre sees på høyttalerelement i stedet for horn.



## 2.2 Multimodal bølgeforplantning i høyttalerelement

Som nevnt i innledningen, kan et horn representeres som en serie av konsentriske sylindre. For hver av disse er det mulig å bestemme trykkfordelingen analytisk, og man kan studere hvordan hver enkelt komponent i denne eksiteres av en ny serie moder i den påfølgende sylindringen. Bare med utgangspunkt i en kjent strålingsimpedans er det da mulig å til slutt finne det eksterne trykket utenfor hornet, når dette eksiteres av en bølge.



**Figur 2.6:** Figuren illustrerer hvordan et høyttalerelement kan konstrueres ved hjelp av Modal metode. De røde pilene illustrerer den ekstra volumhastigheten fra de vertikale veggene i diskontinuitetene, som skiller konstruksjonen av et høyttalerelement fra konstruksjonen av et horn.

Samme metode kan brukes for å simulere et høyttalerelement i baffel, og det å videreutvikle ligningene for modal metode for sirkulære horn til å gjelde for høyttalerelement, er et av hovedmålene ved denne masteroppgaven. Forskjellen mellom horn og høyttalerelement består i at veggene med arealet  $S_2 - S_1$ , illustrert ved den ytterste blå ringen på figur 2.6, nå også svinger med en volumhastighet slik at de etterligner en vibrerende struktur. Resultatet er en ekstra volumhastighet etter diskontinuiteten, som er illustrert ved røde piler på figuren ovenfor.

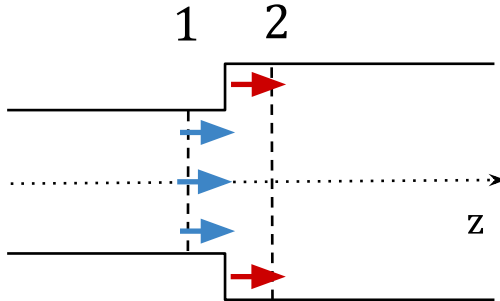
Innføringen av en ekstra volumhastighet på arealet  $S_2 - S_1$  vil ikke påvirke ligningene som beskriver hvordan en bølge propagerer langs røret. Atltså vil ligningene for projeksjon bortover et rør være de samme for høyttalerelement som for sirkulært horn, som presentert i avsnitt 2.1.1. Endringene oppstår i det bølgen propagerer over en diskontinuitet, illustrert ved overgangen fra et trappetrinn til et annet, da kontinuitetsligningene for volumhastigheten nå ikke lenger vil ha samme form som tidligere.

### 2.2.1 Projeksjon over diskontinuitet

I avsnitt 2.1.3 ble det, med utgangspunkt i kontinuitetsligningene for partikkelhastighet, funnet et uttrykk for projeksjon av volumhastighet over diskontinuiteten som oppstår i overgangen mellom to sylinderelement. Den ekstra volumhastigheten på  $S_2 - S_1$  vil ikke påvirke kontinuiteten i trykket, og ligningene for projeksjon av trykk over diskontinuitet blir derfor de samme som gitt i avsnitt 2.1.3. Det er derfor kun nødvendig å utlede nye sammenhenger for projeksjon av volumhastighet og impedans.

### Beregning av Volumhastighet ved diskontinuitet

Videreutviklingen fra horn til høyttalerelement er vist skematisk på figur 2.7, hvor den ekstra volumhastigheten på arealet  $S_2 - S_1$  er illustrert ved de røde pilene.



**Figur 2.7:** Figuren viser hvordan volumhastigheten gjennom plan 1 før diskontinuiteten (blå) faller inn på plan 2 sammen med den ekstra volumhastigheten fra skilleveggen mellom rørellementene (rød) når denne svinger med.

Nå som en ekstra volumhastighet er inkludert, får uttrykket gitt i (2.30) for  $U_n^{(2)}$  for sirkulært horn et ekstra ledd

$$U_n^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} F_{mn}^{(1)} U_m^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} F_{mn}^{(2-1)} U_m^{(2-1)}, \quad (2.37)$$

hvor  $U^{(2-1)}$  er lik en konstant partikkelhastighet ganget med arealet  $S_2 - S_1$ . Elementene i den første projeksjonsmatrisen er gitt i ligning (2.23), som tidligere, mens elementene i den andre finnes fra integrasjon over arealet  $S_2 - S_1$  og er gitt ved

$$F_{mn}^{(2-1)} = \frac{1}{S_2 - S_1} \int_{S_2 - S_1} \psi_m^{(1)} \psi_n^{(2)} dS. \quad (2.38)$$

Ettersom vi fortsatt kun ser på sirkulære sylinderelement vil trykkfordeling i radiell retning  $\psi(r, \theta)$  gitt i (2.10), være den samme som tidligere. Dermed finnes elementene  $F_{mn}^{(2-1)}$  ved integrasjon til å være

$$F_{mn}^{(2-1)} = \frac{2}{J_0(\gamma_n) J_0(\gamma_m)} \frac{\gamma_m / \beta J_1(\gamma_m / \beta) J_0(\gamma_n) + \gamma_n \beta J_0(\gamma_m) J_1(\gamma_n \beta)}{((\gamma_m / \beta)^2 - \gamma_n^2 - \gamma_m^2 + (\gamma_n \beta)^2)}, \quad (2.39)$$

hvor  $\beta = R_1 / R_2$ . Løsningene av integralene som behøves for å komme frem til dette uttrykket er gitt i ligning A.2.1. Nå som projeksjonsmatrisen er kjent kan denne, sammen med den for sirkulært horn, brukes til å finne et uttrykk for den projekterte volumhastigheten. På matriseform blir det nye uttrykket for volumhastigheten i plan 2 gitt ved

$$U^{(2)} = \mathbf{F}^T U^{(1)} + \mathbf{F}^{(2-1)T} U^{(2-1)}. \quad (2.40)$$

### Projeksjon av impedans

Nå som det er funnet et uttrykk for den totale volumhastigheten etter diskontinuiteten, gjenstår det kun å finne et uttrykk for hvordan impedansen projekteres over en diskontinuitet. For sirkulært horn ble dette utledet med utgangspunkt i definisjonen av akustisk impedans og uttrykkene funnet for projeksjon av trykk og volumhastighet. Definisjonen av akustisk impedans er fortsatt den samme, og det tas derfor utgangspunkt i ligning (2.33) og ligning (2.34). Deretter elimineres trykkene ved innsetting av ligning (2.24), som før, men det nye uttrykket for volumhastigheten etter diskontinuiteten gir at uttrykket for impedansen  $\mathbf{Z}^{(1)}$  blir mer komplisert for høyttalerelement enn for horn, da det må finnes ved å løse matriseligningen

$$\mathbf{Z}^{(1)}U^{(1)} = \mathbf{F}^{(1)}\mathbf{Z}^{(2)}\mathbf{F}^{(1),T}U^{(1)} + \mathbf{F}^{(1)}\mathbf{Z}^{(2)}\mathbf{F}^{(2-1),T}U^{(2-1)}. \quad (2.41)$$

Dette viser seg å være enklere sagt enn gjort, da størrelsen  $U^{(1)}$  er ukjent og ikke inverterbar, da den er en vektor. Som en første tilnærming brukes derfor i denne oppgaven uttrykkene for projeksjon av impedans for sirkulært horn

$$\mathbf{Z}^{(1)} \approx \mathbf{F}^{(1)}\mathbf{Z}^{(2)}\mathbf{F}^{(1),T}U^{(1)}. \quad (2.42)$$

Hvor stor feil denne tilnærmingen resulterer i studeres i resultat- og diskusjonskapitlet. I tillegg sees det derfor også kort på andre, konkurrerende metoder for beskrivelse av høyttalerelement, for å få et bilde på denne metoden med approksimasjon, sammenlignet med konkurrerende metoder.

## 2.3 Alternative metoder for beskrivelse av høyttalerelement

I avsnittet ovenfor presenteres det hvordan Modal metode kan brukes til å simulere et høyttalerelement ved hjelp av en approksimasjon som gjøres når impedans projekteres over en diskontinuitet. Med denne approksimasjonen i bakhodet, kan det ikke forventes at numeriske simuleringer av et høyttalerelement gjort med utgangspunkt i Modal metode vil være perfekte. Det blir derfor interessant å studere hvor god denne metoden, med en kjent feil, blir i forhold til andre metoder som hittil er presentert i litteraturen, og som er lett tilgjengelige. For å kunne si noe om fordelene og ulempene ved disse, presenteres derfor kort en teoretisk beskrivelse av teorien bak et utvalg av tidligere arbeid som kan brukes til å modellere høyttalerelement.

### 2.3.1 BERIM

BERIM en forkortelse for «*the Boundary Element-Rayleigh Integral Method*» og er en metode som er utviklet for løsninger av akustiske problemer som består av en kavitet med én enkelt åpning i en uendelig baffel, da tradisjonell BEM for slike tilfeller er utilstrekkelig.

I [15] beskrives metoden som en hybrid mellom to kjente metoder for beregning av numeriske problemer i akustikken, nemlig «*the interior Boundary Element Method*» (BEM) og «*the Rayleigh Integral Method for solutions of the Helmholtz equation*». Metoden går i grove trekk ut på at det legges en fiktiv grense over åpningen til kaviteten før det indre akustiske problemet kobles med det ytre, ved hjelp av Rayleighintegralet. Rayleighintegralet er et enkelt uttrykk gitt i (2.68), som relaterer hastighetspotensialet i fjernfeltet til hastighetspotensialet på overflaten til kaviteten.

BERIM anses i denne masteroppgaven som den mest pålitelige kilden til numerisk simulerte resultater både for horn og høyttalerelement da det i [15] redegjøres for svært gode resultater ved slike simuleringer, og dette med adskillig kortere kjøretid enn tradisjonell BEM.

### 2.3.2 Geddes metode

I [2], kapittel 4, sees det på teorien bak utstrålt lyd fra kilder i et plan. Blant kildene som presenteres er et konisk skall festet i en baffel, med geometri som vist på figur 2.8, som gir en god tilnærming til et høyttalerelement festet i en baffel som er det man er ute etter i denne oppgaven.

Når  $R$  er definert som avstanden fra et element på den koniske kilden til flaten som inneholder baffelen, se figur 2.8, er denne gitt ved

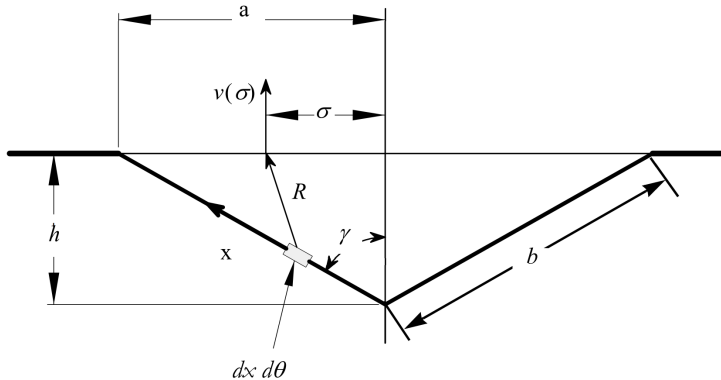
$$R(\sigma, z, \theta) = \sqrt{h^2 - 2\frac{h^2x}{b} + \sigma^2 + x^2 - 2\frac{\sigma x}{b} \sqrt{(b^2 - h^2) \cos(\theta)}}. \quad (2.43)$$

Her er  $\theta$  plasseringen i horisontalplanet til elementet  $dx d\theta$  av den koniske kilden. Fra den tredimensjonale Greens-funksjonen  $\frac{e^{ikR}}{2\pi R}$  og normalkomponenten til hastigheten til ele-

mentet  $dx d\theta$ ,  $v_0(x, \theta)$  beskrives det videre at hastighetsfordelingen i planet med baffelen er gitt ved

$$v(\sigma) = \frac{1}{\pi \sin(\gamma)} \int_0^b \int_0^\pi v_0(x, \theta) \frac{e^{ikR(\sigma, x, \theta)}}{R(\sigma, x, \theta)} x d\theta dx. \quad (2.44)$$

Basert på denne er det da mulig å finne trykket i fjernfeltet ved hjelp av Rayleighintegralet som gitt i ligning (2.68).



**Figur 2.8:** Figuren viser geometrien som det er tatt utgangspunkt i når lydtrykket finnes fra et høyttalerelement ved hjelp av Geddes metode. Figuren er hentet fra [2].

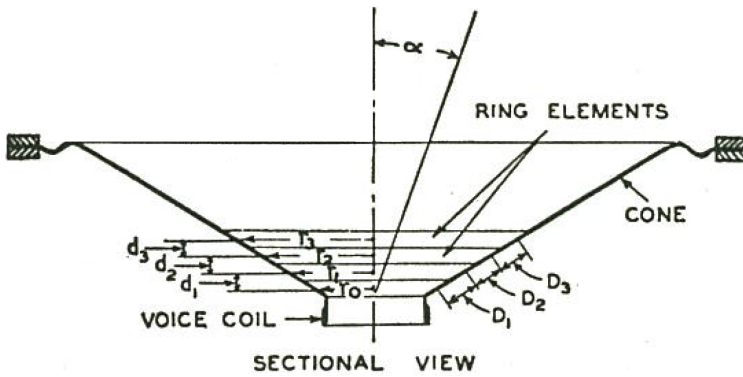
I [2] nevnes det at denne metoden kun er en tilnærming ettersom den akustiske impedansen i baffelplanet ikke bestemmes, og ettersom det ikke tas hensyn til akustiske resonanser som oppstår i hulrommet mellom det koniske elementet og baffelplanet. Til tross for at spesielt den siste forenklingen kan gi signifikant feil, gir metoden en indikasjon på utstrålt lyd fra et konisk høyttalerelement og dette kun ved en serie enkle beregninger.

### 2.3.3 Olsons metode

En annen alternativ og enkel tilnærming til et høyttalerelement er utarbeidet av Carlisle [16], men forenklet og presentert av Olson i [3]. Her sees det på et konisk element bygd opp av en serie ringkilder, som illustrert på figur 2.9.

Under forutsetningen at hvert enkelt ringelement skal ha en dimensjon som tilsvarer en brøkdel av bølgelengden til lyden som propagerer i elementet, er det resulterende lydtrykkfeltet gitt ved vektorsummen av amplitudebidragene fra hver enkelt ring. Amplitudene  $A_n$  avhenger av radiusen til ringen  $r_n$ , høyden på ringelementet i horisontalretningen,  $d_n$ , lengden av ringelementet langs den koniske akse  $D_n$  og vinkelen mellom symmetriaksen til det fullstendige koniske elementet og observasjonspunktet,  $\alpha$ . Disse geometriske størrelsene er definert på figur 2.9 og uttrykket for amplitudene er gitt ved

$$A_n = 2\pi r_n D_n J_0 \left( \frac{2\pi r_n}{\lambda_A} \sin \alpha \right), \quad (2.45)$$



**Figur 2.9:** Figuren viser de aktuelle geometriske størrelsene brukt i Olsons utarbeidelse av lydtrykket i fjernfeltet for et høyttalerelement og er hentet fra [3].

hvor  $\lambda_A$  er bølgelengden til lyd i luft,  $J_0$  er besselfunksjon av type 1 og av nulte orden, og de geometriske størrelsene er gitt i cm.

Med utgangspunkt i dette finnes direktivitetsfaktoren til det koniske elementet til å være

$$R_\alpha = \frac{\sum_{K=0}^{K=n} A_K \cos \theta_K - j \sum_{K=0}^{K=n} A_K \sin \theta_K}{\sum_{K=0}^{K=n} A_K}, \quad (2.46)$$

hvor  $R_\alpha$  er forholdet mellom trykket for en generell vinkel  $\alpha$  og trykket for  $\alpha = 0$  og fasevinkelen til ringelement  $n$  er gitt ved

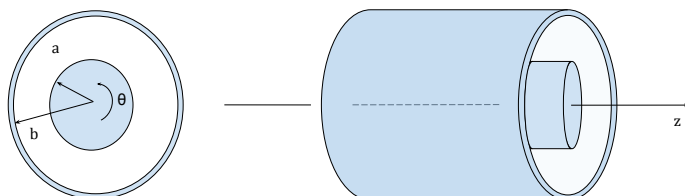
$$\theta_n = 2\pi \left( \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{\lambda_A} \right) \cos \alpha. \quad (2.47)$$

## 2.4 Multimodal bølgeforplantning i konsentriske horn

I oppgaveformuleringen til denne masteroppgaven nevnes det at mange høyttalerelement har en støvhette eller en faseplugg som står ut fra midten av elementet, og at en del horn også har en sentralt plassert struktur som er med på å definere hornformen. En viktig del av oppgaven er derfor å utvide metoden til å kunne brukes på konsentriske geometrier. Den naturlige utviklingen videre er derfor å gå tilbake til horngeometrier og først kartlegge hvordan de matematiske sammenhengene for projeksjon bortover et konsentrisk rør endres i forhold til projeksjon bortover et sirkulært rør. Deretter studeres projeksjon over en diskontinuitet fra et konsentrisk rør til et annet, og projeksjon over en diskontinuitet fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør. Når disse sammenhengene er utarbeidet er det mulig å konstruere en rekke nye horngeometrier fullstendig uten de tilnærmingene som var nødvendige i tilfellet for høyttalerelementet.

### 2.4.1 Bølgeforplantning i konsentrisk rør

For å kunne beskrive multimodal bølgeforplantning i et konsentrisk horn, tas det først utgangspunkt i et konsentrisk rør med fullstendig harde vegger. I det følgende er radiusen til det indre sylinderelementet gitt ved  $r = a$  og radiusen til det ytre elementet er gitt ved  $r = b$ . Vinkelen  $\theta$  gir plasseringen i planet normalt på propagasjonsretningen og er, sammen med de øvrige geometriske størrelsene, definert på figur 2.10.



**Figur 2.10:** Figuren viser de geometriske størrelsene brukt som utgangspunkt i beskrivelsen av bølgeforplantning i et konsentrisk rør. Her gir  $a$  rørets indre radius,  $b$  rørets ytre radius og  $\theta$  gir plasseringen normalt på propagasjonsretningen  $z$ .

Når et konsentrisk rør eksiteres av en lydkilde vil de stående bølgene som dannes i røret grunnet konstruktiv og destruktiv interferens påvirkes av sylinderelementet i midten, og trykkbølgeprofilen i radiell retning vil derfor avvike fra den for et sirkulært rør.

Fra avsnitt 2.1.1 om bølgepropagasjon i sirkulært rør, ble det funnet at lydtrykkfordelingen for hver enkelt mode var gitt som produktet av lydtrykkfordelingen i propagasjonsretningen  $P_n(z)$ , lydtrykkfordelingen i radiellretning  $\psi_n(r, \theta)$  og en tidsavhengig fasefaktor. Ettersom grensebetingelsene i  $z$ -retningen fortsatt er de samme som for sirkulært rør, vil komponenten til bølgeligningen som gir løsningen i  $z$ -retning,  $P_n(z)$ , ha samme form som før, men trykkprofilen i radiell retning må finnes spesifikt for dette nye tilfellet.

### Trykkprofil i radiell retning

Fra tidligere hadde vi at den radielle komponenten til bølgeligningen ble lik bessels ligning av første orden og at den generelle løsningen av denne var gitt ved  $\psi_n(r) = c_1 J_0(\alpha_n r) + c_2 Y_0(\alpha_n r)$ . Ettersom målet fortsatt er å løse bølgeligningen i sylinderkoordinater for en cylindrisk bølgeleder, er dette fremdeles den generelle løsningen det tas utgangspunkt i. Forskjellen består i at det nå er en ekstra sylinder inne i røret, og at systemet dermed har to harde vegger i radiell retning. Systemet blir derfor avhengig av to grensebetingelser i stedet for én, og disse er gitt ved

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial r} = 0, \quad r = b \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial r} = 0, \quad r = a. \quad (2.49)$$

For sirkulært rør ble det klart at  $c_2$  måtte være null for alle fysiske formål, men etter-som det for konsentriske rør ikke er mulig å ha  $r = 0$ , vil ikke singularitetene som oppstår i besselfunksjonen  $Y_0(\alpha_n r)$  automatisk medføre at  $c_2$  må være lik null. Verdier for både  $c_1$  og  $c_2$  må derfor finnes spesifikt for dette tilfellet slik at  $\psi_n(r, \theta)$  oppfyller grensebetingelsene for det nye systemet, og slik at denne blir normalisert. I tillegg må verdiene for det radielle bølgetallet finnes slik at grensebetingelsene holder. Videre brukes  $\varphi$  til å betegne det radielle bølgetallet for konsentrisk rør, for ikke å bli forvekslet med det radielle bølgetallet for sirkulært rør,  $\alpha$ .

I de foregående kapitlene kommer det frem at det tidligere er blitt sett mye på multimodal bølgeforplantning i sirkulære rør, og i innledningen ble det nevnt at også kvadratiske rør og kvadratiske rør med bøy er blitt studert i litteraturen. Konsentriske rør er derimot lite nevnt, og lydtrykkprofilen i radiell retning  $\psi_n(r, \theta)$  er derfor ikke gitt eksplisitt i tidligere publisert arbeid. Det er allikevel mulig å finne nyttige sammenhenger i litteraturen, og spesielt arbeidet med kvadratiske rør med bøy vil være relevant i dette tilfellet.

Fra figur 2.11, som gir geometrien for et slikt kvadratisk rør med bøy, blir det tydelig at trykkfordelingen i radiell retning for denne geometrien vil måtte avhenge av de samme grensebetingelsene som trykkfordelingen normalt på propagasjonsretningen i et konsentrisk rør. Uttrykkene som utledes nedenfor bekreftes derfor indirekte av både [12], [13], [11] og [4].

Ved innsetting av den generelle løsningen i den radielle delen av bølgeligningen vises det at disse holder for

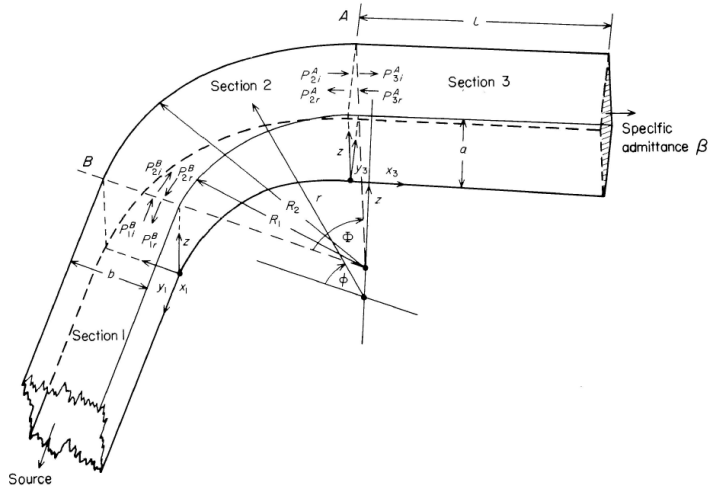
$$c_1 = -c_2 \frac{Y'_0(\varphi a)}{J'_0(\varphi a)} = -c_2 \frac{Y'_0(\varphi b)}{J'_0(\varphi b)} \quad (2.50)$$

som kan omskrives til en karakteristisk ligning på formen

$$J'_0(\varphi_n) Y'_0\left(\varphi_n \frac{b}{a}\right) - J'_0\left(\varphi_n \frac{b}{a}\right) Y'_0(\varphi_n) = 0. \quad (2.51)$$

Med et variabelskifte blir da uttrykket for trykkfordelingen i radiellretning for et konsentrisk rør gitt ved





**Figur 2.11:** Figuren er hentet fra [4] og gir geometrien brukt i artikkelen ved utledning av trykkprofil i radiell retning.

$$\psi_n(r) = c_1 \left\{ J_0 \left( \varphi_n \frac{r}{a} \right) - \frac{J_1(\varphi_n)}{Y_1(\varphi_n)} Y_0 \left( \varphi_n \frac{r}{a} \right) \right\}, \quad (2.52)$$

hvor  $\varphi_n$  er nullpunktene definert ved den karakteristiske ligningen. Altså gjenstår det å bestemme  $c_1$  slik at systemet blir normalisert og verdien til nullpunktene til den karakteristiske ligningen  $\varphi_n$  (2.51).

Fra [17] gis det at nullpunktene til denne ligningen finnes fra

$$\varphi \approx \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{\beta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\beta^5}, \quad (2.53)$$

når størrelsene  $\beta$  er gitt ved

$$\beta = \frac{s\pi}{\lambda - 1}. \quad (2.54)$$

Her er  $s$  modeindeksen og  $\lambda$  forholdet  $b/a$ . De øvrige sammenhengene for  $q$ ,  $p$  og  $r$  er da gitt ved

$$q = \frac{25(\lambda^3 - 1)}{6(4\lambda)^3(\lambda - 1)}, \quad (2.55)$$

$$p = -\frac{1}{8\lambda} \quad (2.56)$$

og

$$r = \frac{-1073(\lambda^5 - 1)}{5(4\lambda)^5(\lambda - 1)}, \quad (2.57)$$

hvor  $r$  i ligningene over ikke må forveksles med radiusen, og det forutsettes at  $\lambda$  er en positiv størrelse større enn én. I tillegg er det viktig å nevne at når  $\varphi$  går mot null, som er tilfellet for planbølgeomoden  $n = 0$ , oppstår en singularitet som gjør at planbølgeomoden må spesialhåndteres, ettersom  $\psi_n(r, \theta)$  da går mot tilfellet for sirkulært rør

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \psi(r) = J_0\left(\varphi \frac{r}{a}\right). \quad (2.58)$$

Nullpunktene blir da lik nullpunktene til besselfunksjon av første orden, som funnet i [1] for sirkulært rør.

Etter at de mulige verdiene til det radielle bølgetallet  $\varphi_n$  er bestemt, gjenstår det kun å finne  $c_1$  som i ligning (2.52) får rollen som den inverse av normaliseringsfaktoren. Denne finnes som i [1] fra ortogonalitetsbetingelsen (2.9) og integralet som må løses, blir dermed

$$\int_S \psi_n \psi_m dS = c_1^2 \int_a^b r \left\{ J_0\left(\varphi \frac{r}{a}\right) - \frac{J_1(\varphi)}{Y_1(\varphi)} Y_0\left(\varphi \frac{r}{a}\right) \right\}^2 dr = \frac{b^2 - a^2}{2}. \quad (2.59)$$

Fra uttrykket i appendiks gitt i avsnitt A.1, har man at løsningen av integralet som gir normaliseringsfaktoren, her definert som  $\eta = 1/c_1$ , er gitt ved

$$\eta = \left\{ \frac{2}{b^2 - a^2} \left[ \frac{1}{2} r^2 \left( \psi_0^2\left(\varphi \frac{r}{a}\right) + \psi_0'^2\left(\varphi \frac{r}{a}\right) \right) \right]_{r=a}^{r=b} \right\}^{1/2}. \quad (2.60)$$

Ettersom den radielle trykkfordelingen får en annen form for planbølgeomoden, må dette behandles som et særtilfelle også ved normaliseringen. Grunnet variabelskiftet tidligere blir ikke løsningen identisk som for sirkulært horn, men framgangsmåten er lik. Integralet som nå må løses reduseres til

$$\int_S \psi_n \psi_m dS = c_1^2 \int_a^b r \left\{ J_0\left(\varphi \frac{r}{a}\right) \right\}^2, \quad (2.61)$$

ettersom ortogonalitetsbetingelsen gir at man for planbølgeomoden må ha  $n = m = 0$  ved normalisering. Etter innføring av integrasjonsvariabelen  $u = \varphi r/a$  finnes løsningen av dette til å være

$$\eta = \left\{ \frac{2}{b^2 - a^2} \left[ \frac{1}{2} u^2 \left( J_0^2(u) + J_0'^2(u) \right) \right]_{u=\varphi}^{u=\varphi b/a} \right\}^{1/2}. \quad (2.62)$$

Som nevnt ovenfor er det kun trykkfordelingen i radiellretning  $\psi(r, \theta)$ , som endres når det sees på et konsentrisk rør kontra et sirkulært rør. Ligningene presentert for projeksjon av en bølge langs et sirkulært rør i avsnitt 2.1.2 vil derfor fortsatt gjelde for konsentrisk geometri, men fra definisjonene av elementene i projeksjonsmatrisene (2.23) sees det at disse direkte avhenger av  $\psi(r, \theta)$ . Derfor må disse finnes på nytt for dette tilfellet.

## 2.4.2 Prosjeksjon over diskontinuitet

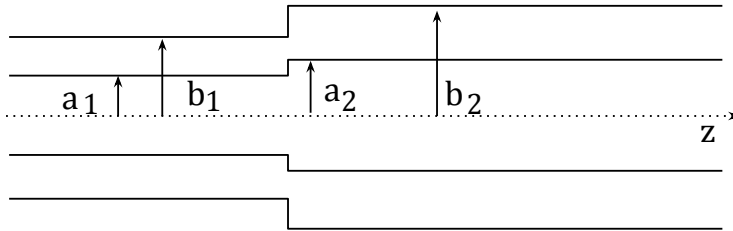
Ettersom  $\psi(r, \theta)$  nå er kjent for både sirkulært rør og konsentrisk rør, gir dette en rekke nye muligheter for hvilke typer diskontinuiteter som kan analyseres ved denne metoden, og dermed også hvilke horngeometrier som kan konstrueres og studeres.

Tidligere er det blitt nevnt at strålingsimpedansen ut av et sirkulært horn kan finnes når de geometriske spesifikasjonene til munningen er gitt, men dette er ikke tidligere blitt implementert for konsentrisk horn. For å kunne bygge en god del nyttige geometrier er det altså ikke bare gunstig å kunne studere multimodal bølgeforplantning fra et konsentrisk rør til det neste, men også bølgeforplantning fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør.

Ettersom det er ulike trykkfordelinger i radiellretning for sirkulært og konsentrisk horn, sees det fra definisjonen av projeksjonsmatrisene gitt i ligning (2.23), at projeksjonsmatrisen for overgangen fra sirkulært til konsentrisk og fra konsentrisk til konsentrisk må bli ulike. Nedenfor behandles først overgangen fra et konsentrisk rør til et annet med ulikt tverrsnitt, og deretter overgangen fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør. Når projeksjonsmatrisene for disse overgangene er kjent, kan de kombineres med uttrykkene for projeksjon av trykk, volumhastighet og impedans over en diskontinuitet som gitt i avsnittet for sirkulært horn. Ligningene for projeksjon av en bølge bortover et konsentrisk rør vil, som nevnt, ikke endres.

### Projeksjonsmatrise fra konsentrisk til konsentrisk rør

Når man beveger seg fra et konsentrisk rør til et annet, blir det nødvendig å se på fire ulike radiuser. I det følgende brukes  $a$  og  $b$  om henholdsvis indre og ytre radius, mens indeksene 1 og 2 angir om man er i første eller andre sylinderelement. Disse størrelsene er definert på figur 2.12.



**Figur 2.12:** Figuren viser geometrien brukt til utledning av elementene i projeksjonsmatrisen for overgangen fra et konsentrisk rør til et annet konsentrisk rør med andre geometriske størrelser.

Fra definisjonen av elementene i projeksjonsmatrisene har man, med utgangspunkt i lik notasjon som tidligere, at disse finnes fra

$$F_{nm} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \psi_n^{(1)} \psi_m^{(2)} dS = \frac{2\pi}{S_1 \eta^{(1)} \eta^{(2)}} \int_{S_1} r \psi_n^{*(1)} \psi_n^{*(2)} dr, \quad (2.63)$$

hvor  $\psi_n^{*(1)}$  brukes til å betegne den unormaliserte trykkfordelingen før diskontinuiteten og  $\psi_m^{*(2)}$  den unormaliserte trykkfordelingen etter. I tillegg gir egenskaper ved besselfunksjoner av henholdsvis første og andre type  $J$  og  $Y$ , at  $J'_0(x) = -J_1(x)$  og at  $Y'_0(x) =$

$-Y_1(x)$ , [17]. For multimodal bølgepropagasjon fra et sirkulært rørelement til et annet med ulik geometri, er altså projeksjonsmatriseelementene gitt ved integralet

$$F_{nm} = \frac{2\pi}{S_1\eta_n^{(1)}\eta_m^{(2)}} \int_{a_1}^{b_1} r \left\{ J_0\left(\varphi_n \frac{r}{a_1}\right) - \frac{J_1(\varphi_n)}{Y_1(\varphi_n)} Y_0\left(\varphi_n \frac{r}{a_1}\right) \right\} \times \left\{ J_0\left(\varphi_m \frac{r}{a_2}\right) - \frac{J_1(\varphi_m)}{Y_1(\varphi_m)} Y_0\left(\varphi_m \frac{r}{a_2}\right) \right\} dr. \quad (2.64)$$

Løsningen av dette finnes enklest som summen over fire integral som alle er varianter av integralet funnet fra [17] som er gitt i appendiks i ligning (A.2.1). Den endelige løsningen blir derfor summen av fire ledd og er gitt ved

$$F_{nm} = \frac{2\pi}{S_1\eta_n^{(1)}\eta_m^{(2)}} \left\{ \left[ -r \frac{\varphi_m/a_1 J_0(\varphi_n r/a_1) J_1(\varphi_m r/a_1) - \varphi_n/a_1 J_1(\varphi_n r/a_1) J_0(\varphi_m r/a_1)}{(\frac{\varphi_n}{a_1})^2 - (\frac{\varphi_m}{a_1})^2} \right]_{r=a_1}^{r=b_1} - \frac{J_1(\varphi_n)}{Y_1(\varphi_n)} \left[ r \frac{\varphi_n/a_1 J_1(\varphi_n r/a_1) Y_0(\varphi_m r/a_1) - \varphi_m/a_1 J_0(\varphi_n r/a_1) Y_1(\varphi_m r/a_1)}{(\frac{\varphi_n}{a_1})^2 - (\frac{\varphi_m}{a_1})^2} \right]_{r=a_1}^{r=b_1} - \frac{J_1(\varphi_m)}{Y_1(\varphi_m)} \left[ r \frac{\varphi_m/a_1 J_1(\varphi_m r/a_1) Y_0(\varphi_n r/a_1) - \varphi_n/a_1 J_0(\varphi_m r/a_1) Y_1(\varphi_n r/a_1)}{(\frac{\varphi_m}{a_1})^2 - (\frac{\varphi_n}{a_1})^2} \right]_{r=a_1}^{r=b_1} + \frac{J_1(\varphi_m) J_0(\varphi_n)}{Y_1(\varphi_m) Y_0(\varphi_n)} \left[ r \frac{\varphi_n/a_1 Y_1(\varphi_n r/a_1) Y_0(\varphi_m r/a_1) - \varphi_m/a_1 Y_0(\varphi_n r/a_1) Y_1(\varphi_m r/a_1)}{(\frac{\varphi_m}{a_1})^2 - (\frac{\varphi_n}{a_1})^2} \right]_{r=a_1}^{r=b_1} \right\} \quad (2.65)$$

Uttrykket ovenfor gjelder for  $\varphi_n \neq 0$  og  $\varphi_m \neq 0$ . Dersom  $\varphi_n = \varphi_m = 0$  reduseres integralet til et integral over  $r$  fra  $a_1$  til  $b_1$ , og er derfor ikke presentert her. Dersom  $\varphi_n$  eller  $\varphi_m$  er null kan løsningen igjen finnes som en sum av integraler, hvor alle er en variant av det gitt i ligning (A.2.1). De tilsvarende V-matriseelementene vil finnes ved projeksjon motsatt vei, som i tilfellet for sirkulært horn.

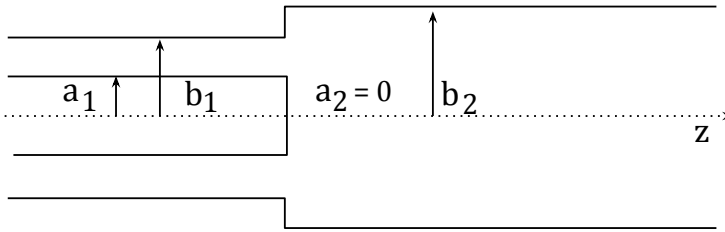
### Projeksjonsmatrise fra konsentrisk til sirkulært rør

Når diskontinuiteten bølgen projekteres over består i en overgang fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør, tas det utgangspunkt i geometri som vist på figur 2.13.

Nå som  $\psi_m^{(2)}$  er trykkfordelingen i radiell retning for sirkulært rør, som gitt i ligning (2.10), blir elementene i projeksjonsmatrisen gitt ved integralet

$$F_{nm} = \frac{2\pi}{S_1\eta_n^{(1)} J_0(\gamma_m)} \int_{a_1}^{b_1} r \left\{ J_0\left(\varphi_n \frac{r}{a_1}\right) - \frac{J_1(\varphi_n)}{Y_1(\varphi_n)} Y_0\left(\varphi_n \frac{r}{a_1}\right) \right\} \left\{ J_0\left(\gamma_n \frac{r}{b_2}\right) \right\} dr, \quad (2.66)$$

som fra ligning (A.2.1) finnes til



**Figur 2.13:** Figuren viser geometrien brukt i utledningen av projeksjonsmatriseelementene i overgangen fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør.

$$F_{nm} = \frac{2\pi}{S_1 \eta_n^{(1)} J_0(\gamma_m)} \left\{ \left[ r \frac{\gamma_m/b_2 J_0(\varphi_n r/a_1) J_1(\gamma_m r/b_2) + \varphi_n/a_1 J_1(\varphi_n r/a_1) J_0(\gamma_m r/b_2)}{(\frac{\varphi_n}{a_1})^2 - (\frac{\gamma_m}{b_2})^2} \right]_{r=a_1}^{r=b_1} - \frac{J_1(\varphi_n)}{Y_1(\varphi_n)} \left[ r \frac{\varphi_n/a_1 Y_1(\varphi_n r/a_1) J_0(\gamma_n r/b_2) - \gamma_n/b_2 Y_0(\varphi_n r/a_1) J_1(\gamma_n r/b_2)}{(\frac{\varphi_n}{a_1})^2 - (\frac{\gamma_n}{b_1})^2} \right]_{r=a_1}^{r=b_1} \right\} \quad (2.67)$$

Ettersom man nå har verktøyene som kreves for å kunne propagere en bølge i både konsentriske og sirkulære rør, samt i overganger fra den ene til den andre typen, er det nå mulig å bygge horn med mange ulike geometrier. I resultatkapitlet er det gjort en studie av riktigheten til projeksjonsmatrisene for ulike kombinasjoner av overgangene, men for sammenligning av både disse, og trykkfordelingen i fjernfeltet, som det kan være naturlig å sammenligne med for fullstendige horn, trengs det en del verktøy. Blant annet er det nyttig å kunne finne direktivitetsindeksen og strålingsimpedansen. Grunnleggende teori om dette blir derfor presentert i neste avsnitt.

## 2.5 Beregning av lydtrykkrespons, direktivitetsindeks og strålingsimpedans

For å kunne beregne lydtrykket utstrålt fra både det sirkulære høyttalerelementet og det konsentriske hornet, er det her tatt utgangspunkt i hastighetsfordelingen i munningen på det siste elementet, som ved hjelp av Rayleighintegralet [14] kan brukes til å gi trykkresponsen i fjernfeltet

$$p(r) = \frac{jk\rho c}{2\pi} \int_S u(r) \frac{e^{-jkr}}{r} dS. \quad (2.68)$$

Ovenfor er  $u(r)$  partikkelhastigheten i munningen og  $S$  overflatearealet. Dersom det er modeamplitudene  $U_n$  som er kjent, må hastighetsfordelingen først finnes fra

$$u(r, z) = \frac{1}{S} \sum_{n=0}^N U_n(z) \psi_n(r). \quad (2.69)$$

Om det kun er nødvendig med trykket i fjernfeltet finnes denne i [2] til å være gitt ved

$$p(r, \theta) = \frac{ik\rho c S e^{-jkr}}{2\pi r} \sum_n U_n \Theta_n(\theta) \quad (2.70)$$

for det aksesymmetriske tilfellet, hvor  $\Theta_n = 2sJ_1(s)/(s^2 - \gamma_n^2)$  og  $s = kb \sin \theta$ . Når responsen i fjernfeltet er tilstrekkelig, er dette er en mye raskere fremgangsmåte ettersom resultatet da er avhengig av en sum og ikke et integral.

For sammenligning av resultater brukes i denne oppgaven også direktivitetsindeksen i utbredt grad, da denne gir et enkelt mål på den totale kvaliteten på lydtrykkresponsen i fjernfeltet. Denne er blant annet definert i [18] og er gitt ved

$$DI = 10 \log(Q_f), \quad (2.71)$$

hvor kvalitetsfaktoren  $Q_f$  for en aksesymmetrisk kilde, hvor direktiviteten er blitt målt i  $n$  punkter, finnes fra

$$Q_f = \frac{2|p|^2}{\sum_{n=1}^{2\pi/\Delta\theta} |p(\theta)^2 \sin \theta_n \Delta\theta|}. \quad (2.72)$$

I tillegg til verktøyene ovenfor, brukes det i simuleringene en ferdig utregnet strålingsimpedans for et sirkulært rør for opp til 64 moder. Bakgrunnen for disse utregningene er strålingsimpedansen fra et stempel med areal  $S$ , som i det multimodale tilfellet fra [1] er gitt til

$$Z_{nm} = \frac{j\omega\rho}{2\pi S} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta_0 \int_0^R r_0 dr_0 F, \quad (2.73)$$

hvor  $F = \psi_m(r_0, \theta_0) \psi_n(r, \theta) e^{-jkh} / h$  og  $h = \{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)\}^{1/2}$ . Disse integralene kan forenkles og løses numerisk, noe som allerede er gjort av Zorumski [19] og implementert av Bjørn Kolbrek i forbindelse med hans prosjekt.

Når verktøyene for modell og sammenligning nå er presentert kan vi se på hvordan dette er blitt implementert.

# Kapittel 3

## Resultater

I teorikapitlet er det blitt redegjort for den grunnleggende teorien bak multimodal bølgeforplantning i et horn og hvordan man, ved å benytte en kjent strålingsimpedans kan finne impedansen hvor som helst i hornet, og hvordan denne kan brukes til å bestemme volumhastigheten ut av hornet, og dermed si noe om trykkfordelingen i en måleposisjon.

I tillegg ble det presentert hvordan metoden kan videreutvikles til å gjelde for høyttalerelement, til forskjell fra horn, og også hvordan matematikken endres når det sees på et konsentrisk horn i stedet for et sirkulært.

For å studere riktigheten og kvaliteten på uttrykkene som er blitt utledet, er det derfor blitt utført en serie simuleringer for både sirkulært høyttalerelement og konsentrisk horn. Nedenfor følger først en kort beskrivelse av hvordan metodene er implementert og deretter presenteres resultatene fra utvalgte simuleringer.

### 3.1 Implementasjon

Implementasjonen i denne oppgaven er i hovedsak en direkte gjengivelse av ligningene presentert i teorikapitlet. Det sees først på hvordan et konisk høyttalerelement er blitt implementert i Matlab med utgangspunkt i Modal metode, Geddes metode og Olsons metode og bakgrunnen for sammenligningen med BERIM-simuleringer.

Deretter sees det på implementasjonen av uttrykkene funnet for konsentrisk horn med bakgrunn i modal metode. Ettersom det er lite om dette i litteraturen, blir denne kun sammenlignet med resultater fra BERIM-simuleringer.

#### 3.1.1 Høyttalerelement

I implementasjonen av høyttalerelementet er det for alle metodene tatt utgangspunkt i et konisk element, som vist på figur 3.1. En skjematisk presentasjon av Modal metode og forenklinger som er gjort i forbindelse med simuleringene presenteres. I tillegg redegjøres det for hvilke valg som er blitt tatt i forbindelse med implementasjonen, deriblant hvilke

tilnærminger som er gjort og hvilke begrensninger dette legger på simuleringene. Implementasjonen av de øvrige metodene nevnes ikke her, da denne kun er en direkte gjengivelse av ligningene i teorien og at en utførlig beskrivelse derfor ikke ansees som nødvendig.

I innledningen ble det nevnt at anvendelsen av Modal Metode på sirkulære horn grundig er blitt studert av Bjørn Kolbrek i hans prosjektoppgave. I den forbindelse ble også metoden i sin helhet implementert i MATLAB for en rekke horn, og kan finnes i sin helhet her [20]. Videreutvikling av Modal metode for bølgeforplantning i sirkulære horn til å gjelde for sirkulære høyttalerelement, er en direkte forlengelse av hans arbeid og implementasjonen brukt i denne masteroppgaven er derfor svært lik implementasjonen gitt i [20], men med et par justeringer. For at hovedlinjene i metoden skal være lette å følge, følger en skjematisk gjennomgang av de store trekkene i implementasjonen av et sirkulært høyttalerelement. Elementet det tas utgangspunkt i er illustrert på figur 3.1 og nedenfor kobles hvert steg i implementasjonen til de relevante ligningene i teorien.

1. Horngeometrien konstrueres
2. Prosjeksjonsmatrisene for sirkulært horn konstrueres:
  - Dersom  $S_1 < S_2$  brukes ligning (2.27)
  - Dersom  $S_2 < S_1$  brukes ligning (2.28)
3. Strålingsimpedansen beregnes ved interpolasjon av tabulerte verdier
4. Med strålingsimpedansen som utgangspunkt finnes impedansen i de resterende punktene i horngeometrien (tilnærming):
  - Dersom bølgen propagerer over en diskontinuitet brukes ligning (2.35) hvis  $S_1 < S_2$  og ligning (2.36) dersom  $S_2 < S_1$ .
  - Dersom bølgen propagerer langs et element med konstant tverrsnitt brukes ligning (2.13).
5. Prosjeksjonsmatrisen  $F^{(2-1)}$  grunnet at arealet  $S_2 - S_1$  er bevegelig beregnes i henhold til ligning (2.39).
6. Deretter påtrykkes inngangen en planbølge som projekteres gjennom røret.
  - Dersom bølgen propagerer over en diskontinuitet finnes volumhastigheten etter diskontinuiteten fra (2.40)
  - Dersom bølgen propagerer langs et uniformt rør finnes volumhastigheten etter neste steg fra (2.17)
7. Trykket i fjernfeltet beregnes ved hjelp av Rayleigh integralet gitt i ligning (2.68).

Til tross for at implementasjonen gitt ovenfor i grove trekk er svært lik den gitt i [20], er det enkelte forskjeller som er innført i denne masteroppgaven for å ta høyde for at det nå sees på et sirkulært høyttalerelement og ikke et sirkulært horn.

I teorikapitlet kommer det frem at disse forskjellene oppstår i forbindelse med diskontinuitetene og at det er beregningen av hornimpedansen, punkt 4, og volumhastigheten,



punkt 6, etter en diskontinuitet som i teorien er forskjellige i forhold til tilfellet for sirkulært horn. I tillegg må det konstrueres en ekstra projeksjonsmatrise for arealet  $S_2 - S_1$ , noe som skjer under punkt 5. Som nevnt i teorikapitlet oppstod en utfordring når det kom til beregning av impedansen over en diskontinuitet nå som en ekstra volumhastighet var inkludert. Derfor er punkt 4 i praksis som før, men nå som det sees på høyttalerelement og ikke horn, er dette kun en tilnærming.

Den teoretiske bakgrunnen for BERIM-simuleringene er kort oppsumert i avsnitt 2.3.1. I denne oppgaven brukes et ferdig program basert på en FORTRAN-kode som kan finnes her [21]. Med utgangspunkt i denne har Bjørn Kolbrek utviklet et grafisk brukergrensesnitt, gitt her [22], som gjør metoden lett tilgjengelig og brukervennlig, og som gjør det mulig å enkelt konstruere både høyttalerelement og horngeometrier.

### 3.1.2 Konsentrisk horn

Uttrykkene funnet for beskrivelse av horn med delvis konsentrisk geometri ved hjelp av Modal metode, er kun sammenlignet med BERIM-simuleringer, da dette ikke er studert i litteraturen i like stor grad som høyttalerelement.

Implementasjonen av konsentrisk horn følger de samme hovedtrekkene som implementasjonen av sirkulært horn gitt i [20] og implementasjonen av Sirkulært høyttalerelement beskrevet ovenfor i avsnitt 3.1.1. Som nevnt i teorikapitlet, er det i hovedsak trykfordelingen i radiellretning som skiller et sirkulært element fra et konsentrisk element, og det er derfor projeksjonsmatrisene, som i forrige avsnitt finnes i punkt 2, som endres. I tillegg forsvinner punkt 5, ettersom volumhastigheten gjennom arealet  $S_2 - S_1$  nå igjen er null. I tillegg blir punkt 4 ikke lenger en tilnærming ettersom det for horn er mulig å finne impedansen i røret nøyaktig. Nye, oppdaterte versjoner av skriptene i *toolboxen* er lagt ved i appendiks C.1.

Til forskjell fra tilfellet for sirkulær geometri, er ikke nullpunktene til den karakteristiske ligningen tabulerte verdier og må derfor beregnes i henhold til ligningene (2.53)-(2.57). I definisjonen av denne settes begrensningen  $\lambda = b/a > 1$ , men ved testing ble det vist at ligningene heller ikke gir korrekt resultat for store verdier av  $\lambda$ . En vei utenom dette er funnet ved å bruke rotfinningsalgoritmen [23]. Den er implementert i funksjonen *Besselcrossproduct* som er vedlagt i appendiks C.1, men denne fungerer også kun opp til  $\lambda \approx 5,75$ . Dette er begrensninger som det er tatt høyde for når simuleringene er blitt gjort.

## 3.2 Numeriske Simuleringer

I dette avsnittet presenteres resultatene fra simuleringene beskrevet i foregående avsnitt. Først gis de geometriske størrelsene som er blitt benyttet i simuleringene for hvert enkelt tilfelle, før plott av resultatene presenteres. I avsnitt 2.3.1 ble det argumentert for at BERIM-simuleringer er svært pålitelige for denne typen akustiske problem. For hvert enkelt testtilfelle er det derfor gjort BERIM-simuleringer som brukes som referanse.

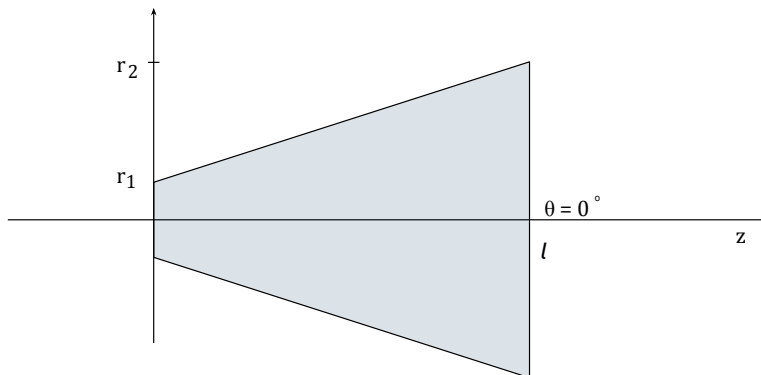
Først presenteres resultatene av simuleringene av sirkulært høyttalerelement modellert ved Geddes metode [2], Olsons metode [3] og Modal metode før disse sammenlignes med BERIM-simuleringer.

Deretter testes projeksjonsmatrisene funnet i teorikapitlet for multimodal bølgeforplantning fra et konsentrisk rør til et annet, og fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør. Dette gjøres ved at hastighetsfordelingen etter diskontinuiteten studeres, og at MPM-simuleringer sammenlignes med BERIM-simuleringer for hver enkelt mulig kombinasjon av sylinderelementer.

Avslutningsvis presenteres resultatene fra BERIM- og MPM-simuleringer av et fullstendig horn med delvis konsentrisk og delvis sirkulær geometri.

### 3.2.1 Høyttalerelement

Ved simulering av høyttalerelement er det tatt utgangspunkt i en geometri som vist på figur 3.1. Her defineres også de fysiske variablene som regulerer elementets størrelse og form.



**Figur 3.1:** Figuren viser geometrien til høyttalerelementet som er brukt i simuleringene.

De konkrete verdiene som ble benyttet i simuleringene er gitt i tabell 3.1. Her presiseres også et mål på hvilken oppløsning som er brukt for de ulike metodene. For MPM-simuleringene er denne oppløsningen knyttet til antall sylindre som brukes for å konstruere elementet, samt hvor mange moder som er tatt med i beregningene. Oppløsningen i Olsons metode er gitt ved antall ringer som brukes til å konstruere høyttalerelementet, og tilsvarende for Geddes metode presiseres antall elementer som brukes for å danne den koniske flaten som representerer høyttalerelementet. Disse størrelsene er kun gitt for at bakgrunnen for simuleringene skal være klar, og kan ikke sammenlignes direkte. For Geddes- og

Olsons metode er disse størrelsene valgt på bakgrunn av prøving og feiling ut fra når resultatene syntes å konvergere. For modal metode er det brukt 64 moder da dette var den høyeste oppløsningen lett tilgjengelig, ettersom strålingsimpedansen var forhåndsberegnet for opp til 64 moder.

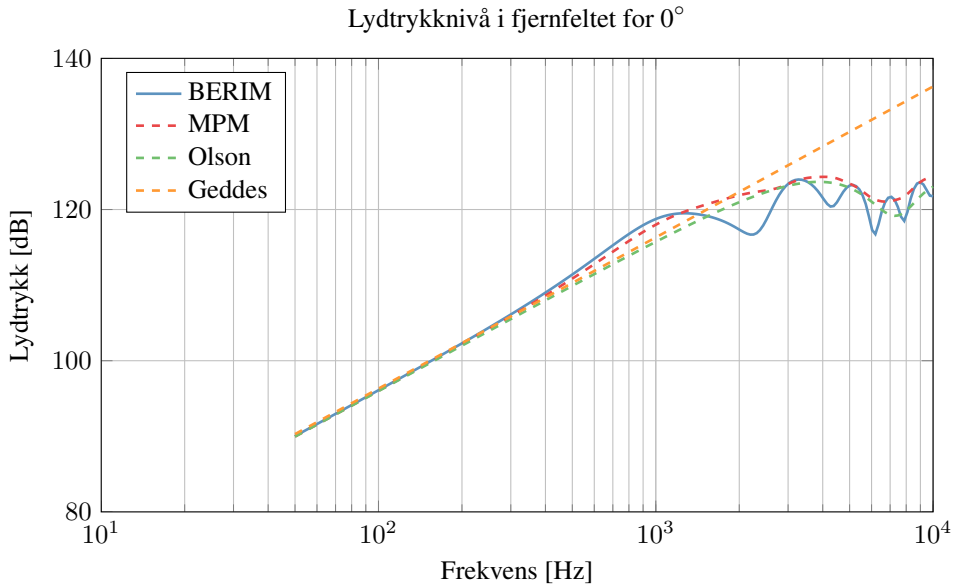
**Tabell 3.1:** Simuleringsparametre for Høytalerelement

<b>Geometri</b>	Størrelse	Symbol	Verdi	Enhet
	Radius ved inngang	$r_1$	0,02	[m]
	Radius ved utgang	$r_2$	0,1	[m]
	Hornlengde	$l$	0,05	[m]
	Observasjonsvinkel	$\theta$	0, 45, 90	[°]
	Avstand til målepunkt	-	3	[m]
<b>Oppløsning</b>	Metode	Spesifisering		
	Olson	Antall ringer:	10	[-]
	Geddes	Antall elementer:	10	[-]
	MPM	Antall moder:	64	[-]
		Antall elementer i z-retning:	100	[-]
	BERIM	Meshgrid:	20k	[Hz]

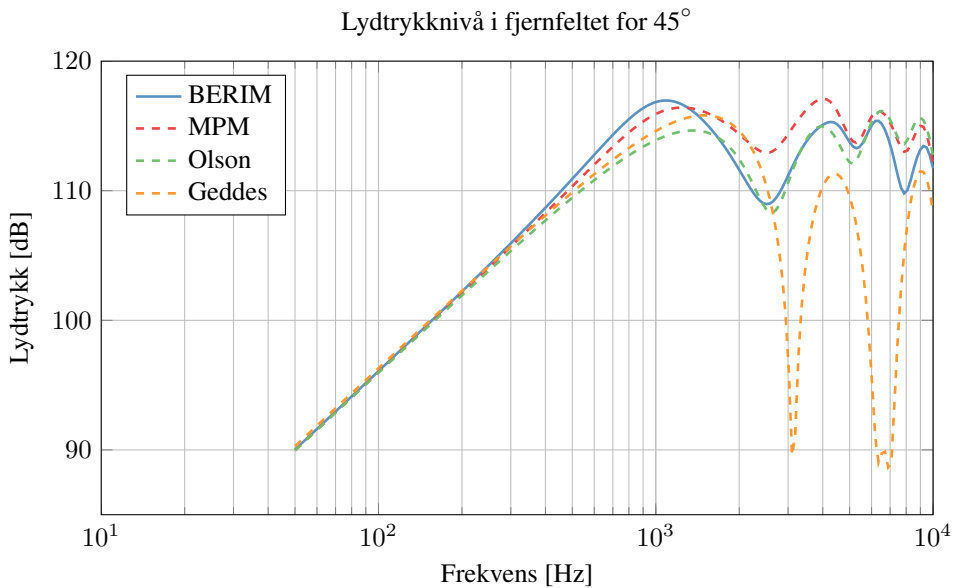
Som nevnt, er hovedmålet med simuleringene av høytalerelement å studere hvor gode resultater Modal metode gir, til tross for approksimasjonen som er benyttet i forbindelse med projeksjon av impedansen over en diskontinuitet.

Resultatene som sammenlignes her, er lydtrykkresponsen i fjernfeltet for de fire metodene. Nedenfor presenteres derfor plott av denne funnet ved  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  og  $\theta = 90^\circ$ , på henholdsvis figur 3.2, 3.3 og 3.4. Dette gjøres for senere å kunne vurdere om kvaliteten på resultatene er avhengig av målepunktet. Deretter presenteres direktivitetsindeksen som funksjon av frekvens for hver av de fire metodene i figur 3.5. Dette gjøres for å få et innblikk i total feil.

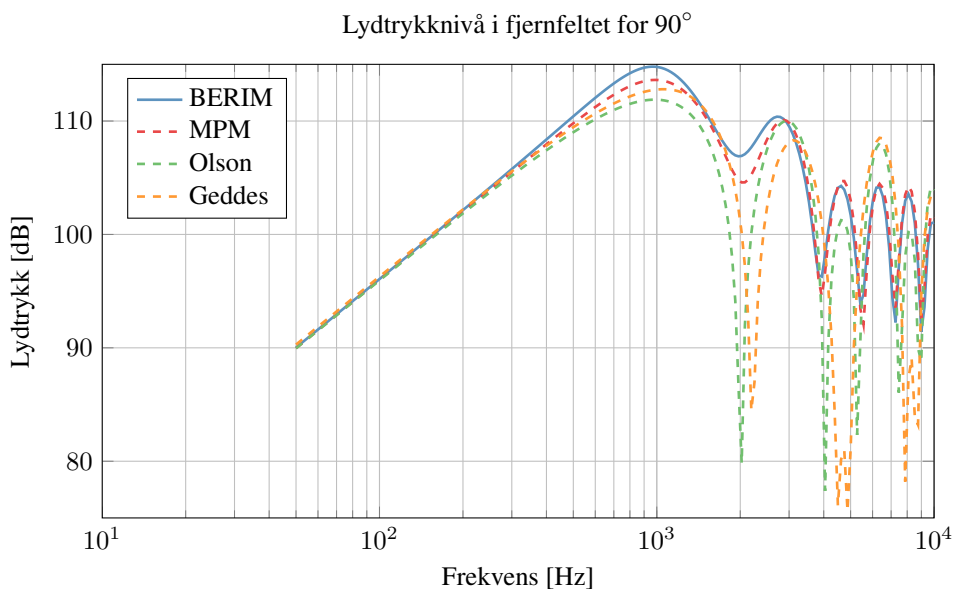
I tillegg til plottene av lydtrykkresponsen presentert i dette avsnittet, gis det en målt kjøretid for en viss oppløsning og et mål på feil som funksjon av måleposisjon. I tillegg utføres en nærmere analyse av hvor mange moder som er hensiktsmessig å ha med i beregningene i Modal metode og i hvilken grad dette påvirker kjøretiden til simuleringene. Disse resultatene er presentert og vurdert i diskusjonskapitlet.



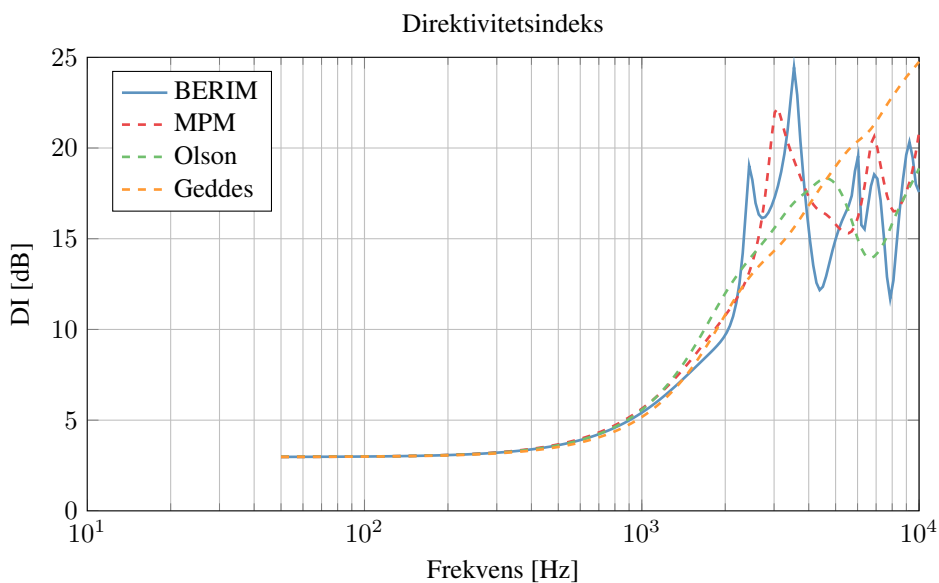
**Figur 3.2:** Figuren viser lydtrykkrespons i fjernfeltet for en lytterposisjon  $\theta = 0$  funnet fra simuleringer ved hjelp av MPM, Olsons metode, Geddes metode og BERIM.



**Figur 3.3:** Figuren viser lydtrykkrespons i fjernfeltet for en lytterposisjon  $\theta = 45$  funnet fra simuleringer ved hjelp av MPM, Olsons metode, Geddes metode og BERIM.



**Figur 3.4:** Figuren viser lydtrykkrespons i fjernfeltet for en lytterposisjon  $\theta = 90$  funnet fra simuleringer ved hjelp av MPM, Olsons metode, Geddes metode og BERIM.



**Figur 3.5:** Figuren viser direktivitetsindeksen som funksjon av frekvens funnet fra BERIM-simuleringer, MPM-simuleringer og simuleringer av Olson og Geddes metode.

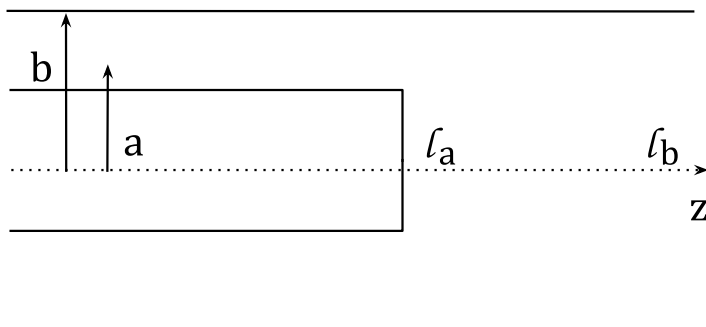
### 3.2.2 Byggestener for konsentrisk horn

I teorikapitlet er det blitt utledet nye uttrykk for elementene i projeksjonsmatrisene som skal benyttes når konsentriske geometrier behandles. Altså kan Modal metode i teorien nå brukes til å beskrive overgangen fra et konsentrisk sylinderelement til et annet, og fra et konsentrisk sylinderelement til et sirkulært sylinderelement. I tillegg er det gitt at når  $\mathbf{F}$  kan bestemmes gis matrisen for projeksjon motsatt vei  $\mathbf{V}$  fra den samme matematikken.

Med dette som utgangspunkt, er det nå i teorien mulig å konstruere mange nye horn-geometrier ved hjelp av Modal metode, men for å forsikre at disse projeksjonsmatrisene er riktig utledet, utføres først en serie simuleringer der hver enkelt av de mulige overgangene studeres separat. Riktigheten av projeksjonsmatrisene i hvert tilfelle vurderes på bakgrunn av sammenligning med BERIM-simuleringer og hastighetsfordelingen som finnes etter diskontinuiteten, når en planbølge påtrykkes inngangen.

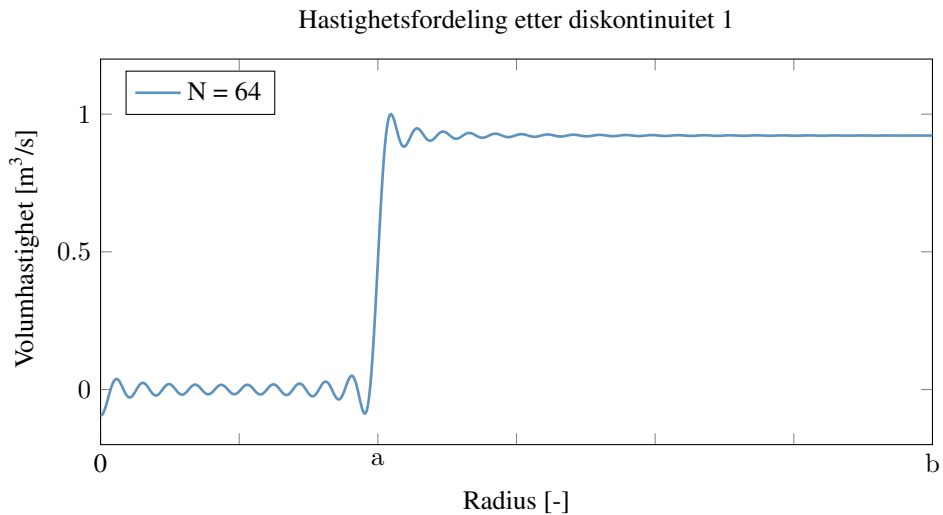
#### Fra konsentrisk til sirkulært rør

Tidligere er det blitt nevnt at strålingsimpedansen fra en sirkulær overflate ansees som kjent, da dette er en forutsetning for å kunne bestemme impedansen på de øvrige punktene til hornets symmetriakse ved hjelp av Modal metode. Beregninger av strålingsimpedansen er tidkrevende, men er allerede gjort for sirkulært overflate av Bjørn Kolbrek i forbindelse med hans masteroppgave, for opp til 64 moder [8]. Det å korrekt kunne angi multimodal bølgepropagering fra en konsentrisk sylinder til en sirkulær sylinder er derfor svært nyttig, ettersom den kjente strålingsimpedansen da kan benyttes. Derfor er det først blitt utført en simulering av en slik geometri, som illustrert på figur 3.6. Størrelsene brukt på de geometriske parametrene i simuleringene, er for alle de ulike diskontinuitetene presentert i tabell B1.



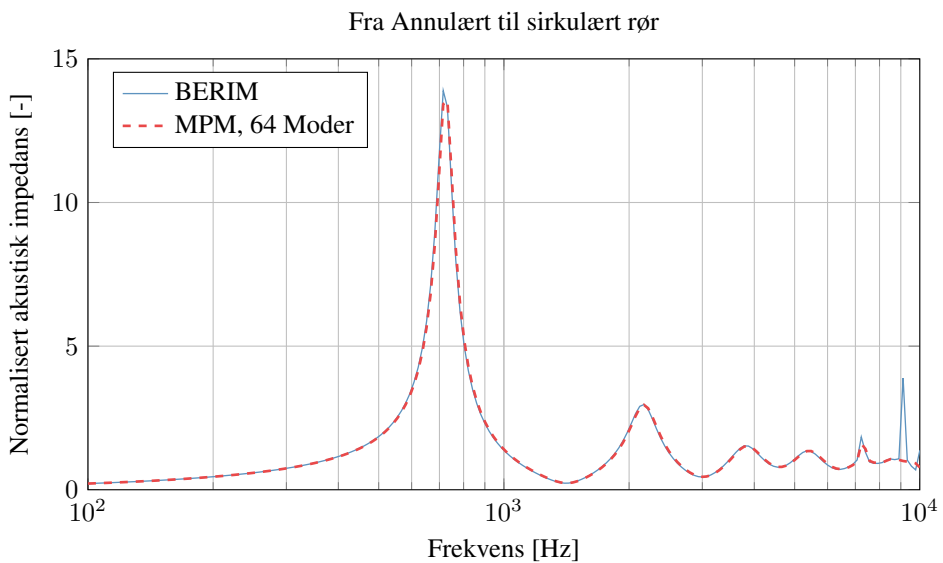
**Figur 3.6:** Figuren viser geometrien brukt til testing av projeksjonsmatrisen funnet for diskontinuiteten som oppstår i overgangen fra et konsentrisk rør til sirkulært rør.

Testingen av projeksjonsmatrisen er utført ved at det påtrykkes en planbølge før diskontinuiteten og at hastighetsfordelingen i radiell retning funnet etter diskontinuiteten studeres. Når 64 moder er tatt med i simuleringen, har hastighetsfordelingen form som vist på figur 3.7.



**Figur 3.7:** Figuren viser hastighetsfordelingen funnet etter diskontinuiteten fra konsentrisk rør til sirkulært rør som illustrert på figur 3.6 etter en planbølge er påtrykt systemet.

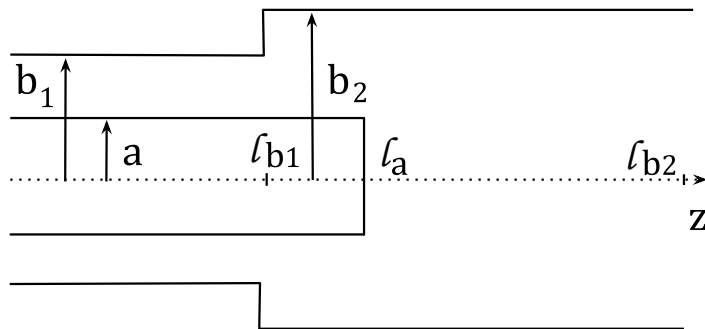
For å ytterligere verifisere projeksjonsmatrisene legges det ved en sammenligning av impedansen ved inngangen funnet på bakgrunn MPM- og BERIM-simulering av denne geometrien.



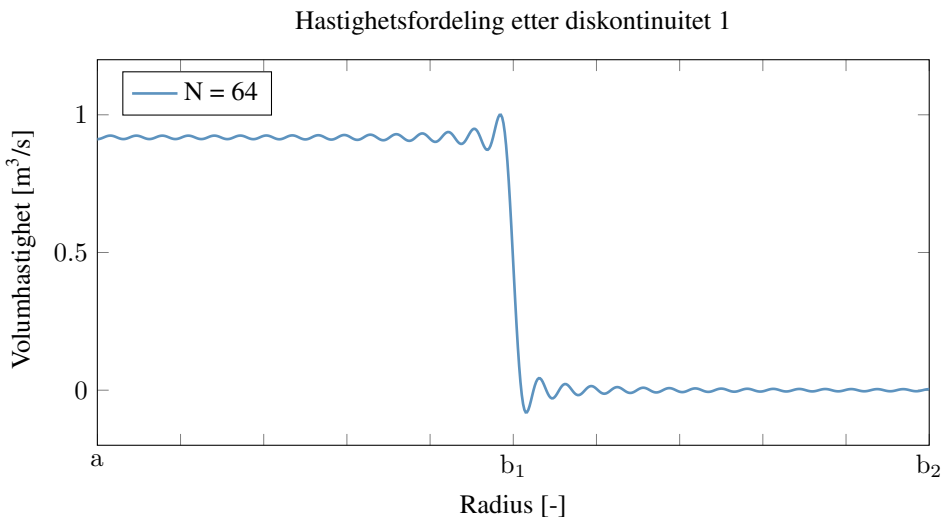
**Figur 3.8:** Figuren viser den akustiske impedansen ved røret funnet ved hjelp av BERIM- og MPM-simuleringer for 64 moder for overgangen fra konsentrisk til sirkulært rør som gitt på figur 3.6.

### Overgangen fra et konsentrisk rør til et annet, med konstant indre radius og økende ytre radius

For å kontrollere projeksjonsmatrisen funnet for overgang fra et konsentrisk rør til et konsentrisk rør med større ytre radius og lik indre radius, benyttes en geometri som vist på figur 3.9. Den indre sylindere avsluttes for at den kjente strålingsimpedansen skal kunne brukes slik at impedansene ved inngangen kan sammenlignes. Dette skjer etter den første diskontinuiteten der ytre radius går fra  $b_1$  til  $b_2$ , da litt av hensikten er å teste hver av overgangene for seg. For verdiene brukt for de geometriske størrelsene, se tabell B1.



**Figur 3.9:** Figuren viser geometrien brukt for å kontrollere projeksjonsmatrisen fra et konsentrisk rørelement til et annet når den indre radiusen ble holdt konstant og den ytre ble økt fra  $b_1$  til  $b_2$ .

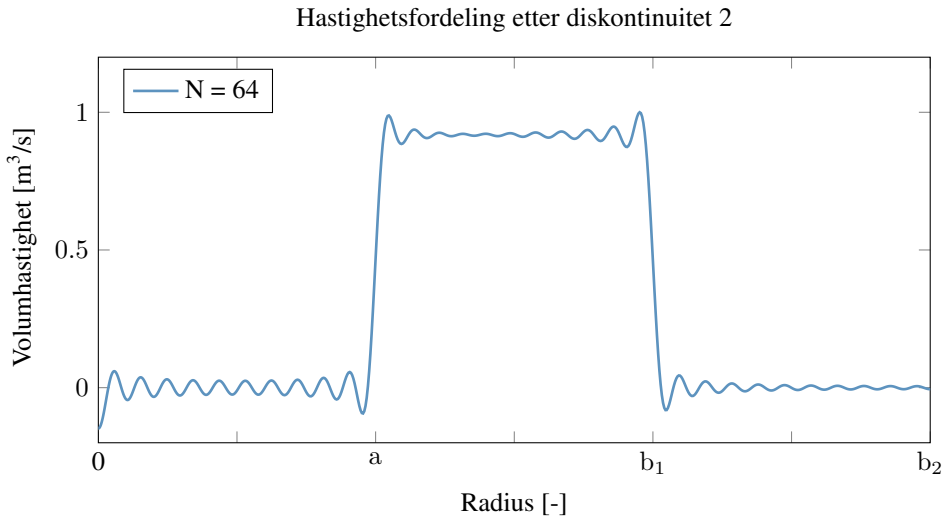


**Figur 3.10:** Figuren viser hastighetsfordelingen etter en planbølge er blitt projkert over den første diskontinuiteten på figur 3.9

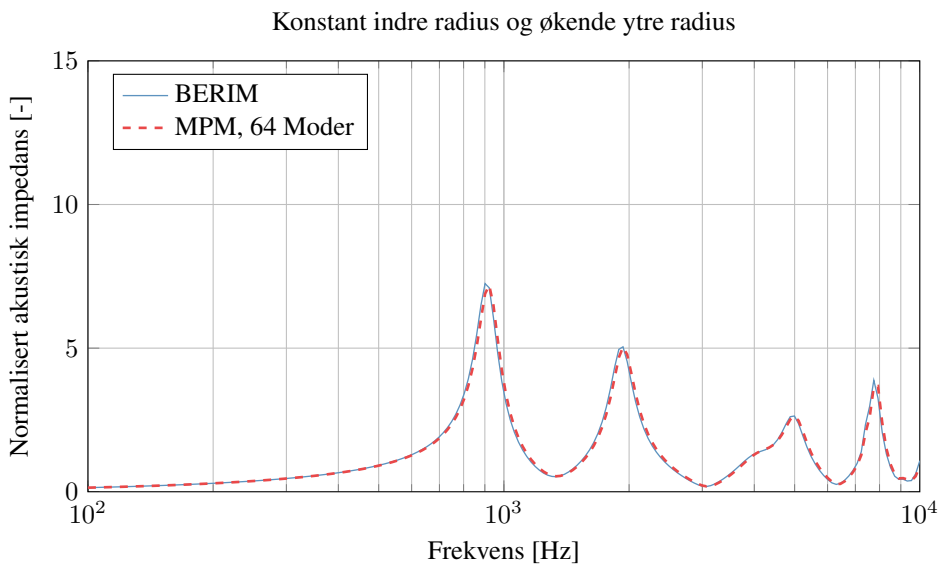
Her er projeksjonsmatrisen testet etter både diskontinuitet én og diskontinuitet to for



å vise at det fungerer med to påfølgende diskontinuiteter. Hastighetsfordelingen etter den første diskontinuiteten er vist på figur 3.10 og hastighetsfordelingen etter begge er gitt på figur 3.11. Sammenligning av impedansen ved inngangen er gitt på figur 3.12.



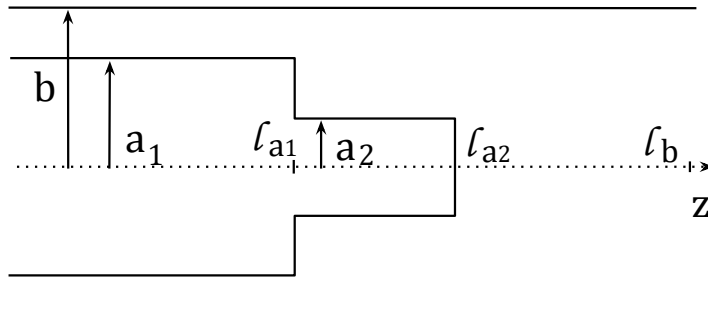
**Figur 3.11:** Figuren viser hastighetsfordelingen etter en planbølge er blitt projisert over begge diskontinuitetene på figur 3.9



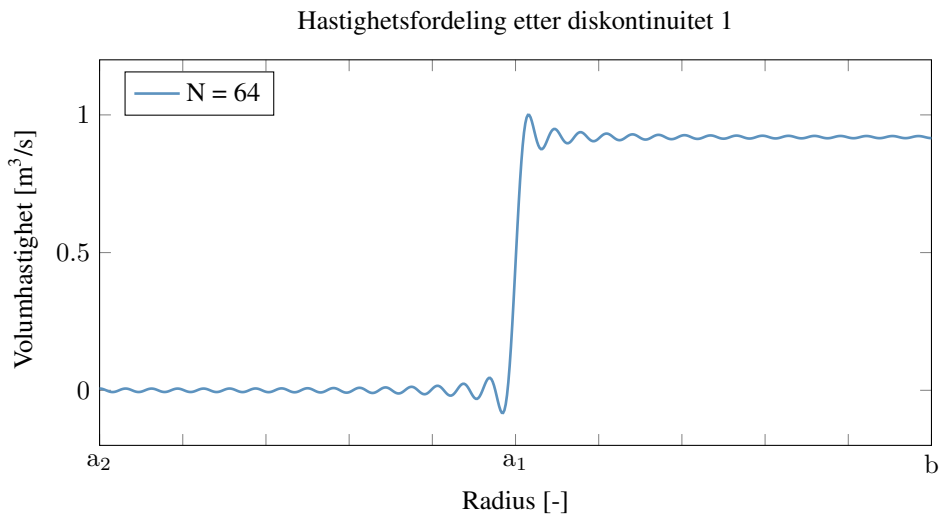
**Figur 3.12:** Figuren viser den akustiske impedansen ved røret funnet ved hjelp av BERIM og MPM for 64 moder.

### Overgangen fra et konsentrisk rør til et annet konsentrisk rør med mindre indre radius

Neste projeksjonsmatrise som testes er overgangen fra et konsentrisk rør til et annet når den ytre radiusen holdes konstant og den indre radiusen synker fra  $a_1$  til  $a_2$ . Nedenfor vises geometrien brukt i simuleringene og hastighetsfordelingen, funnet etter den første diskontinuiteten på figur 3.13 er gitt på figur 3.14. Verdiene brukt for de geometriske størrelsene er gitt i tabell B1.



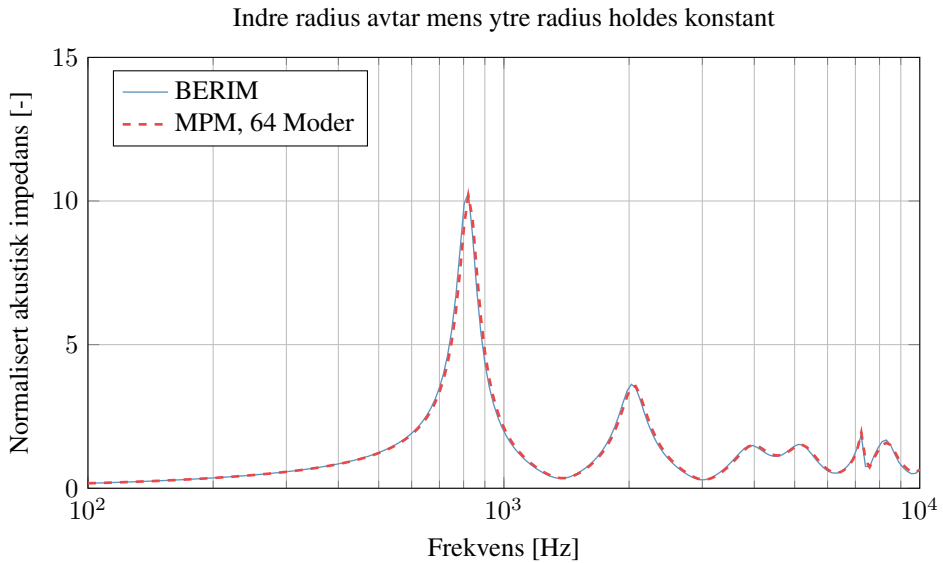
**Figur 3.13:** Figuren viser geometrien som brukes til å teste projeksjonsmatrisen fra et annullært hornelement til det neste, der den ytre radiusen holdes konstant mens den indre avtar.



**Figur 3.14:** Figuren viser hastighetsfordelingen etter den første diskontinuiteten på figur 3.13 når denne påtrykkes en planbølge.

Hastighetsfordelingen etter avslutningen av det indre røret vises ikke, ettersom denne vil være lik den for diskontinuiteten fra konsentrisk til sirkulært rør. I tillegg er det

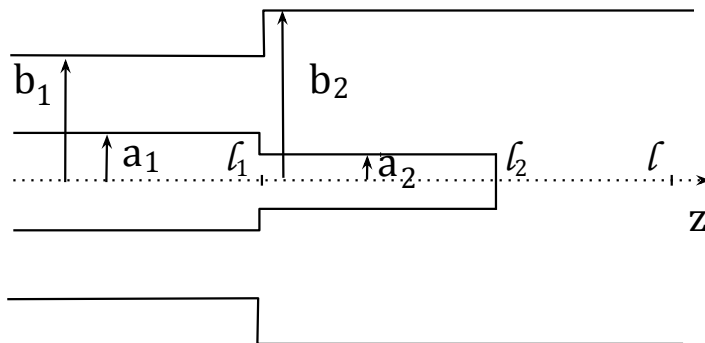
allerede vist at to påfølgende diskontinuiteter fungerer på figur 3.11. Sammenligning av impedansen funnet ved inngangen fra BERIM- og MPM-simuleringer er vist på figur 3.15.



**Figur 3.15:** Figuren viser den normaliserte akustiske impedansen ved inngangen funnet fra BERIM- og MPM-simuleringer for  $N = 64$ .

### Overgangen fra et konsentrisk rør til et annet når både ytre og indre radius endres

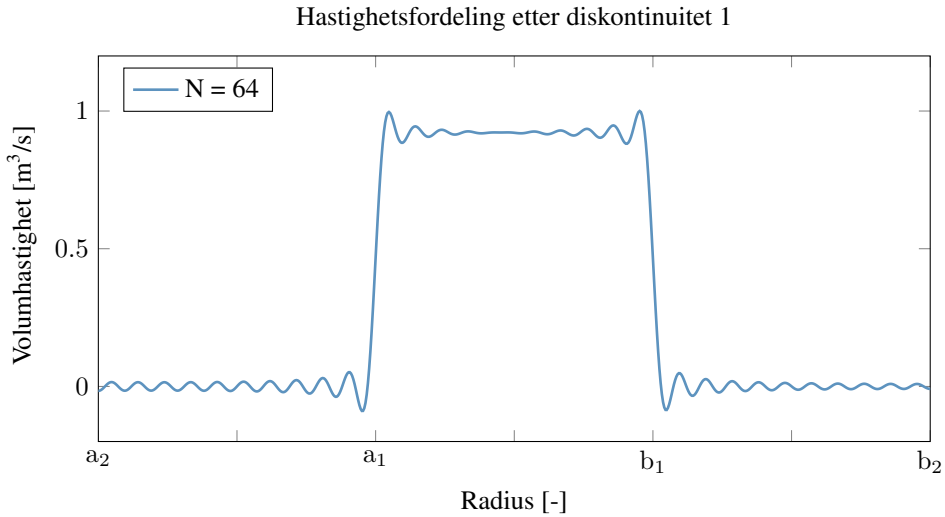
Den siste interessante projeksjonsmatrisen som testes, er den for en geometri som vist på figur 3.16, hvor det sees på to simultane diskontinuiteter.



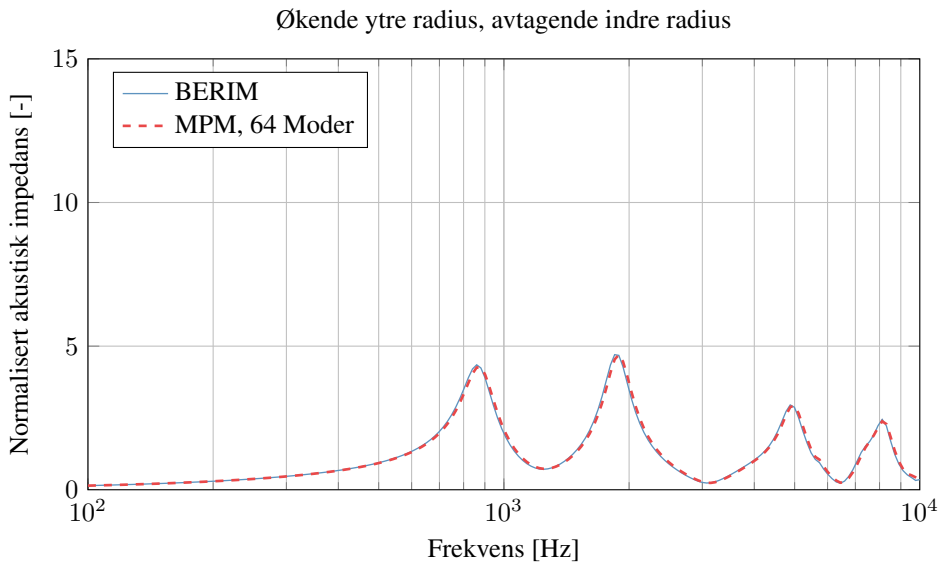
**Figur 3.16:** Figuren viser geometrien brukt for å studere projeksjonen over en diskontinuitet der både indre og ytre radius endres.

Her studeres overgangen mellom to konsentrisk rør når både indre og ytre radius endres

samtidig. Verdiene til de geometriske parametrene er gitt i tabell B1. Den interessante hastighetsfordelingen er i dette tilfellet den etter den første diskontinuiteten, der både  $a$  og  $b$  endres. Denne er vist på figur 3.17 og impedansen ved inngangen er vist på figur 3.18.



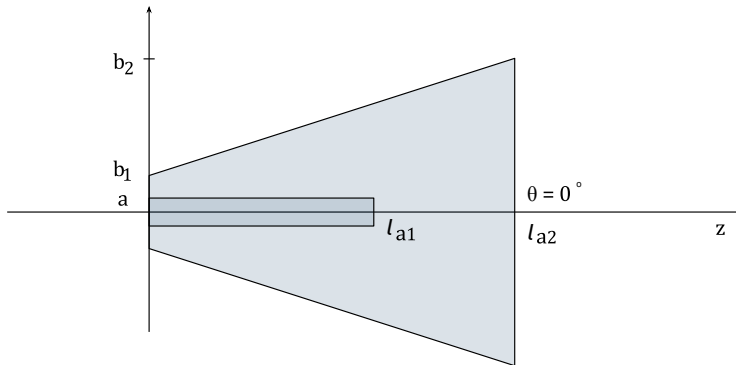
**Figur 3.17:** Figuren viser hastighetsfordelingen etter den første diskontinuiteten på figur 3.16 når inngangen påtrykkes en planbølge.



**Figur 3.18:** Figuren viser den akustiske impedansen ved røret funnet ved hjelp av BERIM- og MPM-simuleringer for to simultane diskontinuiteter som vist på figur 3.16.

### 3.2.3 Konsentrisk horn

Nå som det er bekreftet at projeksjonsmatrisene for de ulike overgangene fungerer tilfredsstillende, er det mulig å simulere et fullstendig horn med konsentrisk geometri. Dette gjøres i denne oppgaven for en geometri som vist på figur 3.19. På figuren defineres også de fysiske størrelsene som utgjør hornparametrene.



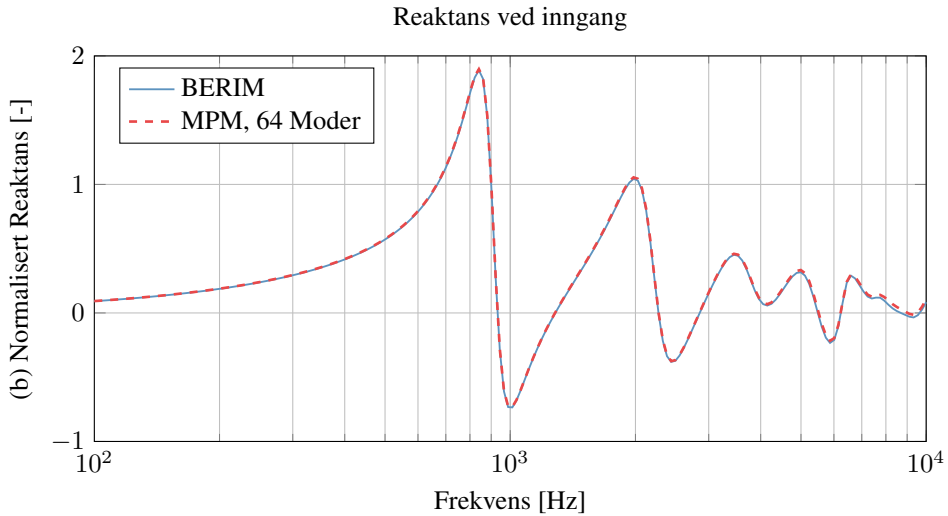
**Figur 3.19:** Figuren viser hornet med delvis konsentrisk og delvis sirkulær geometri med de geometriske størrelsene som er brukt i simuleringene.

De konkrete verdiene til hornparametrene brukt i simuleringene er gitt i tabell 3.2.

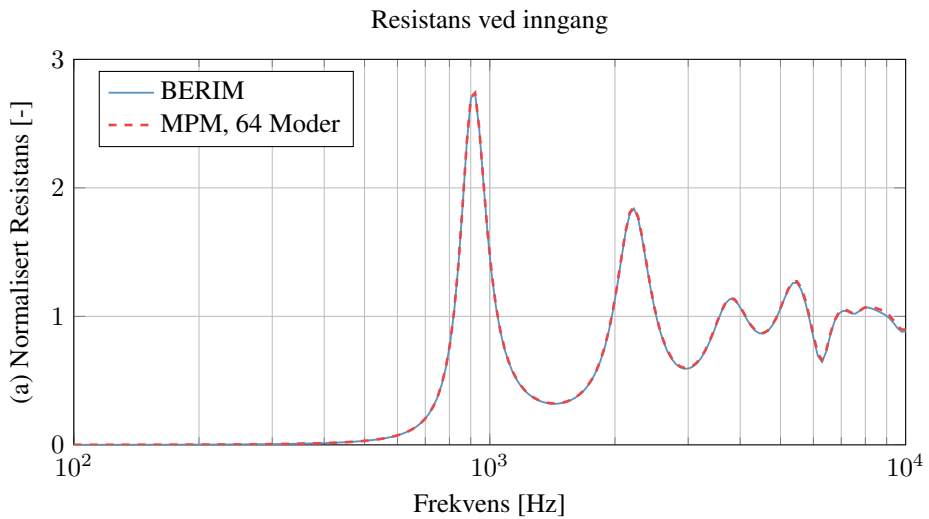
**Tabell 3.2:** Tabellen viser simuleringsparametre for horn med delvis konsentrisk geometri.

Geometri	Størrelse	Symbol	Verdi	Enhet
	Indre radius ved inngang	$a_1$	0,01	[m]
	Ytre radius ved inngang	$b_1$	0,02	[m]
	Indre radius ved utgang	$a_2$	0	[m]
	Ytre radius ved utgang	$b_2$	0,04	[m]
	Hornlengde indre rør	$l_{a1}$	0,05	[m]
	Hornlengde ytre rør	$l_{a2}$	0,1	[m]
	Antall elementer i z-retning	$nz$	100	[-]
	Observasjonsvinkel	$\theta$	0, 45, 90	[°]
	Avstand til målepunkt	-	3	[m]
Oppløsning	Metode	Spesifisering		
	BERIM	Meshgrid	20k	[Hz]
	Modal metode	Antall moder:	64	[-]

For å studere feilen sees det først på den normaliserte reaktansen og resistansen ved inngangen, sammenlignet med de funnet fra BERIM-simuleringer når  $N = 64$  i MPM-simuleringene.



**Figur 3.20:** Figuren viser normalisert reaktans for konsentrisk horn ved inngangen for BERIM- og MPM siuleringer når  $N = 64$



**Figur 3.21:** Figuren viser normalisert resistans for konsentrisk horn ved inngangen for BERIM- og MPM siuleringer når  $N = 64$

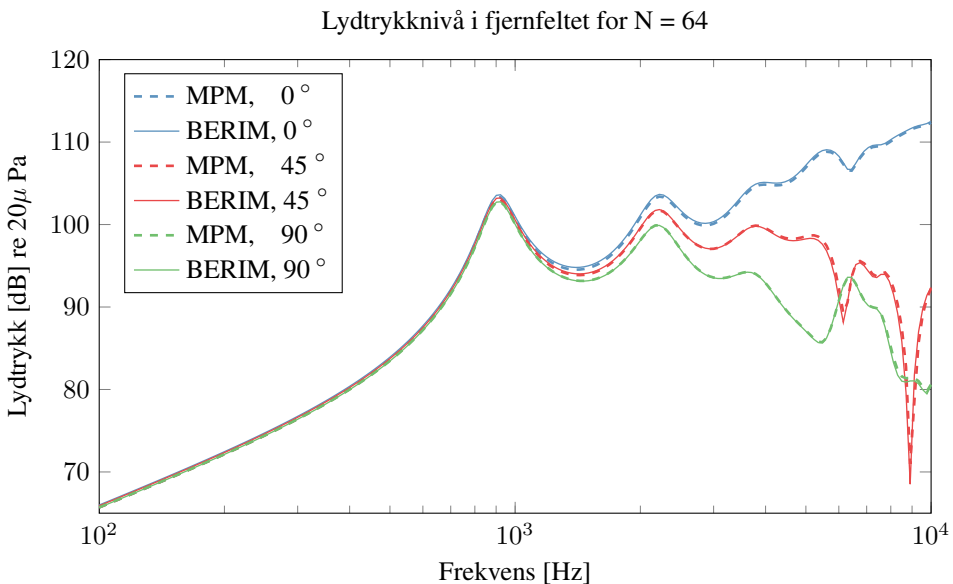
I motsetning til for byggestenene for konsentrisk horn plottes her reaktans og resistans hver

for seg. Dette gjøres for mer nøyaktig å kunne studere kvaliteten på resultatene. Et mål på feilen i disse relativt til BERIM-simuleringer og en generell vurdering av resultatene er presentert i diskusjonskapitlet.

I MPM tas det utgangspunkt i en kjent strålingsimpedans som projekteres bakover i hornet slik at impedansen ved hvert enkelt punkt på sentralaksen kan bestemmes. Når dette er gjort brukes denne til å projekte volumhastigheten fremover i hornet. Plottene av reaktans og resistans gir derfor et bilde på kvaliteten på resultatene fra den første halvdel av simuleringene. Når volumhastigheten har nådd munningen, kan denne gjøres om til lydtrykkfordeling, og plott av denne i fjernfeltet kan derfor gi et bilde på kvaliteten på de endelige resultatene, samt resultatene fra andre halvdel sett i perspektiv av resultatene fra første halvdel.

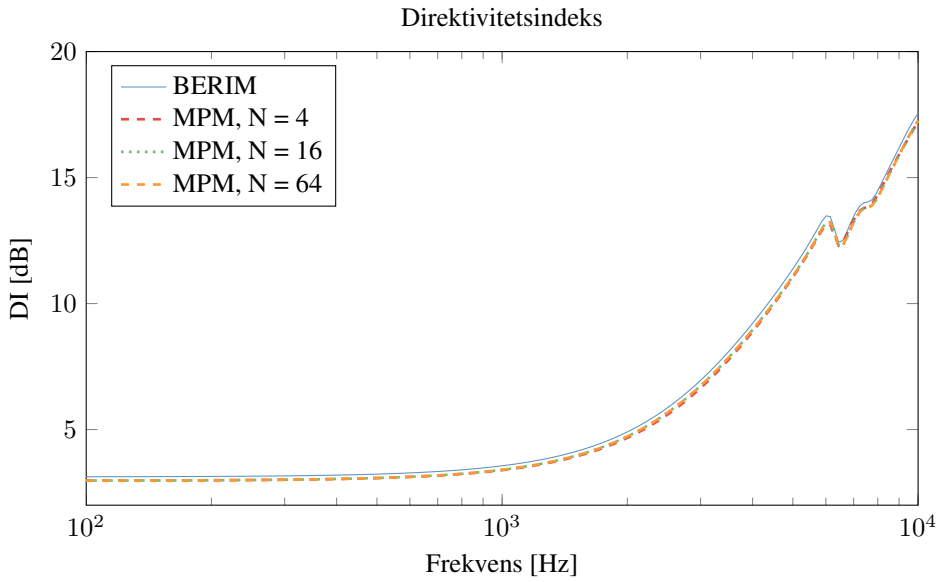
På figur 3.22 presenteres derfor et plott av lydtrykkresponsen i tre ulike målepunkt definert ved  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  og  $\theta = 90^\circ$ . Dette gjøres for å kunne vurdere om resultatene på noen måte er posisjonsavhengige.

I tillegg kan disse resultatene, i likhet med plottene for impedansen ved inngangen, gi en pekepinn på om kvaliteten på resultatene er frekvensavhengig. For plottene av lydtrykkresponsen er det brukt  $N = 64$  moder.



**Figur 3.22:** Figuren viser MPM og BERIM simulert lydtrykkfordeling i tre ulike lytterposisjoner definert ved  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  og  $\theta = 90^\circ$  når det i MPM-simuleringene er brukt 64 moder.

Med utgangspunkt i trykkresponsen er det enkelt å finne direktivitetsindeksen som funksjon av frekvens for både BERIM- og MPM-simuleringene. Nedenfor plottes  $DI_{BERIM}$  sammen med  $DI_{MPM}$ , men denne gangen er MPM-simuleringene gjort med tre ulike modetall,  $N = 4$ ,  $N = 16$  og  $N = 64$ . Dette er gjort for å gi et bilde på hvor mange moder som må inkluderes for at resultatene fra MPM-simuleringene skal bli tilfredsstillende.



**Figur 3.23:** Figuren viser direktivitetsindeksen for BERIM-simuleringer og MPM-simuleringer med  $N = 4$ ,  $N = 16$  og  $N = 64$

Figur 3.23 viser kun et utvalg modetall, og en mer nøyaktig analyse av hvor mange moder som må inkluderes i beregningene for at resultatene skal konvergere, er presentert i diskusjonskapitlet. Her gis også en analyse av feilen i direktivitetsindeksen, som gir et bilde på den totale feilen i metoden.



# Kapittel 4

## Diskusjon

I foregående kapittel ble resultatene fra en rekke numeriske simuleringer av både høytalerelement og konsentrisk horn presentert. I dette kapitlet vurderes feilen i resultatene og det gjøres en generell vurdering av hvor godt oppgaven er blitt løst og hvilke forbedringer som kan gjøres. I tillegg spekuleres det i hvordan metoden kan videreutvikles og eventuelle andre bruksområder.

### 4.1 Høytalerelement

I første del av simuleringssnittet presenteres resultatene fra simuleringen av et høytalerelement med utgangspunkt i Geddes metode, Olsons metode og Modal metode, relativt til BERIM-simuleringer som benyttes som referanse. Nedenfor diskuteres først resultatene fra disse simuleringene før forbedringspotensialet til Modal metode særlig diskuteres.

#### 4.1.1 Lydtrykknivå i fjernfeltet

Resultatene fra høytalersimuleringene ble presentert i form av plott av lydtrykknivået i tre ulike måleposisjoner  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  og  $\theta = 90^\circ$ , på henholdsvis figur 3.2, 3.3 og 3.4.

Det er i denne oppgaven ikke blitt utført en grundig feilanalyse av disse resultatene, ettersom samtlige metoder kun er en tilnærming til et høytalerelement, men et visst bilde på hvor gode resultatene er, er det allikevel interessant og mulig å gi.

I det følgende blir kvaliteten på resultatene studert ved at det sees på plottene av lydtrykkfordelingen gitt i resultatkapitlet for de tre ulike måleposisjonene, som blant annet gir mye informasjon om frekvensavhengigheten til resultatene.

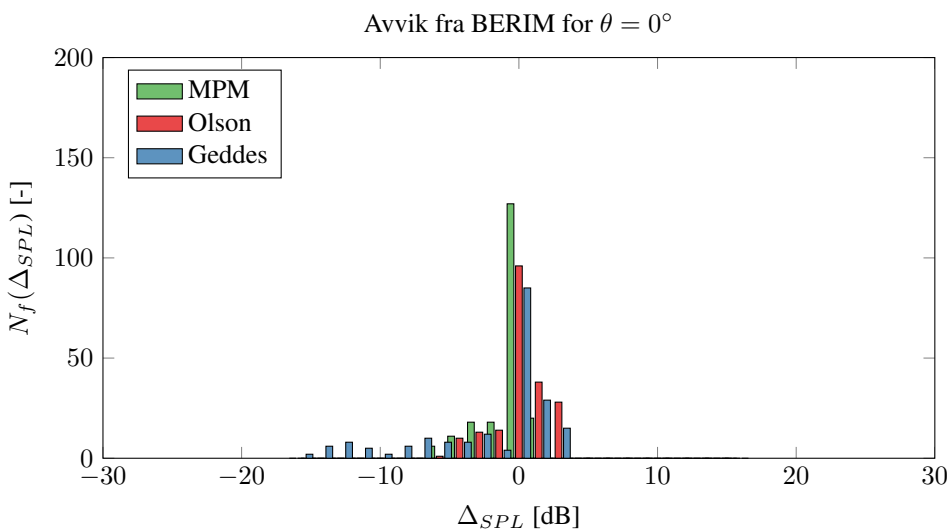
Deretter sees det konkret på differansen mellom lydtrykknivået funnet for den aktuelle metoden, og lydtrykknivået funnet fra BERIM-simuleringene

$$\Delta_{SPL} = 20 \log |p_i(r, \theta)| - 20 \log |p_B(r, \theta)|, \quad [\text{dB}] \quad (4.1)$$

hvor  $p_B$  er lydtrykket i fjernfeltet for BERIM-simuleringene og  $p_i$  lydtrykket for den aktuelle metoden. Denne differansen finnes for hver enkelt frekvens,  $f$ . Deretter finnes antallet frekvenser,  $N_f$ , med et visst avvik  $\Delta_{SPL}$ . Da vil  $\sum N_f(\Delta_{SPL}) = 200$ , ettersom frekvensvektoren i alt er 200 elementer lang. På bakgrunn av dette er det da mulig å få et innblikk i hvor gode resultatene er ved å se på verdien til  $N_f(\Delta_{SPL} \approx 0)$ . Jo flere frekvenser med feil nesten lik null, jo bedre er resultatene. I tillegg gir maksverdiene for  $\Delta_{SPL}$  et bilde på maksutslaget i feilen.

Nedenfor presenteres disse dataene i et histogram for hvert av plottene av lydtrykkrespons som ble gitt i resultatkapitlet. Disse histogrammene gir grunnlag for å sammenligne de tre metodene i de tre måleposisjonene med hverandre, og med BERIM-simuleringer.

På figur 4.1 vises histogrammet for måleposisjonen  $\theta = 0^\circ$ . Av dette kan det sees at samtlige metoder har fordelingen sentrert rundt null, noe som virker forenlig med plottene av lydtrykkfordelen gitt i 3.2. Dette gir at resultatene, spesielt for lave frekvenser, synes å stemme godt overens med BERIM-simuleringene.

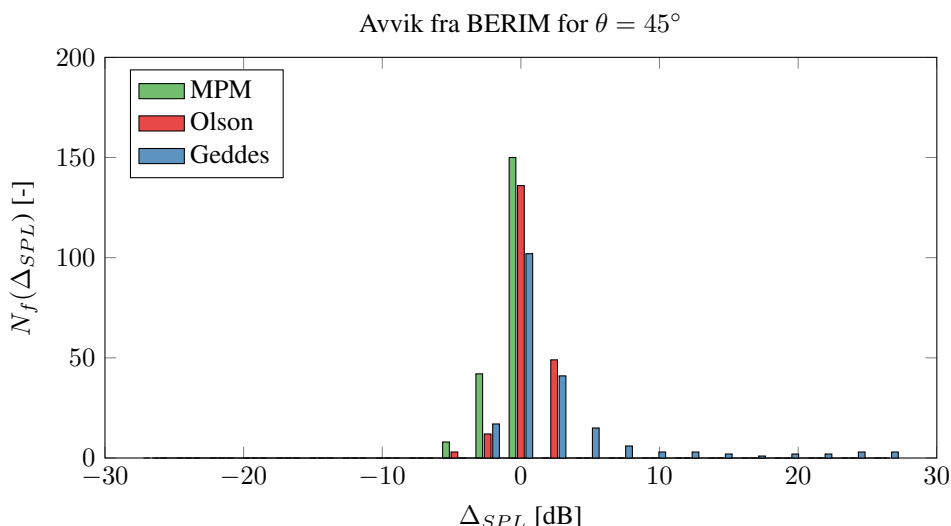


**Figur 4.1:** Histogrammet viser antall frekvenser  $N_f$  med avviket  $\Delta_{SPL}$  i lydtrykkresponsen funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer for en lytterposisjon  $\theta = 0^\circ$ .

Det som blir tydelig av histogrammet, er at maksutslaget i feilen varierer ganske mye de tre metodene i mellom. Her er det spesielt Geddes metode som skiller seg ut, da denne gir en feil på opp mot  $\Delta_{SPL} = -15$  dB for enkelte frekvenser, mens MPM og Olson metode kun gir en feil i området rundt  $\Delta_{SPL} = -5$  dB. For denne måleposisjonen er det lite hensiktsmessig å konkludere med at resultatene fra Olson- eller MPM-simuleringene er best, men begge gir resultater som avviker fra referansen med en maksverdi på rundt  $\pm 5$  dB. Dette bekreftes av plottene av lydtrykkfordelingen 3.2, som gir at begge metodene godt følger tendensen definert av BERIM-simuleringene som funksjon av frekvens.

For måleposisjonene ved  $\theta = 45^\circ$  og  $\theta = 90^\circ$  sees det av lydtrykkresponsene gitt i

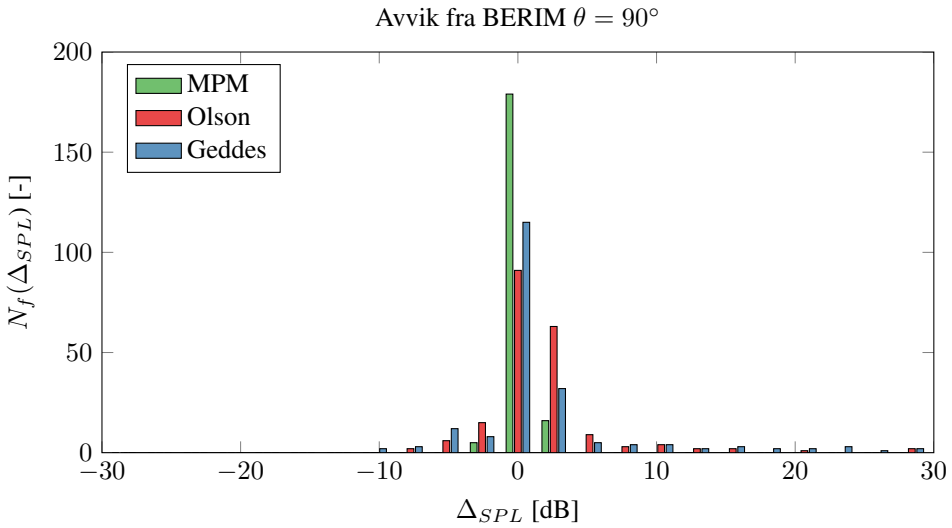
resultatkapitlet på henholdsvis figur 3.3 og figur 3.4, at det blir mye større variasjoner som funksjon av frekvens enn for tilfellet rett forfra. Dette inntrykket forsterkes av histogrammene funnet for lydtrykkresponsen i disse tilfellene, som er vist på figur 4.2 og 4.3. Av disse sees det at alle metodene fortsatt har fordelingen sentrert rundt null, men at maksutslagene nå går opp, og dette spesielt for Geddes metode der den maksimale feilen finnes til hele 26 dB. For måleposisjonen  $\theta = 90^\circ$  forekommer slike voldsomme utslag også for Olsons metode.



**Figur 4.2:** Histogrammet viser antall frekvenser  $N_f$  med avviket  $\Delta_{SPL}$  i lydtrykkresponsen funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer for en lytterposisjon  $\theta = 45^\circ$ .

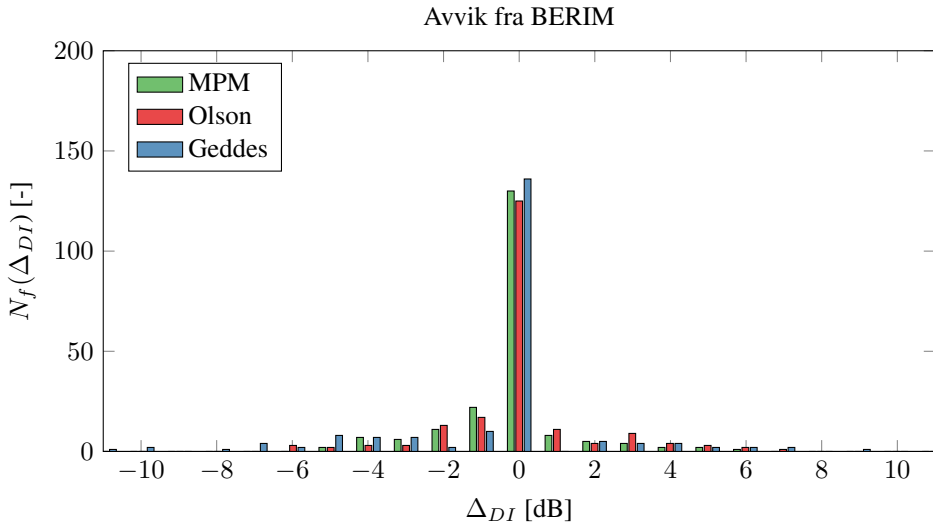
I teoriavsnittet som beskriver Geddes metode nevnes det at denne metoden ikke tar høyde for hulromresonans og det er nok i hovedsak denne feilen som gjør at avvikene blir såpass store for høye frekvenser. Av plottene av lydtrykkresponsen gitt i resultatkapitlet, blir det tydelig at det er de lave frekvensene som sørger for at toppene på histogrammene fortsatt er sentrert rundt null.

Av histogrammene ovenfor blir det altså klart at MPM-simuleringene tydelig gir vesentlig mye bedre resultater enn resultatene fra Geddes metode uansett lytterposisjon, og at når det gjøres målinger i området  $\theta = 90^\circ$ , kommer også Olsons metode mye dårligere ut enn MPM. Det som dog kan sees av plottene som gir lydtrykkfordelingen i disse posisjonene, er at det oppstår svært skarpe dipper i lydtryknivåene når frekvensen blir høy. Høytalerelementets dybde angir hvor disse dippene inntreffer, og kun en liten unøyaktighet her vil derfor kunne gi en liten forskyvning i frekvens som vil gi et svært stort feilutslag. Derfor kan de voldsomme maksutslagene i feil for Olson- og Geddes metode ikke sies å være fullstendig representative for kvaliteten på metodene, da man kan se av plottene for lydtrykkrespons at disse i stor grad følger den samme tendensen som referansen gitt av BERIM-simuleringene.



**Figur 4.3:** Histogrammet viser antall frekvenser  $n_f$  med avviket  $\Delta_{SPL}$  i lydtrykkresponsen funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer for en lytterposisjon  $\theta = 90^\circ$ .

For å få et bilde på den totale feilen funnet for hver av metodene presenteres til slutt et histogram av direktivhetsindeksen, basert på samme prinsipp som tidligere, men der det nå sees på differansen i  $DI$  og ikke i lydtrykknivå.



**Figur 4.4:** Histogrammet viser antall frekvenser  $N_f$  med avviket  $\Delta_{DI}$  i direktivhetsindeks funnet fra simuleringer av MPM, Olson- og Geddes metode relativt til den funnet fra BERIM-simuleringer.

Av figur 4.4 blir det tydelig at det også nå, er Geddes- og Olsons-metode som står for de store feilutslagene. For å gi en konkret verdi for feilen, presenteres den  $\Delta_{SPL}$ -verdien som må aksepteres for at 95 % av frekvensene skal falle innenfor, her betegnet  $\Delta_{SPL,95\%}$ . Denne beregnes for hvert enkelt histogram ved at det summeres over  $N_f$  og at det deretter noteres hvor stor absoluttverdi av  $\Delta_{SPL}$  som må til for at  $\sum N_f(|\Delta_{SPL}|) \geq 200 \cdot 0,95$ . Dette er gjort for en oppløsning langs  $x$ -aksen som er tre ganger høyere enn det vist på figurene, da denne er såpass lav for å lett kunne skille søylene grafisk. Resultatene er presentert for hvert histogram i tabell 4.1. I denne tabellen gis også et eksempel på kjøretid for de ulike metodene.

**Tabell 4.1:** Tabellen viser kjøretid,  $\Delta_{SPL,95\%}$  for de ulike metodene i de tre ulike måleposisjonene og feilen i direktivitetsindeks  $\Delta_{DI,95\%}$  for alle de tre metodene.

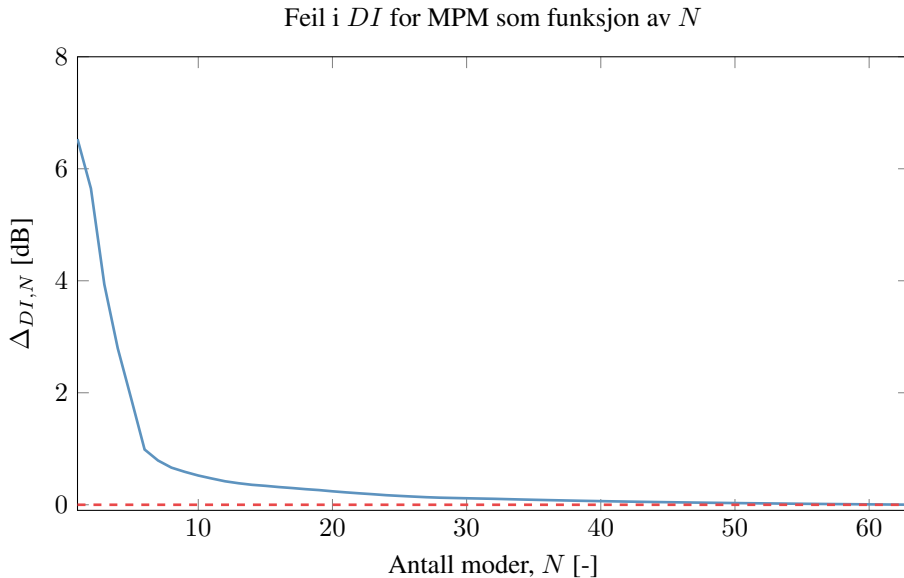
Metode	Kjøretid [s]	$\Delta_{SPL,95\%} 0^\circ$ [dB]	$\Delta_{SPL,95\%} 45^\circ$ [dB]	$\Delta_{SPL,95\%} 90^\circ$ [dB]	$\Delta_{DI,95\%}$ [dB]
MPM	209,93	5,17	3,72	5,17	2,60
Olson	4,85	5,72	3,20	12,92	7,82
Geddes	40,76	14,28	16,25	18,08	13,03

Når denne tabellen studeres blir det tydelig at, til tross for approksimasjonen gjort i projeksjonen av impedansen, gir modal metode klart best resultat av disse tre alternativene til BERIM-simuleringene. Det må for MPM kun aksepteres en absolutt feil i direktivitetsindeksen relativ til BERIM på 2,60 dB for at 95% av frekvensene skal falle innenfor. Til sammenligning må en feil på 7,82 dB aksepteres for Olsons metode og en feil på 13,03 dB aksepteres for Geddes metode.

Ulempen ved Modal metode som blir tydelig i denne tabellen, er en vesentlig mye høyere kjøretid enn for de øvrige metodene. I resultatkapitlet ble det nevnt at for Geddes- og Olsons-metode ble oppløsningen, som direkte påvirker kjøretiden, valgt på bakgrunn av når resultatene syntes å konvergere. Dette er foreløpig ikke gjort for Modal metode, da det for alle simuleringene ovenfor er brukt 64 moder, ettersom dette var den høyeste oppløsningen tilgjengelig, og derfor den som var ventet å gi best resultat. På neste side diskuteres derfor hvorvidt et såpass høyt modetall var nødvendig eller ikke.

### 4.1.2 Konvergens for Modal metode

For å se hvor mange moder det er nødvendig å inkludere i simuleringene ved Modal metode, er det studert når resultatene synes å konvergere. Dette er gjort ved at direktivitetsindeksen for ulike modetall studeres. Nedenfor vises derfor et plott av  $\Delta_{DI,N} = DI_{N=64} - DI_N$  for alle verdier av  $N \in [2, 64]$ .



**Figur 4.5:** Figuren viser differansen  $\Delta_{DI,N} = DI_{N=64} - DI_N$  som funksjon av antall moder.

Fra figuren sees det at resultatene fra Modal metode konvergerer allerede for rundt 48 moder, og at resultatene vesentlig forbedres allerede fra rundt 6 moder, kontra det første målepunktet på to moder. Ettersom det uansett ikke kan forventes at resultatene funnet for sirkulært høyttalerelement er perfekte, kan det av dette konkluderes med at denne tilpasningen til modal metode gir en grei indikasjon på de reelle forhold allerede for 6 moder, og at kjøretiden presentert i tabell 4.1 for modal metode ikke er rettferdig. I Bjørn Kolbreks prosjektoppgave [24] finnes det at den totale kjøretiden for MPM øker med  $N^4$ . Når modetallet da kan reduseres fra 64 til 6 blir det klart at denne kan forkortes drastisk i forhold til den gitt i tabell 4.1.

## 4.2 Byggestener for konsentrisk horn

I den andre delen av simuleringskapitlet presenteres resultatene fra testingen av de nye projeksjonsmatrisene som er utarbeidet i denne oppgaven, nemlig den for overgang fra et konsentrisk rør til et annet, og den for overgang fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør.

Først presenteres testtilfellet der det kun sees på overgangen fra et konsentrisk rør til et sirkulært rør. På figur 3.7 vises hastighetsfordelingen i radiell retning funnet rett etter diskontinuiteten. Av denne ser man at det er null volumstrøm rett bak den indre sylindren i området  $r \in [0, a]$ , og en normalisert volumstrøm lik én i området  $r \in [a, b]$ . Dette stemmer intuitivt svært godt med geometrien brukt for testing av overgangen fra konsentrisk rør gitt på figur 3.6.

For den samme overgangen er impedansen ved  $z = 0$  funnet fra MPM-simuleringer og blitt sammenlignet med impedansen ved  $z = 0$  funnet fra BERIM-simuleringer. Impedansen i begge tilfellene er vist på figur 3.8 og fra denne kan det sees at de to kurvene overlapper i svært stor grad. Det eneste interessante avviket finnes ved en frekvens på rundt 9 kHz, hvor BERIM-simuleringene har en markant topp, som ikke er å finne i MPM-simuleringene. For å studere naturen til denne, ble det derfor utført en serie BERIM-simuleringer med ulike «*mesh bandwidth*», som indirekte angir størrelsen på elementene som utgjør horngeometrien. Når denne størrelsen ble endret, og de andre simuleringsparametrene ble holdt konstante, flyttet toppen seg som oftest mot høyre når størrelsen ble økt, og mot venstre når størrelsen ble forminsket. Dette indikerer at toppen representerer en svakhet ved BERIM-simuleringen, da dette i bunn og grunn også er en numerisk metode, og ikke ved MPM-simuleringene som er det som i hovedsak studeres i denne masteroppgaven.

Etter at hastighetsfordelingen og impedansen ved inngangen for overgangen fra konsentrisk til sirkulært rør var studert, ble denne kombinert med andre geometrier. Hver enkelt geometri presentert i resultatene behandles ikke spesifikt her, da hastighetsfordelingen i hvert av tilfellene stemmer svært godt overens med hva man kan forvente etter hver av diskontinuitetene. I tillegg er impedansene ved inngangen funnet fra MPM-simuleringer for  $N = 64$  til å være nærmest helt overlappende med impedansen funnet fra BERIM-simuleringene for alle de øvrige diskontinuitetene, som gir at projeksjonsmatrisene utarbeidet i denne oppgaven virker svært pålitelige, og dette for både én og to simultane diskontinuiteter og to påfølgende diskontinuiteter.

Ettersom alle de øvrige diskontinuitetene som ble testet i resultatkapitlet også består av overgangen fra konsentrisk rør til sirkulært rør, og det her ikke er noen nevneverdige avvik å spore i impedansene, forsterker dette konklusjonen om at den ekstra toppen i den første geometrien skyldes svakheter i BERIM-simuleringne. Dersom dette var en konkret feil i beregningene av projeksjonsmatrisene, burde denne forplante seg i systemet også når det er sett på flere diskontinuiteter etter hverandre.

Til tross for at impedansene etter overgangene ser ut til å stemme svært godt overens med BERIM-simuleringene, er det nødvendig med en mer utførlig sammenligning for å vurdere om resultatene konvergerer fullstendig eller ikke. Dette er ikke gjort for hver enkelt diskontinuitet, men en vurdering gjøres i neste avsnitt når det sees på et fullstendig konsentrisk horn.

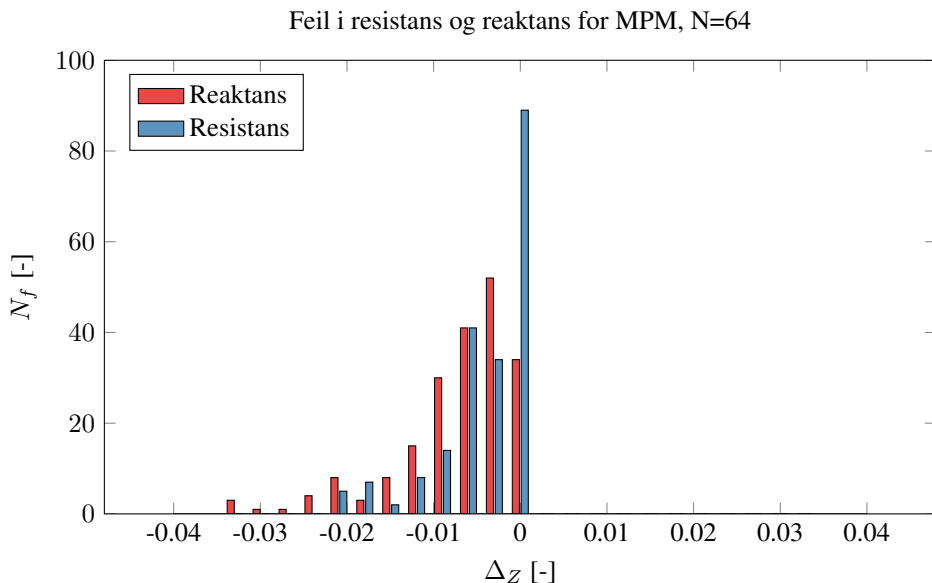
### 4.3 Konsentrisk Horn

Det siste avsnittet i resultatkapitlet omhandler simuleringene av et fullstendig horn med delvis konsentrisk og delvis sirkulær geometri konstruert av diskontinuiteter som de som ble diskutert ovenfor.

I resultatkapitlet presenteres først plott av normalisert resistans og normalisert reaktans ved inngangen funnet både ved MPM- og BERIM-simuleringer, når det i MPM-simuleringene er brukt 64 moder, og «*mesh width*» i BERIM-simuleringene er satt til 20 kHz. For å studere avvikene i resistans og reaktans finnes først differansen mellom verdiene funnet fra BERIM-simuleringer og de funnet fra MPM-simuleringer som gitt i ligningen nedenfor

$$\begin{aligned}\Delta_{Z,Resistans} &= \operatorname{Re}\left(Z_B \frac{\rho c}{S}\right) - \operatorname{Re}\left(Z_{MPM} \frac{\rho c}{S}\right) \\ \Delta_{Z,Reaktans} &= \operatorname{Im}\left(Z_B \frac{\rho c}{S}\right) - \operatorname{Im}\left(Z_{MPM} \frac{\rho c}{S}\right),\end{aligned}\quad (4.2)$$

hvor  $S$  er tverrsnittarealet ved inngangen,  $Z_B$  er impedansen funnet fra BERIM-simuleringene, og  $Z_{MPM}$  er impedansen funnet fra MPM-simuleringene. Dette gjøres for hver enkelt frekvens, og som for tilfellet for sirkulært høyttalerelement, finnes det antallet frekvenser  $N_f$  med et visst avvik  $\Delta_Z$  fra BERIM-simuleringene både for reaktansen og resistansen. Den resulterende feilen er presentert i histogrammet på figur 4.6.



**Figur 4.6:** Histogrammet viser den absolute feilen  $\Delta_Z$  for de ulike frekvensene, her for reaktans og resistans funnet fra MPM-simuleringer relativt til reaktans og resistans funnet fra BERIM-simuleringer.



Av histogrammet sees det at avvikene i stor grad er sentrert rundt null, og at den feilen som er, er på negativ side. Jevnt over er det altså en tendens som gir at resultatene beregnet ved hjelp av MPM er litt høyere enn resultatene funnet ved BERIM. I tillegg kan det virke som om resistansen har noe bedre resultater enn reaktansen, men til tross for dette er maksutslaget i absolutt feil på kun 0,035 som må sies å være svært lavt. Da både reaktans og resistans er beregnet med utgangspunkt i nøyaktig de samme kjente verdiene og prosjektert ved hjelp av de samme sammenhengene, gir dette i hovedsak et bilde på statistisk usikkerhet av den numeriske metoden for både MPM- og BERIM-simuleringene.

For å få et enda mer konkret bilde på hvor gode resultatene er, er det nedenfor presentert en oversikt over hvor stort differanse  $\Delta_Z$  som må aksepteres for at 95% av frekvensene, og 99% av frekvensene skal falle innenfor, for  $N = 64$ . Disse verdiene beregnes på samme måte som for sirkulært horn, og resultatene er gitt i tabell 4.2.

**Tabell 4.2:** Tabellen viser absolutt feil for MPM-simuleringer av resistans og reaktans ved inngangen relativt til BERIM-simuleringer, som må aksepteres for at 95% og 99% av frekvensene skal falle innenfor.

	$\Delta_{Z,95\%}$	$\Delta_{Z,99\%}$
Resistans	0,012	0,018
Reaktans	0,023	0,032

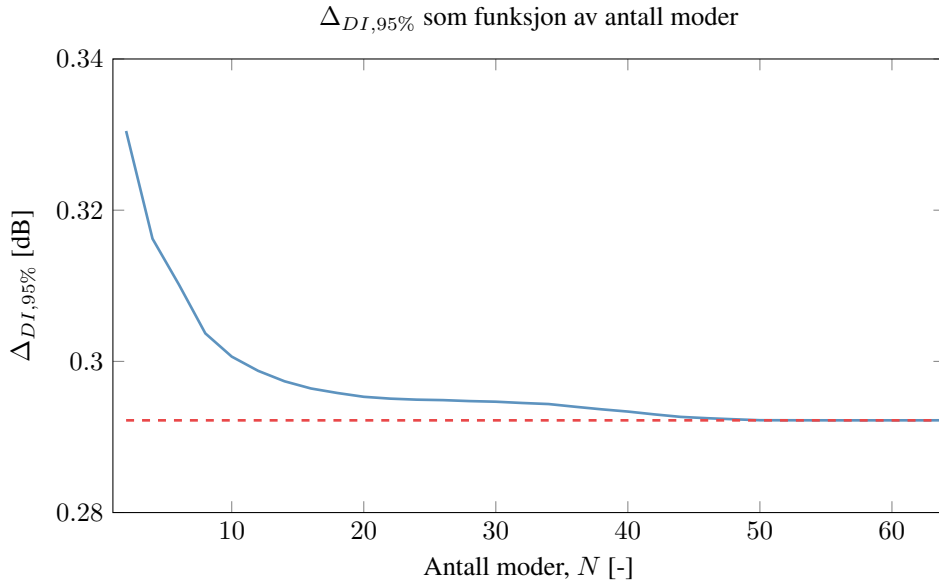
Ettersom også disse verdiene er funnet på bakgrunn av de samme simuleringene er det ikke rart at verdiene for resistansen fortsatt synes å være bedre enn verdiene for reaktansen, men av tabellen blir det tydelig at 99% av frekvensene vil falle innenfor et avvik på 0,032 og at et avvik på bare 0,023 vil inkludere 95% av frekvensene. Dette må sies å være svært gode resultater og feilen som er kan nok i stor grad tilskrives det at det er to numeriske metoder som sammenlignes, og at maskinens presisjon dermed også er en feilkilde.

I tillegg til plott av resistans og reaktans presenteres det i resultatkapitlet plott av lydtrykkresponsen i tre ulike måleposisjoner;  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  og  $\theta = 90^\circ$  gitt i figur 3.22. Av disse sees det også at resultatene fra MPM-simuleringene synes å stemme overens med BERIM-simuleringene i svært stor grad, også for høye frekvenser og for alle de tre måleposisjonene. For å studere kvaliteten på denne delen av resultatene studeres her direktivitetsindeksen i detalj, da man av 3.22 kan trekke den konklusjonen at feilen for de ulike måleposisjonene må være ganske liten, og ganske konstant, og at det derfor er lite hensiktsmessig å vurdere disse opp mot hverandre.

Feilen i direktivitetsindeksen beregnes ved at det først sees på absolutt feil  $\Delta_{DI} = DI_B - DI_{MPM}$  for hver enkelt frekvens. Deretter finnes  $\Delta_{DI,95\%}$  på samme måte som for sirkulært horn, og som gir avviket i direktivitetsindeks fra BERIM-simuleringene som må aksepteres for at dette skal omfatte 95% av frekvensene.

Samtlige av simuleringene diskutert ovenfor var gjort med 64 moder for MPM, da dette var den høyeste oppløsningen lett tilgjengelig og som derfor var den oppløsningen som var forventet å gi best resultat. Fra plottet av direktivitetsindeksen, presentert i resultatkapitlet på figur 3.23 kan det virke som om resultatene fra MPM-simuleringene konvergerer lenge før modetallet blir såpass stort. Derfor finnes  $\Delta_{DI,95\%}$  for samtlige modetall  $N \in [2, 64]$ .

Resultatene av dette er vist på figur 4.7.



**Figur 4.7:** Figuren viser  $\Delta_{DI,95\%}$ , som er avviket i direktivetsindeksen funnet fra MPM-simuleringer relativt til BERIM-simuleringer som må aksepteres for at 95% av frekvensene i frekvensvektoren skal falle innenfor. Dette er gitt som funksjon av moder brukt i MPM-simuleringene.

Fra figuren ovenfor blir det tydelig at feilen i direktivetsindeksen faller fort når modetallet økes, og at allerede ved rundt 16 moder er resultatene betraktelig forbedret sammenlignet med startpunktet på 2 moder. Dette bekreftes av plottene av direktivetsindeksen for ulike modetall vist på figuren i resultatkapitlet 3.23, der grafene er svært like til tross for svært ulike verdier for  $N$ . Avviket kan sies å være stabilt ved rundt 48 moder. Dette er samme  $N$ -verdi som ble funnet for sirkulært horn, noe som indikerer at beregninger med flere moder enn dette antagelig som oftest er unødvendig.

Resultatene konvergerer til en verdi litt over 0,29 dB, som er illustrert på figuren ved den rødsteiplede linjen. Fra plottene av direktivetsindeksen kan det sees at de MPM-simulerte verdiene gir en litt lavere direktivetsindeks enn de funnet fra BERIM-simuleringene. Altså vil dette avviket i hovedsak være negativt.

Ovenfor ble det funnet at maksutslaget for absolutt feil var rundt 0,035 for impedansen. Ettersom resultatene for impedansen ved inngangen er såpass gode, og projeksjonsmatriksene som brukes ved projeksjon forover i hornet er de samme som brukt ved projeksjon bakover i hornet, indikerer dette at unøyaktighetene oppstår i beregningene av lydtrykkresponsen i fjernfeltet, som er basisen for beregningene av direktivetsindeksen.

I [8] trekkes det frem at unøyaktigheter i lydtrykkresponsen kan komme av at Rayleighintegralet løses på to ulike numeriske måter i BERIM-simuleringen og i MPM-simuleringene. I BERIM benyttes gauss kvadratur med åtte punkter i radiell retning for hvert element, mens det i disse simuleringene av Modal metode brukes en midpunkts trapesregel. Dette ansees som den mest sannsynlige årsaken til feilen også i denne oppgaven.

## 4.4 Videre Arbeid

Når det sees på diskusjonen av resultatene i denne masteroppgaven blir det tydelig at det absolutt er mest å hente i forbindelse med simulering av høyttalerelement ved Modal metode. Her er det et tydelig forbedringspotensiale i forbindelse med projeksjon av impedans over diskontinuitet, ettersom måten det er gjort på her er en tilnærming. Som nevnt, ble denne tilnærmingen gjort fordi matriseligningen 2.41 viste seg å være svært vanskelig å løse entydig. Det spekuleres derfor i om dette kan la seg gjøre ved å sette opp et ligningssett bestående av de kjente parametrene eventuelt ved en iterativ løsning.

Uavhengig av dette vil en naturlig fortsettelse av arbeidet være å konstruere konsentriske høyttalerelement. Til tross for tilnærmingen ble det ovenfor konkludert med at metoden allikevel gav en relativt god tilnærming til BERIM-simuleringene. Ved å kombinere uttrykkene presentert i teorien for sirkulært høyttalerelement og konsentriske horn bør det være en smal sak å utvikle dette videre til å omfatte begge, slik at et konsentrisk høyttalerelement kan simuleres.

I tillegg åpner mulighetene for projeksjon fra et konsentrisk rør til et annet for mange nye geometrier. En forutsetning er dog at strålingsimpedansen ved enden er kjent. I artikkelen «*Sound Radiation from a semiinfinite circular pipe having an arbitrary profile of ocifice*» [25] presenteres det hvordan denne kan finnes for en vilkårlig flate i baffel også når denne vibrerer som åpner for studie av interessante høyttalerelement. Strålingsimpedansen for et konsentrisk horn kan også finnes fra [19] som muliggjør bygging av horn med kun konsentrisk geometri.



## Konklusjon

Det er i denne masteroppgaven tatt utgangspunkt i ligningene for beskrivelse av sirkulære horn ved modal metode, som presentert i [1]. Denne metoden er blitt videreutviklet til å omfatte vibrerende koniske strukturer, som her er blitt brukt til å beskrive høyttalerelement med en geometri konstruert av en serie påfølgende sylindre med stadig økende tverrsnitt.

Den vibrerende strukturen er oppnådd ved at det i aksial retning er blitt lagt til en ekstra volumhastighet for å simulere bevegelige vegger, i motsetning til de harde veggene brukt for horn. Oppdaterte uttrykk for det nye systemet er blitt utviklet med unntak av projeksjon av impedans over diskontinuitet som resulterte i en matriseligning som viste seg å være svært vanskelig å løse. I denne oppgaven er det derfor brukt uttrykket for projeksjon av impedans for sirkulært horn, som en approksimasjon til det faktiske tilfellet.

For å vurdere resultatene fra Modal metode er det blitt utført simuleringer av et høyttalerelement med utgangspunkt i de nye uttrykkene. Resultater fra dette er blitt sammenlignet med BERIM-simuleringer og simuleringer av høyttalerelement ved Geddes- og Olsons metode. Av disse viste MPM-simuleringene best overenstemmelse med BERIM-simuleringene da det ble funnet at det kun måtte aksepteres et avvik i direktivitetsindeks på 2, 60 dB for 64 moder for at 95% av frekvensene skulle falle innenfor. Til sammenligning ble de samme verdiene for Olson- og Geddes metode funnet til å være henholdsvis 7, 82 dB og 13, 03 dB. I tillegg ble lydtrykkresponsen i fjernfeltet vurdert og det kan konkluderes med at responsen funnet fra MPM-simuleringene er ganske lik den funnet fra BERIM-simuleringene, til tross for approksimasjonen, men at en entydlig løsning av matriseligningen, som beskriver projeksjon av impedans over diskontinuiteter, må finnes for at resultatet skal bli optimalt. En vurdering av antall moder som er nødvendige for at resultatet skal konvergere er også gjort, og det ble funnet at resultatene ble vesentlig forbedret allerede for 6 moder, og at modetall over 48 var unødvendig bruk av regnekapasitet.

Ettersom mange høyttalerelement har en støvhette eller faseplugg i midten av elementet, var også en vesentlig del av oppgaven å utvikle metoden til å gjelde for konsentrisk geometri. Dette er blitt gjort ved at Modal metode er blitt videreutviklet til også å gjelde for konsentriske horn. Nye uttrykk for projeksjon bortover en konsentrisk sylinder, fra en konsentrisk sylinder til en annen, og fra en konsentrisk sylinder til en sirkulær sylin-

---

der er derfor blitt utarbeidet uten approksimasjoner. Hver enkelt av overgangene er blitt testet hver for seg, og kombinasjonen av to simultane og to påfølgende diskontinuiteter er også blitt simulert og sammenlignet med BERIM-simuleringer. Resultatene viste svært stor grad av overenstemmelse.

Med utgangspunkt i viten om at hver enkelt byggesten fungerte, er det blitt konstruert et fullstendig horn med delvis konsentrisk og delvis sirkulær geometri ved hjelp av Modal metode. Også her viste sammenligning med BERIM-simuleringer at resultatene var svært gode, når det for Modal metode ble brukt 64 moder. Det ble funnet at absolutt feil som måtte aksepteres for at 95% av frekvensene var innenfor var 0,032 for impedansen ved inngangen, og at 95 % av frekvensene var innenfor et dB-avvik på 0,29 når det ble sett på direktivetsindeksen. I tillegg ble det konkludert med at resultatene syntes å konvergere allerede for  $N = 48$  og at det derfor er mulig å gjennomføre mindre tid- og plasskrevende simuleringer enn det som er blitt gjort i denne oppgaven.

I tillegg ble det konkludert med at uttrykkene funnet i denne oppgaven for vibrerende konisk struktur og konsentrisk geometri lett kan kombineres til å gi et bilde på høyttaler-element med støvhette eller faseplugg, men for at resultatene skal bli helt nøyaktige må først en entydig løsning for projeksjon av impedans finnes i tilfellet for vibrerende struktur.

# Bibliografi

- [1] J. A. Kemp, Theoretical and experimental study of wave propagation in brass musical instrument, *Doktorgradsavhandling, University of Edinburg*, [Online]: <http://www.kempacoustics.com/thesis2/>, 2002.
- [2] E. Geddes og L. Lee, *Audio Transducers*, Gedlee, Hong Kong, 2002.
- [3] H. F. Olson, *Elements Of Acoustical Engineering*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, second edition, third printing edition, 1947.
- [4] A. Cummings, Sound transmission in curved duct bends, *Journal of Sound and Vibration*, 35(4):451–477, 1974.
- [5] A. G. Webster, Acoustical Impedance and the Theory of Horns and of the Phonograph, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 5(7):275–282, 1919.
- [6] R. J. Alfredson, The Propagation of sound In a Circular Duct of Continuously Varying Cross-Sectional Area, *Journal of Sound and Vibration*, 23(4):433–442, 1972.
- [7] V. Pagneux, N. Amir, og J. Kergomard, A study of wave propagation in varying crosssection waveguides by modal decomposition. Part I. Theory and validation, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(4):2034–2048, 1996.
- [8] B. Kolbrek, Modal sound propagation in curved horns of rectangular cross-section, *Masteroppgave, Norwegian University of Science and Technology*, [Online]: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:649777/FULLTEXT01.pdf>, 2013.
- [9] T. Shindo, T. Yoshioka og K. Fukuyama, Calculation of Sound Radiation from an Unbaffled, Rectangular-Cross-Section Horn Loudspeaker Using Combined Analytical and Boundary Element Methods, *Journal of the Audio Engineering Society*, 38(5):340–349, 1990.
- [10] A. Schuhmacher og K. B. Rasmussen, Modelling of horn-type loudspeakers for outdoor sound reinforcement systems, *Applied Acoustics*, 56:25–37, 1999.

- 
- [11] W. E. Zorumski, Calculation of the angular propagation constant for a bend, *Journal of Sound and Vibration*, 37(1):65–77, 1974.
- [12] W. C. Osborne, Calculation of the angular propagation constant for a bend, *Journal of Sound and Vibration*, 37(1):65–77, 1974.
- [13] W. C. Osborne, Higher mode propagation of sound in short curved bends of rectangular cross section, *Journal of Sound and Vibration*, 45(1):39–52, 1976.
- [14] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens og J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley & Sons, Inc., 4. edition, 2004.
- [15] S. M. Kirkup, A. Thompson, B. Kolbrek og J. Yazdani, Simulation of the acoustic field of a horn loudspeaker by the boundary element-rayleigh integral method, *Journal of Computational Acoustics*, 21(1):17, 2013.
- [16] R. W. Carlisle, Conditions for wide angle radiation from conical sound radiators, *The Journal of The Acoustical Society of America*, 15(1):44–49, 1943.
- [17] M. Abramowitz og I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition, 1964.
- [18] L. L. Beranek, *Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [19] William E. Zorumski, Generalized radiation impedances and reflection coefficients of circular and annular ducts, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 54(6):1667–1673, 1973.
- [20] B. Kolbrek, MPM Toolbox, [Online]: <http://kolbrek.hoyttalerdesign.no/index.php/sw/mpm-toolbox>, 2012.
- [21] S. M Kirkup, *The Boundary element method in acoustics*, 1998.
- [22] B. Kolbrek, BEMAC, *Norwegian University of Science and Thechnology*, [Online]: <https://dl.dropboxusercontent.com/u/16171837>, 2011.
- [23] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling og B. P. Flannery, *Numerical Recipies*, Cambridge University Press, 2 edition, 1992.
- [24] B. Kolbrek, Modal propagation in acoustic horns, (*Ikke publisert*), [Online]: [http://kolbrek.hoyttalerdesign.no/images/misc/evaluation\\_mpm\\_2012\\_bk.pdf](http://kolbrek.hoyttalerdesign.no/images/misc/evaluation_mpm_2012_bk.pdf), 2011.
- [25] Y. Ando og T. Koizumi, Sound radiation from a semiinfinite circular pipe having an arbitrary profile of ocifice, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 59(5), 1976.



---

# Appendiks

## A.1 Normaliseringsintegral

Fra [17] sammenheng 11.4.2, er det gitt at for en sylindrisk funksjon  $\mathcal{C} = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z)$  av orden  $\nu$ , når  $A$  og  $B$  er konstanter, finnes

$$\begin{aligned} & \int_a^b t \mathcal{C}(\lambda_m t) \mathcal{C}(\lambda_n t) dt = 0, \quad (m \neq n) \\ & = \left[ \frac{1}{2} t^2 \left\{ \left( 1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n^2 t^2} \right) \right\} \mathcal{C}_\nu^2(\lambda_n t) + \mathcal{C}'_\nu(\lambda_n t) \right]_{=a}^{=b}, \quad (m = n), \quad (0 < a < b). \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

## A.2 Integral over produkt av Besselfunksjoner

De øvrige integralene som behøves for å finne integralene som gir projeksjonsmatrisene er alle varianter av integralet gitt nedenfor, når  $\mathcal{C}_\mu(z)$  og  $\mathcal{D}_\nu(z)$  er to sylindriske besselfunksjoner av orden  $\mu$  og  $\nu$

$$\begin{aligned} & \int^z \left\{ (k^2 - l^2)t - \frac{(\mu^2 - \nu^2)}{t} \right\} \mathcal{C}(kt) \mathcal{D}(lt) dt \\ & = z \{ k \mathcal{C}_{\mu+1}(kz) \mathcal{D}_\nu(lz) - l \mathcal{C}_\mu(kz) \mathcal{D}_{\nu+1}(lz) \} - (\mu - \nu) \mathcal{C}_\mu(kz) \mathcal{D}_\nu(lz) \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

## B.1 Simuleringsparametre for byggestener for konsentrisk horn

**Tabell B1:** Tabellen viser verdiene på simuleringsparametrene for byggestenene for konsentrisk horn.

Diskontinuitet	Størrelse	Symbol	Verdi	Enhet
Fra konsentrisk til sirkulært rør, vist på figur 3.6	Indre radius	$a$	0,01	[m]
	Ytre radius	$b$	0,02	[m]
	Lengde indre sylinder	$l_a$	0,05	[m]
	Lengde ytre sylinder	$l_b$	0,10	[m]
Fra konsentrisk til konsentrisk rør, med konstant indre, og økende ytre radius, vist på figur 3.9	Indre radius	$a$	0,01	[m]
	Første ytre radius	$b_1$	0,02	[m]
	Andre ytre radius	$b_2$	0,03	[m]
	Lengde indre sylinder	$l_a$	0,06	[m]
	Lengde ytre sylinder før diskontinuitet	$l_{b1}$	0,05	[m]
	Lengde ytre sylinder etter diskontinuitet	$l_{b2}$	0,05	[m]
Fra konsentrisk til konsentrisk rør med avtagende indre radius, vist på figur 3.13	Første indre radius	$a_1$	0,02	[m]
	Andre indre radius	$a_2$	0,01	[m]
	Ytre radius	$b$	0,03	[m]
	Lengde indre sylinder før første diskontinuitet	$l_{a1}$	0,05	[m]
	Lengde indre sylinder før andre diskontinuitet	$l_{a2}$	0,06	[m]
	Lengde ytre sylinder	$l_b$	0,10	[m]
Fra konsentrisk til konsentrisk rør, med økende ytre radius og mindre indre radius, som vist på figur 3.16	Første indre radius	$a_1$	0,02	[m]
	Andre indre radius	$a_2$	0,01	[m]
	Første ytre radius	$b_1$	0,03	[m]
	Andre ytre radius	$b_2$	0,04	[m]
	Lengde indre sylinder før første diskontinuitet	$l_1$	0,05	[m]
	Lengde indre sylinder før andre diskontinuitet	$l_2$	0,06	[m]
	Lengde ytre sylinder før diskontinuitet	$l_1$	0,05	[m]
	Lengde ytre sylinder etter diskontinuitet	$l$	0,05	[m]

---

## C.1 MATLAB-kode

### C.1.1 Valg av projeksjonsmatrise på bakgrunn av geometri

```
function [F,isV] = makeFandV(a1,b1,a2,b2,phi_n, phi_m,N)
% a1 : first inner radius
% a2 : second inner radius
% b1 : first outer radius
% b2 : second outer radius
% gamman_n1 : vector of eigenvalues for duct 1
% gamman_n2 : vector of eigenvalues for duct 2
% N : number of modes

% F : F-matrix
% isV : true if the result is a V-matrix. It must be inverted during
% calculations.
[r1,w1] = lgwt(1000,a1,b1);
isV = false; %default value
% check what config we have

if (a1 == 0 && a2 ~=0)
    % circular to annular
    % find F-matrix F(c->a) for annular to circular, constant b
    % check subconfig, and mulitply F(c->a) by F or V^-1-matrix if b changes
    if (b2 > b1)
        % transition to annular with increasing outer radius
        disp('From sirkular to annular: F-matrix');
        F = FAnnularSirkular(N,a1,a2,b1,b2,phi_n,phi_m,r1,w1);
    elseif (b2 < b1 || b2 == b1)
        % transition to annular with decreasing outer radius: V-matrix
        isV = true;
        disp('From sirkular to annular: V-matrix');
        F = FAnnularSirkular(N,a2,a1,b2,b1,phi_m,phi_n,r1,w1);
    end

elseif (a2 == 0 && a1 ~= 0)
    % annular to circular
    % find F-matrix F(a->c) for annular to circular, constant b
    % check subconfig, and mulitply F(a->c) by F or V^-1-matrix if b changes
    if (b2 > b1 || b2 == b1)
        % transition to circular with increasing outer radius
        disp('From annular to sirkular: F-matrix');
        F = FAnnularSirkular(N,a1,a2,b1,b2,phi_n,phi_m,r1,w1);
    elseif (b2 < b1)
        % transition to circular with decreasing outer radius: V-matrix
        isV = true;
        disp('From annular to sirkular: V-matrix');
        F = FAnnularSirkular(N,a2,a1,b2,b1,phi_m,phi_n,r1,w1);
    end;

elseif(a1 == 0 && a2 == 0 && b2 > b1)
    % constant inner radius = 0, increasing outer radius : F-matrix
    disp('From sirkular to sirkular, increasing outer radius: F-matrix');
    F = FSirkularSirkular(N,b1,b2,phi_n);
elseif ((a1==a2) && (b2 > b1))
```

---

```

% constant inner radius, increasing outer radius : F-matrix
disp('constant inner radius, increasing outer radius : F-matrix Analytic');
%F = FAnnularAnnular(N,a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m,r1,w1);
F = FAnnularAnnularAnalytic(N,a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m);
elseif ((a1==a2) && (b2 < b1))
disp('constant inner radius, decreasing outer radius : V-matrix');
% we can find the inverse of this V-matrix as an F-matrix going in the
% other direction. Just keep track of isV
isV = true;
[F, dummy] = makeFandV(a2,b2,a1,b1,phi_m, phi_n,N);
elseif ((a1 > a2) && (b2 == b1))
% constant outer radius, decreasing inner radius : F-matrix Analytic
% F = FAnnularAnnular(N,a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m,r1,w1);
F = FAnnularAnnularAnalytic(N,a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m);
elseif ((a1 < a2) && (b2 == b1))
disp('constant outer radius, increasing inner radius : V-matrix');
% we can find the inverse of this V-matrix as an F-matrix going in the
% other direction. Just keep track of isV
isV = true;
[F dummy] = makeFandV(a2,b1,a1,b2,phi_m, phi_n,N);
elseif ((a1 > a2) && (b1 < b2))
% inner radius decreases, outer radius increases : one F-matrix
%F = FAnnularAnnular(N,a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m,r1,w1);
F = FAnnularAnnularAnalytic(N,a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m);
elseif ((a1 < a2) && (b2 < b1))
% inner radius increases, outer radius decreases : one V-matrix
% we can find the inverse of this V-matrix as an F-matrix going in the
% other direction. Just keep track of isV
isV = true;
[F dummy] = makeFandV(a2,b2,a1,b1,phi_m, phi_n,N);
elseif ((a1 < a2) && (b1 < b2))
% inner radius increases, outer radius increases : F-matrix for b,
% V-matrix for a.
% find gamma for intermediate cases
% first, increasing a
gammab = SS_ZerosBessel(b1/a2,N); %gamma for a1.b1 -> a2.b1
[Va dummy] = makeFandV(a1,b1,a2,b1,phi_m, gammab,N);
% second, increasing b, a2.b1 -> a2.b2
[Fb dummy] = makeFandV(a2,b1,a2,b2,gammab, phi_n,N);
F = Va\Fb;
elseif ((a1 > a2) && (b1 > b2))
% inner radius decreases, outer radius decreases : V-matrix for b,
% F-matrix for a
% first, decreasing b
gammab = SS_ZerosBessel(b2/a1,N); %gamma for a1.b1 -> a1.b2
[Vb dummy] = makeFandV(a1,b1,a1,b2,phi_m, gammab,N);
% second, decreasing a, a1.b2 -> a2.b2
[Fa dummy] = makeFandV(a1,b2,a2,b2,gammab, phi_n,N);
F = Vb\Fa;

% probably ends here for no change...
% create identity matrix
else
F = eye(N);
disp('Didn not Change anything');
end;

```

---

---

## C.1.2 Prosjeksjon fra konsentrisk til konsentrisk rør

```
function [ Fmat ] = FAnnularAnnularAnalytic(N,a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m)
    for n = 1:N
        for m = 1:N
            Fi = (2/(b1^2-a1^2))*IAnnularAnnular(a1,b1,a2,b2,phi_n(n),phi_m(m));
            Fmat(n,m)=Fi;
        end
    end

function [ I ] = IAnnularAnnularAnalytic(a1,b1,a2,b2,phi_n,phi_m)

    if((phi_n == 0) && (phi_m ==0))
        I = (1/2)*(b1^2-a1^2);
        N1 = NormAnalytic(phi_n,a1,b1);
        N2 = NormAnalytic(phi_m,a2,b2);
        I = I/(N1*N2);
    elseif(phi_n == 0 && phi_m ~=0)
        alpha = (phi_m/a2);
        I1 = makeIJJ0(b1,a1,alpha);
        I2 = (-besselj(1,phi_m)/bessely(1,phi_m))*besselj(0,0)*(b1*bessely(1,b1*alpha)-
        a1*bessely(1,a1*alpha))/(alpha);
        I = I1 + I2;
        N1 = NormAnalytic(phi_n,a1,b1);
        N2 = NormAnalytic(phi_m,a2,b2);
        I = I/(N1*N2);
    elseif(phi_m == 0 && phi_n ~=0)
        alpha = phi_n/a1;
        I1 = makeIJJ0(b1,a1,alpha);
        I2 = (-besselj(1,phi_n)/bessely(1,phi_n))*besselj(0,0)*(b1*bessely(1,b1*alpha)-
        a1*bessely(1,a1*alpha))/(alpha);
        I = I1 + I2;
        N1 = NormAnalytic(phi_n,a1,b1);
        N2 = NormAnalytic(phi_m,a2,b2);
        I = I/(N1*N2);
    else
        alpha = phi_n/a1;
        beta = phi_m/a2;
        I1 = makeIJJ(alpha,beta,b1) - makeIJJ(alpha,beta,a1);
        I2 = (-besselj(1,phi_m)bessely(1,phi_m))*(makeIJY(alpha,beta,b1)-
        makeIJY(alpha,beta,a1));
        I3 = (-besselj(1,phi_n)/bessely(1,phi_n))*(makeIJY(beta,alpha,b1)-
        makeIJY(beta,alpha,a1));
        I4 = (-besselj(1,phi_m)/bessely(1,phi_m))*(-besselj(1,phi_n)/bessely(1,phi_n))*
        (makeIYY(alpha,beta,b1)-makeIYY(alpha,beta,a1));
        I = I1 + I2 + I3 + I4;
        N1 = NormAnalytic(phi_n,a1,b1);
        N2 = NormAnalytic(phi_m,a2,b2);
        I = I/(N1*N2);
    end
end

function [ IJJ0 ] = makeIJJ0(b1,a1,alpha)
    IJJ0 = (b1*besselj(1,b1*alpha) - a1*besselj(1,a1*alpha))/alpha;
end
```

---

---

```

function [IJ0Y] = makeIJ0Y(b1,a1,alpha)
    IJ0Y = (b1*bessely(1,b1*alpha)-a1*bessely(1,a1*alpha)/alpha);
end

function [IJJ] = makeIJJ(alpha,beta, R) % R = integration limits
    IJJ = R*(alpha*besselj(1,R*alpha)*besselj(0,R*beta)-
        beta*besselj(0,R*alpha)*besselj(1,R*beta))/(alpha^2-beta^2);
end

function [IJY] = makeIJY(alpha,beta,R)
    IJY = R*(alpha*besselj(1,alpha*R)*bessely(0,beta*R)-
        beta*besselj(0,R*alpha)*bessely(1,R*beta))/(alpha^2-beta^2);
end

function [IYY] = makeIYY(alpha,beta,R)
    IYY = R*(alpha*bessely(1,alpha*R)*bessely(0,beta*R)-
        beta*bessely(0,alpha*R)*bessely(1,beta*R))/(alpha^2-beta^2);
end

function [ Norm ] = NormAnalytic( gamma, a, b)

S = 1/(b^2-a^2);
beta=b/a;
gammaa=gamma/a;
    if (gamma==0)
        ledd1 = beta^2*(besselj(0,gamma*beta)^2+besselj(1,gamma*beta)^2);
        ledd2 = besselj(0,gamma)^2+besselj(1,gamma)^2;
        N = a^2*S*(ledd1-ledd2);
        Norm = sqrt(N);
    else
        ledd1 = 1/(2*bessely(1,gamma)^2)*b^2*(besselj(1,gamma)^2
            *(bessely(0,gamma*beta)^2+bessely(1,gamma*beta)^2)-
            2*besselj(1,gamma)*bessely(1,gamma)*(besselj(0,gamma*beta)*bessely(0,gamma*beta)
            +besselj(1,gamma*beta)*bessely(1,gamma*beta)) +
            bessely(1,gamma)^2*(besselj(0,gamma*beta)^2+besselj(1,gamma*beta)^2));
        ledd2 = 1/(2*bessely(1,gamma)^2)*a^2*(besselj(1,gamma)^2*(bessely(0,gamma)^2
            +bessely(1,gamma)^2)-2*besselj(1,gamma)*bessely(1,gamma)*(besselj(0,gamma)*
            bessely(0,gamma)+besselj(1,gamma)*bessely(1,gamma)) +
            bessely(1,gamma)^2*(besselj(0,gamma)^2+besselj(1,gamma)^2));
        N = (2*S)*(ledd1-ledd2);
        Norm = sqrt(N);
    end
end
end

```

---

---

### C.1.3 Prosjeksjon fra konsentrisk til sirkulært rør

```
function [ Fmat ] = FAnnularSirkularAnalytic(N,a1,a2,b1,b2,phi_n,phi_m)
    for n = 1:N
        for m = 1:N
            normSirkular = besselj(0,phi_m(m));
            normAnnular = NormAnalytic(phi_n(n), a1, b1);
            konst = 2/(b1^2-a1^2);

            I = IAnnularSirkular( b1,a1,b2,phi_n(n),phi_m(m))
            Fi = konst*(1/(normSirkular*normAnnular))*I;
            Fmat(n,m) = Fi;
        end
    end

end

function [I] = IAnnularSirkular( b1,a1,b2,phi_n,phi_m)

    if(phi_n == 0)
        I = makeI0(b1,b1,b2,a1,phi_n,phi_m) -makeI0(a1,b1,b2,a1,phi_n, phi_m);
    else
        I1 = (makeI1(a1,b1,b2,a1,phi_n, phi_m) -
            makeI1(b1,b1,b2,a1,phi_n, phi_m))/((phi_n/a1)^2-(phi_m/b2)^2);
        I2 = (-besselj(1,phi_n)/bessely(1,phi_n))*(makeI2(b1,b1,b2,a1,phi_n, phi_m) -
            makeI2(a1,b1,b2,a1,phi_n, phi_m))/((phi_n/a1)^2-(phi_m/b2)^2);
        I = I1 + I2;
    end

end

function [I1] = makeI1(R,b1,b2,a1,phi_n, phi_m)
    I1 = (phi_m/b2)*R*besselj(0,(phi_n/a1)*R)*(-besselj(1,(phi_m/b2)*R)+
        (phi_n/a1)*R*besselj(1,(phi_n/a1)*R)*besselj(0,(phi_m/b2)*R));
end

function [I2] = makeI2(R,b1,b2,a1,phi_n, phi_m)
    I2 = R*((phi_n/a1)*bessely(1,(phi_n/a1)*R)*besselj(0,(phi_m/b2)*R)-
        (phi_m/b2)*bessely(0,(phi_n/a1)*R)*besselj(1,(phi_m/b2)*R));
end

function [I0] = makeI0(R,b1,b2,a1,phi_n, phi_m)
    I0 = a1*b2*R*(phi_m*a1*besselj(1,phi_m/b2 *R)*besselj(0,phi_n/a1 *R)-
        b2*phi_n*besselj(0,phi_m/b2*R)*besselj(1,phi_n/a1*R))/(phi_m^2*a1^2-b2^2*phi_n^2);
end
```

---

## C.1.4 Nullpunkter i konsentrisk rør

```
function [ roots ] = ZerosBessel( lambda, N)

    s=[1:1:N*10+1];
    roots = zeros(N,1);

    %initial bracketing using midpoints between approximate zeros.
    % not very efficient, perhaps
    nu = 1;
    my = 4*nu^2;
    beta = (s.*pi)./(lambda-1);
    p = (my-1)/(8*lambda);
    q = ((my-1)*(my-25)*(lambda^3-1))/(6*(4*lambda)^3*(lambda-1));
    r = ((my-1)*(my^2-114*my+1073)*(lambda^5-1))/(5*(4*lambda)^5*(lambda-1));

    z = beta + p./beta + (q - p^2)./(beta.^3) + (r-4*p*q+2*p^3)./beta.^5;
    z1= [0 z];
    z1 = sort(z1);

    zbrac = (z1(2:N+2)-z1(1:N+1))/2 + z1(1:N+1);
    %
    for ir = 1:N-1
        if ir < 20 % use more accurate method for lower orders
            zn = findzero(lambda,ir,zbrac(ir),zbrac(ir+1));
        else
            % for higher orders, the approximation error is less than 1e-10
            zn = z1(ir+1);
        end;

        roots(ir+1) = zn;
    end;

    %    roots-z1(1:N) '

% find zero using false position method from Numerical Recipes
function z = findzero(lambda,n,x1,x2)

f1 = BesselCrossproduct(x1,lambda);
fh = BesselCrossproduct(x2,lambda);
if (f1*fh > 0.0)
    error('Root must be bracketed by x1 and x2');
end;
if (f1 < 0.0)
    xl = x1;
    xh = x2;
else
    xl = x2;
    xh = x1;
    swap = f1;
    f1 = fh;
    fh = swap;
end;
dx = xh-xl;
% false position loop
```



---

```

MAXIT=30;
tol = 1e-12;
for j=1:MAXIT
    rtf = xl+dx*f1/(f1-fh);
    f = BesselCrossproduct(rtf,lambda);
    if f<0.0
        del = xl-rtf;
        xl = rtf;
        f1 = f;
    else
        del = xh-rtf;
        xh = rtf;
        fh = f;
    end;
    dx = xh-xl;
    if ((abs(del) < tol) || (f == 0.0))
        z = rtf;
        return;
    end;
end;
error('Too many iterations');

function rcpv = BesselCrossproduct(z,lambda)
rcpv = besselj(1,z).*bessely(1,lambda*z) - besselj(1,lambda*z).*bessely(1,z);

```