

# Asymmetriske Energivariasjoner i Turbulens

Invers statistikk metode for beskrivelse av asymmetrisk energivariasjon

**Mailinn Blandkjenn Mersland**

Master i fysikk og matematikk  
Oppgaven levert: Juni 2011  
Hovedveileder: Ingve Simonsen, IFY





Faculty of Natural Sciences  
and Technology  
Department of Physics

MASTEROPPGAVE

---

# Asymmetriske Energivariasjoner i Turbulens

*- Invers statistikk metode for beskrivelse av asymmetrisk  
energivariasjon.*

---

Mailinn Blandkjenn MERSLAND

*Veileder: Ingve SIMONSEN*

Juni 2011



## Sammendrag

Energivariasjon i fullt utviklet turbulens er studert. I en tidsserie for turbulens energi er det oppdaget en asymmetri mellom positive og negative energiendringer. Invers statistikk metode gir en mulighet til å studere denne asymmetrien nærmere.

For analyse i denne oppgaven er turbulent strømning generert ved bruk av GOY skallmodell. Skallmodellen er en tilnærmingmodell til Navier-Stokes likninger for strømningens bevegelse. Modellen er tidligere vist å gi realistiske verdier for energi og hastighet for en turbulens strømning.

Ved bruk av forward statistikk og invers statistikk på turbulens energi er det funnet en asymmetri i energiendringen. Det er vist at en negativ energivariasjon høyst sannsynlig inntreffer før en positiv energivariasjon av samme størrelse. Tidsforskjellen er empirisk funnet til å følge sammenhengen  $\delta\tau_{\delta E} \sim \delta E^{0,749}$ , hvor  $\tau_{\delta E}$  er forventningstiden for en energivariasjon  $\delta E$ . I tillegg er det funnet en positiv trend i tidsserien for energi, som sier at energiendring etter korte tidsintervall høyst sannsynlig er positiv. Det er gjort et forsøk på å beskrive denne asymmetrien og opprinnelsen av dette fenomenet er drøftet.



# Forord

Masteroppgaven er gjennomført ved instituttet for fysikk på NTNU i perioden februar til juli 2011, og markerer avslutningen av min mastergrad i teknisk fysikk.

Arbeidet med rapporten har vært interessant og lærerikt med ny innsikt i turbulens. Oppgaven fikk jeg som et forslag fra min veileder Ingve Simonsen, som oppdaget det asymmetriske fenomenet sammen med sin kollega og forsker Mogens H. Jensen.

Jeg ønsker å takke Ingve Simonsen som ga meg muligheten til å arbeide med en så spennende oppgave og for god støtte og veiledning underveis i arbeidet. Jeg ønsker også å takke Simonsen for å være tålmodig og til å ta seg god tid til å oppklare problemer som har oppstått underveis.

Jeg ønsker også å takke Mogens H. Jensen for sin artikkel om invers statistikk som har vært inspirasjonen til denne rapporten. Jeg vil også takke Mogens for å bidra med sine kalkuleringer av GOY modellen for fullt utviklet turbulens som har vært min kilde til datasett i denne oppgaven.

Til slutt ønsker jeg å takke familie og venner for god støtte i løpet av studietiden. Jeg ønsker spesielt å takke mine medstudenter for mange gode stunder i tiden på NTNU. Den siste tiden på kontoret har vært motiverende og bestått av gode samtaler, oppmuntrende ord og ikke minst sang, dans og kaffi. Det har vært en uforglemmelig tid, som jeg kommer til å se tilbake på med et smil.

Trondheim, 1. juli 2011

Mailinn Blandkjenn Mersland





# Innhold

<b>Figurer</b>	<b>8</b>
<b>Tabeller</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduksjon</b>	<b>11</b>
<b>2 Teori</b>	<b>15</b>
2.1 Væskedynamikk og turbulens . . . . .	15
2.1.1 Navier-Stokes likninger . . . . .	15
2.1.2 Reynolds tall . . . . .	16
2.1.3 Rotasjoner og virvelbevegelser . . . . .	17
2.1.4 Turbulent viskositet . . . . .	19
2.1.5 Turbulent diffusivitet . . . . .	20
2.1.6 Energikaskade og dissipasjon . . . . .	21
2.1.7 Lengdeskalaer . . . . .	21
2.1.8 Kolmogorovs teori fra 1941 . . . . .	23
2.1.9 Strukturfunksjonen for hastighetsfeltet . . . . .	24
2.2 Turbulensmodell . . . . .	25
2.2.1 GOY skallmodell . . . . .	26
2.3 Hurst-eksponent . . . . .	27
<b>3 Invers statistikk og asymmetri</b>	<b>30</b>
3.1 Invers statistikk . . . . .	30
3.2 Asymmetri i turbulens . . . . .	34
3.2.1 Forward statistikk . . . . .	35
3.2.2 Invers statistikk for tid . . . . .	36
3.2.3 Beregning av forventningsverdien . . . . .	37
<b>4 Turbulensmodellen</b>	<b>39</b>
4.1 Energi . . . . .	41

## INNHOOLD

---

<b>5</b>	<b>Analyse og resultater</b>	<b>43</b>
5.1	Asymmetri funnet ved forward statistikk . . . . .	43
5.1.1	Strukturfunksjonen for energi og Hurst-eksponenten for intensitetspekteret . . . . .	44
5.2	Asymmetri funnet ved invers statistikk . . . . .	45
5.2.1	Forventningstider $\tau_{\delta E}^q$ av første orden . . . . .	53
5.2.2	Forventningstiden $\tau_{\delta E}^q$ av høyere orden . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliografi</b>	<b>63</b>

# Figurer

1.1	Illustrasjon av drakraft på en golfball med og uten fordypninger.	12
1.2	En strømvirvel ved enden av en flyvinge. . . . .	14
2.1	Illustrasjon av overgangen fra laminær strømning til turbulens på en plan flate. . . . .	18
2.2	Illustrasjon av eddies i utvikling ut fra et bevegende objekt. .	19
2.3	En illustrasjon av hvordan skallmodellen med 32 skall skalerer i forhold til Kolmogorovs lov. . . . .	28
2.4	En illustrasjon av hvordan skallmodellen med 32, 16, 8, 4 og 2 skall skalerer i forhold til hverandre. . . . .	28
3.1	Figur som illustrerer strukturfunksjonen for hastighet av første orden, strukturfunksjonen for lengde av første orden og strukturfunksjonen for hastighet av åttende orden. . . . .	32
3.2	Eksponentene for strukturfunksjonen for hastighet, $\zeta_q$ , og eksponentene for strukturfunksjonen for avstand $\delta_q$ . . . . .	33
3.3	Sannsynlighetsfordelingsfunksjonen for tiden $t$ gitt for en energidifferanse på $\delta E = 0,051$ . Forventningsverdien, $\tau_{\delta E}$ , er funnet ved hjelp av polynomisk tilnærming av femte grad. . . . .	38
4.1	Energien $E$ plottet for en tidsperiode på $50000\hat{e}_t$ . Variasjonen er absolutt . . . . .	40
4.2	Hastigheten, $u_n$ plottet for en tidsperiode på $50000\hat{e}_t$ . Variasjonen er absolutt. . . . .	40
4.3	Energivariasjon for $5000\hat{e}_t$ . Variasjonen er beskrevet som relativ energiendring . . . . .	42
5.1	Sannsynlighetsfordelingsfunksjonen for energiendringen, $P(\delta E(t) t)$ , for $t = 1, 6, 11, 16, 21$ og $26$ . . . . .	44
5.2	Strukturfunksjonen for energi av første orden. Energidifferansen følger tiden $t$ i $\alpha_1 = 0,833$ orden. Forventningsverdien til strukturfunksjonen for energi er beregnet for $0\hat{e}_t < t < 29\hat{e}_t$ . .	45

## FIGURER

---

5.3	Fouriertransformasjon av energiutviklingen i turbulens. Fra likning (2.24) blir Hurst-eksponenten $H = 0,83$ . . . . .	46
5.4	Sannsynlighetsfordelingen for ventetiden $P(t(\delta E) \delta E)$ for energiendringene $\delta E = 0,001, 0,011, 0,021, 0,031$ og $0,041$ . . . . .	47
5.5	Sannsynlighetsfordelingen til ventetiden $P(t(\delta E) \delta E)$ for en energiendring på $\pm\delta E = 0,049$ . . . . .	47
5.6	Invers statistikk for tid - Sannsynlighetsfordelingen for energidifferanser på $\delta E = 0,001, 0,061$ og $0,2$ . . . . .	49
5.7	Invers statistikk for tid - Sannsynlighetsfordelingen for energiendringen $\delta E = 0,001$ . . . . .	50
5.8	Sannsynlighetsfordelingfunksjonen for positive energidifferanser. Den stiplede linjen har stigningstall $-1,283$ . . . . .	50
5.9	Sannsynlighetsfordelingfunksjonen for negative energidifferanser. Den stiplede linjen har stigningstall $-1,257$ . . . . .	51
5.10	Sannsynlighetsfordelingen i tid for en relativ energiøkning på $\Delta E = 0,01\%$ . Funksjonen er framstilt logaritmisk. . . . .	52
5.11	<i>Øverst</i> : Strukturfunksjonen til tid for energiendringer mellom $0,001 < \pm\delta E < 0,2$ . Figuren viser et stigningstall lik $\beta_1^+ = 0,972$ og $\beta_1^- = 1,317$ . <i>Nederst</i> : Differansen mellom strukturfunksjonen for tid for positive og negative energidifferanser $\delta\tau_{\delta E}$ . Linjen på figuren har stigningstall, $\beta_1^{\delta\tau} = 0,749$ . . . . .	54
5.12	Illustrasjon av hvordan forventningstiden, $\tau_{\delta E}^q$ , for de åtte første ordene av $q$ , følger en potenslov for energidifferanser mellom $0,001 < \delta E < 0,2$ . De stiplede linjene er en tilpasning utført med "LeastSquare"-metode for en potensfunksjon og gir eksponentene $\beta_q^+$ . . . . .	56
5.13	Plot av de skalerende eksponenter for forventningstiden $\tau_{\delta E}$ til positiv energiendring, $\beta_q^+$ og negativ energiendring $\beta_q^-$ . . . . .	57

# Tabeller

3.1	Verdier for de skalerende eksponenter for strukturfunksjonen for hastighet, $\zeta_q$ , og strukturfunksjonen for lengde, $\delta_q$ , med utvalgte feilberegninger. . . . .	33
4.1	Tilgjengelig data generert fra skallmodellen for $N = 27$ skall. .	39
5.1	Verdier for de skalerende eksponenter for forventningstiden $\tau_{\delta E}$ til positiv energiendring, $\beta_q^+$ og negativ energiendring $\beta_q^-$ . . . .	56



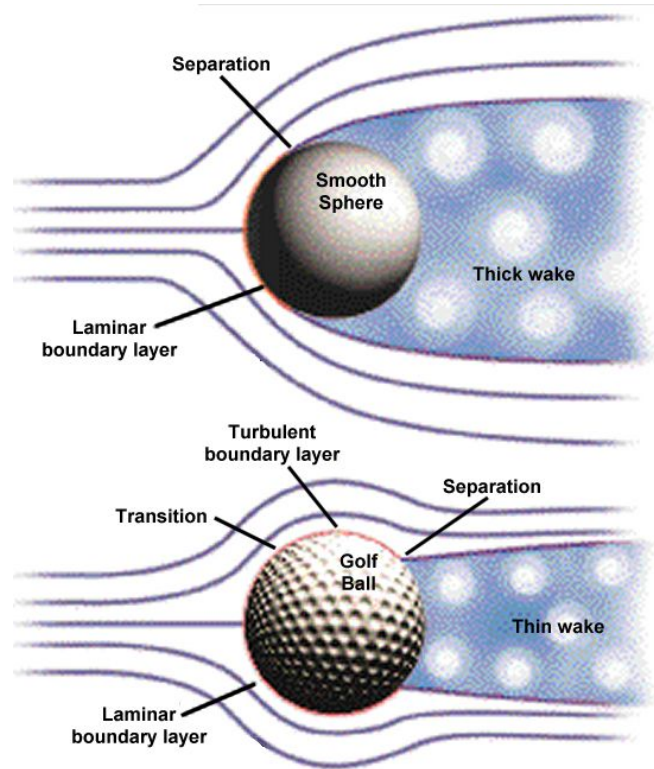
# Kapittel 1

## Introduksjon

Turbulens er et begrep som er veletablert både i dagligtalen og i avansert fysikk. Når noe er kaotisk og ukontrollerbart sies det gjerne at omgivelsene er turbulente. I væskedynamikk kan strømmingen være laminær, turbulent, eller et sted i mellom. Turbulente strømninger inkluderer lav fartsdiffusjon, høy fartskonveksjon og rask variasjon i trykk og hastighet. En laminær strømning er stabil med forutsigbare variabler, som kan være nyttig i flere situasjoner. Ved transportering av væske er det ofte ønskelig at overføringen skal forgå mest mulig som laminært. Da oppnås en raskere overgang og mindre usikkerhet og slitasje på omgivelsene. I andre situasjoner kan det være nødvendig med turbulens. Et eksempel på turbulens er strømmingen rundt en golfball (se figur 1.1). Her kommer turbulensen til fordel med å skape en mer stabil retning og mindre friksjon fra luften.

Turbulens blir sett på som et av fysikkens store mysterier på linje med relativitetsteorien og kvantefysikken. Det ligger i menneskets natur å ønske og forstå verdens fenomener og mysterier. Slik er det også i det klassiske fenomenet væskedynamikk. Det vil være store fordeler involvert om all form for bevegelse i naturen kan beskrives og predikeres. Slik det er i dag er turbulens en stor hindring for denne viten. Så fort en partikkel har turbulente bevegelser, vil det kreve en enorm mengde kalkuleringer for å kunne beregne dens videre bane.

En fullstendig beskrivelse av hvordan partikler i en strømning beveger seg internt, kan uttrykkes ved Navier-Stokes likninger sammen med kontinuitetslikningen. I følge dagens kunnskap vil modellen også gjelde når partiklene beveger seg i et turbulent system. Det er mangfoldet av variabler og tall i høye potenser som setter begrensninger for en slik kalkulering. For en strømning i turbulent tilstand fins det derfor egne og forenklete modeller som kan



Figur 1.1: *Øverst*: En golfball med glatt overflate. Den glatte overflaten gjør at strømmingen blir laminær på framsiden av ballen og separasjonspunktet er der den laminære strømmingen separerer seg fra overflaten til golfballen. Bak separasjonspunktet vil strømmingen være turbulent og denne turbulenshalen, laget av objekter plassert i laminær strømming, blir kalt wake-effekten. Et wake-område har turbulent strømming og et lavt trykk i forhold til laminær strømming. Et tidlig separasjonspunkt vil føre til et bredt wake-område og trykkforskjellen mellom front og bakside vil være stor. *Nederst*: En golfball med små fordypninger i overflaten. Fordypningene genererer en liten turbulent grenseoverflate rundt ballen. Turbulensoverflaten vil overføre energi til den laminære strømmingen som fører til at separasjonspunktet forflyttes lenger bak på ballen. Dette gir et smalere wake-område og en mindre resulterende trykkforskjell mellom front og bakside. Golfballen får mindre motstand og en mer stabil bane. Resultatet er et lengre og mer forutsigbart slag. Figur hentet fra aerospace.org [1].



---

beskrive utviklingen av turbulens.

En type turbulensmodeller er under kategorien skallmodell og er en forenkling av Navier-Stokes likninger for bevegelsesmengde. Skallmodellen beskriver turbulens som en gruppe bølgefunksjoner i Fourier-rommet. Hver likning, eller "skall", har en bølgefunksjon med en tilhørende hastighetskomponent. En versjon av skallmodellen ble utviklet av Gledzer, Ohkitani og Yamada i 1989 og blir i dag kalt GOY-modellen [2].

Siden turbulens er vanskelig å beskrive deterministisk blir turbulens ofte heller beskrevet med statistiske analyser. Turbulens kan beskrives ved å ta utgangspunkt i to punkter i den turbulente strømmingen. I posisjonen måles hastighetsvektor, trykk, temperatur og/eller annen informasjon. En sammenlikning mellom tilstanden i posisjonene, som funksjon av avstanden mellom dem, kan gi informasjonsrik sammenheng i turbulent strømming. Kolmogorovs teori fra 1941 beskriver en strukturfunksjon for hastighet mellom to posisjoner [3]. Strukturfunksjonen beskriver den forventede hastighetsdifferansen som en funksjon av avstanden mellom posisjonene,  $l$ . I følge Kolmogorovs teori vil en slik hastighetsvariasjon følge en potenslov avhenging av avstanden,  $l$ , i turbulent strømming for små lengdeskalaer.

Den turbulente hastigheten - og følgelig energien, varierer hurtig i tid og avstand. Å finne systemer i fluktuasjonen har vært målet i fluiddynamikken i lang tid. Følger den turbulente energiutviklingen en systematisk utvikling? Eller er neste utvikling helt uavhengig av tidligere bevegelser? Vil energien i en posisjon øke saktere enn den vil synke? Dette er spørsmål som står sentralt i denne oppgaven. Spesielt er det oppdaget en asymmetri i tiden energien bruker på å øke en differanse i forhold til tiden det tar for at samme energimengde skal frigjøres. Det er denne asymmetrien som er motivasjonen for oppgaven og det er et ønske om å beskrive asymmetrien som en funksjon avhenging av energiendringen. Det er også et ønske om å forstå hvorfor en slik asymmetri eksisterer. Det vil bli gjort et forsøk på å forstå hva som ligger bak asymmetrien og hvilke naturkrefter som spiller inn og gjør et slikt fenomen uunngåelig.

Figur 1.2 er et fargerikt bilde hentet fra NASA bildearkiv [4] og illustrerer en aerodynamisk strømvirvel, eller turbulens, som oppstår ved enden av en flyvinge.



Figur 1.2: En strømvirvel ved enden av en flyvinge. Bilde hentet fra NASA bildearkiv [4]

# Kapittel 2

## Teori

Emnene i dette kapitlet tar for seg noen av egenskapene til turbulens som er relevante for forståelsen av naturen til et turbulent system, og hvilke parameter som blir brukt for å beskrive systemet. En detaljert gjennomgåelse av utregningene er ikke tatt med, men de viktigste aspektene som ligger bak er derimot beskrevet. En innføring i hvordan turbulens energi kan modelleres til en tidsserie er også inkludert.

### 2.1 Væskedynamikk og turbulens

I en turbulent strømning øker partiklenes hastighet i forhold til hverandre, som igjen øker frekvensen i endring av energi og bevegelsesmengde. Friksjonskoeffisienten blir større, samtidig som varmeoverføringen øker. Turbulent strømning har en hurtig hastighetsvariasjon i tid og rom og en høy energitett-  
het. I en strømning hvor den kinetiske energien forsvinner bort eller overstyrer av de molekylære viskøse kreftene, vil det oppstå en laminær strømning. I laminær strømning er det utviklet enkle matematiske modeller for å predikere strømningens bevegelsesmønster. Samme prediksjon i fullt utviklet turbulens krever i dag enorme mengder prosessorkraft for kalkulering og er i de fleste situasjoner en praktisk umulig oppgave.

#### 2.1.1 Navier-Stokes likninger

Navier-Stokes likninger beskriver væskedynamikkens bevegelse. Likningene har rot i Newtons andre lov, som i væskedynamikk overføres til bevaring av bevegelsesmengde for et parti væske. I et treghetssystem vil de generelle

likningene for væskedynamikk være [5]

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

Her beskriver  $\mathbf{v}$  væskens hastighet,  $\rho$  beskriver tettheten,  $p$  trykkreftene,  $\mathbb{T}$  beskriver stresstensoren og  $\mathbf{f}$  beskriver de innvendige kreftene som virker på væsken.  $\nabla$  er nablaoperatoren. Andre ledd på venstre side av likhetstegnet i Navier-Stokes likningene beskriver konvektiv akselerasjon. Dette er akserelasjon som følger av romlige forandringer. Den konvekktive akserelasjonen kan skrives om til

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \quad (2.2)$$

I denne omskrivningen kommer *vorticity* fram,  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ , som beskriver flytens evne til å danne sirkulasjoner.

For å benytte Navier-Stokes likninger er det ofte nødvendig å inkludere massebevarelsen i likningsettet. Massebevarelsen kan utledes fra bevaringsloven som generelt gir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3)$$

For en komplett beskrivelse av turbulent strømning må ytterligere informasjon tas hensyn til. Grensebetingelser er nødvendig å inkludere i beregninger for et system som påvirkes av dette.

### 2.1.2 Reynolds tall

En beskrivende parameter for strømning er Reynolds tall introdusert av George Gabriel Stokes i 1851 [6]. Reynolds tall er et dimensjonløst tall som beskriver forholdet mellom de interne kreftene og de viskøse kreftene som virker på væsken og hvilken av disse kreftene som dominerer for gitte betingelser.

Reynolds tall kan bestemmes i situasjoner hvor en væske er i bevegelse i forhold til en overflate.

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \quad (2.4)$$

Her er  $V[m/s]$  hastigheten til væsken relativ til objektet,  $L[m]$  er den karakteristiske lineære dimensjonen til strømmingen (for strømming i et rør vil denne være lik diameteren av røret).  $\mu[kg/ms]$  Er den dynamiske viskositeten til væsken,  $\nu[\mu/\rho]$  er den kinematiske viskositeten og  $\rho[kg/m^3]$  er væskens tetthet.

Turbulent strømming oppstår når væskens interne krefter er dominerende. For Reynolds tall gjenspeiler dette høye verdier. Strømninger i rør er ustabile og kan gå over i fullt utviklet turbulens for Reynolds tall større enn  $Re_{crit} = 4000$ . Laminær strømming opptrer gjerne for Reynolds tall lavere enn  $Re_{tr} = 2100$ . Verdier mellom  $2100 < Re < 4000$  er en overgangssone kalt laminær-turbulent overgang [5].

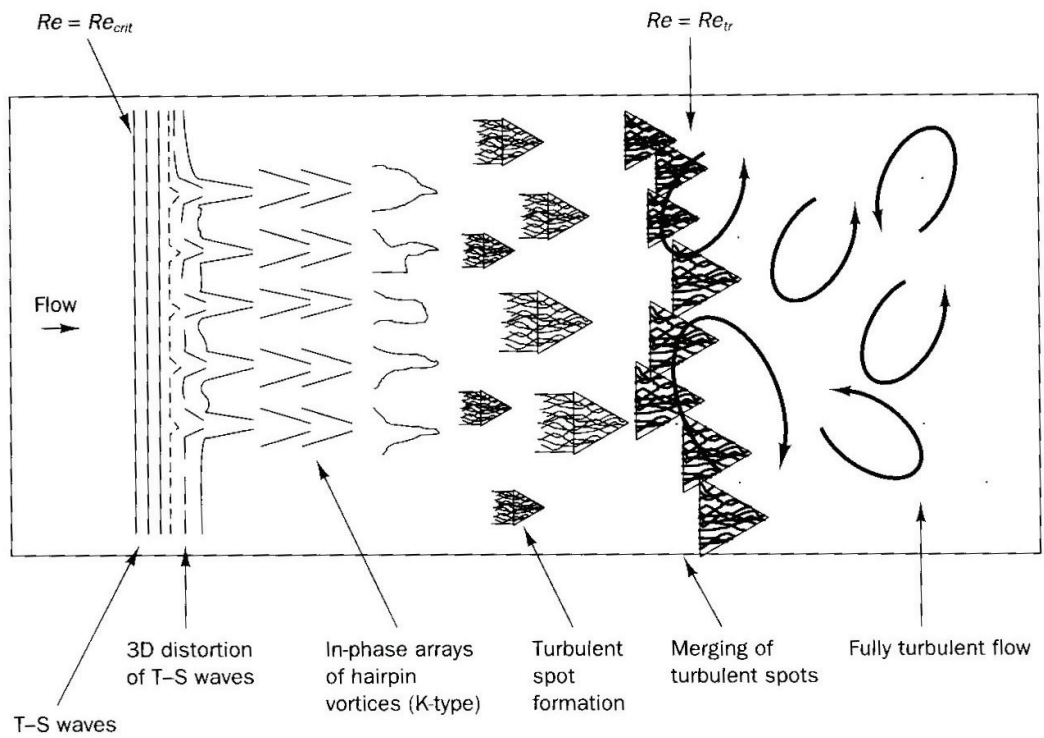
Overgangen mellom fullt utviklet laminær strømming og fullt utviklet turbulens er ikke absolutt. Når en laminær strømming kommer opp mot et Reynolds tall lik,  $Re_{crit}$ , vil strømmingen bli ustabil og små irregulareteter kan eskalere. I overgangen fra laminær til turbulent strømming oppstår det virvler i forskjellige lengdeskalaer. Virvlene interfererer med hverandre og kan skape større virvler. Motstanden fra grenseflatens friksjon øker med de turbulente bevegelsene som kan resultere i at grenseflatene forflyttes. En slik forandring i grunnbetingelsene kan føre til en lavere total motstand for strømmingen. Hvis Reynolds tall fortsetter å øke opp mot  $Re_{tr}$  vil strømmingen være fullt utviklet turbulens. En illustrasjon av denne overgangen vises i figur 2.1.

En overgangssone oppstår ikke utelukkende for Reynolds tall mellom 2100 og 4000, men kan oppstå i situasjoner hvor man sakte øker objektets størrelse eller når væskens viskositet gradvis reduseres eller når tettheten til væsken øker. Mange modeller for turbulens overser slike overgangssoner, noe som gjør kalkuleringen av fullt utviklet turbulens mindre nøyaktig.

### 2.1.3 Rotasjoner og virvelbevegelser

Virvelbevegelser ( $Vorticitys = \omega$ ) i en strømming er krummet hastighetsfelt og beskriver væskens tendens til å oppnå spinn eller sirkulasjoner. Virvelbevegelse  $\omega$  er beskrevet av sirkulasjonen  $\Gamma$  i grensesjiktet rundt området med areal  $A$ . For turbulens er virvelbevegelsen i væsken forskjellig fra null. Dette vil si at væsken har en sterk mekanisme for å danne tredimensjonale virvler. Denne egenskapen blir også kalt "Vortex Streching"[8].

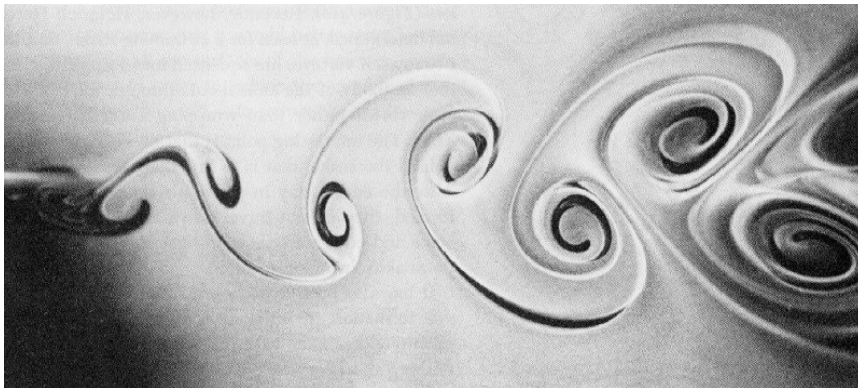
$$\omega = \frac{d\Gamma}{dA} \tag{2.5}$$



Figur 2.1: Illustrasjon av overgangen fra laminær strømning til turbulens på en plan flate. Figur hentet fra Versteeg [7].

Denne væskeegenskapen er grunnleggende for kjernemekanismen slik at energikaskaden kan etablere strukturfunksjonen (omtalt i kapittel 2.1.9). Når "Vortex Stretching" virker sammen med volumbevarelse av væsken vil dette føre til en tynning av virvlene vinkelrett på retningen som "Vortex Stretching" virker. Dette fører til kortere radius på virvlene og sirkulasjoner i mindre lengdeskalaer enn tidligere. Prosessen vil fortsette til strukturene er tilstrekkelig små til at de viskøse kreftene dominerer over den kinetiske energien. Da vil energien omformes til varme. Dette er grunnen til at all turbulens er tre-dimensjonal og roterende.

Kolmogorov [3] beskrev den turbulente energikaskaden som en sammenstilling av eddies på flere lengdeskala. En eddy (se figur 2.2 for illustrasjon) er navnet gitt til en turbulent bevegelse innenfor et område  $l$ , og moderat sammenhengende innenfor  $l$ . Et område som inneholder en eddy av skala  $l$ , kan også inneholde eddies av mindre skala.



Figur 2.2: Illustrasjon av eddies i utvikling ut fra et bevegende objekt. Figur hentet fra Ian Alexander 1996-2005 [9].

### 2.1.4 Turbulent viskositet

Den turbulente viskositeten ble introdusert av Boussinesq [10] i 1877 som en modell for hvordan bevegelsesmengde blir overført ved turbulente eddies. I følge hypotesen er gjennomsnittsverdien av belastningen avhengig av Reynolds spenningsdeviator  $(-\rho \langle u_i u_j \rangle + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij})$  [5]. Hvor  $\delta_{ij}$  er Kroeniker-deltaen,  $k$

er turbulent kinetisk energi,  $u$  er hastigheten og  $\rho$  tettheten. Forholdet følger,

$$-\rho \langle u_i u_j \rangle + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = \mu_t \rho \left( \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

hvor den positive skalare verdien,  $\mu_t$ , er turbulens viskositet. Turbulent viskositet har også fått navnet eddyviskositet. I flere turbulente modeller er det blitt vanlig å ignorere eddies i liten skala og heller kalkulere dem i stor skala sammen med en eddyviskositet. Eddyviskositeten representerer da transporten og dissipasjonen av energi fra strømmingen i liten skala.

### 2.1.5 Turbulent diffusivitet

Turbulent diffusivitet er transport av masse, varme og bevegelsesenergi i et system grunnet et kaotisk og tilfeldig bevegelsesmønster [11]. En slik diffusivitet oppstår når en turbulent strømning oppnår kritiske verdier i forhold til "shear flow". I slike områder vil gradienten for konsentrasjon, tetthet og hastighet være bratt. Turbulent diffusjon er hurtigere enn molekylær diffusjon, og gjør den derfor viktig i situasjoner som involverer miksing av væsker.

Diffusjonen i en turbulent strømning blir gjerne beskrevet av en diffusjonskoeffisient. En slik koeffisient blir beregnet ved å sammenlikne den molekylære diffusiviteten og har derfor ingen absolutt fysisk mening, men er avhengig av strømningsforholdene. Den blir beregnet ved å se på forholdet mellom den molare flyten, den molekylære diffusiviteten og konsentrasjonen til væsken. Beregningen krever derfor en konsistent relasjon mellom de ulike egenskapene som spiller inn, noe som er vanskelig å forholde seg til i turbulens. En beregning av diffusjonskoeffisienten blir derfor kun en tilnærming. Det er likevel en enkel tilnærming for å oppnå en kvantitativ analyse av turbulens og det finnes flere modeller for å beregne diffusiviteten til en væske.

På grunn av vanskeligheten med å forutse turbulent bevegelse har det vært vanskelig å utvikle en konkret og fullt utviklet modell som kan brukes for diffusiviteten til en partikkel i alle turbulente systemer. Euler og Lagrangian [12] har beskrevet hver sin modell med et litt forskjellig utgangspunkt. Modellene analyserer statistikken for like partikler i turbulens. Løsningene på modellene resulterer i et påfallende likt uttrykk for å beregne konsentrasjonen for en type partikkel i et punkt i en kontinuerlig modell, gitt at variansen



i x-, y- og z-retning er relatert til Eddydiffusiviteten. [13]

$$\langle c(x, y, z) \rangle = \frac{q}{2\pi\sigma_y\sigma_z} \exp \left[ - \left( \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$\text{hvor } \sigma_y^2 = \frac{2K_{yy}x}{\bar{u}} \sigma_z^2 = \frac{2K_{zz}x}{\bar{u}}$$

hvor  $q$  beskriver partikkeltypens spredningsrate,  $u$  er hastigheten og  $\sigma_i^2$  beskriver invariansen i retning  $i$ .  $K_{jj}$  beskriver Eddydiffusiviteten.

### 2.1.6 Energikaskade og dissipasjon

For å opprettholde turbulens er det nødvendig med tilstrekkelig tilførsel av energi. Som det er beskrevet i avsnitt 2.1.3 vil virvelbevegelsene brytes opp og danne nye mindre virvelstrukturer. Når virvelbevegelsene bryter opp vil energien kaskade nedover i hierarkiet av virvler. En slik energi kaskade er tilnærmet friksjonsfri og den kinetiske energien blir overført omtrent i sin helhet til flere, men mindre virvelstrukturer. Den største andelen av den kinetiske energien i turbulens er bundet til virvelbevegelsene i store lengdeskalaer.

Virvlene fortsetter å dele seg til de viskøse kreftene begynner å virke på nivå med den kinetiske energien tilknyttet strukturen. Det er den viskøse skjærspenningen som bidrar til at de små virvelstrukturene blir omdannet til indre energi ved hjelp av dissipasjon. Denne prosessen skjer i Kolmogorovs lengdeskala (se avsnitt 2.1.7 for definisjon). En væskes dissipasjonsrate  $\epsilon$  kan bestemmes ved hjelp av sammenhengen [14],

$$\epsilon = C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad (2.8)$$

hvor  $C_\mu$  er en konstant avhenging av viskositeten,  $\mu$ , og har ofte verdi  $C_\mu = 0,09$ .  $k$  beskriver den turbulente energien og kan regnes ut ved hjelp av gjennomsnittlig hastighet og turbulent intensivitet.  $l$  er den turbulente lengdeskalaen.

### 2.1.7 Lengdeskalaer

Turbulens har forskjellige strukturer og metoder for energioverføring i forskjellige størrelsesordener av strukturen. Det er derfor vanlig å dele turbulens opp

## KAPITTEL 2. TEORI

---

i flere lengdeskalaer.  $L$  beskriver diameteren for de største strukturene, og  $\eta$  er lengdeskalaen beskrevet av Kolmogorov.

- Integral lengdeskala,  $\eta < r < L$

Dette er den største lengdeskalaen i spekteret. Virvelene i denne kategorien får energitilførsel fra den totale strømmingen og fra andre virvler i integral lengdeskala. I denne tilstanden finnes det stor variasjon i hastigheten og strukturene har en lav frekvens. Lengdeskalaen er begrenset av de fysiske omstendighetene. Det vil si, lengdeskalaen kan ikke være større enn den geografiske plassbegrensningen for strømmingen. Strømming i rør vil ha en maksimal lengdeskala lik rørdiameteren.

- Kolmogorovs lengdeskala  $r \simeq \eta$

Denne skalaen er den minste for strukturer som er drevet av kinetisk energi og som definerer overgangen til hvor de viskøse kreftene spiller inn i prosessen. I denne lengdeskalaen vil den viskøse spenningsenergien og den kinetiske energitilførselen være i balanse. Skalaen har en høy frekvens som fører til at væsken blir homogen. Lengden kan bestemmes ved å regne ut forholdet [15],

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (2.9)$$

hvor  $\eta$  er Kolmogorovs lengdeskala. Her beskriver  $\epsilon$  energidissipasjonen per masseenheter og  $\nu$  er den kinematiske viskositeten til væsken. En lengdeskala definert kun av væskens dissipasjon og viskositet vil gjøre turbulens bevegelse lik og uavhengig av omgivelser i denne lengden.

- Taylors mikroskala  $r < \eta$

I denne skalaen vil de viskøse kreftene virke inn på konstruksjonen av virvelstrømmene. Den kinetiske energien råder ikke lenger alene om å skape bevegelser og struktur i den turbulente strømmingen. Taylors skala brukes til å beskrive områder mellom Kolmogorovs skala og ned til hvor den kinetiske energien går over til varme på grunn av de viskøse kreftene.

- Dissipasjonsskalaen

Beskriver den minste lengdeskalaen hvor den turbulente kinetiske energien går over til varme.

### 2.1.8 Kolmogorovs teori fra 1941

Kolmogorovs teori sier at turbulens er bygget opp av eddies. Egenskapene til eddiene er avhengig av hvilken lengdeskala de eksisterer i. De største eddiene brytes opp i mindre eddier og overfører den kinetiske energien over til dem. Slik fortsetter de å bryte opp til de viskøse kreftene spiller inn og overfører den kinetiske energien til indre energi.

Kolmogorovs første hypotese sier at for høye Reynold tall og små lengdeskalaer er turbulent bevegelse isotrop - uavhengig av retning. Dette ville ikke gjelde for store lengdeskalaer,  $r \Rightarrow L$ , hvor strukturene naturlig nok er avhengig av de geometriske omgivelsene. Etersom eddiene deler seg opp og blir mindre, vil informasjon fra omgivelsene forsvinne og turbulent bevegelse som kun er avhengig av indre karakterer oppnås. Dette fører til at turbulent bevegelse er universell for små lengdeskala gitt at Reynolds tall er høyt nok.

Kolmogorovs andre hypotese sier at på Kolmogorovs lengdeskala vil turbulens kun avhenge av dissipasjonen  $\epsilon$  og viskositeten  $\mu$  ved høye Reynolds tall.

Den tredje hypotesen presentert av Kolmogorov gjelder for store lengdeskalaer hvor  $\eta < r < L$ . Her er eddystrukturene store i forhold til eddiene på Kolmogorovs lengdeskala. I denne skalaen blir den kinetiske energien stort sett overført ved energikaskade til mindre eddystrukturer fram til viskositeten spiller inn. Skalaen er dominert av eddies interne krefter mer enn viskositeten, og det er derfor grunn til å anta at viskositeten ikke spiller en sentral rolle på de dynamiske bevegelsene til væsken. Den tredje hypotesen sier derfor at for høye Reynold tall og lengdeskalaer mellom  $\eta < r < L$  vil de turbulente egenskapene kun være bestemt av lengdeskalaen  $r$  og energidissipasjonen  $\epsilon$ .

Måten den kinetiske energien er distribuert over alle lengdeskalaer er en fundamentalistisk framstilling av turbulens. For homogen turbulens er dette gjerne gjort ved *energisppektrumfunksjonen*  $E(k)$ . Her representerer  $k$  en bølgevektor som beskriver en frekvens i Fourier-representasjonen av hastighetsvektoren,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , for strømmingen.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int \int \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \quad (2.10)$$

Her er  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$  Fourier-framstillingen til hastighetsfeltet. Bølgetallet  $k$  som

korresponderer til lengdeskalaen  $r$ , har sammenheng  $k = \frac{2\pi}{r}$ .

$E(k)dk$  beskriver den kinetiske energien for alle Fourier-frekvenser med bølgetall innenfor  $k < |\mathbf{k}| < k + dk$ . Den totale kinetiske energien i systemet er gitt som,

$$E_{\text{totalkinetisk}} = \int_0^\infty E(k)dk \quad (2.11)$$

En funksjon for energispekteret vil derfor, i forhold til Kolmogorovs tredje hypotese, følge

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (2.12)$$

Her er  $C$  en universell konstant. Dette er en av de mest kjente redegjørelsene til Kolmogorov og er blitt underbygget av flere bekreftende studier.

### 2.1.9 Strukturfunksjonen for hastighetsfeltet

En vanlig metode å analysere turbulens på i dag er å betrakte turbulensen i to punkter, en framgangsmåten først foreslått av Kolmogorov i 1941. Hvis differansen mellom hastighetsvektorene i disse punktene betraktes kan denne skrives på formen,

$$\Delta u_{\mathbf{x}}(l) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad l = |\mathbf{r}| \quad (2.13)$$

Siden det antas at turbulens er isotropisk, vil differansen kun avhenge av  $l$  som er den absolutte avstanden mellom punktene. En hastighetsøkning er nyttig fordi det får fram effekten av skaleringer ved en gitt avstand  $l$  når statistikk involveres. I statistikk vil en invariant skalering av hastighetsøkningen,  $\delta\mathbf{u}(r) \rightarrow \delta\mathbf{u}(\lambda r)$ , gi en eksponent  $\beta$  som fører til en samme statistisk fordeling. Med andre ord har uttrykket,  $\delta\mathbf{u}(\lambda r)$  samme fordeling som  $\lambda^\beta \delta\mathbf{u}(r)$ .

Ved å ta utgangspunkt i denne statistiske likheten og Kolmogorovs teori oppnås det som i turbulens kalles strukturfunksjonen for hastighet,

$$\langle \Delta u_x(l)^q \rangle \sim l^{\zeta_q} \quad (2.14)$$

Her er hastighetsdifferansen midlet over gjennomsnittsverdien. Strukturfunksjonen gjelder for turbulens i liten skala hvor ytre betingelser ikke påvirker dynamikken. Det finnes i dag ingen bevis på at turbulens følger en slik

skaleringslov, og det spekuleres om hvilke verdier en slik eksponent vil ha og om den vil være universell.

## 2.2 Turbulensmodell

Det finnes flere modeller for å generere turbulens, blant annet er det vanlig å ta i bruk en diskre representasjon hvor en partiell differensiallikning transformeres til et stort system av ordinære differensiallikninger. En komplett simulasjon krever ekstreme kalkuleringer og det er derfor laget flere forenklete modeller som beskriver en begrenset lengdeskala eller variabel i turbulens som er ønskelig å studere. En direkte simulasjon av Navier-Stokes i området hvor turbulens oppstår vil kreve en modell med et høyt antall frihetsgrader. I *Dynamical Systems Approach to Turbulence* [2] er det vist at antall frihetsgrader i en slik modell vil øke med Reynolds tall opphøyd i en potens,  $N \sim Re^C$ . Her er eksponenten  $C$ , avhengig av singularitetene. Siden turbulens oppstår ved høye Reynolds tall, vil antall likninger nødvendig for å kalkulere fullt utviklet turbulens bli svært mange.

Skallmodeller er en forenklet turbulensmodell som er beskrevet i Fourierrommet. Denne modelltypen ble først utviklet i det russiske akademi [16]. Ideen er å gjenskape Navier-Stokes likninger i et dynamisk system som består av  $N$  variabler lik  $u_1, u_2, \dots, u_N$  som hver representerer en typisk størrelse av hastighetsfeltet i et område på lengdeskalaen. Fourierrommet blir delt opp i  $N$  skall hvor hvert av skallene  $k_n$  er en del av bølgevektoren  $\mathbf{k}$ . Hastighetsvariablen  $u_n$  er gitt som gjennomsnittsverdien for energien i skall  $n$  og kan betraktes som hastighetsdifferansen  $|v(x) - v(x + l)|$  for en eddy av skala  $l \sim k_n^{-1}$ .

$$u_n(t) = \sqrt{\int_{k_n}^{k_{n+1}} 2E(q, t) dq} \quad (2.15)$$

Et skall med radius,

$$k_n = r^n k_0 \quad \text{med} \quad r > 1 \quad (2.16)$$

innholder bølgetallene med modul  $k$  slik at  $k_n < k < k_{n+1}$  og et standard valg for forholdet mellom to naboskall blir  $r = 2$ . Bølgetallene  $k_n$  vil ha samme avstand på en logaritmisk skala.

Den generelle formen for skallmodellen er beskrevet som

$$(d_t + \nu k_n^2) u_n = ik_n \sum_{l,m} A_{l,m} u_{n+l}^* u_{n+m}^* + F. \quad (2.17)$$

$\nu$  er her viskositeten,  $k_n$  og  $u_n$  er bølgetallet og hastigheten for hvert skall.  $A_{l,m}$  beskriver likningens koeffisienter og  $F$  er med som beskrivelsen av hvitt støy tilført systemet.

### 2.2.1 GOY skallmodell

Den mest brukte skallmodellen kommer fra Gledzer i 1973 og ble ferdig utviklet av Ohkitani, og Yamada i 1987 og blir derfor kalt GOY-modellen [17]. Modellen har komplekse verdier for  $u_n$  og interaksjonen foregår mellom det nærmeste og nest nærmeste skallet. Det er også bevaring av volum i fase-rommet samtidig som energibevarelse. Hvert skall bidrar med en frihetsgrad. Under disse forutsetningene blir bevegelseslikningene.

$$(d_t + \nu k_n^2) u_n = i (a_n k_n u_{n+1}^* u_{n+2}^* + b_n k_{n-1} u_{n-1}^* u_{n+1}^* + c_n k_{n-2} u_{n-1}^* u_{n-2}^*) + f \delta_{n,4} \quad (2.18)$$

hvor  $n = 1, \dots, N$ , Bølgetallet for hvert skall skalerer geometrisk som  $k_n = r^n k_0$ . Som standard er  $r = 2$ . Grensebetingelsene er,

$$b_1 = b_N = c_1 = c_2 = a_{N-1} = a_N = 0, \quad (2.19)$$

$f$  vil være de utvendige kreftene og virker gjerne på den fjerde modusen.

I numerisk integrasjon vil antall skall  $N$  bli valgt på en slik måte at inertialspekteret ender på et skall  $n_D \approx N$  (typisk  $n_D \approx N - 3$ ). Koeffisientene for de ikke-lineære koeffisientene må følge sammenhengen

$$a_n + b_{n+1} + c_{n+2} = 0 \quad (2.20)$$

for å kunne tilfredsstillere energibevarelsen,  $\sum_n |u_n|^2$ , når  $f = \nu = 0$ . Restriksjonene vil etterlate seg en fri parameter  $\epsilon$  slik at man kan sette  $a_n = 1$ ,  $b_{n+1} = -\epsilon$ ,  $c_{n+2} = -(1 - \epsilon)$  [18]. Likning (2.18) kan nå skrives som,

$$(d_t + \nu k_n^2) u_n = ik_n \left( a_n u_{n+1}^* u_{n+2}^* + \frac{b_n}{r} u_{n-1}^* u_{n+1}^* + \frac{c_n}{r^2} u_{n-1}^* u_{n-2}^* \right) + f \delta_{n,4},$$

$$(2.21)$$

med  $r = k_{n+1}/k_n = 2$ , som er standard. Settet (2.21) med  $N$  koblede ordinære differensiallikninger kan bli numerisk integrert med standard framgangsmåte. Parameteren  $\epsilon$  er viktig i forhold til hvilke dynamiske egenskaper modellen har siden den er relatert en andre kvadratisk invariant i likningene. De ikke-lineære betingelsene for skallmodellen bestemmes også av den kvadratiske størrelsen

$$Q = \sum k_n^p |u_n|^2 \quad (2.22)$$

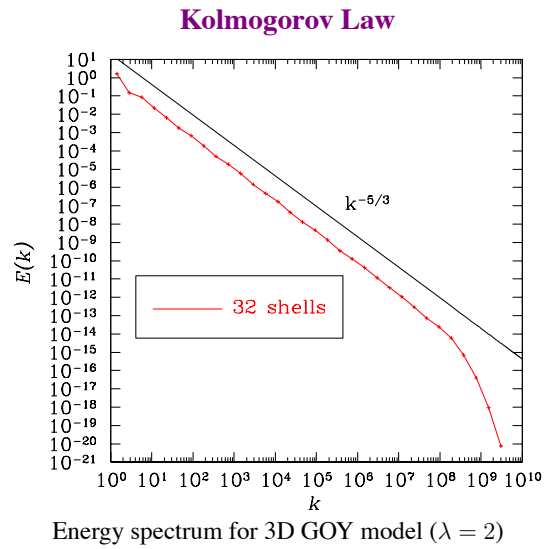
Med  $z = r^p = 2^p$  for å tilfredstille likning  $1 - \epsilon z - (1 - \epsilon)z^2 = 0$ , som gir to løsninger  $p = 0$  og  $p = -\ln_r(\epsilon - 1)$ . Den første løsningen stemmer for energi ( $Q=E$ ). I følge Kadanoff [19] vil det kun finnes to reelle verdier for  $\epsilon$  i den andre løsningen. Den første er  $\epsilon = 1 + r^{-2} = 5/4$ , som gir  $p = 2$ . Den kvadratiske invarianten vil da gi entropi som i todimensjonal turbulens. Den andre løsningen er  $\epsilon = 1 - r^{-1} = 1/2$  og gir  $p = 1$ . Den kvadratiske invarianten vil beskrive helisiteten

$$H = \sum_n (-1)^n k_n |u_n|^2 \quad (2.23)$$

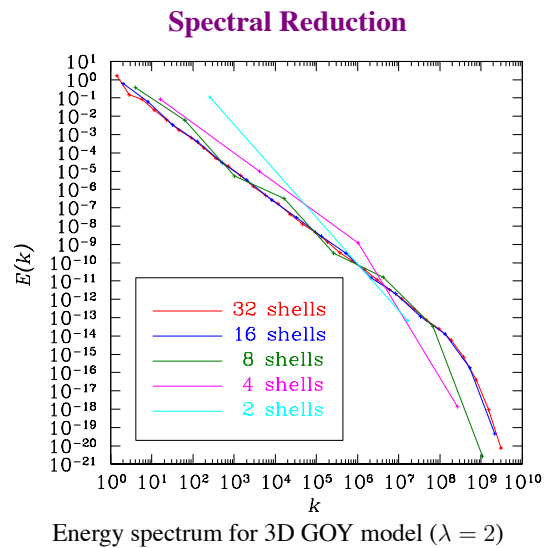
som i tredimensjonal turbulens. I figur 2.4 og 2.3 er energispekteret for GOY modellen illustrert ved forskjellig antall skall og vist i forhold til Kolmogorovs skaleringslov. I modellen er  $\epsilon = 1/2$  og  $r = \lambda = 2$ . Som man kan se fra figurene gir en økning fra 16 til 32 skall liten varians i forhold til stigningstallet. Det kan til en viss grad forventes at 32 skall gir en så optimal modell som mulig for GOY skallmodell.

## 2.3 Hurst-eksponent

Hurst-eksponenten er den relative tendensen en tidsserie har for å bevege seg mot en gjennomsnittlig verdi eller for å bevege seg i en bestemt retning [21]. Eksponenten blir brukt som et mål for en tidsseries hukommelse eller det som blir kalt autokorrelasjon. En Hurst-verdi som ligger mellom  $0 < H < 0,5$ , betyr at en økning i tidsserien mest sannsynlig vil etterfølges av en nedgang. En Hurst-verdi mellom  $0,5 < H < 1$ , vil si at en økning mest sannsynlig etterfølges av en ny økning. En tidsserie med Hurst-eksponent lik  $H = 0,5$  har fått navnet Random Walk hvor en bevegelse ikke gir informasjon om hva



Figur 2.3: En illustrasjon av hvordan skallmodellen med 32 skall skalerer i forhold til Kolmogorovs lov. Figuren er hentet fra J. C. Bowman, B. Eckhardt and J. Davoudi [20]



Figur 2.4: En illustrasjon av hvordan skallmodellen med 32, 16, 8, 4 og 2 skall skalerer i forhold til hverandre. Figuren er hentet fra J. C. Bowman, B. Eckhardt and J. Davoudi [20]



som kan forventes ved neste bevegelse.

Hurst-eksponenten for energi kan estimeres med *intensitetsspekteret* slik det er beskrevet i likning (2.24).

$$P(\omega) = |\hat{E}(\omega)|^2 \sim \omega^{-2H-1} \quad (2.24)$$

$P$  er intensiteten og  $\omega$  er frekvensen i Fourierrommet. Frekvensen avhenger av tiden med  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ .

# Kapittel 3

## Invers statistikk og asymmetri

I fullt utviklet turbulens er det oppdaget en asymmetri. Forventningstiden for en energiøkning er lenger enn forventningstiden for en energifrigjøring av samme størrelse. I 1999 presenterte M.H. Jensen en ny statistisk tilnærming for turbulens som kan beskrives som invers statistikk. I dette kapitlet beskrives det hvordan invers statistikk metode fungerer, og den asymmetriske energivariasjonen introduseres. Det vil presenteres hvordan invers statistikk metode kan benyttes for å analysere nettopp denne asymmetrien oppdaget i et system med fullt utviklet turbulens.

### 3.1 Invers statistikk

Metoden invers statistikk ble for første gang beskrevet av M.H. Jensen i 1999 [22] og er en alternativ og ny måte å beskrive og analysere turbulens hastighet på. Metoden tar utgangspunkt i Kolmogorovs strukturfunksjon for hastighet. Strukturfunksjonen er omtalt i avsnitt 2.1.9 og gitt som,

$$\langle \delta u_{\mathbf{x}}(l)^q \rangle \sim l^{\zeta_q} \quad (3.1)$$

Differansen er definert som,  $\delta u_{\mathbf{x}}(l) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $l = |\mathbf{r}|$ . Eksponentene,  $\zeta_q$ , i strukturfunksjonen er kalt strukturfunksjonseksponentene [23] og beskriver eksponentene for de forskjellige momenter,  $q$ , eller ordner av strukturfunksjonen. Det er tatt utgangspunkt i et isotropt hastighetsfelt.

Ideen med invers statistikk i dette tilfellet går enkelt nok ut på invertere Kolmogorovs strukturfunksjon. Strukturfunksjonen for hastighetsfeltet beskriver forventet hastighetsdifferanse gitt en bestemt lengdeavstand  $l$ . Ved

å invertere strukturfunksjonen (2.14), fås en ny strukturfunksjon gitt som,

$$\langle l(\delta u_{\mathbf{x}})^q \rangle \sim |\delta u_{\mathbf{x}}|^{\delta_q} \quad (3.2)$$

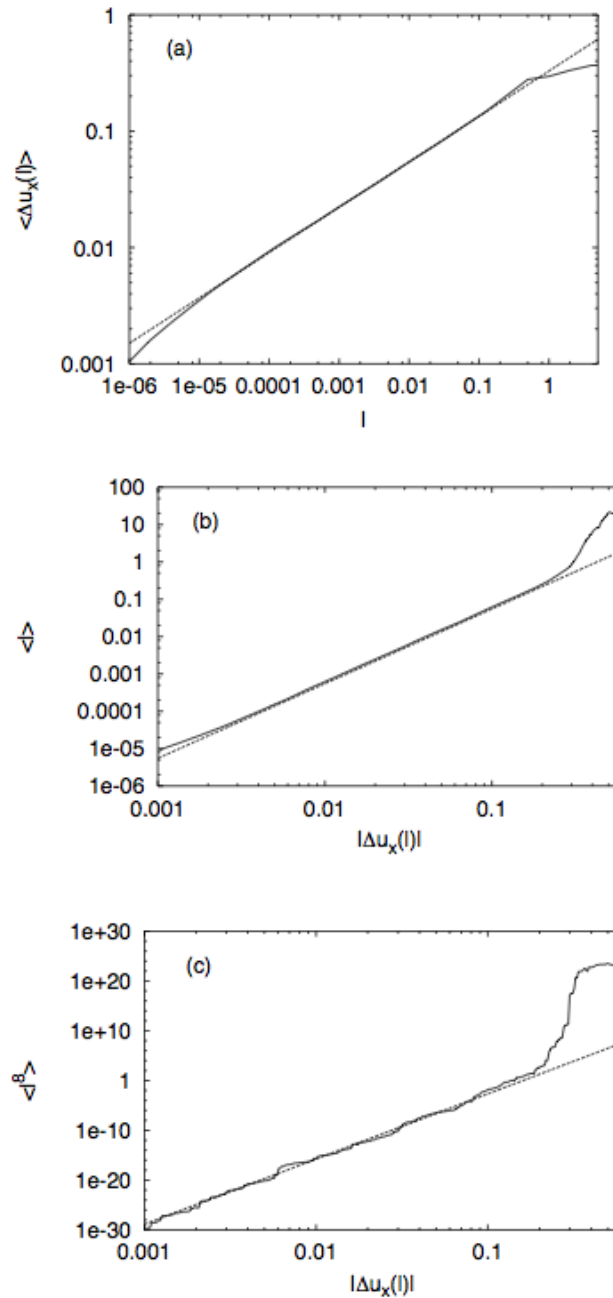
Den inverse strukturfunksjonen er *strukturfunksjonen for lengde* og er avhengig av hastighetsdifferansen  $\delta u_{\mathbf{x}}$ . Funksjonen beskriver den forventede avstanden  $\langle l(\delta u_{\mathbf{x}})^q \rangle$ , som en funksjon av hastighetsdifferansen,  $\delta u_{\mathbf{x}}$ . Lengden,  $l(\delta u_{\mathbf{x}})$ , er den minimale avstanden hvor den ønskede hastighetsdifferansen,  $\delta u_x$ , er oppnådd. Ved å kalkulere forventningsverdien til avstanden oppnås strukturfunksjonen for lengde, likning (3.2).

Ved å trekke konklusjonen at turbulens er selvliknende for hastighetsvariasjoner i liten skala, kan det forventes et ordinært sett eksponenter,  $\delta_q$ , hvor variasjonen av momentet,  $q$ , er bestemt av en eksponent. I et tenkt eksempel fra Kolmogorovs teori hvor  $\delta u \sim l^{1/3}$ , og det sees bort fra forventningsverdien. Ved å invertere denne blir, naturlig nok,  $l \sim \delta u^3$  og momentet vil følge likheten  $\delta_q = 3q$ . Om derimot turbulens er intermitterende og ikke selvliknende for hastighetsdifferanser på liten skala, vil sammenhengen mellom eksponentene være anderledes.

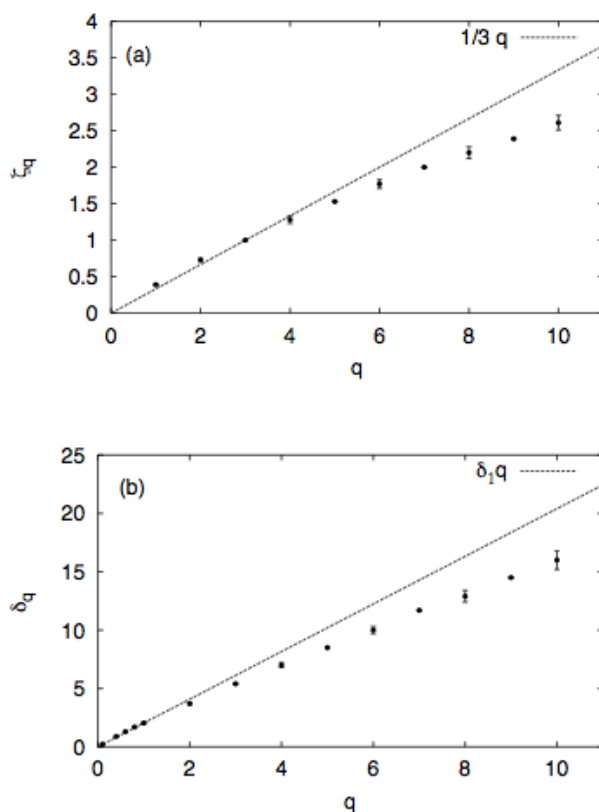
I arbeidet utført av M.H. Jensen ble eksponentene  $\delta_q$  og  $\zeta_q$  beregnet ut fra turbulens data generert ved hjelp av GOY skallmodell. Eksponentene ble beregnet for de 10 første momentene  $q$ . Figur 3.1 er hentet fra rapporten[22] og viser skaleringen til strukturfunksjonen av første orden og den inverse strukturfunksjonen av første og åttende orden.

Eksponenten for strukturfunksjonen for hastighet av første orden ga en verdi lik  $\zeta_1 = 0,039$ , som er ganske nært verdien beskrevet i Kolmogorovs teori som sier at  $\zeta_1 = 1/3$ . En framstilling av verdien for de resterende strukturfunksjoneksponentene er vist i figur 3.2. På figuren er også Kolmogorovs teori illustrert når det forutsettes en isotropisk strømning. En oversikt over strukturfunksjoneksponentene finnes også i tabell 3.1.

Kolmogorovs teori gir en første moment strukturfunksjonseksponent lik  $\zeta_1 = 1/3$ . Videre vil et multiskala-spektrum følge likheten  $\zeta_q = 1/3q$ . Beregningene gjort av M.H. Jensen for forskjellige moment  $q$  er vist i figur 3.2a sammen med Kolmogorovs teori tegnet som en rett linje. Beregningene som ble gjort for strukturfunksjonene for lengde er vist i figur 3.2b. En rett linje



Figur 3.1: a): Strukturfunksjonen for hastighet av første orden. Linjen har et stigningstall med verdi lik 0,039. b): Strukturfunksjonen for lengde av første orden. Linjen har et stigningstall med verdi lik 2,02. Merk at den indre avkuttingen er relatert til den indre avkuttingen relatert til dissipasjon i figur a). Og den ytre avkuttingen som kommer av hastigheten i stor skala. c): Strukturfunksjonen for hastighet av åttende orden. Eksponenten er  $\delta_q = 13.1$ . Ujevnheten skyldes oppløsningen på den varierende lengdeskalaen. Figur hentet fra M.H. Jensen [22].



Figur 3.2: a): Eksponentene for strukturfunksjonen for hastighet,  $\zeta_q$ , med utvalgte feilberegninger. Den påtegnede linjen svarer til Kolmogorovs teori. b): Eksponentene for strukturfunksjonen for avstand,  $\delta_q$ . Den påtegnede linjen er tilpasset til å følge stigningstallet bestemt av den første eksponenten  $\delta_1 = 2.02$ . Figur hentet fra M.H. Jensen [22].

q	1	2	3	4	5	6	7	8
$\zeta_q$	0,39	0,73(2)	1,0	1,28(5)	1,53	1,77(6)	2,0	2,20(8)
$\delta_q$	2,04	3,70(5)	5,4	7,0(2)	8,53	10,0(4)	11,7	12,9(6)

Tabell 3.1: Verdier for de skalerende eksponenter for strukturfunksjonen for hastighet,  $\zeta_q$ , og strukturfunksjonen for lengde,  $\delta_q$ , med utvalgte feilberegninger. Tabell hentet fra M.H. Jensen [22].

er satt gjennom punktet  $(1, \delta_q)$  for å vise den naturlige avbøyningen til spekteret.

Som en konklusjon av beregningene utført for den inverse strukturfunksjonen konkluderte M.H. Jensen med at dette ga et nytt multiskala-spekter uten en direkte sammenheng med multiskala-spektrumet for strukturfunksjonene for hastighet. Sannsynlighetsfordelingsfunksjonen for hastighet hadde heller ingen direkte sammenheng med sannsynlighetsfordelingsfunksjonen for lengde. Sannsynlighetsfordelingen var heller ikke normalfordelt, og hadde en lang eksponential hale, som er forventet i et intermitterende system. Det er også nevnt at i vanlige sannsynlighetsfordelinger vil funksjonen i stor skala være normalfordelt, men det er ikke sannsynlighetsfordelingen for strukturfunksjonen for lengde.

Metoden beskrevet av M.H. Jensen for beregning av strukturfunksjonen i turbulens med invers statistikk er tatt i bruk for analyse i finansmarkedet [24]. I finans betegnes en optimal investeringsperiode,  $\tau_\rho$ , perioden som høyst sannsynlig oppnår en finansiell vekst  $\rho$ . Det er oppdaget en asymmetri mellom en optimal ventetid for en positiv verdiendring som perioden for samme negative verdiendring  $\tau_{-\rho} < \tau_{+\rho}$ . Denne finansielle asymmetrien er studert etter ide fra den inverse strukturfunksjonen i turbulens.

## 3.2 Asymmetri i turbulens

Det er oppdaget en asymmetri mellom positiv og negativ energivariasjon i fullt utviklet turbulens. En frigjøring av en energimengde  $\delta E$  skjer over en kortere tidsperiode,  $t_{-\delta E}$ , enn tiden,  $t_{+\delta E}$ , det tar å øke energinivået i turbulensen med samme energimengde. Det er derfor ønskelig å studere en tidsserie som beskriver energinivået i turbulens.

Den kinetiske energien til turbulens har sammenheng med hastighet som  $E = \frac{1}{2}mu^2$ . Strukturfunksjonen for hastighet, beskrevet av Kolmogorov, er avhengig av distansen mellom de to posisjoner hvor hastighetsdifferansen er målt fra. Med utgangspunkt i denne strukturfunksjon er det i neste seksjon presentert en strukturfunksjon for energi, som i dette tilfellet er avhengig av tiden. Denne strukturfunksjonen inverteres og beskriver invers statistikk for tiden  $t$ .

Invers statistikk for tiden vil være avhengig av energidifferansen, og viser seg å være et nyttig verktøy til å vise asymmetrien nettopp beskrevet. Som nevnt innledningsvis er en beskrivelse av asymmetrien målet med denne oppgaven.

### 3.2.1 Forward statistikk

La oss først introdusere strukturfunksjonen for energi på samme måte som man kjenner strukturfunksjonen for hastighet (Likning (2.14)). I likhet med hvordan forventningsverdien til hastighetsdifferansen mellom to posisjoner beskriver strukturfunksjonene for hastighet, fås strukturfunksjonen for energi ved å beskrive forventet absolutt energidifferanse,  $\langle |\delta E(t)| \rangle$ , mellom to posisjoner eller tidspunkt. Det er å forvente at energi følger en potenslov på samme måte som strukturfunksjonen for hastighet, og vi definerer derfor strukturfunksjonen for energi til å følge relasjonen,

$$\langle |\delta E(t)|^q \rangle \sim t^{\alpha_q} \quad (3.3)$$

hvor  $q$  beskriver ordenen av energidifferansen.  $\alpha_q$  beskriver strukturfunksjoneksponenten for orden  $q$ . Strukturfunksjonen for energi beskriver forventet energidifferanse for en gitt tid. For å beregne strukturfunksjonen fra en tidsserie starter man med å se på energidifferansen for ett tidssteg,  $\hat{e}_t$ . Her beregnes energidifferansen for hele tidsserien. Resultatet blir et nytt spekter som beskriver energidifferansen for et tidsintervall,  $\hat{e}_t$ . Dette er forward statistikk for tid. Ved å se på spekterets histogram får man en sannsynlighetsfordeling for energidifferanser som oppnås etter ett tidssteg. Forventningsverdien for energidifferansen kan beregnes ut fra sannsynlighetsfordelingen. Resultatet blir forventet energidifferanse for en periode på en tidsenhet,  $\langle |\delta E(t = t_n - t_{n+1})|^q \rangle$ . Deretter gjør man samme beregning av energidifferansen for et tidssteg på to og flere tidsenheter. Den forventede energidifferansen for forskjellige tidsperioder blir her beskrevet til å følge samme form som strukturfunksjonen for hastighet, med forventningsverdien til energidifferansen som øker med antall tidsenheter opphøyd i en eksponent  $\alpha_q$ , som beskrevet i likning (3.3).

Merk at i likning (3.3) er hastighetdifferansen beskrevet med absoluttverdi. En absolutt differanse er naturlig å se på i tidsserier hvor man ikke forventer en variasjon i medianen over tid - et system med tilfeldig fluktusjon.

### 3.2.2 Invers statistikk for tid

Etter en beskrivelse av strukturfunksjonen for energi skal vi nå se på hvordan man kan videreføre den å ta i bruk invers statistikk metode introdusert i kapittel 3.1.

Ved å invertere strukturfunksjonen for energi gitt av likning (3.3), får man en funksjon som beskriver invers statistikk for tid. Inverteringen blir som følger,

$$\tau_{\delta E} = \langle t(\delta E)^q \rangle \sim \delta E^{\beta_q} \quad (3.4)$$

Her er forventningstiden,  $\tau_{\delta E}$ , som beskriver den forventede tiden det tar for å oppnå en energiendring  $\delta E$ . Fra inverteringen vil ventetiden forventes å følge en potenslov. Potensen er navngitt som,  $\beta_q$ . På samme måte beskriver  $q$  ordenen av ventetiden.

For å beregne funksjonen tar man utgangspunkt i en energidifferanse  $\delta E$ . Man starter i et tidspunkt  $t_0$  for så å bevege seg framover i tidsserien fram til ønsket energidifferanse er oppnådd ved et tidspunkt  $t_{\delta E}$ . Ventetiden  $t(\delta E) = t_{\delta E} - t_0$  er notert i et nytt spekter. Deretter starter man i neste tidspunkt,  $t_1$  og teller fram til samme energidifferanse er oppnådd. Slik fortsetter man gjennom hele tidsserien for energi. Det nye spekteret inneholder ventetider for en energidifferanse,  $\delta E$ . Spekterets histogram beskriver sannsynlighetsfordelingfunksjonen,  $P(t(\delta E)|\delta E)$ , til ventetiden for en energidifferanse,  $\delta E$ .

Forventningsverdien til sannsynlighetsfordelingfunksjonen,  $\langle t(\delta E)^q \rangle$ , beskriver forventet ventetid for å oppnå den bestemte energidifferansen. Det er denne ventetiden som har vist seg å være asymmetrisk for positive og negative energidifferanser. Med invers statistikk for tid har vi nå en mulighet til å analysere denne asymmetrien med å se på tilhørende potenslover og deres multiskala-spekter.

Hvis man ser bort ifra en forventningsverdi for ventetiden, og ser på potensloven som en invers funksjon av strukturfunksjonen for energi, vil en sammenheng mellom eksponentene forventes å være  $\beta_1 = 1/\alpha_q$ . Om ventetidens multiskala-spekter,  $\beta_q$ , har en slik relasjon til strukturfunksjoneksponentene,  $\alpha_q$ , er interessant å se på. For et intermitterende system vil en forventningsverdi til en fordelingsfunksjon være avgjørende og en direkte relasjon vil ikke forventes.



### 3.2.3 Beregning av forventningsverdien

For å finne forventningsverdien til sannsynlighetsfordelingfunksjonene for tid og energi er det tatt i bruk en polynomisk tilnærming rundt toppunktet til sannsynlighetsfordelingen. Maksimalverdien representerer ventetiden,  $\tau_{\delta E}$ , fra likning (3.4).

Metoden tar for seg sannsynlighetsverdier i området rundt funksjonens maksimale verdi. I hovedsak er det tatt med verdier som er av verdi større enn 60 % av den maksimale sannsynlighetsverdien,  $t(\delta E)_{polymodell} \in 0,6 \cdot \text{maksimal}(P(t(\delta E)|\delta E))$ . Hvis en slik verdi ikke finnes er det tatt med fem funksjonsverdier inntil maksimalverdien.

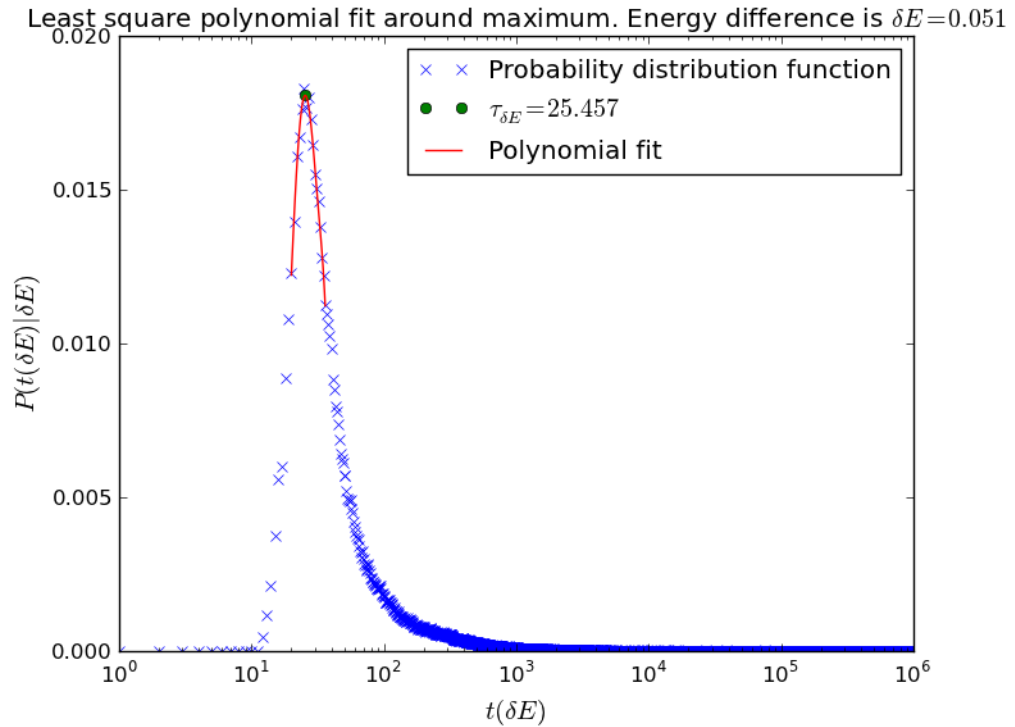
Den polynomiske tilpassningskurven er beskrevet i likning (3.3). I denne oppgaven har det vist seg å være tilstrekkelig med polynomisk tilnærming av femte grad,  $n = 5$ . Den utvalgte vektoren fra sannsynlighetsfordelingen blir tilpasset likningen ved hjelp av "LeastSquare"-metode (Likning (3.6)).

$$F_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.5)$$

$$\min_x \|f(x)\|_2^2 = \min_x (f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + \dots + f_n(x)^2) \quad (3.6)$$

Likning (3.6) starter med løsning  $x_0$  og fortsetter å beregne en løsning for  $f(x)$  fram til en minimal feilverdi er oppnådd.

Figur 3.3 viser resultatet av en slik tilpassningskurve for en sannsynlighetsfordelingfunksjon  $P(t(\delta E)|\delta E)$  for  $\delta E = 0,051$



Figur 3.3: Sannsynlighetsfordelingsfunksjonen for tiden  $t$  gitt for en energidifferanse på  $\delta E = 0,051$ . Forventningsverdien,  $\tau_{\delta E}$ , er funnet ved hjelp av polynomisk tilnærming av femte grad.

# Kapittel 4

## Turbulensmodellen

For å analysere turbulens i denne oppgaven er det generert en kompleks hastighetsverdi,  $u_n$ , for en million tidssteg,  $\hat{e}_t$ , ved hjelp av GOY-modellen. Modellen bygger på Navier-Stokes likninger og beskriver hastigheten som en funksjon av bølgevektorer i Fourierrommet. Modellen som kalkulerer hastighetsvektoren er beskrevet i likning (2.21).

Datasettet er generert med  $N = 27$  skall for likning (2.21) og det er brukt en standard verdi  $r = 2$ . De andre parametere er satt som,  $\nu = 10^{-9}$ ,  $k_0 = 0,05$ ,  $f = 5 \cdot 10^{-3}$ . Tabell 4.1 gir en oversikt over hvilke variabler som er tilgjengelige fra modellen.

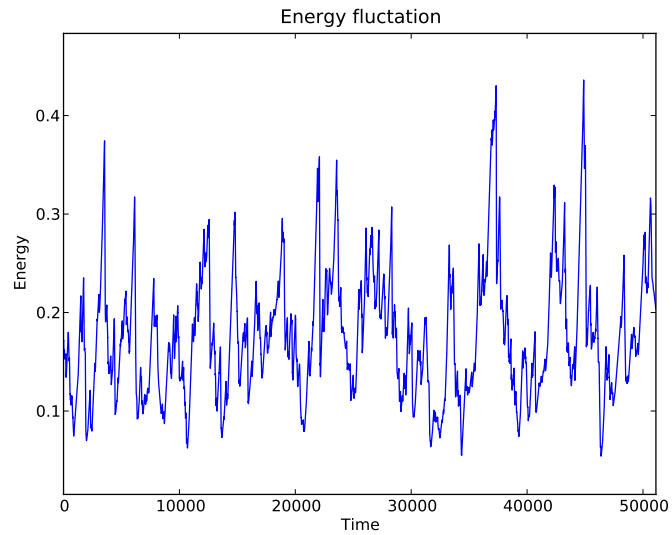
Energivariasjonen for en tidsperiode på  $50000\hat{e}_t$  vises i figur 4.1. Ved å studere energivariasjonen vil man allerede her se en forskjell i økning og redusering av energien. Figur 4.2 viser hastighetsvariasjonen for samme tidsperiode i datasettet. Hastigheten har en hyppigere fluktuasjon som gjør hastighetsvariasjonen vanskeligere å behandle. I denne oppgaven er det fokusert på tidsserien som beskriver energien for å analysere turbulens.

Energi	$\sum_n u_n u_n^* =  u_n ^2$
Hastighet	$\sum_n Re(u_n)$
Hastighet på liten skala, skall $N = 23$	$Re(u_{23})$
Dissipasjon på liten skala, skall $N = 23$	$u_{23} u_{23}^* =  u_{23} ^2$

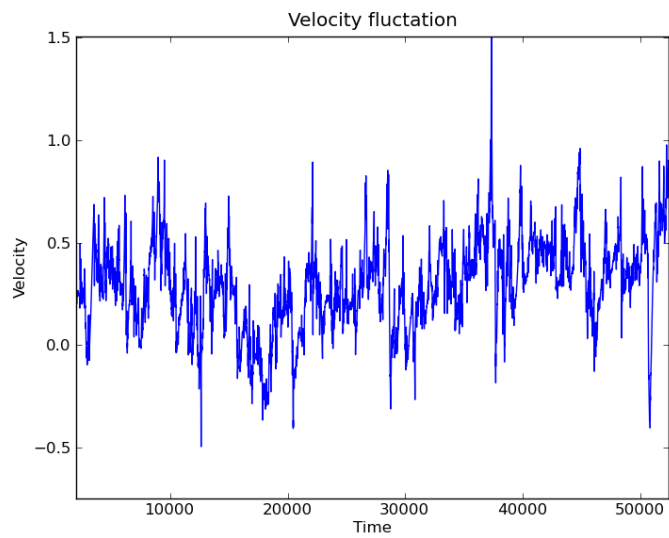
Tabell 4.1: Tilgjengelig data generert fra skallmodellen for  $N = 27$  skall.

## KAPITTEL 4. TURBULENSMODELLEN

---



Figur 4.1: Energien  $E$  plottet for en tidsperiode på  $50000\hat{e}_t$ . Variasjonen er absolutt



Figur 4.2: Hastigheten,  $u_n$  plottet for en tidsperiode på  $50000\hat{e}_t$ . Variasjonen er absolutt.

## 4.1 Energi

Turbulensmodellen genererer en kompleks hastighetskomponent for hvert skall. Ved å summere opp produktet av hastigheten og dens kompleks konjugerte i alle skall får man energien,

$$TotalEnergi = \nu \sum_n u_n u_n^* \quad (4.1)$$

Her beskriver  $\nu$  væskens viskositet. Videre i oppgaven er denne sett bort fra, da det er relative størrelser vi er ute etter å finne.

I oppgaven er det ønskelig å beregne ventetiden,  $t$ , før en bestemt energidifferanse,  $\Delta E$ , oppnås. Det er fluktuasjonen og den relative energidifferansen som er av interesse. I analysen er derfor differansen beregnet ved å studere den relative energivariasjonen,  $R_{\Delta E}$ , formulert som,

$$R_{\Delta E}(\Delta t) = \frac{E(t + \Delta t) - E(t)}{E(t)} \quad (4.2)$$

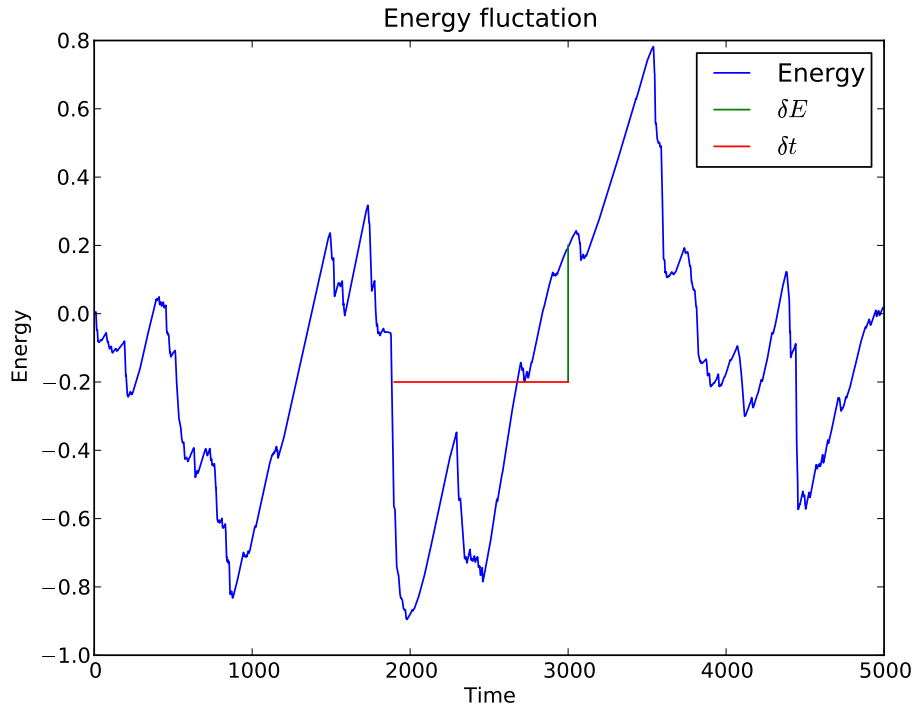
Her er  $\Delta t$  lik den tiden man må vente før man oppnår den bestemte relative differansen av energien  $\Delta E$ . Gitt en økning,  $r_{\Delta E}$ , som skrives på formen,

$$\begin{aligned} r_{\Delta E}(t) &= \ln E(t + \Delta t) - \ln E(t) \\ &= \ln \frac{E(t + \Delta t)}{E(t)} \\ &= \ln \frac{E(t + \Delta t) - E(t)}{E(t)} + 1 \\ &= \ln (R_{\Delta E}(t) + 1) \\ &= R_{\Delta E}(t) + \frac{1}{2}R_{\Delta E}(t)^2 + \frac{1}{3}R_{\Delta E}(t)^3 + \frac{1}{4}R_{\Delta E}(t)^4 \dots \\ &\simeq R_{\Delta E}(t) \quad \text{når, } R_{\Delta E}(t) \ll 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Likheten i (4.3) viser at når den relative endringen er liten, vil endringen  $R_{\Delta E}(\Delta t)$  være lik differansen mellom  $\ln E(t + \Delta t) - \ln E(t)$ . For analysen i denne oppgaven blir den relative energiendringen beregnet som differansen mellom de logaritmiske energinivåene. Figur 4.3 viser energivariasjonen med startverdi 0 og energiendringen er beskrevet relativt.

## KAPITTEL 4. TURBULENSMODELLEN

---



Figur 4.3: Energivariasjon for  $5000\hat{e}_t$ . Variasjonen er beskrevet som relativ energiendring

# Kapittel 5

## Analyse og resultater

I dette kapittelet blir det utført analyse av energiutviklingen i fullt utviklet turbulens. Beregningene er utført med fokus på den asymmetriske variasjonen oppdaget i energiutviklingen. Forward statistikk og invers statistikk for tid er tatt i bruk for å avduke noe av asymmetrien som oppstår mellom positive og negative energidifferanser. Beregninger og illustrasjon er programmert i Python med NumPy og SciPy rammeverk <sup>1</sup>. Tidsserien for den turbulente energien er beregnet ved hjelp av GOY-skallmodell, som beskrevet i kapittel 4. Det er gått ut ifra at modellen gir en realistisk beskrivelse av egenskapene til fullt utviklet turbulens. Med modellen i minne studeres resultatene.

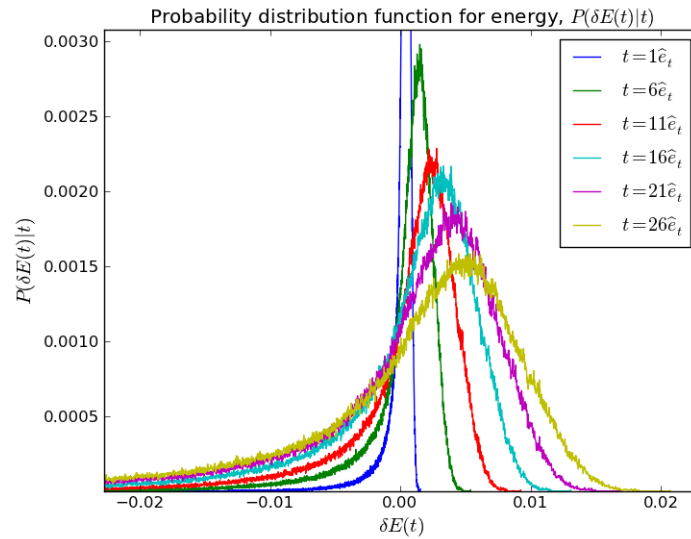
### 5.1 Asymmetri funnet ved forward statistikk

I kapittel 3.2 er strukturfunksjonen for energi (3.3) definert. Strukturfunksjonen beregner forward statistikken for tiden og gir forventningsverdien til en absolutt energidifferanse for et gitt tidsintervall. I denne oppgaven er det en asymmetri mellom positive og negative energidifferanser som står i fokus. Ved å fjerne den absolutte energidifferansen fra likning (3.3),  $\langle \delta E(t)^q \rangle$ , vil fordelingen omfavne sannsynligheten for både positive og negative energiendringer. Vi starter med å illustrere hvordan en slik sannsynlighetsfordelingen,  $P(\delta E(t)|t)$ , former seg for noen utvalgte tidsintervall i figur 5.1.

Figur 5.1 viser sannsynlighetsfordelingen til energiendringen for seks forskjellige tidsintervall. Som det går fram fra figuren vil forventet energidifferansen nærme seg null når tidsperioden går mot null, som er logisk. Videre kan man se at ettersom tidsperioden øker, vil sannsynlighetsfordelingen bevege sitt maksimum utover positive energidifferanser. Igjen er fordelingen

---

<sup>1</sup>Dokumentasjon til SciPy og NumPy finnes her: <http://www.scipy.org/>



Figur 5.1: Sannsynlighetsfordelingsfunksjonen for energiendringen,  $P(\delta E(t)|t)$ , for  $t = 1, 6, 11, 16, 21$  og  $26$ .

høyere over et større spekter for negative energiendringer. Integralet av fordelingen for  $t = 26$  gir total sannsynlighet for en negativ energiendring på  $P(\delta E(t) < 0|t = 26) = 0,35$ .

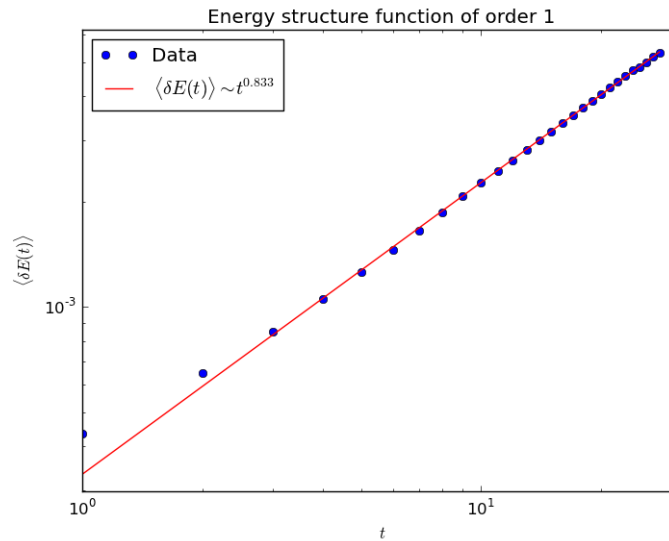
Resultatene viser en asymmetri i forventet energivariasjon. Forventningsverdien for energidifferansen er positiv, og det er høyst sannsynlighet for en positiv energivariasjon etter små tidsintervall.

### 5.1.1 Strukturfunksjonen for energi og Hurst-eksponenten for intensitetspekteret

Ved å beregne forventningsverdien til sannsynlighetsfordelingene beskrevet i figur 5.1 får man strukturfunksjonen for energi. Strukturfunksjonen for energi er beregnet og illustrert i figur 5.2. Forventet energiendring er beregnet for de første 29 tidsenheter. Hvordan beregningen av forventningsverdien for sannsynlighetsfordelingene er utført beskrives i kapittel 3.2.2. Strukturfunksjonen er plottet logaritmisk i x- og y-aksen. Strukturfunksjonen er tilpasset en potenslov som er tegnet inn som en rød strek på figuren. Eksponenten er beregnet til å være  $\alpha_1 = 0,833$ . Funksjonen ser ut til å følge tilpassingen godt.

Strukturfunksjonen vil, etter hva vi har sett fra funksjonen for sann-





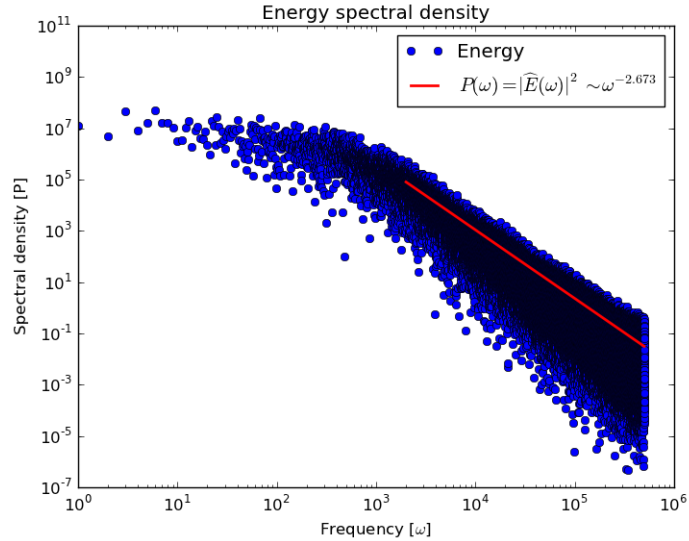
Figur 5.2: Strukturfunksjonen for energi av første orden. Energidifferansen følger tiden  $t$  i  $\alpha_1 = 0,833$  orden. Forventningsverdien til strukturfunksjonen for energi er beregnet for  $0\hat{e}_t < t < 29\hat{e}_t$ .

synlighetsfordelingen til energidifferansen, øke med tiden  $t$ . Den tilpassede potensloven vil ha en eksponent lik Hurst-eksponenten til tidsserien [25]. Hurst-eksponenten kan også beregnes ved å se på intensitetspekteret som en funksjon av frekvensen. I figur 5.3 er intensitetspekteret illustrert. På figuren er det også tegnet inn en tilpasset potensfunksjon utført med "LeastSquare"-metode.

Potensfunksjonen har eksponent lik  $(-2H - 1) = -2,673$  i området for større frekvenser. Hurst-eksponenten har samme verdi som strukturfunksjonen av første orden  $H = \alpha_1 = 0,83$ , som var hva vi forventet.

## 5.2 Asymmetri funnet ved invers statistikk

I forward statistikk for tid kom det fram en asymmetri for hvilken retning man kan forvente energiendringen til å bevege seg etter små tidsintervall. En invertering av statistikken beskriver hvilke ventetider man har for å oppnå en bestemt energidifferanse. Denne metoden er beskrevet som invers statistikk for tid.



Figur 5.3: Fouriertransformasjon av energiutviklingen i turbulens. Fra likning (2.24) blir Hurst-eksponenten  $H = 0,83$

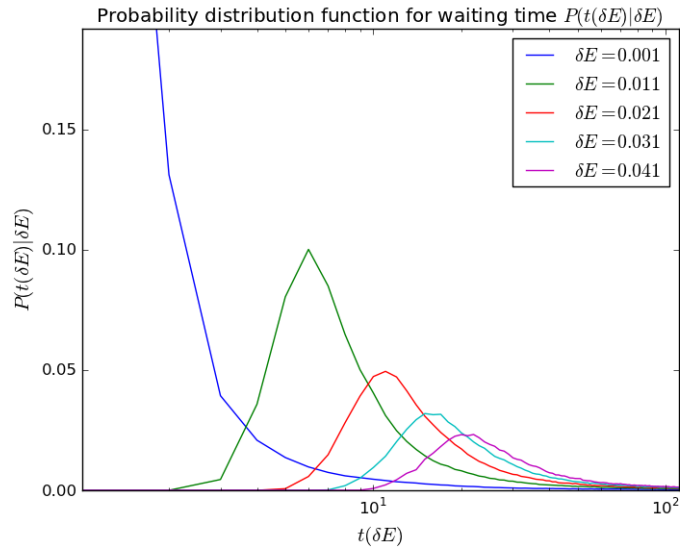
Vi begynner med å se på hvordan funksjonen for sannsynlighetsfordelingen for ventetiden,  $P(t(\delta E)|\delta E)$ , utbrer seg. Ventetiden er tiden det tar før en ønsket energidifferanse inntreffer. For å se på hvordan sannsynlighetsfordelingen for tid utvikler seg er den illustrert for fem forskjellige positive energiendringer,  $\delta E$ , i figur 5.4 . Den første sannsynlighetsfordelingen beskriver en relativ energidifferanse på  $\delta E = 0,001$ . Ved denne lave energidifferansen går forventningstiden mot null, som er naturlig. Tilnæringsverdien for lave energivariasjoner er studert nærmere i kapittel 5.2. Fra figuren ser man at når energiendringen blir større, beveger maksimalpunktet til sannsynlighetsfordelingen seg mot lengre ventetider.

La oss så se nærmere på hvordan funksjonen for sannsynlighetsfordelingen til en negativ energiendring vil se ut i forhold til en positiv energiendring. I figur 5.5 er sannsynlighetsfordelingen for positiv og negativ energiendring på  $\pm\delta E = 0,049$  illustrert.

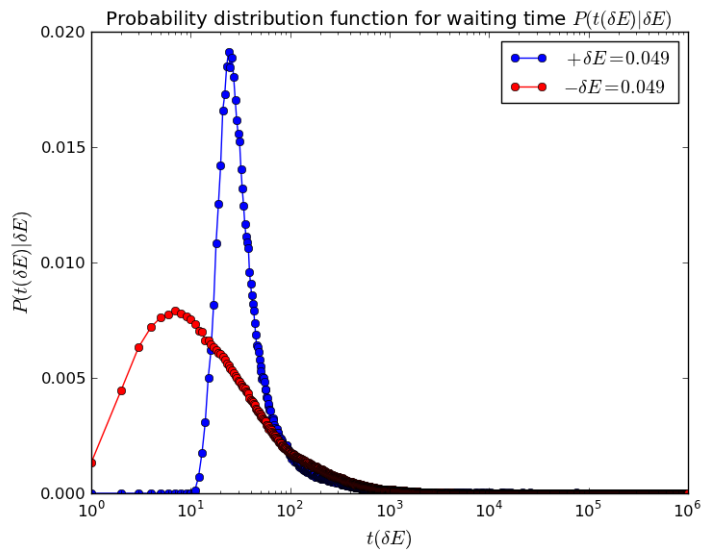
I figuren kommer det tydelig fram at en relativ økning på 4,9 % vil ha en lenger forventningstid  $\tau_{+\delta E=0,049}$  enn forventningstiden til en like stor energi-reduisering,  $\tau_{-\delta E=0,049}$ .

Den samme invers statistikk metode for å finne sannsynlighetsfordelingen

## 5.2. ASYMMETRI FUNNET VED INVERS STATISTIKK



Figur 5.4: Sannsynlighetsfordelingen for ventetiden  $P(t(\delta E)|\delta E)$  for energiendringene  $\delta E = 0,001, 0,011, 0,021, 0,031$  og  $0,041$ .



Figur 5.5: Sannsynlighetfordelingen til ventetiden  $P(t(\delta E)|\delta E)$  for en energiendring på  $\pm\delta E = 0,049$ .

kan også beregnes for ventetiden til en absolutt energidifferanse. Sannsynlighetsfordelingen til ventetiden for absolutt energidifferanse,  $P(t(|\delta E|)|\delta E)$ , beregner ventetiden på samme måte som forklart i kapittel 3.2.2, men med to barrierer hvor en bestemt energidifferanse kan oppnås (positivt eller negativt). I figur 5.6 er sannsynlighetsfordelingen for energiendringer på  $\delta E = 0,001, 0,061$  og  $0,2$  beskrevet. Øverst i figuren er sannsynlighetsfordelingen for positiv og negativ energiendring illustrert i forhold til hverandre. Nederst i figuren er sannsynlighetsfordelingen for en absolutt energidifferanse.

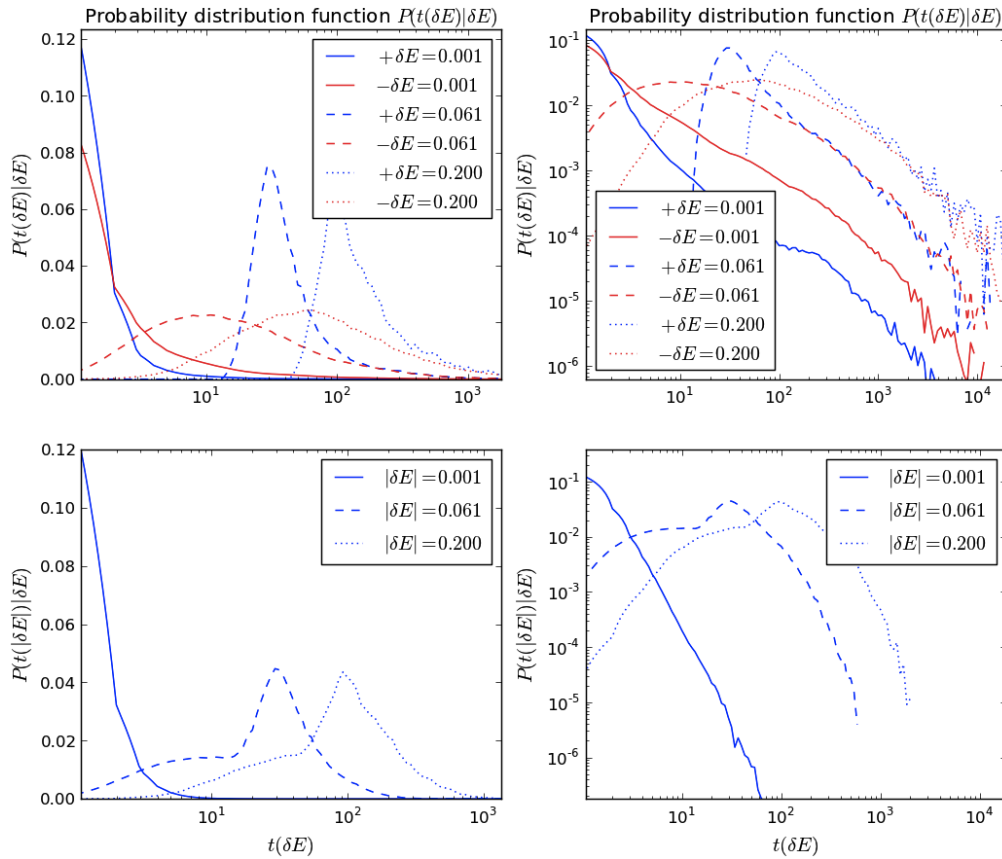
Fra figuren går det frem hvordan sammenslåingen av sannsynlighetsfordelingene oppfører seg for lave ventetider. Hvordan den sammenslåtte fordelingen avtar for høye ventetider kan man lettere se på de logaritmiske framstillingene til høyre i figuren. Den lave absolute energiendringen,  $|\delta E| = 0,001$ , har en fordeling likner en potenslov. I figur 5.7 går det fram hvordan fordelingene for lave energiendringer følger en potenslov. Funksjonen er som før tilpasset med "LeastSquare"-metode. En tilpasning er utført på fordelingen for absolutt energiendring og fordelingen for negativ energivariasjon.

For større energiendringer synker fordelingen for absolute energiendringer brattere enn en potenslov. Fordelingene for positive og negative energiendringer ser derimot ut til å følge en potenslov for lengre ventetider.

Det kan også vurderes om sannsynlighetfordelingen for en positiv og negativ energiendring har forskjellig type fordeling. En logaritmisk framstilling av fordelingen er gjort for noen positive energivariasjon-fordelinger i figur 5.8, og for negative energiendringer i figur 5.9.

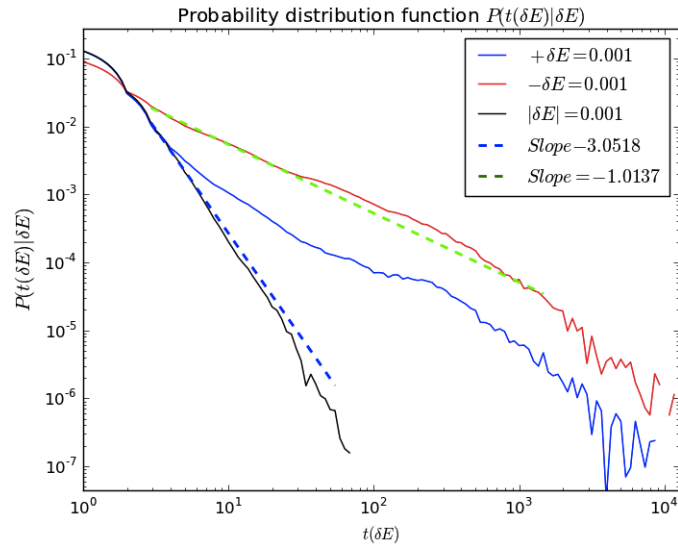
På figur 5.8 og 5.9 ser man en ganske anderledes form i sannsynlighetsfordelingen for positive og negative energidifferanser. Positive energidifferanser har en "spissere" maksimalverdi, som gjør en forventet ventetid mer definert. De negative energidifferansene har en bredere sannsynlighetsfordeling. For ventetider på større skala - mer en ca  $300\hat{e}_t$ , ser fordelingene ut til å gå over til å følge en potenslov. Eksponentene til de tilpassede funksjonene tegnet inn i figurene har verdi  $-1,28$  for positive energiendringer og verdi  $-1,26$  for negative energiendringer. De eksponentielle verdiene kan tolkes til at positiv og negativ energivariasjon har lik fordeling, og ikke normalfordeling, for lengre ventetider.

## 5.2. ASYMMETRI FUNNET VED INVERS STATISTIKK

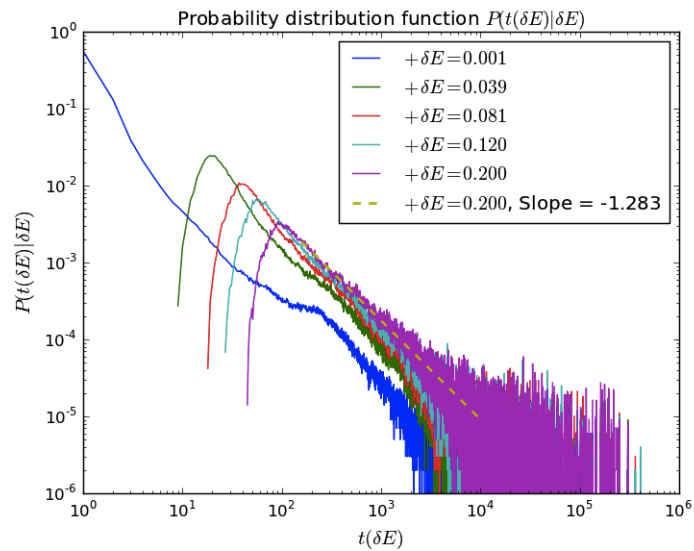


Figur 5.6: Sannsynlighetsfordelingen for energidifferanser på  $\delta E = 0, 001, 0, 061$  og  $0, 2$ . *Øverst*: Sannsynlighetsfordelingen for tre positive og negative energidifferanser,  $P(t(\delta E)|\delta E)$ . Grafen til høyre har logaritmiske akser for x- og y-aksen. *Nederst*: Sannsynlighetsfordelingen til tre forskjellige absolutt energidifferanser,  $P(t(|\delta E|)|\delta E)$ .

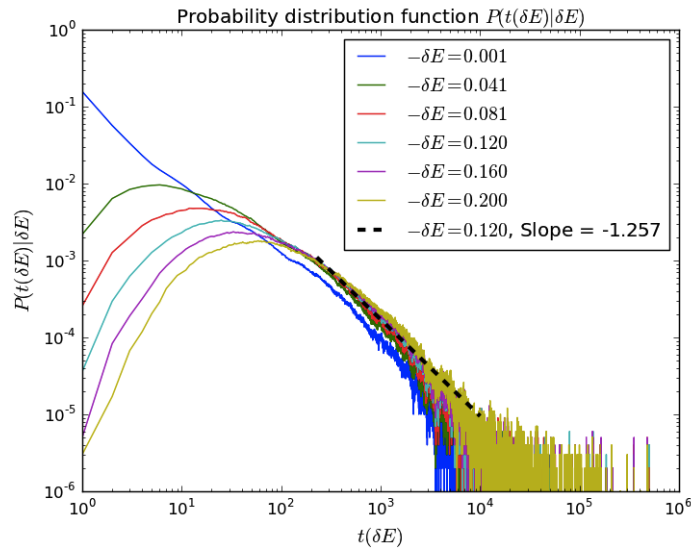
## KAPITTEL 5. ANALYSE OG RESULTATER



Figur 5.7: Sannsynlighetsfordelingen for energidifferans  $\delta E = 0,001$ . Forde-lingen er illustrert for positiv, negativ og absolutt energidifferanse. Stignings- tallene er funnet ved "LeastSquare"-metode for en eksponential-funksjon.



Figur 5.8: Sannsynlighetsfordelingfunksjonen for positive energidifferanser. Den stiplede linjen har stigningstall  $-1,283$



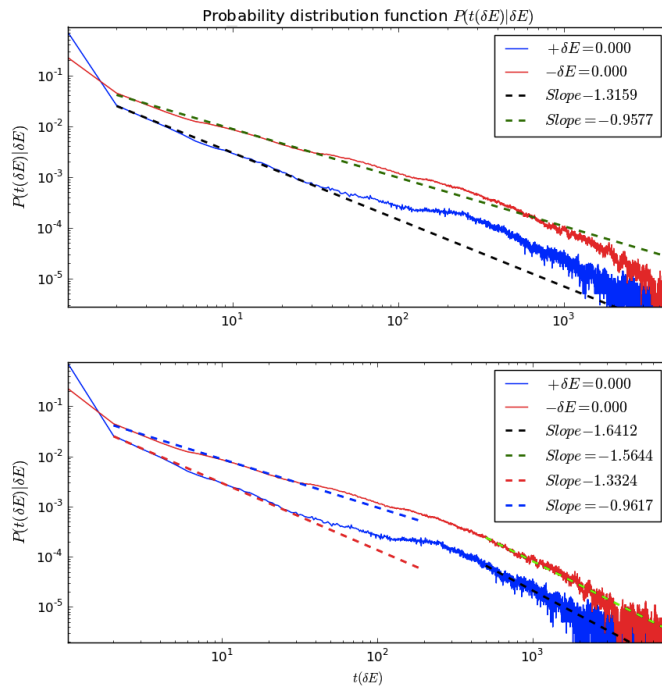
Figur 5.9: Sannsynlighetsfordelingfunksjonen for negative energidifferanser. Den stiplede linjen har stigningstall  $-1,257$

### Sannsynlighetsfordeling for små energidifferanser - $\lim_{\delta E \rightarrow 0}$

For sannsynlighetsfordelingene i figur 5.5 kommer det fram en forskjell i formen til fordelingsfunksjonene. For å studere den avtagende funksjonen bedre studeres funksjonen for energidifferanser nær null. Ved å la energidifferansen bevege seg mot null,  $\lim_{\delta E \rightarrow 0}$ , vil forventningstiden,  $\tau_{\delta E}$  for både økning og redusering bevege seg mot et minimum på en tidsenhet  $\lim_{\delta E \rightarrow 0} \tau_{\delta E} = \hat{e}_t$ . Differansen mellom forventningstiden til økningen og redusering vil forsvinne. Fordelingene er framstilt logaritmisk i x- og y-aksen i figur 5.10).

Nederst i figur 5.10 avtar sannsynlighetsfordelingen,  $P(t(\delta E)|\delta E)$ , noe forskjellig for positiv og negativ energiendring. For små tidsperioder,  $2\hat{e}_t < t < 200\hat{e}_t$ , følger fordelingene en potensfunksjon med eksponentiell differanse på ca 0,4. For større perioder,  $500\hat{e}_t < t < 8000\hat{e}_t$ , vil fordelingene følge hverandre tettere med eksponentiell differanse på ca 0,08.

Tidligere, i sannsynlighetsfordelingen fra forward statistikk i figur 5.1, kom det fram at det er høyst sannsynlighet for en energiøkning etter korte tidsperioder. I figur 5.10, med sannsynlighetsfordelingen til små energidifferanser, ser man en kryssing mellom en periode på en og to tidsenheter. Fordelingen som begynner fra to tidsenheter beskriver ventetiden for at energien



Figur 5.10: Sannsynlighetsfordelingen i tid for en relativ energiøkning på  $\Delta E = 0,01\%$ . Funksjonen er framstilt logaritmisk. Øverst: En tilnærming til en potenslov funnet ved LeastSquare-metode. Tilnærmingsskurven er tilpasset for alle tidsenheter mellom  $2\hat{e}_t < t < 4000\hat{e}_t$ . Eksponenten er  $-1,32$  for positiv energidifferanse og  $-0,96$  for negativ energidifferanse. Nederst: Tilnærmingsskurvene er tilpasset for tidsenheter mellom  $2\hat{e}_t < t < 200\hat{e}_t$  og  $500\hat{e}_t < t < 8000\hat{e}_t$ .



skal øke, gitt at den allerede har startet med å synke. Sannsynligheten som er representert av første steg i fordelingen, beskriver alle tidssteg som starter med å bryte barrieren. For en minimal positiv energiendring skjer dette oftere enn for en minimal negativ energiendring, som sier det samme som hva som kom fram med forward statistikken.

### 5.2.1 Forventningstider $\tau_{\delta E}^q$ av første orden

Vi har nå sett at det er en asymmetri i sannsynlighetsfordelingene til positive og negative energivariasjoner. Med invers statistikk i kapittel 3.2.2 definerte vi forventningstiden til en gitt energiendring som  $\tau_{\delta E}$ .  $\tau_{\delta E}$  er forventet å følge en potenslov på samme måte som strukturfunksjonen for energi i forward statistikken.

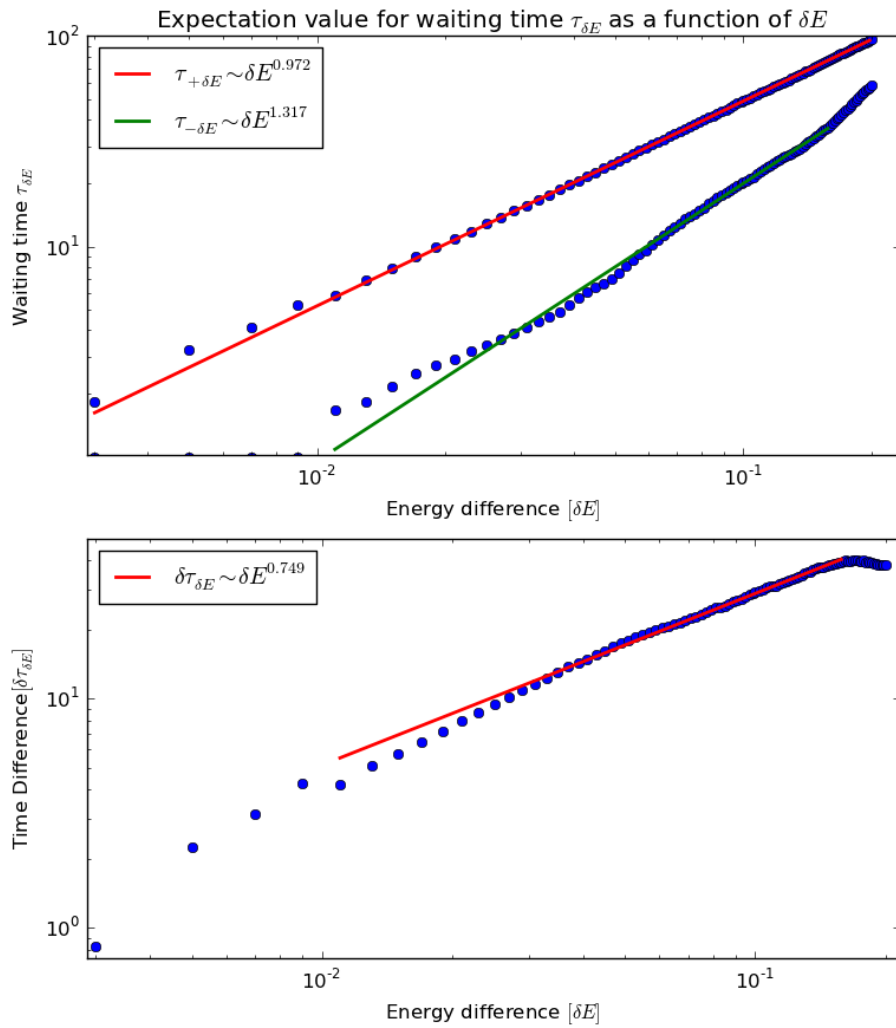
Fra invers statistikk defineres to potenslover som beskriver hvordan forventningsverdien utvikler seg, avhengig av energivariasjonen  $\delta E$ . En positiv energiendring er beskrevet av funksjon (5.1) og en negativ energiendring er beskrevet av funksjon (5.2). Hver funksjon med sin eksponent  $\beta$ .

$$\tau_{+\delta E} \sim \delta E^{\beta^+} \tag{5.1}$$

$$\tau_{-\delta E} \sim \delta E^{\beta^-} \tag{5.2}$$

Ventetidene er av første orden med moment  $q = 1$ .

Invers statistikk for tid blir beregnet som forklart i kapittel 3.2.2 for energiøking og energifrigjøring. Ventetiden for sannsynlighetsfordelingene er beregnet ved hjelp av polynomisk tilnærming som forklart i kapittel 3.2.3. Hvordan forventningsverdiene er avhengig av energidifferansen er illustrert i figur 5.11. Øverst i figuren er ventetiden for positive og negative energiendringer illustrert for energiendringer fra  $0,001 < \delta E < 0,2$ . Tilpassningskurven for positive energiendringer gir en god tilpassing for forventningsverdiene og følger en potenslov med eksponent,  $\beta^+ = 0,972$ . Funksjonen tilpasset negative energiendringer følger ikke en potenslov like tydelig, men likevel godt. Eksponential-verdien for negative energiendringer er  $\beta^- = 1,317$ .



Figur 5.11: *Øverst*: Strukturfunksjonen til tid for energiendringer mellom  $0,001 < \pm\delta E < 0,2$ . Figuren viser et stigningstall lik  $\beta_1^+ = 0,972$  og  $\beta_1^- = 1,317$ . *Nederst*: Differansen mellom strukturfunksjonen for tid for positive og negative energidifferanser  $\delta\tau_{\delta E}$ . Linjen på figuren har stigningstall,  $\beta_1^{\delta\tau} = 0,749$

Nederst i figur 5.11 er differansen mellom forventningstidene plottet som funksjon av energiendringen. Differansen defineres som,

$$\begin{aligned} \tau_{\delta\tau} &= \tau_{+\delta E} - \tau_{-\delta E} \\ \tau_{\delta\tau} &\sim \delta E^{\beta_{\delta\tau}} \quad \text{hvor} \quad \frac{\beta^+}{\beta^-} = \beta_{\delta\tau} \end{aligned} \quad (5.3)$$

hvor  $\tau_{\delta\tau}$  er differansen i tid mellom forventningstiden for en bestemt energi-øking og en energifrigjøring av samme størrelse. I figuren øker differansen med tiden  $t$ , men økningen er avtagende.  $\tau_{\delta\tau}$  følger en potenslov med eksponent  $\beta_{\delta\tau} = 0,749$ .

### 5.2.2 Forventningstiden $\tau_{\delta E}^q$ av høyere orden

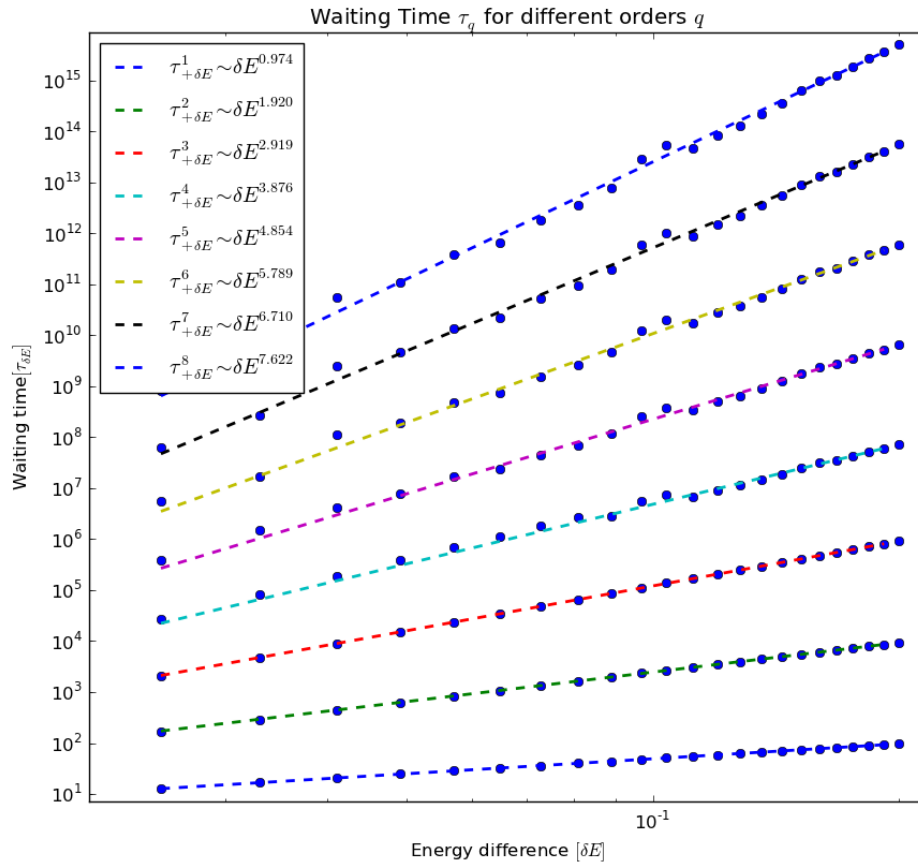
Det er interessant å se på hva eksponentene  $\beta_q^+$  og  $\beta_q^-$  blir for høyere orden, for å se om de følger et multiskala-spekter beskrevet av Kolmogorovs teori.

I artikkelen av M.H. Jensen ble det ikke funnet noen forhold mellom eksponentene  $\zeta_q$  og  $\delta_q$ , i strukturfunksjonen for hastighet og strukturfunksjonen for lengde. En beregning av eksponentene for orden opp til åtte ble gjennomført. Eksponentene hadde en avtagende verdi i forhold til forventet i Kolmogorovs teori, her predikeres en lineær økning.

Forventningstiden av høyere orden følger potensloven,  $\tau_{\delta E}^q \sim \delta E^{\beta_q}$ , hvor  $q$  er ordenen av ventetidene. Figur 5.12 viser forventningstidene til,  $\tau_{\delta E}^q$ , for åtte verdier av  $q$ .  $\tau_{\delta E}^q$  følger en potenslov for positive energiendringer mellom  $0,001 < \delta E < 0,2$ . De stiplede linjene er tilpasning utført med "LeastSquare"-metode for en potensfunksjon. Noen av forventningstidene ser ut til å gi en dårlig tilpasning, men trenden til  $\tau_{\delta E}^q$  kommer likevel tydelig fram.

En potenslov er også funnet for åtte ordner av  $\tau_{-\delta E}^q$ . Resultatet av eksponentene er illustrert i figur 5.13. Eksponentene  $\beta_q^+$  og  $\beta_q^-$  er også opplistet i tabell 5.1.

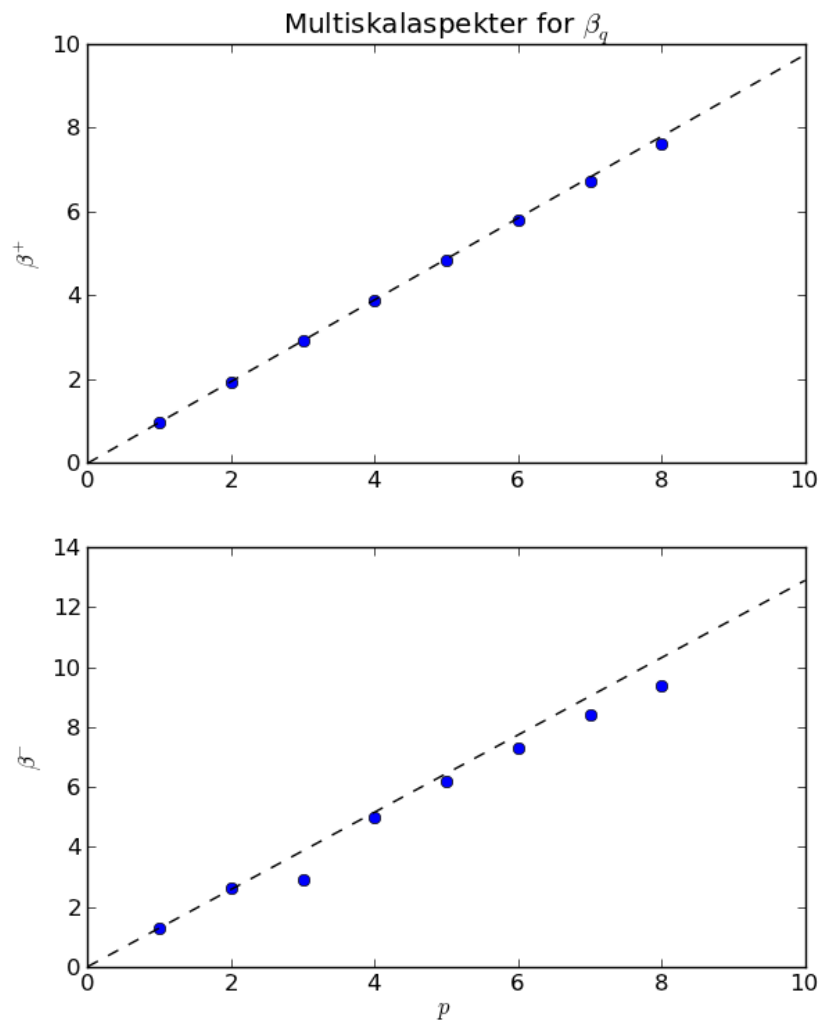
Øverst i figur 5.13 er de skalerte eksponentene  $\beta_q^+$  illustrert sammen med en rett linje gjennom den første eksponenten  $(1, \beta_1^+)$  for å se hvordan eksponentene avbøyer. Fra figuren ser eksponentene ut til å følge linjen ganske bra,



Figur 5.12: Illustrasjon av hvordan forventningstiden,  $\tau_{\delta E}^q$ , for de åtte første ordene av  $q$ , følger en potenslov for energidifferanser mellom  $0,001 < \delta E < 0,2$ . De stiplede linjene er en tilpasning utført med "LeastSquare"-metode for en potensfunksjon og gir eksponentene  $\beta_q^+$

q	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta_q^+$	0,97	1,92	2,91	3,88	4,85	5,79	6,71	7,62
$\beta_q^-$	1,29	2,62	2,91	5,00	6,17	7,31	8,39	9,40

Tabell 5.1: Verdier for de skalerende eksponenter for forventningstiden  $\tau_{\delta E}$  til positiv energiendring,  $\beta_q^+$  og negativ energiendring  $\beta_q^-$ .



Figur 5.13: Plot av de skalerende eksponenter for forventningstiden  $\tau_{\delta E}$  til positiv energiendring,  $\beta_q^+$  og negativ energiendring  $\beta_q^-$ .

## KAPITTEL 5. ANALYSE OG RESULTATER

---

bortsett fra en liten krumning for de øverste eksponentene. Samme illustrasjon for eksponentene til en negativ energidifferanse,  $\beta_q^-$ , er plottet nederst i figuren. Krumningen her er tydeligere enn for de positive verdiene. Fra Kolmogorovs teori vil eksponentene til en strukturfunksjon for hastigheten, avhenging av lengde, følge en rett linje som tilsier at turbulens er selvliknende for energidifferanser i liten skala.

# Kapittel 6

## Konklusjon

Det er i denne oppgaven studert energifluktuasjon i fullt utviklet turbulens. Den turbulente kinetiske energien fra datasettet beskriver energiutviklingen i én posisjon over en tidsperiode. Tidsserien for turbulens er kalkulert ved hjelp av GOY skallmodell. GOY skallmodell er en grov tilnærming til Navier-Stokes likninger og er formulert på et diskret sett variabler,  $k_n$ , i fourierrommet.

Målet med oppgaven er å finne, beskrive og forstå en asymmetri som oppstår mellom økning og frigjøring av turbulent kinetisk energi. Til dette er det tatt i bruk forward statistikk og invers statistikk for tid. Invers statistikk er en metode først beskrevet av M.H. Jensen i 1999. M.H. Jensen tok i bruk invers statistikk på Kolmogorovs strukturfunksjon for hastighet, avhenging av lengde. I resultatene fant M.H. Jensen et nytt multiskala-spekter for den inverse strukturfunksjonen, uten direkte sammenheng med multiskala-spekteret som blir dannet av Kolmogorovs strukturfunksjon.

Ved å ta i bruk forward statistikk på tidsserien for turbulent energi, er det funnet en asymmetri for forventningsverdien til energiendringen. I sannsynlighetsfordelingen for energiendringen er forventningsverdien til energinivået positivt etter korte tidsintervall. Strukturfunksjonen for energi av første orden følger en potenslov,

$$\langle \delta E(t) \rangle \sim t^{0,833} \tag{6.1}$$

Eksponenten fra potensloven beskriver også verdien til en Hurst-eksponent av tidsserien,  $H = 0,833$ . En Hurst-eksponent større enn en halv, tilsvarer at tidsserien følger en trend. I dette tilfellet for turbulens er trenden positiv. Energien i tidsserien vil derfor i nær framtid mest sannsynlig ha et høyere

## KAPITTEL 6. KONKLUSJON

---

energinivå.

En asymmetri til energiendringen kommer også fram ved bruk av invers statistikk for tid. Invers statistikk beregner ventetiden for at en energiendring,  $\delta E$ , vil inntreffe. Ventetidens sannsynlighetsfordelingen gir en tydelig asymmetrisk fordeling for positive og negative energiendringer. For energiendringer mellom 0,1% og 20%, vil forventningstiden være mindre for en negativ energiendring enn for en like stor positiv endring. En negativ energiendring har derimot en bredere fordelingskurve enn sannsynlighetsfordelingen for en positiv endring. Begge fordelingene er eksponentielt avtagende for høye ventetider. Her følger fordelingene en potenslov med eksponent på ca -1,28. Fordelingen til lave energiendringer har også blitt betraktet. I dette tilfellet er fordelingen eksponentiell avtagende hele veien, med en diskutert samme eksponent like under -1, for positiv og negativ energiendring. Ingen av fordelingene er normalfordelt, som er å forvente av et intermitterende system.

Sannsynlighetsfordelingene for positive og negative energiendringer har en ulik forventningsverdi for ventetidene. Forventningstiden er beskrevet som en funksjon av fordelings energiendring. For positive energiendringer er ventetiden,  $\tau_{+\delta E}$ , tilnærmet lineært avhengig av energiendringen. En potenslov følger,

$$\tau_{+\delta E} \sim \delta E^{0,972} \quad (6.2)$$

Forventningsverdiene til sannsynlighetsfordelingene for negative energiendringer får en avhengighet av energiendringen som ikke er lineær. En potenslov følger,

$$\tau_{-\delta E} \sim \delta E^{1,317} \quad (6.3)$$

som gir en forventningsverdi,  $\tau_{-\delta E}$ , som er eksponentielt økende med energidifferansen.

Fra resultatene øker differansen mellom  $\tau_{+\delta E}$  og  $\tau_{-\delta E}$  ettersom energidifferansen øker. Økningen er derimot avtagende og går mot en konstant differanse for store energiendringer.

Forventningsverdiene  $\tau_{\delta E}^q$ , er også beregnet for orden opp til  $q = 8$ , og tilpasset en potenslov. Beregningene er utført både for positive og negative energiendringer. Eksponentene  $\beta_q^+$  og  $\beta_q^-$  er illustrert sammen med en lineær



---

kurve gjennom eksponenten fra første orden. Tendensen er en svak avbøyning for eksponentene av høyere orden. En avbøyning er hva som forventes av et intermitterende system som ikke er selvliknende for små energivariasjoner.

Det er ikke funnet en direkte sammenheng mellom eksponentene til strukturfunksjonen for energi og eksponentene til dens inverse funksjon. For beregning av en potenslov er forventningsverdien avgjørende og  $\alpha_1 \neq 1/\beta_1$ .

Fra resultatene går det tydelig fram at det finnes en asymmetri for hvordan energiendringene finner sted i fullt utviklet turbulens for små lengdeskalaer. Energien bruker lenger tid på å øke energinivået, men igjen er det en større sannsynlighet for at dette er tilfellet. For energifrigjøring skjer dette i løpet av en kortere tidsperiode, men igjen er det mindre sannsynlighet for at en energifrigjøring av energien skjer ved neste tilfellet. Dette gir mening.

Asymmetrien i energiutviklingen kan betraktes som en langsom energioppbygging, som etterfølges av en rask energifrigjøring. At fenomenet er tilstede er i første omgang ikke vanskelig å forestille seg - et system som sakte tar til seg energi fra omgivelsene fram til et maksimalt bærekraftnivå for energien, som etterfølges av en rask energifrigjøring. En sammenlikning kan være en havbølge som bryter.

For å spekulere videre i denne asymmetrien kan man se for seg fullt utviklet turbulens, uavhengig av ytre omgivelser. Kolmogorovs teori beskriver turbulens som en oppbygging av eddies i flere størrelser. Den turbulente kinetiske energien øker med lengdeskalaen til eddyen. Når en eddy dør ut blir det en kaskade av den kinetiske energien over til flere mindre eddies. Tiden det tar for en eddy å samle opp energi, kan tenkes å være lenger enn tiden for å ødelegge strukturen, og derav en asymmetrisk forventningsverdi for energifrigjøring og energiøking.

Det er fortsatt mange aspekter innenfor denne vitenskapen som trenger å utforskes nærmere. I denne oppgaven er fenomenets eksistens bekreftet og noen sammenhenger for asymmetrien er beskrevet. Beregningene er gjort på energi generert ved GOY skallmodell for fullt utviklet turbulens. For denne oppgaven var det planlagt å sammenlikne de eventuelle resultatene med en reell måleserie for energien i turbulens. Dette var ikke mulig å skaffe innenfor oppgavens tidsrom. En sammenlikning med reelle data bør gjennomføres før asymmetriens kan endelig stadfestes. En sammenlikning med andre turbulensmodeller eller GOY modellen med en høyere oppløsning (flere skall), bør også gjennomføres. Resultatene beskrevet i denne oppgaven er likevel

## KAPITTEL 6. KONKLUSJON

---

interessante og, så vidt undertegnede er klar over, ikke blitt omtalt tidligere.

# Bibliografi

- [1] Golf Ball Dimples & Drag, 28. mars 2011. "<http://www.aerospaceweb.org/question/aerodynamics/q0215.shtml>".
- [2] Tomas Bohr, Mogens H. Jensen, Giovanni Paladin (1998). *Dynamical Systems Approach to Turbulence*.
- [3] A.N. Kolmogorov, C.R. Acad. Sci. USSR 30, 301; *ibid* 32, 16 (1941).
- [4] Langley Research Center of the United States National Aeronautics and Space Administration (NASA) under Photo ID: EL-1996-00130.
- [5] S.B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [6] Stokes, G.G. 1851, "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums". *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9, 8.
- [7] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education Ltd., 2007.
- [8] Tennekes, H.; Lumley, J.L. (1972), *A First Course in Turbulence*, Cambridge, MA: MIT Press.
- [9] Vortex Street, 3. april 2011. "<http://easyweb.easynet.co.uk/iany/patterns/street.htm>".
- [10] Boussinesq, J. (1877), *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences XXIII, 1, pp. 1-680.
- [11] Roberts, P.J.W., & Webster, D.R. (2002). *Turbulent Diffusion*. In Shen, Hayley H.. *Environmental fluid mechanics: theories and applications*. New York: American Society of Civil Engineers.

## BIBLIOGRAFI

---

- [12] Csanady, G.T. (1973). Turbulent diffusion in the environment. Geophysics and astrophysics monographs. 3. Boston, MA: D.Reidel Publishing Company.
- [13] Pandis, Spyros N.; Seinfeld, John H. (2006). Atmospheric chemistry and physics: from air pollution to climate change. J. Wiley.
- [14] Turbulence free-stream boundary conditions, 3. april 2011. "[http://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence\\_boundary\\_conditions](http://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_boundary_conditions)".
- [15] Landahl, M.T. & E. Mollo-Christensen. Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics.
- [16] E. B. Gledzer, Sov. Phys. Dokl. 18, 216 (1973).
- [17] M. Yamada and K. Ohkitani. J. Phys. Soc. Jpn. , 56, 4210, (1987).
- [18] L. Biferale, A. Lambert, R. Lima, and G. Paladin. Physica D 80, 105 (1995).
- [19] Kadanoff, L. P., Lohse, D., Wang, J. and Benzi, R. 1995, Phys. Fluids 7, 617.
- [20] John C. Bowman, Bruno Eckhardt and Jahanshah Davoudi, Spectral Reduction of the GOY Shell Turbulence Model "<http://www.math.ualberta.ca/bowman/talks>".
- [21] Torsten Kleinow(2002) Testing Continuous Time Models in Financial Markets, Doctoral thesis, Berlin.
- [22] Mogens H. Jensen, Phys. Rev. Vol.83, 1(1999). Multiscaling and Structure Functions in Turbulence: An Alternative Approach,.
- [23] U. Frisch, "Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov", Cambridge University Press (1995).
- [24] I. Simonsen, M.H. Jensen, A. Johansen, Eur. Phys. J. B 27 (2002) 583.
- [25] FRACTALS, by Jens Feder, Plenum Press, N. Y., 1988.