

# Svakt vekselvirkende Bosegasser ved lave temperaturer

Et studium av Bose-Einstein kondensasjon ved bruk av effektiv feltteori.

**Morten Ingvaldsen**

Master i lærerutdanning med realfag

Oppgaven levert: November 2009

Hovedveileder: Jens Oluf Andersen, IFY



# Sammendrag

I denne masteroppgaven tar vi for oss svakt vekselvirkende Bosegasser, og vi skal se at et slik system har en annen oppførsel enn en ideell gass selv ved temperatur  $T = 0$ . I tillegg skal vi finne en effektiv feltteori for et ikke-relativistisk superfluid med spontant brutt global  $U(1)$ -symmetri. Den effektive feltteorien vil vi sammenligne med feltteorien for svakt vekselvirkende Bosegasser, og vi skal bruke den til å studere korrelasjonsfunksjonen ved endelig temperatur i én, to og tre romlige dimensjoner. Da skal vi se at Bose-Einstein kondensasjon ikke vil skje i én dimensjon selv ved  $T = 0$ , og heller ikke i to dimensjoner når  $T > 0$ . I disse tilfellene vil systemet imidlertid inneholde et kvasikondensat og ha egenskaper som et superfluid.

Oppgaven er strukturert som følger: I kapittel 1 gir vi en introduksjon til Bose-Einstein kondensasjon ved å studere en ideell Bosegass, og vi skal se at gassen endrer oppførsel når temperaturen synker under en bestemt kritisk temperatur. I kapittel 2 blir det gitt en innføring i grunnleggende teori, som resten av oppgaven bygger på, og i kapittel 3 og 4 fortsetter vi med å studere svakt vekselvirkende Bosegasser. Her tar vi for oss Bogoliubovs metode og ser hvordan den beskriver en svakt vekselvirkende Bosegass ved  $T = 0$ . Videre i kapittel 5, ser vi på spontane symmetribrudd med det mål å gi bedre innsikt i hva som skjer når en Bosegass kondenserer. Her blir også Goldstones teorem introdusert. I det neste kapittelet utvikler vi en effektiv feltteori for et ikke-relativistisk superfluid med brutt global  $U(1)$ -symmetri og sammenligner den med feltteorien for svakt vekselvirkende Bosegasser. Til slutt gjør vi et nærmere studium av den effektive feltteorien og bruker den til å studere korrelasjonsfunksjonen ved lange avstander.



# Innhold

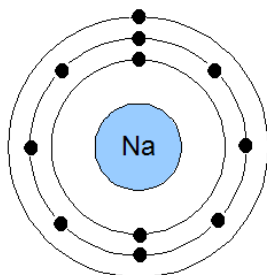
<b>1</b>	<b>Ideell Bosegass</b>	<b>5</b>
1.1	Den kritiske temperaturen . . . . .	5
1.2	Partikler i boks . . . . .	7
1.2.1	Det storkanoniske potensialet . . . . .	7
1.2.2	Kritisk temperatur og volum . . . . .	8
1.2.3	Bose-Einstein kondensasjon . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Forberedende teori</b>	<b>15</b>
2.1	Notasjoner . . . . .	15
2.2	Andrekvantisering . . . . .	16
2.2.1	Tilstandsvektorer . . . . .	16
2.2.2	Heve- og senkeoperatorer . . . . .	19
2.2.3	Andrekvantisering av kinetisk energi . . . . .	21
2.2.4	Hamiltonoperatoren til en svakt vekselvirkende Bosegass . . . . .	24
2.3	Schrödingerbildet og Heisenbergbildet . . . . .	25
2.4	Kvantefeltteori . . . . .	26
2.4.1	Generaliserte koordinater og konjugert impuls . . . . .	26
2.4.2	Virkning og Euler-Lagrangeligninger . . . . .	28
2.4.3	Symmetri og Noethers teorem . . . . .	28
2.4.4	Propagatoren . . . . .	30
2.5	Funksjonalintegralformalismen . . . . .	34
2.5.1	Egentilstander av feltoperatorer . . . . .	34
2.5.2	Funksjonalintegraler . . . . .	35
2.5.3	Partisjonsfunksjonen og imaginær tid . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Effektiv feltteori og svake vekselvirkninger</b>	<b>41</b>
3.1	Svake vekselvirkninger . . . . .	41
3.2	Effektive feltteorier . . . . .	43
3.3	Bornapprosimasjonen . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Bogoliubovs metode</b>	<b>47</b>
4.1	Grunntilstandsenergien . . . . .	47
4.2	Partikler og eksitasjoner . . . . .	54

4.3	Partikkelimpuls . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Spontan symmetribrudd</b>	<b>59</b>
5.1	Isingmodellen og degenererte grunntilstander . . . . .	59
5.2	Bølgefunksjon og ordensparameter . . . . .	60
5.3	Symmetribrudd og kjemisk potensial . . . . .	62
5.4	Superposisjon og domener . . . . .	66
5.5	Goldstones teorem . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Effektiv feltteori for ikke-relativistiske superfluid</b>	<b>69</b>
6.1	Goldstonefeltet . . . . .	69
6.2	Effektiv Lagrangetetthet . . . . .	70
6.3	'Matching' . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Korrelasjonsfunksjonen</b>	<b>77</b>
7.1	Kvantisering . . . . .	77
7.2	Propagatoren i Minkowskirommet . . . . .	79
7.3	Termisk midling av tilstander . . . . .	81
7.4	Den termiske Greensfunksjonen . . . . .	82
7.5	Matsubarafrekvenser . . . . .	83
7.6	Den termiske Greensfunksjonen i impulsrommet . . . . .	84
7.7	Korrelasjonsfunksjonen og store avstander . . . . .	87
7.8	Korrelasjonsfunksjonen i én, to og tre dimensjoner . . . . .	90
	7.8.1 Én dimensjon . . . . .	91
	7.8.2 To dimensjoner . . . . .	94
	7.8.3 Tre dimensjoner . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Oppsummering</b>	<b>99</b>

# Innledning

Gjennom historien har flere avanserte metoder for å nå temperaturer ned mot det absolute nullpunkt blitt utviklet, og på veien mot dette målet har man oppdaget ny og spennende fysikk<sup>1</sup>. Tidlig på 1900-tallet klarte Kamerlingh Onnes å nå temperaturer under 10 K, og i 1911 oppdaget han at den elektriske resistansen i kvikksølv falt brått ned til en verdi tilnærmet lik null ved 4.2 K. Med dette var det første tilfellet av *superledning* blitt observert. I 1938 ble det påvist at  $^4\text{He}$  kunne strømme uten friksjon ved temperaturer under 2.17 K og ved tilstrekkelig lavt trykk. En slik væske ble raskt kalt for et *superfluid*, og den viskositetsfrie fasen til  $^4\text{He}$  ble ofte omtalt som He-II. På 70-tallet ble det oppdaget at også flytende  $^3\text{He}$  har en viskositetsfrie fase, og i 1995 ble *Bose-Einstein kondensasjon* (BEK) påvist for første gang i tynne gasser. Da klarte forskerteamene ledet av Cornell og Wieman ved universitetet i Boulder og av Ketterle ved MIT i Massachusetts å observere BEK i tynne gasser av  $^{87}\text{Rb}$  og  $^{23}\text{Na}$ . For dette arbeidet ble de tildelt Nobelprisen i fysikk i 2001.

I kvantemekanikken kan alle partikler deles inn i to klasser. Den ene klassen kalles bosoner og har heltallig spinn, og den andre kalles fermioner og har halvtallig spinn. Én av forskjellene mellom klassene er at fermionene imotsetning til bosonene følger *Pauliprinsippet*. Dette prinsippet sier at det bare kan være ett fermion i hver én-partikkeltilstand. For eksempel er elektroner fermioner, og at elektronene følger Pauliprinsippet kan illustreres ved å studere elektronskallene rundt en atomkjerne. I det innerste skallet finnes



Figur 1: En modell av et natriumatom. Vi ser at det er to elektroner i innerste elektron-skall, åtte i det neste og ett elektron i det ytterste skallet.

---

<sup>1</sup>Denne innledningen er basert på refs. [1, 2, 3, 4].

det bare to én-partikkeltilstander. Ett med spinn *opp* og ett med spinn *ned*, og på grunn av at elektronene følger Pauliprinsippet, er det bare plass til to elektroner i dette skallet. Hadde elektronene derimot vært bosoner, ville det vært annerledes. For bosoner følger ikke Pauliprinsippet, og ett boson kan gjerne være i samme kvantemekaniske tilstand som andre bosoner. Hvis elektronene hadde vært bosoner, ville det dermed vært plass til flere enn to elektroner i det innerste skallet.

Tenk at vi har en ideell Bosegass<sup>2</sup> ved romtemperatur og at vi studerer gassen mens vi kjøler den ned. Da vil flere og flere partikler '*falle ned i*' grunntilstanden. Det vil si at flere og flere partikler vil være i den tilstanden der de har minst energi, og tilslutt ved  $T = 0$  er energien til gassen minimal og alle partiklene er i grunntilstanden. I kapittel 1 skal vi studere en ideell Bosegass i nærmere detalj, og vi skal se at straks vi har et makroskopisk antall partikler i grunntilstanden, vil gassen gjennomgå en faseovergang. Faseovergangen skjer ved en kritisk temperatur  $T_k$  og for temperaturer der  $T < T_k$  vil gassen oppføre seg svært annerledes enn når  $T > T_k$ . Denne faseovergangen kalles for Bose-Einstein kondensasjon, og det er partiklene i grunntilstanden som utgjør Bose-Einstein kondensatet

Det er ikke bare ideelle Bosegasser som endrer oppførsel ved BEK. Et eksempel er  $^4\text{He}$  som ved BEK blir til et viskositetsfritt superfluid. Også superledning er nært forbundet med BEK. Når det går elektrisk strøm gjennom en leder, er det elektroner som beveger seg gjennom materialet. Elektronene er fermioner med halvtallig spinn og kan derfor ikke kondensere helt uten videre. Men ved avkjøling vil elektronene gå sammen to-og-to, og hvert elektronpar kan dermed sees på som et boson. Sammenhengen mellom BEK og superledning, blir med dette at en leder blir superledende når elektronparene danner et Bose-Einstein kondensat. En væske av fermioner kan også bli til et superfluid ved å danne par som kan kondensere. Et eksempel på dette er  $^3\text{He}$ .

I prinsippet kan vi lage et Bose-Einstein kondensat ved å ta en Bosegass og kjøle den ned helt til et makroskopisk antall partikler befinner seg i grunntilstanden. Men så enkelt er det ikke i virkeligheten. Ved avkjøling vil mer kjente faseoverganger fra gass til væske og faststoff forekomme, og fordi et faststoff ikke kan kondensere til et Bose-Einstein kondensat, må slike faseoverganger forhindres. En væske kan imidlertid danne et kondensat. For eksempel blir  $^4\text{He}$  til væske før den blir et superfluid. I 1995 klarte imidlertid forskerteamene ved universitetet i Boulder og ved MIT-laben i Massachusetts å gjøre noe spesielt. De klarte å kjøle ned en gass helt til de kunne observere BEK uten at gassen ble til væske først. De lot gassen være ekstremt tynn slik at partiklene vekselvirket minimalt med hverandre. Den tynne gassen fanget de i en magnetisk felle, og ved temperaturer lavere enn  $\sim 10^{-9}$  K, observerte de ved hjelp av forskjellig avansert måleutstyr at gassen inneholdt et Bose-Einstein kondensat. Dette var et stort gjennombrudd, og det var blant annet fordi tynne gasser er mye mindre kompliserte enn væsker. I tynne gasser er det svake vekselvirkninger mellom atomene, og de er derfor mye enklere å studere fra en teoretisk synsvinkel. Etter 1995 fikk man dermed en unik mulighet til å sammenligne teori

---

<sup>2</sup>Med ideell gass mener vi at partiklene ikke vekselvirker med hverandre.



med praksis, og dette medførte at interessen for BEK økte betraktelig. Flere forskere verden over begynte med både teoretiske og eksperimentelle studier av BEK, og forskningen på dette feltet har derfor vært svært fruktbar og spennende.



# Kapittel 1

## Ideell Bosegass

Det var i 1925 at Albert Einstein, på grunnlag av en artikkel av den indiske fysikeren Satyendra Nath Bose, fant ut at en ideell Bosegass går over i en annen fase ved en kritisk temperatur  $T_k$ . Med dette hadde han oppdaget et nytt fenomen kalt Bose-Einstein kondensasjon. I dette kapitlet skal vi gjøre et nærmere studium av en ideell Bosegass. Vi skal regne ut noen termodynamiske størrelser, og vi skal se at gassen endrer oppførsel ved  $T = T_k$ . I tillegg vil vi også studere hva som skjer fra et kvantemekanisk ståsted. I kvantemekanikken blir ethvert system gitt en bølgenatur, og hver partikkel vil vi kunne se på som en bølge med en utstrekning av samme størrelsesorden som de Broglie bølgelengden  $\lambda_T$ . Denne lengden er temperaturavhengig og øker ved minkende temperatur. Når temperaturen faller, vil vi etterhvert komme til et punkt der partiklenes bølgefunksjoner overlapper. Det vil si at  $\lambda_T \sim d$  der  $d$  er den midlere avstanden mellom partiklene. I dette kapitlet skal vi se at det er nettopp dette som skjer når temperaturen nærmer seg  $T_k$ . Dette kapitlet tar utgangspunkt i refs. [2, 5, 6].

### 1.1 Den kritiske temperaturen

Vi lar  $\psi_i(\mathbf{r})$  være bølgefunksjonen til en partikkel med energi  $\epsilon_i$ . Den vil da oppfylle Schrödingerligningen:

$$\hat{H}\psi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i\psi_i(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

der  $\hat{H}$  er en Hamiltonoperator med egenverdi  $\epsilon_i$ . Vi tenker oss nå at vi har et åpent system av mange bosoner, og hvert boson har en bølgefunksjon som tilfredsstiller Schrödingerligningen over. I dette systemet er det i gjennomsnitt  $n_i$  partikler med energi  $\epsilon_i$ , og  $n_i$  er gitt ved Bose-Einsteinfordelingen:

$$n_i = \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_i - \mu) - 1}. \quad (1.2)$$

Her er  $\beta = k_B T$  og  $k_B$  er Boltzmannskonstant. I tillegg er  $\mu$  det kjemiske potensialet. Ved hjelp av denne ligningen finner vi et uttrykk for det totale antallet partikler  $N$  i gassen:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^{\infty} n_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_i - \mu) - 1}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

og her summeres det over alle partikkeltallene  $n_i$ . La oss nå anta at den laveste energien en partikkel kan ha, er  $\epsilon_0$  og enhver partikkel som har denne energien sier vi er i grunntilstanden. Det midlere partikkeltallet i grunntilstanden kan vi dermed skrive som:

$$n_0 = \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_0 - \mu) - 1}. \quad (1.4)$$

Denne ligningen gir imidlertid at  $\mu < \epsilon_0$  da partikkeltallet  $n_0$  ikke kan være negativt. Men hvis  $\mu \rightarrow \epsilon_0$ , vil  $n_0 \rightarrow \infty$ , og grunntilstanden blir besatt av et makroskopisk antall partikler. Ved BEK, er det nettopp dette som skjer. Ved BEK, vil  $\mu \rightarrow \epsilon_0$ , og at det er slik, kan vi se ved å studere det midlere antallet eksiterte partikler:

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_i - \mu) - 1}. \quad (1.5)$$

Hvis vi lar  $T$  være konstant, kan vi merke oss at  $\tilde{N}$  er en glatt funksjon av  $\mu$ , og at den har et maksimum  $N_{\max}$  der  $\mu = \epsilon_0$ . Dette maksimumet kan skrives som:

$$N_{\max}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_i - \epsilon_0) - 1}. \quad (1.6)$$

og er en funksjon av temperaturen. I tillegg øker  $N_{\max}(T)$  med økende temperatur, og hvis vi krever at det totale partikkeltallet  $N$  er konstant, blir  $N_{\max}(T) > N$  ved tilstrekkelig høye temperaturer. I slike tilfeller gir normeringsbetingelsen:

$$N = n_0 + \tilde{N}, \quad (1.7)$$

at  $\mu < \epsilon_0$ , og at vi dermed ikke har et makroskopisk antall partikler i grunntilstanden. Ved såpass høye temperaturer kan vi anta at energien til hver partikkel er større enn  $\epsilon_0$ , og vi kan derfor sette  $N = \tilde{N}$ . I motsatt fall der  $N_{\max}(T) < N$ , kan vi ikke neglisjere  $n_0$  i ligning (1.7), og det kjemiske potensialet må ta en verdi der  $\epsilon_0 - \mu \approx 0$ .

Bose-Einstein kondensasjon skjer ved en kritisk temperatur  $T_k$ . Når gassen avkjøles til temperaturer  $T < T_k$  har vi et makroskopisk antall partikler i grunntilstanden, og en passende definisjon for  $T_k$  blir at  $T_k$  er den laveste temperaturen som tillater at alle partiklene har en energi større enn  $\epsilon_0$ . Det vil si temperaturen der:

$$N_{\max}(T_k) = N. \quad (1.8)$$

Når  $T_k$  er bestemt slik, kan vi konkludere fra diskusjonen over at  $\epsilon_0 - \mu \approx 0$  og at det er et makroskopisk antall partikler i grunntilstanden når  $T < T_k$ .

## 1.2 Partikler i boks

La oss anta at vi har en ideell gass i et volum  $V$  med periodiske randbetingelser. Energien til en partikkel med en vilkårlig impuls  $\mathbf{p}$  er da gitt ved:

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}, \quad (1.9)$$

der  $m$  er massen til partikkelen. Vi merker oss her at denne dispersjonsrelasjonen gir at grunntilstandsenergien er  $\epsilon(0) = 0$ , og at dette gir at  $\mu \rightarrow 0$  når et makroskopisk antall partikler opptar grunntilstanden.

I det følgende skal vi studere denne gassen i nærmere detalj. Vi skal finne et matematisk uttrykk for den kritiske temperaturen, og i tillegg skal vi se at det finnes et kritisk volum for BEK. Vi skal også finne varmekapasiteten  $C_V$  og trykket  $P$  til gassen, og se at gassen endrer oppførsel når et makroskopisk antall partikler opptar grunntilstanden. Men aller først skal vi finne det storkanoniske potensialet  $\Omega$ .

### 1.2.1 Det storkanoniske potensialet

Den storkanoniske partisjonsfunksjonen, for en Bosegass der partiklene følger dispersjonsrelasjonen  $\epsilon(\mathbf{p})$ , er gitt ved:

$$\begin{aligned} Z &= \prod_{\mathbf{p}} \left( \sum_{n_{\mathbf{p}}=0}^{\infty} e^{-\beta n_{\mathbf{p}}(\epsilon(\mathbf{p})-\mu)} \right) \\ &= \prod_{\mathbf{p}} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon(\mathbf{p})-\mu)}} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Her er  $n_{\mathbf{p}}$  antall partikler med impuls  $\mathbf{p}$ . Vi har også at det storkanoniske potensialet er gitt ved:

$$\begin{aligned} \Omega &= -k_B T \ln Z \\ &= k_B T \sum_{\mathbf{p}} \ln \left[ 1 - e^{-\beta(\epsilon(\mathbf{p})-\mu)} \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Det storkanoniske potensialet er imidlertid også gitt ved  $\Omega = E - TS - \mu N$  der  $S$  er entropien til systemet,  $N$  er det totale partikkeltallet og  $E$  er energien til gassen. Når vi kjenner  $\Omega$ , kan vi derfor også finne både  $S$ ,  $N$  og  $E$  ved hjelp av følgende ligninger:

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad (1.12)$$

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}, \quad (1.13)$$

$$E = \Omega - T \frac{\partial \Omega}{\partial T} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}. \quad (1.14)$$

I tillegg er trykket  $P$  i homogene gasser relatert til det storkanoniske potensialet på følgende måte:

$$\Omega = PV. \quad (1.15)$$

Videre i kapitlet vil vi studere systemet i kontinuumsgrensen der  $V \rightarrow \infty$ . I denne grensen, kan vi se på impulsen  $\mathbf{p}$  som en kontinuerlig variabel og summen over alle impulsene i ligning (1.11), kan vi erstatte med et integral på følgende måte:

$$\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} = \int_0^\infty dp g(p). \quad (1.16)$$

Her har vi integrert ut alle vinklene og  $g(p)$  er tettheten av tilstander med impuls  $p$  gitt ved:

$$g(p) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2. \quad (1.17)$$

Når vi erstatter summetegnet med et integral, får vi ikke regnet med tilstanden der  $p = 0$ . Dette kan vi se ved at  $g(0) = 0$ , og vi må derfor trekke ut dette leddet før vi tar kontinuumsgrensen. Det storkanoniske potensialet kan dermed skrives som:

$$\begin{aligned} \Omega &= k_B T \ln [1 - z] + k_B T \int_0^\infty dp g(p) \ln [1 - ze^{-\beta\epsilon(\mathbf{p})}] \\ &= k_B T \ln [1 - z] - \frac{k_B T V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Her har vi innført fugasiteten  $z = e^{\beta\mu}$  og  $\lambda_T$  er de Broglie bølgelengden gitt ved:

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{\beta 2\pi\hbar^2}{m}}. \quad (1.19)$$

I tillegg er funksjonen  $g_{5/2}(z)$  er definert ved:

$$\begin{aligned} g_{5/2}(z) &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \ln [1 - ze^{-x^2}] \\ &= \sum_{i=1}^\infty \frac{z^i}{i^{5/2}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

der  $x^2 \equiv \beta p^2 / 2m$ .

### 1.2.2 Kritisk temperatur og volum

Vi skal nå finne et uttrykk for den kritiske temperaturen  $T_k$ . Dette skal vi gjøre ved å først finne  $N_{\max}(T)$  og deretter bruke ligning (1.8). Med dette som mål, tar vi utgangspunkt i ligning (1.13) og finner et uttrykk for det totale partikkeltallet  $N$  i kontinuumsgrensen. Vi bruker nå kjerneregelen:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \beta z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.21)$$

og definerer en ny funksjon  $g_{3/2}(z)$ :

$$\begin{aligned} g_{3/2}(z) &= z \frac{\partial}{\partial z} g_{5/2}(z) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Det totale partikkeltallet  $N$ , som er gitt ved ligning (1.13), kan da skrives som:

$$N = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z). \quad (1.23)$$

Det første leddet er det midlere partikkeltallet i kondensatet  $n_0$ , og det andre er antallet partikler i eksiterte energitilstander  $\tilde{N}$ . Med dette finner vi følgende uttrykk for  $N_{\max}(T)$ :

$$\begin{aligned} N_{\max}(T) &= \tilde{N}(T, \mu = 0) \\ &= \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(1). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Hvis vi nå bruker dette uttrykket i ligning (1.8), finner vi at

$$N = V \left( \frac{2\pi\hbar^2}{k_B T_k m} \right)^{3/2} g_{3/2}(1), \quad (1.25)$$

og at den kritiske temperaturen til en ideell Bosegass er gitt ved:

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left( \frac{\rho}{g_{3/2}(1)} \right)^{2/3} \\ &= \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left( \frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

I denne utregningen har vi dratt nytte av at  $g_{3/2}(1)$  er det samme som Riemanns zeta-funksjon  $\zeta(3/2)$ , og i tillegg er  $\rho \equiv N/V$  partikkeltettheten. Vi ser at den kritiske temperaturen er bestemt av massen  $m$  til partiklene, og at små masser gir høyere kritisk temperatur. Med andre ord vil kvanteeffekter påvirke gassens egenskaper ved høyere temperaturer når partiklene har små masser.

Vi nevnte innledningsvis at når vi har BEK, vil partiklenes bølgefunksjon overlappe, og det skal vi nå se ved å bruke ligning (1.25). La den midlere avstanden mellom partiklene være  $d = \rho^{-1/3}$ . Da gir ligning (1.25) at

$$\begin{aligned} \left( \frac{\lambda_T}{d} \right)^3 &= \zeta(3/2) \\ &= 2,612. \end{aligned} \quad (1.27)$$

og den midlere avstanden mellom partiklene  $d$  er mindre enn den termiske bølgelengden  $\lambda_T$  når  $T = T_k$ . Dette gjelder også ved lavere temperaturer. Da vil

$$\left(\frac{\lambda_T}{d}\right)^3 > 2,612. \quad (1.28)$$

og dette betyr igjen at partiklenes bølgefunksjoner overlapper når vi har BEK.

La  $v \equiv V/N = 1/\rho$ , og la temperaturen være konstant. Hvis vi nå komprimerer gassen slik at volumet  $v$  minker, vil følgende bli at bølgefunksjonene til partiklene vil begynne å overlappe ved et kritisk volum  $v_k$ , og vi vil få BEK. Det kritiske volumet  $v_k$  for når dette skjer finner vi også ved hjelp av ligning (1.25) og er gitt ved:

$$v_k = \frac{\lambda_T^3}{\zeta(3/2)}. \quad (1.29)$$

Mot slutten av kapitlet skal vi gjøre et nærmere studium av isotermene til gassen, men inntil videre lar vi volumet  $v$  være konstant og fortsetter med å studere systemet ved ulike temperaturer.

### 1.2.3 Bose-Einstein kondensasjon

Når  $T < T_k$ , vil ikke det kjemiske potensialet  $\mu$  nødvendigvis være lik null. Dette henger sammen med partikkeltallet  $n_0$  er begrenset til å være mindre enn  $N$ . Når vi nå skal studere de termodynamiske egenskapene til systemet, vil vi la  $N \rightarrow \infty$  og  $V \rightarrow \infty$  slik at partikkeltettheten  $\rho = N/V$  er konstant. Dette kalles for den termodynamiske grensen, og i denne grensen vil  $\mu = 0$  når  $T < T_k$ .

Antallet partikler som er i eksiterte energitilstander  $\tilde{N}$  kan skrives som:

$$\tilde{N} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z). \quad (1.30)$$

Ligning (1.25) og (1.30) gir dermed følgende uttrykk for  $\tilde{N}$  ved temperaturer  $T < T_k$ :

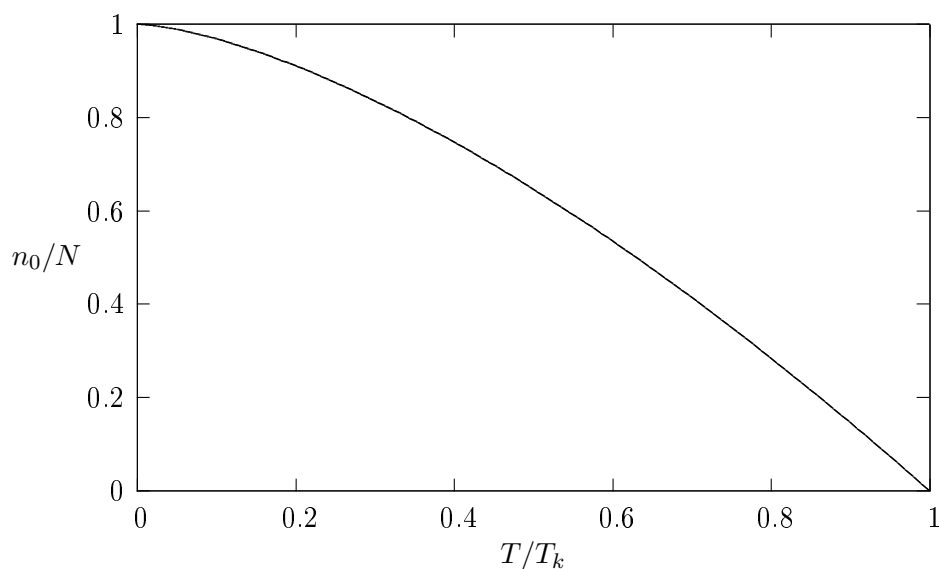
$$\tilde{N} = \left(\frac{T}{T_k}\right)^{3/2} N. \quad (1.31)$$

Antallet partikler i kondensatet kan vi også finne ved å kreve at normeringsbetingelsen  $N = n_0 + \tilde{N}$  skal være oppfylt:

$$\begin{aligned} n_0 &= N - \tilde{N} \\ &= N \left[ 1 - \left(\frac{T}{T_k}\right)^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (1.32)$$

og dette partikkeltallet er plottet i Figur 1.1. Vi ser at  $n_0$  er makroskopisk, og at alle partiklene vil være i kondensatet ved  $T = 0$ .



Figur 1.1: Andelen kondenserte partikler som funksjon av  $T/T_k$ 

La oss nå finne den spesifikke varmekapasiteten  $C_V$  til gassen, og denne finner vi ved å derivere energien  $E$  med hensyn på temperaturen:

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V. \quad (1.33)$$

Energien til systemet, er gitt ved:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \epsilon(\mathbf{p}) \\ &= \int_0^{\infty} dp g(p) \frac{\epsilon(p)}{\exp \beta(\epsilon(p) - \mu) - 1} \\ &= \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z), \end{aligned} \quad (1.34)$$

og når  $T < T_k$ , er  $z = 1$  og energien tar følgende form

$$E = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1). \quad (1.35)$$

Gassens spesifikke varmekapasitet ved temperaturer der  $T < T_k$  finner vi dermed ved å derivere ligning (1.35) med hensyn på  $T$ . Det gir:

$$C_V = \frac{15}{4} \frac{V k_B}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1). \quad (1.36)$$

Ved høyere temperaturer  $T > T_k$ , deriverer vi ligning (1.34), og hvis vi bruker at

$$\frac{\partial}{\partial T} = \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.37)$$

finner vi følgende:

$$C_V = \frac{15}{4} \frac{V k_B}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) + \frac{3}{2} k_B T \left( \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z) \right) \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right). \quad (1.38)$$

Dette uttrykket kan vi også skrive penere ved hjelp av ligning (1.30). Ved  $T > T_k$  er  $\tilde{N} = N$  og derivasjon av ligning (1.30) med hensyn på  $T$  gir:

$$0 = \frac{V}{\lambda^3} \left[ \frac{3}{2T} g_{3/2}(z) + g_{1/2}(z) \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \right]. \quad (1.39)$$

Ligning (1.38) og (1.39) gir nå følgende uttrykk for den spesifikke varmekapasiteten ved  $T > T_k$ :

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{15}{4} \frac{V k_B}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) + \frac{3}{2} k_B T \cdot N \cdot \left( -\frac{3}{2T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \right) \\ &= \frac{15}{4} \frac{V k_B}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} k_B N \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

I grensen der  $z \rightarrow 1$ , divergerer  $g_{1/2}(z)$  og ligning (1.40) reduseres til ligning (1.36). Varmekapasiteten er dermed kontinuerlig i  $T = T_k$ . I Figur 1.2 har vi plottet  $C_V$  som funksjon av temperaturen, og vi ser at gassen endrer oppførsel ved den kritiske temperaturen. Ved  $T = T_k$  har grafen en knekk og i dette punktet er den deriverte  $\partial C_V / \partial T = \partial^2 E / \partial T^2$  diskontinuerlig. Dette er tyder på at vi har en faseovergang ved den kritiske temperaturen, og denne faseovergangen følger direkte av statistiske beregninger.

Det faktum at vi har en faseovergang ved den kritiske temperaturen, kommer også klart frem når vi studerer isotermene til gassen. Trykket  $P$  finner vi ved hjelp av ligning (1.15):

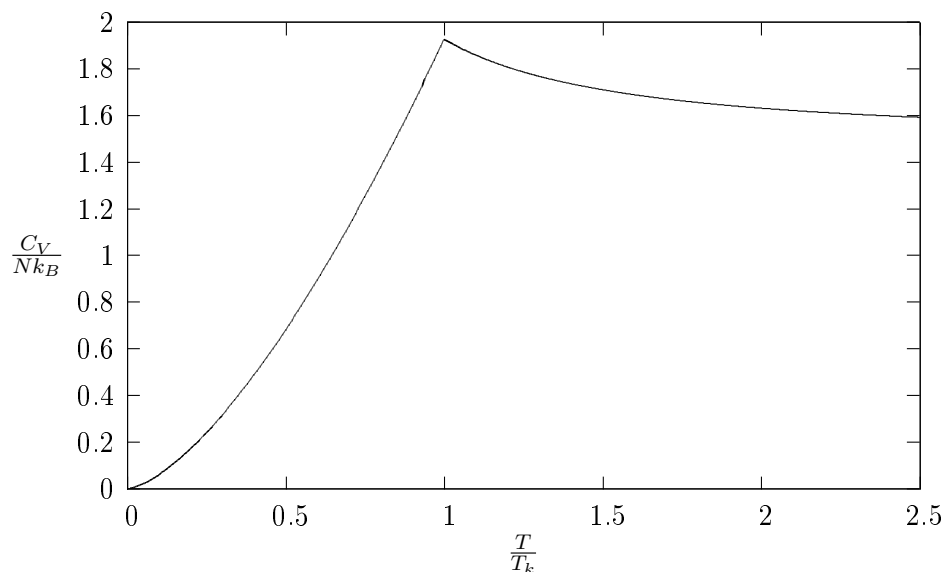
$$P = \frac{k_B T \ln[1 - z]}{V} + \frac{k_B T}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z), \quad (1.41)$$

og i den termodynamiske grensen forsvinner det første leddet. Det vil si at de kondenserte partiklene ikke bidrar til trykket, og vi kan skrive:

$$P = k_B T \frac{1}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z). \quad (1.42)$$

I den kondenserte fasen er  $z = 1$ , og da vil trykket være uavhengig av volumet:

$$P = k_B T \frac{1}{\lambda_T^3} \zeta(5/2), \quad (1.43)$$



Figur 1.2:  $C_V/Nk_B$  som funksjon av  $T/T_k$

I tillegg vil trykket forsvinne når  $T \rightarrow 0$ , og i denne grensen ser vi igjen at partiklene i kondensatet ikke bidrar til trykket i gassen.

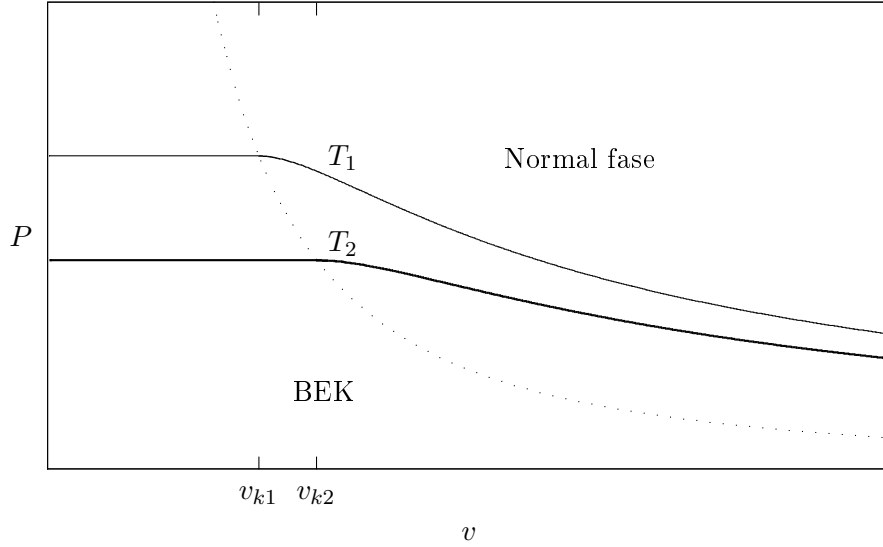
Hvis vi bruker uttrykket for det kritiske volumet  $v_k$  i ligning (1.29), kan vi også finne en sammenheng mellom  $P$  og  $v_k$  som gir en linje i  $P$ - $v$ -planet som skiller de to ulike fasene:

$$Pv_k^{5/3} = 2\pi\hbar^2 m \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)^{5/3}}. \quad (1.44)$$

I Figur 1.3 har vi skissert ligning (1.44) i tillegg til to isotermer i  $P$ - $v$ -planet. Isotermene viser trykket  $P$  som funksjon av volumet  $v$  ved to forskjellige temperaturer  $T_1$  og  $T_2$ , og vi ser at trykket er konstant i den kondenserte fasen og avtar for økende  $v$  i den normale fasen.

La oss videre studere  $P$  i den klassiske grensen der  $T \rightarrow \infty$ . I denne grensen, går fugasiteten  $z$  mot null og dette ser vi ved studere ligning (1.23). Når  $T \rightarrow \infty$  kan vi se bort fra at det finnes partikler i grunntilstanden slik at

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} g_{3/2}(z) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \rho \lambda_T^3, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^{3/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$



Figur 1.3: En skisse av ligning (1.44) og to isotermer i  $P$ - $v$ -planet. Den prikkete linjen skiller de to fasene og er gitt ved ligning (1.44). De heltrukne linjene viser  $P$  som funksjon av  $v$  ved to forskjellige temperaturer  $T_1$  og  $T_2$ . Ved temperatur  $T = T_1$  har gassen et kritisk volum  $v_{k1}$  der isothermen skjærer den prikkete linjen, og tilsvarende er  $v_{k2}$  det kritiske volumet til gassen når temperaturen er  $T = T_2$ .

I den klassiske grensen har vi dermed at fugasiteten går mot null. La oss nå sette ligning (1.30) inn i (1.42) slik at

$$\begin{aligned}
 P &= k_B T \frac{\tilde{N} g_{5/2}(z)}{V g_{3/2}(z)} \\
 &\approx k_B T \frac{N g_{5/2}(z)}{V g_{3/2}(z)},
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

og her har vi antatt at temperaturen er såpass stor at  $\tilde{N} \approx N$ . Når  $z \rightarrow 0$  blir  $g_{5/2}(z) \approx g_{3/2}(z) \approx z$  og ligning (1.46) reduseres dermed til den velkjente ideellgassligningen

$$P = \frac{N k_B T}{V}. \tag{1.47}$$

Vi har nå studert en ideell Bosegass ved endelige temperaturer, og vi har sett at den går gjennom en faseovergang ved en kritisk temperatur og ved et kritisk volum. Utregningen av varmekapasiteten og trykket viste klare forskjeller mellom fasene, og denne endringen skyldes et kvantefenomen der et makroskopisk antall partikler opptar én og samme energitilstand.

## Kapittel 2

# Forberedende teori

### 2.1 Notasjoner

Fra nå av bruker vi enheter slik at  $\hbar = k_B = c = 1$  der  $c$  lysfarten. Vi skriver også  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) for rom-tid firervektoren der 0'te komponenten angir tiden. Det vil si at  $x^0 = t$  og at  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) angir de romlige koordinatene. De romlige koordinatene skriver vi ofte som en vektor  $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$  slik at  $x^\mu = (t, \mathbf{r})$ . Ofte sløyfer vi også indeksene  $\mu$ , og hver gang vi skriver  $x$ , mener vi firervektoren  $x = (t, \mathbf{r})$ . En vektor i rommet blir alltid skrevet med **fet** skrift, mens lengden av vektoren skrives i *kursiv*. For eksempel skriver vi:

$$|\mathbf{r}| = r. \quad (2.1)$$

Firervektoren  $x^\mu$  kalles for en kontravariant vektor, og ved hjelp av metrikkensoren  $g_{\mu\nu}$ , som i Minkowskirommet er gitt ved:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

definerer vi den kovariante vektoren  $x_\mu$  slik at

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (2.3)$$

Her har vi brukt Einsteins summekonvensjon som går ut på at man summerer over gjentatt gresk indeks. Vi kan nå skrive skalarproduktet mellom to firervektorer  $k$  og  $p$  på følgende måte:

$$k \cdot p = k_\mu p^\mu = k^\mu p_\mu = k^0 p^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}. \quad (2.4)$$

Hvis vi lar  $\phi$  være en generell funksjon av  $x$  skriver vi den deriverte med hensyn på  $x^\mu$  som

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (2.5)$$

$\partial_\mu \phi$  er en kovariant vektor og den kontravariante vektoren  $\partial^\mu \phi$  er den deriverte med hensyn på  $x_\mu$ . Videre vil vi også la  $\partial_t$  angi derivasjon med hensyn på tiden  $t$ . Det vil si at

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0}. \quad (2.6)$$

## 2.2 Andrekvantisering

Når man studerer mangepartikkelsystemer, som for eksempel en Bosegass, er det vanlig å andrekvantisere teorien, og dette gjør man fordi andrekvantisering gir en oversiktlig og ryddig måte å studere slike systemer på. I dette avsnittet skal vi gi en kort introduksjon til andrekvantisering, og vi skal andrekvantisere Hamiltonoperatoren til en ikke-relativistisk Bosegass med svake vekselvirkninger. Innholdet i dette delkapittelet bygger på refs. [7, 8, 9].

### 2.2.1 Tilstandsvektorer

La oss først studere et system bestående av bare én partikkel. Dette systemet kan være i forskjellige kvantemekaniske tilstander, og hver tilstand er beskrevet av et sett kvantetall  $\lambda$ . Hvis vi for eksempel studerer et translasjonsinvariant system bestående av ett elektron, vil hver tilstand ha en bestemt impuls  $\mathbf{p}$  og spinnretning  $\sigma$ , og i dette tilfellet er  $\lambda$  gitt ved:

$$\lambda = (\mathbf{p}, \sigma). \quad (2.7)$$

I vanlig Diracnotasjon er en én-partikkeltilstand gitt ved en vektor  $|\lambda\rangle$  i et lineært vektorrom  $\mathcal{H}_1$ . Tilstandsvektoren kalles en *ket*-vektor og vektorrommet kalles for et Hilbertrom. Til enhver ket-vektor finnes det en tilsvarende adjungert vektor  $\langle\lambda|$ , kalt *bra*-vektor, og sammenhengen mellom bra- og ket-vektorer er gitt ved skalarproduktet:

$$\langle\lambda_1| \cdot |\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1|\lambda_2\rangle. \quad (2.8)$$

Her har vi latt  $|\lambda_1\rangle$  og  $|\lambda_2\rangle$  være to forskjellige vektorer som tilhører samme basis. Vi antar nå at tilstandene  $|\lambda\rangle$  utgjør en fullstendig ortonormal basis og utspenner hele Hilbertrommet  $\mathcal{H}_1$ <sup>1</sup>. Da vil skalarproduktet være gitt ved:

$$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = \delta_{\lambda_1, \lambda_2}, \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup>I resten av kapitlet lar vi alltid vektorene  $|\lambda\rangle$  være en fullstendig ortonormal basis av  $\mathcal{H}_1$

og er lik én hvis  $\lambda_1 = \lambda_2$ , og lik null hvis  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . I tillegg gjelder fullstendighetsrelasjonen:

$$\sum_{\lambda} |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1. \quad (2.10)$$

Ved hjelp av denne relasjonen kan vi skrive en vilkårlig vektor  $|\psi\rangle$  som en lineærkombinasjon av  $|\lambda\rangle$ :

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda} \langle\lambda|\psi\rangle |\lambda\rangle, \quad (2.11)$$

og skalarproduktet  $\langle\lambda|\psi\rangle$  er et komplekst tall som gir projeksjonen av  $|\psi\rangle$  ned på vektoren  $|\lambda\rangle$ .

I det spesielle tilfellet der  $|\psi\rangle = |\mathbf{r}\rangle$  og beskriver en spinnløs partikkel i punktet  $\mathbf{r}$ , er skalarproduktet  $\langle\mathbf{r}|\lambda\rangle$  bølgefunksjonen til en partikkel med kvantetall  $\lambda$ :

$$\langle\mathbf{r}|\lambda\rangle = \langle\lambda|\mathbf{r}\rangle^* = \psi_{\lambda}(\mathbf{r}). \quad (2.12)$$

La oss nå tenke oss et system der en spinnløs partikkel er beskrevet av vektoren  $|\mathbf{r}\rangle$ . Denne vektoren kan vi ved hjelp av fullstendighetsrelasjonen skrive som en lineærkombinasjon av nye basisvektorer  $|\mathbf{p}\rangle$ , der  $|\mathbf{p}\rangle$  beskriver en partikkel med impuls  $\mathbf{p}$ . I dette tilfellet er skalarproduktet  $\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle$  gitt ved:

$$\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.13)$$

og tilstandsvektoren  $|\mathbf{r}\rangle$  kan dermed skrives som:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}\rangle &= \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) |\mathbf{p}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} |\mathbf{p}\rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hvis vi tar et direkte produkt av to én-partikkeltilstander får vi en to-partikkeltilstand:

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle, \quad (2.15)$$

og Hilbertrommet av to-partikkeltilstander kaller vi  $\mathcal{H}_2$ . I denne ligningen angir den første ket-vektoren tilstanden til partikkel 1 og den andre angir tilstanden til partikkel 2.

Skalarproduktet mellom bra- og ket-vektorer er gitt ved:

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \lambda_2 | \lambda'_1, \lambda'_2) &= \langle\lambda_1 | \lambda'_1\rangle \langle\lambda_2 | \lambda'_2\rangle \\ &= \delta_{\lambda_1, \lambda'_1} \delta_{\lambda_2, \lambda'_2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

og her har vi brukt at én-partikkeltilstandene tilfredsstiller normeringsbetingelsen i ligning (2.9). Tilstandsvektorene  $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$  utgjør også et fullstendig sett og oppfyller fullstendighetsrelasjonen:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\lambda_1, \lambda_2\rangle \langle \lambda_1, \lambda_2| = 1. \quad (2.17)$$

Det er verdt å merke seg at:

$$|\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \neq |\lambda_2\rangle |\lambda_1\rangle \quad (2.18)$$

fordi vektorene beskriver to forskjellige tilstander. I det ene tilfellet har partikkel 1 kvantetall  $\lambda_1$  mens partikkel 2 har kvantetall  $\lambda_2$ . I det andre tilfellet er det omvendt. For to identiske partikler slik som bosoner eller fermioner kan vi ikke vite hvilken partikkel som har kvantetall  $\lambda_1$  og hvilken som har  $\lambda_2$ , og dette gjør at tilstandsvektoren i ligning (2.15) ikke kan beskrive slike partikler. Når vi studerer bosoner må tilstandsvektoren være symmetrisk <sup>2</sup>:

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = |\lambda_2, \lambda_1\rangle, \quad (2.19)$$

mens når vi studerer fermioner, er den antisymmetrisk:

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = -|\lambda_2, \lambda_1\rangle. \quad (2.20)$$

Tilstandsvektoren som beskriver to bosoner er derfor gitt ved:

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle + |\lambda_2\rangle |\lambda_1\rangle], \quad (2.21)$$

og for to fermioner har vi:

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle - |\lambda_2\rangle |\lambda_1\rangle]. \quad (2.22)$$

Her har vi også innført en faktor  $1/\sqrt{2}$  slik at vektorene er normerte.

La oss videre anta at en produkttilstand

$$|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \dots |\lambda_N\rangle, \quad (2.23)$$

som beskriver et system av  $N$  ulike partikler og er en vektor i Hilbertrommet  $\mathcal{H}_N$ . På grunn av at disse vektorene utgjør et fullstendig sett, kan en Bosegass og en Fermigass beskrives som en lineærkombinasjon av slike produkttilstander. Tilstandsvektoren bestemmes slik at den er symmetrisk ved ombytte av to bosoner og antisymmetrisk ved

---

<sup>2</sup>En produkttilstand vil være angitt ved avrundete klammer ')', i motsetning til en mangepartikkeltilstand av bosoner eller fermioner der vi bruker spisse klammer ')'. For eksempler er  $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$  en produkttilstand og  $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$  en tilstand med to bosoner eller fermioner.



ombytte av to fermioner. Det vil si at hvis to fermioner  $i$  og  $j$  bytter kvantetall, vil tilstandsvektorene være antiparallele:

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N\rangle = -|\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N\rangle. \quad (2.24)$$

Når partiklene er bosoner er tilstandene derimot symmetriske, og det er ingen forskjell mellom tilstandsvektorene der to partikler har byttet kvantetall:

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N\rangle = |\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N\rangle. \quad (2.25)$$

Når vi studerer bosoner er det derfor vanlig å skrive tilstandsvektorene som:

$$|n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots\rangle \equiv |\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_N\rangle, \quad (2.26)$$

der  $n_{\lambda_i}$  er antallet partikler med kvantetall  $\lambda_i$ , og  $\lambda'_j$  er kvantetallet til partikkel  $j$ .

### 2.2.2 Heve- og senkeoperatorer

La  $|\Omega\rangle$  være ket-vektoren som beskriver vakuumbilstanden, som er tilstanden der systemet er tomt for partikler. Vi innfører nå heve- og senkeoperatorene  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  og  $\hat{a}_\lambda$ . Heveoperatoren  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  er slik at den skaper en partikkel med kvantetall  $\lambda$ . Når en slik operator virker på vakuumbilstanden, bli det dermed skapt en partikkel i systemet og den nye tilstanden til systemet blir  $|\lambda\rangle$ . Det vil si at

$$\hat{a}_\lambda^\dagger|\Omega\rangle = |\lambda\rangle. \quad (2.27)$$

Tilsvarende fjerner senkeoperatoren  $\hat{a}_\lambda$  en partikkel fra systemet med kvantetall  $\lambda$ , og hvis vi lar  $\hat{a}_\lambda$  virke på  $|\lambda\rangle$  får vi vakuumbilstanden:

$$\hat{a}_\lambda|\lambda\rangle = |\Omega\rangle. \quad (2.28)$$

Det er imidlertid ikke mulig å fjerne en partikkel fra vakuumbilstanden, og når en senkeoperator virker på  $|\Omega\rangle$  får vi:

$$\hat{a}_\lambda|\Omega\rangle = 0. \quad (2.29)$$

Vi vil også merke oss at heve- og senkeoperatorer som skaper og fjerner bosoner følger kommutatorrelasjonene:

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^\dagger] = \hat{a}_\lambda \hat{a}_{\lambda'}^\dagger - \hat{a}_{\lambda'}^\dagger \hat{a}_\lambda = \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad (2.30)$$

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_\lambda^\dagger, \hat{a}_{\lambda'}^\dagger] = 0, \quad (2.31)$$

mens operatorene som heller skaper og fjerner fermioner følger antikommutatorrelasjonene:

$$\{\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^\dagger\} = \hat{a}_\lambda \hat{a}_{\lambda'}^\dagger + \hat{a}_{\lambda'}^\dagger \hat{a}_\lambda = \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad (2.32)$$

$$\{\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}\} = \{\hat{a}_\lambda^\dagger, \hat{a}_{\lambda'}^\dagger\} = 0. \quad (2.33)$$

Hvis vi kombinerer en heveoperator  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  og en senkeoperator  $\hat{a}_\lambda$  får vi en ny operator  $\hat{N}$  gitt ved:

$$\hat{N}_\lambda = \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda. \quad (2.34)$$

Denne operatoren har egenverdier  $n_\lambda$  som er antallet partikler i systemet med kvantetall  $\lambda$ .  $\hat{N}$  kalles derfor for antallsoperatoren. Ved å ta utgangspunkt i at  $\hat{N}$  har denne egenskapen, kan det vises at den nye tilstandsvektoren vi får, når en heve- eller senkeoperator virker på en vilkårlig mange partikkeltilstand, er som følger:

$$\hat{a}_{\lambda_k} |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots, n_{\lambda_k}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\lambda_k}} |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots, (n_{\lambda_k} - 1), \dots\rangle, \quad (2.35)$$

$$\hat{a}_{\lambda_k}^\dagger |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots, n_{\lambda_k}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\lambda_k} + 1} |n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}, \dots, (n_{\lambda_k} + 1), \dots\rangle, \quad (2.36)$$

og er dermed ikke 'riktig normert'.

Heve- og senkeoperatører som skaper og fjerner partikler i punktet  $\mathbf{r}$  skriver vi som  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$  og  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ , og kalles for *feltoperatører*. Disse operatorene skal vi se at vi kan relatere til heve- og senkeoperatorene  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$  og  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  som skaper og fjerner partikler med impuls  $\mathbf{p}$ , og dette skal vi gjøre ved å bruke ligning (2.14). Men først merker vi oss at  $|\mathbf{r}\rangle$  og  $|\mathbf{p}\rangle$  kan skrives som

$$|\mathbf{r}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})|\Omega\rangle, \quad (2.37)$$

$$|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger|\Omega\rangle. \quad (2.38)$$

Da tar ligning (2.14) formen:

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger|\Omega\rangle, \quad (2.39)$$

og vi finner følgende sammenheng mellom  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$  og  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ :

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger. \quad (2.40)$$

Den adjungerte operatoren  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$  kan vi også skrive som en lineærkombinasjon av senkeoperatorene  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  på følgende måte:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (2.41)$$

og ved å Fouriertransformere ligningene over, får vi følgende uttrykk for  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$  og  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ :

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \quad (2.42)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \hat{\psi}(\mathbf{r}). \quad (2.43)$$

I dette tilfellet er  $\mathbf{r}$  et kontinuerlig kvantetall, og når kvantetallene er kontinuerlige, erstattes alle summtegnene med integral  $\sum_\lambda \rightarrow \int d\lambda$ , og alle Kronecker-deltaer med Diracs deltafunksjon  $\delta_{\lambda,\lambda'} \rightarrow \delta(\lambda - \lambda')$ .

### 2.2.3 Andrekvantisering av kinetisk energi

La den kvantemekaniske operatoren for kinetisk energi være  $T$ <sup>3</sup>. Denne operatoren er en én-partikkeloperator og virker på én-partikkeltilstander i Hilbertrommet  $\mathcal{H}_1$ . For eksempel kan vi la en partikkel med masse  $m$  og impuls  $\mathbf{p}$  være beskrevet av tilstandsvektoren  $|\mathbf{p}\rangle$ . Da vil  $T$  operere på følgende måte:

$$T|\mathbf{p}\rangle = \frac{p^2}{2m}|\mathbf{p}\rangle, \quad (2.44)$$

der  $p^2/2m$  er den kinetiske energien til partikkelen. I en generell basis, kan  $T$  også skrives som:

$$T = \sum_{\lambda, \lambda'} |\lambda'\rangle \langle \lambda'| T | \lambda \rangle \langle \lambda|, \quad (2.45)$$

og er fullstendig beskrevet av matriseelementene  $\langle \lambda'| T | \lambda \rangle$ . I Hilbertrommet  $\mathcal{H}_N$ , er operatoren for kinetisk energi gitt ved:

$$T_N = \sum_{i=1}^N T(i), \quad (2.46)$$

og her er  $T(i)$  operatoren som virker på partikkel  $i$ . Anta at vi har en gass av  $N$  partikler med masse  $m$  og som er beskrevet av tilstandsvektoren  $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_N\rangle$ . Da vil  $T(i)$  operere på følgende måte:

$$T(i)|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_N\rangle = \frac{p_i^2}{2m}|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_N\rangle, \quad (2.47)$$

og  $p_i^2/2m$  er den kinetiske energien til partikkel  $i$ . Hvis vi også summerer over alle  $i$  finner vi hvordan  $T_N$  virker på en mangepartikkeltilstand  $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_N\rangle$ :

$$T_N|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_N\rangle = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_N\rangle. \quad (2.48)$$

La oss videre studere hvordan  $T(i)$  virker på en produkttilstand  $|\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N\rangle$ , der  $\lambda_i$  er et vilkårlig sett av kvantetall:

$$\begin{aligned} T(i)|\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N\rangle &= |\lambda_1\rangle |\lambda_2\rangle \dots |\lambda_{i-1}\rangle \left\{ \sum_{\lambda'_i} |\lambda'_i\rangle \langle \lambda'_i| T | \lambda_i \rangle \right\} |\lambda_{i+1}\rangle |\lambda_{i+2}\rangle \dots |\lambda_N\rangle \\ &= \sum_{\lambda'_i} \langle \lambda'_i| T | \lambda_i \rangle |\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}, \lambda'_i, \lambda_{i+1} \dots \lambda_N\rangle. \end{aligned} \quad (2.49)$$

---

<sup>3</sup>I dette avsnittet skal vi finne den andrekvantiserte operatoren for kinetisk energi, og til dette vil vi følge tilsvarende fremgangsmåte som i refs. [7, 10]

På grunn av at tilstandsvektorene for bosoner og fermioner kan skrives som en lineærkombinasjon av produkttilstander, kan det vises at likheten

$$T(i)|\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N\rangle = \sum_{\lambda'_i} \langle \lambda'_i | T | \lambda_i \rangle |\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}, \lambda'_i, \lambda_{i+1} \dots \lambda_N\rangle, \quad (2.50)$$

også gjelder for slike tilstander. Vi summerer nå over alle  $i$ , og finner at

$$T_N |\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{\lambda'_i} \langle \lambda'_i | T | \lambda_i \rangle |\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}, \lambda'_i, \lambda_{i+1} \dots \lambda_N\rangle. \quad (2.51)$$

$T_N$  er en sum av  $N$  én-partikkeloperatorer og kan bare brukes på mangepartikkeltilstander i Hilbertrommet  $\mathcal{H}_N$ , og som beskriver systemer av  $N$  partikler. Vi skal nå se at vi det finnes en andrekvantisert operator  $\hat{T}$  som ikke er begrenset til ett bestemt Hilbertrom, men som kan brukes til å finne den kinetiske energien i systemer med et vilkårlig antall partikler<sup>4</sup>. Denne operatoren er gitt ved:

$$\hat{T} = \sum_{\lambda, \lambda'} \langle \lambda' | T | \lambda \rangle \hat{a}_{\lambda'}^\dagger \hat{a}_\lambda, \quad (2.52)$$

og vi skal nå vise at denne operatoren gir samme resultat som  $T_N$  når den virker på en tilstandsvektor  $|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle$  i  $\mathcal{H}_N$ . Det vil si at

$$T_N |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle = \hat{T} |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle. \quad (2.53)$$

Vi skal bare vise dette for tilfellet der partiklene er bosoner og følger kommutatorrelasjonene i ligning (2.30) og (2.31). Tilsvarende utledning for fermioner vil imidlertid gi samme resultat. La oss først ta for oss kommutatoren  $[\hat{T}, \hat{a}_{\lambda_i}^\dagger]$ :

$$\begin{aligned} [\hat{T}, \hat{a}_{\lambda_i}^\dagger] &= \sum_{\lambda, \lambda'} \langle \lambda' | T | \lambda \rangle [\hat{a}_{\lambda'}^\dagger \hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda_i}^\dagger] \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'} \langle \lambda' | T | \lambda \rangle (\hat{a}_{\lambda'}^\dagger \hat{a}_\lambda \hat{a}_{\lambda_i}^\dagger - \hat{a}_{\lambda_i}^\dagger \hat{a}_{\lambda'}^\dagger \hat{a}_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'} \langle \lambda' | T | \lambda \rangle \hat{a}_{\lambda'}^\dagger (\hat{a}_\lambda \hat{a}_{\lambda_i}^\dagger - \hat{a}_{\lambda_i}^\dagger \hat{a}_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'} \langle \lambda' | T | \lambda \rangle \hat{a}_{\lambda'}^\dagger \delta_{\lambda, \lambda_i} \\ &= \sum_{\lambda'} \langle \lambda' | T | \lambda_i \rangle \hat{a}_{\lambda'}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.54)$$

<sup>4</sup>Alle andrekvantiserte operatore skrives vi med en 'hatt' slik vi har gjort med heve- og senkeoperatorene  $\hat{a}_\lambda$  og  $\hat{a}_\lambda^\dagger$ .

Dette gir at

$$\begin{aligned}
\hat{T}|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle &= \hat{T}\hat{a}_{\lambda_1}^\dagger \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_N}^\dagger |\Omega\rangle \\
&= [\hat{T}, \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger] \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_N}^\dagger |\Omega\rangle + \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger \hat{T} \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_N}^\dagger |\Omega\rangle \\
&= [\hat{T}, \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger] \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_N}^\dagger |\Omega\rangle + \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger [\hat{T}, \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger] \hat{a}_{\lambda_3}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_N}^\dagger |\Omega\rangle \\
&+ \dots + \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_{N-1}}^\dagger [\hat{T}, \hat{a}_{\lambda_N}^\dagger] |\Omega\rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{\lambda'_i} \langle \lambda'_i | T | \lambda_i \rangle \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_{i-1}}^\dagger \hat{a}_{\lambda'_i}^\dagger \hat{a}_{\lambda_{i+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{\lambda_N}^\dagger |\Omega\rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{\lambda'_i} \langle \lambda'_i | T | \lambda_i \rangle |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda'_i, \lambda_{i+1}, \lambda_N\rangle, \tag{2.55}
\end{aligned}$$

og ved sammenligning av ligning (2.51) og (2.55) ser vi at  $\hat{T}$  gir samme resultat som  $T_N$  når den virker på en mangepartikkeltilstand  $|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle$ . Den andrekvantiserte operatoren  $\hat{T}$ , som er gitt ved ligning (2.52), kan dermed brukes til å finne den kinetiske energien i systemer med et vilkårlig antall partikler.

Det er vanlig å bruke posisjonsrepresentasjonen og uttrykke den andrekvantiserte operatoren med posisjonskvantetallet  $\mathbf{r}$ . Ligning (2.52) gir da at  $\hat{T}$  kan skrives som:

$$\hat{T} = \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | T | \mathbf{r} \rangle \hat{\psi}(\mathbf{r}). \tag{2.56}$$

I dette uttrykket er matriseelementet  $\langle \mathbf{r}' | T | \mathbf{r} \rangle$  gitt ved:

$$\langle \mathbf{r}' | T | \mathbf{r} \rangle = \frac{-1}{2m} \nabla^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \tag{2.57}$$

og den andrekvantiserte operatoren for kinetisk energi tar med dette følgende form:

$$\hat{T} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{-1}{2m} \nabla^2 \hat{\psi}(\mathbf{r}). \tag{2.58}$$

Videre kan vi utføre en delvis integrasjon og bruke at feltoperatorene forsvinner på overflaten av volumet  $V$ . Da finner vi følgende uttrykk for den andrekvantiserte operatoren for kinetisk energi i posisjonsrepresentasjonen:

$$\hat{T} = \frac{1}{2m} \int d\mathbf{r} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}). \tag{2.59}$$

I en vanlig gass vil partiklene vekselvirke med hverandre, og vekselvirkningene skjer som spredningsprosesser som involverer to eller flere partikler. I det følgende lar vi  $V$  være

operatoren for to-partikkelvekselvirkninger. Denne operatoren virker på tilstandsvektorer i  $\mathcal{H}_2$  og er fullstendig beskrevet av matriseelementene  $\langle \lambda_1, \lambda_2 | V | \lambda_3, \lambda_4 \rangle$ . Ved hjelp av en tilsvarende fremgangsmåte som vi brukte over, kan vi vise at den andrekvantiserte operatoren for to-partikkelvekselvirkninger  $\hat{V}$  er gitt ved:

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \langle \lambda_1, \lambda_2 | V | \lambda_3, \lambda_4 \rangle \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \hat{a}_{\lambda_3} \hat{a}_{\lambda_4}, \quad (2.60)$$

Dette kommer vi ikke til å vise dette her, men interesserte lesere kan finne utledningen i blant annet refs. [7, 10].

I posisjonsrepresentasjonen er matriseelementet  $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | V | \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 \rangle$  gitt ved:

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | V | \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 \rangle = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) V_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.61)$$

Her er  $V_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  den potensielle energien til to partikler i to respektive punkter  $\mathbf{r}_1$  og  $\mathbf{r}_2$ , og i posisjonsrepresentasjonen finner vi med dette følgende uttrykk for  $\hat{V}$ :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}). \quad (2.62)$$

Operatoren  $\hat{V}$  beskriver spredningsprosesser av to partikler. I virkeligheten har vi imidlertid også spredningsprosesser som involverer flere partikler, og tre-partikkelvekselvirkninger er for eksempel beskrevet ved en andrekvantisert operator på formen:

$$\hat{W} = \frac{1}{6} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \sum_{\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6} \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | W | \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \rangle \hat{a}_{\lambda_1}^\dagger \hat{a}_{\lambda_2}^\dagger \hat{a}_{\lambda_3}^\dagger \hat{a}_{\lambda_4} \hat{a}_{\lambda_5} \hat{a}_{\lambda_6}. \quad (2.63)$$

Her er  $W$  en tre-partikkeloperator som virker på tilstandsvektorer i Hilbertrommet  $\mathcal{H}_3$

### 2.2.4 Hamiltonoperatoren til en svakt vekselvirkende Bosegass

Hamiltonoperatoren til en gass med parvise vekselvirkninger kan vi nå skrive som:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \frac{1}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}), \quad (2.64)$$

der første ledd er operatoren for kinetisk energi og det andre leddet er operatoren for to-partikkelvekselvirkninger. Dette er Hamiltonoperatoren til en gass med svake vekselvirkninger. Vi skal komme nærmere inn på svake vekselvirkninger senere i kapittel 3, men frem til da vil ligning (2.64) bli referert til som Hamiltonoperatoren til en svakt vekselvirkende Bosegass. Ligning (2.64) kan også beskrive en svakt vekselvirkende Fermigass, men fordi vi i det følgende bare vil studere bosoner vil ligning (2.64) bare bli referert til som Hamiltonoperatoren for en svakt vekselvirkende Bosegass.

Ved hjelp av operatoridentitetene i ligning (2.40) og (2.41) kan vi også uttrykke Hamiltonoperatoren med impulskvantetallet  $\mathbf{p}$  istedenfor posisjonskvantetallet  $\mathbf{r}$ . Det gir:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}} \int d\mathbf{r} V_2(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \hat{a}_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2},\end{aligned}\quad (2.65)$$

og her er  $\epsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$  og  $V(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} V_2(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  er Fouriertransformen av  $V_2(\mathbf{r})$ . Vi ser at ligningene over, tar hensyn til impulsbevaring. Når to partikler med impuls  $\mathbf{p}_1$  og  $\mathbf{p}_2$  spres på hverandre, er impulsen til partiklene etter spredningen  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}$  og  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}$ . Generelt kommer dette av at systemet er translasjonsinvariant. Dette skal vi se nærmere på i avsnitt 2.4.3, for der skal vi studere Noethers teorem som gir en sammenheng mellom kontinuerlige symmetrier og bevarte størrelser.

## 2.3 Schrödingerbildet og Heisenbergbildet

I avsnitt 2.2.1 om tilstandsvektorer ble det nevnt at en ket-vektor  $|\psi\rangle$  beskriver tilstanden til systemet. I det følgende vil vi også inkludere tiden  $t$  slik at vi ikke utelukker at systemet kan være i ulike tilstander til forskjellige tider. Tilstandsvektoren er da gitt ved  $|\psi(t)\rangle$ . Når systemet utvikler seg fra å være i tilstanden  $|\psi(t_0)\rangle$  ved tiden  $t_0$ , vil systemet ved et senere tidspunkt  $t$  være i tilstanden [11]:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle. \quad (2.66)$$

Denne relasjonen følger direkte fra Schrödingerligningen:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.67)$$

hvor  $H$  er en tidsuavhengig Hamiltonoperator.

Ligning (2.66) gir at tidsutviklingen kan faktoriseres ut av  $|\psi(t)\rangle$  og beskrives ved eksponentialuttrykket  $e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$ . Dette gir videre at vi kan velge å la tilstandsvektorene være tidsuavhengige  $|\psi_H\rangle$ , og heller inkludere tidsutviklingen i operatorene  $\hat{O}_H(t)$ . Her er vektorene og operatorene merket med en  $H$  fordi denne betraktningssmåten er kalt for *Heisenbergbildet*. Den første betraktningssmåten kalles for *Schrödingerbildet*, og i dette bildet merkes vektorene og operatorene ofte med en  $S$ . Realsjonen mellom operatorene  $\hat{O}_S$  og  $\hat{O}_H$  er gitt ved:

$$\hat{O}_H = e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad (2.68)$$

og er funnet ved å kreve at forventningsverdiene  $\langle \psi_S(t) | \hat{O}_S | \psi_S(t) \rangle$  og  $\langle \psi_H | \hat{O}_H(t) | \psi_H \rangle$  skal være like.

På samme måte som at tidsutviklingen til  $|\psi(t)\rangle$  er bestemt ved Schrödingerligningen, vil operatorene  $\hat{O}_H(t)$  i Heisenbergbildet tilfredsstillende bevegelsesligningen:

$$i\partial_t\hat{O}_H(t) = [\hat{O}_H(t), \hat{H}]. \quad (2.69)$$

For eksempel kan vi la Hamiltonoperatoren være gitt ved:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (2.70)$$

Da gir ligning (2.69) at heve- og senkeoperatorene har følgende tidsavhengighet i Heisenbergbildet:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger(t) = \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\epsilon_{\mathbf{p}}t}, \quad (2.71)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}(t) = \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\epsilon_{\mathbf{p}}t}. \quad (2.72)$$

Dette gir videre at feltoperatorene  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  kan skrives som:

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i(\epsilon_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}, \quad (2.73)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i(\epsilon_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}. \quad (2.74)$$

## 2.4 Kvantefeltteori

Dette delkapittelet er basert på refs. [12, 13, 14], og der det er brukt andre kilder er kildehenvisningene gitt direkte i teksten. I det følgende vil vi bare studere feltteorier for bosoner.

### 2.4.1 Generaliserte koordinater og konjugert impuls

I klassisk mekanikk kan ethvert system beskrives av et sett generaliserte koordinater  $q_1, q_2, \dots, q_N$  og konjugerte impulser  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Hver generaliserte koordinat tilsvarer en frihetsgrad, og en klassisk punktpartikkel i tre dimensjoner har tre frihetsgrader. I kvantefeltteorien er de generaliserte koordinatene og de konjugerte impulsene erstattet med felt  $\phi(x)$  og  $\pi(x)$  som er funksjoner av  $x = (t, \mathbf{r})$ . Ethvert system vi studerer i kvantefeltteorien har derfor et kontinuerlig og uendelig antall frihetsgrader. Dette tilsvarer en frihetsgrad for hvert felt  $\phi(x)$  evaluert i hvert punkt  $\mathbf{r}$  i rommet.

I klassisk mekanikk er den konjugerte impulsen til  $q_i$  definert ved:

$$p_i = \frac{1}{\partial \dot{q}_i} \partial L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t). \quad (2.75)$$



Her er  $\dot{q}_i = dq_i/dt$ . I tillegg er  $L$  Lagrangefunksjonen, og er vanligvis differansen mellom kinetisk og potensiell energi. Det vil si at  $L = T - V$ . I kvantefeltteorien er det konjugerte feltet til  $\phi(x)$  definert analogt:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_t \phi(x), t)}{\partial (\partial_t \phi(x))}, \quad (2.76)$$

og forskjellen er at Lagrangefunksjonen er erstattet med Lagrangetettheten  $\mathcal{L}$ .  $\pi(x)$  kalles for den konjugerte impulstettheten til  $\phi(x)$ .

Videre er Hamiltontettheten gitt ved Legendretransformasjonen:

$$\mathcal{H}(\phi(x), \pi(x), t) = \pi(x) \partial_t \phi(x) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_t \phi(x), t). \quad (2.77)$$

Feltene  $\phi(\mathbf{r}, t)$  og  $\pi(\mathbf{r}, t)$  kan vi også kvantisere<sup>5</sup> ved å kreve at de oppfyller visse kommutatorrelasjoner ved lik tid. Disse relasjonene kan vi finne ved å ta utgangspunkt i kommutatorrelasjonene:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_i, \hat{p}_j] &= i\delta_{ij}, \\ [\hat{q}_i, \hat{q}_j] &= [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \end{aligned} \quad (2.78)$$

som vi kjenner fra kvantemekanikken, og generalisere til et system med kontinuerlige og uendelig antall frihetsgrader. Da får vi resultatet<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] &= i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

La oss igjen studere en svakt vekselvirkende Bosegass for å se om vi kan finne det konjugerte feltet til  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ . Feltoperatorene  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  er heve- og senkeoperatører og oppfyller følgende kommutatorrelasjoner ved lik tid:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)] &= [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Ved å sammenligne disse kommutatorrelasjonene med ligning (2.79), finner vi at det konjugerte feltet til  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  er  $i\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ . Med dette kan vi også finne Lagrangetettheten til en svakt vekselvirkende Bosegass, og ligning (2.64) og (2.77) gir at denne kan skrives som:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \partial_t \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.81)$$

<sup>5</sup>De kvantiserte feltoperatorene skriver vi som  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\pi}(\mathbf{r}, t)$ . Det vil si at vi skriver operatorene med 'hatt'.

<sup>6</sup>Vi vil ikke vise denne utregningen her, men interesserte lesere henvises til ref. [13].

### 2.4.2 Virkning og Euler-Lagrangeligninger

En gass av punktpartikler er beskrevet av de generaliserte koordinatene  $q_1, q_2, \dots, q_N$  og de konjugerte impulsene  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Dersom vi danner et koordinatsystem slik at hver generaliserte koordinat og hver konjugerte impuls har en tilhørende akse, får vi et faserom. Tilstanden til systemet ved en gitt tid kan nå betraktes som et punkt i dette rommet, og dersom man også skrur på tiden, vil systemet følge en kurve i faserommet. Denne kurven er bestemt av Hamiltons prinsipp som sier at mellom to tider  $t_1$  og  $t_2$  følger systemet en vei i faserommet hvor virkningen:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \mathcal{L}, \quad (2.82)$$

har et ekstremum. Fra dette prinsippet følger det at de generaliserte koordinatene oppfyller bevegelsesligningene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.83)$$

Disse ligningene kalles for Euler-Lagrangeligningene.

I kvantefeltteorien, gjelder tilsvarende prinsipp for feltene  $\hat{\phi}_r(x)$ . Mellom to tider  $t_1$  og  $t_2$  utvikler feltkonfigurasjonene seg slik at virkningen  $S$  har et ekstremum, og av dette følger Euler-Lagrangeligningene:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\phi}_r(x))} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\phi}_r(x)}, \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (2.84)$$

### 2.4.3 Symmetri og Noethers teorem

Det ble oppdaget av Emmy Noether at til enhver kontinuerlig symmetri av Euler-Lagrange-ligningene, finnes det en bevart størrelse. En symmetri av Euler-Lagrangeligningene, betyr at ligningene er invariante under en transformasjon av feltene  $\hat{\phi}$ .

En kontinuerlig transformasjon av feltet  $\hat{\phi}(x)$  kan på infinitesimal form skrives som:

$$\hat{\phi}(x) \rightarrow \hat{\phi}(x) + \alpha \Delta \hat{\phi}(x), \quad (2.85)$$

der  $\alpha$  er en infinitesimal parameter og  $\Delta \hat{\phi}$  er en endring i feltet. Hvis Lagrangetettheten, og dermed også Euler-Lagrangeligningene, er symmetrisk under transformasjonen, gir Noethers teorem at firervektoren:

$$j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\phi})} \Delta \hat{\phi}(x) \quad (2.86)$$

tilfredsstillir ligningen:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (2.87)$$

Hvis vi nå integrerer ligning (2.87) over hele rommet får vi følgende:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_V d\mathbf{r} \partial_\mu j^\mu(x) \\
&= \int_V d\mathbf{r} \partial_t j^0(x) + \int_V d\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{j}(x) \\
&= \partial_t Q(x) + \int_{\partial V} dA \cdot \mathbf{j}(x).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

I det siste leddet har vi brukt Gauss' divergensteorem og omformet volumintegralet til et overflateintegral, og overflaten til volumet  $V$  har vi skrevet som  $\partial V$ . I tillegg er  $Q$  definert ved:

$$Q(x) = \int d\mathbf{r} j^0(x). \tag{2.89}$$

Vi antar nå at at overflateintegralet er lik null. Dette er tilfellet hvis feltene og dermed også  $\mathbf{j}(x)$  går tilstrekkelig raskt mot null når  $\mathbf{r}$  går mot uendelig. Da vil  $Q(x)$  tilfredsstille ligningen:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial t} = 0, \tag{2.90}$$

og er derfor en bevart størrelse. Den bevarte størrelsen  $Q$  definerer vi som ladningen, og det følger av ligningene over at  $j^0$  kan tolkes som ladningstetthet, og  $\mathbf{j}$  som strømtetthet. Eksempler på kontinuerlige transformasjoner og tilhørende bevarte størrelser er:

- Translasjon i tid:  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$   
Symmetri under translasjoner i tid gir energibevaring.
- Translasjon i rom:  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t)$   
Symmetri under translasjoner i rom gir impulsbevaring.

La oss igjen studere en ikke-relativistisk og svakt vekselvirkende Bosegass med Lagrangetetthet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\partial_t\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2m}\nabla\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\nabla\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \\
&\quad - \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r}', t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t).
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Denne Lagrangetettheten er invariant under globale  $U(1)$ -transformasjoner:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rightarrow e^{-i\alpha}\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \rightarrow e^{i\alpha}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \tag{2.92}$$

og for infinitesimale transformasjoner gir dette:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)(1 - i\alpha), \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)(1 + i\alpha). \tag{2.93}$$

Før vi går løs med å finne Noetherstrømmen  $j^\mu(\mathbf{r}, t)$ , må vi være oppmerksom på at feltoperatorene  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  har en realdel og en imaginærdel og kan skrives som summen av to Hermiteske operatører  $\hat{\psi}_1(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\psi}_2(\mathbf{r}, t)$ :

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\psi}_1(\mathbf{r}, t) + i\hat{\psi}_2(\mathbf{r}, t), \quad (2.94)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \hat{\psi}_1(\mathbf{r}, t) - i\hat{\psi}_2(\mathbf{r}, t). \quad (2.95)$$

Disse feltene må behandles som uavhengige, og av dette følger det at  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  også må behandles som uavhengige felt. Noetherstrømmen  $j^\mu(\mathbf{r}, t)$  er da gitt ved summen:

$$j^\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\psi})} \Delta \hat{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\psi}^\dagger)} \Delta \hat{\psi}^\dagger. \quad (2.96)$$

Vi kan nå finne feltendringene  $\Delta \hat{\psi}$  og  $\Delta \hat{\psi}^\dagger$  ved å sammenligne ligning (2.85) og (2.93). Det gir:

$$\Delta \hat{\psi} = -i\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \quad \Delta \hat{\psi}^\dagger = i\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \quad (2.97)$$

og  $j^\mu(\mathbf{r}, t)$  kan dermed skrives som:

$$j^\mu(\mathbf{r}, t) = \left[ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \frac{i}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) - \frac{i}{2m} \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (2.98)$$

Den bevarte ladningen er i dette tilfellet partikkeltallet som er gitt ved antallsoperatoren:

$$\hat{N} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.99)$$

Man kan også dobbeltsjekke at partikkeltallet er bevart ved å vise at  $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$ .

#### 2.4.4 Propagatoren

I kvantefeltteorien spiller *Feynmanpropagatoren* en sentral rolle. Den er fundamental i moderne perturbasjonsteori, og blir derfor brukt i stor grad til å studere perturberte systemer. I tilfellet der vi har en svakt vekselvirkende Bosegass er propagatoren gitt ved [11]:

$$G(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t) = -i \frac{\langle 0|T[\hat{\psi}(\mathbf{r}', t')\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)]|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}, \quad (2.100)$$

og er proporsjonal med sannsynlighetsamplituden for at det finnes en partikkel i punktet  $\mathbf{r}'$  ved tiden  $t'$  gitt at det ble skapt en partikkel i punktet  $\mathbf{r}$  ved tiden  $t$ . I denne ligningen er  $|0\rangle$  grunntilstanden til systemet, og vi skal se i kapittel 4 at denne tilstanden er forskjellig fra vakuumtilstanden  $|\Omega\rangle$ . I tillegg er  $T$ -produktet  $T[\hat{\psi}(\mathbf{r}', t')\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)]$  det tidsordnede produktet av feltoperatorene, og er gitt ved:

$$T[\hat{\psi}(\mathbf{r}'t')\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)] = \begin{cases} \hat{\psi}(\mathbf{r}', t')\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) & \text{hvis } t' > t, \\ \pm \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}', t') & \text{hvis } t' < t. \end{cases} \quad (2.101)$$

Her gjelder minustegnet for fermioner og plusstegnet for bosoner. Vi vil, som sagt, bare konsentrere oss om bosoner og trenger derfor ikke å bry oss om dette minustegnet.

I det følgende vil vi utlede et uttrykk for propagatoren for en fri ikke-relativistisk partikkel<sup>7</sup>. Det vil si at vi vil se bort ifra vekselvirkningene slik at Hamiltonoperatoren blir:

$$\hat{H}^0 = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (2.102)$$

der  $\epsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$ . I dette tilfellet kan propagatoren skrives som:

$$\begin{aligned} G^0(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t) &= -i \langle \Omega | T[\hat{\psi}(\mathbf{r}', t') \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t)] | \Omega \rangle \\ &= -i \theta(t' - t) \langle \Omega | \hat{\psi}(\mathbf{r}', t') \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (2.103)$$

og her har vi merket propagatoren med superskript <sup>0</sup> for å vise at dette er en propagator for en ikke-vekselvirkende partikkel. I tillegg er  $\theta(t' - t)$  step-funksjonen gitt ved:

$$\theta(t' - t) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } t' > t, \\ 0 & \text{hvis } t' < t. \end{cases} \quad (2.104)$$

Step-funksjonen er introdusert på grunn av at  $T$ -produktet er lik null når  $t' < t$ . Dette kommer av at  $\hat{\psi}(\mathbf{r}', t') | \Omega \rangle = 0$ .

Hvis vi nå bruker at feltoperatorene kan Fourierutvikles som i ligning (2.73) og (2.74), finner vi følgende uttrykk for  $G^0(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t)$ :

$$\begin{aligned} G^0(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t) &= -\frac{i}{V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} \theta(t' - t) e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}' - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\epsilon_{\mathbf{p}}(t' - t)} \langle \Omega | \hat{a}_{\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} | \Omega \rangle \\ &= -\frac{i}{V} \sum_{\mathbf{p}} \theta(t' - t) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} e^{-i\epsilon_{\mathbf{p}}(t' - t)}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Propagatoren kan vi også skrive som et konturintegral:

$$G^0(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t' - t)}}{\omega - \epsilon_{\mathbf{p}} + i\eta}, \quad (2.106)$$

og her integrerer vi over  $\omega$  som er energien til partikkelen. I tillegg har vi innført en liten parameter  $\eta$  som flytter singulariteten rett under den reelle aksene. Dette gjør at integralet kan evalueres langs en halvsirkel i det nedre halvplan når  $t' > t$  (Se Figur 2.1.). Da vil halvsirkelen omslutte singulariteten i  $\omega = \epsilon_{\mathbf{p}} - i\eta$  og residueteoremet gir at

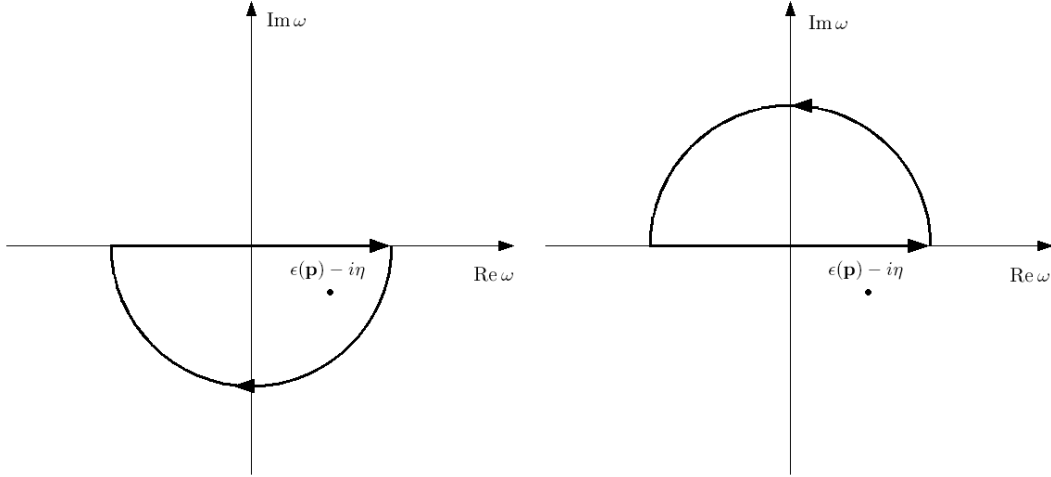
$$G^0(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t) = -\frac{i}{V} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} e^{-i\epsilon_{\mathbf{p}}(t' - t)}. \quad (2.107)$$

<sup>7</sup>Utregningene i dette avsnittet er basert på refs. [7, 15].

Her har vi latt  $\eta \rightarrow 0$ . Når  $t' < t$  integrerer vi langs en halvsirkel i det øvre halvplan hvor det ikke finnes noen singulariteter og vi finner at

$$G^0(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t) = 0, \quad (2.108)$$

som er i overenstemmelse med ligning (2.105).



Figur 2.1: Når  $t' > t$  utfører vi integralet langs en halvsirkel i det nedre halvplan som omslutter singulariteten  $\omega = \epsilon_{\mathbf{p}} - i\eta$ . Når  $t' < t$  integrerer vi i det øvre halvplan hvor det ikke finnes noen singulariteter.

Vi vil nå studere den Fouriertransformerte propagatoren  $G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega)$  som er uttrykt ved energien  $\omega$  istedenfor tiden  $(t' - t)$ . Videre tar vi også kontinuums grensen  $V \rightarrow \infty$  og utfører vinkelintegrasjonene slik at vi står igjen med

$$\begin{aligned} G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega) &= \frac{1}{4\pi^2|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \int_0^\infty dp p \frac{e^{ip|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - e^{-ip|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{\omega - p^2/2m + i\eta} \\ &= \frac{1}{4\pi^2|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \int_{-\infty}^\infty dp p \frac{e^{ip|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{\omega - p^2/2m + i\eta} \\ &= \frac{2m}{4\pi^2|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \int_{-\infty}^\infty dp p \frac{e^{ip|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{(p_0 - p + i\eta)(p_0 + p + i\eta)}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Her har vi definert  $p_0$  som løsningen av ligningen:

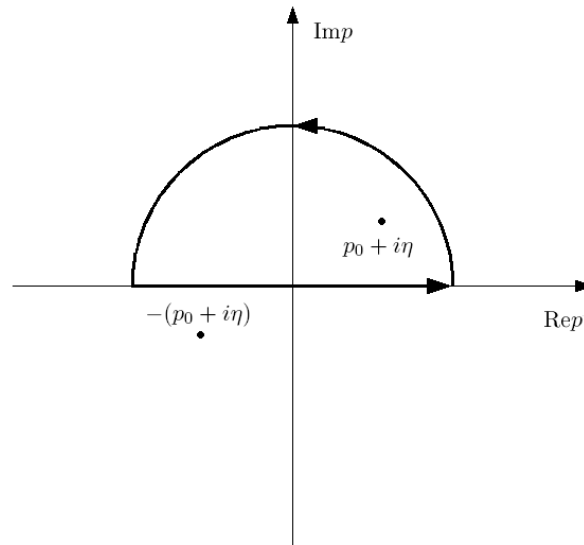
$$\omega = \frac{p_0^2}{2m}. \quad (2.110)$$

Integralet i ligning (2.109) kan vi utføre som et konturintegral i det komplekse plan, og nærmere bestemt langs en halvsirkel i det øvre halvplan (Se Figur 2.2.). Halvsirkelen

omslutter singulariteten  $p = p_0 + i\eta$  og residueteoremet gir dermed at

$$G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega) = 2m \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} e^{ip_0|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (2.111)$$

Her har vi latt  $\eta \rightarrow 0$ . Vi kan også merke oss at det finnes to uttrykk for  $G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega)$ . Én for den positive og én for den negative løsningen av ligning (2.110).



Figur 2.2: Vi utfører et konturintegral langs en halvsirkel i det øvre halvplan. Halvsirkelen omslutter singulariteten  $p = p_0 + i\eta$ .

Vi har nå funnet et uttrykk for propagatoren for en fri partikkel med energi  $\omega = p_0^2/2m$ . Men vi kan også vise at propagatoren tilfredsstiller differensialligningen:

$$\left[ \frac{\nabla^2}{2m} + \omega \right] G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.112)$$

og at  $G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega)$  derfor er en Greensfunksjon. Dette ser vi enklest hvis bruker følgende uttrykk for propagatoren:

$$G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{p}} + i\eta} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}. \quad (2.113)$$

Her har vi imidlertid tatt kontinuumsgrensen  $V \rightarrow \infty$ . Dette uttrykket for  $G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega)$  gir at

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\nabla^2}{2m} + \omega \right] G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \omega) &= \left[ \frac{\nabla^2}{2m} + \omega \right] \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{p}} + i\eta} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega - \epsilon_{\mathbf{p}}}{\omega - \epsilon_{\mathbf{p}} + i\eta} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \\ &= \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.114)$$

og vi ser at propagatoren er en Greensfunksjon. I denne utledningen har vi latt  $\eta \rightarrow 0$ .

## 2.5 Funksjonalintegralformalismen

I matematikken er vi vant med at vi ofte kan regne oss frem til samme resultat på forskjellige måter. Slik er det også i kvantefeltteorien. Resultatene man får ved å regne med andrekvantiserte operatore, kan man også finne ved hjelp av funksjonalintegraler. Funksjonalintegralformalismen ble innført av Feynman i midten av forrige århundre, og blir ofte brukt til å studere systemer ved endelig temperatur. I det følgende vil vi gi en kort introduksjon til funksjonalintegralformalismen, og vi skal vise hvordan funksjonalintegraler kan forbinde kvantefeltteorien med statistisk fysikk. Dette delkapittelet tar utgangspunkt i refs. [14, 16], og vi vil bare studere feltteorier for bosoner.

### 2.5.1 Egentilstander av feltoperatore

La oss studere en feltteori med Hermiteske felt  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ . I denne teorien lar vi  $|\phi\rangle$  være egentilstander til feltene  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, 0)$ , som er operatore i Schrödingerbildet ved tiden  $t = 0$ . Det vil si at  $|\phi\rangle$  oppfyller følgende ligning:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, 0)|\phi\rangle = \phi(\mathbf{r})|\phi\rangle, \quad (2.115)$$

hvor  $\phi(\mathbf{r})$  er den tilhørende egenverdien.  $|\phi\rangle$  beskriver et system med feltkonfigurasjon  $\phi(\mathbf{r})$ . Dette kan sammenlignes med tilstanden  $|q_1, q_2, \dots, q_N\rangle$  som i kvantemekanikken er en tilstand der konfigurasjonen av de generaliserte koordinatene er  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Alle slike tilstander utgjør tilsammen et fullstendig sett og tilfredsstillter derfor fullstendighetsrelasjonen

$$\left( \prod_{i=1}^N \int dq_i \right) |q_1, q_2, \dots, q_N\rangle \langle q_1, q_2, \dots, q_N| = 1. \quad (2.116)$$

Her integrerer vi over alle mulige konfigurasjoner. I kvantefeltteorien har vi et uendelig og kontinuerlig antall frihetsgrader, og fullstendighetsrelasjonen til  $|\phi\rangle$  finner vi derfor ved å ta grensen  $N \rightarrow \infty$  i ligning (2.116). Dette skriver vi som:

$$\int d\phi(\mathbf{r}) |\phi\rangle \langle \phi| = 1, \quad (2.117)$$



og  $\int d\phi(\mathbf{r})$  betyr at vi integrerer over alle mulige feltkonfigurasjoner. For egentilstandene  $|\phi\rangle$  gjelder også normeringsbetingelsen:

$$\langle\phi_a|\phi_b\rangle = \delta[\phi_a(\mathbf{r}) - \phi_b(\mathbf{r})]. \quad (2.118)$$

Tilsvarende lar vi egentilstandene til  $\hat{\pi}(\mathbf{r}, 0)$  være  $|\pi\rangle$ . Da tilfredsstiller  $|\pi\rangle$  ligningen:

$$\hat{\pi}(\mathbf{r}, 0)|\pi\rangle = \pi(\mathbf{r})|\pi\rangle, \quad (2.119)$$

hvor  $\pi(\mathbf{r})$  er egenverdiene. Tilstandene oppfyller også fullstendighetsrelasjonen:

$$\int \frac{d\pi(\mathbf{r})}{2\pi} |\pi\rangle\langle\pi| = 1, \quad (2.120)$$

og normeringsbetingelsen:

$$\langle\pi_a|\pi_b\rangle = \delta[\pi_a(\mathbf{r}) - \pi_b(\mathbf{r})]. \quad (2.121)$$

Skalarproduktet  $\langle\phi|\pi\rangle$  mellom de forskjellige egentilstandene er:

$$\langle\phi|\pi\rangle = \exp\left[i \int d\mathbf{r} \pi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\right]. \quad (2.122)$$

Dette er en generalisering fra kvantemekanikken der vi har et endelig antall frihetsgrader til kvantefeltteorien der det er et uendelig og kontinuerlig antall frihetsgrader. I kvantemekanikken er skalarproduktet  $\langle q_1, q_2, \dots, q_N | p_1, p_2, \dots, p_N \rangle$  gitt ved:

$$\langle q_1, q_2, \dots, q_N | p_1, p_2, \dots, p_N \rangle = \exp\left[i \sum_{i=1}^N p_i q_i\right]. \quad (2.123)$$

Men i overgangen til kvantefeltteorien, vil  $\sum_{i=1}^N p_i q_i \rightarrow \int d\mathbf{r} \pi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})$ <sup>8</sup>, og skalarproduktet  $\langle\phi|\pi\rangle$  kan dermed skrives som i ligning (2.122).

### 2.5.2 Funksjonalintegraler

La et system være i tilstanden  $|\phi_a\rangle$  ved tiden  $t = t_i$ . Da er  $\langle\phi_b|e^{-iH(t_f-t_i)}|\phi_a\rangle$  sannsynlighetsamplituden for at systemet er i tilstanden  $|\phi_b\rangle$  ved tiden  $t = t_f$ . La oss nå dele tidsintervallet  $t_f - t_i$  i  $n$  like deler  $\Delta t$ . Det vil si at

$$\Delta t = \frac{t_f - t_i}{n}, \quad (2.124)$$

Da kan vi skrive sannsynlighetsamplituden som:

$$\langle\phi_b|e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)}|\phi_a\rangle = \langle\phi_b|e^{-i\hat{H}n\Delta t}|\phi_a\rangle. \quad (2.125)$$

---

<sup>8</sup> Dette er vist i for eksempel ref. [13].

Hvis vi nå skriver  $e^{-i\hat{H}n\Delta t}$  som et produkt av  $n$  faktorer  $e^{-i\hat{H}\Delta t}$ , kan vi bruke fullstendighetsrelasjonen (2.117) mellom hver faktor:

$$\begin{aligned} \langle \phi_b | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | \phi_a \rangle &= \langle \phi_a | e^{-i\hat{H}\Delta t} \cdot \dots \cdot e^{-i\hat{H}\Delta t} | \phi_a \rangle \quad (n \text{ faktorer}) \\ &= \int \left( \prod_{i=1}^{n-1} d\phi_i(\mathbf{r}) \right) \langle \phi_a | e^{i\hat{H}\Delta t} | \phi_{n-1} \rangle \langle \phi_{n-1} | e^{i\hat{H}\Delta t} | \phi_{n-2} \rangle \times \dots \\ &\quad \times \langle \phi_1 | e^{i\hat{H}\Delta t} | \phi_a \rangle. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Her har vi brukt en notasjon slik at  $\phi_0 = \phi_a$  og  $\phi_n = \phi_b$ . Vi ser at vi har delt sannsynlighetsamplituden inn i  $n$  skritt.  $\langle \phi_1 | e^{i\hat{H}\Delta t} | \phi_a \rangle$  gir amplituden for at systemet befinner seg i tilstanden  $|\phi_1\rangle$  etter tiden  $\Delta t$ , og  $\langle \phi_2 | e^{i\hat{H}\Delta t} | \phi_1 \rangle$  gir amplituden for at systemet utvikler seg videre til tilstanden  $|\phi_2\rangle$  etc. Da vi integrerer over alle de midlertidige tilstandene  $|\phi_i\rangle$ , kan dette sees på som at vi integrerer over alle måtene systemet kan utvikle seg fra starttilstanden  $|\phi_a\rangle$  til slutttilstanden  $|\phi_b\rangle$  i løpet av tiden  $t_f - t_i$ .

Nøkkelen er nå å finne et uttrykk for amplituden  $\langle \phi_i | e^{i\hat{H}\Delta t} | \phi_{i-1} \rangle$  i grensen der  $n \rightarrow \infty$  og  $\Delta t \rightarrow 0$ . For å finne dette, bruker vi fullstendighetsrelasjonen i ligning (2.120), og rekkeutvikler eksponentialfunksjonen  $e^{i\hat{H}\Delta t}$ . Det gir:

$$\begin{aligned} \langle \phi_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | \phi_{i-1} \rangle &= \int \frac{d\pi_i(\mathbf{r})}{2\pi} \langle \phi_i | \pi_i \rangle \langle \pi_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | \phi_{i-1} \rangle \\ &\approx \int \frac{d\pi_i(\mathbf{r})}{2\pi} \langle \phi_i | \pi_i \rangle \langle \pi_i | 1 - i\hat{H}\Delta t | \phi_{i-1} \rangle. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Vi antar nå at  $\hat{H} = \int d\mathbf{r} \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi})$  er ordnet slik at alle  $\hat{\pi}$  står til venstre for alle  $\hat{\phi}$ . Når dette er tilfellet, kan  $\hat{\phi}$  operere på  $|\phi_i\rangle$  mot høyre mens  $\hat{\pi}$  kan operere på  $\langle \pi_i |$  mot venstre, og vi kan skrive

$$\langle \pi_i | \hat{H} | \phi_{i-1} \rangle = \int d\mathbf{r} \langle \pi_i | \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi}) | \phi_{i-1} \rangle = \int d\mathbf{r} \mathcal{H}(\pi_i, \phi_{i-1}) \equiv H_i. \quad (2.128)$$

Det vil si at vi kan erstatte operatorene i  $\mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi})$  med feltkonfigurasjonene  $\pi_i(\mathbf{r})$  og  $\phi_{i-1}(\mathbf{r})$ , og dette gir:

$$\begin{aligned} \langle \phi_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | \phi_{i-1} \rangle &\approx \int \frac{d\pi_i(\mathbf{r})}{2\pi} \langle \phi_i | \pi_i \rangle \langle \pi_i | \phi_{i-1} \rangle (1 - iH_i\Delta t) \\ &\approx \int \frac{d\pi_i(\mathbf{r})}{2\pi} \langle \phi_i | \pi_i \rangle \langle \pi_i | \phi_{i-1} \rangle e^{-iH_i\Delta t}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

I det siste steget har vi på nytt dratt nytte av at  $e^{-iH_i\Delta t} \approx 1 - iH_i\Delta t$  når  $\Delta t \rightarrow 0$ . Videre er  $\langle \pi_i | \phi_{i-1} \rangle$  gitt ved ligning (2.122), og vi finner med dette følgende uttrykk for

den infinitestimale sannsynlighetsamplituden  $\langle \pi_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | \phi_{i-1} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \pi_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | \phi_{i-1} \rangle &= \exp \left[ i \int d\mathbf{r} \pi_i(\mathbf{r}) (\phi_i(\mathbf{r}) - \phi_{i-1}(\mathbf{r})) \right] \exp \left[ -i\Delta t \int d\mathbf{r} \mathcal{H}(\pi_i(\mathbf{r}), \phi_{i-1}(\mathbf{r})) \right] \\ &= \exp \left\{ i\Delta t \int d\mathbf{r} \left[ \pi_i(\mathbf{r}) \frac{\phi_i(\mathbf{r}) - \phi_{i-1}(\mathbf{r})}{\Delta t} - \mathcal{H}(\pi_i(\mathbf{r}), \phi_{i-1}(\mathbf{r})) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

I dette uttrykket er alle operatorene blitt erstattet med feltkonfigurasjoner. Hvis vi nå setter ligning (2.130) inn i ligning (2.126), finner vi at

$$\begin{aligned} \langle \phi_b | e^{-iH(t_f-t_i)} | \phi_a \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^n \left( \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \Delta t \int d\mathbf{r} \left[ \pi_j \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{\Delta t} - \mathcal{H}(\pi_j, \phi_{j-1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Her minner vi om at  $\phi_0 = \phi_a$  og  $\phi_n = \phi_b$ . I tillegg har vi droppet å skrive  $\mathbf{r}$ -avhengigheten til funksjonene. Det vil si at  $\phi_j = \phi_j(\mathbf{r})$  og  $\pi_j = \pi_j(\mathbf{r})$ . I grensen der  $n \rightarrow \infty$  blir dette:

$$\begin{aligned} \langle \phi_b | e^{-iH(t_f-t_i)} | \phi_a \rangle &= \int \mathcal{D}\pi \int_{\phi(\mathbf{r}, t_i) = \phi_a(\mathbf{r})}^{\phi(\mathbf{r}, t_f) = \phi_b(\mathbf{r})} \mathcal{D}\phi \\ &\quad \times \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\mathbf{r} [\pi(\mathbf{r}, t) \partial_t \phi(\mathbf{r}, t) - \mathcal{H}(\pi(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}, t))] \right\}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

og her har vi brukt notasjonen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta t} = \partial_t \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.133)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} dt, \quad (2.134)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^n d\phi_i = \int \mathcal{D}\phi, \quad (2.135)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^n \frac{d\pi_i}{2\pi} = \int \mathcal{D}\pi. \quad (2.136)$$

$\mathcal{D}\pi$  og  $\mathcal{D}\phi$  angir funksjonalintegrasjon og i ligning (2.132) integreres det over alle  $\pi(\mathbf{r}, t)$ . Integrasjonen over  $\phi(\mathbf{r}, t)$  er derimot begrenset til alle 'veier' eller forløp som starter i  $\phi_a(\mathbf{r})$  ved  $t = t_i$  og ender i  $\phi_b(\mathbf{r})$  ved  $t = t_f$ . Det vil si at det integreres over alle  $\phi(\mathbf{r}, t)$  der feltkonfigurasjonen er  $\phi_a(\mathbf{r})$  ved  $t = t_i$  og utvikler seg til  $\phi_b(\mathbf{r})$  ved  $t = t_f$ . På grunn av at man integrerer over alle mulige 'veier' som feltutviklingen kan følge, kalles slike

integraler veiintegraler. Vi merker oss nå at vi kan gjenkjenne uttrykket i eksponenten i ligning (2.132) som virkningen  $S$  som er definert ved:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\mathbf{r} \mathcal{L}. \quad (2.137)$$

### 2.5.3 Partisjonsfunksjonen og imaginær tid

Den kanoniske partisjonsfunksjonen  $Z$  er gitt ved sporet av  $e^{-\beta\hat{H}}$ , og her er  $\beta = 1/T$ . I en basis av energieigenfunksjoner  $|n\rangle$  finner vi dermed at partisjonsfunksjonen kan uttrykkes som følger:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}} = \sum_n \langle n | e^{-\beta\hat{H}} | n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (2.138)$$

Sporet kan vi i midlertid ta i enhver basis, og dersom vi tar for oss en feltteori med Hermitske felt  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\pi}(\mathbf{r}, t)$ , kan vi for eksempel velge mengden av alle  $|\phi_a\rangle$ :

$$Z = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta\hat{H}} | \phi_a \rangle. \quad (2.139)$$

I mange tilfeller gir Noethers teorem at systemet har en bevart ladning, som for eksempel partikkeltallet  $\langle \hat{N} \rangle$ , og da må vi bruke den storkanoniske partisjonsfunksjonen. Det er fordi denne partisjonsfunksjonen inkluderer det kjemiske potensialet  $\mu$ , og da kan vi sørge for at  $\langle \hat{N} \rangle$  tar like verdier ved forskjellige temperaturer ved å justere  $\mu$ . Dette gjorde vi også i kapittel 1 der vi studerte en ideell gass. Da fant vi ut at det kjemiske potensialet måtte være temperaturavhengig slik at  $\mu \rightarrow \epsilon_0$  når temperaturen falt under den kritiske temperaturen  $T_k$ .

Den storkanoniske partisjonsfunksjonen er gitt ved sporet av  $e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$ , og i en basis av vektorene  $|\phi_a\rangle$ , kan den skrives som:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | \phi_a \rangle. \quad (2.140)$$

Integranden i ligning (2.140) har store likheter med  $\langle \phi_a | e^{-i\hat{H}t_f} | \phi_a \rangle$ <sup>9</sup> som vi studerte i forrige avsnitt. Forskjellen er at  $\hat{H}$  er erstattet med  $\hat{H} - \mu\hat{N}$ , og  $it_f$  med  $\beta$ . Dette gir at vi kan bruke ligning (2.132) til å uttrykke partisjonsfunksjonen som et funksjonalintegral. For å få dette til, introduserer vi den imaginære tidsvariabelen  $\tau = it$ . Hvis vi også skriver

$$\hat{N} = \int d\mathbf{r} \mathcal{N}(\hat{\pi}, \hat{\phi}), \quad (2.141)$$

<sup>9</sup>Her har vi satt  $t_i = 0$ . Det vil si at vi definerer systemet til å være i tilstanden  $|\phi_a\rangle$  ved tiden  $t = 0$ .

finner vi at partisjonsfunksjonen kan skrives som:

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\pi \int d\phi_a \int_{\phi(\mathbf{r},0)=\phi_a(\mathbf{r})}^{\phi(\mathbf{r},\beta)=\phi_a(\mathbf{r})} \mathcal{D}\phi \\
&\quad \times \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} [i\pi(\mathbf{r},\tau)\partial_\tau\phi - \mathcal{H}(\pi(\mathbf{r},\tau),\phi(\mathbf{r},\tau)) + \mu\mathcal{N}(\pi(\mathbf{r},\tau),\phi(\mathbf{r},\tau))] \right\} \\
&= \int \mathcal{D}\pi \int_{\text{periodisk}} \mathcal{D}\phi \\
&\quad \times \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} [-i\pi(\mathbf{r},\tau)\partial_\tau\phi + \mathcal{K}(\pi(\mathbf{r},\tau),\phi(\mathbf{r},\tau))] \right\}. \tag{2.142}
\end{aligned}$$

Her er  $\mathcal{K} \equiv \mathcal{H} - \mu\mathcal{N}$  og 'Periodisk' betyr at vi integrerer over alle  $\phi(\mathbf{r},\tau)$  slik at  $\phi(\mathbf{r},0) = \phi(\mathbf{r},\beta)$ . Dette kommer av at vi tar sporet av  $e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$ . Vi finner  $\langle \phi_a | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | \phi_a \rangle$  ved å integrere over alle forløp som returnerer til starttilstanden  $|\phi_a\rangle$ , og når vi tar sporet av  $e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$  integrerer vi også over alle starttilstander  $|\phi_a\rangle$ . Partisjonsfunksjonen er derfor integralet over alle forløp som starter og ender i samme tilstand.

Vi har nå vist at partisjonsfunksjonen for en feltteori med Hermitske felt  $\hat{\phi}(\mathbf{r},t)$  og  $\hat{\pi}(\mathbf{r},t)$ , kan uttrykkes som et funksjonalintegral i imaginær tid. For en svakt vekselvirkende Bosegass beskrevet ved Hamiltonfunksjonen i ligning (2.64), kan det vises at man får en tilsvarende funksjonalintegralrepresentasjon som i ligning (2.142). Dette er vist i ref. [17]<sup>10</sup>.

I overgangen til imaginær tid, ser vi at operatoren  $\hat{K}$  har erstattet Hamiltonfunksjonen, og tilsvarende, får vi en ny Lagrangefunksjon. Lagrangetettheten ved imaginær tid er gitt ved:

$$\mathcal{L}_E = -i\hat{\pi}(\mathbf{r},\tau)\partial_\tau\hat{\phi} + \mathcal{K}(\hat{\pi}(\mathbf{r},\tau),\hat{\phi}(\mathbf{r},\tau)). \tag{2.143}$$

og her er  $\mathcal{L}$  merket med subskript  $E$  for Euklid. Dette kommer av at en feltteori ofte er beskrevet i Minowskirommet der metrikken er gitt ved  $ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2$ . Når vi lar  $t \rightarrow -i\tau$ , roterer tiden  $90^\circ$  i det komplekse plan. Dette kalles en Wick-rotasjon, og resultatet av rotasjonen er at metrikken blir  $ds^2 = d\tau^2 + d\mathbf{r}^2$ . Wick-rotasjonen tilsvarer derfor en transformasjon til Euklidisk rom.

I en svakt vekselvirkende Bosegass, er partikkeltallet bevart. Partikkeltallet er gitt ved operatoren  $\hat{N} = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r},\tau)\hat{\psi}(\mathbf{r},\tau)$  og Hamiltontettheten  $\mathcal{K}$  for en ikke-relativistisk og svakt

<sup>10</sup>I ref. [17] er det vist hvordan man finner funksjonalintegralrepresentasjonen av partisjonsfunksjonen for en teori beskrevet av en generell Hamiltonfunksjon på andrekvantisert form. Til dette må man bruke koherente tilstander som tilfredsstillende andre normerings- og fullstendighetsrelasjoner enn  $|\phi\rangle$  og  $|\pi\rangle$ .

vekselvirkende Bosegass er derfor gitt ved:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \mathcal{H} - \mu \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \\ &= \frac{1}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \cdot \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', \tau) V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}', \tau) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \\ &\quad - \mu \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau).\end{aligned}\tag{2.144}$$

Den tilhørende Lagrangetettheten finner vi ved å bruke ligning (2.143) i tillegg til at  $i\hat{\psi}^\dagger$  er det konjugerte feltet til  $\hat{\psi}$ . Det gir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E &= \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \partial_\tau \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau) + \frac{1}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', \tau) V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}', \tau) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau) - \mu \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \tau).\end{aligned}\tag{2.145}$$

Merk at her er  $\mathcal{K}$  og  $\mathcal{L}$  uttrykt med operatorer, mens i funksjonalintegralene er operatorene erstattet med komplekse feltkonfigurasjoner. I kapittel 6 skal vi finne en feltteori som beskriver et Bose-Einstein kondensat ved lave temperaturer. Denne feltteorien kommer ikke til inneholde operatorer og den vil gi en god beskrivelse av kondensatet ved hjelp av funksjonalintegralformalismen.

## Kapittel 3

# Effektiv feltteori og svake vekselvirkninger

### 3.1 Svake vekselvirkninger

Da forskerteamene ledet av Cornell og Wiemann i Boulder og av Ketterle i Massachusetts observerte Bose-Einstein kondensasjon i 1995, studerte de gasser med svake vekselvirkninger<sup>1</sup>. Det som kjennetegner slike gasser, er at de er tynne og at den midlere avstanden mellom partiklene  $d$  er mye større enn spredningslengden  $a$ , som er et mål på styrken til vekselvirkningene. Den midlere avstanden mellom partiklene kan vi også skrive som  $d = \rho^{-1/3}$  der  $\rho = N/V$  er partikkeltettheten, og tynne gasser med svake vekselvirkninger kan derfor kjennetegnes ved at gassparameteren, som er gitt ved  $\rho a^3$ , oppfyller følgende ulikhet:

$$\rho a^3 \ll 1. \tag{3.1}$$

Når vi gjør gassen tynn, minimerer vi vekselvirkningene mellom atomene, og når gassparameteren oppfyller ligningen over, kan vi neglisjere spredningsprosesser som involverer tre og flere partikler. Det er spredningsprosesser med tre partikler som gjør at gassen blir til fast stoff, og fordi et fast stoff ikke kan bli til et Bose-Einstein kondensat, må vi hindre en slik faseovergang for å kunne observere BEK. I tynne gasser der gassparameteren oppfyller ulikheten over, vil hyppigheten for slike prosesser strekke seg over sekunder og minutter, og vi kan derfor oppnå BEK i en metastabil gassfase der vekselvirkningene bare skjer mellom to-og-to partikler. En slik metastabil fase ble observert for første gang i 1995, og da ble det også klart at denne fasen varte lenge nok til at man kunne gjøre systematiske målinger av forskjellige fysiske størrelser.

På grunn av at vi kan neglisjere spredningsprosesser med tre og flere partikler når vi studerer en svakt vekselvirkende Bosegass, kan vi beskrive en slik gass ved å ta utgangspunkt i en Lagrangefunksjon som bare tar for seg to-partikkelvekselvirkninger. En

---

<sup>1</sup>Dette delkapittelet tar utgangspunkt i refs. [1, 2, 3, 18].

slik Lagrangefunksjon har vi allerede presentert i ligning (2.81), og vi skal nå studere vekselvirkningspotensialet  $V_2(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  i denne Lagrangefunksjonen litt nærmere.

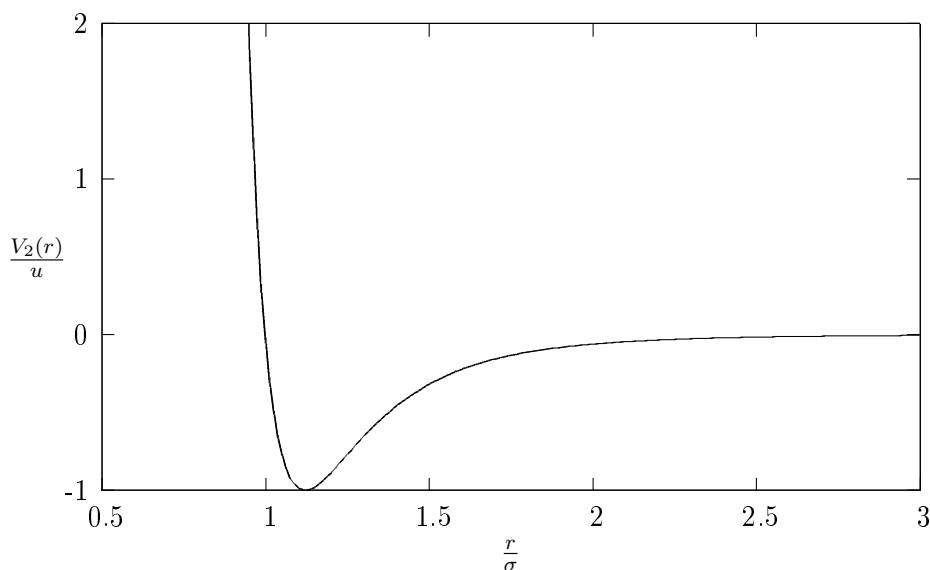
I en svakt vekselvirkende Bosegass er det typisk at atomene vekselvirker med svake Van der Waals krefter. Dette innebærer at atomene er elektrisk nøytrale, og at vekselvirkningene skjer ved at små fluktusjoner i elektronfordelingen til et atom skaper et elektrisk felt som polariserer et naboatom. Da får vi induisert et elektrisk dipolmoment og det vil oppstå tiltrekkende krefter mellom partiklene. Slike Van der Waals krefter gir opphav til en potensiell energi  $V_A(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  som er proporsjonal med  $1/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^6$ .

Når avstanden mellom to atomer blir såpass liten at elektronskallene overlapper, vil atomene frastøte hverandre som følge av Paulis eksklusjonsprinsipp. Den potensielle energien  $V_R(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  fra slike repulsive krefter er funnet til å være proporsjonal med  $1/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{12}$ .

Det totale vekselvirkningspotensialet  $V_2(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  kan vi skrive som summen av  $V_A(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  og  $V_R(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ :

$$V_2(r) = 4u \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \quad (3.2)$$

Her er  $u$  og  $\sigma$  er to parametere, og uttrykket er kjent som Lennard-Jones potensialet.  $V_2(r)$  har et minimum ved avstanden  $r_{min} = 2^{1/6}\sigma$  og  $V_2(r_{min}) = -u$ . I tillegg har potensialet et nullpunkt ved  $r = \sigma$ .



Figur 3.1: Lennard-Jones potensialet. Vi ser at potensialet er svakt negativt ved store avstander og har et minimum ved  $r = 2^{1/6}\sigma$ . I tillegg vil  $V_2(r) \rightarrow \infty$  når  $r \rightarrow 0$ .



I en svakt vekselvirkende Bosegass, vil partiklene vekselvirke med et potensial som tilsvare Lennard-Jones potensialet. Men uheldigvis, gir et slikt potensial en veldig komplisert Lagrangefunksjon, og den gjør de fleste beregninger vanskelige. Heldigvis finnes det derimot en måte å forenkle problemet på, og løsningen kalles for effektiv feltteori.

## 3.2 Effektive feltteorier

Når man studerer naturvitenskap, er man interessert i å finne ut av hvordan verden fungerer. Man gjør eksperimenter for å teste matematiske modeller, og etterhvert kan man finne mer og mer generelle teorier for hvordan verden henger sammen. For eksempel formulerte Isaac Newton sine tre lover på 1600-tallet. Disse lovene viste seg å være gode matematiske modeller da de stemte godt overens med eksperimentelle resultater. Men over tohundre år senere, da Albert Einstein formulerte relativitetsteorien, fant man ut at Newtons lover bare kunne brukes til å studere legemer med liten fart  $v$  sammenlignet med lysfarten  $c$ . Newtons lover er derfor et grensetilfelle av en mer generell teori som gjelder ved alle hastigheter. Likevel har vi ikke forkastet Newtons lover. Lovene blir fortsatt brukt til å studere ulike situasjoner, og grunnen er enkel. De er lettere å bruke.

Newtons lover er et godt eksempel på hva vi kan kalle en effektiv teori [19, 20]. Den beskriver ikke den fulle sannheten, men sannheten er heller ikke langt unna. Når  $v/c \ll 1$  er de relativistiske korreksjonene neglisjerbare, og det er unødvendig å inkludere dem i utregningene. Hensikten med en effektiv teori kan oppsummeres i følgende sitat av Antonio Pich:

In order to analyze a particular physical system amid the impressive richness of the surrounding world, it is necessary to isolate the most relevant ingredients from the rest, so that one can obtain a simple description without having to understand everything [20, side 5].

I forrige kapittel introduserte vi en feltteori for en svakt vekselvirkende Bosegass, og denne feltteorien er en effektiv teori. Den er for eksempel ikke-relativistisk, og vi har dermed antatt at farten til partiklene er mye mindre enn lysfarten. I tillegg ser den bort ifra spredningsprosesser som involverer flere enn to partikler. Med dette har vi forenklet problemet. Men forenklingen medførte at feltteorien bare gjelder for tynne gasser der partiklene har liten impuls og vekselvirker svakt.

For tynne gasser ved lave temperaturer kan vi også gjøre ytterligere forenklinger. Da vil de makroskopiske egenskapene til gassen avhenge av spredningslengden  $a$ , og de vil ikke avhenge av mer spesifikke detaljer om vekselvirkningene. Med dette er ikke formen på vekselvirkningspotensialet  $V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  relevant og det kan derfor erstattes med ett lokalt effektivt potensial  $V_{\text{eff}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  gitt ved:

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.3)$$

som gir samme spredningslengde som det virkelige potensialet. Her er  $g$  en koblingskonstant, og sammenhengen mellom  $a$  og  $g$  finner vi ved Bornapproximasjon.

### 3.3 Bornapproximasjonen

Vi skal nå finne sammenhengen mellom koblingskonstanten  $g$  og spredningslengden  $a$ , og for å finne denne, skal vi studere en prosess der to partikler spres på hverandre<sup>2</sup>. Denne situasjonen skal vi også se på som et én-partikkel problem, der en partikkel med redusert masse  $m^* = m/2$  spres på et ytre potensial  $V_2(\mathbf{r})$  plassert i origo. En slik spredningsprosess kan beskrives ved hjelp av den tilhørende tidsuavhengige Schrödingerligningen:

$$\left[ \frac{1}{m} \nabla^2 + \omega \right] \psi(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}), \quad (3.4)$$

der  $\omega$  energien til partikkelen. Vi bruker nå at propagatoren til en fri partikkel  $G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$  er en Greensfunksjon som tilfredsstillers ligning (2.112) og at høyre side av Schrödingerligningen kan skrives som:

$$V_2(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \left[ \frac{1}{m} \nabla^2 + \omega \right] \left[ \psi_0(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) V_2(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') \right]. \quad (3.5)$$

Her er  $\psi_0(\mathbf{r})$  en bølgefunksjon som tilfredsstillers ligningen  $(\nabla^2 + m\omega)\psi_0(\mathbf{r}) = 0$ . Det vil si at  $\psi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}}$  der  $\mathbf{p}_0$  er en vektor som oppfyller ligningen:

$$\omega = \frac{p_0^2}{m}. \quad (3.6)$$

Ved hjelp av Greensfunksjonen kan vi nå skrive Schrödingerligningen som en integralligning:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \psi_0(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) V_2(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') \\ &= \psi_0(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' m \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ip_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V_2(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (3.7)$$

og denne integralligningen skal vi bruke til å studere bølgefunksjonen i grensen der  $r \gg r'$ . Når  $r \gg r'$ , kan vi skrive eksponenten som:

$$p_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx p_0 r - \mathbf{p}'_0 \cdot \mathbf{r}', \quad (3.8)$$

og her er  $\mathbf{p}'_0 \equiv p_0 \mathbf{r}/r$ . Dette gir videre at bølgefunksjonen består av en innkommende planbølge og en utgående kulebølge når  $r \gg r'$ :

$$\psi(\mathbf{r}) \approx e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{m}{4\pi} \frac{e^{ip_0 r}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{p}'_0 \cdot \mathbf{r}'} V_2(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}'). \quad (3.9)$$

Dette uttrykket kalles for den asymptotiske bølgefunksjonen, og ved å bruke at spredningsamplituden  $f(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_0)$  er gitt ved:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}} + f(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_0) \frac{e^{ip_0 r}}{r}, \quad (3.10)$$

<sup>2</sup>Dette delkapittelet bygger på refs. [8, 11].

finner vi:

$$f(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_0) = -\frac{1}{4\pi} m \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{p}'_0 \cdot \mathbf{r}'} V_2(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'). \quad (3.11)$$

Dersom vi også bruker at den Fouriertransformerte av  $G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$ ,  $\psi(\mathbf{r})$  og  $V_2(\mathbf{r})$  er gitt ved:

$$G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} m \frac{1}{p_0^2 - p^2 + i\eta}, \quad (3.12)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \psi(\mathbf{p}), \quad (3.13)$$

$$V_2(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} V_2(\mathbf{p}), \quad (3.14)$$

tar ligning (3.7) og (3.11) følgende form:

$$\psi(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + m \frac{1}{p_0^2 - p^2 + i\eta} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V_2(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \quad (3.15)$$

$$f(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_0) = -\frac{1}{4\pi} m \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V_2(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q} - \mathbf{p}'_0). \quad (3.16)$$

Ved å kombinere ligningene, finner vi også at bølgefunksjonen kan skrives som:

$$\psi(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \frac{4\pi f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)}{p_0^2 - p^2 + i\eta}. \quad (3.17)$$

Videre multipliserer vi ligning (3.17) med  $-V_2(\mathbf{p}'_0 - \mathbf{p})$  og integrerer med hensyn på  $\mathbf{p}$ , og vi får integralligningen:

$$\frac{4\pi}{m} f(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_0) = -V_2(\mathbf{p}'_0 - \mathbf{p}_0) + m \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{V_2(\mathbf{p}'_0 - \mathbf{p})}{p_0^2 - p^2 + i\eta} \frac{4\pi}{m} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0). \quad (3.18)$$

Denne ligningen skal vi bruke til å finne et tilnærmet uttrykk for spredningsamplituden. Vi begrenser oss først til å bare betrakte det første leddet i ligning (3.18), og finner følgende uttrykk for spredningsamplituden:

$$f(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_0) = -\frac{m}{4\pi} V_2(\mathbf{p}'_0 - \mathbf{p}_0). \quad (3.19)$$

Dette uttrykket for  $f(\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_0)$  kalles for Bornapproximasjonen, og bedre apporksimasjoner finner vi ved iterasjon.

Dersom vi nå lar  $p_0 \rightarrow 0$ , gir partialbølgemetoden at vi får isotrop spredning og at spredningsamplituden  $f(0, 0)$  er en konstant:

$$f(0, 0) = -a, \quad (3.20)$$

der  $a$  er spredningslengden. Vi ønsker å finne et uttrykk for koblingskonstanten  $g$ , og dette finner vi ved å kreve at det effektive potensialet gir den korrekte spredningslengden  $a$ . Ved hjelp av Bornapproximasjonen i ligning (3.19) finner vi dermed at sammenhengen mellom koblingskonstanten og spredningslengden er gitt ved:

$$a = \frac{m}{4\pi}g, \quad (3.21)$$

og hvis vi går til andre orden i ligning (3.18) finner vi følgende:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{4\pi} \left[ g - m \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{g}{p^2} g \right] \\ &= \frac{m}{4\pi} \left[ g - g^2 m \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Her har vi latt  $\eta \rightarrow 0$ . Uttrykket over inneholder et divergent ledd, og dette henger sammen med at vi har erstattet vekselvirkningspotensialet med et effektivt potensial. Den Fouriertransformerte av et typisk vekselvirkningspotensial  $V_2(\mathbf{q})$ , går vanligvis mot null når  $q \rightarrow \infty$  [21], og vi får derfor aldri divergente ledd når vi bruker det virkelige vekselvirkningspotensialet. Vi kan likevel fjerne slike divergenser ved hjelp av renormaliseringsteori og dette blir forklart nærmere i neste kapittel.

# Kapittel 4

## Bogoliubovs metode

Tenk at vi har en tynn, ideell Bosegass ved  $T = 0$  og at vi studerer gassen mens vi 'skrur på' vekselvirkninger mellom atomene. *Hva skjer?* I dette kapitlet skal vi studere en svakt vekselvirkende Bosegass, og vi skal se at systemet vil oppføre seg svært forskjellig fra tilfellet der partiklene ikke vekselvirker. For eksempel blir en viss andel av partiklene tvunget ut av kondensatet og inn i tilstander med impuls  $\mathbf{p} \neq 0$ , og dette skjer selv ved  $T = 0$ . I tillegg blir systemet beskrevet som et system av kvasipartikler. Disse kvasipartiklene følger et lineært spekter i lavenergigrensen og kan derfor identifiseres som fononer.

I dette kapitlet skal vi først finne grunntilstandsenergien til en svakt vekselvirkende Bosegass ved bruk av Bogoliubovs metode. I tillegg skal vi se hvordan gassen kan beskrives ved hjelp av kvasipartikler, og vi skal studere hvor mange partikler som til enhver tid er utenfor kondensatet ved  $T = 0$ . Kapitlet bygger i all hovedsak på refs. [2, 3], og der vi har brukt andre kilder er kildehenvisningene gitt direkte i teksten.

### 4.1 Grunntilstandsenergien

Den effektive feltteorien for en svakt vekselvirkende Bosegass har følgende Hamilton-funksjon:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2}. \quad (4.1)$$

Vi skal nå studere denne Hamiltonoperatoren, men før vi gjør det, skal vi minne om at alle partiklene i en ideell Bosegass ved  $T = 0$  befinner seg i kondensatet. Det vil si at  $n_0 = N$ . Hvis vi først antar at en svakt vekselvirkende Bosegass ikke oppfører seg så forskjellig fra en ideell gass, er det rimelig å tro at samtlige partikler er i kondensatet når  $T = 0$  også i dette tilfellet. Med dette kan vi finne grunntilstandsenergien til systemet ved å neglisjere alle ledd i Hamiltonoperatoren som inneholder  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  og  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  der  $\mathbf{p} \neq 0$  og sette  $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{\dagger} = \sqrt{N}$ . Dette gir følgende uttrykk for grunntilstandsenergien:

$$E_0 = \frac{gN^2}{2V}. \quad (4.2)$$

Her har vi erstattet operatorene  $\hat{a}_0^\dagger$  og  $\hat{a}_0$  med komplekse tall, og den første som gjorde dette for å studere en svakt vekselvirkende Bosegass, var Bogoliubov i midten av forrige århundre. Grunnen til at vi kan erstatte  $\hat{a}_0^\dagger$  og  $\hat{a}_0$  med komplekse tall, henger sammen med at vi har et makroskopisk antall partikler i grunntilstanden. For når dette er tilfellet vil operatorene  $\hat{a}_0^\dagger$  og  $\hat{a}_0$  ha tilnærmet lik forventningsverdi:

$$|\langle n_0 - 1 | \hat{a}_0 | n_0 \rangle| \approx |\langle n_0 + 1 | \hat{a}_0^\dagger | n_0 \rangle| \approx \sqrt{n_0}. \quad (4.3)$$

Her er  $|n_0\rangle$  tilstanden som beskriver  $n_0$  partikler med impuls  $\mathbf{p} = 0$ . Antallsoperatoren  $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$  vil også ha tilnærmet den samme forventningsverdien som  $\hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger$ , og vi kan derfor se bort ifra kommutatorrelasjonen mellom  $\hat{a}_0^\dagger$  og  $\hat{a}_0$ , og betrakte operatorene som komplekse tall gitt ved:

$$\hat{a}_0^\dagger = \hat{a}_0 = \sqrt{n_0}. \quad (4.4)$$

Ved hjelp av en metode utviklet av Bogoliubov, skal vi se at det er mulig å gjøre en bedre approksimasjon for grunntilstandsenergien enn den vi gjorde over. Vi åpner nå for at det er partikler utenfor kondensatet selv ved  $T = 0$ , men antar likevel at de fleste partiklene er i kondensatet slik at  $n_0 \approx N$ . Når dette er tilfellet kan vi neglisjere alle ledd som er av høyere orden enn kvadratisk i heve- og senkeoperatorer med impuls  $\mathbf{p} \neq 0$ , og vi finner at Hamiltonoperatoren kan uttrykkes som:

$$\hat{H} = \frac{g}{2V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left( 4 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_0 + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} \right). \quad (4.5)$$

Vi setter nå:

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0^\dagger = \sqrt{n_0} \approx \sqrt{N} \quad (4.6)$$

i den siste summen i ligning (4.5). I det første leddet bruker vi normeringsbetingelsen  $N = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}$  og skriver:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 &= \left[ N - \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \right]^2 \\ &\approx N^2 - 2N \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hvis vi setter ligning (4.6) og (4.7) inn i (4.5) tar Hamiltonoperatoren formen:

$$\hat{H} = g \frac{N^2}{2V} + \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} g \rho \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left( 2 \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} \right), \quad (4.8)$$

og her er  $\rho = N/V$ . Vi merker oss at denne Hamiltonoperatoren er forskjellig fra den originale operatoren og at den ikke kommuterer med antallsoperatoren  $\hat{N}$ . Det vil si at

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{N}] &= \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \sum_{\mathbf{p}'} \frac{1}{2} g \rho \left( [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] + [\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] \right) \\ &= \sum_{\mathbf{p} \neq 0} g \rho \left( \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Når vi bruker denne Hamiltonoperatoren, får vi derfor et resultat der partikkeltallet ikke er bevart og fluktuerer med tiden.

Det neste vi skal gjøre er å diagonalisere Hamiltonoperatoren ved hjelp av Bogoliubov-transformasjonen. Transformasjonen går ut på å uttrykke heve- og senkeoperatorene  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$  og  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  som en lineærkombinasjon av to nye heve- og senkeoperatorene  $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$  og  $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ :

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger = u_{\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger + v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}}^* \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad (4.10)$$

og kommutatorrelasjonen  $[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] = 1$  gir at  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  må tilfredsstille ligningen:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] &= [u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}}^* \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger, u_{\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger + v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}] \\ &= |u_{\mathbf{p}}|^2 [\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger] + u_{\mathbf{p}} v_{-\mathbf{p}} [\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{-\mathbf{p}}] + v_{-\mathbf{p}}^* u_{\mathbf{p}}^* [\hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger] + |v_{-\mathbf{p}}|^2 [\hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \hat{b}_{-\mathbf{p}}] \\ &= |u_{\mathbf{p}}|^2 - |v_{-\mathbf{p}}|^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Her har vi krevd at de nye operatorene skaper og fjerner kvasipartikler, og at de følger kommutatorrelasjonene i ligning (2.30) og (2.31). Uttrykket over gir at  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  kan skrives som to hyperbolske funksjoner:

$$u_{\mathbf{p}} = \cosh(\alpha_{\mathbf{p}}) e^{i\phi_1}, \quad v_{-\mathbf{p}} = \sinh(\alpha_{\mathbf{p}}) e^{-i\phi_2}, \quad (4.12)$$

der  $\phi_1$  og  $\phi_2$  er to vilkårlige faser, og  $\alpha_{\mathbf{p}}$  er en parameter som vi velger slik at Hamiltonoperatoren diagonaliseres. Det vil si at vi velger  $\alpha_{\mathbf{p}}$  slik at alle ledd som er multiplisert med produktet av to operatorene med forskjellig indeks forsvinner.

La oss nå se på de forskjellige operatorproduktene som inngår i Hamiltonoperatoren. Produktet  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}$  gir:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} &= \left( u_{\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger + v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} \right) \left( u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}}^* \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) \\ &= |u_{\mathbf{p}}|^2 \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + u_{\mathbf{p}}^* v_{-\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger + |v_{-\mathbf{p}}|^2 \hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.13)$$

og  $\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}}$  gir:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} &= \left( u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}}^* \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) \left( u_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \right) \\ &= |u_{\mathbf{p}}|^2 \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}} u_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}} + u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger + |v_{-\mathbf{p}}|^2 \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.14)$$

I tillegg er  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger$  det adjungerte av operatorproduktet over. Hvis vi nå setter ligning (4.13) og (4.14) inn i ligning (4.8) og krever at alle ledd multiplisert med  $\hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}$  og  $\hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$  forsvinner, finner vi at  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  må tilfredsstillе ligningen:

$$\frac{g\rho}{2} (|u_{\mathbf{p}}|^2 + |v_{\mathbf{p}}|^2) + \left( \frac{p^2}{2m} + g\rho \right) u_{\mathbf{p}} v_{-\mathbf{p}} = 0, \quad (4.15)$$

og ligning (4.12) gir dermed at  $\alpha_{\mathbf{p}}$  må velges slik at

$$\coth(2\alpha_{\mathbf{p}}) e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} = -\frac{p^2/2m + g\rho}{g\rho}. \quad (4.16)$$

Høyre side av ligningen er et reelt tall, og hvis vi også lar  $\alpha_{\mathbf{p}}$  være reell, må fasene  $\phi_1$  og  $\phi_2$  være slik at

$$\phi_1 - \phi_2 = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

Vi setter nå for enkelhets skyld  $\phi_1 = \phi_2 \equiv \phi$ , og ved hjelp av hyperbolske relasjoner finner vi at  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  tar følgende form:

$$u_{\mathbf{p}} = e^{i\phi} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2/2m + g\rho}{\epsilon(\mathbf{p})} + 1 \right)}, \quad (4.18)$$

$$v_{-\mathbf{p}} = -e^{-i\phi} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2/2m + g\rho}{\epsilon(\mathbf{p})} - 1 \right)}, \quad (4.19)$$

og  $\epsilon(\mathbf{p})$  er definert ved:

$$\epsilon(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{\left( \frac{p^2}{2m} \right) + g\rho \frac{p^2}{m}}. \quad (4.20)$$

I det følgende lar vi  $\phi = 0$ . Dette kommer ikke til å ha noe å si for det endelige resultatet fordi  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  alltid opptrer kvadrert (som  $|u_{\mathbf{p}}|^2$  og  $|v_{-\mathbf{p}}|^2$ ) eller multiplisert med hverandre (som  $u_{\mathbf{p}} v_{-\mathbf{p}}$ ) i Hamiltonoperatoren.

Hamiltonoperatoren tar nå formen:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{g\rho^2 V}{2} + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left[ \left( \left( \frac{p^2}{2m} + g\rho \right) (u_{\mathbf{p}}^2 + v_{-\mathbf{p}}^2) + 2g\rho u_{\mathbf{p}} v_{-\mathbf{p}} \right) \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} \right. \\ & \left. + \left( \frac{p^2}{2m} + g\rho \right) v_{-\mathbf{p}}^2 + g\rho u_{\mathbf{p}} v_{-\mathbf{p}} \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

og ved hjelp av ligning (4.18) og (4.19), reduseres dette til:

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \epsilon(\mathbf{p}) \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}}, \quad (4.22)$$



der  $E_0$  grunntilstandsenergien gitt ved:

$$E_0 = \frac{g\rho^2 V}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left[ \epsilon(\mathbf{p}) - g\rho - \frac{p^2}{2m} \right]. \quad (4.23)$$

Av ligning (4.22) kan vi se at et system av svakt vekselvirkende bosoner kan beskrives som et system av kvasipartikler med energi  $\epsilon(\mathbf{p})$ , og disse kvasipartiklene skapes og fjernes av operatorene  $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$  og  $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ . Når systemet er i grunntilstanden, er det fravær av slike partikler, og denne tilstanden kan derfor beskrives som en vakuumentilstand  $|0\rangle$  gitt ved:

$$\hat{b}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0. \quad (4.24)$$

Vi merker oss at tilstanden  $|0\rangle$  er forskjellig fra  $|\Omega\rangle$  som beskriver et tomt system uten atomer. Tilstandsvektorene tilhører forskjellige basiser, og generelt kan hver vektor i den ene basisen uttrykkes som en lineærkombinasjon av vektorer i den andre basisen. For eksempel kan  $|0\rangle$  skrives som en lineærkombinasjon av vektorene  $|n_0, n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \dots\rangle$ , der  $n_{\mathbf{p}_i}$  er antallet partikler med impuls  $\mathbf{p}_i$ .

La oss videre studere grunntilstandsenergien  $E_0$ . Hvis vi tar kontinuums grensen og erstatter summetegnet i ligning (4.23) med et integral finner vi:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{g\rho^2 V}{2} + \frac{V}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ \epsilon(\mathbf{p}) - g\rho - \frac{p^2}{2m} \right] \\ &= \frac{g\rho^2 V}{2} + \frac{V}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \left[ \epsilon(\mathbf{p}) - g\rho - \frac{p^2}{2m} \right] p^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Her er integralet over vinklene utført, og vi skal snart se at dette uttrykket er lineært divergent. Med andre ord har vi funnet et divergent uttrykk for grunntilstandsenergien. Dette gir ikke mening, og vi kan spørre oss om dette uttrykket gir en bedre approksimasjon enn ligning (4.2) som tross alt er endelig. Men vi skal likevel ikke forkaste uttrykket. For vi skal se at vi kan gjøre både uttrykket for spredningslengden  $a$  i ligning (3.22) og for  $E_0$  i ligning (4.25) konvergent ved å renormalisere koblingskonstanten  $g$ .

La oss gjøre integralene i ligning (3.22) og (4.25) endelige ved innføre en øvre grense  $p'$  slik at vi bare integrerer over impulser der  $|\mathbf{p}| \leq p'$ . Da får vi noen ledd som avhenger av  $p'$  når vi utfører integralene, og renormaliseringsprosedyren går nå ut på å inkludere disse leddene i koblingskonstanten. La oss skrive koblingskonstanten som  $g_0$ . Da betyr dette at vi kan skrive:

$$g_0 = g + \Delta g, \quad (4.26)$$

der  $\Delta g$  er den delen av koblingskonstanten som avhenger av  $p'$ , og  $g$  er uavhengig av  $p'$ . Videre kaller vi  $\Delta g$  for et motledd og  $g$  for den fysiske koblingskonstanten. Hvis vi nå bruker denne koblingskonstanten i uttrykket for  $a$  og  $E_0$ , skal vi se at vi kan bestemme motleddet slik at det kansellerer begge divergensene. Generelt er motleddet som kreves

for å fjerne divergensen i uttrykket for en gitt fysisk størrelse det samme som kreves for å fjerne divergensen i en annen [21]. Når vi har bestemt motleddet slik at det fjerner divergensen i for eksempel uttrykket for spredningslengden  $a$ , har vi dermed fjernet alle divergensene en gang for alle.

Generelt er det også slik at alle divergensene som dukker opp i en renormaliserbar feltteori aldri kan observers [14]. Det betyr at vi alltid vil finne endelige spredningslengder  $a$  og grunntilstandsenergi  $E_0$  når vi gjør eksperimenter. I tillegg er det umulig å gjøre eksperimenter der vi måler koblingskonstanten  $g_0$ . Motleddet  $\Delta g$  vil alltid kansellere, og vi kan derfor bare måle den fysiske koblingskonstanten  $g$ .

Renormaliseringsprosedyrer er svært verdifulle og har gitt flere kjente resultater. Et eksempel fra kvanteelektrodynamikken er beregningen av Lamb-shift i Hydrogenatomet, som ble gjort av Bethe på 40-tallet. Ved å bruke andre ordens perturbasjonsteori, og ved å dele elektronmassen inn i et motledd og en fysisk masse, fant han en energiforskjell mellom  $2s_{1/2}$  og  $2p_{1/2}$  tilstandene som stemte godt overens med ekseperimentelle resultater [22].

La oss nå studere ligning (3.22):

$$\begin{aligned} \frac{4\pi a}{m} &= g_0 - g_0^2 m \int_0^{p'} \frac{dp}{(2\pi)^3} \\ &= g_0 - \frac{g_0^2 m p'}{2\pi^2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

og her har vi innført en øvre grense  $p'$ . Hvis vi nå setter inn for  $g_0 = g + \Delta g$ , får vi til første orden i  $\Delta g$  at

$$\frac{4\pi a}{m} = g + \Delta g - \frac{g^2 m p'}{2\pi^2}, \quad (4.28)$$

og dette gir følgende uttrykk for den fysiske koblingskonstanten og motleddet:

$$g = \frac{4\pi a}{m}, \quad (4.29)$$

$$\Delta g = \frac{g^2 m p'}{2\pi^2}. \quad (4.30)$$

La oss videre evaluere integralet i ligning (4.25) for å se om den renormaliserte koblingskonstanten gir oss en endelig grunntilstandsenergi:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{g_0 \rho^2 V}{2} + \frac{V}{(2\pi)^2} \left[ -\frac{g_0 \rho}{3} p'^3 - \frac{p'^5}{10m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4m^2 p'^2}{3} \left[ \frac{g_0 \rho}{m} + \left( \frac{p'}{2m} \right)^2 \right]^{3/2} - \frac{32m^4}{15} \left[ \frac{g_0 \rho}{m} + \left( \frac{p'}{2m} \right)^2 \right]^{5/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{32m^4}{15} \left( \frac{g_0 \rho}{m} \right)^{5/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Videre rekkeutvikler vi  $\left[g_0\rho/m + (p'^2/2m)^2\right]^{3/2}$  og  $\left[g_0\rho/m + (p'^2/2m)^2\right]^{5/2}$  for store  $p'$  der  $p'^2 \gg g_0\rho m$ :

$$\frac{4m^2 p'^2}{3} \left[ \frac{g_0\rho}{m} + \left(\frac{p'}{2m}\right)^2 \right]^{3/2} \approx \frac{p'^5}{6m} + p'^3 g_0\rho + mp' (g_0\rho)^2, \quad (4.32)$$

$$\frac{32m^4}{15} \left[ \frac{g_0\rho}{m} + \left(\frac{p'}{2m}\right)^2 \right]^{5/2} \approx \frac{p'^5}{15m} + \frac{2}{3} p'^3 g_0\rho + 2mp' (g_0\rho)^2, \quad (4.33)$$

og disse uttrykkene setter vi inn i ligning (4.31). Det gir:

$$E_0 = \frac{g_0\rho^2 V}{2} + \frac{V}{(2\pi)^2} \left[ \frac{32m^4}{15} \left(\frac{g_0\rho}{m}\right)^{5/2} - m(g_0\rho)^2 p' \right], \quad (4.34)$$

og vi ser at  $E_0$  er lineær divergent. Hvis vi nå setter inn for  $g_0 = g + \Delta g$ , får vi til første orden i  $\Delta g$  at

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{g\rho^2 V}{2} + \frac{V}{(2\pi)^2} \left[ \frac{32m^4}{15} \left(\frac{g\rho}{m}\right)^{5/2} - 2\pi^2 \rho^2 \left(\frac{g^2 mp'}{2\pi^2} - \Delta g\right) \right] \\ &= \frac{g\rho^2 V}{2} + \frac{V}{(2\pi)^2} \frac{32m^4}{15} \left(\frac{g\rho}{m}\right)^{5/2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Her ser vi, som nevnt over, at det samme motleddet som fjernet divergensen i uttrykket for spredningslengden, også gir oss en endelig grunntilstandsenergi. Vi ser også at dette uttrykket for  $E_0$  har et ekstra ledd i forhold til den første approksimasjonen vi gjorde i ligning (4.2). Dette leddet er positivt og ligning (4.35) gir derfor en større grunntilstandsenergi. Grunnen til at det nye uttrykket for  $E_0$  er større enn det gamle, henger sammen med at antagelsene som ligger til grunn i de to utregningene er noe forskjellige. I den første approksimasjonen antok vi at alle partiklene var i kondensatet og hadde impuls  $\mathbf{p} = 0$ . Med det neglisjerte vi alle ledd i Hamiltonoperatoren der  $\mathbf{p} \neq 0$ , og satte  $\hat{a}_0^\dagger = \hat{a}_0 = \sqrt{N}$ . I den nye approksimasjonen var vi derimot åpne for at det kunne være partikler i systemet med impuls  $\mathbf{p} \neq 0$ , men at dette isåfall var en *liten* andel av partiklene og at  $n_0 \approx N$ . Det ekstra leddet kommer derfor fra partikler utenfor kondensatet. Disse partiklene har større energi enn partiklene i kondensatet, og hever dermed den totale energien til hele systemet.

$E_0$  er nå gitt ved:

$$E_0 = \frac{2\pi a \rho^2 V}{m} \left[ 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} (\rho a^3)^{1/2} \right]. \quad (4.36)$$

Her er ligning (4.29) brukt til å uttrykke energien ved hjelp av spredningslengden  $a$  i stedet for den fysiske koblingskonstanten  $g$ . Vi ser at det ekstra leddet er en funksjon av gassparameteren  $\rho a^3$  som i tynne gasser er veldig liten,  $\rho a^3 \ll 1$ . Antallet partikler

utenfor kondensatet  $\tilde{N}$  vil derfor være lite, og dette er i samsvar med antagelsen vår om at  $n_0 \approx N$ . Mot slutten av kapitlet skal vi vise at  $\tilde{N}$  også er en funksjon av gassparameteren.

Uttrykket for  $E_0$  i ligning (4.36) ble først funnet av Lee og Yang i 1957 [23], og de fant også ut at  $(\rho a^3)^{1/2}$  fungerer som en utviklingsparameter. Til neste orden kan det vises at vi får ledd som er proporsjonale med  $\rho a^3$  og  $\rho a^3 \ln(\rho a^3)$ , men fordi gassparameteren er liten i tynne gasser, holder det ofte å bare bruke det første uttrykket vi fant for  $E_0$  i ligning (4.2), og neglisjere alle ledd som avhenger av gassparameteren.

## 4.2 Partikler og eksitasjoner

Ligning (4.22) viser at de eksiterte tilstandene til en svakt vekselvirkende Bosegass kan beskrives av ikke-vekselvirkende kvasipartikler med energi  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Dersom vi studerer lavenergigrensen til  $\epsilon(\mathbf{p})$ , finner vi også et svar på hva kvasipartiklene kan være:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{p}) &= \lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{g\rho}{m} p^2} \\ &= p \sqrt{\frac{g\rho}{m}} \\ &= cp. \end{aligned} \tag{4.37}$$

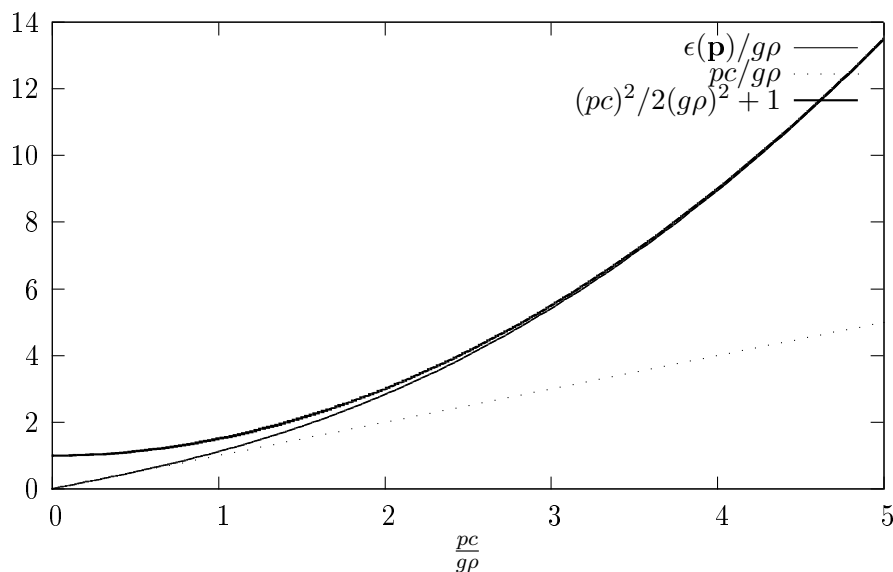
Her er  $c \equiv \sqrt{g\rho/m}$ . I lavenergigrensen finner vi at kvasipartiklene følger et lineært spekter, og opptrer som fononer med lydfart  $c$ . Bogoliubovteorien gir dermed at de langbølgete eksitasjonene i en svakt vekselvirkende Bosegass er lydbølger.

Hvis vi studerer den motsatte grensen der  $p \gg mc$ , får vi følgende dispersjonsrelasjon for kvasipartiklene:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \epsilon(\mathbf{p}) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + (cp)^2} \\ &= p \left[ \frac{p}{2m} + \frac{m}{p} c^2 \right] \\ &= \frac{p^2}{2m} + g\rho, \end{aligned} \tag{4.38}$$

og i denne grensen skaper og fjerner operatorene  $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$  og  $\hat{b}_{\mathbf{p}}$  atomer med impuls  $\mathbf{p}$  og kinetisk energi  $p^2/2m$ . Det andre leddet i dispersjonsrelasjonen, kommer av at disse partiklene vekselvirker med kondensatet [21].

At  $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$  og  $\hat{b}_{\mathbf{p}}$  skaper og fjerner atomer kan vi også vise ved å studere ligning (4.10) i den



Figur 4.1: Eksitasjonsspekteret  $\epsilon(\mathbf{p})$  sammenlignet med ligning (4.37) og (4.38). Vi ser at  $\epsilon(\mathbf{p})$  er lineær nær origo og har form som en parabel når  $p \gg mc$ .

samme grensen.  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  tar da grenseverdiene:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_{\mathbf{p}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2/2m + g\rho}{\epsilon(p)} + 1 \right)} = 1, \quad (4.39)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} v_{-\mathbf{p}} = \lim_{p \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2/2m + g\rho}{\epsilon(p)} - 1 \right)} = 0, \quad (4.40)$$

og hvis vi bruker dette til å studere ligning (4.10), får vi følgende:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad (4.41)$$

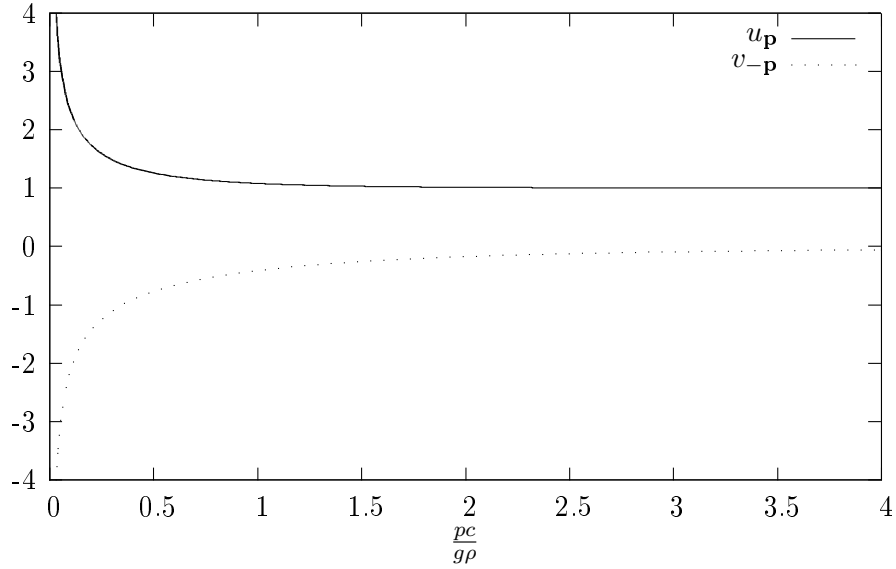
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \hat{b}_{\mathbf{p}} = \hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (4.42)$$

I den motsatte grensen er  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  gitt ved:

$$\lim_{p \rightarrow 0} u_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{g\rho}{2pc}}, \quad (4.43)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} v_{-\mathbf{p}} = -\sqrt{\frac{g\rho}{2pc}}. \quad (4.44)$$

Det vil si at  $u_{\mathbf{p}} \rightarrow \infty$  og  $v_{-\mathbf{p}} \rightarrow -\infty$  når  $p \rightarrow 0$  og i denne grensen bekrefter ligning (4.10) de store fysiske forskjellene mellom fononene og atomene i gassen.



Figur 4.2: Figuren viser en grafisk fremstilling av  $u_{\mathbf{p}}$  og  $v_{-\mathbf{p}}$  som funksjon av  $pc/g\rho$ .

Overgangen der kvasipartiklene går fra å være fononer til frie partikler, er ofte beskrevet ved koherenslengden  $\xi$ . Koherenslengden er definert ved:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2mg\rho}}, \quad (4.45)$$

og gir at vi kan se på alle kvasipartiklene med impuls  $p < 1/\xi$  som masseløse fononer.

### 4.3 Partikkelimpuls

Vi skal nå finne hvor mange partikler som er eksitert ut av kondensatet ved  $T = 0$ . Med dette som mål finner vi først partikkeltallet  $n_{\mathbf{p}}$  som gir antallet partikler i systemet med impuls  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{p}} &= \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \left( u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger + v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} \right) \left( u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) | 0 \rangle \\ &= v_{-\mathbf{p}}^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Her har vi brukt at  $\langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} | 0 \rangle = 0$ . I kontinuumsgrensa finner vi nå det totale antallet partikler utenfor kondensatet  $\tilde{N}$  ved å integrere ligning (4.46)

over hele impulsrommet. Det gir:

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} v_{-\mathbf{p}}^2 \\ &= \lim_{p' \rightarrow \infty} \frac{V4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{p'} dp \frac{p^2}{2} \left( \frac{p^2/2m + mc^2}{\sqrt{(p^2/2m)^2 + p^2c^2}} - 1 \right),\end{aligned}\quad (4.47)$$

og dette integralet har følgende løsning:

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{V4\pi}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{6} (p'^2 + (2mc)^2)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2mc)^3}{6} - (mc)^2 \sqrt{p'^2 + (2mc)^2} + \frac{(2mc)^3}{4} - \frac{p'^3}{6} \right].\end{aligned}\quad (4.48)$$

Videre rekkeutvikler vi  $(p'^2 + (2mc)^2)^{3/2}$  og  $\sqrt{p'^2 + (2mc)^2}$  for  $p' \gg (2mc)^2$ :

$$(p'^2 + (2mc)^2)^{3/2} \approx p'^3 + \frac{3p'}{2}(2mc)^2, \quad (4.49)$$

$$\sqrt{p'^2 + (2mc)^2} \approx p', \quad (4.50)$$

og hvis vi setter ligning (4.49) og (4.50) inn i ligning (4.48) finner vi følgende uttrykk for  $\tilde{N}$ :

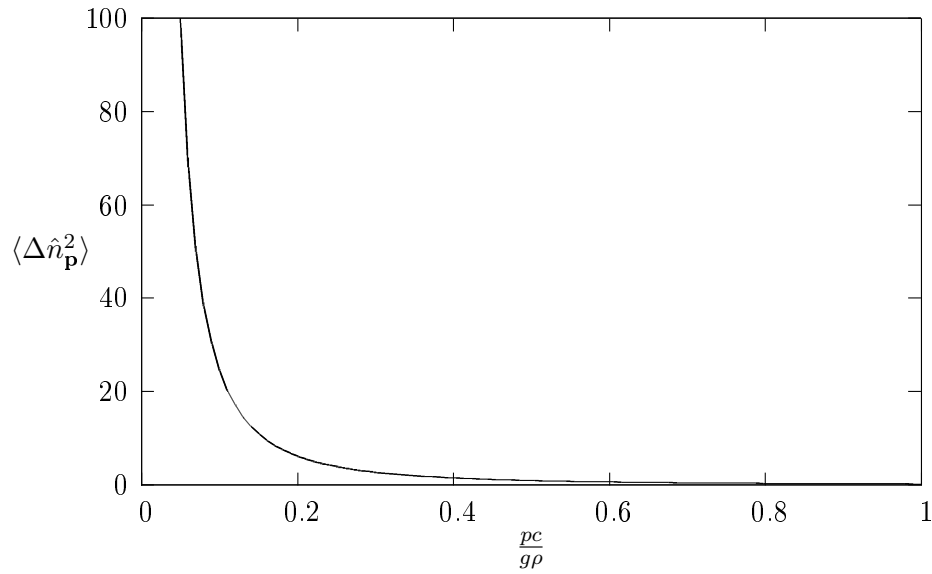
$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \frac{V}{3\pi^2} (mc)^3 \\ &= \frac{8V}{3\sqrt{\pi}} (\rho a^3)^{1/2}.\end{aligned}\quad (4.51)$$

Her ser vi at  $\tilde{N}$  er proporsjonal med  $(\rho a^3)^{1/2} \ll 1$  som er kvadratroten av gassparameteren. Dette bekrefter at det er en liten andel av partiklene som er eksitert ut av kondensatet.

Ved å studere fluktusjonene  $\langle \Delta \hat{n}_{\mathbf{p}}^2 \rangle$ , ser vi om det er et skarpt antall partikler som har impuls  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned}\langle \Delta \hat{n}_{\mathbf{p}}^2 \rangle &= \langle \hat{n}_{\mathbf{p}}^2 \rangle - \langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle^2 \\ &= \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} | 0 \rangle - n_{\mathbf{p}}^2 \\ &= \langle 0 | \left[ u_{\mathbf{p}}^2 \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}}^2 \hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger + u_{\mathbf{p}} v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger + u_{\mathbf{p}} v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \right]^2 | 0 \rangle - n_{\mathbf{p}}^2 \\ &= \langle 0 | v_{-\mathbf{p}}^4 \hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger + u_{\mathbf{p}}^2 v_{-\mathbf{p}}^2 \hat{b}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle - v_{-\mathbf{p}}^4 \\ &= u_{\mathbf{p}}^2 v_{-\mathbf{p}}^2\end{aligned}\quad (4.52)$$

Vi ser at fluktusjonene er forskjellig fra null. Det vil si at antall partikler med impuls  $\mathbf{p}$  kan variere. Likevel vil fluktusjonene gå mot null når  $p \rightarrow \infty$ , og det finnes derfor få



Figur 4.3: Fluktusjonene i partikkeltallet  $\langle \Delta \hat{n}_{\mathbf{p}}^2 \rangle$

kortbølgete partikler utenfor kondensatet til enhver tid. Når  $p \rightarrow 0$  vil  $\langle \Delta \hat{n}_{\mathbf{p}}^2 \rangle \rightarrow \infty$ , men på tross av dette, har vi i Bogoliubovs metode antatt at antallet partikler i kondensatet er skarpt og lik  $n_0$ . Grunnen til at vi har fluktusjoner i partikkeltallet, henger sammen med at antallsoperatoren ikke kommuterer med Hamiltonoperatoren.



# Kapittel 5

## Spontant symmetribrudd

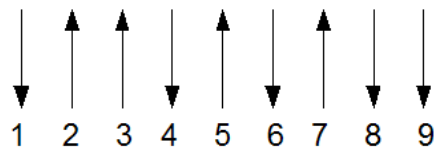
Faseoverganger har ofte tilknytning til symmetribrudd, og for svakt vekselvirkende Bose-gasser er det den globale  $U(1)$ -symmetrien som brytes. I dette kapitlet skal vi studere spontane symmetribrudd i en svakt vekselvirkende Bosegass, og vi skal se at i dette tilfellet spiller det kjemiske potensialet en avgjørende rolle. Men først skal vi illustrere hva som menes med spontane symmetribrudd ved å ta for oss den éndimensjonale Isingmodellen<sup>1</sup>.

### 5.1 Isingmodellen og degenererte grunntilstander

Hamiltonfunksjonen til den éndimensjonale Isingmodellen er gitt ved:

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}, \quad (5.1)$$

og i denne modellen har vi en kjede av  $N$  spinn som vekselvirker med sine nærmeste naboer. Hvert spinn er nummerert  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , og i tillegg har vi valgt periodiske randbetingelser slik at  $s_{N+1} = s_1$ . Spinnet  $s_i$  kan ta verdier  $\pm 1$ , og  $s_i = 1$  betyr at spinn nummer  $i$  er rettet 'oppover'.  $s_i = -1$  betyr derimot at spinnet er rettet 'nedover'. I dette eksempelet lar vi systemet være ferromagnetisk. Det vil si at vi lar  $J > 0$  slik at energien er minimal når alle spinnene peker i samme retning.



Figur 5.1: Et eksempel på en spinkonfigurasjon til éndimensjonal Isingmodell med 9 spinn

---

<sup>1</sup>Dette kapitlet er basert på refs. [2, 3, 5, 13, 14, 24]. Der det er brukt andre kilder er kildehenvisningene gitt direkte i teksten.

Hamiltonfunksjonen for Isingmodellen er invariant under transformasjonen  $s_i \rightarrow -s_i$ . Det vil si at transformasjonen der vi snur alle spinnene gir oss den samme Hamiltonfunksjonen. Hamiltonfunksjonen foretrekker derfor ingen spesiell spinnretning. Hvis vi nå plasserer systemet i et magnetfelt  $B$  og lar  $\mu$  være det magnetiske dipolmomentet til spinnene, får Hamiltonfunksjonen ett ekstra ledd:

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^N s_i. \quad (5.2)$$

I dette tilfellet vil ikke Hamiltonfunksjonen lenger være invariant under transformasjonen  $s_i \rightarrow -s_i$ , og systemet har mindre energi hvis alle spinnene har samme retning som magnetfeltet. Når den midlere spinnretningen er forskjellig fra null, peker flere spinn i den ene retningen enn den andre, og systemet er magnetisert. Magnetiseringen til systemet er gitt ved:

$$M = \mu \left\langle \sum_{i=1}^N s_i \right\rangle = \mu N \langle s \rangle. \quad (5.3)$$

Her er det brukt at  $\langle s_i \rangle = \langle s \rangle$  og  $\langle s_i \rangle$  er forventningsverdien til spinn nummer  $i$ . I denne modellen er  $M = 0$  når  $B \rightarrow 0$ , og et gitt spin vil like gjerne peke 'opp' som 'ned'. Spinnene foretrekker ikke den ene retningen mer enn den andre og systemet reflekterer derfor symmetrien til Hamiltonfunksjonen i ligning (5.1). Det vil si at hvis vi snur alle spinnene, vil vi fremdeles ha at  $M = 0$ .

Ved temperatur  $T = 0$  har vi derimot en spesiell situasjon. For i dette tilfellet, kan vi oppnå en magnetisering  $M \neq 0$ . Dette kan vi oppnå ved å først plassere systemet i et magnetfelt, deretter avkjøle systemet til  $T = 0$  og tilslutt la  $B \rightarrow 0$ . Dette kommer av at det laveste energinivået til systemet er degenerert, og at det finnes to grunntilstander. I den ene tilstanden peker alle spinnene 'opp' og i den andre peker de 'ned'. Hvis  $B > 0$  under avkjølingen, velger systemet den grunntilstanden der alle spinnene peker 'opp', og motsatt når  $B < 0$ . I dette tilfellet har systemet en foretrukket spinnretning og magnetiseringen er  $M = \pm \mu N$  avhengig av retningen til magnetfeltet. Hvis vi nå utfører transformasjonen  $s_i \rightarrow -s_i$  på en tilstand der alle spinnene peker 'opp' (det vil si at  $M = \mu N$ ), vil vi ikke lenger være i den samme tilstanden. Da blir systemet transformert til den andre tilstanden der alle spinnene peker 'ned' og hvor magnetiseringen er  $M = -\mu N$ . Grunntilstanden deler derfor ikke den samme symmetrien som Hamiltonfunksjonen. Når systemet velger én av de degenererte grunntilstandene, blir symmetrien brutt og systemet gjennomgår en faseovergang til den ferromagnetiske fasen. Det er dette som kalles *spontant symmetribrudd*. I motsattfall har vi et *eksplisitt symmetribrudd* når  $B \neq 0$ , og i dette tilfellet har vi ingen faseovergang.

## 5.2 Bølgefunksjon og ordensparameter

Symmetrien i Isingmodellen ble brutt på grunn av at det laveste energinivået var degenerert, og slik er det også i kvantefeltteori. Der er spontane symmetribrudd alltid assosiert

med degenererte grunntilstander [25]. I det følgende skal vi se at et Bose-Einstein kondensat er i en degenerert tilstand hvor den globale  $U(1)$ -symmetrien er brutt.

La oss først skrive feltoperatoren  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  i to:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\psi}_0(\mathbf{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \quad (5.4)$$

hvor  $\hat{\psi}_0(x)$  er feltoperatoren for kondensatet og  $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  for atomene i høyere energitilstander. Feltoperatorene  $\hat{\psi}_0(\mathbf{r}, t)$  og  $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  kan vi også skrive som:

$$\hat{\psi}_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}, t)\hat{a}_0, \quad (5.5)$$

$$\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\mathbf{r}, t)\hat{a}_i, \quad (5.6)$$

der  $\hat{a}_i$  er en senkeoperator som fjerner en partikkel fra systemet med bølgefunksjon  $\phi_i(\mathbf{r}, t)$ . I tillegg er  $\phi_0(\mathbf{r}, t)$  bølgefunksjonen til en partikkel i kondensatet, og  $\phi_i(\mathbf{r}, t)$  er bølgefunksjonen til en partikkel i én av de eksiterte tilstandene når  $i \neq 0$ . Det vil si at  $i \neq 0$  angir en én-partikkeltilstand med energi høyere enn grunntilstanden. For eksempel tilsvarende  $i \neq 0$  en av tilstandene med impuls  $\mathbf{p} \neq 0$  når vi studerer en ideell Bosegass eller en Bosegass med svake vekselvirkninger.

I Bogoliubovapproximasjonen satte vi  $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^\dagger = \sqrt{n_0}$ . Dette kunne vi gjøre da okkupasjonen av grunntilstanden  $n_0 \gg 1$  var slik at vi kunne se bort ifra at  $\hat{a}_0$  og  $\hat{a}_0^\dagger$  ikke kommuterer. Bogoliubovapproximasjonen fører nå til at operatoren  $\hat{\psi}_0(\mathbf{r}, t)$  kan behandles som et klassisk felt  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  gitt ved:

$$\psi_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}, t)\sqrt{n_0}, \quad (5.7)$$

og at feltoperatoren  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  kan skrives som:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (5.8)$$

Hvis det er få partikler i de eksiterte tilstandene i forhold til i kondensatet, kan vi også gjøre approximasjonen  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \approx \psi_0(\mathbf{r}, t)$  og  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \approx \psi_0^*(\mathbf{r}, t)$ . Feltoperatoren kan dermed erstattes med et klassisk felt, og  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  kalles for den makroskopiske bølgefunksjonen til kondensatet. Det å erstatte feltoperatorene med en bølgefunksjon, er analogt med hvordan vi tar den klassiske grensen i den elektromagnetiske teorien. Der neglisjerer vi kommutatorrelasjonene slik at vi ikke lenger snakker om eksitasjoner og annihilasjoner av fotoner. Da blir feltoperatorene til klassiske felt, og disse tilfredsstiller igjen Maxwells ligninger.

At kondensatet har en tilhørende bølgefunksjon, er i samsvar med eksperimentelle resultater. For eksempel ble det i 1997 for første gang vist at to Bose-Einstein kondensater kunne interferere og danne et interferensmønster [26]. Et slikt mønster kan man forklare

med at kondensatet har en tilhørende makroskopisk bølgefunksjon. Noe av det spesielle som skjer i slike eksperimenter, er at det blir vakuum der det er destruktiv interferens. Vi får altså enkelte steder hvor det ikke finnes partikler.

Hamiltonfunksjonen til en svakt vekselvirkende Bosegass er invariant under globale  $U(1)$ -transformasjoner, men denne symmetrien deler den ikke kondensatets bølgefunksjon  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$ . Bølgefunksjonen har en bestemt fase, og det følger at den globale  $U(1)$ -symmetrien er brutt spontant. Dette symmetribruddet skal vi studere nærmere i neste delkapittel. Bølgefunksjonen  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  fungerer som en ordensparameter, og i det følgende vil  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  også bli referert til som ordensparameteren. En ordensparameter er forventningsverdien til en operator som kan brukes til å skille mellom to ulike faser. I den symmetriske fasen er ordensparameteren alltid null, men blir forskjellig fra null når symmetribruddet skjer. I tillegg har den en bestemt verdi for hver usymmetrisk tilstand. For eksempel er ordensparameteren magnetiseringen  $M$  i den ferromagnetiske Isingmodellen beskrevet tidligere. Den var null i den symmetriske fasen, og tok verdiene  $M = \pm\mu N$  når systemet var i én av grunntilstandene. Med dette kunne vi finne ut om systemet var i den ferromagnetiske fasen eller ikke ved å studere ordensparameteren.

### 5.3 Symmetribrudd og kjemisk potensial

Vi skal nå studere symmetribruddet til en svakt vekselvirkende Bosegass litt nærmere, og vi skal finne et uttrykk for ordensparameteren  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$ .

La oss først ta for oss energien til kondensatet. Den finner vi ved å erstatte  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  med  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  i ligning (2.64):

$$H = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{1}{2m} \nabla \psi_0^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_0(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) \right], \quad (5.9)$$

Her har vi også erstattet vekselvirkningspotensialet  $V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  med det effektive potensialet  $g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . I tillegg har vi satt tiden  $t = 0$  og  $\psi(\mathbf{r}, 0) = \psi_0(\mathbf{r})$  og  $\psi^*(\mathbf{r}, 0) = \psi_0^*(\mathbf{r})$ . Ordensparameteren er slik at den minimierer Hamiltonfunksjonen gitt at normeringsbetingelsen:

$$n_0 = \int d\mathbf{r} \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}), \quad (5.10)$$

er tilfredsstillt. Det vil si at hvis vi endrer feltkonfigurasjonen  $\psi_0(\mathbf{r}) \rightarrow \psi_0(\mathbf{r}) + \delta\psi_0(\mathbf{r})$  og  $\psi_0^*(\mathbf{r}) \rightarrow \psi_0^*(\mathbf{r}) + \delta\psi_0^*(\mathbf{r})$  slik at normeringsbetingelsen:

$$n_0 = \int d\mathbf{r} [\psi_0^*(\mathbf{r}) + \delta\psi_0^*(\mathbf{r})] [\psi_0(\mathbf{r}) + \delta\psi_0(\mathbf{r})], \quad (5.11)$$

gjelder, finner vi at

$$H(\psi_0, \psi_0^*) \leq H(\psi_0 + \delta\psi_0, \psi_0^* + \delta\psi_0^*). \quad (5.12)$$

Når vi minimerer en funksjon med hensyn på en gitt føring, er det vanlig å bruke Lagrangemultiplikatorer. I dette tilfellet vil ordensparameteren  $\psi_0(\mathbf{r})$  minimere funksjonen  $K = H - \mu n_0$ , og Lagrangemultiplikatoren  $\mu$  er det kjemiske potensialet. Ved å minimere denne funksjonen, finner vi ordensparameteren uttrykt som funksjon av  $\mu$ , og da kan vi velge  $\mu$  slik at normeringsbetingelsen oppfylles. I det følgende skal vi se at det kjemiske potensialet har stor innflytelse på om det vil skje spontane symmetribrudd eller ikke.

$K$  kan vi skrive som:

$$K = \int d\mathbf{r} [\mathcal{T} + \mathcal{V}], \quad (5.13)$$

hvor  $\mathcal{T}$  og  $\mathcal{V}$  er gitt ved:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2m} \nabla \psi_0^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_0(\mathbf{r}), \quad (5.14)$$

$$\mathcal{V} = \frac{g}{2} \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) - \mu \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}). \quad (5.15)$$

Her representerer  $\mathcal{T}$  den kinetiske energien, og er lik null når  $K$  er minimal. Med andre ord er ordensparameteren  $\psi_0(\mathbf{r})$  uavhengig av  $\mathbf{r}$ :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \psi_0 = |\psi_0| e^{i\alpha_0}, \quad (5.16)$$

og nærmere bestemt er  $\psi_0$  et komplekst tall med en bestemt fase  $\alpha_0$ . Videre er dette tallet et minimum til  $K$  hvis det også er et minimum til potensialet:

$$\mathcal{V} = \frac{g}{2} |\psi_0|^4 - \mu |\psi_0|^2. \quad (5.17)$$

Dette kommer av at  $K$  og  $\mathcal{V}$  er proporsjonale størrelser når ordensparameteren er uavhengig av  $\mathbf{r}$ :

$$K = \int d\mathbf{r} \mathcal{V} = V \mathcal{V}, \quad (5.18)$$

og proporsjonalitetskonstanten er volumet  $V$ . På grunn av at fasen ikke inngår i ligning (5.17), er det bare normen  $|\psi_0|$  som bestemmer hvor potensialet har et minimum. Det er derfor mulig å finne normen til ordensparameteren ved å derivere potensialet med hensyn på  $|\psi_0|$ . Minimumet finner vi der:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial |\psi_0|} = 0, \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{(\partial |\psi_0|)^2} > 0. \quad (5.19)$$

Når  $\mu \leq 0$ , har potensialet et minimum ved  $|\psi_0| = 0$ , og i dette tilfellet er ikke grunntilstanden degenerert. Tilstanden er også symmetrisk under globale  $U(1)$ -transformasjoner der  $\psi_0 \rightarrow \psi_0 e^{i\alpha}$  og  $\psi_0^* \rightarrow \psi_0^* e^{-i\alpha}$ , og det ser vi ved at transformasjonen returnerer den samme feltkonfigurasjonen:

$$\psi_0 e^{i\alpha} = \psi_0 = 0, \quad (5.20)$$

$$\psi_0^* e^{-i\alpha} = \psi_0^* = 0. \quad (5.21)$$

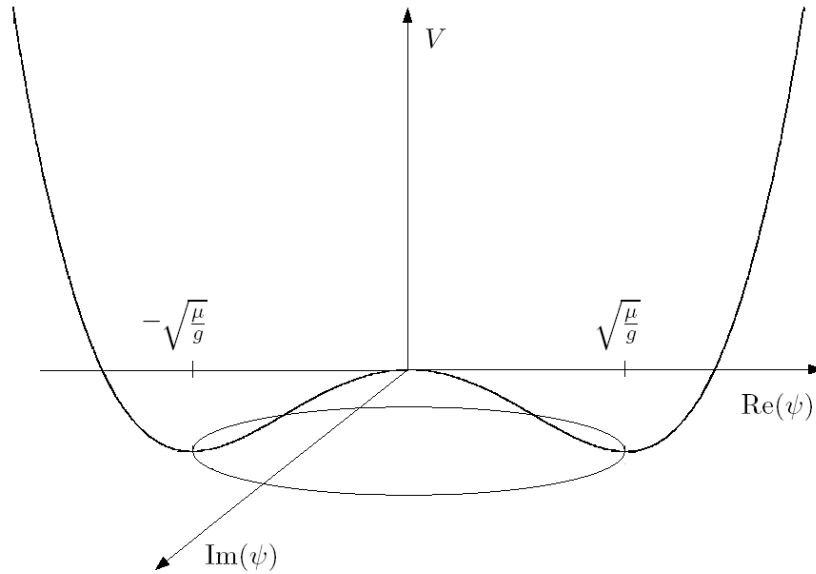
Spontant symmetribrudd vil derfor ikke skje når  $\mu \leq 0$ . I motsatt fall når  $\mu > 0$ , har potensialet et minimum der:

$$|\psi_0|^2 = \frac{\mu}{g}. \quad (5.22)$$

Vi velger nå et koordinatsystem slik at  $\text{Re}(\psi_0)$  ligger langs  $x$ -retningen,  $\text{Im}(\psi_0)$  langs  $y$ -retningen og potensialet  $\mathcal{V}$  langs  $z$ -retningen. Da kan  $\psi_0$  skrives som:

$$\psi_0 = x + iy, \quad (5.23)$$

og vi får en overflate som er symmetrisk om  $z$ -aksen og har minimum langs en sirkel med radii  $x^2 + y^2 = \mu/g$ . Se Figur 5.2.



Figur 5.2: Et plot av potensialet  $\mathcal{V}$ . Denne overflaten er også populært kalt for 'den meksikanske hatten'.

Vi tenker oss nå at systemet velger ett av punktene på sirkelen, for eksempel der  $\psi_0 = x_0 + iy_0$ . Da finner vi at

$$\psi_0 = x_0 + iy_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} e^{i\alpha_0} = \sqrt{\frac{\mu}{g}} e^{i\alpha_0}, \quad (5.24)$$

$$\psi_0^* = x_0 - iy_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} e^{-i\alpha_0} = \sqrt{\frac{\mu}{g}} e^{-i\alpha_0}. \quad (5.25)$$

Systemet har dermed valgt en bestemt verdi for fasen, og det følger at den globale  $U(1)$ -symmetrien er brutt. Vi kan nå gjøre følgende konklusjon: *Spontant symmetribrudd kan bare skje dersom det kjemiske potensialet er positivt, for det er først da vi får degenererte*

grunntilstander.

La oss videre studere normeringsbetingelsen:

$$n_0 = \int d\mathbf{r} |\psi_0|^2 = V|\psi_0|^2, \quad (5.26)$$

og la  $\rho_0 = n_0/V$  være tettheten av partikler i kondensatet. Da finner vi at  $|\psi_0|^2$  er gitt ved:

$$|\psi_0|^2 = \rho_0. \quad (5.27)$$

Når det kjemiske potensialet  $\mu \leq 0$ , følger det at  $|\psi_0|^2 = 0$ . Da er  $\rho_0 = 0$  og vi har ingen partikler i kondensatet. Det vil si at alle partiklene er i de eksiterte tilstandene, og at BEK ikke har funnet sted. I det andre tilfellet er  $\mu > 0$  og  $|\psi_0|^2$  er gitt ved ligning (5.22). Da er  $|\psi_0|^2 = \rho_0 > 0$  og det finnes partikler i kondensatet. Det finnes derfor bare partikler i kondensatet hvis det har skjedd et symmetribrudd. På grunn av at verdien på det kjemiske potensialet er avgjørende for om det kan skje symmetribrudd eller ikke, må  $\mu$  være temperaturavhengig. Ved høye temperaturer har vi ikke BEK og  $\mu < 0$ . Ved den kritiske temperaturen  $T_k$ , skjer symmetribruddet. Da må det kjemiske potensialet gå fra å være negativt til positivt, og  $\mu$  er derfor lik null ved  $T = T_k$ . Når  $T < T_k$  er systemet i den kondenserte fasen og  $\mu > 0$ . For en ideell gass fant vi også ut at det kjemiske potensialet var temperaturavhengig. Da fant vi ut at  $\mu \rightarrow 0$  når temperaturen falt under den kritiske temperaturen.

Det er nå mulig å finne et uttrykk for det kjemiske potensialet ved å sette ligning (5.22) inn i ligning (5.27):

$$\mu = g\rho_0. \quad (5.28)$$

Her er det verdt å merke seg at det kjemiske potensialet bare kan uttrykkes som over hvis vi kan neglisjere partiklene i de eksiterte tilstandene og sette  $n_0 \approx N$ . Dette henger sammen med at vi helt i begynnelsen av delkapittelet gjorde approksimasjonen  $\hat{\psi}(\mathbf{r}) \approx \psi_0(\mathbf{r})$  og  $\hat{\psi}(\mathbf{r})^\dagger \approx \psi_0^*(\mathbf{r})$  slik at Hamiltonfunksjonen i ligning (5.9) bare ble uttrykt ved hjelp av ordensparameteren. Hvis vi skal finne en riktigere verdi for  $\mu$  må vi inkludere  $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$ . I kapittel 4 inkluderte vi dette bidraget, og ved  $T = 0$  finner vi en bedre approksimasjon ved å derivere ligning (4.36) med hensyn på  $N$ . Da får vi:

$$\mu = g\rho \left[ 1 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}} (\rho a^3)^{1/2} \right]. \quad (5.29)$$

Igjen ser vi at denne effekten er veldig liten da leddet vi får i tillegg er proporsjonalt med  $(\rho a^3)^{1/2}$  som er kvadratroten av gassparameteren.

## 5.4 Superposisjon og domener

Vi har frem til nå sagt at kondensatet velger én av de degenererte tilstandene, og vi har sett bort ifra at systemet kan være en i superposisjon av flere tilstander. Vi kan for eksempel la  $|\alpha_i\rangle$  være en tilstand med fase  $\alpha_i$ , og la  $|SP\rangle$  være tilstanden som er en superposisjon av alle  $|\alpha_i\rangle$  slik at

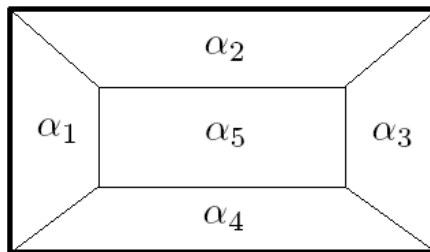
$$|SP\rangle = \sum_i C_i |\alpha_i\rangle. \quad (5.30)$$

Her summeres det over alle tilstandene, og koeffisientene  $C_i$  tilfredsstiller normeringsbetingelsen:

$$\sum_i |C_i|^2 = 1. \quad (5.31)$$

En slik tilstand har ingen spesiell verdi for fasen, og er derfor invariant under globale  $U(1)$ -transformasjoner. Spontant symmetribrudd kan ikke ha skjedd hvis kondensatet er beskrevet ved  $|SP\rangle$ . Men kondensatet velger ingen slik tilstand. Naturen er slik at et makroskopisk system, som vi kan se med våre egne øyne, ikke er i en superposisjon av flere tilstander. Et makroskopisk legeme, som for eksempel en bok, kan stå i bokhylla med enten ryggen ut eller inn, men ikke begge deler samtidig. Vi vil ikke diskutere nærmere hvorfor kondensatet ikke er i en superposisjon av flere tilstander her. Interesserte lesere henvises til andre kilder som for eksempel ref. [25].

Når en gass av bosoner kondenserer kan det være muligheter for at systemet deles inn i domener slik som i en ferromagnet. I en ferromagnet er hvert domene magnetisert i en gitt retning, og hvis hele systemet består av mange slike domener, vil ikke magneten nødvendigvis være magnetisert. Hvis et Bose-Einstein kondensat er delt inn i domener med ulike faser (se Figur 5.3), kan ikke det totale systemet relateres til én spesiell fase. Men det blir feil å si at dette tilfellet utelukker spontane symmetribrudd, for i hvert domene vil symmetrien være brutt.



Figur 5.3: En illustrasjon av et Bose-Einstein kondensat som er delt inn i fem domener. Hvert domene har en egen tilhørende fase  $\alpha_i$ .

Det kan være interessant å undersøke hva som eventuelt kan skape domener, og om de i



det hele tatt kan finnes. Dette kommer vi ikke til å diskutere her, og i resten av denne masteroppgaven vil vi anta at hele kondensatet har én bestemt fase.

## 5.5 Goldstones teorem

Goldstones teorem gir at når en kontinuerlig symmetri brytes spontant, oppstår det masseløse eksitasjoner slik at eksitasjonsspekteret  $\epsilon(\mathbf{p}) \rightarrow 0$  når  $p \rightarrow 0$  [25, 27]. Med andre ord har vi ikke noe energigap. Vi har allerede sett i kapittel 4 at dette gjelder for en svakt vekselvirkende Bosegass. Da fant vi også ut at de langbølgete eksitasjonene tilsvarte masseløse fononer og fulgte ett lineært spekter:

$$\lim_{\mathbf{p} \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{p}) = cp. \quad (5.32)$$

I et generelt superfluid har vi også spontant brutte kontinuerlige symmetrier, og Goldstones teorem gir dermed at det ikke er noe energigap i eksitasjonsspekteret til alle slike systemer.



## Kapittel 6

# Effektiv feltteori for ikke-relativistiske superfluid

Bogoliubovs metode gir at et Bose-Einstein kondensat kan beskrives som et system av kvasipartikler, og ved tilstrekkelig lave temperaturer, kan vi anta at det bare er masseløse eksitasjoner i kondensatet (Det vil si fononer). Ved så lave temperaturer er det naturlig å bruke en effektiv feltteori som bare konsentrerer seg om den lineære delen av spekteret. For når den fullstendige feltteorien også skal gi en riktig beskrivelse av systemet ved høye temperaturer, kan den være unødvendig komplisert å bruke ved lave temperaturer. I det følgende skal vi utvikle en effektiv feltteori med bare én frihetsgrad, og som gir en lineær dispersjonsrelasjon. Denne feltteorien vil beskrive et generelt ikke-relativistisk superfluid med spontant brutt global  $U(1)$ -symmetri, og vi skal sammenligne den med feltteorien til en svakt vekselvirkende Bosegass i lavenergigrensen. Dette er tidligere gjort i ref. [28], men også Popov og Liu har funnet lignende effektive feltteorier [29, 30].

### 6.1 Goldstonefeltet

Før vi kan finne en effektiv feltteori, må vi identifisere hvilken frihetsgrad som er relatert til de masseløse eksitasjonene, men først vil vi presisere at vi ikke kommer til å studere operatorer i dette kapittelet. Vi skal heller studere feltkonfigurasjoner, og tiden lar vi i tillegg være imaginær.

La oss ta for oss en ikke-relativistisk Bosegass der den globale  $U(1)$ -symmetrien er brutt spontant, og la  $\psi(\mathbf{r}, \tau)$  og  $\psi^*(\mathbf{r}, \tau)$  være to feltkonfigurasjoner som er i nærheten av en av de degenererte grunntilstandene med konfigurasjonen  $\psi_0 = \psi_0^* = \sqrt{\rho_0}$ . Da kan feltene  $\psi(\mathbf{r}, \tau)$  og  $\psi^*(\mathbf{r}, \tau)$  skrives som:

$$\psi(\mathbf{r}, \tau) = \sqrt{\rho_0 + \sigma(\mathbf{r}, \tau)} e^{i\phi(\mathbf{r}, \tau)}, \quad (6.1)$$

$$\psi^*(\mathbf{r}, \tau) = \sqrt{\rho_0 + \sigma(\mathbf{r}, \tau)} e^{-i\phi(\mathbf{r}, \tau)}. \quad (6.2)$$

Med denne parametriseringen av feltene, er den relevante frihetsgraden, som vi skal bruke i den effektive feltteorien, fasen  $\phi(\mathbf{r}, \tau)$ . Hvis vi igjen tar for oss 'den meksikanske hatten' i Figur 5.2, finner vi at fasen  $\phi(\mathbf{r}, \tau)$  gir forskjellen mellom feltkonfigurasjonene langs med potensialbrønnen, og i det følgende vil vi referere til denne frihetsgraden som Goldstonefeltet. Den andre frihetsgraden  $\sigma(\mathbf{r}, \tau)$ , gir forskjellen mellom feltkonfigurasjonene langs retningen der potensialet  $\mathcal{V}$  har en positiv andrederivert.  $\sigma(\mathbf{r}, \tau)$  beskriver også fluktuasjoner i partikkeltettheten  $\rho(\mathbf{r}, \tau) = \rho_0 + \sigma(\mathbf{r}, \tau)$ , og  $\rho_0$  er den midlere tettheten av partikler i kondensatet.

De effektive feltteoriene utviklet i refs. [29, 30] beskriver et Bose-Einstein kondensat ved hjelp av både fasen  $\phi$  og tetthetsfluktuasjonene  $\sigma$ . Men når temperaturen er tilstrekkelig lav, er dette overflødig. Da holder det å bare betrakte fasen slik som i ref. [28].

## 6.2 Effektiv Lagrangetetthet

En effektiv teori har gjerne et mer begrenset bruksområde enn den underliggende fullstendige teorien. For eksempel kan vi finne en ny effektiv feltteori ved å studere lavenergigrensen til en svakt vekselvirkende Bosegass beskrevet ved Lagrangetettheten i ligning (2.145). Da vil teorien være begrenset til lave temperaturer, og vi vil ikke kunne bruke den til å studere like mange av gassens egenskaper som den opprinnelige feltteorien. Den effektive feltteorien vi skal utvikle i dette kapitlet, kommer derimot til å være overraskende generell. I motsetning til Lagrangetettheten i ligning (2.145), hvor vi har antatt svake vekselvirkninger, kan vi bruke den effektive feltteorien til å beskrive ethvert ikke-relativistisk superfluid med brutt global  $U(1)$ -symmetri ved lave temperaturer. En slik feltteori vil vi utvikle ved å bruke en moderne metode som går ut på å finne den mest generelle Lagrangetettheten som inneholder de relevante frihetsgradene og som tilfredsstiller symmetriene til teorien. Denne metoden gir at det ikke er nødvendig å anta svake vekselvirkninger, og feltteorien kan derfor brukes til å studere ulike ikke-relativistiske superfluid.

Tidligere er dette konseptet brukt til å finne effektive feltteorier i blant annet kvantekromodynamikken, og ett eksempel er det teoretiske rammeverket 'Chiral Perturbation Theory' utviklet av Gasser og Leutwyler i 1985. Her var de relevante frihetsgradene masseløse pioner, og den mest generelle Lagrangetettheten som tilfredsstilte de antatte symmetriene, kunne de skrive som en Taylorrekke der utviklingsparameteren var impulsen til partiklene [19, 20, 25]. I vårt tilfelle, vil vi også skrive den effektive Lagrangetettheten som en potensrekke av impulsen til de masseløse eksitasjonene. Dette gjør at vi bare trenger å se på ledd av ledende orden når temperaturen til kondensatet er tilstrekkelig lav.

Vi studerer her et ikke-relativistisk Bose-Einstein kondensat og av dette følger det at den nødvendige symmetrien er Galileiinvarians. Dette symmetrikravet medfører at den tidsderiverte av feltet  $\partial_\tau \phi$  og den romlig deriverte  $\nabla \phi$  alltid må opptre parvis og i kom-

binasjonen  $i\partial_\tau\phi + (\nabla\phi)^2/2m$ . Dette kan vi også vise ved å ta utgangspunkt i den Galilei-invariante Lagrangetettheten i ligning (2.145). Den er gitt ved:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E = & \psi^*(\mathbf{r}, \tau)\partial_\tau\psi(\mathbf{r}, \tau) + \frac{1}{2m}\nabla\psi^*(\mathbf{r}, \tau)\nabla\psi(\mathbf{r}, \tau) \\ & + \frac{g}{2}|\psi(\mathbf{r}, \tau)|^4 - \mu|\psi(\mathbf{r}, \tau)|^2.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Fordi vi bare er interessert i å studere hvordan fasen  $\phi(\mathbf{r}, \tau)$  transformeres under Galileitransformasjoner, gjør vi substitusjonen:

$$\psi(\mathbf{r}, \tau) = \sqrt{\rho_0}e^{i\phi(\mathbf{r}, \tau)}, \quad (6.4)$$

og neglisjerer tetthetsfluktuasjonene. Dette gir at følgende ligning må være Galileiinvariant:

$$\mathcal{L}_E = \rho_0 \left[ i\partial_\tau\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 \right] + \frac{g}{2}\rho_0^2 - \mu\rho_0. \quad (6.5)$$

Ved Galileitransformasjoner bytter vi referansesystem slik at

$$\begin{aligned}t & \rightarrow t, \\ \mathbf{r} & \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t,\end{aligned}\quad (6.6)$$

og slik at impulsen  $\nabla\phi$  øker med  $m\mathbf{v}$  [29]. Her er  $\mathbf{v}$  den relative hastigheten mellom referansesystemene. De to siste leddene i ligning (6.5) er konstante og åpenbart Galilei-invariante, og dette gir videre at kombinasjonen i klammeparentesen  $i\partial_\tau\phi + (\nabla\phi)^2/2m$  er nødt til å være Galileiinvariant. Fasen transformeres dermed på følgende måte:

$$\nabla\phi \rightarrow \nabla\phi + m\mathbf{v}, \quad (6.7)$$

$$i\partial_\tau\phi \rightarrow i\partial_\tau\phi - v\nabla\phi - \frac{1}{2}mv^2. \quad (6.8)$$

Vi har nå vist at  $i\partial_\tau\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2$  er invariant for en svakt vekselvirkende Bosegass med Lagrangetetthet (2.145), men vi kunne også gjort dette mer generelt ved å ta utgangspunkt i Lagrangetettheten:

$$\mathcal{L} = \psi^*\partial_\tau\psi + \frac{1}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi + \mathcal{V}, \quad (6.9)$$

der  $\mathcal{V}$  er et generelt potensial som er invariant under lokale  $U(1)$ -transformasjoner, og fått det samme svaret.

I refs. [29, 30] er det brukt en Lagrangetetthet som gir at kombinasjonen  $i\partial_\tau\phi - (\nabla\phi)^2/2m$  er Galileiinvariant. Denne Lagrangetettheten er ekvivalent med Lagrangetettheten vi bruker i ligning (6.9), men det følger at Goldstonefeltet  $\phi'$  i denne teorien er slik at  $\phi' = -\phi$ . Her er  $\phi$  er Goldstonefeltet i feltteorien vår. Av dette følger det at Goldstonefeltet i vårt tilfelle alltid må opptre i kombinasjonen  $i\partial_\tau\phi + (\nabla\phi)^2/2m$ . Den samme kombinasjonen

som Liu og Popov brukte, ble også brukt i ref. [28], og vi må derfor være oppmerksomme på at de effektive feltteoriene i refs. [28, 29, 30] tar utgangspunkt i at  $\phi$  transformeres på en annen måte enn her.

Det er nå mulig å finne den mest generelle Lagrangetettheten som tilfredsstiller symmetrikravet om Galileiinvarians, og denne vil vi skrive som en Taylorrekke om  $i\partial_\tau\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & -c_1 \left[ i\partial_\tau\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 \right] - \frac{1}{2!}c_2 \left[ i\partial_\tau\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 \right]^2 \\ & - \frac{1}{3!}c_3 \left[ i\partial_\tau\phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 \right]^3 + \delta\mathcal{L}_{\text{eff}}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

Her inneholder  $\delta\mathcal{L}_{\text{eff}}$  ledd av høyere orden og høyere deriverte av feltet  $\phi$ . Dette uttrykket har også en rekke systemavhengige parametere  $c_1, c_2, \dots$ , som enten må bestemmes eksperimentelt, eller ved sammenligning med mer fullstendige feltteorier via såkalte 'matching'-prosedyrer. Ligning (6.10) beskriver et generelt ikke-relativistisk superfluid med brutt global  $U(1)$ -symmetri i lavenergigrensen, og alle beregninger vi gjør, kan vi i etterkant relatere til et gitt system ved å sette inn tilhørende verdier for parameterne  $c_1, c_2, \dots$ .

Vi vil videre i kapitlet finne hva koeffisientene  $c_1, c_2, \dots$  må være når vi studerer en svakt vekselvirkende Bosegass. Men vi må ikke nødvendigvis finne alle parameterne. For ved lave temperaturer er  $\nabla\phi$  en liten impuls, og da holder det å bare studere de første leddene. Hvis vi neglisjerer det første leddet som er en totalderivert, og alle ledd som er av tredje orden og høyere får vi:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = c_2 \frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 - c_1 \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2, \quad (6.11)$$

som er Lagrangetettheten til et masseløst Klein-Gordon felt. Dispersjonsrelasjonen til dette feltet kan vi finne ved å Wick-rottere til reell tid og bruke Euler-Lagrangeligningen:

$$c_2\partial_t^2\phi + c_1\frac{1}{m}\nabla^2\phi = 0. \quad (6.12)$$

Denne ligningen kan gjenkjennes som bølgligningen som har den generelle løsningen:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \left[ a_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}}t)} + a_{\mathbf{p}}^* e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}}t)} \right]. \quad (6.13)$$

Hvis vi nå setter dette uttrykket for  $\phi$  inn i bevegelsesligningen finner vi dispersjonsrelasjonen:

$$\omega_{\mathbf{p}} = p \sqrt{\frac{-c_1}{c_2 m}}. \quad (6.14)$$

Det masseløse Klein-Gordon feltet har dermed en lineær dispersjonsrelasjon, og den effektive feltteorien gitt ved Lagrangetettheten i ligning (6.11), gir en god beskrivelse av

kondensatet når temperaturen er såpass lav at alle eksitasjonene har impuls  $p \ll 1/\xi$ . Her er  $\xi$  koherenslengden, som ved svake vekselvirkninger er gitt ved ligning (4.45). Ved høyere temperaturer må vi inkludere ytterligere ledd i rekkeutviklingen for å få en bedre beskrivelse av kondensatet.

I ligning (6.11) neglisjerte vi det første leddet fordi dette var en totalderivert. Dette henger sammen med at totalderiverter blir til overflateintegral når vi integrerer  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  og finner virkningen. Slike ledd vil derfor ikke ha noen innvirkning på Euler-Lagrangeligningene. I tillegg vil de heller ikke bidra i uttrykket for partisjonsfunksjonen, og slike ledd er derfor ofte av liten interesse når vi studerer kondensatet.

### 6.3 'Matching'

I dette avsnittet skal vi finne hva de to første koeffisientene  $c_1$  og  $c_2$  må være når vi studerer en svakt vekselvirkende Bosegass, og i dette tilfellet er den Euklidske virkningen gitt ved:

$$S_{\mathcal{L}}(\psi^*, \psi) = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \left[ \psi^* \partial_\tau \psi + \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi - \mu \psi^* \psi + \frac{1}{2} g (\psi^* \psi)^2 \right]. \quad (6.15)$$

Når vi nå skal finne koeffisientene  $c_1$  og  $c_2$  fra dette utgangspunktet, finner vi først virkningen  $S_{\mathcal{L}}(\phi)$  uttrykt med Goldstonefeltet  $\phi$  istedenfor  $\psi^*$  og  $\psi$ . Deretter tar vi for oss Lagrangefunksjonen  $\mathcal{L}(\phi)$ , som er gitt ved integralet

$$S_{\mathcal{L}}(\phi) = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \mathcal{L}(\phi), \quad (6.16)$$

og finner  $c_1$  og  $c_2$  ved å sammenligne ledd for ledd med Lagrangefunksjonen i ligning (6.10).

Med dette som mål, innfører vi nå Goldstonefeltet  $\phi(\mathbf{r}, \tau)$  gjennom substitusjonen

$$\psi(\mathbf{r}, \tau) = \sqrt{\rho_0 + \sigma(\mathbf{r}, \tau)} e^{i\phi(\mathbf{r}, \tau)}, \quad (6.17)$$

slik at ligning (6.15) tar følgende form:

$$S_{\mathcal{L}}(\phi, \sigma) = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ i(\rho_0 + \sigma) \partial_\tau \phi + \frac{1}{2} \partial_\tau \sigma + \frac{1}{2m} \left[ (\rho_0 + \sigma) (\nabla \phi)^2 + \frac{(\nabla \sigma)^2}{4(\rho_0 + \sigma)} \right] + \frac{1}{2} g (\rho_0 + \sigma)^2 - (\rho_0 + \sigma) \mu \right\}. \quad (6.18)$$

I lavenergigrensen er det små kvantemekaniske fluktuasjoner i partikkeltettheten og  $\sigma \ll \rho_0$ . Dette gjør at vi kan rekkeutvikle  $(\nabla \sigma)^2 / 4(\rho_0 + \sigma)$  for  $\sigma \ll \rho_0$ , og til første orden får vi:

$$\frac{(\nabla \sigma)^2}{4(\rho_0 + \sigma)} \approx \frac{(\nabla \sigma)^2}{4} \left[ \frac{1}{\rho_0} - \frac{\sigma}{\rho_0^2} \right]. \quad (6.19)$$

I dette uttrykket vil  $\sigma/\rho_0^2 \ll 1$ , og vi trenger derfor bare å ta vare på det første leddet i rekkeutviklingen. Virkningen kan dermed skrives som:

$$S_{\mathcal{L}}(\phi, \sigma) = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ i\sigma \partial_\tau \phi + \frac{1}{2m} \left[ (\rho_0 + \sigma)(\nabla\phi)^2 + \frac{(\nabla\sigma)^2}{4\rho_0} \right] + \frac{1}{2}g(n_0 + \sigma)^2 - (\rho_0 + \sigma)\mu \right\}, \quad (6.20)$$

og her har vi også sett bort fra alle totalderiverte ledd. Neste skritt på veien mot å finne koeffisientene er nå å eliminere frihetsgraden  $\sigma$  fra virkningen, og dette kan vi oppnå ved å bruke Euler-Lagrangeligningen for  $\sigma$  som er gitt ved:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \sigma)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma}. \quad (6.21)$$

Venstre side av Euler-Lagrangeligningen kan vi skrive som:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \sigma)} \right) = \frac{\nabla^2 \sigma}{4\rho_0}, \quad (6.22)$$

og tilsvarende finner vi at høyre side av ligningen er:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} &= i\partial_\tau \phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 + g(\rho_0 + \sigma) - \mu \\ &\approx i\partial_\tau \phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 + g\sigma. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Her har vi brukt resultatet fra forrige kapittel der vi fant ut at det kjemiske potensialet kunne skrives som  $\mu \approx g\rho_0$ . Euler-Lagrangeligningen kan nå uttrykkes som følger:

$$\sigma = -\frac{i}{g}\partial_\tau \phi - \frac{1}{2mg}(\nabla\phi)^2 + \frac{\nabla^2 \sigma}{4g\rho_0}. \quad (6.24)$$

La oss videre studere det siste leddet i uttrykket over. Dette leddet er et dobbeltderivert ledd og er en funksjon av impulsen til  $\sigma$ -feltet. Ved tilstrekkelig lave temperaturer kan vi anta at  $\sigma$  er langbølget og at impulsen er såpass liten at dette leddet er en neglisjerbar korleksjon. Når dette er tilfellet, finner vi at  $\sigma$  kan uttrykkes som funksjon av Goldstonefeltet på følgende måte:

$$\sigma = -\frac{i}{g}\partial_\tau \phi - \frac{1}{2mg}(\nabla\phi)^2, \quad (6.25)$$

og vi skal nå bruke dette uttrykket til å eliminere  $\sigma$  i ligning (6.20) slik at virkningen blir en funksjonal av Goldstonefeltet alene:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}}(\phi) &= \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2g}(\partial_\tau \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2m}(\nabla\phi)^2 - \frac{i}{2mg}(\nabla\phi)^2 \partial_\tau \phi - \frac{1}{8m^2g}(\nabla\phi)^4 \right\} \\ &= \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ -(-\rho_0)\frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2g} \left[ i\partial_\tau \phi + \frac{1}{2m}(\nabla\phi)^2 \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.26)$$



Her har vi neglisjert alle totalderiverte ledd i tillegg til konstante ledd. Hvis vi nå sammenligner med ligning (6.10), finner vi at  $c_1 = -\rho_0$  og  $c_2 = 1/g$ .

Når temperaturen er såpass lav at alle eksitasjonene har impuls  $p < 1/\xi$  og følger en lineær dispersjonsrelasjon, kan vi neglisjere alle ledd som er av høyre orden enn  $(\partial_\tau\phi)^2$  og  $(\nabla\phi)^2$ . Da får vi, som i forrige avsnitt, at  $\phi$  er et masseløst Klein-Gordonfelt med Lagrangetetthet:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2g}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{\rho_0}{2m}(\nabla\phi)^2, \quad (6.27)$$

og dispersjonsrelasjon:

$$\omega = \epsilon(\mathbf{p}) = p\sqrt{\frac{g\rho_0}{m}} = cp. \quad (6.28)$$

Her ser vi at vi får den samme dispersjonsrelasjonen som i ligning (4.37), og den effektive feltteorien gir en god beskrivelse av kondensatet når alle eksitasjonene kan sees på som masseløse fononer med lydfart  $c = \sqrt{g\rho_0/m}$ .

I ref. [28] ble  $c_1$  og  $c_2$  funnet ved å bare sammenligne leddene  $c_2(\partial_\tau\phi)^2/2$  og  $c_1(\nabla\phi)^2/2m$  med den underliggende teorien. Her ser vi i tillegg at de neste leddene i rekkeutviklingen  $ic_2(\nabla\phi)^2\partial_\tau\phi/m$  og  $c_2(\nabla\phi)^4/4m^2$  også gir  $c_2 = 1/g$ .



## Kapittel 7

# Korrelasjonsfunksjonen

I forrige kapittel utviklet vi en Klein-Gordon feltteori for fasen til et ikke-relativistisk superfluid med spontant brutt global  $U(1)$ -symmetri. I dette kapitlet skal vi studere denne feltteorien nærmere, og vi skal se at denne feltteorien også kan brukes til å studere systemer i lavere dimensjoner. I det følgende skal vi se hvordan den effektive feltteorien beskriver én-, to- og tredimensjonale Bosesystemer over lange avstander, og nærmere bestemt vil vi studere korrelasjonsfunksjonen:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle, \quad (7.1)$$

som i grensen  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$  ikke kan forsvinne men heller går mot en konstant når vi har BEK [2]. Vi kommer til å finne korrelasjonsfunksjonen i grensen der  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$  først ved temperatur  $T = 0$ , for deretter å se hva som skjer når vi øker til endelige temperaturer. Med dette skal vi se at teorien kan forutsi om vi har BEK, og til hvilken grad temperaturen og de romlige dimensjonene er vesentlige for at BEK skal finne sted.

Før vi skal studere korrelasjonsfunksjonen, må vi først finne propagatoren som tilhører feltteorien. Med dette som mål, Wick-roterer vi til reell tid og kvantiserer feltene.

### 7.1 Kvantisering

I forrige kapittel fant vi ut at dispersjonsrelasjonen  $\omega_{\mathbf{p}}$  var lineær ved å Wick-rotere til reell tid og studere Euler-Lagrangeligningen. Vi ønsker nå å gjøre et nærmere studium av den effektive feltteorien for fasen i reell tid og Wick-roterer derfor den Euklidske virkningen:

$$S_E = \int d\mathbf{r} d\tau \left[ c_2 \frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 - c_1 \frac{1}{2m} (\nabla \phi)^2 \right]. \quad (7.2)$$

Ved Wick-rotasjon vil  $S_E \rightarrow -iS$  der  $S$  er virkningen i Minkowskirommet, og  $S$  kan derfor skrives som:

$$S = \int d\mathbf{r} dt \left[ c_2 \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + c_1 \frac{1}{2m} (\nabla \phi)^2 \right]. \quad (7.3)$$

Dette gir videre at vi får følgende uttrykk for Lagrangetettheten  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ :

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{c_2}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{c_1}{2m}(\nabla\phi)^2. \quad (7.4)$$

Ut ifra dette uttrykket kan vi finne det konjugerte feltet til  $\phi(\mathbf{r}, t)$  ved hjelp av ligning (2.76). Det gir:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial(\partial_t\phi(\mathbf{r}, t))} \\ &= c_2\partial_t\phi(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.5)$$

I forrige kapittel skrev vi  $\phi(\mathbf{r}, t)$  som en superposisjon av planbølger, og dette kan vi også gjøre for  $\pi(\mathbf{r}, t)$  ved å bruke ligningen over. Da får vi:

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} -ic_2\omega_{\mathbf{p}} \left[ a_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}}t)} - a_{\mathbf{p}}^* e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}}t)} \right]. \quad (7.6)$$

Tilsvarende kan Fourierkoeffisientene  $a_{\mathbf{p}}$  og  $a_{\mathbf{p}}^*$  uttrykkes som funksjon av  $\phi$  og  $\pi$ :

$$a_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2c_2V\omega_{\mathbf{p}}} \int d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}}t)} (i\pi(\mathbf{r}, t) + c_2\omega_{\mathbf{p}}\phi(\mathbf{r}, t)) \quad (7.7)$$

$$a_{\mathbf{p}}^* = \frac{1}{2c_2V\omega_{\mathbf{p}}} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}}t)} (-i\pi(\mathbf{r}, t) + c_2\omega_{\mathbf{p}}\phi(\mathbf{r}, t)) \quad (7.8)$$

Når vi kvantiserer feltene, krever vi at feltene tilfredsstillor kommutatorrelasjonene i ligning (2.79) ved lik tid. Dette medfører også at utviklingskoeffisientene  $a_{\mathbf{p}}$  og  $a_{\mathbf{p}}^*$  blir operatører med kommutatorrelasjoner:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] &= \frac{1}{4c_2^2V^2\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left( ic_2\omega_{\mathbf{p}'}[\hat{\pi}, \hat{\phi}] - ic_2\omega_{\mathbf{p}}[\hat{\phi}, \hat{\pi}] \right) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'} \\ &= \frac{1}{4c_2^2V^2\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' [c_2\omega_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + c_2\omega_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'} \\ &= \frac{1}{2c_2V\omega_{\mathbf{p}}} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

og

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0. \quad (7.10)$$

Hvis vi nå skalerer Fourierkoeffisientene slik at

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \rightarrow \left( \frac{1}{2c_2V\omega_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (7.11)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \rightarrow \left( \frac{1}{2c_2V\omega_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad (7.12)$$

gir kommutatorrelasjonene at  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  og  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$  blir til heve- og senkeoperatorer som skaper og fjerner kvasipartikler med impuls  $\mathbf{p}$  og energi  $\omega_{\mathbf{p}}$ . Dette gir også følgende uttrykk for feltoperatorene  $\hat{\phi}$  og  $\hat{\pi}$ :

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \left( \frac{1}{2c_2 V \omega_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[ \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}} t)} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}} t)} \right], \quad (7.13)$$

$$\hat{\pi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} -i \left( \frac{c_2 \omega_{\mathbf{p}}}{2V} \right)^{1/2} \left[ \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}} t)} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}} t)} \right]. \quad (7.14)$$

La oss nå finne antallsrepresentasjonen av Hamiltonoperatoren. Hamiltonoperatoren er gitt ved:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}} &= \int d\mathbf{r} \left\{ \hat{\pi} \partial_t \hat{\phi} - \mathcal{L}_{\text{eff}} \right\} \\ &= \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2c_2} \hat{\pi}^2 - \frac{c_1}{2m} (\nabla \hat{\phi})^2 \right\}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

og her har vi brukt ligning (7.4) og (7.5). Hvis vi også bruker ligning (7.13) og (7.14), finner vi antallsrepresentasjonen:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}} &= \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{-c_1}{mc_2}} p \left( \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Her ser vi at uttrykket for energien til kondensatet inneholder en divergent sum  $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}}$ . Men selv om summen er divergent, kan vi likevel neglisjere den her. Det henger sammen med at vi bare kan observere energiforskjeller når vi gjør eksperimenter, og hvis vi for eksempel måler alle energier relativt til grunntilstandsenergien unngår vi å ta denne divergente summen i betraktning. I kapittel 4 fant vi ved hjelp av en renormaliseringssprosedyre at grunntilstandsenergien  $E_0$  til kondensatet var gitt ved ligning (4.36). Denne energien er målt relativt til vakuumentilstanden  $|\Omega\rangle$ , som beskriver et system uten atomer. I den effektive feltteorien vi studerer i dette kapittelet, kan vi også uttrykke alle energier relativt til denne tilstanden, men da må vi inkludere  $E_0$ . Antallsrepresentasjonen av Hamiltonfunksjonen blir dermed:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = E_0 + \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{-c_1}{mc_2}} p \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (7.17)$$

## 7.2 Propagatoren i Minkowskirommet

Før vi studerer Feynmanpropagatoren, som er gitt ved:

$$G(x, y) = -i \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle, \quad (7.18)$$

vil vi se bort ifra tidsordningen og se nærmere på  $\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle$ . Denne størrelsen vil vi i det følgende kalle for  $D(x-y)$ . Her er  $|0\rangle$  grunntilstanden, og  $x$  og  $y$  er firer-vektorer i Minkowskirommet. Det vil si at  $x$  for eksempel er gitt ved  $x = (t, \mathbf{r})$ . Vi har også at  $D(x-y)$  er en funksjon av differansen  $x-y$ . At dette er tilfellet vil vi vise under, men generelt vil propagatoren være en funksjon av differansen  $x-y$  dersom systemet er homogent og isotropt og når  $|0\rangle$  er en stasjonær løsning av Hamiltonoperatoren [31].

Hver feltoperator  $\hat{\phi}$  er en sum av heve og senke operatorer, og det er bare leddene som inneholder kombinasjonen  $\langle 0|\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger|0\rangle = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ , som overlever i uttrykket for  $D(x-y)$ . Dette gir at vi står igjen med:

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2c_2 V \omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2c_2 \omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Her har vi tatt kontinuumsgrensen  $V \rightarrow \infty$  og  $p = (p^0, \mathbf{p})$  er en vektor i Minkowskirommet der  $p^0 = \omega_{\mathbf{p}}$ . Vi ser av ligning (7.19) at  $D(x-y)$  bare avhenger av  $x-y$ , og dette gir videre at Feynmanpropagatoren også er en funksjon av denne differansen:

$$\begin{aligned} G(x-y) &= -i\theta(x^0 - y^0) \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle - i\theta(y^0 - x^0) \langle 0|\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)|0\rangle, \\ &= -i\theta(x^0 - y^0)D(x-y) - i\theta(y^0 - x^0)D(y-x). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Her er  $\theta(t)$  step-funksjonen. Feynmanpropagatoren kan vi også skrive som et konturintegral i det komplekse  $p^0$ -planet:

$$G(x-y) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{1}{c_2} \frac{1}{(p^0)^2 - (\omega_{\mathbf{p}} - i\varepsilon)^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (7.21)$$

Her har vi inkludert en liten parameter  $\varepsilon$  som flytter singularitetene rett over og rett under den reelle aksene. Konturintegralet utfører vi langs en halvsirkel med radius  $R$  og som vi plasserer i det nedre halvplan hvis  $x^0 > y^0$ . Hvis  $x^0 < y^0$  plasserer vi halvsirkelen i det øvre halvplan. Se Figur 7.1. I tillegg lar vi  $R \rightarrow \infty$  slik at vi ikke får noe bidrag fra integralet langs halvsirkelen.

Når  $x^0 > y^0$ , vil konturen omslutte singulariteten i  $p^0 = \omega_{\mathbf{p}} - i\varepsilon$  og vi får løsningen:

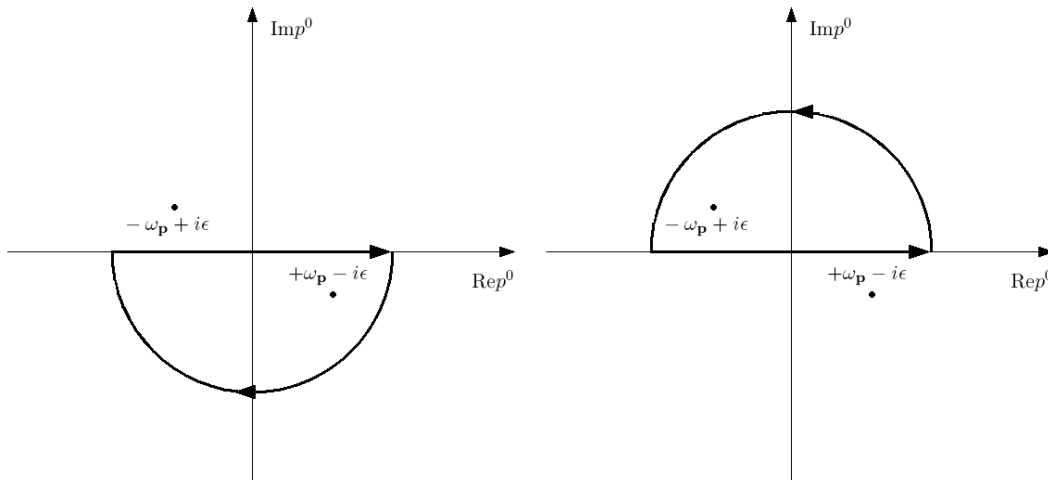
$$G(x-y) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{c_2} \frac{-i}{2\omega_{\mathbf{p}} - 2i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (7.22)$$

Hvis vi nå lar  $\varepsilon \rightarrow 0$  og sammenligner med (7.19), finner vi at

$$G(x-y) = -iD(x-y). \quad (7.23)$$

Tilsvarende finner vi følgende uttrykk for propagatoren når  $x^0 < y^0$ :

$$G(x-y) = -iD(y-x). \quad (7.24)$$



Figur 7.1: Når  $x^0 > y^0$  utfører vi integralet langs en halvsirkel i det nedre halvplan som omslutter singulariteten  $p^0 = \omega_{\mathbf{p}} - i\varepsilon$ . Når  $x^0 < y^0$  integrerer vi i det øvre halvplan hvor integranden har en singularitet i  $p^0 = -\omega_{\mathbf{p}} + i\varepsilon$ .

Integralrepresentasjonen av Feynmanpropagatoren i ligning (7.21), er derfor ekvivalent med ligning (7.20).

Ligning (7.21) gir også at  $G(x - y)$  er en Fouriertransformasjon av funksjonen:

$$G(p) = \frac{1}{c_2} \frac{1}{(p^0)^2 - (\omega_{\mathbf{p}} - i\varepsilon)^2}, \quad (7.25)$$

og hvis vi setter  $\varepsilon = 0$ , kan vi skrive  $G(p)$  som:

$$G(p) = \frac{1}{c_2(p^0)^2 + \frac{c_1}{m} \mathbf{p}^2}. \quad (7.26)$$

Her har vi brukt at  $\omega_{\mathbf{p}}^2 = -c_1 \mathbf{p}^2 / c_2 m$ .

Vi kan også merke oss at propagatoren tilfredsstiller ligningen:

$$(c_2 \partial_t^2 + \frac{c_1}{m} \nabla^2) G(x - y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (7.27)$$

og at propagatoren derfor er en Greensfunksjon.

### 7.3 Termisk midling av tilstander

Alle resultatene vi fant i forrige avsnitt er begrenset til å bare gjelde ved  $T = 0$ . Da er systemet i tilstanden  $|0\rangle$  og Feynmanpropagatoren er gitt ved ligning (7.18). Hvis vi øker temperaturen vil vi få termiske fluktuasjoner og vi vil ikke lenger kunne si at systemet

er i én gitt kvantemekanisk tilstand. Alle tilstandene, som systemet kan være i, er likevel statistisk fordelt og kan beskrives ved hjelp av den *statistiske operatoren*  $\hat{\rho}$  [31]:

$$\hat{\rho} = \sum_m \rho_m |m\rangle\langle m|. \quad (7.28)$$

Her er  $\rho_m$  sannsynligheten for å finne systemet i tilstanden  $|m\rangle$ , og summen av alle  $\rho_m$  tilfredsstiller ligningen:

$$\sum_m \rho_m = 1. \quad (7.29)$$

I det kanoniske ensemblet er den statistiske operatoren  $\hat{\rho}$  gitt ved:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= e^{-\beta(\hat{H}-F)}, \\ &= \sum_m e^{-\beta(E_m-F)} |m\rangle\langle m|. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Her er  $F$  Helmholtz fri energi og  $|m\rangle$  er en egentilstand til Hamiltonoperatoren med egenverdi  $E_m$ .

Når temperaturen er større enn null, vil alle observabler ta statistiske middelveier, og disse middelveierne kan vi finne ved hjelp av  $\hat{\rho}$ . Mer konkret kan vi finne middelveieren  $\langle \hat{O} \rangle$  til enhver kvantemekanisk operator  $\hat{O}$  ved å ta sporet av  $\hat{\rho}\hat{O}$ :

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_m \rho_m \langle m | \hat{O} | m \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (7.31)$$

og Feynmanpropagatoren finner vi for eksempel ved å ta sporet av  $\hat{\rho}T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)$ :

$$G(x-y) = -i\text{Tr} \left( \hat{\rho}T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) \right). \quad (7.32)$$

## 7.4 Den termiske Greensfunksjonen

Ved endelige temperaturer, utfører vi vanligvis en Wick-rotasjon til imaginær tid, og i dette tilfellet er den termiske Greensfunksjonen gitt ved [32]:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= -\langle T_\tau \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \rangle \\ &= -\text{Tr} \left( \hat{\rho} T_\tau \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Her er  $x$  og  $y$  Euklidske firer-vektorer, og kan for eksempel skrives som  $x = (\mathbf{r}, \tau)$  og  $y = (\mathbf{r}', \tau')$ . I tillegg angir  $T_\tau$  det tidsordnede produktet som er analogt med  $T$ -produktet i reell tid. Vi antar nå at systemet er homogent og isotropt slik at vi bare trenger å studere  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . I tillegg kan det vises at tidsavhengigheten alltid er slik at det bare er differansen  $\tau - \tau'$  som inngår [31], og at den termiske Greensfunksjonen dermed kan skrives



som funksjon av  $x - y$ .

Variabelen  $\tau - \tau'$  tar verdier mellom  $-\beta$  og  $\beta$ , og vi skal se at  $\mathcal{G}(x - y)$  er slik at

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau') = \mp \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau' + \beta). \quad (7.34)$$

Her gjelder det øverste fortegnet for fermioner og det nederste for bosoner. For å vise dette, vil vi bruke at tidsutviklingen til feltoperatorene er gitt ved:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, \tau) = e^{\tau \hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}) e^{-\tau \hat{H}}, \quad (7.35)$$

hvor  $\hat{H}$  er Hamiltonoperatoren. Hvis vi først lar  $\tau - \tau' < 0$  og setter ligning (7.35) inn i ligning (7.33), finner vi:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau') &= -\text{Tr} \left[ e^{-\beta(\hat{H}-F)} e^{\tau' \hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}') e^{-\tau' \hat{H}} e^{\tau \hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}) e^{-\tau \hat{H}} \right] \\ &= -e^{\beta F} \text{Tr} \left[ e^{-(\tau-\tau'+\beta)\hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}') e^{(\tau-\tau')\hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Her har vi brukt at sporet er invariant under sykliske permutasjoner. I tillegg beskriver feltoperatorene  $\hat{\phi}$  bosoner slik at vi ikke får noe fortegnsbytte som følge av  $T$ -produktet. Vi skal nå sammenligne dette uttrykket med Greensfunksjonen ved tiden  $\tau - \tau' + \beta > 0$ , og hvis vi gjør en tilsvarende utregning som over, finner vi at  $\mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau' + \beta)$  kan skrives som:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau' + \beta) = -e^{\beta F} \text{Tr} \left[ e^{(\tau-\tau')\hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}) e^{-(\tau-\tau'+\beta)\hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}') \right]. \quad (7.37)$$

Vi bruker nå enda en gang at sporet er invariant under sykliske permutasjoner. Da står vi igjen med følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau' + \beta) &= -e^{\beta F} \text{Tr} \left[ e^{-(\tau-\tau'+\beta)\hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}') e^{(\tau-\tau')\hat{H}} \hat{\phi}(\mathbf{r}) \right] \\ &= \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau'), \end{aligned} \quad (7.38)$$

og vi ser at den termiske Greensfunksjonen for bosoner er periodisk med periode  $\beta$ . Vi kan også gjøre tilsvarende utregning for fermioner, og i dette tilfellet vil  $T$ -produktet gi et fortegnsbytte der  $\tau - \tau' < 0$ . Greensfunksjonen for fermioner er dermed antiperiodisk med periode  $\beta$ .

## 7.5 Matsubarafrekvenser

Enhver funksjon  $f(\tau)$  som er definert i intervallet  $-\beta \leq \tau \leq \beta$  kan skrives som en Fourierrekke på formen [33]:

$$f(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\pi\tau/\beta} f(i\omega_n), \quad (7.39)$$

der utviklingskoeffisientene  $f(i\omega_n)$  er gitt ved:

$$f(i\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau f(\tau) e^{in\pi\tau/\beta}. \quad (7.40)$$

Vi lar nå  $f(\tau)$  være periodisk, på samme måte som Greensfunksjonen  $\mathcal{G}(x - y)$  er for bosoner. Det vil si at  $f(\tau) = f(\tau + \beta)$  når  $-\beta < \tau < 0$ . Når dette er tilfellet, kan vi gjøre visse forenklinger i ligningene over<sup>1</sup>. La oss først dele integralet i ligning (7.40) i to slik at

$$f(i\omega_n) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\beta} d\tau f(\tau) e^{in\pi\tau/\beta} + \int_{-\beta}^0 d\tau f(\tau) e^{in\pi\tau/\beta} \right]. \quad (7.41)$$

I det siste integralet gjør vi substitusjonen  $\tau' = \tau + \beta$ . Det gir:

$$\begin{aligned} f(i\omega_n) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\beta} d\tau f(\tau) e^{in\pi\tau/\beta} + \int_0^{\beta} d\tau' f(\tau') e^{-in\pi + in\pi\tau'/\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-in\pi}) \int_0^{\beta} d\tau f(\tau) e^{in\pi\tau/\beta}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Vi ser nå at alle utviklingskoeffisientene  $f(\omega_n)$  er lik null når  $n$  er et oddetall. Dette gir at vi kan forenkle ligning (7.39) og (7.40) til følgende:

$$f(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n\tau} f(i\omega_n), \quad (7.43)$$

$$f(i\omega_n) = \int_0^{\beta} d\tau f(\tau) e^{i\omega_n\tau}, \quad (7.44)$$

hvor  $\omega_n = 2\pi n/\beta$  og kalles for den  $n$ 'te Matsubarafrekvensen. En tilsvarende utregning for fermioner, gir at denne frekvensen må være gitt ved  $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$  for da er  $f(\tau)$  antiperiodisk slik at

$$f(\tau) = -f(\tau + \beta), \quad \text{når} \quad -\beta < \tau < 0. \quad (7.45)$$

## 7.6 Den termiske Greensfunksjonen i impulsrommet

I det følgende vil vi Fouriertransformere den termiske Greensfunksjonen og uttrykke den som funksjon av Matsubarafrekvensene  $\omega_n$  og impulsen  $\mathbf{p}$ , og vi skal se at vi får nøyaktig det samme uttrykket som i ligning (7.26) bare at  $p^0$  er erstattet med  $i\omega_n$ .

I imaginær tid, kan vi finne  $\hat{\phi}(x)$  uttrykt ved hjelp av heve- og senkeoperatorer ved

<sup>1</sup>Disse forenklingene vil vi vise på tilsvarende måte som i ref. [34].

å bruke samme fremgangsmåte som vi gjorde i reell tid, og resultatet er:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{\mathbf{p}} \left( \frac{1}{2c_2 V \omega_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[ \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{p}}\tau} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \omega_{\mathbf{p}}\tau} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \left( \frac{1}{2c_2 V \omega_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[ \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-\omega_{\mathbf{p}}\tau} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{\omega_{\mathbf{p}}\tau} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (7.46)$$

Ved hjelp av denne ligningen, kan vi skrive den termiske Greensfunksjonen som:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x-y) &= -\theta(\tau - \tau') \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2c_2 V \omega_{\mathbf{p}}} \left[ \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle e^{-\omega_{\mathbf{p}}(\tau - \tau')} + \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}} \rangle e^{\omega_{\mathbf{p}}(\tau - \tau')} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &\quad - \theta(\tau' - \tau) \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2c_2 V \omega_{\mathbf{p}}} \left[ \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger \rangle e^{-\omega_{\mathbf{p}}(\tau' - \tau)} + \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle e^{\omega_{\mathbf{p}}(\tau' - \tau)} \right] e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')},\end{aligned}\quad (7.47)$$

og her har vi brukt at  $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} \rangle$  og  $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger \rangle$  er lik null. Dette kommer av at hvert ledd forsvinner når vi tar sporet  $\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}})$  og  $\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger)$ . Videre er  $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle$  det midlere antallet eksitasjoner med impuls  $\mathbf{p}$ . Denne middelveidien skriver vi som  $n_{\mathbf{p}}$  og er gitt ved:

$$\begin{aligned}n_{\mathbf{p}} &= \text{Tr} \left[ e^{-\beta(\hat{H} - F)} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \right] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[ e^{-\beta\hat{H}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \right],\end{aligned}\quad (7.48)$$

der  $Z$  er den kanoniske partisjonsfunksjonen. Sporet tar vi ved å bruke en basis av mangepartikkeltilstander  $|N_{\mathbf{p}_1}, N_{\mathbf{p}_2}, \dots\rangle$  der  $N_{\mathbf{p}_j}$  er antallet eksitasjoner med impuls  $\mathbf{p}_j$ , og disse tilstandsvektorene tilfredsstiller egenverdiligningen:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}_j}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_j} |N_{\mathbf{p}_1}, N_{\mathbf{p}_2}, \dots\rangle = N_{\mathbf{p}_j} |N_{\mathbf{p}_1}, N_{\mathbf{p}_2}, \dots\rangle. \quad (7.49)$$

Her er  $\mathbf{p}_j$  er en vilkårlig impuls. Hvis vi bruker at Hamiltonoperatoren kan skrives som  $\hat{H} = \sum_j \omega_{\mathbf{p}_j} \hat{a}_{\mathbf{p}_j}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_j}$ , der summen går over alle mulige impulser, finner vi at den kanoniske partisjonsfunksjonen kan skrives som:

$$\begin{aligned}Z &= \text{Tr} \left[ e^{-\beta\hat{H}} \right] \\ &= \sum_{N_{\mathbf{p}_1}=0}^{\infty} e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_1} N_{\mathbf{p}_1}} \sum_{N_{\mathbf{p}_2}=0}^{\infty} e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_2} N_{\mathbf{p}_2}} \dots \\ &= \prod_j \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_j}}},\end{aligned}\quad (7.50)$$

og i dette uttrykket har vi én faktor for hver impuls  $\mathbf{p}_j$ . Vi finner nå følgende uttrykk for det midlere antallet eksitasjoner  $n_{\mathbf{p}_i}$  med impuls  $\mathbf{p}_i$ :

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{p}_i} &= \frac{1}{Z} \sum_{N_{\mathbf{p}_i}=0}^{\infty} N_{\mathbf{p}_i} e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_i} N_{\mathbf{p}_i}} \prod_{j \neq i} \sum_{N_{\mathbf{p}_j}=0}^{\infty} e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_j} N_{\mathbf{p}_j}} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{N_{\mathbf{p}_i}=0}^{\infty} N_{\mathbf{p}_i} e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_i} N_{\mathbf{p}_i}} \prod_{j \neq i} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_j}}}, \end{aligned} \quad (7.51)$$

og hvis vi også bruker ligning (7.50), reduseres dette til følgende:

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{p}_i} &= \left(1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_i}}\right) \sum_{N_{\mathbf{p}_i}=0}^{\infty} N_{\mathbf{p}_i} e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}_i} N_{\mathbf{p}_i}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta\omega_{\mathbf{p}_i}} - 1}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Dette er ikke noe annet enn Bose-Einsteinfordelingen, og forventingsverdiene  $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle$  og  $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle$ , som inngår i uttrykket for den termiske Greensfunksjonen, kan vi nå skrive som:

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle = n_{\mathbf{p}}, \quad (7.53)$$

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle = n_{\mathbf{p}} + 1, \quad (7.54)$$

der  $n_{\mathbf{p}}$  er gitt ved ligning (7.52).

Videre gjør vi for enkelthetskyld et variabelbytte slik at  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  erstattes med  $\mathbf{r}$  og  $\tau - \tau'$  med  $\tau$ . Med dette kan vi skrive  $\mathcal{G}(x)$  istedenfor  $\mathcal{G}(x - y)$ . I det følgende skal vi også studere  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \tau)$  som er den Fouriertransformerte av ligning (7.47), og denne funksjonen kan vi skrive som:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{p}, \tau) &= -\theta(\tau) \frac{1}{2c_2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ (n_{\mathbf{p}} + 1)e^{-\omega_{\mathbf{p}}\tau} + n_{\mathbf{p}}e^{\omega_{\mathbf{p}}\tau} \right] \\ &\quad - \theta(-\tau) \frac{1}{2c_2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ (n_{\mathbf{p}} + 1)e^{\omega_{\mathbf{p}}\tau} + n_{\mathbf{p}}e^{-\omega_{\mathbf{p}}\tau} \right]. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Dette uttrykket kan vi også forenkle ytterligere til:

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}, \tau) = -\frac{1}{2c_2\omega_{\mathbf{p}}} [e^{-\omega_{\mathbf{p}}|\tau|} + 2n_{\mathbf{p}} \cosh(\omega_{\mathbf{p}}\tau)]. \quad (7.56)$$

Ved hjelp av ligning (7.44) finner vi den termiske Greensfunksjonen uttrykt med Matsubarafrekvensene istedenfor den imaginære tiden  $\tau$ . Det gir:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{p}, i\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} G(\mathbf{p}, \tau) \\ &= -\frac{1}{2c_2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ \frac{(n_{\mathbf{p}} + 1)(e^{\beta(i\omega_n - \omega_{\mathbf{p}})} - 1)}{i\omega_n - \omega_{\mathbf{p}}} + \frac{n_{\mathbf{p}}(e^{\beta(i\omega_n + \omega_{\mathbf{p}})} - 1)}{i\omega_n + \omega_{\mathbf{p}}} \right]. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Hvis vi nå bruker at

$$e^{i\omega_n\beta} = 1, \quad (7.58)$$

$$n_{\mathbf{p}}(e^{\beta\omega_{\mathbf{p}}} - 1) = 1, \quad (7.59)$$

$$(n_{\mathbf{p}} + 1)(e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}}} - 1) = -1, \quad (7.60)$$

finner vi følgende uttrykk for  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{p}, i\omega_n) &= -\frac{1}{2c_2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ -\frac{1}{i\omega_n - \omega_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{i\omega_n + \omega_{\mathbf{p}}} \right] \\ &= -\frac{1}{2c_2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{-2\omega_{\mathbf{p}}}{(i\omega_n)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2} \\ &= \frac{1}{-c_2\omega_n^2 + \frac{c_1}{m}\mathbf{p}^2}, \end{aligned} \quad (7.61)$$

og vi ser at vi har fått nøyaktig det samme uttrykket som vi fikk for Feynmanpropagatoren i ligning (7.26), bare  $p^0$  er erstattet med  $i\omega_n$ .

Den termiske Greensfunksjonen i posisjonsrommet kan vi nå skrive som:

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{V\beta} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-c_2\omega_n^2 + \frac{c_1}{m}\mathbf{p}^2} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \omega_n\tau)} \quad (7.62)$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{-1}{2c_2\omega_{\mathbf{p}}} [e^{-\omega_{\mathbf{p}}|\tau|} + 2n_{\mathbf{p}} \cosh(\omega_{\mathbf{p}}\tau)] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \quad (7.63)$$

og her har vi brukt at summen over Matsubarafrekvensene er gitt ved ligning (7.56).

## 7.7 Korrelasjonsfunksjonen og store avstander

I det følgende vil vi studere korrelasjonsfunksjonen  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , som i homogene systemer bare avhenger av avstanden  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Det vil si at vi kan skrive den som:

$$\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle. \quad (7.64)$$

Det som gjør det interessant å studere korrelasjonsfunksjonen, er at denne funksjonen kan fortelle oss om systemet er i den kondenserte fasen eller ikke. Dette henger sammen med at kriteriet for BEK, kan formuleres slik at dersom korrelasjonsfunksjonen går mot en endelig konstant ved lange avstander, det vil si at:

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\rightarrow\infty} \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\rightarrow\infty} \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle = \text{konstant}, \quad (7.65)$$

er systemet i den kondenserte fasen [2].

Den fysiske betydningen av korrelasjonsfunksjonen kan lett forklares for den éndimensjonale Isingmodellen, som ble beskrevet i kapittel 5. For denne modellen er korrelasjonsfunksjonen definert ved [5]:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij} &= \langle (s_i - \langle s_i \rangle)(s_j - \langle s_j \rangle) \rangle \\ &= \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle,\end{aligned}\tag{7.66}$$

og hvis vi bruker at  $\langle s_k \rangle = 0$  for alle  $k$  i fravær av ytre magnetfelt, reduseres dette uttrykket til:

$$\Gamma_{ij} = \langle s_i s_j \rangle.\tag{7.67}$$

I denne modellen beskriver korrelasjonsfunksjonen hvordan spinn nummer  $i$  avhenger av retningen til spinn nummer  $j$ . Det vil si at den forteller oss *i hvilken grad ulike deler av systemet kommuniserer med hverandre*. Når  $T = 0$  og alle spinnene peker i samme retning, er  $\Gamma_{ij} = 1$  og retningen på spinn nummer  $i$  er entydig bestemt av retningen til de andre spinnene i systemet. Ved  $T > 0$  vil de termiske fluktusjonene medføre at spinnene blir mindre avhengige av hverandre, og det kan vises at korrelasjonsfunksjonen avtar eksponentielt [5]:

$$\Gamma_{ij} = e^{-|i-j|a/l}.\tag{7.68}$$

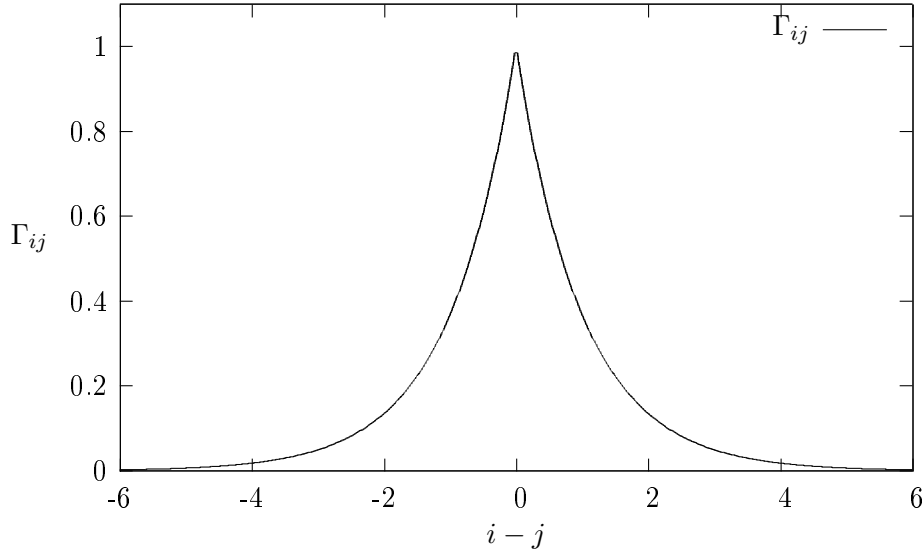
Her har vi latt  $a$  være avstanden mellom to nabospinn slik at  $|i-j|a$  er avstanden mellom spinn  $i$  og  $j$ . I tillegg er  $l$  korrelasjonslengden. Denne lengden beskriver avstanden der spinnene er korrelert. Med andre ord vil retningen til spinn  $i$  være avhengig av spinn  $j$  dersom  $|j-i| < l/a$ . Hvis  $|j-i| > l/a$  vil  $\Gamma_{ij} \approx 0$  og spinnene kan sees på som uavhengige. Korrelasjonslengden er slik at den øker når vi senker temperaturen, og når  $T \rightarrow 0$ , vil  $l \rightarrow \infty$ , og systemet vil være korrelert over en avstand som er like stor som størrelsen på systemet.

En Bosegass med spontant brutt global  $U(1)$ -symmetri, inneholder et Bose-Einstein kondensat. Dette kondensatet har en makroskopisk bølgefunksjon som igjen har en tilhørende fase. Det spesielle er at denne fasen er konstant gjennom hele systemet. Fasen i et punkt  $\mathbf{r}$  er derfor avhengig av hva fasen er i et annet punkt  $\mathbf{r}'$ , og av dette kan vi konkludere med at det er stor grad av kommunikasjon mellom ulike deler av kondensatet. Når vi har BEK, følger det derfor at korrelasjonsfunksjonen  $\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  er forskjellig fra null selv om  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ . Vi skal nå se at korrelasjonsfunksjonen grenser mot  $\rho_0$ , som er tettheten av partikler i kondensatet, når  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ . La oss som tidligere skrive feltoperatoren som:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}),\tag{7.69}$$

der  $\psi_0(\mathbf{r})$  er bølgefunksjonen til kondensatet og  $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$  er en feltoperator som beskriver partiklene utenfor kondensatet. Dette gir følgende uttrykk for korrelasjonsfunksjonen:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \left\langle \left( \psi_0^*(\mathbf{r}) + \delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \right) \left( \psi_0(\mathbf{r}') + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}') \right) \right\rangle \\ &= \psi_0^*(\mathbf{r})\psi_0(\mathbf{r}') + \langle \delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle.\end{aligned}\tag{7.70}$$



Figur 7.2: Korrelasjonsfunksjonen for Ising modellen ved endelig temperatur. I denne figuren har vi satt  $a/l = 1$ .

Her har vi brukt at kryssleddene  $\psi_0(\mathbf{r})\langle\delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\rangle$  og  $\psi_0^*(\mathbf{r})\langle\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}')\rangle$  forsvinner da  $\delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$  og  $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$  er lineære i heve- og senkeoperatorene. Partiklene utenfor kondensatet, vil på grunn av termiske og kvantemekaniske fluktuasjoner ikke ha noen definert fase og  $\langle\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}')\rangle \rightarrow 0$  når  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ . I tillegg vet vi fra kapittel 5 at  $\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0}$ . Det gir:

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\rightarrow\infty} \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \psi_0^*\psi_0 = \rho_0, \quad (7.71)$$

og vi ser at grenseverdien til korrelasjonsfunksjonen er  $\rho_0$ . Hvis vi også bruker at  $\hat{\psi}$  og  $\hat{\psi}^\dagger$  kan Fourierutvikles som i ligning (2.40) og (2.41), finner vi følgende uttrykk for korrelasjonsfunksjonen:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Her er  $n_{\mathbf{p}}$  antall partikler med impuls  $\mathbf{p}$ , og vi ser at partikkeltallet  $n_{\mathbf{p}}$  er en Fouriertransformasjon av korrelasjonsfunksjonen.

Selv om korrelasjonsfunksjonen i enkelte tilfeller går mot null når  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ , må ikke systemet nødvendigvis å være i den normale fasen<sup>2</sup>. Det er nemlig slik at et system

<sup>2</sup>Med *normal fase* mener vi at systemet er i den symmetriske fasen der den globale  $U(1)$ -symmetrien ikke er brutt

kan være et superfluid, selv om vi ikke har BEK [30]. For et superfluid kjennetegnes ikke ved at det inneholder et Bose-Einstein kondensat, men ved at korrelasjonsfunksjonen avtar algebraisk. Det vil si proporsjonalt med  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\gamma$  der  $\gamma \geq 0$ . Systemer der  $\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  avtar algebraisk, er ofte sagt å til å inneholde et 'kvasikondensat'. Men hva som menes med kvasikondensat, skal vi ikke komme nærmere inn på her enn å nevne at det er en mellomting mellom BEK og normal fase. Når  $\gamma = 0$ , er systemet imidlertid i den kondenserte fasen med brutt global  $U(1)$ -symmetri. Dersom korrelasjonsfunksjonen avtar eksponentielt, er systemet i normal fase.

## 7.8 Korrelasjonsfunksjonen i én, to og tre dimensjoner

I den effektive feltteorien parametriserte vi feltkonfigurasjonene som følger:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0 + \sigma(\mathbf{r})} e^{i\phi(\mathbf{r})}. \quad (7.73)$$

Når vi her skal studere korrelasjonsfunksjonen, er vi bare interessert i å studere grensen der  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ , og ved slike avstander kan tetthetsfluktuasjonene  $\sigma(\mathbf{r})$  neglisjeres [2]. Korrelasjonsfunksjonen kan derfor skrives som:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &\approx \langle \sqrt{\rho_0} e^{-i\hat{\phi}(\mathbf{r})} \sqrt{\rho_0} e^{i\hat{\phi}(\mathbf{r}')} \rangle \\ &= \rho_0 \langle e^{-i[\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')] } \rangle. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Her har vi også brukt at  $[\hat{\phi}(\mathbf{r}), \hat{\phi}(\mathbf{r}')] = 0$  slik at vi kan addere eksponentene. Hvis vi videre rekkeutvikler eksponentialfunksjonen rundt  $\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}') = 0$ , finner vi at

$$\langle e^{-i[\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')] } \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^j \rangle. \quad (7.75)$$

En feltoperator  $\hat{\phi}(\mathbf{r})$  er en lineærkombinasjon av heve- og senkeoperatører, og alle ledd hvor  $j$  er et oddetall vil derfor være lik null. Det vil si at vi kan skrive:

$$\langle e^{-i[\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')] } \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2j}}{(2j)!} \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^{2j} \rangle. \quad (7.76)$$

Dette uttrykket kan vi også forenkle ytterligere ved hjelp av Wicks teorem. La oss ta for oss middelverdien:

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^{2j} \rangle &= \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^{2j} \right\} \\ &= e^{\beta F} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}} [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^{2j} \right\}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

For slike termiske gjennomsnitt gir Wicks teorem at vi kan skrive:

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^{2j} \rangle = (2j - 1)!! \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^2 \rangle^j, \quad (7.78)$$



der dobbelt fakultet er gitt ved:

$$(2j - 1)!! = \prod_{n=0}^{j-1} (2j - 1 - 2n), \quad j \geq 1. \quad (7.79)$$

Ved hjelp av Wicks teorem finner vi dermed følgende uttrykk for korrelasjonsfunksjonen:

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\rho_0} &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^{2j}}{(2j)!} (2j - 1)!! \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^2 \rangle^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^2 \rangle^j \\ &= e^{-\frac{1}{2} \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Vi ønsker å bruke den effektive feltteorien for fasen til å studere korrelasjonsfunksjonen ved lange avstander, og for å kunne gjøre dette, må vi finne et uttrykk for eksponenten  $\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle$ <sup>3</sup>. Det finner vi ved å først skrive eksponenten som

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \langle \hat{\phi}^2(\mathbf{r}) \rangle + \langle \hat{\phi}^2(0) \rangle - \langle \phi(\mathbf{r})\phi(0) \rangle - \langle \phi(0)\phi(\mathbf{r}) \rangle, \quad (7.81)$$

og deretter sette inn for den termiske Greensfunksjonen i ligning (7.63) ved lik tid. Da får vi følgende:

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{c_2 \omega_{\mathbf{p}}} [1 + 2n_{\mathbf{p}}] [1 - \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})]. \quad (7.82)$$

Dette uttrykket for eksponenten inneholder imidlertid ultrafiolette divergenser. Men fordi den effektive feltteorien bare gjelder for små impulser der eksitasjonsspekeret er lineært, må vi innføre en øvre grense  $1/\xi$  slik at vi bare summerer over alle  $\mathbf{p}$  der  $|\mathbf{p}| < 1/\xi$ . I tilfellet der vi har en svakt vekselvirkende Bosegass, er det mulig å fjerne den ultrafiolette divergensen ved hjelp av renormaliseringsprosedyrer, og dette er gjort i refs. [35, 36]. Her vil vi derimot bare begrense summen med en øvre grense fordi vi ikke har identifisert  $c_1$  og  $c_2$ .

### 7.8.1 Én dimensjon

Selv om vi lever i et tredimensjonalt univers, finnes det situasjoner der mangepartikkel-systemer oppfører seg som om de befinner seg i én eller to romlige dimensjoner. For eksempel kan man plassere en gass i et ytre potensial slik at atomene bare kan bevege seg i én eller to retninger. Vi vil nå studere den effektive teorien for fasen i både én, to og tre romlige dimensjoner, og vi skal se at teorien kan forutsi om vi har BEK eller ikke. Tidligere er det gjort flere studier av korrelasjonsfunksjonen hvor det er tatt utgangspunkt i andre feltteorier som ligner vår feltteori for fasen. For eksempel har de i refs.

<sup>3</sup>Her har vi satt  $\mathbf{r}' = 0$  slik at korrelasjonsfunksjonen kan skrives som  $\rho(\mathbf{r})$ .

[2, 30] studert korrelasjonsfunksjonen ved å ta utgangspunkt i en feltteori som inkluderer både fasen  $\phi$  og tetthetsfluktuasjonene  $\sigma$ . Vi vil imidlertid vise at vår feltteori gir de samme resultatene selv om den bare tar for seg fasen  $\phi$ <sup>4</sup>.

I én dimensjon og ved  $T = 0$ , er  $n_{\mathbf{p}} = 0$  og eksponenten  $\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle$  kan skrives som:

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{2}{2\pi c_2 c} \int_0^{1/\xi} dp \frac{1}{p} [1 - \cos(pr)]. \quad (7.83)$$

Her har vi tatt kontinuumsgrensen  $V \rightarrow \infty$  og  $c$  er lydfarten gitt ved:

$$c = \sqrt{\frac{-c_1}{mc_2}}. \quad (7.84)$$

For store  $\mathbf{r}$  har dette integralet løsningen:

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\pi c_2 c} \ln \left( \frac{r}{\xi} \right), \quad (7.85)$$

og korrelasjonsfunksjonen får dermed følgende funksjonelle form:

$$\rho(r) \propto \left( \frac{1}{r} \right)^\gamma. \quad (7.86)$$

Her er  $\gamma$  gitt ved:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi c_2 c}. \quad (7.87)$$

Vi ser at korrelasjonsfunksjonen avtar algebraisk, og vi har derfor ikke Bose-Einstein kondensasjon i én dimensjon selv om temperaturen er lik null. Likevel inneholder systemet et kvasikondensat.

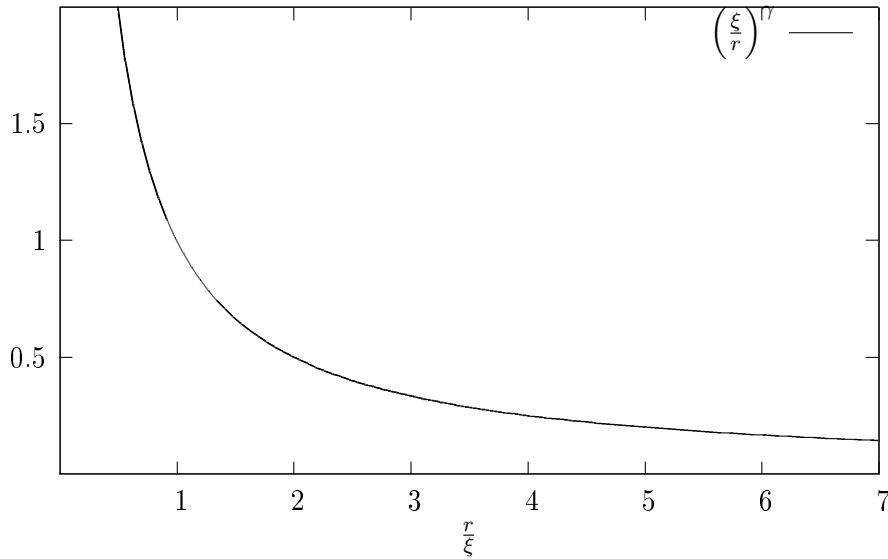
Ved endelig temperatur  $T > 0$ , kan vi skrive eksponenten som:

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\phi}(r) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle &= \frac{1}{\pi c_2 c} \ln \left( \frac{r}{\xi} \right) + \frac{2}{2\pi c_2 c} \int_0^{1/\xi} dp \frac{1}{p} \frac{2}{e^{\beta c p} - 1} [1 - \cos(pr)] \\ &= \frac{1}{\pi c_2 c} \ln \left( \frac{r}{\xi} \right) + \frac{4}{\pi c_2 c} \int_0^{1/\xi} dp \frac{1}{p} \frac{\sin^2(pr/2)}{e^{\beta c p} - 1}, \end{aligned} \quad (7.88)$$

og her har vi brukt at  $n_{\mathbf{p}} = 1/(e^{\beta c p} - 1)$ . La oss nå fokusere på integralet i det siste leddet i dette uttrykket. Dette integralet er konvergent, og hvis vi lar den øvre grensen  $1/\xi \rightarrow \infty$  finner vi at:

$$\frac{4}{\pi c_2 c} \int_0^\infty dp \frac{1}{p} \frac{\sin^2(pr/2)}{e^{\beta c p} - 1} = \frac{1}{\pi c_2 c} \ln \left( \frac{\beta c \sinh(\pi r / \beta c)}{\pi r} \right), \quad (7.89)$$

<sup>4</sup>I det følgende vil vi regne ut korrelasjonsfunksjonen på tilsvarende måte som i ref. [37]. I denne referansen blir korrelasjonsfunksjonen til en feltteori som ligner vår feltteori for fasen studert, og vi får derfor svært like utregninger som i denne referansen. I tillegg er alle de følgende integralene funnet i ref. [38] eller utført ved hjelp av dataprogrammet *Maple 12.0*, som er produsert av Waterloo Maple Inc.



Figur 7.3: Ved  $T = 0$ , avtar korrelasjonsfunksjonen algebraisk og har derfor samme form som kurven over. I dette plottet har vi satt  $\gamma = 1$

og  $\langle [\hat{\phi}(r) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle$  tar dermed følgende form:

$$\langle [\hat{\phi}(r) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\pi c_2 c} \ln \left( \frac{r}{\xi} \right) + \frac{1}{\pi c_2 c} \ln \left( \frac{\beta c \sinh(\pi r / \beta c)}{\pi r} \right). \quad (7.90)$$

I grensen der  $r \rightarrow \infty$ , kan vi neglisjere det logaritmiske leddet, og vi finner at  $\langle [\hat{\phi}(r) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle$  er proporsjonal med  $r$ :

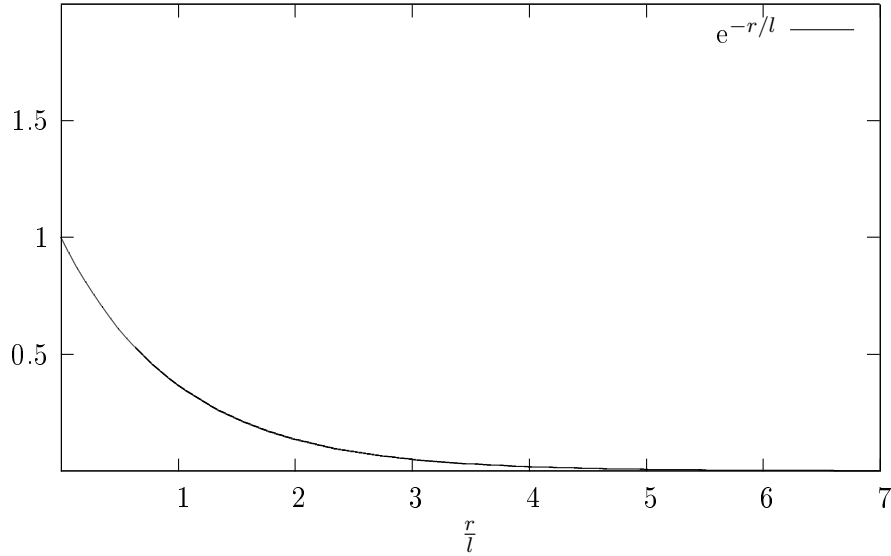
$$\langle [\hat{\phi}(r) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle \rightarrow \frac{T}{c_2 c^2} r. \quad (7.91)$$

Med dette får vi en korrelasjonsfunksjon som avtar eksponentielt ved lange avstander:

$$\rho(r) \propto e^{-\frac{T}{2c_2 c^2} r}, \quad (7.92)$$

og systemet er dermed i den normale fasen. Med andre ord har vi ikke en gang et kvasikondensat i det éndimensjonale rommet ved endelig temperatur. Dette resultatet er i samsvar med *Hohenberg-Mermin-Wagner teoremet* som gir at BEK ikke er mulig i én og to dimensjoner ved endelige temperaturer på grunn av termiske flukturasjoner [39]. Dette teoremet kan også utvides til å gjelde for éndimensjonale systemer ved  $T = 0$ , og sier at det også i dette tilfellet er umulig å ha BEK på grunn av kvantemekaniske flukturasjoner.

Ligning (7.92) gir at korrelasjonslengden  $l$  er gitt ved  $l = 2c_2 c^2 / T$ , og at feltkonfigurasjonen i punktet  $\mathbf{r}$  har en fase som er korrelert med fasen i punktet  $\mathbf{r}'$  når  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < l$ . For større avstander har vi ingen korrelasjon. Når  $T \rightarrow 0$  vil det logaritmiske leddet i ligning (7.90) dominere og korrelasjonsfunksjonen vil avta algebraisk.



Figur 7.4: Ved endelige temperaturer, er korrelasjonsfunksjonen for et éndimensjonalt system proporsjonal med kurven over. I denne figuren er  $l$  korrelasjonslengden gitt ved  $l = 2c_2c^2/T$ .

### 7.8.2 To dimensjoner

I to dimensjoner er eksponenten gitt ved:

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{c_2c} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{p} [1 + 2n_{\mathbf{p}}][1 - \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})], \quad (7.93)$$

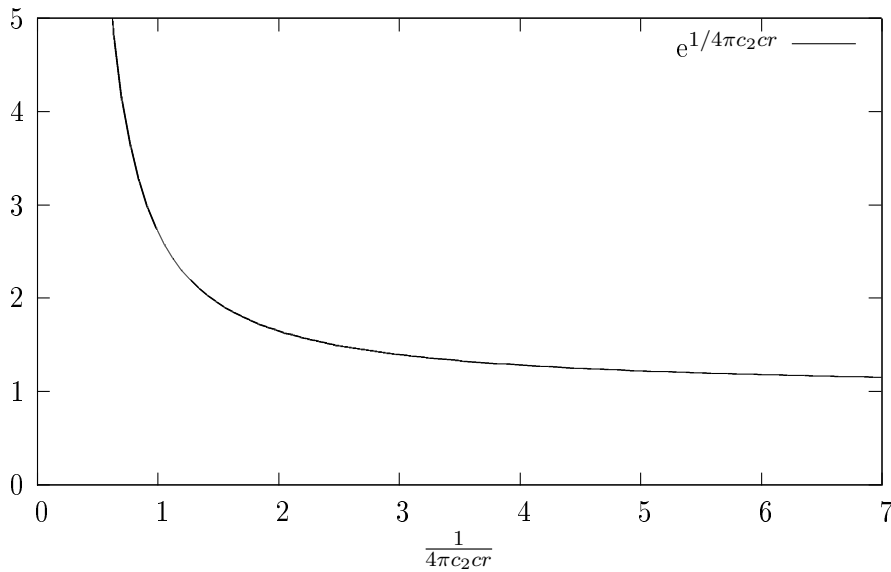
og her har vi, som i forrige avsnitt, tatt kontinuumsgrensen  $V \rightarrow \infty$ . Vi går nå over til polarkoordinater og midler over vinkelen mellom  $\mathbf{p}$  og  $\mathbf{r}$ . Det gir:

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2 c_2c} \int_0^{1/\xi} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta [1 + 2n_{\mathbf{p}}][1 - \cos(pr \cos(\theta))] \\ &= \frac{1}{2\pi c_2c} \int_0^{1/\xi} dp [1 + 2n_{\mathbf{p}}][1 - J_0(pr)], \end{aligned} \quad (7.94)$$

og  $J_0(pr)$  er en Besselfunksjon av første slag. Ved temperatur  $T = 0$  er det ingen kvasi-partikler i systemet slik at  $n_{\mathbf{p}} = 0$ , og vi kan skrive:

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi c_2c} \int_0^{1/\xi} dp [1 - J_0(pr)] \\ &= \frac{1}{2\pi c_2c} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (7.95)$$

I denne utregningen antok vi at  $r$  var stor slik at integralet over  $J_0(pr)$  konvergente såpass raskt at vi kunne la  $1/\xi \rightarrow \infty$  i det andre leddet. Ligning (7.95) gir nå at  $\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle$



Figur 7.5: Ved  $T = 0$  er korrelasjonsfunksjonen for et todimensjonalt system proporsjonal med kurven over.

går mot en konstant når  $r \rightarrow \infty$ , og feltteorien gir dermed at en todimensjonal ikke-relativistisk Bosegass er i den kondenserte fasen når  $T = 0$ .

Når  $r \rightarrow \infty$  vil korrelasjonsfunksjonen gå mot konstanten:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho_0 e^{-1/4\pi c_2 c \xi}. \quad (7.96)$$

Tidligere fant vi at korrelasjonsfunksjonen grenser mot kondensatets partikkeltetthet  $\rho_0$  når  $r \rightarrow \infty$ . Her ser vi derimot at korrelasjonsfunksjonen går mot en verdi som er mindre enn  $\rho_0$ , og grunnen til at det er slik, henger sammen med at ikke alle partiklene befinner seg i kondensatet selv om  $T = 0$  [2]. Dette så vi eksempel på i kapittel 4 i tre dimensjoner. Da fant vi også at det var få partikler utenfor kondensatet fordi dette partikkeltallet var proporsjonalt med gassparameteren. I slike tilfeller er eksponenten derfor liten og  $e^{-1/4\pi c_2 c \xi} \approx 1$ .

Når vi nå skal studere korrelasjonsfunksjonen for  $T > 0$ , ser vi bort ifra det konstante leddet proporsjonalt med  $1/\xi$  i ligning (7.95). Hvis vi også rekkeutvikler  $n_{\mathbf{p}}$ , finner vi at

eksponenten kan skrives som:

$$\begin{aligned}
\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle &= -\frac{1}{2\pi c_2 c r} + \frac{1}{\pi c_2 c} \int_0^{1/\xi} dp n_{\mathbf{p}} [1 - J_0(pr)] \\
&= -\frac{1}{2\pi c_2 c r} + \frac{1}{\pi c_2 c} \int_0^{1/\xi} dp \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta c p} [1 - J_0(pr)] \\
&= -\frac{1}{2\pi c_2 c r} + \frac{1}{\pi c_2 c^2 \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{n\beta c}{\sqrt{n^2(\beta c)^2 + r^2}} \right), \quad (7.97)
\end{aligned}$$

og her har vi latt  $1/\xi \rightarrow \infty$ . Summen over  $n$  en konvergent sum, og det er nå mulig å finne hvordan eksponenten oppfører seg for store  $r$  ved å behandle  $n$  som en kontinuerlig variabel og integrere det siste leddet. I grensen der  $r \rightarrow \infty$  finner vi at

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\pi c_2 c^2 \beta} \left[ K + \ln \left( \frac{r}{\beta c} \right) \right], \quad (7.98)$$

og her er  $K$  en konstant. Dette gir også videre at korrelasjonsfunksjonen avtar algebraisk:

$$\rho(r) \propto \left( \frac{1}{r} \right)^{T/2\pi c_2 c}, \quad (7.99)$$

og vi kan konkludere med at vi bare har BEK når  $T = 0$  i to dimensjoner. Med ett vi øker temperaturen, vil fasefluktuasjonene ødelegge Bose-Einstein kondensatet. Resultatet over gir likevel at systemet vil inneholde et kvasikondensat og være ett viskositetsfritt superfluid.

I to dimensjoner har vi også en faseovergang mellom den viskositetsfrie og den normale fasen ved en kritisk temperatur  $T_{BKT} > 0$  [2, 40]. Denne faseovergangen kalles for *Berezinskii-Kosterlitz-Thouless*-overgangen og er forbundet med eksitasjoner av kvantiserte virvelstrømmer. Ved temperaturer  $T < T_{BKT}$  er virvelstrømmene bundet i par med motsatt strømetretning. Men hvis vi øker temperaturen slik at  $T > T_{BKT}$ , splittes parene og dette resulterer i at systemet ikke lenger blir viskositetsfritt og at det går over i normal fase. Når parene splittes, ødelegges også kvasikondensatet som er tilstede når temperaturen er lavere enn  $T_{BKT}$ .

### 7.8.3 Tre dimensjoner

I tre romlige dimensjoner, er eksponenten gitt ved:

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{c_2 c} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p} [1 + 2n_{\mathbf{p}}] [1 + \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})], \quad (7.100)$$

og hvis vi går over til kulekoordinater og utfører integrasjonene over alle vinklene, finner vi at den kan skrives som:

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2 c_2 c} \int_0^{1/\xi} dp p [1 + 2n_{\mathbf{p}}] \left[ 1 - \frac{\sin(pr)}{pr} \right]. \quad (7.101)$$

I grensen der  $r \rightarrow \infty$  vil

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(pr)}{pr} = 0, \quad (7.102)$$

og eksponenten vil gå mot en konstant. Bose-Einstein kondensasjon er derfor mulig i tre dimensjoner selv om  $T > 0$ .

Vi har nå brukt den effektive feltteorien for fasen til å studere korrelasjonsfunksjonen ved lange avstander. Med dette fant vi ut at både temperaturen og antallet dimensjoner har stor innflytelse på om vi kan ha BEK. Resultatene vi fikk er også i samsvar med Hohenberg-Mermin-Wagner teoremet og andre utregninger gjort av for eksempel Popov i ref. [30]. Vi kan likevel merke oss at det i 2001 ble påvist BEK i både én og to dimensjoner [41]. Dette ble funnet ved å studere Bosegasser som var fanget i feller. Disse Bosegassene hadde en endelig størrelse, og slike systemer kan inneholde et Bose-Einstein kondensat når systemet er korrelert over avstander som er lengre enn gassens fysiske utstrekning.





## Kapittel 8

# Oppsummering

I denne oppgaven har vi sett på Bose-Einstein kondensasjon i svakt vekselvirkende Bosegasser og i mer generelle ikke-relativistiske superfluid, og til dette brukte vi effektive feltteorier. En svakt vekselvirkende Bosegass beskrev vi ved hjelp Bogoliubovs metode, og vi fant ut at systemet kunne beskrives ved hjelp av kvasipartikler som i lavenergigrensen hadde en lineær dispersjonsrelasjon. Vi så også at det til enhver tid måtte være partikler som var eksitert ut av kondensatet, og at dette var en liten andel av partiklene. At eksitasjonsspekteret ikke hadde noe energigap i lavenergigrensen, var en følge av at den globale  $U(1)$ -symmetrien var brutt spontant.

I den ikke-relativistiske grensen, kunne vi beskrive en Bosegass med spontant brutt global  $U(1)$ -symmetri ved hjelp av en effektiv feltteori for fasen  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . Det eneste vi antok da vi fant denne feltteorien, var Galileiinvarians, og dette medførte at teorien ble systemuavhengig og meget generell. Likevel kunne vi relatere den til et gitt system gjennom å bestemme parameterne  $c_1, c_2, \dots$ , og generelt måtte parameterne bestemmes eksperimentelt. For en svakt vekselvirkende Bosegass fant vi imidlertid at  $c_1$  og  $c_2$  var relatert til massen  $m$ , partikkeltettheten  $\rho$  og spredningslengden  $a$ .

I det siste kapitlet kvantiserte vi feltteorien, og studerte korrelasjonsfunksjonen  $\rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  i grensen der  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \rightarrow \infty$ . Oppførselen til korrelasjonsfunksjonen ved store avstander, er nært knyttet til Bose-Einstein kondensasjon, og vi så at vi hadde BEK i tre dimensjoner ved alle temperaturer og ved  $T = 0$  i to dimensjoner. Det faktum at vi ikke har BEK i lavere dimensjoner ved  $T > 0$  og i én dimensjon ved  $T = 0$  er også i samsvar med Hohenberg-Mermin-Wagner teoremet. I tillegg avtok korrelasjonsfunksjonen algebraisk i to dimensjoner ved endelig temperatur og i én-dimensjon ved  $T = 0$ . I slike tilfeller inneholder systemet derfor et kvasikondensat og har egenskaper som et superfluid.



# Epilog

Arbeidet med denne oppgaven har vært svært lærerikt og spennende. Den har gitt meg god innsikt hvordan vi kan bruke effektive feltteorier til å studere kompliserte kvantemekaniske systemer, og hvordan dette kan forenkle beregningene betraktelig. Det har vært interessant å gjøre et dypere studium av Bose-Einstein kondensasjon, og særlig spennende var det å studere en effektiv feltteori som beskriver ikke-relativistiske superfluider ved lave temperaturer.

Jeg vil avslutningsvis rette en takk til Jens O. Andersen for spesielt god veiledning. Han har gitt gode og konstruktive tilbakemeldinger og har hjulpet meg til å yte mitt beste. Jeg vil også rette en spesiell takk til venner og familie som har vært støttende gjennom hele prosessen.



# Bibliografi

- [1] Ketterle W. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Rev. Mod. Phys.* 2002; 74:1131.
- [2] Pitaevskii L, Stringari S. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford: Clarendon Press; 2003.
- [3] Pethick CJ, Smith H. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge: Cambridge University Press; 2004.
- [4] Strobl G. *Condensed Matter Physics - Crystals, Liquids, Liquid Crystals and Polymers*. Berlin: Springer; 2004.
- [5] Andersen JO. *Introduction to Statistical Mechanics, Second edition - Now including Markov chains!*. Trondheim: NTNU; 2008.
- [6] Reichl LE. *A Modern Course in Statistical Physics*. Austin: University of Texas Press; 1980.
- [7] Dickhoff WH, Van Neck D. *Manybody Theory Exposed! Propagator description of quantum mechanics in manybody systems*. Hackensack, NJ: World Scientific; 2005.
- [8] Hemmer PC. *Kvantemekanikk*. Trondheim: Tapir Akademisk Forlag; 2000.
- [9] Sudbø A. *Forelesningsnotater til faget TFY4210 Anvendt Kvantemekanikk*. Trondheim: NTNU; 2009
- [10] Blaizot JP, Ripka G. *Quantum Theory of Finite Systems*. Cambridge Mass.: The MIT Press; 1986.
- [11] Fetter AL, Walecka JD. *Quantum Theory of Many Particle Systems*. New York: McGraw-Hill; 1971.
- [12] Brevik IH. *Kompendium i faget TEP4145 Klassisk Mekanikk*. Trondheim: NTNU; 2006.
- [13] Mandl F, Shaw G. *Quantum Field Theory*. Chichester: John Wiley & Sons; 1993.
- [14] Peskin ME, Schroeder DV. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boulder, Colo.: Westview Press; 1995.

- [15] Economou EN. Greens functions in Quantum Physics. Berlin: Springer; 2006.
- [16] Kapusta JI. Finite-temperature field theory. Cambridge: Cambridge University Press; 1989.
- [17] Negele JW, Orland H. Quantum Many-Particle Systems. Redwood City, Calif.: Addison-Wesley; 1988.
- [18] Elliot SR. The Physics and Chemistry of Solids. Chichester: John Wiley & Sons 2006.
- [19] Georgi H. Effective Field Theory. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1993; 43:209.
- [20] Pich A. Effective Field Theory. arXiv:hep-ph/9806303v1. 1998.
- [21] Andersen JO. Theory of weakly interacting Bose gas. Rev. Mod. Phys. 2004; 76:599.
- [22] Skagerstam BS. Forelesningsnotater til faget TFY4292 Kvantteoptikk. Trondheim: NTNU; 2008.
- [23] Lee TD, Yang CN. Many-Body Problem in Quantum Mechanics and Quantum Statistical Mechanics. Phys. Rev. 1957; 105:1119.
- [24] Proukakis NP, Jackson B. Finite Temperature Models of Bose-Einstein condensation. arXiv:0810.0210v2. 2008.
- [25] Weinberg S. Quantum Theory of Fields. 2. utg. Cambridge: Cambridge University Press; 1996.
- [26] Andrews MR, Townsend CG, Miesner HJ, Durfee DS, Kurn DM, Ketterle W. Observation of Interference Between Two Bose Condensates. Science. 1997; 275:637.
- [27] Lange RV. Nonrelativistic Theorem Analogous to the Goldstone Theorem. Phys. Rev. 1966; 146:301.
- [28] Andersen JO. Effective field Theory for Goldstone Bosons in Nonrelativistic Superfluids. arXiv:cond-mat/0209243v1. 2002.
- [29] Liu WV. Effective field theory approach to Bose-Einstein condensation. arXiv:cond-mat/9711250v4. 1998.
- [30] Popov VN. Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics. Dordrecht: D. Reidel; 1983.
- [31] Zagoskin AM. Quantum Theory of Many-Body Systems : Techniques and applications. New York: Springer; 1998.
- [32] Abrikosov AA, Gorkov LP, Dzyaloshinskii IE. Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics. Englewood Cliffs: Prentice Hall; 1963.

- [33] Asmar NH, Jones GC. Applied Complex Analysis with Partial Differential Equations. Upper Saddle River, NJ.: Prentice Hall; 2002.
- [34] Mahan GD. Many-Particle Physics. 2. utg. New York: Plenum Press; 1990.
- [35] Al Khawaja U, Andersen JO, Proukakis NP, Stoof HTC. Low-dimensional Bose gases. arXiv:cond-mat/0202085v1. 2002.
- [36] Andersen JO, Al Khawaja U, Stoof HTC. Phase Fluctuations in Atomic Bose Gases. Phys. Rev. Lett. 2002; 88:070407
- [37] Andersen JO. Phase fluctuations in low-dimensional Gross-Neveu models. arXiv:hep-th/0506261v1. 2005.
- [38] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. Table of Integrals, Series, and Products. New York: Academic Press; 1965.
- [39] Stringari S. Sum Rules and Bose-Einstein Condensation. I: Griffin A, Snoke DW, Stringari S, red. Bose-Einstein Condensation. Cambridge: Cambridge University Press; 1995. s. 86-98.
- [40] Kosterlitz JM, Thouless DJ. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. J. Phys. C. 1973; 6:1181.
- [41] Görlitz A, Vogels JM, Leanhardt AE, Raman C, Gustavson TL, Abo-Shaeer JR, et al. Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions. Phys. Rev. Lett. 2001; 87:130402