

Modellering og dynamisk analyse av
endeforankret flytebro over
Bjørnafjorden utsatt for bølgeindusert
respons

Lars Christian Hansteen
Jørgen Mangor-Jensen

Master i Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2017

Hovedveileder: Ole Andre Øiseth, KT

Medveileder: Øyvind Wiig Petersen, KT
Knut Andreas Kirkestuen Kvåle, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk



Institutt for konstruksjonsteknikk
Fakultet for ingeniørvitenskap og teknologi

NTNU- Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet

MASTEROPPGAVE 2017

Fagområde:	Dato:	Antall sider:
Konstruksjonsdynamikk	11.06.2017	

Tittel:

Modellering og dynamisk analyse av endeforankret flytebro over Bjørnafjorden utsatt for bølgeindusert respons.

Modeling and dynamic analysis of end anchored floating bridge over the Bjørnafjord exposed to wave induced response.

Utført av:

Lars Christian Hansteen

Jørgen Mangor-Jensen



Faglærer: Ole Andre Øiseth

Veiledere: Øyvind Wiig Petersen og Knut Andreas Kvåle

Utført ved: NTNU, Institutt for konstruksjonsteknikk

Sammendrag

Statens vegvesen planlegger en fergefri E39 lang den norske vestkysten. I den forbindelse er det satt i gang en rekke grensesprengende forskningsprosjekter for fjordkryssinger med flere ulike brukonsepter. Bjørnafjorden er den lengste av de respektive fjordene, og denne rapporten tar for seg muligheten for å krysse fjorden med en endeforankret flytebro.

En vesentlig del av prosessen har gått ut på å lage en ABAQUS-modell av det aktuelle brukonseptet. Modellen danner grunnlag for videre forskning, og det er derfor lagt ned mye arbeid for å gjøre modellen så realistisk som mulig. Brua er modellert med generaliserte bjelkeelementer da det medfører store fordeler både i modelleringsarbeidet, og for å oppnå en beregningseffektiv modell.

De hydrodynamiske og hydrostatiske bidragene fra pongtongenes interaksjon med vann er beregnet i analyseverktøyet DNV HYDROD WADAM. Geometrien er modellert med skallelementer i ABAQUS, som videre er blitt importert til programmet DNV GENIE, som transformerer skall-modellen om til en panel-modell. Til slutt importeres panel-modellen til WADAM-analysen som beregner de hydrodynamiske og hydrostatiske parameterne.

ABAQUS håndterer ikke tilordning av frekvensavhengige parametere, og kun de hydrostatiske bidragene er derfor lagt til i denne modellen. Her er det gjennomført en egenfrekvensanalyse, før resultatene fra de to analysene importeres inn i et etablert MATLAB-program utviklet for beregning av flytende konstruksjoner utsatt for stokastisk bølgelast. Det er benyttet et etablert estimert lastspekter, og antatt Rayleigh-demping for systemet. I MATLAB overføres de respektive resultatene til det modale vektorrommet, definert av analysen i ABAQUS, hvor systemets totale egenverdiproblem løses. Den endelige dynamiske responsen oppnås til slutt ved transformasjon tilbake til det fysiske vektorrommet.

Resultatene fra egenverdiplanet som ble løst i MATLAB virker realistiske. De laveste egenfrekvensene kommer fra egenmoder med dominerende bevegelser i y-retning, hvor den lengste egenperioden er på 49.36 sekunder. Avvikene mellom egenfrekvensene til det totale systemet og modellen i ABAQUS, er som forventet: Egenfrekvensene blir redusert som en følge av at hydrodynamiske effekter og Rayleigh-demping blir implementert.

Den største responsen i bruas globale y-retning oppstår langs den høye delen av flytebrua. Responsen trigges i hovedsak av fem egenmoder med lav demping og egenperioder i intervallet 4.43 – 5.43 sekunder. Tre av egenmodene innenfor det respektive frekvensintervallet har en dempingsrate på under 1 %. Pongtongen ved akse 4 er spesielt utsatt, med et standardavvik på 138.4 millimeter. De koblede egenmodene får samtidig betydelige utslag i x-z-planet langs den høye delen av flytebrua, og er årsaken til at standardavviket i x-retning er betydelig høyere her sammenliknet med den lave delen. Ved akse 3 og 4 er standardavviket 41 millimeter i x-retning.

I z-retning oppstår den høyeste responsen ved akse 12, med et standardavvik på 34 millimeter. Det eksisterer flere z-moder innenfor frekvensintervallet som dominerer variansen til bølgespekteret, hvor den største bidragsyteren til responsen er egenmode nummer 28. Den korresponderende egenperioden er på 5.88 sekunder og dempingsraten på 1.73 %, som er lavest av samtlige z-moder inkludert i analysen.

Egenmodene med de lengste egenperiodene har en dempingsrate tilnærmet lik null. Den lave dempingen kombinert med svært høy effektiv masse vil påføre brubanen store momenter om sterk akse om de trigges. De langsomme og store forskyvningene vil også kunne føre til utfordringer i forbindelse med utmatting. Bølgespektrene befinner seg godt over egenfrekvensene til disse egenmodene, men det kan oppstå utfordringer i forbindelse med vindindusert respons.

Abstract

The Norwegian Public Roads Administration is planning a new ferry-free E39 along on the Norwegian west coast. In this context, several groundbreaking research projects have been launched for fjord crossings considering different bridge concepts. The Bjørnafjord is the longest along the route, and this thesis addresses the possibility of crossing the fjord using an end anchored floating bridge.

An important part of the process was creating an ABAQUS model of the relevant bridge type. The model forms the basis for further research, thus to make the model as describing as possible, a considerably amount of effort has been put into this part of the project. The bridge is modeled with generalized beam elements, as it brings significant benefits both in the modeling work, and in order to achieve a calculation-efficient model.

The hydrodynamic and hydrostatic contributions from the pontoon-water interaction are calculated in the DNV HydroD Wadam analysis tool. The geometry is modeled using shell elements in Abaqus, which is further imported into the DNV GENIE software and transformed into a panel model. Finally, the panel model is imported into the WADAM analysis that calculates the hydrodynamic and hydrostatic parameters.

The ABAQUS software can't handle frequency dependent contributions, so only the hydrostatic parameters have been implemented in this model before the eigenfrequency analysis. The two analyzes are imported into an established MATLAB program designed to calculate floating structures exposed to stochastic wave loading. An established estimated load spectrum has been used, and Rayleigh damping is assumed for the system. In MATLAB, the respective results are transferred to the modal vector space, defined by the ABAQUS analysis, where the total eigenvalue problem of the system is solved. Finally, the dynamic response is achieved by transformation back to the physical vector space.

The results from the eigenfrequency analysis solved in MATLAB seem realistic. The lowest natural frequencies forms mode shapes with dominant movements in the y-direction, with the longest period being 49.36 seconds. The deviations between the frequencies of the total system and the frequencies extracted from ABAQUS are as expected: Eigenfrequencies are reduced as a result of hydrodynamic effects and Rayleigh damping being implemented.

The largest response in global y-direction occurs along the high part of the floating bridge. The response is triggered mainly by five mode shapes with low period and damping, and lie in the range of 4.43 - 5.43 seconds. Three of the mode shapes within the respective frequency range have a damping ratio of less than 1%. The pontoon at axis 4 is particularly exposed, with a standard deviation of 138.4 millimeters. The coupled mode shapes also have a significant impact in the x-z plane along the high part of the bridge, and is why the standard deviation in the x-direction is considerably higher here compared to the low part. At axes 3 and 4, the standard deviation is 41 millimeters in x-direction.

In z-direction, the highest response occurs at axis 12, with a standard deviation of 34 millimeters. There are more z-modes in the frequency range that dominate the variance of the wave spectrum, with the main contributor to the response being self-esteem number 28. The corresponding period is 5.88 seconds and the damping ratio is 1.73%, which is the lowest of all z-modes included in the analysis.

The mode shapes with the longest periods have a damping ratio approximately equal to zero. The low attenuation combined with very high efficient mass will inflict large stresses on the bridge if they are triggered. The slow and large displacements will also lead to challenges in terms of fatigue. The wave spectra are well above the eigenvalues of these mode shapes, but there may be challenges associated with wind induced response.

Forord

Denne oppgaven er skrevet i forbindelse med avslutningen av masterstudiene ved Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, ved institutt for konstruksjonsteknikk. Rapporten er et resultat av 20 ukers samarbeid fra januar til juni våren 2017, og fullstendigjør studieløpet med hovedretningen beregningsmekanikk.

Vi har bygget opp verdifull kunnskap innenfor FEM-modellering, dynamiske analyser i frekvensdomenet, og de hydrodynamiske aspektene som påvirker responsen til flytebruer. Modelleringen har spilt en betydelig rolle i arbeidet da brua fortsatt er i planleggingsfasen, og en nøyaktig modell i ABAQUS er avgjørende for troverdigheten av resultatene.

Vi ønsker å rette en stor takk til Knut Andreas Kvåle, Øyvind Wiig Petersen og vår hovedveileder og faglærer, førsteamanuensis Ole Andre Øiseth, for gode faglige diskusjoner og veiledning underveis. Spesielt den tekniske hjelpen i forbindelse med de hydrodynamiske analyseverktøyene, som var ukjente for oss før prosessen startet, har vært svært verdifull.

Lars Christian Hansteen

Trondheim, 10.06.2017

Jørgen Mangor-Jensen

Trondheim, 10.06.2017

Innhold

Sammendrag.....	I
Abstract	III
Forord	V
Figurliste.....	IX
Tabelliste	X
1 Innledning.....	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Beskrivelse av konstruksjonen	2
1.3 Oppgavebeskrivelse.....	4
2 Teori	5
2.1 Systemer med flere frihetsgrader.....	5
2.1.1 Egenfrekvenser og egenmoder	6
2.1.2 Modal transformasjon	8
2.1.3 Rayleigh demping	9
2.2 Tilfeldige vibrasjoner	10
2.2.1 Sannsynlighetsfordeling	11
2.2.2 Stasjonære og homogene prosesser.....	12
2.2.3 Ergodiske prosesser.....	14
2.2.4 Fouriertransformasjon	14
2.3 Stokastiske prosesser i frekvensdomenet	17
2.3.1 Autokorrelasjon og autospekter	17
2.3.2 Forholdet mellom last og repons i frekvensdomenet	18
2.3.3 Responsspekter.....	18
2.3.4 Krysskorrelasjon og krysspekter	19
2.3.5 Koherens.....	21
2.3.6 Spektraltetthet for systemer av flere frihetsgrader	22

2.3.7	Havbølgenes spektraltetthet i flere dimensjoner	23
2.3.8	Standardiserte lastspektre for havbølger	24
2.3.9	Pierson-Moskowitz-spekteret	25
2.3.10	JONSWAP-spekteret	26
2.4	Hydrodynamikk	29
2.4.1	Hydrodynamiske og hydrostatiske effekter	29
2.4.2	Hydrodynamisk last	30
2.4.3	Bevegelsesligningen i frekvensdomenet	31
3	Modellering	33
3.1	Pongtonger	33
3.1.1	DNV GeniE	34
3.1.2	DNV HydroD Wadam	35
3.2	Bruforbindelsen	36
3.2.1	Utgangspunkt for modelleringen	36
3.2.2	Modellering	36
3.2.3	Bærebjelkene	38
3.2.4	Ikke-strukturelle komponenter	40
3.2.5	Forbindelser og kinematiske restriksjoner	42
3.2.6	Brutårnet	44
3.2.7	Kablene	46
3.3	Estimering av responspekter i Matlab	49
4	Resultater og diskusjon	53
4.1	Lastspekter fra havbølger	57
4.2	Respons	57
4.2.1	Horisontal respons	59
4.2.2	Vertikal respons	63
4.3	Antagelser og usikkerhetsmomenter	67

4.4	Videre arbeid	67
5	Konklusjon	68
	Referanser.....	70
	Utfyllende responspekter	71
	Utfyllende modeformer	77

Figurliste

Figur 1.1 Planlagt fjordkryssing vist av den røde streken	1
Figur 1.2 Det globale aksesystemet i x-z-planet [2].....	2
Figur 1.3 Bruas aksesystem i x-y-planet	2
Figur 1.4 Illustrasjon av tenkt bruutforming [1]	3
Figur 2.1 Rayleigh damping for $\alpha = 10^{-5} s^{-1}$ og $\beta = 3 \cdot 10^{-4} s^{-2}$	9
Figur 2.2 Realisasjoner av en vilkårlig stokastisk prosess	11
Figur 2.3 PDF og CDF til en Gauss-fordelt stokastisk prosess.....	12
Figur 2.4 Forholdet mellom tids- og frekvensdomenet.....	16
Figur 2.5 Faseforskjell i tidsdomenet	20
Figur 2.6 Reell og imaginær del av frekvensspekteret.....	21
Figur 2.7 Pierson-Moskowitz-spekteret	26
Figur 2.8 JONSWAP-spekteret	26
Figur 2.9 Forholdet mellom ω_{peak} for JONSWAP og Pierson-Moskowitz	27
Figur 2.10 Utvikling av bølger med avstanden fra land.....	28
Figur 3.1 Pongtongenes lokale koordinatsystem.....	33
Figur 3.2 Modelleringsprosedyre av pongtonger	34
Figur 3.3 Modellen vist i grensesnittet i ABAQUS før brua blir oppspent.....	37
Figur 3.4 Abaqus-modellen sett ovenfra	37
Figur 3.5 Inndeling av tverrsnitt langs brubanen	38
Figur 3.6 Tverrsnittene til hovedbærebjelkene for flytebrudelen og skråstagsdelen [2]	39
Figur 3.7 Forenklet fremstilling av brua sett ovenfra.....	40
Figur 3.8 Brukassene sitt lokale koordinatsystem.....	40
Figur 3.9 Fordeling av ikke-strukturell masse	40
Figur 3.10 Tverrsnitt av hovedbærebjelkene i skråstagsbrua.....	43
Figur 3.11 Ekvivalent tverrsnitt til figur 3.10 i ABAQUS-modellen.....	43
Figur 3.12 Pongtongene sin tilkobling til søylene.....	44
Figur 3.13 Tverrsnitt fra SKYCIV der lengden og bredden er lik.....	45
Figur 3.14 Illustrasjon og diskretisering av tårnet.....	45
Figur 3.15 Kablene i initiell tilstand.....	47
Figur 3.16 Kablene i oppspent tilstand.....	48

Figur 4.1 Sammenligning av egenfrekvenser med og uten hydrodynamiske bidrag	53
Figur 4.2 Frekvensavhengig hydrodynamisk masse	55
Figur 4.3 Frekvensavhengig hydrodynamisk demping	56
Figur 4.4 Autospekter til havbølger for translasjoner	57
Figur 4.5 PDF og CDF for pongtong 4 i y-retning.....	59
Figur 4.6 PDF og CDF for pongtong 12 i z-retning.....	59
Figur 4.7 Autospektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning	60
Figur 4.8 Krysspektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning	62
Figur 4.9 Koherens mellom pongtonger i akse 3 og 4	62
Figur 4.10 Autospektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning	63
Figur 4.11 Krysspektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning	64
Figur A.0.1 Autospektrene til samtlige pongtongers translasjonsfrihetsgrader	73
Figur A.0.2 Auto- og krysspektre for responsen i «Surge»	74
Figur A.0.3 Auto- og krysspektre for responsen i «Sway»	75
Figur A.0.4 Auto- og krysspektre for responsen i «Heave».....	76

Tabelliste

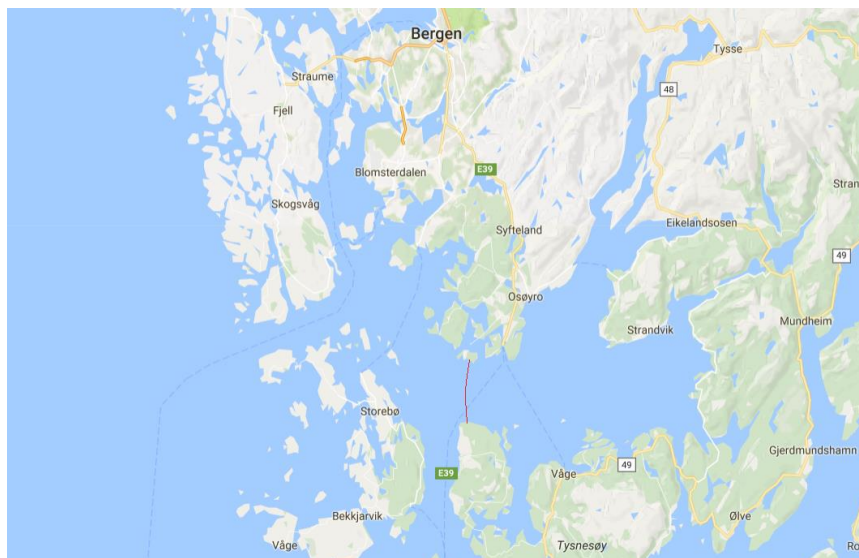
Tabell 2.1 Verdier for JONSWAP-spekteret.....	28
Tabell 2.2 Inndeling av hydrostatiske og hydrodynamiske parametere.....	30
Tabell 3.1 Ekvivalente platetykkelser for bruas tverrsnitt	39
Tabell 4.1 Systemets 50 første egenmoder.....	54
Tabell 4.2 Responsens standardavvik for pongtongenes translasjoner	58
Tabell A.0.1 De første 14 egenmodene til systemet	77

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

I nasjonal transportplan 2014-2023 la forrige regjering fram sin ambisjon om en opprustet og fergefri E39 i løpet av 20 år. Strekningen går fra Kristiansand, langs hele vestkantkysten til Trondheim, og er om lag 1100 km lang. Strekningen i dag inneholder syv fergeforbindelser og har beregnet kjøretid på 21 timer. En utbedret, fergefri E39 vil medføre kortere reisevei og nesten en halvering av reisetiden [1].

Bjørnafjorden er den lengste fjordkryssingen langs ruta, og er derfor blitt et viktig forskningsprosjekt. En bru av denne størrelsen er et grensesprengende prosjekt og krever det nyeste innenfor bruteknologi. Alternativer for flytebru, neddykket rørbru og hengebruer med flere spenn, er brukonsepter som er vurdert for å overkomme utfordringen. Bruforbindingen som er vurdert i denne rapporten er en endeforankret, kurvet flytebru med en tilhørende skråstagsbru ved landgang i sør.



Figur 1.1 Planlagt fjordkryssing vist av den røde streken

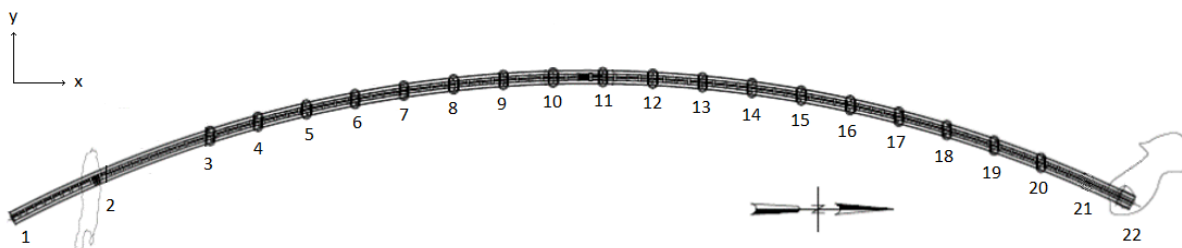
1.2 Beskrivelse av konstruksjonen

Den totale bruforbindelsen er drøyt 4600 meter lang og har en radius på omtrent 5000 meter. I luftlinje er det 4400 meter mellom nord- og sørenden. Det medfører at bruforbindelsen over Bjørnafjorden blir den lengste av samtlige bruer i Statens Vegvesen sitt prosjekt, «Ferjefri E39». Bruforbindelsen er gitt en kurvet geometri for at store horisontalkrefter fra bølger og vind skal kunne tas opp i endeforankringene som aksialkrefter.

Bruforbindelsen starter i sør med en skråstagsbru med seilingshøyde på 45 meter. De første 60 meterne med brubane er fast innspent som en del av endeforankringen, før det inntreffer et sidespenn på 310 meter. Hovedspennet i skråstagsbrua er på 490 meter, og deretter går bruforbindelsen over til en flytebru som hviler på 18 pongtonger med en senteravstand på 197 meter. Fra akse 3, hvor skråstagsbrua går over til å bli en flytebru, avtar koten til brua gradvis fra +52.52 meter til +15.0 meter, hvor den holdes konstant frem til nordenden ved akse 22. Aksesystemet er illustrert i Figur 1.2 og Figur 1.3. Brua er endeforankret, hvilket som innebærer at bruforbindelsen kun er fundamentert til fast fjell ved landovergang i akse 1 og 22, samt ved tårnet i akse 2 og ved hjelp av søyler til fast fjell i akse 21.



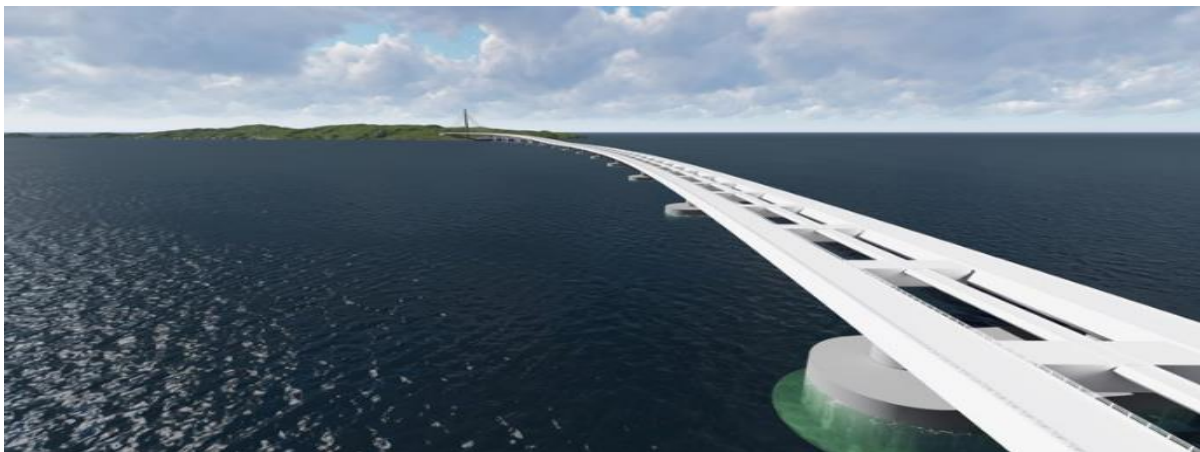
Figur 1.2 Det globale aksesystemet i x-z-planet [2]



Figur 1.3 Bruas aksesystem i x-y-planet

Bruforbindelsen består av tre separate brukasser som er koblet sammen ved bruk av tverrbjelker, som illustrert i Figur 1.4. Bruforbindelsen er derfor en såkalt «Vierendeel-modell». Strukturen har fått navnet ettersom bjelkesystemet minner om det horisontale fagverksystemet utviklet av Arthur Vierendeel, der tverrbjelkene står normalt på bærebjelkene, og forbindelsen evner å overføre og motstå bøyemomenter [2]. Årsaken til avstanden mellom brukassene er de store horisontale kreftene fra bølger og vind som kan oppstå i området. En slik utforming vil øke bøyestivheten om sterk akse, global z-akse, betraktelig. Tverrbjelkene, som danner en kontinuerlig forbindelse mellom de tre brukassene, er plassert med en senteravstand på 50 meter for flytebrudelen og 40 meter for skråstagsbrua. De to ytterste brukassene er bruforbindelsens hovedbærebjelker.

Brutårnet er 228 meter, og er fundamentert til land på en holme fem meter over havet. Tårnet består av en singel betongsøyle med et varierende tverrsnitt, og bærer skråstagsbrua ved hjelp av 80 kabler. I tillegg er tårnet festet til brubanen i horisontal retning som gjør at tårnet kan bistå brubanen med å ta opp store horisontale krefter som et kraftpar med endeforankringen. Tårnet vil således bli påført større krefter enn om det står fritt, men en horisontal fastholding vil også øke kapasiteten mot knekking.



Figur 1.4 Illustrasjon av tenkt bruutforming [1]

1.3 Oppgavebeskrivelse

En omfattende del av masteroppgaven går ut på å lage en ABAQUS-modell av konseptet om endeforankret flytebro over Bjørnafjorden. Modellens geometri bygger på tilsvarende modeller utviklet i programmene ORCAFLEX og NOVAFRAME. Da modellen danner grunnlag for videre forskning er det lagt stor vekt i å få modellen så nøyaktig og virkelighetsbeskrivende som mulig. De hydrostatiske og hydrodynamiske stivhet-, demping- og massebidragene fra pongtongene beregnes ved å lage en panel-modell av pongtongens geometri i DNV GENIE, og videreføre denne til analyseverktøyet i DNV HYDROD WADAM. Deretter samles resultatene fra de respektive analysene i MATLAB der de overføres til det modale vektorrommet, og systemets totale egenverdiproblem løses. Her benyttes et etablert estimert lastspekter, og det antas Rayleigh-demping for systemet. Til slutt overføres den dynamiske responsen tilbake til det fysiske vektorrommet der resultatene fremstilles og blir diskutert.

2 Teori

2.1 Systemer med flere frihetsgrader

Et hvert system er i virkeligheten et kontinuerlig system bestående av uendelig mange frihetsgrader. En analytisk løsning av et system sin differensialligning er i imidlertid kun mulig for svært enkle systemer. For de fleste systemer må differensialligningen løses ved å diskretisere systemet til et endelig antall frihetsgrader [3].

For enkle systemer kan det være tilstrekkelig å diskretisere systemet til én frihetsgrad. Dette er typisk for enkle systemer hvor all respons av betydning forekommer i én retning. Ettersom deformasjonsformen ofte er kjent, vil det være tilstrekkelig å løse bevegelsesligningen for en vilkårlig frihetsgrad, for deretter å benytte antatte formfunksjoner til å estimere responsen til andre frihetsgrader i systemet. Ettersom systemet kun er diskretisert til én frihetsgrad er det kun behov for å løse én ligning. Slike systemer kalles for SDOF-systemer, som kommer fra det engelske uttrykket «Single degree of freedom systems».

De fleste systemer er imidlertid for komplekse til å kunne diskretiseres til én frihetsgrad. For hver frihetsgrad tilføres systemet én ukjent og én ligning. For systemer med mer enn én frihetsgrad må bevegelsesligningen derfor løses som et sett med ligninger. Det medfører at bevegelsesligningen kan uttrykkes på matrise- og vektorform:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (2.1)$$

Systemer med mer enn én frihetsgrad har samlebetegnelsen «Multi degree of freedom Systems», herav betegnet som MDOF-systemer.

2.1.1 Egenfrekvenser og egenmoder

Et system har like mange egenfrekvenser som frihetsgrader, og antallet egenfrekvenser inkludert i en analyse vil derfor avhenge av systemets diskretisering. For et MDOF-system kan systemet sine egenfrekvenser bestemmes ved å løse følgende uttrykk [3]:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (2.2)$$

Dempingsmatrisen kompliserer uttrykket ettersom den er krevende å estimere og løsningen vil bli kompleks [3]. Det er derfor mulig å neglisjere dempingen i ligning (2.2) og implementere disse effektene ved senere tidspunkt gjennom Rayleigh-demping som blir beskrevet i delkapittel 2.1.3. Uttrykket for de udempede egenfrekvensene kan dermed uttrykkes som:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (2.3)$$

Hvor lastvektoren er lik null ettersom et system etter hvert vil vibrere i en av sine egenfrekvenser når det slutter å virke ytre krefter på systemet.

Ved å introdusere: $\{u\} = \{u_0\} \sin(\omega t - \theta)$, hvor $\{u_0\}$ representerer systemet sin responsamplitude-vektor, kan ligning (2.3) omformuleres:

$$-\omega^2 [M]\{u_0\} \sin(\omega t - \theta) + [K]\{u_0\} \sin(\omega t - \theta) = \{0\} \quad (2.4)$$

Ved å dividere begge sider av likhetstegnet med $\sin(\omega t - \theta)$, kan uttrykket i (2.4) uttrykkes på generell form:

$$[K - \omega_i^2 M]\{u_i\} = \{0\} \quad (2.5)$$

Hvor ω_i^2 er egenverdien til den korresponderende egenvektoren, $\{u_i\}$. Uttrykket beskriver systemet sitt karakteristiske, udempede egenverdiproblem. Formålet er å bestemme de ikke-trivielle løsningene, det vil si når matrisen i uttrykket er singulær:

$$\det[K - \omega_i^2 M] = \{0\} \quad (2.6)$$

Uttrykket har like mange egenverdier og korresponderende egenvektorer som antall frihetsgrader. Ved å løse uttrykket i ligning (2.6) kan en følgelig bestemme systemet sine udempede egenfrekvenser, ettersom egenverdiene er lik kvadratet av systemets egenfrekvenser. Etter at egenverdiene er bestemt, kan de korresponderende egenvektorene bestemmes å ved

substituere hver av egenverdiene inn i ligning (2.5). Egenvektorene beskriver svingeformen til systemet når det vibrerer i den korresponderende egenfrekvensen, og er omtalt som egenmoder innenfor dynamikken.

Det er kun forholdet mellom komponentene til egenmodene som er unike, og de faktiske verdiene avhenger av initialbetingelsene, det vil si kraften som setter systemet i bevegelse. Det medfører at det er mulig å skalere egenmodene, og en mye benyttet metode er å skalere komponentene med den inverse av den største komponenten i de respektive egenmodene [3]. Ved å introdusere $\{\phi_i\} = \alpha \{u_i\}$, hvor α er lik den inverse av den største absolutte komponenten i $\{u_i\}$ kan ligning (2.6) ekvivalent uttrykkes som:

$$[K - \omega_i^2 M] \{\phi_i\} = \{0\} \quad (2.7)$$

Hvor $\{\phi_i\}$ er en forskyvings-normalisert egenmode. Følgelig vil komponentene til egenmoden bestå av verdier mellom -1 og 1.

Egenmodene danner basisen i et nytt vektorrom, omtalt som det modale vektorrommet [3]. Vektorrommet har like mange dimensjoner som det strukturelle systemet har antall frihetsgrader. Ettersom egenmodene er basisvektorer, vil de være ortogonale i forhold til hverandre, og enhver vektor i det modale vektorrommet vil følgelig kunne uttrykkes som en sum av systemets egenmoder. Det innebærer at den dynamiske responsen til et system kan bestemmes ved å summere responsbidraget til hver egenmode. Med andre ord består den modale bevegelsesligningen av et sett med ukoblede ligninger som kan løses hver for seg. En slik beregningsmetode baserer seg på prinsippet om superposisjon [4], og forutsetter derfor lineær-elastisk materialoppførsel.

2.1.2 Modal transformasjon

Ut ifra det som ble beskrevet i forrige delkapittel, er det mulig å uttrykke de virkelige, fysiske forskyvningene som en funksjon av de forskyvnings-normaliserte egenmodene ved å introdusere generaliserte koordinater:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) \quad (2.8)$$

Hvor N over summetegnet representerer antall frihetsgrader som er inkludert i analysen. Ligning (2.8) kan skrives på matriseform:

$$\{u\} = \left[\begin{array}{cccc} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \cdots & \{\phi\}_N \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

$$\{u\} = [\Phi] \{y\} \quad (2.10)$$

Hvor $[\Phi]$ er en matrise hvor hver kolonne representerer en egenvektor:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Ved å introdusere denne transformasjonen for bevegelsesligningen i (2.1) og multiplisere inn $[\Phi]^T$ oppstår følgende uttrykk:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{y}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{y}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{y\} = [\Phi]^T \{P\} \quad (2.12)$$

De modale matrisen kan nå introduseres ved:

$$[\tilde{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \quad (2.13)$$

$$[\tilde{C}] = [\Phi]^T [C] [\Phi] \quad (2.14)$$

$$[\tilde{K}] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (2.15)$$

$$\{\tilde{P}\} = [\Phi]^T \{P\} \quad (2.16)$$

2.1.3 Rayleigh damping

Rayleigh damping er en klassisk dampingstype som er formulert som en lineær kombinasjon av masse- og stivhetsproporsjonal damping:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.17)$$

Diagonale masse- og stivhetsmatriser gir ortogonale modale matriser, og medfører at hver av de modale dampingsbidragene også utgir ortogonale matriser med hensyn på systemets egenvektorer. Dampingsmatrisene kan med dette enkelt summeres som vist i ligning (2.17). Ved å utføre en modal transformasjon av dampingsmatrisen får vi følgende uttrykk for den modale dampingen:

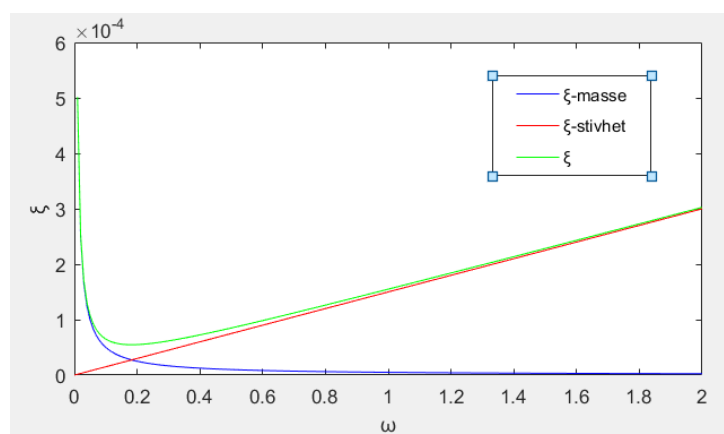
$$[\tilde{C}] = [\Phi]^T [C] [\Phi] = \alpha[1] + \beta[\omega^2] \quad (2.18)$$

Fra ligning (2.18) kan en sette opp uttrykket for dampingskoeffisienten til mode j :

$$c_j = 2\xi_j\omega_j = \alpha + \beta\omega_j^2 \quad (2.19)$$

Ved å skrive om ligningen over får vi videre uttrykket for den modale dampingsraten der vi kan se at α er invers proporsjonal, og β er proporsjonal med ω :

$$\xi_j = \alpha \frac{1}{2\omega_j} + \beta \frac{\omega_j}{2} \quad (2.20)$$



Figur 2.1 Rayleigh damping for $\alpha = 10^{-5} s^{-1}$ og $\beta = 3 \cdot 10^{-4} s^{-2}$

Som en ser fra Figur 2.1 vil den masse-proporsjonale delen dempe ut de lavfrekvente modene, mens den stivhets-proporsjonale delen demper modene med høyere frekvens.

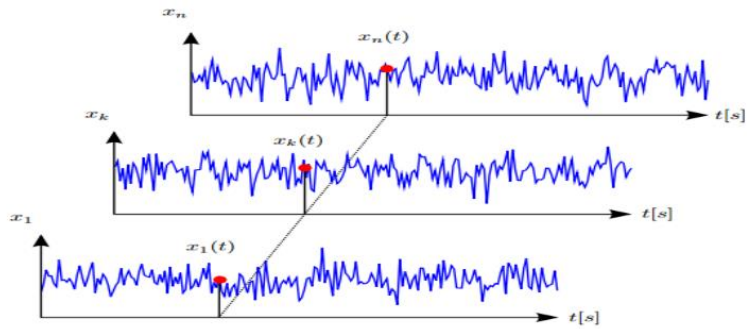
2.2 Tilfeldige vibrasjoner

Tilfeldige, eller stokastiske, prosesser spiller en viktig rolle innenfor konstruksjonsdynamikken. Naturlaster, som havbølger og vind, er eksempler på fenomener som beskrives som stokastiske prosesser [3]. På grunn av deres tilfeldige natur er det ikke mulig å uttrykke slike prosesser som entydige funksjoner av tid og/eller rom.

En stokastisk prosess er en prosess som består av en sekvens tilfeldige variabler, som er avhengig av minst én diskret eller kontinuerlig parameter, for eksempel tid [3]. En stokastisk prosess kan derfor uttrykkes matematisk som $X(t,a)$, hvor $a \in A$ uttrykker prosessen sin tilfeldige natur. «A» representerer utfallsrommet til den stokastiske prosessen, det vil si mengden mulige utfall til hver variabel, $X(t_k,a)$. Videre vil mengden som definerer utfallsrommet være gitt en spesifikk sannsynlighetsfordeling, som definerer prosessen sin karakteristikk. For en gitt $a=a_k$, vil $X(t,a_k)$ være en deterministisk funksjon av «t», og betegnes som én realisasjon av den stokastiske prosessen, $X(t,a)$.

Som nevnt eksisterer det to typer stokastiske prosesser; diskrete og kontinuerlige. Stokastiske prosesser forårsaket av naturen vil alltid være kontinuerlige prosesser. For slike prosesser vil utfallsrommet, A, være uendelig stort. Det eksisterer for eksempel ingen øvre grense for hvor høye havbølgene i et område kan bli. Hvis en tilfeldig prosess forårsaker forskyvninger på et strukturelt system, vil det strukturelle systemet bli utsatt for tilfeldige vibrasjoner. Det medfører at responsen til det strukturelle systemet også må beskrives som en kontinuerlig, stokastisk prosess.

Teorien bak stokastiske prosesser baserer seg på statistikk. Figur 2.2 på neste side viser tre ulike realisasjoner av en vilkårlig stokastisk prosess. Resultatet til hver realisasjon er tilfeldig innenfor prosessen sine rammebetingelser; prosessen sitt utfallsrom og sannsynlighetsfordeling. Når en arbeider med stokastiske prosesser er formålet å bestemme prosessen sin sannsynlighetsfordeling. Ved å samle inn data fra mange realisasjoner av en stokastisk variabel i tidsdomenet, er det mulig å estimere den karakteristiske sannsynlighetsfordelingen ved å studere tendenser på et makronivå.



Figur 2.2 Realisasjoner av en vilkårlig stokastisk prosess

2.2.1 Sannsynlighetsfordeling

En stokastisk prosess sin sannsynlighetsfordeling er definert ut i fra prosessen sin sannsynlighetstetthetsfunksjon, herav omtalt som prosessen sin PDF-funksjon, fra det engelske uttrykket «Probability density function» [5]. Det viser seg at PDF-funksjonen til stokastiske prosesser forårsaket av naturen blir normalfordelt når det statistiske grunnlaget er stort nok. Ved å anta en slik Gauss-fordeling, kan prosessen sin PDF-funksjon estimeres fra følgende ligning [5]:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.21)$$

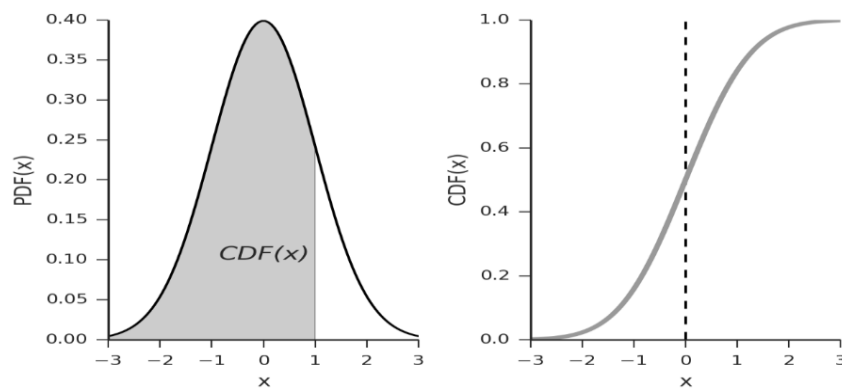
Her representerer m og σ henholdsvis prosessens gjennomsnittsverdi og standardavvik. Det er disse parameterne en ønsker å bestemme ved å studere en stor mengde realisasjoner av en stokastisk prosess. Funksjonsverdien, $p(x)$, angir sannsynligheten for at et spesifikt utfall i utfallsrommet skal oppstå. Ettersom prosessen har et uendelig stort utfallsrom, vil sannsynligheten for et konkret utfall i praksis være lik 0: $\text{Prob}(a_k) = p(x=a_k)dx = 0$. Prosessen sin «Cumulative distribution function», herav omtalt som CDF, er derfor av større interesse. Funksjonen beskriver integralet til PDF-funksjonen, og kan generelt uttrykkes som [5]:

$$C(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx \quad (2.22)$$

Hvor $C(x)$ er forstått som «sannsynligheten for at utfallet til en tilfeldig variabel er mindre enn x ». Det medfører at integralet over hele utfallsrommet må være lik 1. Uttrykket må skrives som en grenseverdi, som konvergerer mot 1 når x går mot uendelig:

$$C(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x p(x) dx = 1 \quad (2.23)$$

Figur 2.3 viser forholdet mellom PDF-funksjonen og CDF-funksjonen til en Gauss-fordelt stokastisk prosess.



Figur 2.3 PDF og CDF til en Gauss-fordelt stokastisk prosess

2.2.2 Stasjonære og homogene prosesser

Stokastiske prosesser kan deles inn i to hovedgrupper; stasjonære og ikke-stasjonære prosesser. En stokastisk prosess er stasjonær hvis dens stokastiske egenskaper ikke endres med tid [3]. Det innebærer at sannsynlighetsfordelingene til ensemblet er uavhengig av absolutt tid. Dette medfører at sannsynlighetstettheten av første orden, prosessen sin PDF-funksjon, holder seg konstant langs tidsaksen til ensemblet. For høyere ordens tettheter vil sannsynlighetsfordelingen kun avhenge av tidsdifferansen mellom observasjonene.

Det skilles mellom strengt og svakt stasjonære prosesser. En prosess er svakt stasjonær hvis det kun er sannsynlighetstettheter av første og andre orden som er invariant med absolutt tid [5]. For en strengt stasjonær prosess vil også høyere ordens sannsynlighetstettheter være uavhengig av absolutt tid.

$$1. \text{ orden: } p(x, t) = p(x, t + \tau) \quad (2.24)$$

$$2. \text{ orden: } p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau) \quad (2.25)$$

Hvis en prosess sin sannsynlighetsfordeling av første og annen orden er ikke endrer seg med tid, innebærer det at prosessen sin forventede verdi og varians holder seg konstant i løpet av en tidsserie:

$$E[x(t_k)] = E[x(t_i)] \quad , \quad t_k \neq t_i \quad (2.26)$$

$$E\left[\left(x(t_k) - E[x(t_k)]\right)^2\right] = E\left[\left(x(t_i) - E[x(t_i)]\right)^2\right] \quad , \quad t_k \neq t_i \quad (2.27)$$

Når en senere skal benytte teknikker for å estimere en prosess sitt standardavvik, er det en forutsetning at gjennomsnittet til prosessen er lik 0. Selv om prosessen sitt gjennomsnitt ikke er lik 0, er standardavviket kun et mål på spredningen til måledataene, og er uavhengig av prosessens faktiske gjennomsnittsverdi. Det er derfor mulig å beregne forventet verdi og gjennomsnittsverdi hver for seg. For en prosess med gjennomsnitt lik 0, kan variansen og standardavviket uttrykkes ved [5]:

$$\text{Var}(X) = E[x^2] \quad (2.28)$$

$$\sigma = \sqrt{E[x^2]} \quad (2.29)$$

En stokastisk prosess sies å være homogen hvis den underliggende sannsynlighetsfordelingen er lik for alle punkter i rommet [3]. Det medfører at sannsynlighetsfordelingen av første orden holder seg konstant, mens andre og høyere ordens sannsynlighetsfordelinger kun avhenger av avstanden mellom to punkter, og er uavhengig av punktene sine faktiske koordinater. Det er vanlig å anta at stokastiske prosesser innenfor dynamikken er homogene prosesser [5], på lik linje som at de er stasjonære.

2.2.3 Ergodiske prosesser

Anta at den forventede verdien til ensemblet for et vilkårlig tidspunkt, $t = t_k$, er lik den forventede verdien til én realisasjon, $x^{(i)}(t)$, ved det samme tidspunktet:

$$E[x(t_k)] = E[x^{(i)}(t_k)] \quad (2.30)$$

Hvis uttrykket i (2.30) er tilfredsstillende og prosessen i tillegg er stasjonær, sies prosessen å være ergodisk [5]. Det gir følgende relasjon:

$$E[x(t)] = E[x(t_k)] = E[x^{(i)}(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(i)}(t) dt \quad (2.31)$$

Uttrykkene over viser at, for en ergodisk prosess, er det tilstrekkelig å vurdere én realisasjon når en skal bestemme de statistiske egenskapene til en stokastisk prosess, forutsatt at tidsserien har en tilstrekkelig varighet. Ettersom ergodiske prosesser er stasjonære, vil det samme gjelde for autokorrelasjonsfunksjonen, som blir nærmere beskrevet i delkapittel 2.3.1:

$$E[x(t_k)x(t_s)] = E[x^{(i)}(t_k)x^{(i)}(t_s)] \quad (2.32)$$

Innenfor dynamikken er det normalt å anta at stokastiske prosesser er ergodiske [5].

2.2.4 Fouriertransformasjon

En sentral del av teorien bak analyse av stokastiske prosesser i dynamikken tar utgangspunkt i teori om Fourierrekker. Konseptet med Fourier-analyser baserer seg på at en vilkårlig periodisk funksjon kan beskrives som en uendelig sum av sinus- og cosinusfunksjoner med økende frekvens [5]. Sagt på en annen måte: En kan beskrive funksjonen ved å summere de harmoniske komponentene den består av. På kompleks form blir dette slik formlene under viser [4]:

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} x_j e^{i\omega_j t} \quad (2.33)$$

$$x_j = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_j t} dt \quad (2.34)$$

En utfordring som oppstår når teori om Fourierrekker skal anvendes på stokastiske prosesser, er at stokastiske prosesser ikke er periodiske. Det viser seg imidlertid at det er mulig å finne en løsning på dette problemet ved å la perioden gå mot uendelig. Det første steget går ut på å innføre følgende funksjon:

$$x(\omega_j) = x_j T, \quad \omega_j = j\omega, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (2.35)$$

Dette forholdet er logisk da en ser at x_j integreres over tid, med ω som den eneste frie variabelen. Ved å snu på (2.35) oppstår følgende relasjon:

$$x_j = \frac{x(\omega_j)}{T} \quad (2.36)$$

der:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (2.37)$$

Ved å substituere (2.36) og (2.37) inn i (2.33) kommer en frem til følgende uttrykk:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} x(\omega_j) e^{i\omega_j t} \Delta\omega \quad (2.38)$$

Hvis en nå lar $T \rightarrow \infty$ vil $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, $\omega_j \rightarrow \omega$ og summeringstegnet blir forvandlet til et integral:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.39)$$

Den diskrete Fourierrekken er nå blitt forvandlet til et Fourierintegral [5], og det er ikke lenger en forutsetning at $x(t)$ må være periodisk.

Neste steg blir å finne uttrykket for $x(\omega)$. Tar en for seg uttrykket for x_j fra (2.34), er det mulig å gjøre følgende operasjon uten å endre betydningen:

$$x_j = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_j t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega_j t} dt \quad (2.40)$$

Lar så $T \rightarrow \infty$ og substituerer inn (2.36) for x_j , og får:

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.41)$$

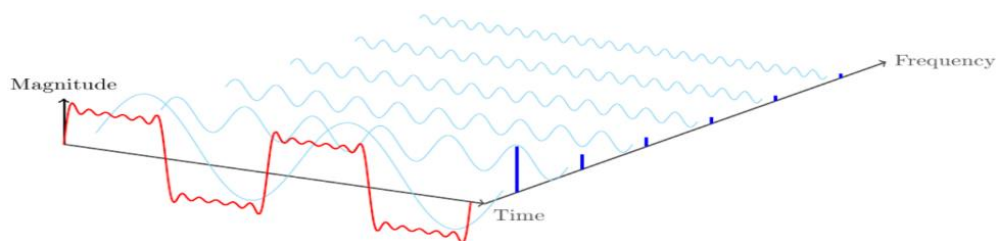
Resultatet er to uttrykk som kalles for et Fouriertransformasjonspar. Det spiller ingen rolle hvilket av uttrykkene som er multiplisert med $1/2\pi$, så lenge ett av de er det. Det er vanlig å sette $1/2\pi$ foran uttrykket for den direkte Fouriertransformasjonen, og man ender derfor opp med følgende uttrykk:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.42)$$

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.43)$$

Det første uttrykket, som transformerer fra frekvensdomenet til tidsdomenet, kalles for den inverse Fouriertransformasjonen. Det andre uttrykket, som transformerer motsatt vei, kalles for direkte Fouriertransformasjon.

Figur 2.4 på neste side viser forholdet mellom tids- og frekvensdomenet til en vilkårlig funksjon. Ut ifra figuren er det mulig å se hvordan responsen i tidsplanet, ved et tidspunkt, t , finnes ved å summere amplitudene fra hver frekvens i det aktuelle tidspunktet. Ved å studere frekvensplanet er det derfor mulig å finne ut av hvilke frekvenser som bidrar til responsen i tidsplanet, og hvor mye de ulike frekvensene bidrar.



Figur 2.4 Forholdet mellom tids- og frekvensdomenet

2.3 Stokastiske prosesser i frekvensdomenet

2.3.1 Autokorrelasjon og autospekter

En utfordring med Fouriertransformasjonsparet presentert i forrige delkapittel, er at $x(t)$ i prinsippet vil foregå i det uendelige. Fra et teoretisk perspektiv vil derfor ikke uttrykket i (2.44) være tilfredsstillende, og integralene i (2.42) og (2.43) vil følgelig ikke konvergere [5].

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (2.44)$$

Det viser seg derimot at en kan få indirekte informasjon om frekvensinnholdet til prosessen gjennom autokorrelasjonsfunksjonen til $x(t)$ [5]:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (2.45)$$

Autokorrelasjonsfunksjonen beskriver hvor høyt korrelert en stokastisk prosess er med seg selv, separert med en tid, τ . Etersom antagelsen om stasjonære prosesser ligger til grunn, er det kun tidsdifferansen mellom målepunktene som er av betydning for verdien til $R_{xx}(\tau)$. Forutsatt at prosessen har gjennomsnittsverdi lik 0, må $R_{xx}(\tau \rightarrow \infty) = 0$, og (2.45) oppfyller derfor kravet om konvergens, ettersom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xx}(\tau)| < \infty \quad (2.46)$$

Fouriertransformasjonen til $R_{xx}(\tau)$ er $S_{xx}(\omega)$, og kalles for spektraltettheten til $x(t)$:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.47)$$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.48)$$

Et spesielt tilfelle for $R_{xx}(\tau)$ oppstår når $\tau = 0$:

$$R_{xx}(\tau = 0) = E[x(t)^2] \quad (2.49)$$

Ettersom gjennomsnittet er lik 0, vil verdien til prosessen sin autokorrelasjonsfunksjon være lik prosessen sin varians når tidsdifferansen mellom to observasjoner er lik 0. Videre gir dette følgende forhold:

$$E[x(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.50)$$

2.3.2 Forholdet mellom last og repons i frekvensdomenet

Responen til et strukturelt system utsatt for tilfeldige vibrasjoner vil være en stokastisk prosess i seg selv. Hvis $x(t)$ beskriver en stokastisk last, og $y(t)$ representerer responen til et system utsatt for $x(t)$, gjelder følgende ut ifra bevegelsesligningen [5]:

$$y(t) = H(\omega)x(t) \quad (2.51)$$

Hvor $H(\omega)$ er frekvensresponsfunksjonen, uttrykt som:

$$H(\omega) = (-\omega^2 m + i\omega c + k)^{-1} \quad (2.52)$$

Forholdet mellom last og respons for en stokastisk prosess er med andre ord det samme for et system utsatt for en deterministisk, dynamisk lastfunksjon. Forholdet mellom last og respons i frekvensdomenet kan uttrykkes på tilsvarende vis, som blir beskrevet nærmere i delkapittel 2.4.3.

$$y(\omega) = H(\omega)x(\omega) \quad (2.53)$$

2.3.3 Responsspekter

Autospekteret til en prosess viser hvor høy varians de ulike frekvensene har. En høy varians medfører et høyt standardavvik som tilsier at den gjennomsnittlige avstanden fra prosessen sitt gjennomsnitt er høy. Som (2.50) fra delkapittel 2.3.1 viser, kan den totale variansen til en

stokastisk prosess bestemmes ved å summere variansen til hver frekvens. Et system kan ikke vibrere i to frekvenser samtidig, og variansen er derfor addativ [5]. Det medfører følgende relasjon:

$$S_{yy}(\omega)\Delta\omega = E[y(\omega)y(\omega)^*], \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T \rightarrow \infty \quad (2.54)$$

hvor $y(\omega)^*$ er forstått som den komplekskonjugerte av $y(\omega)$ [3].

Uttrykket i ligning (2.54) kan skrives om på følgende måte:

$$S_{yy}(\omega) = \frac{E[y(\omega)y(\omega)^*]}{\Delta\omega} \quad (2.55)$$

Ved å så substituere (2.53) inn i (2.55) kan autospekteret til et SDOF-system uttrykkes som en funksjon av autospekteret til lasten som virker på systemet og frekvensresponsfunksjonen:

$$S_{yy}(\omega) = \frac{H(\omega)x(\omega)H(\omega)^*x(\omega)^*}{\Delta\omega} \quad (2.56)$$

Ved å benytte ligning (2.55) for lastspekteret oppstår det endelige uttrykket:

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (2.57)$$

Autospekteret til en prosess vil alltid være en reell funksjon ettersom den imaginære delen forsvinner når $\tau = 0$.

2.3.4 Krysskorrelasjon og krysspekter

På tilsvarende måte som for autokorrelasjonsfunksjonen for én prosess, er det mulig å uttrykke korrelasjonen mellom to ulike stokastiske prosesser [5]:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] \quad (2.58)$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)] \quad (2.59)$$

Ettersom prosessene er antatt å være stasjonære er det mulig å skrive om ligning (2.58) og (2.59):

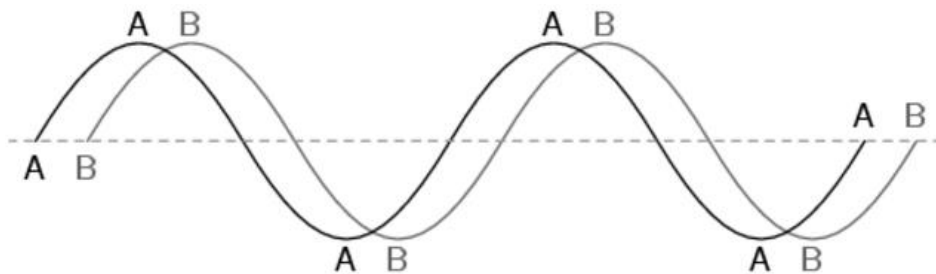
$$R_{xy} = E[x(t-\tau)y(t)] = R_{yx}(-\tau) \quad (2.60)$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t-\tau)x(t)] = R_{xy}(-\tau) \quad (2.61)$$

I motsetning til autokorrelasjonsfunksjonen, er krysskorrelasjonsfunksjonen generelt asymmetrisk om y-aksen:

$$R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau) \quad (2.62)$$

Ettersom de involverte prosessene er ulike, vil det generelt være en faseforskjell mellom $x(t)$ og $y(t)$. Korrelasjonen mellom de to prosessene vil derfor være på sitt maksimale når tidsdifferansen, τ , er lik faseforskjellen mellom de to stokastiske prosessene. Figur 2.5 viser to prosesser med ulik fase. Hvis figuren er avbildet i tidsdomenet vil faseforskjellen i tid være avstanden mellom punkt A og B langs den horisontale akse. I frekvensdomenet vil faseforskjellen være representert som en vinkel, θ , i radianer [3].



Figur 2.5 Faseforskjell i tidsdomenet

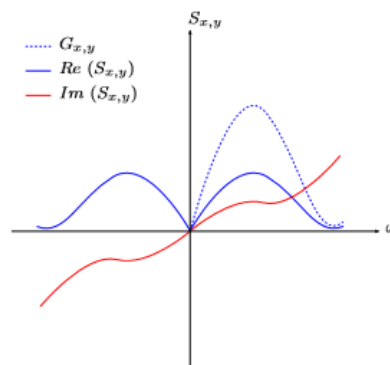
Forholdet mellom krysskorrelasjonsfunksjonen og krysspektraltettheten til to prosesser er det samme som forholdet mellom autokorrelasjonen og spektraltettheten til én prosess [5]:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.63)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.64)$$

Som i tilfellet med autospekteret, er det en forutsetning at gjennomsnittsverdiene til de involverte prosessene er justert lik 0 for å sikre konvergens i (2.63) og (2.64). I motsetning til autokorrelasjonen vil krysspekteret generelt være en kompleks funksjon, som en konsekvens av faseforskjellen mellom de to prosessene. Ved å benytte Eulers formel [4] kan den reelle og imaginære delen av separeres. Den reelle delen vil være en like funksjon som beskriver kovariansen ved ulike frekvenser når de vibrerer i fase. Den imaginære delen vil være en odde funksjon som beskriver variansen til frekvensene når de vibrerer fullstendig ut av fase, med en fasevinkel på 90 grader. Prinsippet er illustrert i Figur 2.6, som også viser det ensidige, reelle spekteret, hvor:

$$G_{xy}(\omega) = 2S_{xy}(\omega) \quad (2.65)$$



Figur 2.6 Reell og imaginær del av frekvensspekteret

2.3.5 Koherens

Koherensspekteret beskriver hvor korrelerte to prosesser er for en gitt frekvens på en skala fra 0 til 1. Koherens lik 0 betyr at variablene er fullstendig ukorrelerte, mens en koherens lik 1 betyr at prosessene er fullstendig korrelerte for den gitte frekvensen. Koherensspekteret skiller ikke mellom negativ og positiv korrelasjon, og kan uttrykkes på følgende vis [3]:

$$Coh_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}, \quad 0 \leq Coh_{xy}(\omega) \leq 1 \quad (2.66)$$

Hvor modulspekteret er gitt som:

$$|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{(\text{Re}[S_{xy}(\omega)])^2 + (-\text{Im}[S_{xy}(\omega)])^2} \quad (2.67)$$

2.3.6 Spektraltetthet for systemer av flere frihetsgrader

For et system bestående av flere frihetsgrader vil det eksistere ett autospekter for hver frihetsgrad, i tillegg til krysspektre mellom de ulike frihetsgradene. Prinsippet er illustrert i matrisene under, hvor $S_{pp}(\omega)$ og $S_{xx}(\omega)$ er spektraltetthetsmatrisene til henholdsvis last og respons. Videre representerer $H(\omega)$ systemets frekvensresponsmatrise. Matrisene representerer et vilkårlig MDOF-system med n antall frihetsgrader, hvor uttrykket for responspektret kan uttrykkes på følgende vis [5]:

$$[S_{xx}(\omega)] = [H(\omega)][S_{pp}(\omega)][H(\omega)]^H \quad (2.68)$$

hvor $[H(\omega)]^H$ står for den komplekskonjugerte og transponerte av $[H(\omega)]$.

$$S_{xx}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{x_1x_1}(\omega) & S_{x_1x_2}(\omega) & \cdots & S_{x_1x_n}(\omega) \\ S_{x_2x_1}(\omega) & S_{x_2x_2}(\omega) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{x_nx_1}(\omega) & \cdots & \cdots & S_{x_nx_n}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$S_{pp}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{p_1p_1}(\omega) & S_{p_1p_2}(\omega) & \cdots & S_{p_1p_n}(\omega) \\ S_{p_2p_1}(\omega) & S_{p_2p_2}(\omega) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{p_np_1}(\omega) & \cdots & \cdots & S_{p_np_n}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{p_1x_1}(\omega) & H_{p_1x_2}(\omega) & \cdots & H_{p_1x_n}(\omega) \\ H_{p_2x_1}(\omega) & H_{p_2x_2}(\omega) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H_{p_nx_1}(\omega) & \cdots & \cdots & H_{p_nx_n}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

2.3.7 Havbølgenes spektraltetthet i flere dimensjoner

I de foregående delkapitlene ble det beskrevet hvordan energien i stokastiske prosesser er fordelt utover et intervall med frekvenser. For havbølger viser det seg at bølgeenergien i ett spesifikt punkt i rommet også har en fordeling med hensyn på retning. Denne fordelingen omtales på engelsk som «Directional spreading», og beskriver følgelig hvordan energien til bølgene fordeler seg i ulike retninger [6].

Når en foretar dynamiske analyser i frekvensdomenet, er det normal praksis å benytte standardiserte spektre for å estimere spektraltettheten til den stokastiske lastfunksjonen. Spektrene omtalt i denne rapporten er endimensjonale spektre for havbølger. Det endimensjonale spekteret fordeler den totale energien i havbølgene utover et intervall med frekvenser, men forteller ikke hvordan denne energien er fordelt utover de ulike retningene. En må derfor multiplisere det endimensjonale lastspekteret, $S_{\eta}(\omega)$, med en retningsfordelingsfunksjon, $D(\theta)$ [6]:

$$S_{\eta}(\omega, \theta) = S_{\eta}(\omega)D(\theta) \quad (2.72)$$

Hvor retningsfordelingsfunksjonen generelt også er avhengig av frekvenser, men som kan tilnærmes gjennom følgende uttrykk [7]:

$$D(\theta, \omega) \approx D(\theta) = C \cos^n(\theta - \theta_0) \quad (2.73)$$

Hvor θ_0 representerer bølgenes sin gjennomsnittsretning, n er en parameter som definerer variansen i radianer og C en normaliseringsfaktor. Introduksjonen av $D(\theta)$ forutsetter at den totale energien er bevart [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\theta} S_{\eta}(\omega) D(\theta) d\theta d\omega \quad (2.74)$$

Hvor det kommer frem at:

$$\int_{\theta} D(\theta) d\theta = 1 \quad (2.75)$$

Spektraltettheten vil variere med retning, men ikke nødvendigvis posisjon. Antagelsen om homogene prosesser gjelder, slik at:

$$S_{n_t n_t}(\theta, \omega) = S_{n_r n_r}(\theta, \omega) \quad (2.76)$$

For to vilkårlige punkter i rommet, t og r . Kryssspektrene mellom de respektive punktene i rommet kan nå uttrykkes som [6]:

$$S_{n_t n_r}(\theta, \omega) = S_\eta(\omega) \int_\theta D(\theta) \exp\left(-i \frac{|\omega| \omega}{g} (\Delta x \sin \theta + \Delta y \cos \theta)\right) d\theta \quad (2.77)$$

Hvor $S_\eta(\omega)$ representerer det endimensjonale spekteret i bølgenes gjennomsnittsretning, Δx og Δy beskriver avstanden mellom de to punktene i det horisontalplanet, hvor hovedretningen har en orientering på 90 grader; $\theta_0 = \pi/2$.

Til slutt kan spektraltetthetsmatrisen til lasten bestemmes av følgende uttrykk:

$$[S_p(\omega)] = [F(\omega)][S_\eta(\omega)] \quad (2.78)$$

Hvor det er forstått at $[S_\eta(\omega)]$ består av komponenter som er konstruert på tilsvarende vis som i uttrykk (2.77), og $[F(\omega)]$ er den hydrodynamiske overføringsfunksjonen [3].

2.3.8 Standardiserte lastspektre for havbølger

Som nevnt i forrige delkapittel er det vanlig å benytte standardiserte, endimensjonale lastspektre for å estimere spektraltettheten til havbølger. Spektrene presentert i denne rapporten er empiriske, og er estimert på bakgrunn av teori presentert tidligere i kapittelet.

2.3.9 Pierson-Moskowitz-spekteret

Et mye benyttet spekter for dyphavsbølger er Pierson-Moskowitz-spekteret [6]. Spekteret baserer seg på ideen om at hvis en konstant vindhastighet virker over et stort område over lang tid, vil det etter en stund oppstå likevekt mellom bølgene og vinden. Det ensidige spekteret baserer seg derfor på prinsippet om en fullt utviklet sjø, og kan uttrykkes som [9]:

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left(-\beta \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right) \quad (2.79)$$

Hvor $\alpha = 8.1 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.74$ og $\omega_0 = g/U_{19.5}$. $U_{19.5}$ representerer vindhastigheten ved en høyde på 19.5 meter over havet og g er gravitasjonen. Spekteret sitt toppunkt, det vil si frekvensen med mest energi, kan finnes ved å løse:

$$\frac{dS(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (2.80)$$

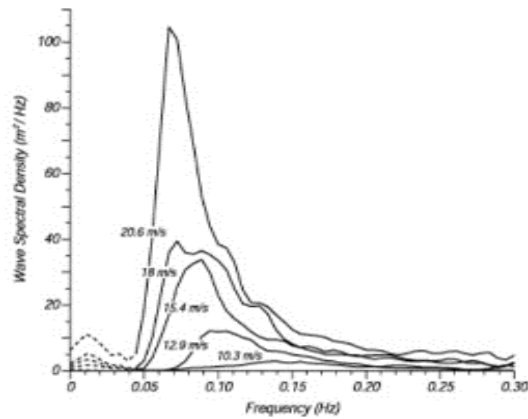
Som gir:

$$\omega_{peak} = \frac{0.877 g}{U_{19.5}} \quad (2.81)$$

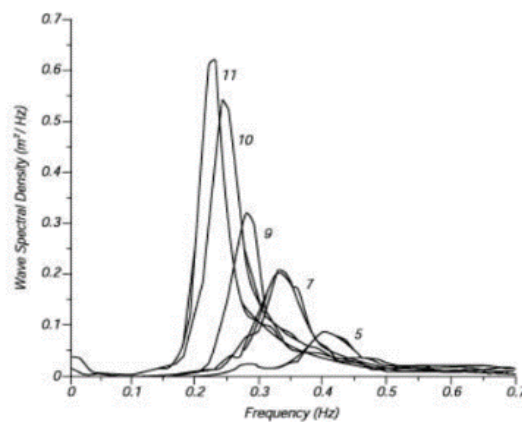
Videre kan hastigheten til bølgene i ω_{peak} kalkuleres:

$$c_p = \frac{g}{\omega_{peak}} = 1.14 U_{19.5} \quad (2.82)$$

Det viser seg altså at bølger med frekvens, ω_{peak} , har en hastighet som er 14 % raskere enn vinden ved en høyde på 19.5 meter. Det virker merkelig, ettersom konseptet baserer seg på en fullt utviklet sjø hvor bølgene er skapt av vinden. Det er derfor blitt utviklet en ny versjon av Pierson-Moskowitz-spekteret, som tar hensyn til denne utfordringen: JONSWAP-spekteret.



Figur 2.7 Pierson-Moskowitz-spekteret



Figur 2.8 JONSWAP-spekteret

2.3.10 JONSWAP-spekteret

JONSWAP-spekteret er en videreutvikling av Pierson-Moskowitz-spekteret [3], og baserer seg på antagelsen om at bølgespekteret aldri blir fullt utviklet. Årsaken er at bølgene vil fortsette å utvikle seg selv gjennom ikke-lineære interaksjoner med hverandre. JONSWAP-spekteret er nesten identisk med Pierson-Moskowitz-spekteret, hvor den viktigste forskjellen er den eksponentielle faktoren, γ^r . Denne faktoren tar hensyn til de ikke-lineære bølge-mot-bølge interaksjonene, og fører til følgende uttrykk for JONSWAP-spekteret [3]:

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left(-\beta \left(\frac{\omega_{peak}}{\omega}\right)^4\right) \gamma^r \quad (2.83)$$

$$r = \exp\left(\frac{-(\omega - \omega_{peak})^2}{2\sigma^2 \omega_{peak}^2}\right) \quad (2.84)$$

Hvor α er en konstant som relaterer vindhastigheten til den horisontale avstanden med sjø hvor vinden forårsaker bølger («fetch length»):

$$\alpha = 0.076 \left(\frac{U_{10}^2}{Fg}\right)^{0.22} \quad (2.85)$$

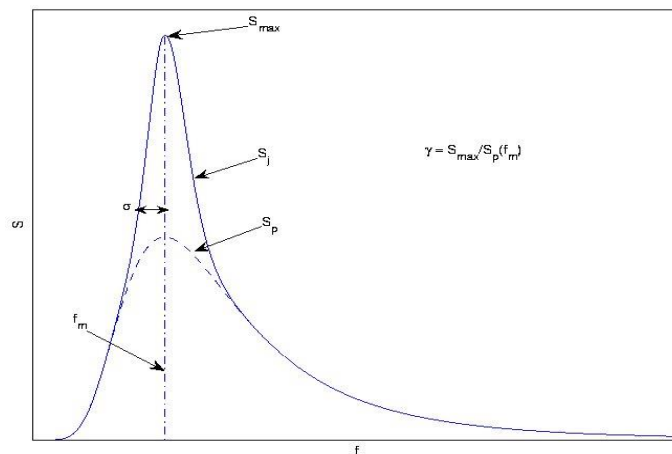
Hvor F angir «fetch»-lengden. Videre er σ og ω_{peak} definert som:

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 & \omega \leq \omega_{peak} \\ 0.09 & \omega \geq \omega_{peak} \end{cases} \quad (2.86)$$

$$\omega_{peak} = 22 \left(\frac{g^2}{U_{10} F}\right)^{1/3} \quad (2.87)$$

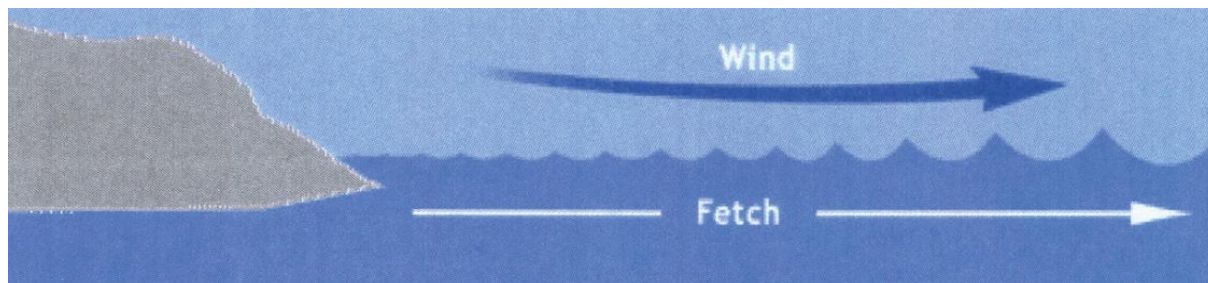
γ er en spredningsparameter som definerer forholdet mellom verdien til ω_{peak} for henholdsvis JONSWAP-spekteret og Pierson-Moskowitz-spekteret, som illustrert i Figur 2.9. Videre viser figuren at de mest dominerende frekvensene blir tilført en større andel av den totale energien til havbølgene for JONSWAP-spekteret. I figuren er frekvensaksen i Hertz, slik at:

$$f_m = f_{peak} = \frac{\omega_{peak}}{2\pi} \quad (2.88)$$



Figur 2.9 Forholdet mellom ω_{peak} for JONSWAP og Pierson-Moskowitz

Figur 2.10 illustrerer hvordan JONSWAP-spekteret skiller seg ut fra Pierson-Moskowitz-spekteret ved at havbølgene fortsetter å vokse når «fetch»-lengden øker.



Figur 2.10 Utvikling av bølger med avstanden fra land

Det er JONSWAP-spekteret som er benyttet til å estimere spektraltettheten til havbølgene i denne rapporten. Verdiene som er benyttet er angitt i tabellen under:

Tabell 2.1 Verdier for JONSWAP-spekteret

Parameter	Verdi
α	1.5
β	1.25
γ	3.3
σ	0.07
ω_{peak}	1.57

2.4 Hydrodynamikk

2.4.1 Hydrodynamiske og hydrostatiske effekter

Anta at et strukturelt, flytende system er i interaksjon med en væske gjennom et flytende element. Hvis den eneste lasten som virker på systemet er kraften fra havbølgene på det flytende elementet, kan bevegelsesligningen til det strukturelle systemet uttrykkes på følgende vis [6]:

$$[M_s]\{\ddot{u}(t)\} + [C_s]\{\dot{u}(t)\} + [K_s]\{u(t)\} = \{p_h(t)\} \quad (2.89)$$

der $[M_s]$, $[C_s]$ og $[K_s]$ er det strukturelle systemet sin henholdsvis masse-, demping- og stivhetsmatrise. I (2.89) er ikke det flytende elementet en del av det strukturelle systemet og $\{p_h(t)\}$ er den totale hydrodynamiske lastvektoren som virker på det strukturelle systemet fra det flytende elementet. Kraften som virker på systemet avhenger av eksitasjonskraften fra bølger på det flytende elementet, men også det flytende elementet sin forskyvning, hastighet og akselerasjon.

Videre kan bevegelsesligningen i (2.89) uttrykkes som:

$$[M_{tot}(\omega)]\{\ddot{u}(t)\} + [C_{tot}(\omega)]\{\dot{u}(t)\} + [K_{tot}]\{u(t)\} = \{p_b(t)\} \quad (2.90)$$

Hvor det flytende elementet nå er en del av et nytt system, utsatt for en bølgelast, $\{p_b(t)\}$.

Som en konsekvens av interaksjonen mellom det flytende elementet og væsken, vil det totale systemet sin masse- og dempingsmatrise avhenge av forskyvningen og hastigheten bølgerne påfører systemet. Etersom dette er tidsavhengige parametere, gir det opphav til en tidsavhengig masse og demping. Det kan forklares ved at systemet fortrenger væske når det blir utsatt for forskyvninger, som vil gi systemet en ekstra treghet. Hvor stor denne tregheten er, avhenger enkelt sagt av størrelsen til forskyvingene, og det samme prinsippet gjelder for dempingen. Hvis massen og dempingen varierer med tid, innebærer det at de også vil variere med systemets svingfrekvenser. Dette prinsippet gir opphavet til den hydrodynamiske massen- og dempingen som vist i tabellen under på neste side. I tillegg vil interaksjonen med væsken påføre systemet en ekstra stivhet. Denne hydrostatiske stivheten er konstant, som tabellen viser.

Tabell 2.2 Inndeling av hydrostatiske og hydrodynamiske parametere

	Stivhet	Dempning	Masse
Frekvensavhengig		$[C_{h,\omega}(\omega)]$	$[M_{h,\omega}(\omega)]$
Frekvensuavhengig	$[K_{h,0}]$		$[M_{h,0}]$
Totalt	$[K_h]$	$[C_h(\omega)]$	$[M_h(\omega)]$

Det totale systemet fra (2.90) sin masse-, demping- og stivhetsmatriser kan da settes opp:

$$[M(\omega)] = [M_s] + [M_h(\omega)] \quad (2.91)$$

$$[C(\omega)] = [C_s] + [C_h(\omega)] \quad (2.92)$$

$$[K] = [K_s] + [K_h] \quad (2.93)$$

2.4.2 Hydrodynamisk last

Den totale hydrodynamiske lastvektoren kan ifølge [6] formelt uttrykkes som følgende:

$$\{P_h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [m_h(t-\tau)] \{\ddot{u}(t)\} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} [c_h(t-\tau)] \{\dot{u}(t)\} d\tau + [K_h] \{u(t)\} + \{P_b(t)\} \quad (2.94)$$

De tre første uttrykkene på høyresiden av ligningen beskriver interaksjonen mellom væske og flytende elementer. Her er $[m_h(t)]$ og $[c_h(t)]$ tidsdomene-fremstillinger av den hydrodynamiske massen og dempingen, og $\{P_b(t)\}$ representerer bølgenes eksitasjonskrefter. Tidsdomenefremstillingen av tilleggsmassen relaterer til den frekvensavhengige hydrodynamiske massen $[M_h(\omega)]$ på følgende vis:

$$[m_h(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [M_h(\omega)] e^{i\omega t} d\omega \quad (2.95)$$

og relasjonen for dempingen settes opp på samme måte:

$$[c_h(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_h(\omega)] e^{i\omega t} d\omega \quad (2.96)$$

For dypt vann og moderate bølgehøyder kan vi ifølge [6] anta at bølgelasten fremstiller en homogen, stokastisk, Gaussisk prosess. Lastprosessen kan da bli uttrykt ved bruk av en generalisert harmonisk oppdeling:

$$\{P(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \{dZ_p(\omega)\} \quad (2.97)$$

hvor $\{Z_p(\omega)\}$ er den spektrale prosessen som samsvarer med bølgelastvektoren.

2.4.3 Bevegelsesligningen i frekvensdomenet

I følge Langen og Sigbjørnsson [3] kan forskyvningsfunksjon transformeres til frekvensdomenet på tilsvarende måte som for lastfunksjonen, gjennom følgende Riemann-Stieltjes-integral:

$$\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\{Z_u(\omega)\} \quad (2.98)$$

Riemann-Stieltjes-integralet er en generalisert form av det mer kjente Riemann-integralet [3]. $\{Z_u(\omega)\}$ er den spektrale prosessen som samsvarer med forskyvningsvektoren, hvor følgende relasjon gjelder:

$$d\{Z_u(\omega)\} = \{u(\omega)\} d\omega \quad (2.99)$$

Ved å differensiere (2.98) med hensyn på tid, kan Fouriertransformasjonen for hastighet og akselerasjon bestemmes:

$$\{\dot{u}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} d\{Z_u(\omega)\} \quad (2.100)$$

$$\{\ddot{u}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 e^{i\omega t} d\{Z_u(\omega)\} \quad (2.101)$$

Følgelig kan bevegelsesligningen til et system uttrykkes i frekvensdomenet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(-\omega^2 [M(\omega)] + i\omega [C(\omega)] + [K] \right) e^{i\omega t} d\{Z_u(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\{Z_p(\omega)\} \quad (2.102)$$

Videre kan uttrykket forkortes:

$$\left(-\omega^2 [M(\omega)] + i\omega [C(\omega)] + [K] \right) d\{Z_u(\omega)\} = d\{Z_p(\omega)\} \quad (2.103)$$

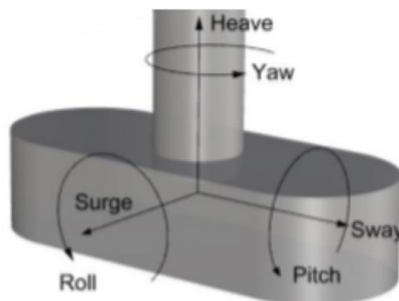
Hvor det viktige forholdet mellom belastning og respons til slutt er introdusert gjennom frekvensresponsmatrisen:

$$d\{Z_u(\omega)\} = [H(\omega)] d\{Z_p(\omega)\} \quad (2.104)$$

3 Modelling

3.1 Pongtonger

Brua er støttet opp av 18 identiske flytende pongtonger av lettvekt betong som ikke forankres i bunn. Systemets totale masse i statisk tilstand medfører en vannlinje 10 meter fra bunnplata, og det fortrenses 18 000 tonn vann per pongtong. Figur 3.1 viser pongtongenes lokale koordinatsystem med navn for translasjoner og rotasjoner i alle retninger.



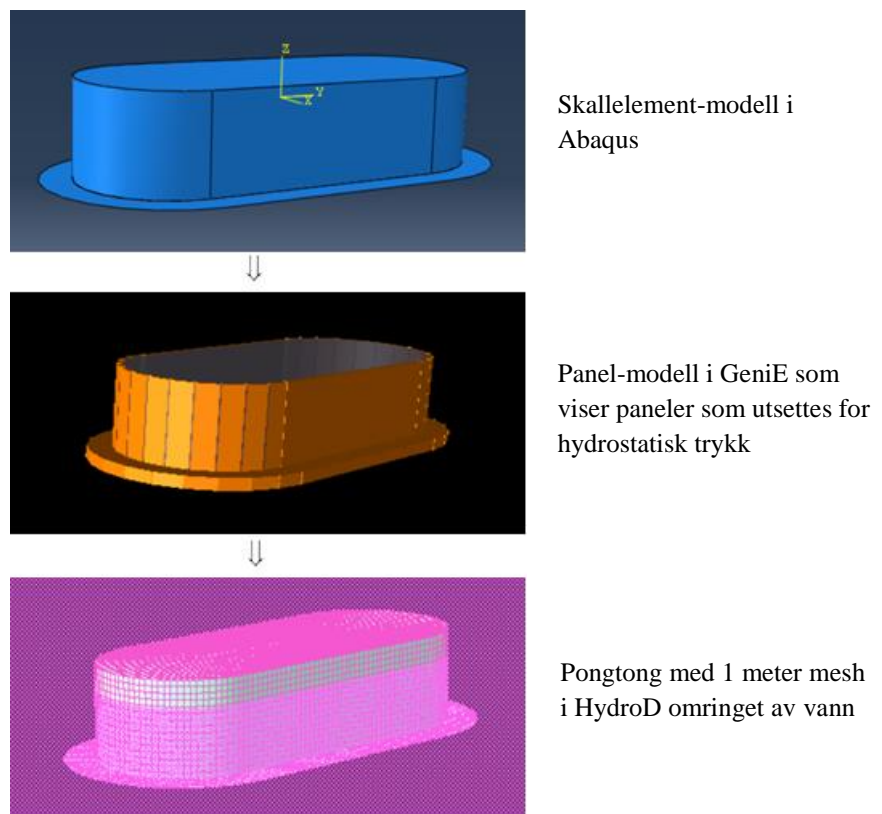
Figur 3.1 Pongtongenes lokale koordinatsystem

Prosjektgruppen har utført en designoptimalisering, og kommet frem til pongtonger formet som avlange sylindere av 68x28x14 meter. En nøkkelfaktor ved designoptimaliseringen er å unngå å utløse kritiske egenmoder for bøyning om svak akse. Translasjon av pongtongene i x- og y-retning blir da de viktigste faktorene å ta hensyn til, der tilstrekkelig hydrodynamisk tilleggsmasse i disse retningene er avgjørende. Pongtongenes langside er derfor plassert parallelt med den globale y-aksen. En 5 meter bred flens er lagt til i bunnen av pongtongene for å øke den hydrodynamiske tilleggsmassen i z-retning, og dermed øke oppdriftens egenperiode. Pongtongenes geometri og overflateareal er tilpasset slik at oppdriftens egenperiode skal ligge mellom egenperiodene til vinddrevne bølger, og havbølger eller dønninger.

For å utføre beregninger av den flytende konstruksjonen er systemet delt inn i et vått domene som beskriver interaksjonen mellom vann og pongtonger, og et tørt domene som beskriver bruas stålramme. For å knytte sammen domenene er det brukt en MATLAB-kode utviklet av Knut Andreas Kvåle som vil bli omtalt senere i kapittelet.

3.1.1 DNV GeniE

Pongtongenes geometri er i utgangspunktet modellert ved bruk av skallelementer i ABAQUS. Den lokale koordinataksen korrelerer med den globale, og origo er lagt på høyde med vannoverflaten. GENIE fungerer her som et bindeledd mellom geometrien konstruert i ABAQUS, og den hydrodynamiske analysen utført i DNV HYDROD WADAM som vist i Figur 3.2. Skallelement-modellen lagres som en SAT-fil, og importeres til GENIE. Her blir modellen omformet til en panel-modell bestående av 3780 paneler, da HYDROD bruker panelmetoden til å beregne væskestrømmen [10]. Panelmetoden baserer seg på superposisjon av lineære potensialfunksjoner som etterligner den virkelige væskestrømmen, og kan med dette estimere viktige aerodynamiske egenskaper for vilkårlige fysiske overflater. Metoden bruker en forenklet tilnærming, og er derfor velegnet for implementering i numerisk programvare.



Figur 3.2 Modelleringsprosedyre av pongtonger

3.1.2 DNV HydroD Wadam

For å beregne pongtongenes bidrag til det totale systemet utføres en hydrodynamisk analyse av pongtongene i HYDROD. HYDROD WADAM er et analyseverktøy som benytter seg av Morison-ligningen og første- og andreordens potensial-teori for beregninger av bølgelast, og for de innkommende bølger benyttes såkalt «Airy wave theory» [10]. I programmet benyttes et innlagt verktøy kalt «Wadam-wizard» til å beregne de hydrostatiske og hydrodynamiske bidragene til pongtongene.

HYDROD WADAM beregner de hydrostatiske og hydrodynamiske bidragene til pongtongenes interaksjon med vannet. Siden ABAQUS ikke støtter tilordning av frekvensavhengige parametere er det laget en MATLAB-kode som kun henter de hydrostatiske bidragene. Koden henter informasjon fra analysen og tilordner pongtongenes masse- og stivhetsparametere til et en-nodet element med seks frihetsgrader, som implementeres i den globale ABAQUS-modellen før egenfrekvens-analysen utføres. Grunnet manglende masse fra den overliggende brua blir pongtongens stivhet om x- og y-aksen unøyaktig, og derfor lagt til manuelt i MATLAB med verdiene gitt i [11]. Disse verdiene er gitt i forhold til vannoverflaten, eller $z = 0$ i det globale systemet, og det er derfor valgt å legge pongtongenes origo og de korresponderende nodene i ABAQUS i samme punkt. Det er viktige å tilse at de utgående parameterne fra WADAM-analysen også beregnes ut ifra det samme punktet.

De hydrodynamiske bidragene blir lagt til senere når det totale egenverdiproblemet skal løses, som blir beskrevet i kapittel 3.3.

3.2 Bruforbindelsen

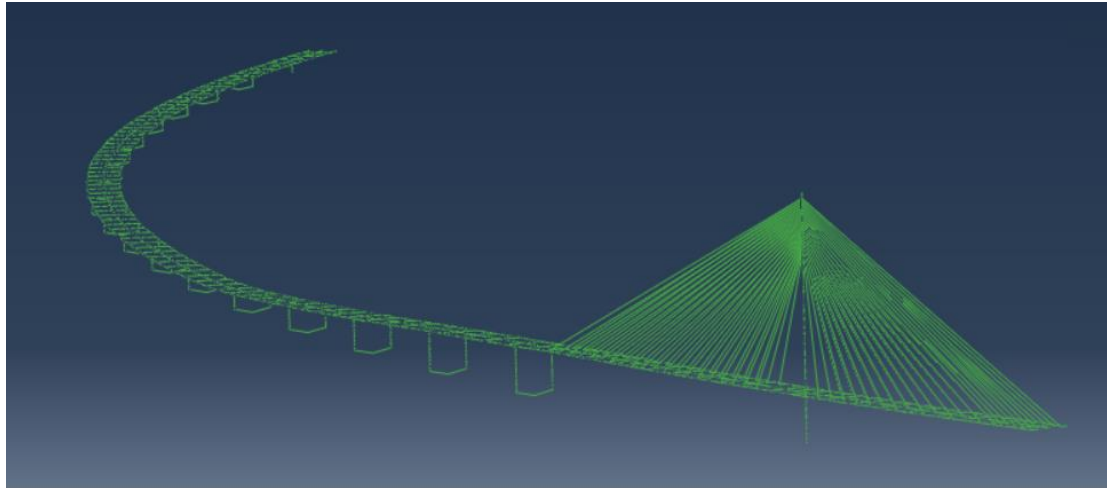
3.2.1 Utgangspunkt for modelleringen

Ettersom brua ikke eksisterer i dag, har det vært krevende å få tak i informasjon og tegninger som viser bruas tiltenkte geometri. Av det forfatterne kjenner til, eksisterer det ingen tidligere Abaqus-modeller av det respektive brukonseptet. Som utgangspunkt for modelleringen, er det benyttet en input-fil som tar for seg en beregningsmodell av brua i FEM-programmene, ORCAFLEX og NOVAFRAME [11]. I disse modellene er brubanen modellert som én ekvivalent bjelke, mens det i dette arbeidet er valgt å modellere broen sin tiltenkte reelle geometri, med tre bærebjelker knyttet sammen med tverrbjelker.

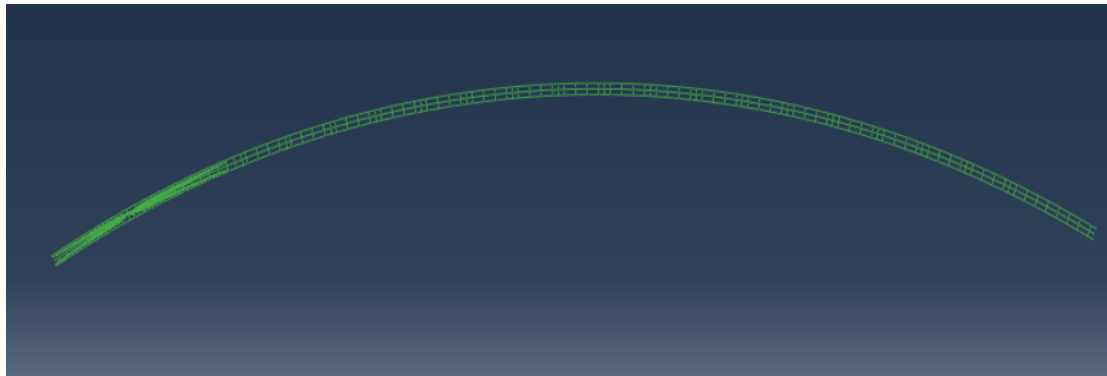
3.2.2 Modellering

Som nevnt i forrige avsnitt er bruforbindelsen sin reelle geometri gjengitt i modellen ved bruk av tre brukasser med tverrbjelker. Årsaken er først og fremst at en reell geometri vil føre til en mer reell fordeling av masser, stivheter og spenninger, hvilket igjen vil føre til en mer pålitelig beregningsmodell for det aktuelle brukonseptet. I motsetning til en singel-bjelkemodell vil stivhet mot hvelving være inkludert, og den reelle geometrien vil da være gunstig for å oppnå korrekte torsjonsmoder. I tillegg vil tverrbjelkene overføre store krefter mellom hovedbærebjelkene. Disse kreftene vil fungere som horisontale punktlaster på bærebjelkene, som vil føre til lokale momenter og skjærkrefter. En modell med én ekvivalent bjelke vil ikke inkludere slike lokale krefter.

ABAQUS-modellen sin helhet er illustrert i Figur 3.3 og Figur 3.4 på neste side. Som nevnt er det ikke laget noen tidligere modell for denne brua i den aktuelle programvaren. På bakgrunn av dette er valgt å legge fokus på å få modellen mest mulig nøyaktig, da den legger grunnlaget for videre forskning. Modellen er med dette blitt svært omfattende, og består totalt av 39 580 elementer 118 920 noder. Modelleringsarbeidet er utført i programmet WORDPAD ved å generere en input-fil som videre importeres til ABAQUS.



Figur 3.3 Modellen vist i grensesnittet i ABAQUS før brua blir oppspent



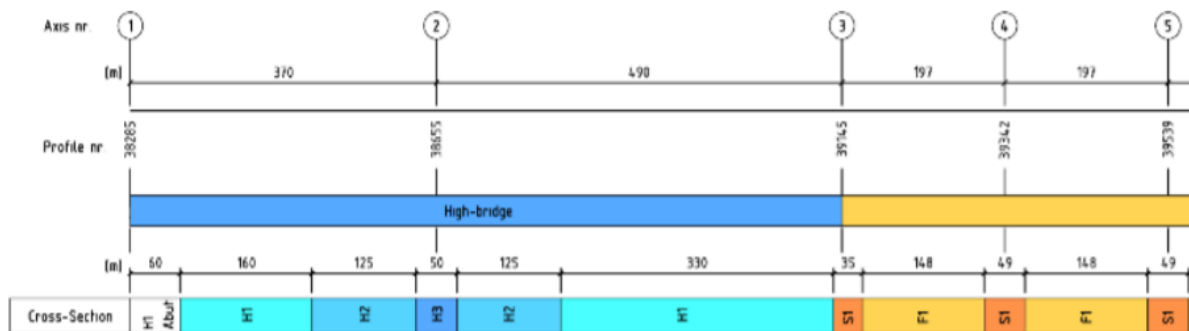
Figur 3.4 Abaqus-modellen sett ovenfra

Samtlige elementer i modellen er generaliserte bjelkeelementer. Fordelen med slike elementer er at det er mulig å modellere egenskapene til komplekse tverrsnitt uten å måtte inkludere tverrsnittets faktiske geometri. Dette foregår ved at en tilegner de generaliserte bjelkeelementene tverrsnittsparemetere og masse lik de reelle tverrsnittene, uten å definere tverrsnittenes geometri. Først ble den midterste brukassen, for fotgjengere, etablert. Denne danner utgangspunktet for plasseringen til de resterende objektene i modellen, og er gitt de samme koordinatene som den ekvivalente brubjelken i ORCAFLEX. Koordinatene til hovedbærebjelkene og tverrbjelkene er deretter beregnet ut ifra fotgjengerbjelkens koordinater. MATLAB er benyttet til å beregne koordinatene til tverrbjelkene, slik at de får en korrekt vinkel og opprettholder symmetrien i horisontalplanet.

3.2.3 Bærebjelkene

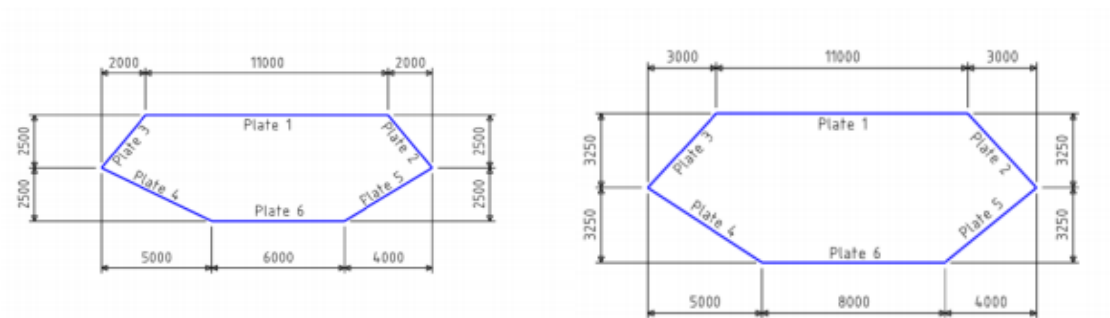
De tre brukassene er modellert med B31-elementer. Slike bjelkelementer er skjærfleksible, tredimensjonale elementer med to noder og totalt 12 frihetsgrader. Ettersom bjelkeelementene kun består av to noder, vil forskyvninger bli interpolert lineært innad i hvert element. Samtlige elementer har en lengde på 1 meter.

Bruforbindelsen sine hovedbærebjelker, består av 5 ulike tverrsnitt; to langs flytebrudelen og tre langs skråstagsbrua. De to tverrsnittene langs flytebrudelen, S1 og F1, har identisk ytre geometri, og forskjellen kommer av platetykkelsene, som er presentert i Tabell 3.1. Det samme er tilfelle for de tre tverrsnittene langs skråstagsbrua; H1, H2 og H3. Figur 3.5 viser hvordan tverrsnittene varierer langs brua. Som figuren illustrerer, er brua forankret til land de første 60 meterne. I modellen er det laget et eget sett med noder for denne delen, hvor de respektive nodene sine frihetsgrader er fastholdte mot forskyvninger og rotasjoner. Figuren viser kun de 5 første aksene, ettersom tverrsnittene langs den resterende delen av bruforbindelsen er lik som mellom akse 4 og 5.



Figur 3.5 Inndeling av tverrsnitt langs brubanen

Figur 3.6 på neste side viser geometrien til hovedbærebjelkene, for henholdsvis skråstagsbrua og flytebrua. Tabell 3.1 angir den ekvivalente platetykkelsen til hvert av de ulike tverrsnittene. Den ekvivalente platetykkelsen tar hensyn til langsgående stivere som er festet til hver plate. Verdiene er hentet fra [2].



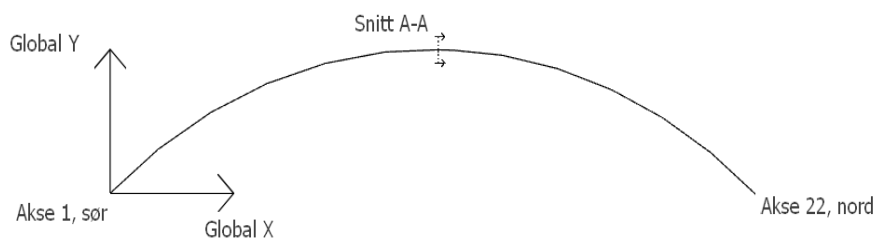
Figur 3.6 Tverrsnittene til hovedbærebjelkene for flytebrudelen og skråstagsdelen [2]

Tabell 3.1 Ekvivalente platetykkelser for bruas tverrsnitt

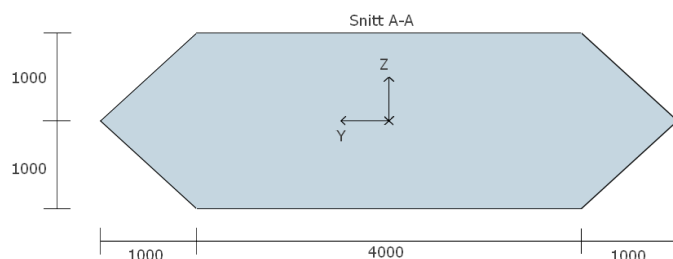
Plate nr.	Platetykkelse (mm)					
	H1	H2	H3	S1	F1	Fotgjenger
1	25	37	46	36	25	20
2	20	23	29	20	20	13
3	20	28	35	36	25	13
4	20	28	35	36	25	13
5	20	23	29	20	20	13
6	20	37	46	36	25	20

Tverrsnittene er tegnet i programmet SKYCIV. Samtlige tverrsnittsparemetere er hentet ut fra programmet og transformert til brubjelkenes lokale koordinatsystemer i ABAQUS. Tverrsnittene til de to hovedbærebjelkene er asymmetriske om z-aksen, som medfører to versjoner av hver tverrsnittstype. Dette er nærmere diskutert i neste delkapittel.

Figur 3.7 på neste side viser bruas globale koordinatsystem, sett ovenfra. Koordinatsystemet følger høyrehåndsregelen slik at positiv z-akse peker ut av papiret i figuren. Det er kun fotgjengerbjelken som er vist i illustrasjonen. Figur 3.7 og Figur 3.8 viser hvordan brubjelkene sine lokale koordinatsystem er orientert i forhold til det globale, og det fremkommer at det lokale aksesystemet til brubjelkene er parallellt med det globale aksesystemet i snitt A-A.



Figur 3.7 Forenklet fremstilling av brua sett ovenfra



Figur 3.8 Brukassene sitt lokale koordinatsystem

3.2.4 Ikke-strukturelle komponenter

I henhold til [2] er den totale ikke-strukturelle vekten til brubanen 57 kN/m langs hele bruforbindelsen. Det tilsvarer en masse på 5810 kg/m , som er fordelt utover de tre brubjelkene. Ettersom [2] modellerer hele brubanen som én ekvivalent bjelke, er massen til asfalt og rekkverk bestemt på bakgrunn av massen til tilsvarende komponenter fra Hardangerbrua [12]. Figur 3.9 viser hvordan fordelingen er utført for samtlige tverrsnitt. Den totale massen til brubanen per meter består dermed av stålkassene sin masse, inkludert stivere, og den ikke-strukturelle massen.



Figur 3.9 Fordeling av ikke-strukturell masse

De ikke-strukturelle komponentene bidrar til brubanen sine massetregghetsmomenter. For å bestemme disse parameterne er hver av brukassene modellert i ABAQUS med asfaltdekke og rekkverk. Massetregghetsmomentene er så hentet ut gjennom kommandoen «Tools → Query → Mass properties», og videre transformert til bjelkenes lokale koordinatsystemer i modellen.

Under er et utdrag fra input-filen fra ABAQUS, som viser hvordan H3 er modellert. Alle tverrsnittene langs brubanen er modellert på tilsvarende vis.

```
*BEAM GENERAL SECTION, ELSET=INDRE_H3, SECTION=GENERAL, DENSITY=0
1.315, 5.762, 0.2339, 24.070, 15.178
0,1,0
21e10, 8.08e10
*BEAM ADDED INERTIA
13665.30, 0.03, 0.402, 0, 55719.09, 219562.45, 1127.48
**
*BEAM GENERAL SECTION, ELSET=YTRE_H3, SECTION=GENERAL, DENSITY=0
1.315, 5.762, -0.2339, 24.070, 15.178
0,1,0
21e10, 8.08e10
*BEAM ADDED INERTIA
13665.30, -0.03, 0.402, 0, 55719.09, 219572.45, -1127.48
```

Som utdraget viser, er det modellert to versjoner av hvert tverrsnitt for hovedbærebjelkene, én for vestsiden (yttersving) og én for østsiden (innersving). Tverrsnittene i øst og vest skal være orientert på en slik måte at plate 2 og 5 til enhver tid peker inn mot fotgjengerbjelken. Dette fører til at arealmomentet mot biaksial bøyning får motsatt fortegn for bjelkene langs øst- og vestsiden av bruforbindelsen. I forhold til hvordan de lokale koordinatsystemene er orientert, er det bjelkene langs vestsiden som får negative verdier. Dette vil også føre til at de biaksiale massetregghetsmomentene får motsatte verdier i øst og vest. Det er ikke gitt at det biaksiale arealmomentet og massetregghetsmomentet for ett tverrsnitt har samme fortegn, da det vil avhenge av eksentrisiteten mellom arealsenteret og tyngdepunktet til tverrsnittet.

Som utdraget viser, er all masse inkludert gjennom kommandoen «*Beam added inertia». På grunn av den ikke-strukturelle massen oppstår det en eksentrisitet mellom tyngdepunktet og arealsenteret til selve brubjelkene. Denne eksentrisiteten er representert ved verdi nummer 2 og 3 under «*Beam added inertia». Den første verdien angir massen sin eksentrisitet i lokal y-retning, og den andre verdien er eksentrisiteten i z-retning.

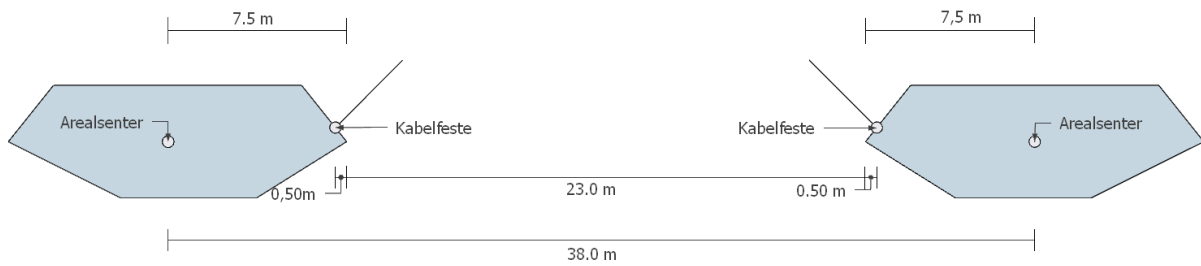
I tillegg til langsgående stivere, som det er tatt hensyn til gjennom ekvivalente platetykkelser, består hovedbærebjelkene av vertikale stivere. I [2] er det kun oppgitt at denne massen er ekvivalent med en jevnt fordelt masse på 1800 kg/m. Hver hovedbærebjelke er derfor gitt en

ekstra masse på 900 kg/m som tar hensyn til disse stiverne. I modellen er de respektive massene plassert i brubjelkene sine tyngdepunkter, hvor ikke-strukturell masse er inkludert.

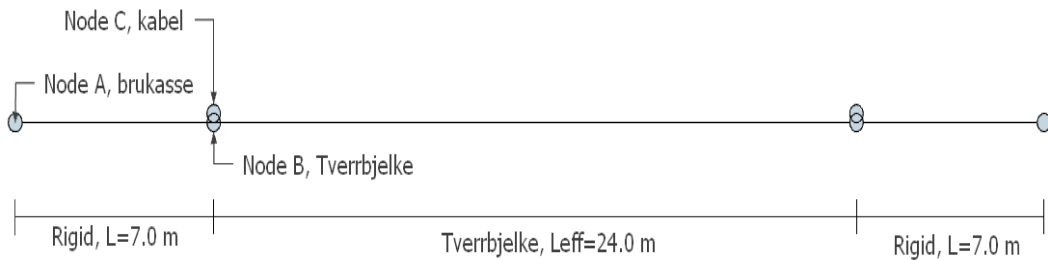
3.2.5 Forbindelser og kinematiske restriksjoner

Brubanen sin bredde varierer fra 55 meter langs flytebrudelen til 53 meter langs skråstagsbrua, men avstanden mellom hovedbærebjelkene sine arealsentre forholder seg tilnærmet konstant, på 38 meter, langs hele bruforbindelsen. Bjelkeelementene sine noder går gjennom arealsentrene, som medfører at hele brua er modellert med konstant bredde. Dette er gunstig for å unngå geometriske diskontinuiteter som kan svekke modellens grad av pålitelighet. Selv om hovedbærebjelkene er asymmetriske om den lokale z-aksen, varierer platetykkelsene på en måte som gjør det rimelig å anta at arealsenteret til samtlige tverrsnitt er plassert midt mellom tverrsnittene sine ytterpunkter i bredden. De ulike platetykkelsene og tverrsnittstypene vil føre til små interne forskjeller, som er neglisjerbare.

En utfordring ved å benytte bjelkeelementer til å representere brukassene, er å modellere korrekt lengde på tverrbjelkene samtidig som avstanden mellom arealsentrene til hovedbærebjelkene er reell. Figur 3.10 illustrerer de to hovedbærebjelkene et sted langs skråstagsbrua. Avstanden mellom de innerste punktene til brukassene er 23 meter, mens avstanden mellom arealsentrene som nevnt er 38 meter. Tverrstiverne er i ABAQUS-modellen er gitt en effektiv lengde på 24 meter, som vist i Figur 3.11 på neste side. Avstanden mellom brubjelkenodene og den ytterste tverrbjelkenoden er så festet sammen gjennom en «Multi-Point Constraint» [13], herav omtalt som MPC. Den aktuelle MPC-koblingen er en ikke-lineær MPC av typen «BEAM», som gjør at samtlige av slave-noden sine frihetsgrader blir låst til å følge frihetsgradene til master-noden. Med andre ord vil avstanden mellom den ytterste noden til tverrbjelken og bjelkenoden forbli konstant. Den stive forbindelsen representerer halvparten av bredden til brukassen, hvor bjelkenoden (node A i figur) er master-node og tverrbjelkenoden (node B) slave-node. Det samme prinsippet er benyttet for flytebrudelen av bruforbindelsen, og mellom hovedbærebjelkene og søylene – for å simulere brukassene sin høyde.



Figur 3.10 Tverrsnitt av hovedbærebjelkene i skråstagsbrua



Figur 3.11 Ekvivalent tverrsnitt til figur 3.10 i ABAQUS-modellen

Figur 3.10 viser også hvordan kablene er festet til brukassen. Kablene er festet til brukassene med en horisontal senteravstand på 24 meter. Kommandoen «TIE» er benyttet for å tvinge frihetsgradene til den ytterste kabelnoden til å følge bevegelsene til den ytterste tverrbjelkenoden. Det medfører at kabelnoden (node C i figur) indirekte er en slave-node til brukassenoden. I tilfeller hvor kabelfestet ikke sammenfaller med posisjonen til en tverrbjelke, danner brukassenoden og kabelnoden en direkte MPC-BEAM-forbindelse seg imellom.

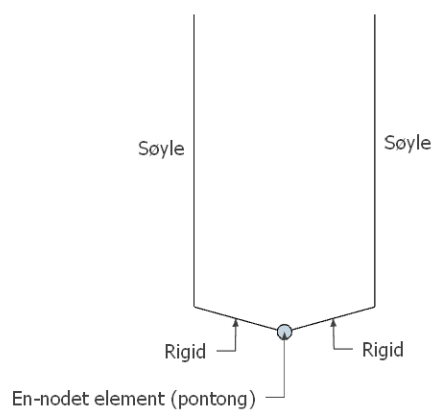
Brutårnet, som befinner seg mellom fotgjengerbjelken og den østlige hovedbærebjelken ved akse 2, er koblet direkte til de respektive bjelkene gjennom en MPC av typen «LINK». Dette er en ikke-lineær MPC som sørger for at avstanden mellom bjelkenodene og tårnnoden forholder seg konstant. Rotasjons-frihetsgradene er derimot ikke involvert i en slik kinematisk kobling, som medfører at de involverte objektene kan rotere fritt i forhold til hverandre. Konstruksjonsobjektene vil derfor ikke overføre momenter mellom hverandre. Det er med andre ord avstanden, D , mellom nodene som er konstant, og ikke nødvendigvis avstanden i y -retning, som vist i ligningen under:

$$D = \sqrt{(x_{bru} - x_{tårn})^2 + (y_{bru} - y_{tårn})^2 + (z_{bru} - z_{tårn})^2} \quad (3.1)$$

hvor x-, y- og z-verdiene representerer koordinatene i det globale koordinatsystemet til de respektive nodene som inngår i forbindelsen.

Årsaken til den horisontale koblingen mellom brutårnet og brubanen er å redusere de store momentene som vil kunne oppstå ved akse 1, som en følge av store horisontale krefter fra bølger og vind. En slik kobling vil derfor påføre tårnet store skjærkrefter, men vil også øke kapasiteten mot knekking.

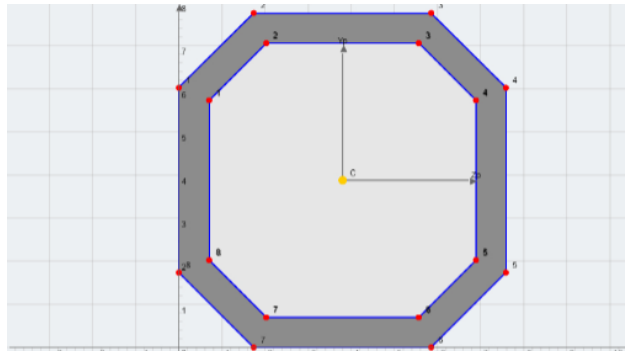
Pongtongene er representert i modellen ved en-node-elementer som beskrevet i delkapittel 3.1.2. Disse elementene er koblet til bunnen av søylene vist i Figur 3.12.



Figur 3.12 Pongtongene sin tilkobling til søylene

3.2.6 Brutårnet

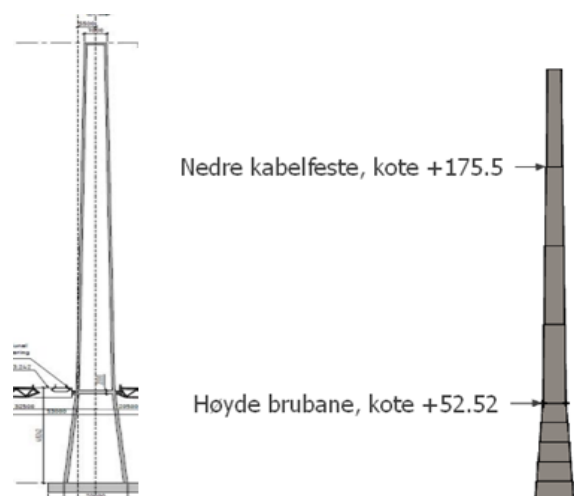
Skråstagsbrua består som nevnt av to spenn, et sidespenn i sør på 310 meter og et hovedspenn på 490 meter. Brutårnet er et singel-tårn bestående av én betongsøyle. Geometrien til tverrsnittet er hult og formet som et oktagon, som vist av Figur 3.13. Tverrsnittets lengde, i nord-sør retning, avtar lineært fra 12 meter i bunn til 7 meter i toppen. Bredden avtar lineært i to steg; først fra 20 meter til 12 meter ved kote +52.52, hvor tårnet er festet til brubjelkene, og videre til 7 meter i toppen. Veggtykkelsen varierer også lineært fra 1.2 meter i bunn til 1.0 meter ved kote +52.52. Deretter avtar den lineært på ny til 0.8 meter ved kote +175.5 meter, ved nedre kabelfeste. Fra nedre kabelfeste holdes veggtykkelsen konstant til toppen.



Figur 3.13 Tverrsnitt fra SKYCIV der lengden og bredden er lik

På grunn av den komplekse geometrien til tårntverrsnittet, ble det besluttet å dele tårnet inn i 9 ulike tverrsnitt, med konstante tverrsnittsparemetere. ABAQUS tilbyr en løsning på bjelker som varier lineært ved bruk av «Tapered beam», men denne funksjonen fungerer dårlig for tverrsnitt som avtar ulikt i lengden, bredden og vegtgykkelsen. Denne funksjonen er dessuten bedre egnet for bjelker hvor forholdet mellom arealmomentene i topp og bunn er betraktelig lavere. I dette tilfellet er arealmomentet om sterk akse i bunnen nesten 36 ganger større enn i toppen.

Figur 3.14 viser tårnets reelle geometri, og hvordan inndelingen til de 9 ulike tverrsnittene er gjennomført. Inndelingen er utført på et vis som gjør at tverrsnittsparemetere sammenfaller midt i hver seksjon med konstante tverrsnitt, og det er i disse områdene tverrsnittsparemetere for hver seksjon er beregnet. Følgelig vil det totale volumet og massen til tårnene i Figur 3.14 være like.



Figur 3.14 Illustrasjon og diskretisering av tårnet

Et viktig formål med inndelingen er å sørge for at diskontinuitetene i stivhet ikke blir for store. Som en kan se fra figuren, befinner 5 av de 9 tverrsnittene seg under kote +52.52, ettersom arealet avtar langt hurtigere i dette området. Hvis stivheten mellom to seksjoner er veldig høy, vil det kunne oppstå «ill conditioning» [13] i områder hvor to elementer fra to ulike tverrsnittsseksjoner deler en felles node. Fenomenet oppstår som en konsekvens av at bidraget til den lokale stivhetsmatrisen, relativt sett, er så lav fra det ene elementet, at den numeriske presisjonen til analyseprogrammet ikke er tilstrekkelig når den skal summere bidragene fra hvert element til stivhetsmatrisen.

På bakgrunn av de nevnte diskontinuitetene er det valgt å modellere tårnet med B32-elementer, som vil gi mer nøyaktige resultater sammenliknet B31-elementer. Dette er elementer med 3 noder og totalt 18 frihetsgrader, og interpolerer følgelig forskyvinger kvadratisk. Tårnet er totalt diskretisert til i overkant av 200 elementer.

3.2.7 Kablene

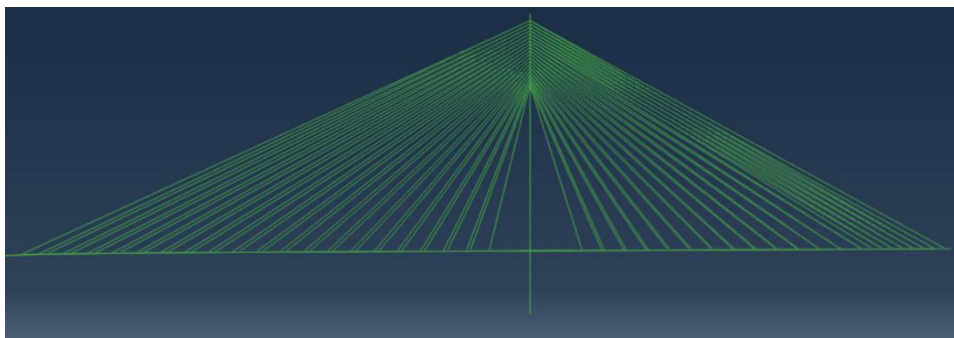
Skråstagsbrua holdes oppe av 4x20 bærekabler, som er festet til hovedbærebjelkene og tårnet. Halvparten av kablene bærer hovedspennet, mens den resterende halvparten bærer sidespennet sør for tårnet. I tårnet er kablene festet fra og med kote +175.5, med 2.5 meter senteravstand i vertikal retning opp til det øverste kabelfestet ved kote +223. I hvert festepunkt møtes 4 ulike kabler, to fra hovedspennet og to fra sidespennet. Langs brudekket er senteravstanden mellom hver kabel i lengderetning 20 meter, med unntak av de siste 6 kablene i sidespennet, hvor den innbyrdes avstanden er 10 meter. Det er benyttet «TIE» til å feste de øverste kabelnodene til tårnet sine noder. Når kablene spennes opp vil det oppstå store krefter i tårnet. For å sikre en mest mulig stabil og nøyaktig løsning, er elementene i tårnet orientert slik at kabelfestene sammenfaller med tårnnoder som deles av to ulike elementer. De lengste kablene befinner seg i hovedspennet, og har en lengde på 460 meter.

Kablene er modellert med B31-elementer, hvor hvert element har en lengde på 1.0 meter. Samtlige kabler har ulike tverrsnittsdimensjoner [2]. Kablene er gitt en bøyestivhet lik 1 % av bøyestivheten til en kompakt sirkel med tilsvarende tverrsnittsareal som de respektive kablene.

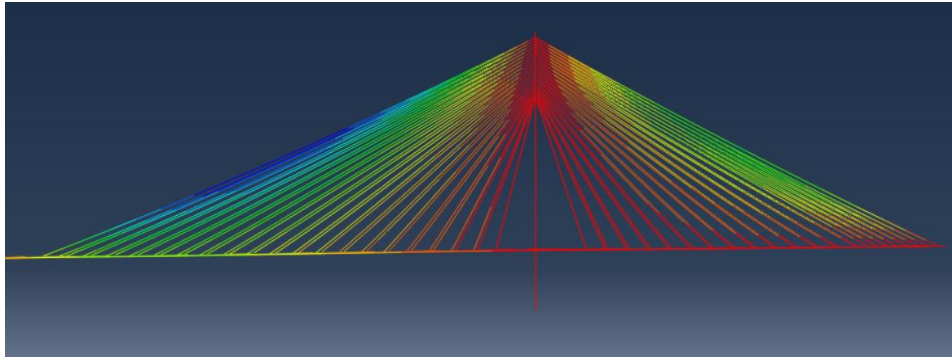
Bøystivheten er med andre ord svært lav, og en viktig del av modelleringen har vært å påføre kablene en korrekt geometrisk stivhet, i henhold til [2]. Brua er følgelig oppspent gjennom tre geometrisk ikke-lineære steg («steps») i ABAQUS:

1. Ved initiell konfigurasjon har kablene svært lav bøystivhet og ingen geometrisk stivhet. Analysen vil derfor ikke konvergere hvis egenvekten til kablene påføres direkte. I det første steget er kablene påført en geometrisk stivhet ved å aktivere egenvekten til brukassene langs skråstagsbrua. Den geometriske stivheten kommer som en konsekvens av at kablene blir utsatt for strekkspenninger når brukassen deformerer seg.
2. Kablene har nå fått en økt stivhet som en konsekvens av oppspenningen i det første steget, og egenvekten til kablene er nå aktivert. Løsningen konvergerer uten problemer.
3. I det tredje steget er kablene påført temperaturspenninger for å justere oppspenningskraften, slik at resultatene sammenfaller med verdiene i [2].

Figur 3.15 og Figur 3.16 viser skråstagsbrua i henholdsvis initiell konfigurasjon og oppspent tilstand. De lengste kablene i hovedspennet oppnår likevektsposisjon ved en nedbøyning på 6 meter i midten, som er markert i figur 3.16 med mørkeblått. Oppspenningskraften i kablene varierer fra 3000-7000 kN.



Figur 3.15 Kablene i initiell tilstand



Figur 3.16 Kablene i oppspent tilstand

3.3 Estimering av responspekter i Matlab

Ettersom ABAQUS ikke er i stand til å håndtere frekvensavhengige parametere, måtte det totale egenverdiproblemet løses i MATLAB. Detaljer bak utregningene er presentert i kapittel 2, og dette avsnittet tar for seg en overordnet steg-for-steg beskrivelse av prosessen for å komme frem til bruas responspekter utsatt for bølgelaster. Beskrivelsen viser oppbyggingen av MATLAB-koden utviklet av Knut Andreas Kvåle, som bygger på fremgangsmåten i [6].

Tørt domene:

Egenverdiproblemet til ABAQUS-modellen er blitt løst:

$$[M_s]\{\ddot{u}\} + [K_s]\{u\} = \{0\} \quad (3.2)$$

Pongtongenes faktiske masse og stivhet fra interaksjonen mellom pongtong og vann, er inkludert i henholdsvis $[M_s]$ og $[K_s]$. Ettersom disse parameterne er frekvens-uavhengige, kan de legges direkte inn i ABAQUS-modellen.

Som ligning (3.2) viser, ble egenverdiproblemet løst uten demping. Dempingen til systemet i ABAQUS, $[C_s]$, blir inkludert i egenverdiproblemet til det totale systemet på et senere tidspunkt. Fra ABAQUS ble det hentet ut 150 egenmoder, som danner basisvektorene for det nye, modale koordinatsystemet.

Vått domene:

Det våte domenet består av de 18 pongtongene. Ettersom de hydrostatiske parameterne er inkludert i ABAQUS-modellen, består dette systemet kun av den frekvensavhengige massen og dempingen. Samtlige pongtonger har lik geometri og er orientert parallelt med global Y-retning. Det medfører to fordeler:

1. Det er tilstrekkelig å foreta analyser fra én pontong i HydroD
2. Det lokale koordinatsystemet til pontongene er identisk med det globale koordinatsystemet til Abaqus-modellen.

Sistnevnte medfører at en kan transformere den frekvensavhengige massen og dempingen direkte inn i det modale vektorrommet:

$$[\tilde{M}_h(\omega)] = [\Phi]^T [M_h(\omega)] [\Phi] \quad (3.3)$$

$$[\tilde{C}_h(\omega)] = [\Phi]^T [C_h(\omega)] [\Phi] \quad (3.4)$$

Hvor $[\Phi]$ er forstått som den fullstendige modale matrisen til ABAQUS-modellen.

Denne oppgaven tar bare hensyn til bølgeindusert respons, og brumodellen vil derfor bare bli utsatt for last i pongtongnodene. Tillegget til det totale systemets matriser vil også komme fra de samme nodene, og vi kan dele opp systemets frihetsgrader på følgende vis:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_0\} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Der $\{u_p\}$ er frihetsgradene til alle pongtongene, og $\{u_0\}$ er de resterende frihetsgradene for resten av systemet. Dette medfører følgende struktur for den modale matrisen:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \{\phi_p\}_1 & \{\phi_p\}_2 & \cdots & \{\phi_p\}_N \\ \{\phi_0\}_1 & \{\phi_0\}_2 & \cdots & \{\phi_0\}_N \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

hvor $\begin{Bmatrix} \{\phi_p\}_j \\ \{\phi_0\}_j \end{Bmatrix}$ er den totale modale vektoren for mode j . Videre kan det hydrodynamiske massebidraget til det totale systemet skrives som:

$$[M_h] = \begin{bmatrix} [M_{pp}] & [M_{p0}] \\ [M_{0p}] & [M_{00}] \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Siden det eneste bidraget kommer fra pongtongene, kan massebidraget skrives som:

$$[M_h] = \begin{bmatrix} [M_{pp}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Den modale transformasjonen av massebidraget til pongtongene blir dermed:

$$\begin{aligned}
[\tilde{M}_h] &= [\Phi]^T [M_h] [\Phi] \\
&= \begin{bmatrix} \{\phi_p\}_1^T & \{\phi_0\}_1^T \\ \{\phi_p\}_2^T & \{\phi_0\}_2^T \\ \vdots & \vdots \\ \{\phi_p\}_N^T & \{\phi_0\}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [M_{pp}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_p\}_1 & \{\phi_p\}_2 & \cdots & \{\phi_p\}_N \\ \{\phi_0\}_1 & \{\phi_0\}_2 & \cdots & \{\phi_0\}_N \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \{\phi_p\}_1^T \\ \{\phi_p\}_2^T \\ \vdots \\ \{\phi_p\}_N^T \end{bmatrix} [M_{pp}] \begin{bmatrix} \{\phi_p\}_1 & \{\phi_p\}_2 & \cdots & \{\phi_p\}_N \end{bmatrix} \\
\Rightarrow [\tilde{M}_h] &= [\Phi_p]^T [M_h] [\Phi_p] \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Tilsvarende gjelder for demping- og lastmatrisene. Ved å innføre denne forenklingen blir den totale modale matrisen redusert til en 6×18 matrise, noe som medfører store fordeler for den numeriske beregningsmengden.

Ved å inkludere Rayleigh-demping og summere matrisene fra det våte og det tørre domenet, kan de modale matrisene til det totale systemet etableres. Rayleigh-dempingen er beskrevet i delkapittel 2.1.3 hvor følgende verdier er benyttet: $\alpha=10^{-5}$ og $\beta=3 \cdot 10^{-4}$. Disse verdiene representerer et lettdempet system.

Ettersom systemets totale ligningssystem er etablert i det modale vektorrommet, kan systemets ukoblede, modale frekvensresponsmatrise etableres:

$$[\tilde{H}] = \left(-\omega^2 [\tilde{M}(\omega)] + i\omega [\tilde{C}(\omega)] + [\tilde{K}] \right)^{-1} \tag{3.10}$$

hvor:

$$[\tilde{M}(\omega)] = [\Phi]^T [M_s] [\Phi] + [\Phi_p]^T [M_h(\omega)] [\Phi_p] \tag{3.11}$$

$$[\tilde{C}(\omega)] = [\Phi]^T (\alpha [M_s] + \beta [K_s]) [\Phi] + [\Phi_p]^T [C_h(\omega)] [\Phi_p] \tag{3.12}$$

$$[\tilde{K}] = [\Phi]^T [K_s] [\Phi] \tag{3.13}$$

Videre estimeres systemets modale lastspekter for å for å kunne beregne uttrykket for det modale responspekteret til det totale systemet utsatt for bølgekrefter:

$$\left[\tilde{S}_u(\omega) \right] = \left[\tilde{H}(\omega) \right] \left[\tilde{S}_p(\omega) \right] \left[\tilde{H}(\omega) \right]^H \quad (3.14)$$

Som beskrevet i delkapittel 2.3, ble det endimensjonale JONSWAP-spekteret benyttet til å modellere spektraltettheten til havbølgene. Lastspekteret ble følgelig multiplisert med retningsfordelingsfunksjonen i ligning (2.73) for å ta hensyn til at energifordelingen til bølgefrekvensene varierer med retningen:

$$S_\eta(\omega, \theta) = S_\eta(\omega) D(\theta) \quad (3.15)$$

Videre vil undermatrisene til den totale lastspektermatrisen finnes ved å multiplisere ligningen over med den hydrodynamiske overføringsfunksjonen på følgende vis:

$$\left[S_{p_1 p_{18}}(\omega) \right] = \int_{\theta} \{ Q_1(\omega, \theta) \} S_\eta(\omega, \theta) \{ Q_{18}(\omega, \theta) \}^H d\theta \quad (3.16)$$

Hvor matrisen over definer krysspekteret mellom pongtong nr. 1 og 18. Lasten fra havbølgene virker kun på pongtongene, og det totale lastspekteret blir som i uttrykket under:

$$\left[S_p(\omega) \right] = \begin{bmatrix} \left[S_{p_1 p_1}(\omega) \right] & \cdots & \left[S_{p_1 p_{18}}(\omega) \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[S_{p_{18} p_1}(\omega) \right] & \cdots & \left[S_{p_{18} p_{18}}(\omega) \right] \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

For å fullbyrde uttrykket i (3.14) er lastspektermatrisen transformert inn i det modale vektorrommet:

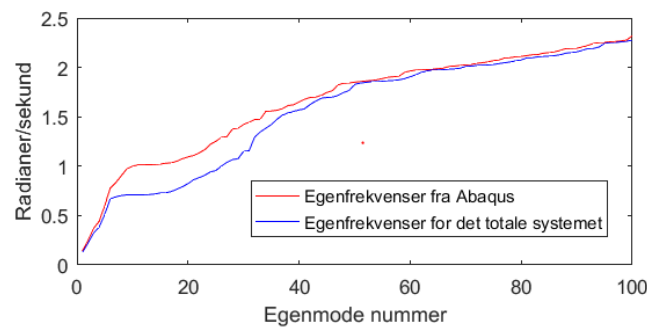
$$\left[\tilde{S}_p(\omega) \right] = \left[\Phi \right]^T \left[S_p(\omega) \right] \left[\Phi \right] \quad (3.18)$$

Til slutt beregnes responspekteret til pongtongenes fysiske frihetsgrader ved å overføre de modale verdiene tilbake til det fysiske vektorrommet:

$$\left[S_u(\omega) \right] = \left[\Phi \right]^T \left[\tilde{S}_u(\omega) \right] \left[\Phi \right] \quad (3.19)$$

4 Resultater og diskusjon

Eigenverdioproblemet til det totale systemet ble løst i MATLAB, som beskrevet i 3.3. Det ble hentet ut 150 egenmoder, som inkluderer egenfrekvenser opp til 0.50 Hz. Det ble vurdert som tilstrekkelig ettersom energien i bølgespektrene domineres av frekvenser godt under dette intervallet. Lokale kabelmoder, med lav effektiv masse og høy demping, er utelatt fra rapporten ettersom de har liten innvirkning på bruas dynamiske respons.



Figur 4.1 Sammenligning av egenfrekvenser med og uten hydrodynamiske bidrag

Figur 4.1 sammenligner de hundre første egenfrekvensene til det totale systemet med analysen fra ABAQUS, hvor demping og hydrodynamisk masse ikke er inkludert. Det er viktig å påpeke at modenummereringen mest sannsynlig blir noe endret etter at demping og hydrodynamisk masse er inkludert. Likevel er figuren nyttig for å studere tendenser på et overordnet nivå.

Resultatene er som forventet. Egenfrekvensene til bruforbindingen blir lavere etter at demping og frekvensavhengig masse er inkludert. Det kommer tydelig frem av uttrykket for den dempede egenfrekvensen for en vilkårlig egenmode, i :

$$\omega_{D,i} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_i}{\tilde{m}_i} (1 - \tilde{\xi}_i^2)}$$

Dempingen har generelt en liten innvirkning på verdien til egenfrekvensene. Den høyeste dempingsraten blant egenmodene inkludert i analysen er 11.6 %. Fra uttrykket over vil det føre til at den respektive egenfrekvensen reduseres med i underkant av 0.7 %. Det er med andre ord den frekvensavhengige massen som forårsaker de største avvikene i Figur 4.1.

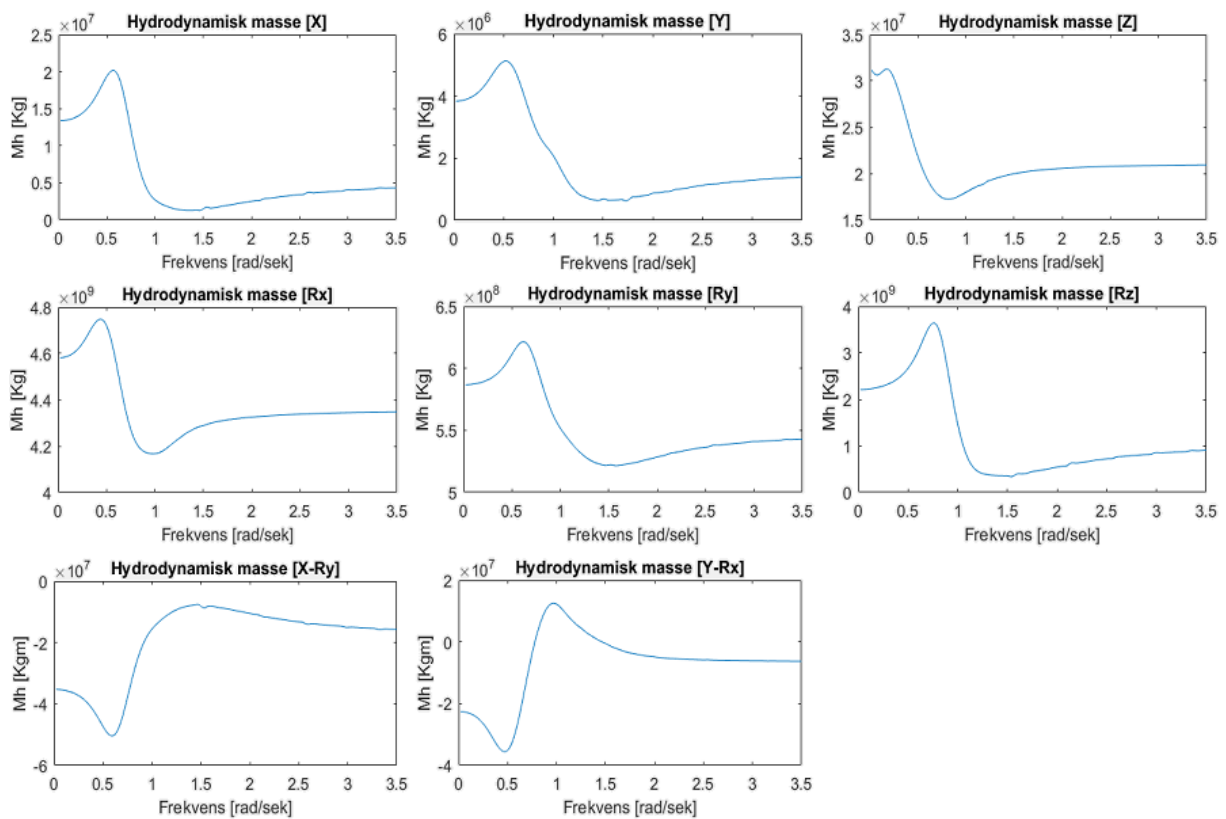
Tabell 4.1 presenterer de 50 første egenmodene og deres karakteristikker. Tabellen inkluderer moder som befinner seg under eller innenfor frekvensintervallene til bølgespektrene.

Tabell 4.1 Systemets 50 første egenmoder

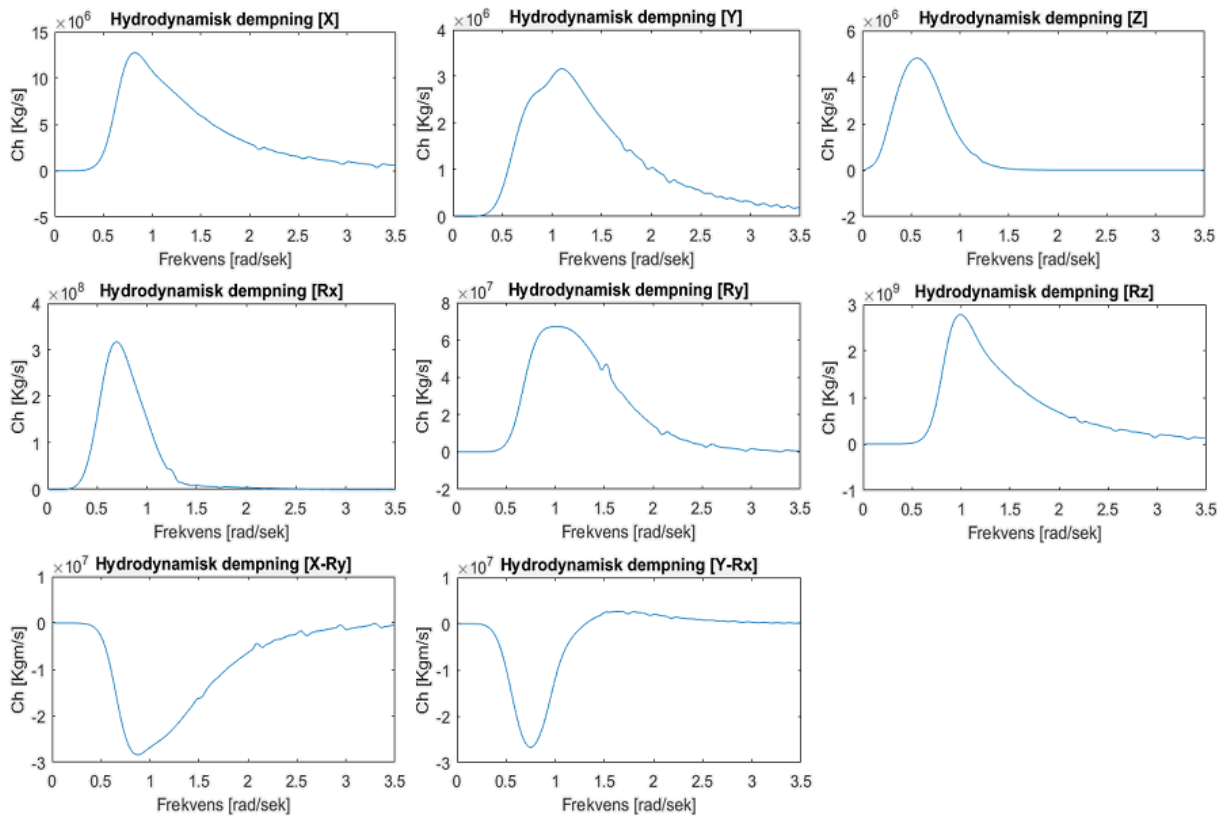
Mode	Egenfrekvens		Egenperiode s	Hovedretning	Demningsrate
	Rad/s	Hz			
1	0.1273	0.0203	49.36	Y	4.9e-05
2	0.2215	0.0353	28.37	Y	0.0003
3	0.3232	0.0514	19.44	Y	0.0023
4	0.3832	0.0610	16.40	Y	0.0072
5	0.5116	0.0814	12.28	Y	0.0273
6	0.6700	0.1066	9.38	Rx	0.0287
7	0.6894	0.1097	9.11	Rx	0.1163
8	0.7029	0.1119	8.94	Z	0.0923
9	0.7101	0.1130	8.85	Rx	0.0840
10	0.7102	0.1130	8.85	Z	0.0842
11	0.7104	0.1131	8.84	Z	0.0833
12	0.7106	0.1131	8.84	Z	0.0339
13	0.7134	0.1135	8.81	Z	0.0841
14	0.7187	0.1144	8.74	Z	0.0844
15	0.7286	0.1160	8.62	Rx	0.0654
16	0.7300	0.1162	8.61	Z	0.0857
17	0.7442	0.1184	8.44	Z	0.0848
18	0.7663	0.1220	8.20	Z	0.0795
19	0.7923	0.1261	7.93	Z	0.0732
20	0.8232	0.1310	7.63	Z	0.0679
21	0.8625	0.1373	7.28	Z	0.0613
22	0.8842	0.1407	7.11	Rx	0.0170
23	0.9081	0.1445	6.92	Z	0.0516
24	0.9407	0.1497	6.68	Rx	0.0719
25	0.9560	0.1522	6.57	Z	0.0461
26	0.9993	0.1590	6.29	Z	0.0399
27	1.0391	0.1654	6.05	Z	0.0275
28	1.0677	0.1699	5.88	Z	0.0173
29	1.0742	0.1710	5.85	Rx	0.0129
30	1.1568	0.1841	5.43	Y	0.0698
31	1.2940	0.2059	4.86	Y	0.0067
32	1.3462	0.2143	4.67	Y	0.0539
33	1.3844	0.2203	4.54	Y	0.0008
34	1.4212	0.2262	4.42	Y	0.0002
35	1.4734	0.2345	4.26	X	0.0019
36	1.5175	0.2415	4.14	Y	0.0418
37	1.5383	0.2448	4.08	X	0.0672
38	1.5541	0.2473	4.04	X	0.0003
49	1.5692	0.2497	4.00	X	0.0231
40	1.5815	0.2517	3.97	Y	0.0004
41	1.6255	0.2587	3.87	X	0.0077
42	1.6580	0.2639	3.79	X	0.0523
43	1.6894	0.2689	3.72	Y	0.0268
44	1.6950	0.2698	3.71	Y	0.0003
45	1.6998	0.2705	3.70	X	0.0003
46	1.7163	0.2732	3.66	X	0.0004
47	1.7451	0.2777	3.60	X	0.0010
48	1.7653	0.2810	3.56	Y	0.0003
49	1.8414	0.2931	3.41	Y	0.0007
50	1.8483	0.2942	3.40	Y	0.0009

Tabellen viser at frekvensintervallet med de største avvikene i Figur 4.1 er preget av egenmoder med dominerende bevegelser i z-retning. Som Figur 4.2 viser, er den hydrodynamiske massen for translasjoner i z-retning høyere enn for translasjoner i y-retning. Det skyldes at pongtongene er utstyrt med flenser som gjør at overflaten som fortrenge vann er langt større i z-retning enn i y-retning. Følgelig vil pongtongene fortrenge et større volum vann ved bevegelser i z-retningen, hvis forskyvningene er like store i begge retninger.

Figur 4.2 og Figur 4.3 viser henholdsvis den hydrodynamiske massen og dempingen for ulike retninger. I tillegg til frihetsgradene, er det inkludert koblede bevegelser med et signifikant bidrag til det totale systemets masse- og dempingsmatrise.



Figur 4.2 Frekvensavhengig hydrodynamisk masse

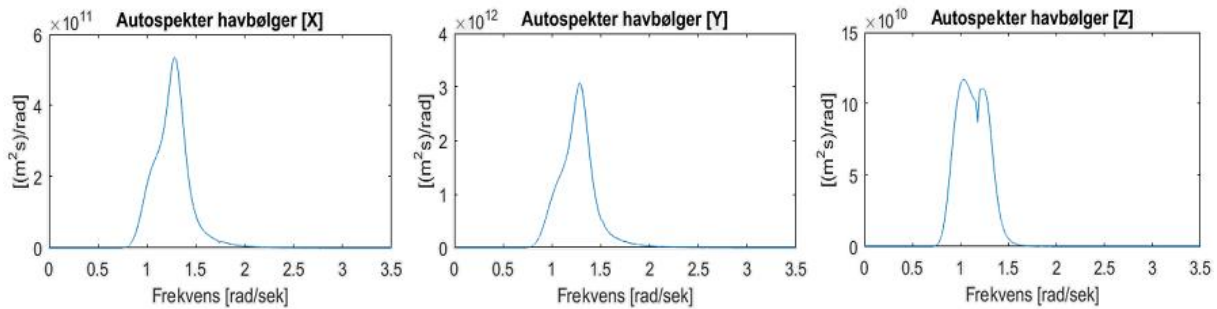


Figur 4.3 Frekvensavhengig hydrodynamisk demping

Tabell 4.1 angir også det modale dempingsforholdet, $\tilde{\xi}_i$, for de 50 første egenmodene. Dempingsforholdet inkluderer både Rayleigh-demping, det vil si friksjonen fra selve brukonstruksjonen, og den hydrodynamiske dempingen. Som tabellen viser har de første egenmodene svært lav demping. En kan også se fra Figur 4.3 at den hydrodynamiske dempingskoeffisienten er tilnærmet lik null i det respektive frekvensintervallet. Hvis disse egenmodene, med høy effektiv masse og svært lav demping, faller innenfor frekvensintervallet som domineres av bølgespekteret, vil det føre til store og langsomme bevegelser som vil påføre brua store momenter om sterk akse. Dette vil kunne medføre problemer i forbindelse med utmatting. Svingeformen til disse egenmodene er illustrert i vedlegg A.

4.1 Lastspekter fra havbølger

Autospekteret til havbølgene i de tre hovedretningene er vist under. Ettersom alle pongtongenes lokale aksesystem sammenfaller med det globale, vil de tre spektrene være identiske for samtlige pongtonger i den antatt homogene prosessen.



Figur 4.4 Autospekter til havbølger for translasjoner

4.2 Respons

Selv om lastspektrene er identiske vil responspektrene variere på grunn frekvensresponsfunksjonen. Egenmodene påfører de ulike pongtongene ulik respons, avhengig av hvordan pongtongenes plassering korresponderer med svingeformen til egenmodene. Følgelig kan én egenmode føre til høy dynamisk amplifikasjon for enkelte pongtonger, mens andre vil kunne havne i et infleksjonspunkt (kilde), hvor den dynamiske amplifikasjonen er lav.

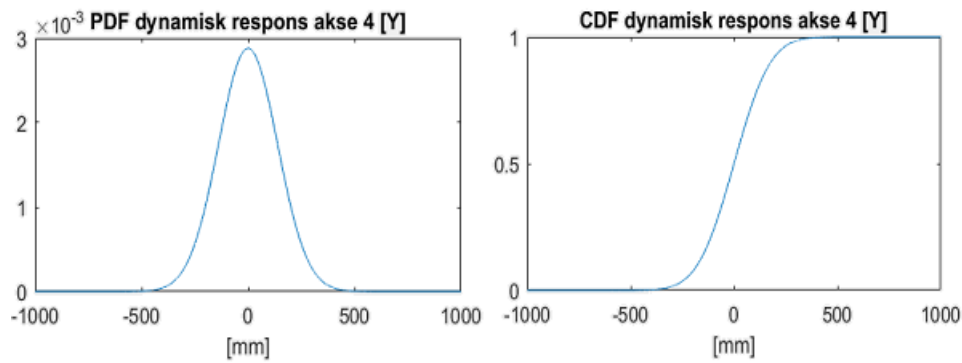
Responspektrene viser hvor mye ulike svingefrekvenser bidrar til pongtongene sin totale varians i den respektive retningen. Ettersom variansene er summerbare vil det totale standardavviket være lik summen av variansen til alle frekvenser. Variansen er kvadratet av standardavviket, som beskriver det gjennomsnittlige avviket fra gjennomsnittet - som i dette tilfellet er bruas oppspenningstilstand. Med andre ord indikerer høy varians for en gitt frekvens at den respektive svingefrekvensen i gjennomsnitt fører til store forskyvninger.

Tabell 4.2 viser standardavviket til pongtongene for bevegelser i x-, y- og z-retning. I y-retning er responsen høyest langs den høye delen av flytebrua. Pongtongen ved akse 4 skiller seg ut, og har standardavvik som er over 45 % høyere enn ved akse 3, som er nummer to på lista. Også i x-retning er responsen lav i den lave delen av flytebrua, men øker betydelig langs den høye delen av flytebrua. Det eksisterer ingen x-moder i frekvensintervallet der bølgene har høyest energi, men som en senere skal se medfører de koblete svingeformene langs den høye flytebrudelen til respons også i x-retning. I z-retning vil forskyvningene bli størst midt på flytebrua, som tabellen viser.

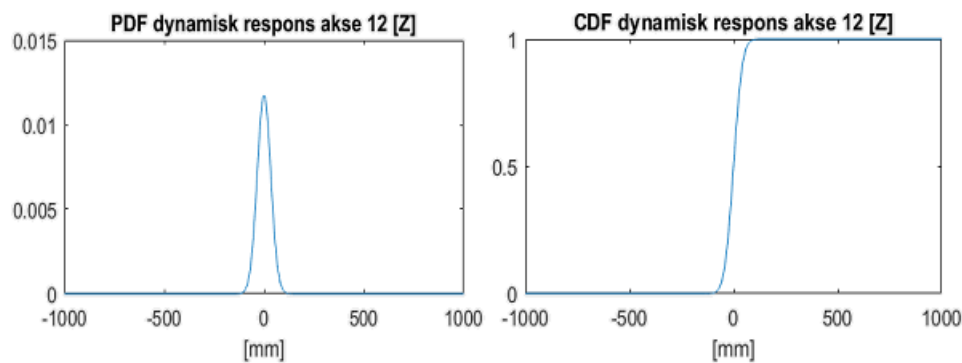
Tabell 4.2 Responsens standardavvik for pongtongenes translasjoner

Pongtong akse	Standardavvik (mm)		
	Y-retning	Z-retning	X-retning
3	95.2	19.5	40.9
4	138.5	26.6	41.3
5	88.5	29.3	27.6
6	83.5	27.9	22.3
7	70.9	27.6	15.9
8	63.8	28.1	12.9
9	68.2	28.9	11.8
10	75.7	29.9	10.9
11	71.4	29.9	10.8
12	74.2	34.0	10.8
13	61.6	30.5	12.3
14	65.7	29.5	15.0
15	70.6	30.3	16.5
16	57.8	31.8	14.0
17	75.0	29.0	17.9
18	50.3	28.2	16.9
19	71.1	31.7	27.1
20	71.2	33.0	28.3

Figur 4.5 på neste side viser PDF- og CDF-funksjonen i y-retning for pongtongen ved akse 4. Figur 4.6 viser de tilsvarende funksjonene i z-retning for pongtongen ved akse 12, som vil oppleve den største vertikale responsen. CDF(X) forteller hvor stor andel av forskyvningene, i løpet av et vilkårlig tidsintervall, som vil være lavere enn X. Det er viktig å påpeke at funksjonene er kontinuerlige, ettersom det ikke eksisterer noen øvre grense for hvor store havbølger kan bli.



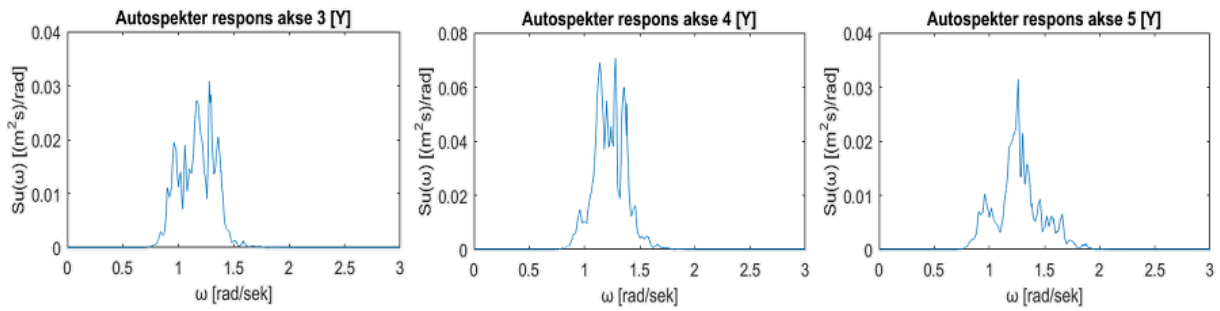
Figur 4.5 "Probability density- og cumulative distribution function" for pongtong 4 i y-retning



Figur 4.6 "Probability density- og cumulative distribution function" for pongtong 12 i z-retning

4.2.1 Horizontal respons

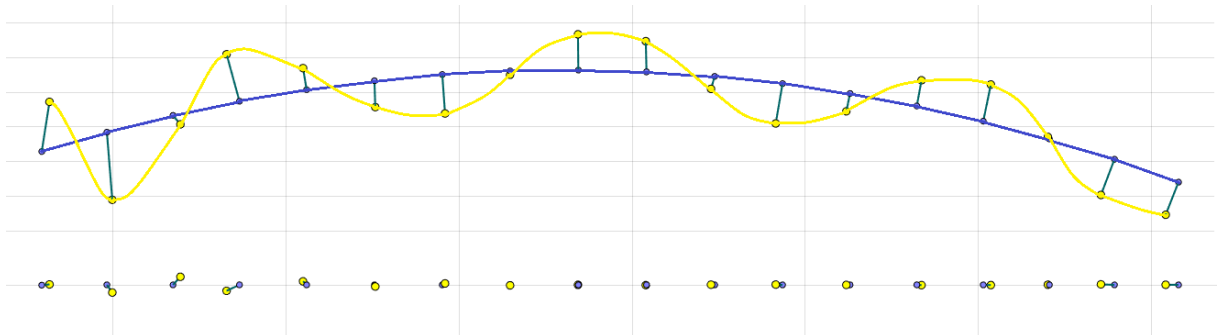
Figur 4.7 på neste side viser autospektrene til pongtongene som vil få den største responsen i y-retning. Grafene viser at svingefrekvensene som bidrar til variansen befinner seg i et frekvensintervall hvor havbølgene har høy energi. Samtidig viser Tabell 4.1 at det eksisterer fem egenmoder med dominerende bevegelser i y-retning innenfor det samme frekvensintervallet. Disse egenmodene, som vil dominere den bølgeinduserte responsen i y-retning har egenperiode fra 4.54 – 5.43 sekunder. Tabellen viser videre at tre av egenmodene har svært lav demping, som medfører at den dynamiske amplifikasjonen blir høy.



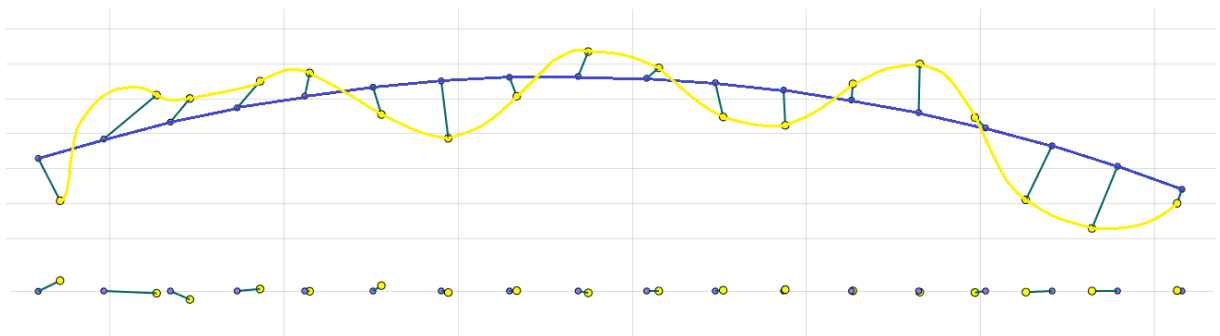
Figur 4.7 Autospektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning

De fem aktuelle egenmodene er egenmode nummer 30, 31, 32, 33 og 34 fra Tabell 4.1. Svingeformen til egenmodene, sett ovenfra, er illustrert i figurene under. I tillegg er pongtongene sine bevegelser i x-z-planet illustrert under hovedsvingeformen. De blå prikkene illustrerer pongtongene sin initielle konfigurasjon, mens de gule prikkene representerer pongtongene sine relative forskyvninger som oppstår hvis brua vibrerer i den korresponderende egenfrekvensen. Figurene illustrerer kun svingeformen til flytebrudelen av bruforbindelsen. Ettersom akse 21 er fundamentert til fjell, tar illustrasjonene kun for seg akse 3 til 20.

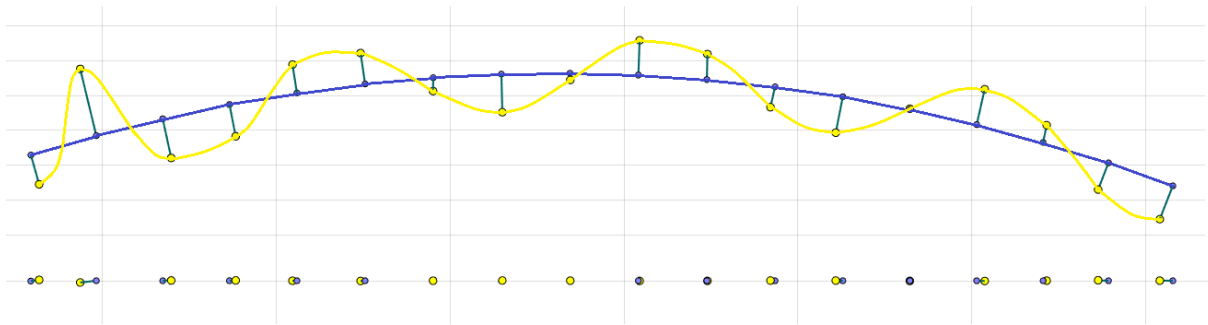
Egenmode 30:



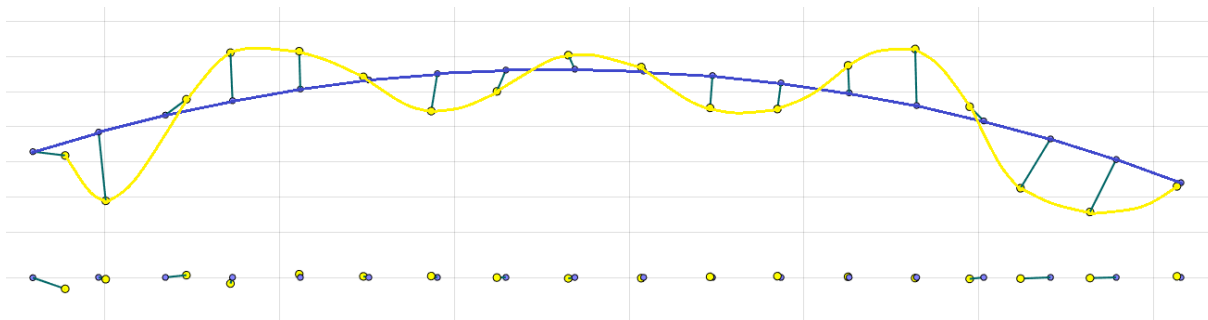
Egenmode 31:



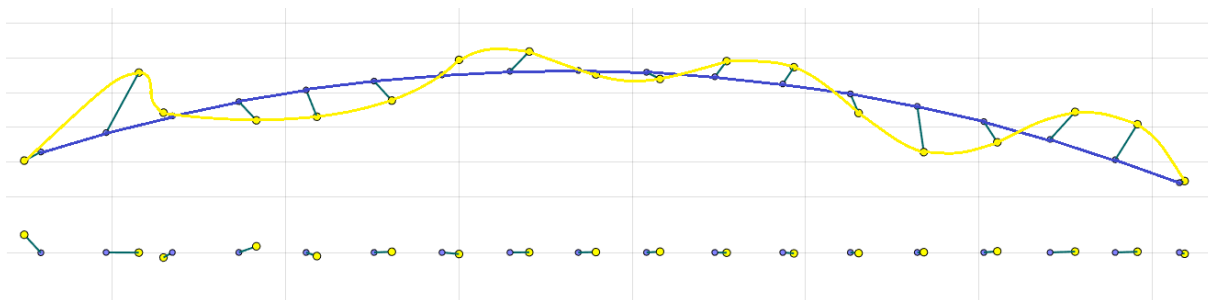
Eigenmode 32:



Eigenmode 33:

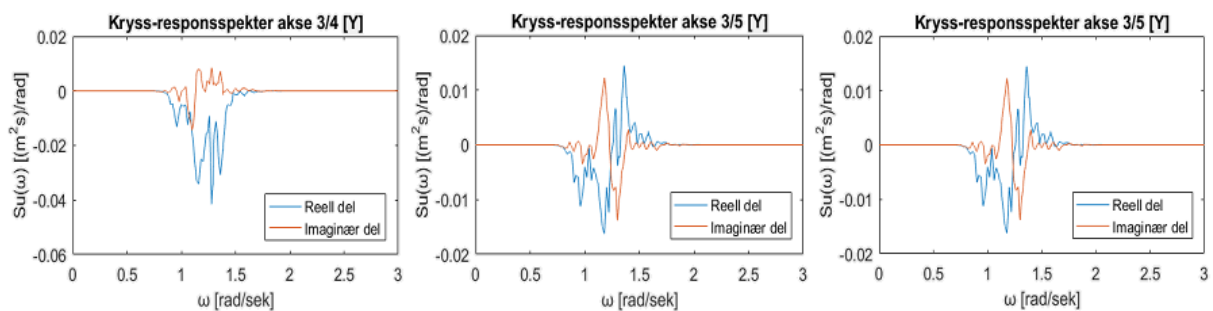


Eigenmode 34:



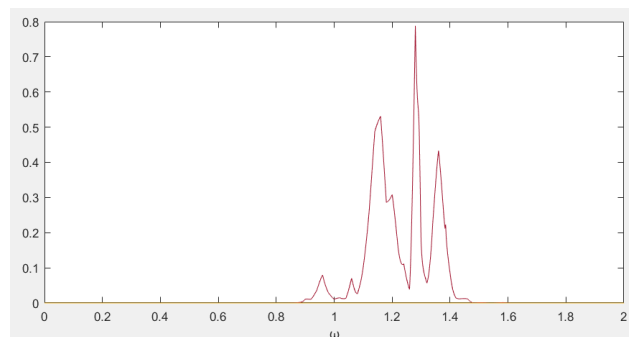
Som illustrasjonene over viser, er utslaget ved akse 4 jevnt over større enn for de andre aksene. En legger også merke til at modeformen langs den høye delen av flytebrua er mer kompleks enn for den lave delen av flytebrua. Det kommer tydelig frem fra illustrasjonene, som viser at utslagene i x-z-planet er langt større for denne delen av brua. Årsaken må være de lange søylene som gjør brua mer fleksibel i dette området.

Et interessant aspekt er at svingeformen til egenmodene fører til at pongtongene ved akse 3 og 4 opplever store motsatte bevegelser om y-aksen. Dette illustreres gjennom figur 5.4, som viser krysspektrene mellom pongtongene ved akse 3, 4 og 5. Som figuren viser, er kovariansen mellom pongtongene ved akse 3 og 4 negativ over hele frekvensintervallet som fører til respons. En legger også merke til at de høyeste absoluttverdiene oppstår mellom disse aksene. En høy negativ kovarians indikerer at pongtongene vibrerer med en fasevinkel nær 180 grader.



Figur 4.8 Krysspektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning

Koherensspekteret er bedre egnet til å beskrive nøyaktig hvor korrelerte to prosesser er. Koherensspekteret angir korrelasjonen som en absoluttverdi, og skiller dermed ikke mellom positivt og negativt korrelerte prosesser. Det korresponderende koherensspekteret til krysspekteret mellom akse 3 og 4 er plottet i figur 5.5, som viser at prosessene har en koherens på 79 % ved en svingefrekvens på 1.29 rad/sek, som er svært tett opp til mode 32.

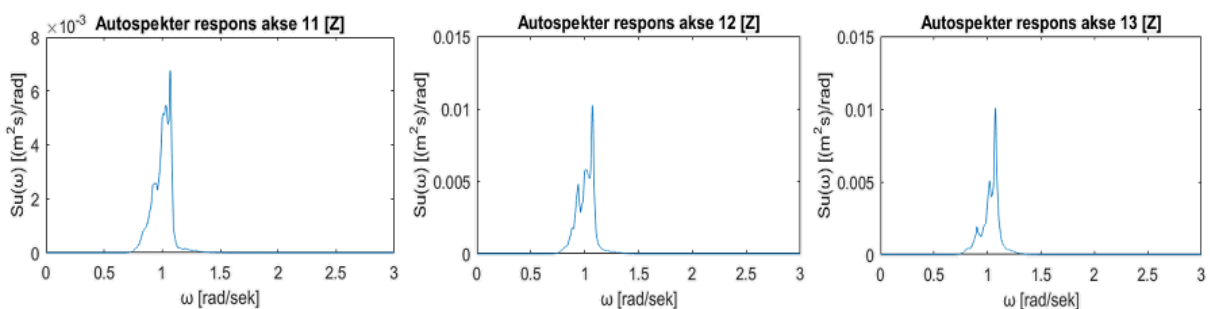


Figur 4.9 Koherens mellom pongtonger i akse 3 og 4

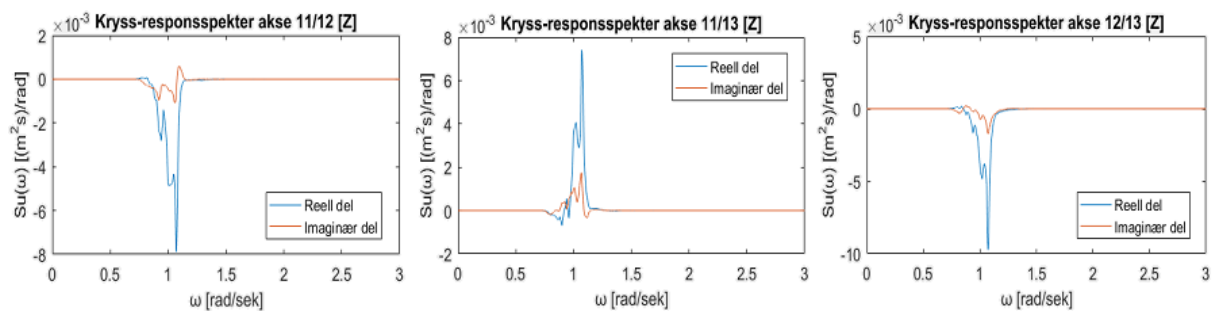
Illustrasjonene av egenmodene viser at nummer 32 også bidrar til store forskyvninger i x-retning for pongtongen ved akse 4. Som vist i Tabell 4.2 er standardavvikene for forskyvninger i x-retning betraktelig større for akse 3 og 4 enn resten av flytebrua, på tross av at det ikke eksisterer noen egenmoder med dominerende bevegelse i x-retning innenfor frekvensintervallet som fører til respons. Mye tyder derfor på at det er disse y-modene som forårsaker mesteparten av responsen, også i x-retning. Den uberegnelige og relativt høye responsen langs den høye delen av flytebrua bør undersøkes nærmere. En bør vurdere å innføre tiltak som forhindrer disse motsatte pendelbevegelser mellom pongtongene. Et spesifikt tiltak kan være å plassere stivere mellom søylene langs den høye delen av flytebrua, som forhindrer motsatte pendelbevegelser mellom pongtongene.

4.2.2 Vertikal respons

Figur 4.10 viser autospektrene med høyest varians i z-retning, og de korresponderende krysspektrene er plottet i Figur 4.11. Figurene viser en klar «peak» ved $\omega = 1.06$ rad/sek. Som Tabell 4.1 viser, eksisterer det to z-moder svært tett opp til denne svingefrekvensen; henholdsvis egenmode nummer 27 og 28. De respektive egenmodene har lavest demping av samtlige z-moder, og befinner seg i et frekvensområde hvor havbølgene har den høyeste variansen i z-retning. Tabellen viser også at det eksisterer flere z-moder innenfor responsspektrene i Figur 4.10, som også gir et signifikant bidrag til den totale variansen.



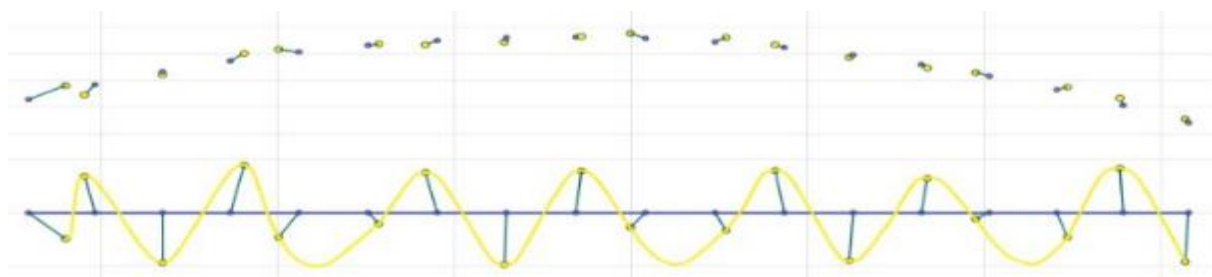
Figur 4.10 Autospektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning



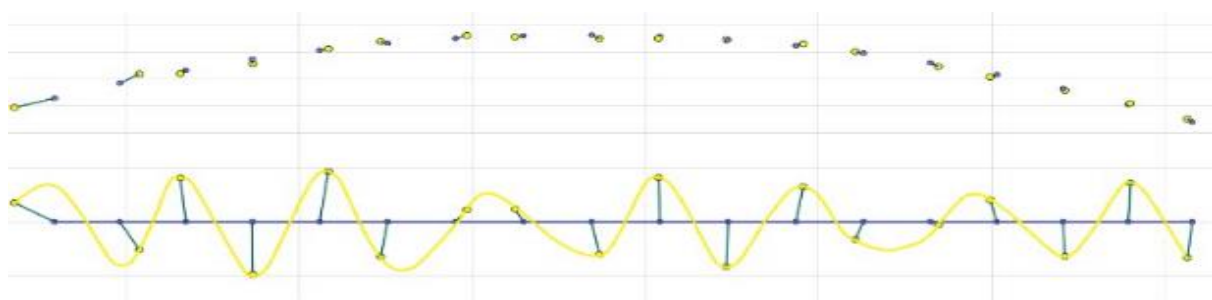
Figur 4.11 Krysspektrene til pongtongene med mest utslag i y-retning

De fire z-modene som ligger tettest opp til responspektrene sine svingefrekvenser med høyest varians er egenmode nummer 25, 26, 27 og 28. Svingeformen til de respektive egenmodene er illustrert under. Hovedillustrasjonen viser svingeformen i x-z-planet (sett fra siden), mens illustrasjonen ovenfor viser pongtongene sine relative forskyvninger i x-y-planet.

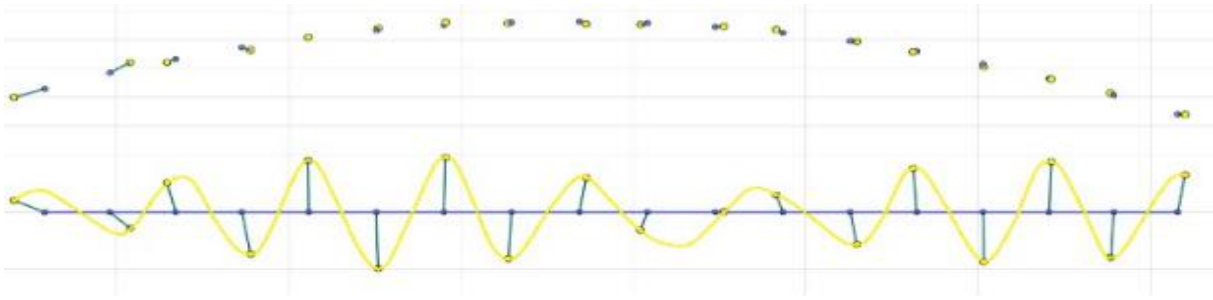
Egenmode 25:



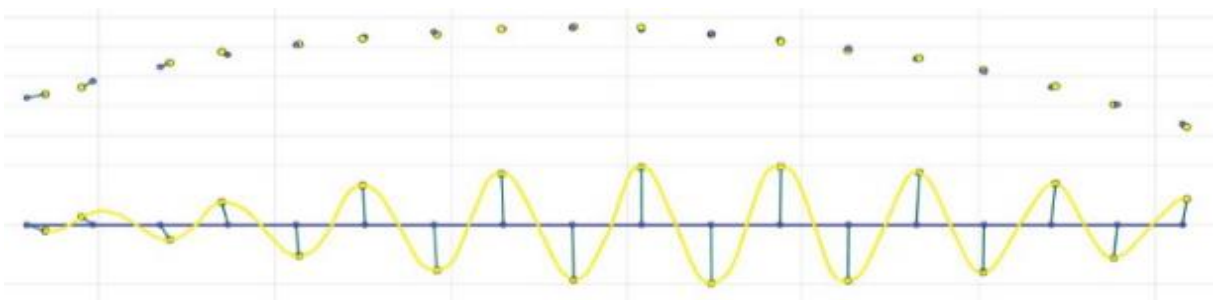
Egenmode 26:



Eigenmode 27:



Eigenmode 28:



Den største vertikale responsen i z-retning oppstår som nevnt ved aske 12, den midterste pongtongen langs flytebrua, hvor standardavviket er 34 millimeter. Den minste responsen oppstår ved akse 3, med et standardavvik på 19.5 millimeter.

Den mest dominerende egenmoden i z-retning er egenmode nummer 28. Egenfrekvensen på 1.068 rad/sek befinner seg svært tett opp til «peakene» i Figur 4.10. Selv om egenmode 27, med egenfrekvens lik 1.039 rad/sek også befinner seg svært tett opp til disse «peakene», viser svingeformen at denne egenmoden får mindre utslag langs deler av den lave flytebrua. Responsspektrene viser derimot at samtlige av pongtongene langs den lave delen av flytebrua opplever den største responsen i dette frekvensområdet, som må bety at det er egenmode nummer 28 som bidrar med den høyeste variansen. En legger også merke til at utslagene ved akse 3 er svært lave ved egenmode nummer 28, men samtidig gir egenmode nummer 27 lavere respons for flere pongtonger. Som nevnt er standardavviket i z-retning, relativt sett, klart lavest ved akse 3, noe som bekrefter påstanden om at egenmode nummer 28 dominerer responsen. Det må også nevnes at egenmode 28 har et dempingsforhold på 1.73 %, som er lavest alle z-moder inkludert i analysen.

Eigenmodene som trigger den bølgeinduserte responsen i z-retning har de høyeste egenfrekvensene blant z-modene inkludert i analysen. Et effektivt tiltak for å redusere responsen vil derfor være å redusere egenfrekvensene til z-modene, slik at samtlige z-moder faller utenfor bølgespekteret. Dette kan effektivt utføres ved å øke overflaten til pongtongenes flenser i x-y-planet. En økt overflate vil føre til at pongtongene fortrenger et større volum med vann, som fører til en økt hydrodynamisk masse, som følgelig vil redusere egenfrekvensene.

4.3 Antagelser og usikkerhetsmomenter

Parameterne i JONSWAP-spekteret er av stor betydning for den bølgeinduserte responsen, og for hvilke egenmoder som vil dominere responsen. Verdiene som er benyttet i rapporten er bestemt i samråd med veiledere, men er ikke spesifikke parametere for Bjørnafjorden. En burde derfor foreta grundige undersøkelser av klimaet i området, for å kunne estimere til bølgene sin karakteristikk på et mer nøyaktig vis.

Input-filen [11] som ble mottatt fra veileder, og som dannet utgangspunktet for modelleringen, oppgir at brua skal bestå av 18 pongtonger i akse 3-20. Det er derfor antatt at det er grunt vann ved akse 21, som gjør det mulig å fundamentere søylene direkte til fast fjell. Som en konsekvens av dette, er søylene ved akse 21 modellert som fast innspente i bunn.

4.4 Videre arbeid

- Det må gjennomføres analyser av vindindusert respons.
- Det bør gjennomføres grundige undersøkelser av klimaet i området, for å være i stand til å predikere vind- og bølgespektrene på best mulig vis.
- Videreutvikle ABAQUS-modellen ved å implementere tiltak beskrevet i kapittel 5.
- Ekstremrespons. En må estimere sannsynligheten for at det vil oppstå kritiske forskvyninger, krefter og momenter i løpet av bruas levetid. Ettersom det ikke eksisterer noen øvre grense for hvor store disse paramterene kan bli, må en på forhånd bestemme hva som er en akseptabel sannsynlighet for disse verdiene ikke overstiges.

5 Konklusjon

Resultatene fra egenverdioproblemet som ble løst i MATLAB virker realistiske. De laveste egenfrekvensene kommer fra egenmoder med dominerende bevegelser i y-retning, hvor den lengste egenperioden er på 49.36 sekunder. Avvikene mellom egenfrekvensene til det totale systemet og modellen i ABAQUS er som forventet: Egenfrekvensene blir redusert som en følge av at hydrodynamiske effekter og Rayleigh-demping blir implementert.

Det er pongtongene langs den høye delen av flytebrua som er mest utsatt bølgeindusert respons i y-retning. Pongtongen ved akse 4 er spesielt utsatt, med et standardavvik på 138.4 millimeter – over 45 % høyere enn ved akse 3, som har det nest høyeste standardavviket. Responsen i y-retning trigges hovedsakelig av fem y-moder med egenperioder i intervallet 4.42 – 5.43 sekunder, som befinner seg i et frekvensintervall hvor energien fra havbølgene er på sitt høyeste. Tre av disse egenmodene har en dempingsrate på under 1 %, som vil føre til høy dynamisk amplifikasjon. Svingeformen til egenmodene karakteriseres ved at pongtongene langs den høye delen av flytebrua får betydelige forskyvninger også i x-z-planet. En annen vesentlig karakteristikk er at pongtongene ved akse 3 og 4 opplever store motsatte pendelbevegelser over hele frekvensintervallet som fører til respons. Prosessene er med andre ord negativt korrelerte, og har en koherens på 79 % ved en svingefrekvens på 1.29 rad/sek, som sammenfaller med egenfrekvensen til egenmode nummer 31. Tiltak bør gjennomføres for å redusere forskyvningene, og det er også disse egenmodene som fører til at standardavvikene i x-retning er betraktelig høyere ved akse 3 og 4 sammenliknet med den lave delen av flytebrua. De respektive pongtongene har et standardavvik på 41 millimeter x-retning. Et spesifikt tiltak kan være å plassere stivere mellom søylene langs den høye delen av flytebrua, som forhindrer slike motsatte pendelbevegelser mellom pongtongene.

Den største responsen i z-retning oppstår ved pongtongene langs den midtre delen av flytebrua. Pongtongen ved akse 12 har det høyeste standardavviket på 34.0 millimeter. Det eksisterer mange z-moder innenfor bølgespekteret i z-retning som bidrar til den totale variansen. Det er egenmode 28, med egenperiode på 5.88 sekunder, som er mest dominerende. Den ukoblede og symmetriske egenmoden fører til betydelig respons for pongtongene som befinner seg i midt på flytebrua. Dempingsraten, på 1.73 %, er det laveste blant alle z-modene inkludert i analysen. Ettersom dette også er z-moden med den høyeste egenfrekvensen fra Tabell 4.1, er det mulig å redusere responsen i z-retning ved å føre egenfrekvensene til z-modene ut av bølgespekteret.

Det kan utføres effektivt ved å øke overflaten til pongtongene sine flenser, slik at den hydrodynamiske massen i z-retning øker. Som en konsekvens av dette vil egenfrekvensene til z-modene bli redusert.

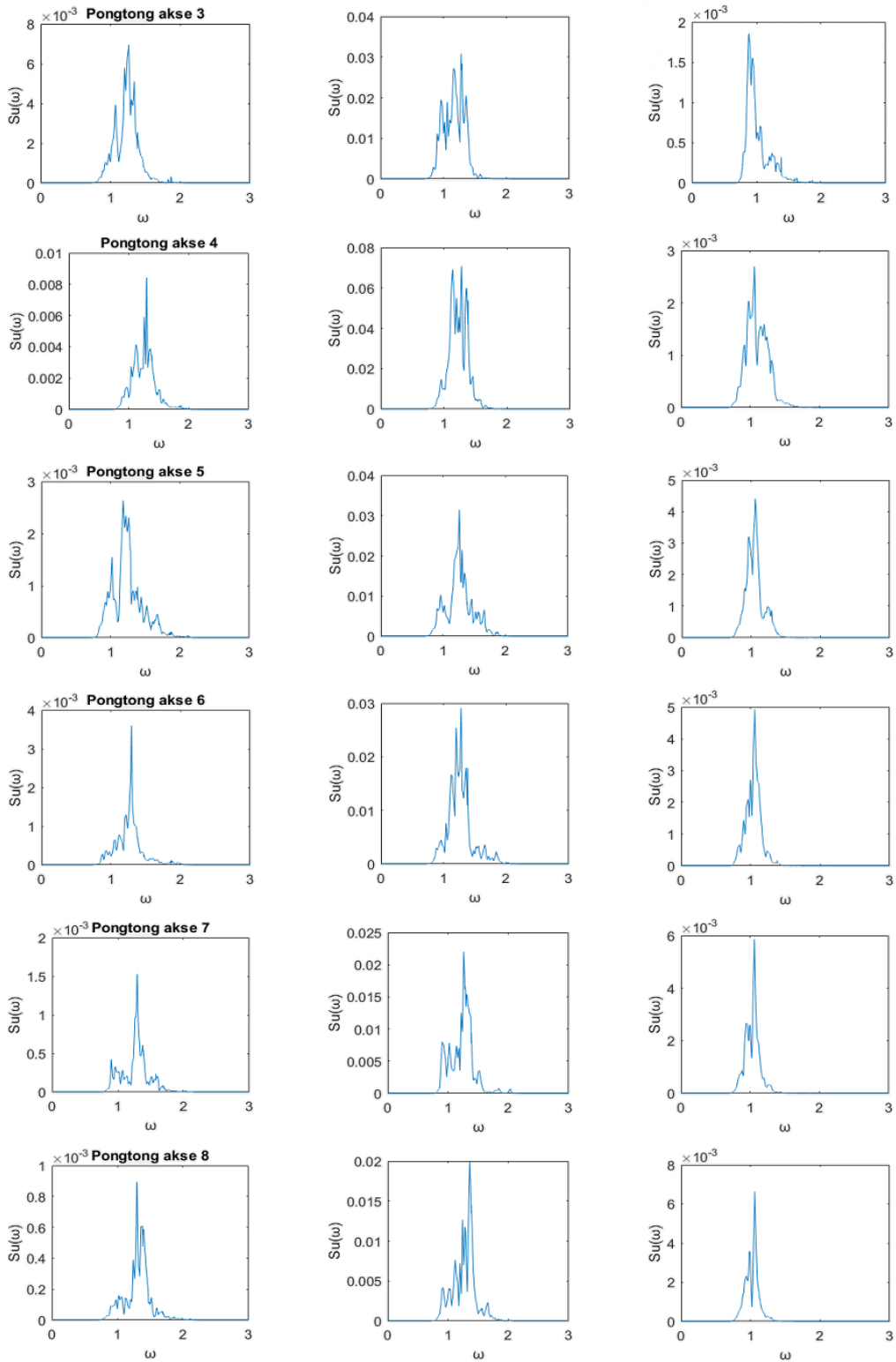
Egenmodene med de lengste egenperiodene har en dempingsrate tilnærmet lik null. Den lave dempingen kombinert med svært høy effektiv masse vil påføre brubanen store momenter om sterk akse om de trigges. De langsomme og store forskyvningene vil også kunne føre til utfordringer i forbindelse med utmatting. Bølgespektrene befinner seg godt over egenfrekvensene til disse egenmodene, men det kan oppstå utfordringer i forbindelse med vindindusert respons. Vindspektrene vil generelt være dominert av frekvenser i et lavere frekvensintervall sammenliknet med bølgespektrene, ettersom bølgene fortsetter å utvikle seg selv gjennom ikke-lineær interaksjon med hverandre.

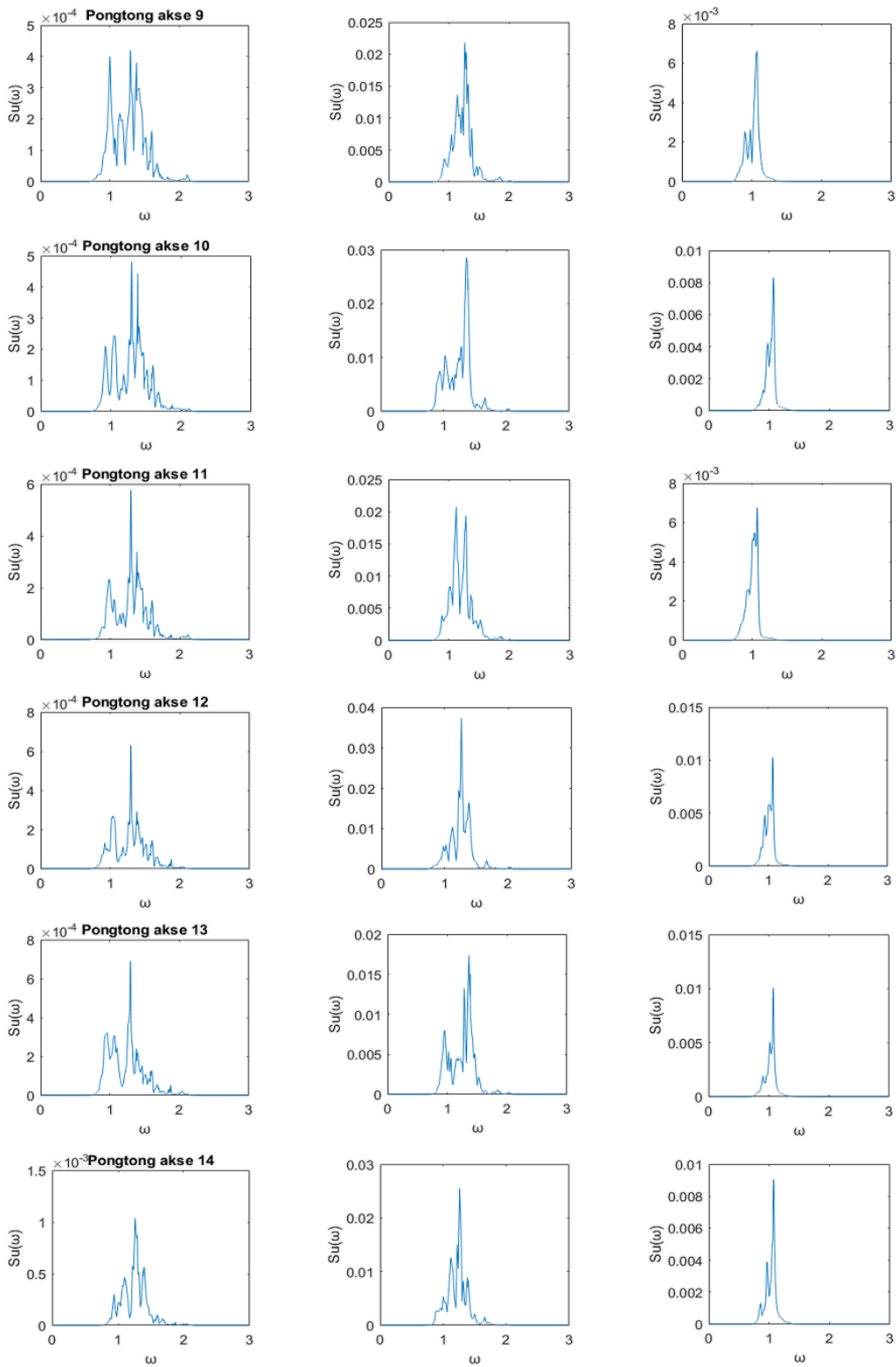
Referanser

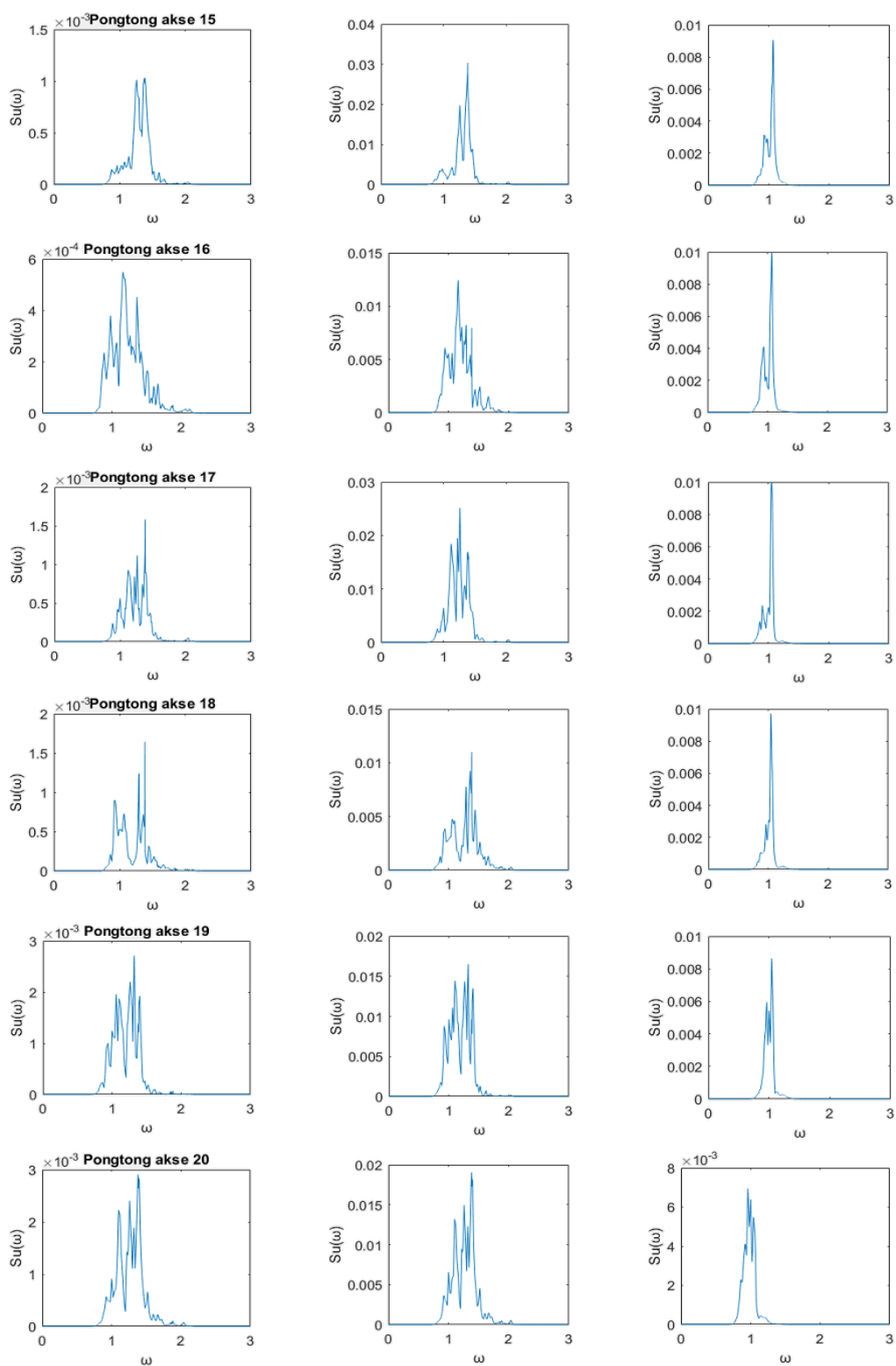
- [1] Statens Vegvesen, 2017. [Internett]. Available: <http://www.vegvesen.no/Vegprosjekter/ferjefriE39>.
- [2] Aas Jacobsen, COWI, Johs Holdt og Global Maritime, «Bjørnafjorden Endeforankret flytebru - Oppsummering av analyser,» 2016.
- [3] Ivar Langen og Ragnar Sigbjörnsson, Dynamisk analyse av konstruksjoner, 1979.
- [4] A. K. Chopra, Dynamics of Structures, 4th Edition, 2012.
- [5] D. E. Newland, An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis, 3rd Edition, 2012.
- [6] Knut Andreas Kvåle, Ragnar Sigbjörnsson, Ole Øiseth, «Modelling the stochastic dynamic behaviour of a pontoon bridge,» 2015.
- [7] K. A. Kvåle, «Assessment of the dynamic response of the Bergøysund bridge,» 2013.
- [8] L. E. Borgmann, «Directional spectra models for design use,» 1969.
- [9] L. M. W. J. Pierson, «A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii.,» 1964.
- [10] Det Norske Veritas, «Sesam Feature Description, <https://www.dnvgl.com/software/publications/software-brochures.html>,» 2017.
- [11] Aas Jacobsen, COWI, Johs Holdt og Global Maritime, «Input data for models in NovaFrame and OrcaFlex,» 2012.
- [12] Statens Vegvesen, «Hardangerbrua, Beregninger,» 2008.
- [13] Simula, «Abaqus Analysis User's Manual,» 2017. [Internett]. Available: <http://ivt-abaqusdoc.ivt.ntnu.no:2080/v6.12/books/usb/default.htm?startat=pt08ch34s02aus126.html#usb-cni-pmpc>.

Vedlegg A

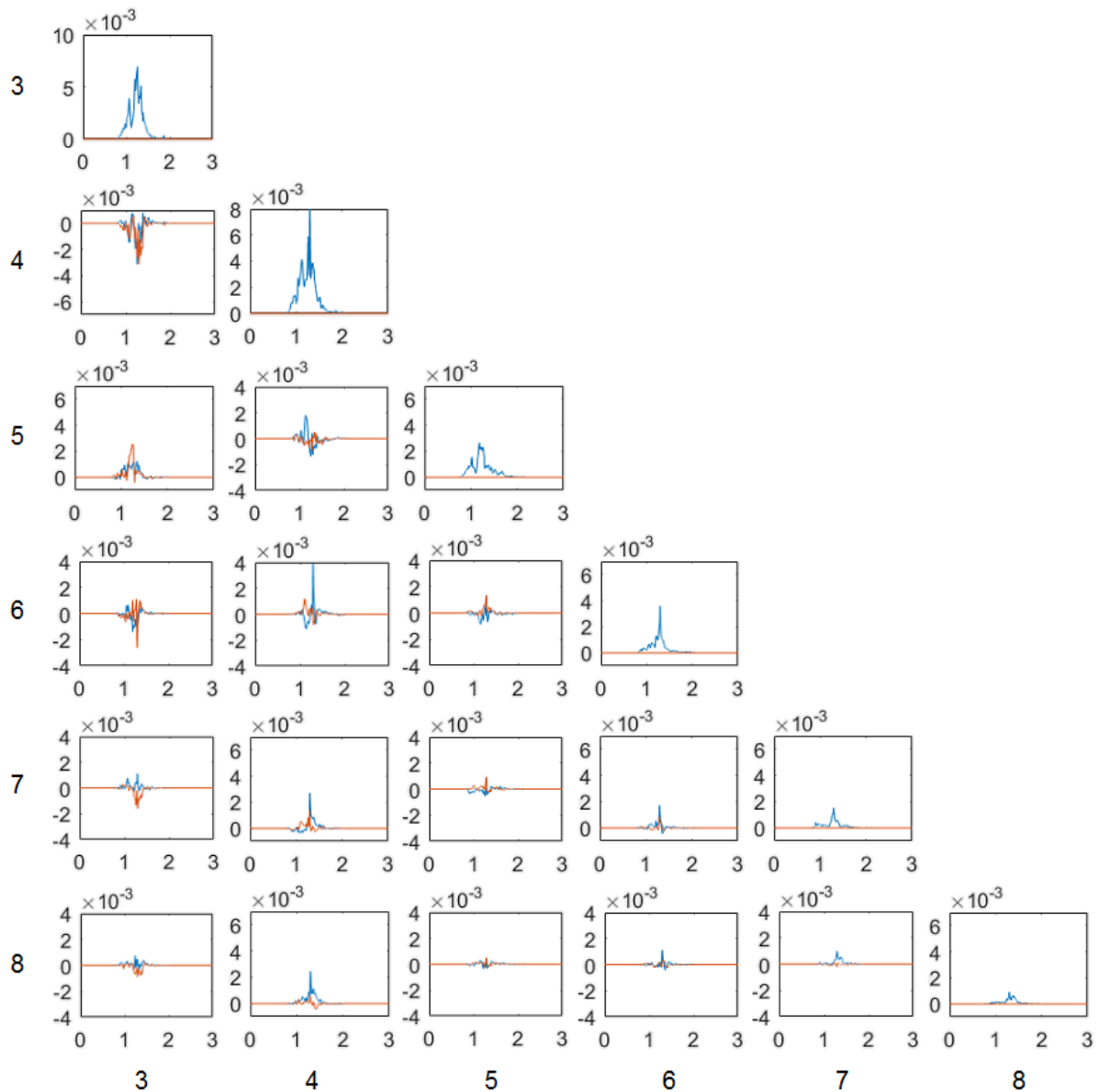
Utfyllende responspekter



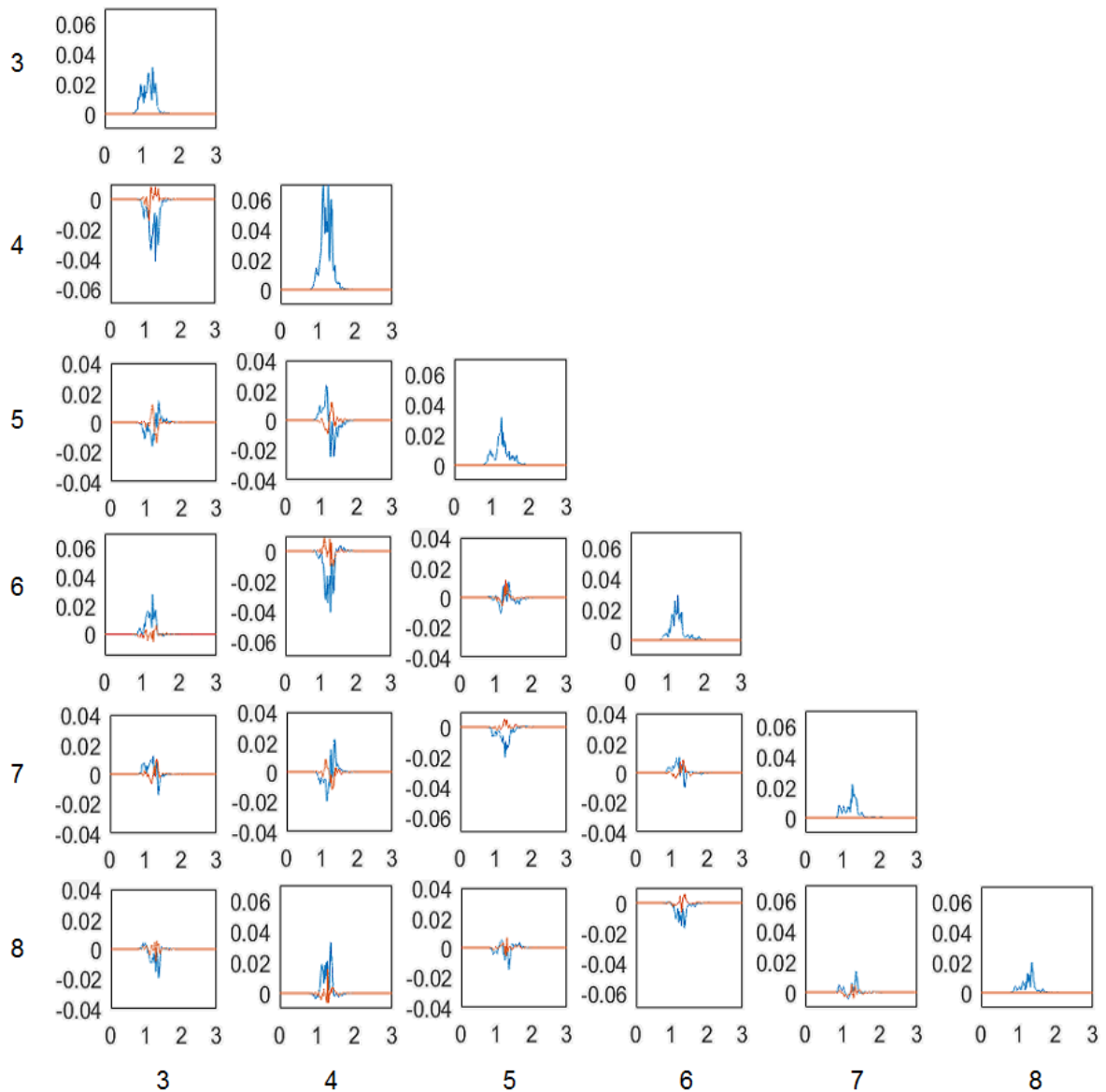




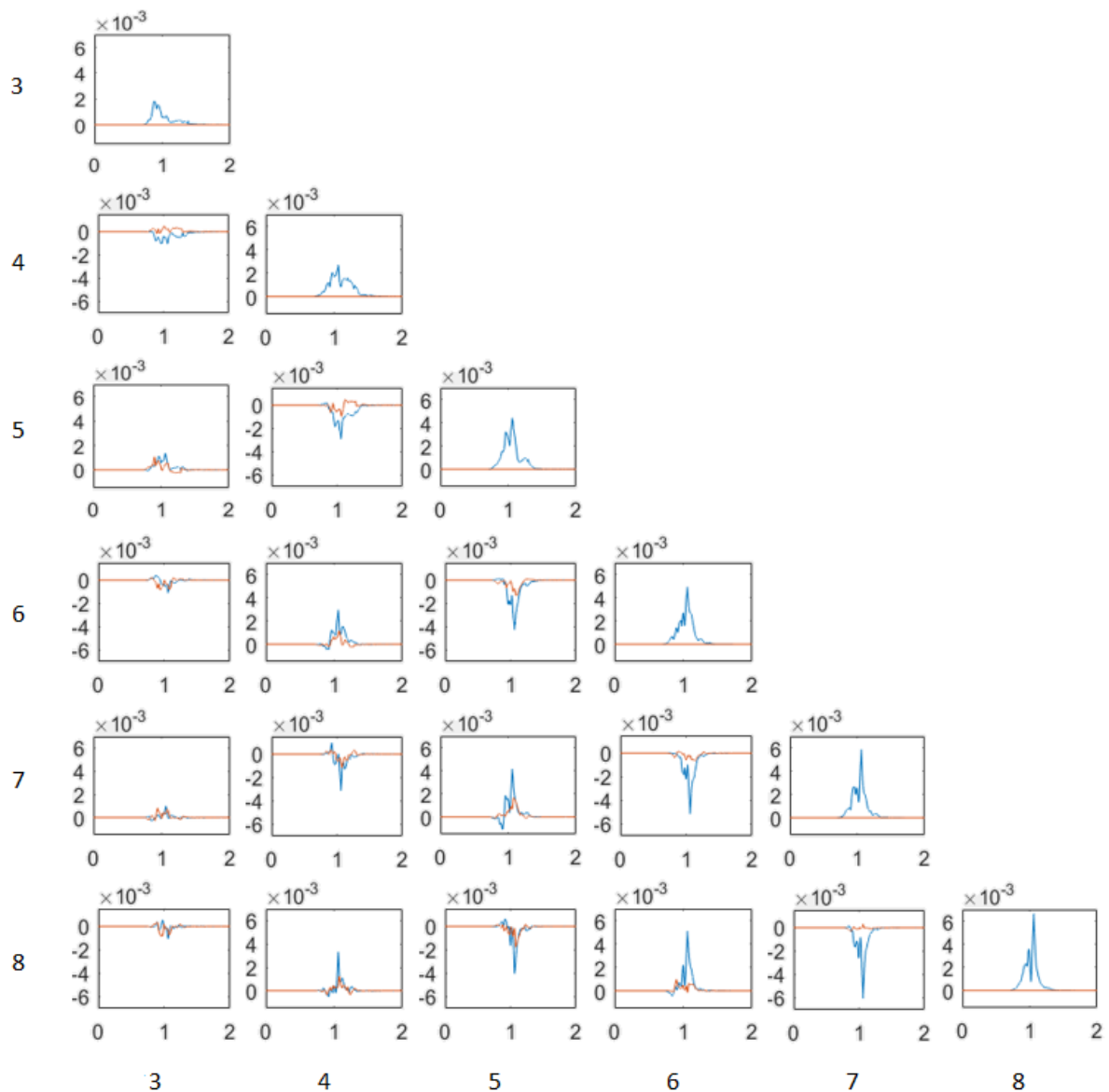
Figur A.0.1 Autospektrene til samtlige pongtongers translasjonsfrihetsgrader. Raden til venstre inneholder spektrene for dof 1, raden i midten for dof 2 og raden til høyre for dof 3.



Figur A.0.2 Auto- og krysspektre for responsen i «Surge» eller translasjon i x-retning for pongtongene med varierende høyde til brudekket. x-aksen inneholder frekvensen, mens y-aksen viser densiteten mellom forskyvningene. Blå strek indikerer reell del og oransje strek viser imaginær del, mens tallene utenfor spektrene viser aksene for pongtongene.



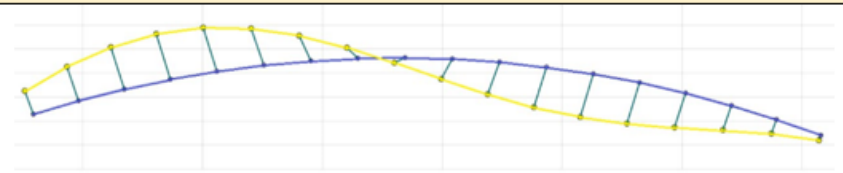
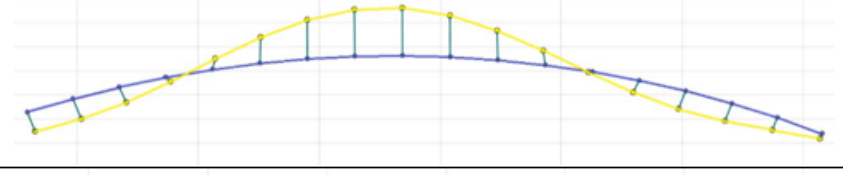
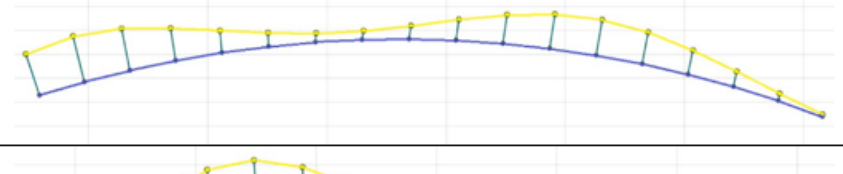
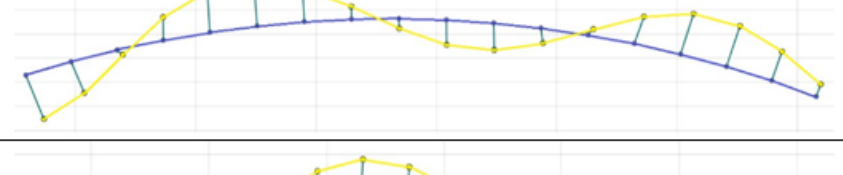
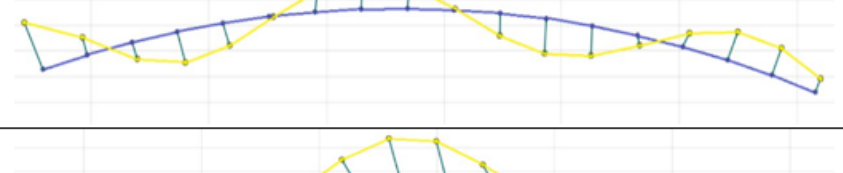

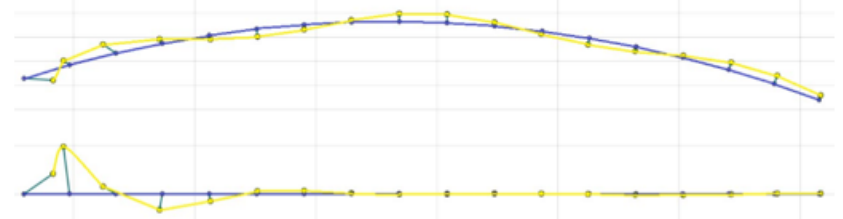
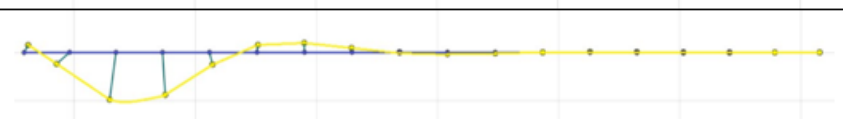
Figur A.0.3 Auto- og krysspektre for responsen i «Sway» eller translasjon i y-retning for pongtongene med varierende høyde til brudekket. x-aksen inneholder frekvensen, mens y-aksen viser densiteten mellom forskyvningene. Blå strek indikerer reell del og oransje strek viser imaginær del, mens tallene utenfor spektrene viser aksene for pongtongene.



Figur A.0.4 Auto- og krysspektre for responsen i «Heave» eller translasjon i z-retning for pongtongene med varierende høyde til brudekket. x-aksen inneholder frekvensen, mens y-aksen viser densiteten mellom forskyvningene. Blå strek indikerer reell del og oransje strek viser imaginær del, mens tallene utenfor spektrene viser aksene for pongtongene.

Utfyllende modeformer

Tabell A.0.1 De første 14 egenmodene til systemet

Mode	Retning	Frekvens (Hz)	Modeform
1	Y	0.0203	
2	Y	0.0353	
3	Y	0.0514	
4	Y	0.0610	
5	Y	0.0814	
6	Rx	0.1066	
7	Rx	0.1097	
8	Z	0.1119	

9	Rx	0.1130	
10	Z	0.1130	
11	Z	0.1131	
12	Z	0.1131	
13	Z	0.1135	
14	Z	0.1144	