Julie Gausen

Addisjon av brøk med ulike representasjoner

En studie av 8. klasseelevers kompetanse og oppgavers ulike vanskegrad

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Trygve Solstad
Trondheim, mai 2017

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Julie Gausen

Addisjon av brøk med ulike representasjoner

En studie av 8. klasseelevers kompetanse og oppgavers ulike vanskegrad

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Trygve Solstad
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Å skrive en masteroppgave kan på mange måter sammenlignes med å spille stigespillet. Veien fra start til mål er lang og tidkrevende og kan by på både nedturer og oppturer. Mange ganger i løpet av dette året har jeg sett meg selv ramle ned korte eller lange stiger, men sakte men sikkert har jeg jobbet meg oppover mot målet. Når jeg nå står nærmere mål enn noen gang er det på sin plass å takke mine medspillere som har hjulpet meg opp både korte og lange stiger.

Først og fremst vil jeg sende en stor takk til de to skolene, til lærerne og ikke minst til elevene som sa ja, og satte av tid til å være med på prosjektet. Uten deres velvilje hadde veien mot målet vært uoppnåelig. Videre vil jeg takke min veileder Trygve Solstad for god hjelp på veien fra start til mål. Takk for gode råd, grundige tilbakemeldinger og lærerike seminarer om Rasch-analyser. I tillegg vil jeg takke medstudentene på veiledningsgruppa, Anne, Ingeborg og Alexander for interessante diskusjoner om Rasch-modellen og for godt samarbeid i året som har gått. Til slutt vil jeg takke nære og kjære for å ha vist interesse for oppgaven og hjulpet meg gjennom en til tider altoppslukende prosess.

Underveis i dette stigespillet har jeg også lært mye, blant annet om forskning, om skriving av vitenskapelige fagtekster og om måling i skolen. I tillegg har jeg fått innsikt i mye didaktisk teori om brøk og addisjon av brøk. Denne lærdommen vil jeg ta med meg videre når jeg nå, med denne masteroppgaven, avslutter fem års skolegang og retter blikket mot yrkeslivet.

Julie Gausen

Trondheim, mai 2017

Innhold

Tabelloversikt

Figuroversikt

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Brøk blir nevnt i kompetansemål i Kunnskapsløftet etter 4., 7. og 10. årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2013), og er derfor et sentralt emne i norsk grunnskole. Brøk er også et viktig emne i matematikken blant annet fordi brøk danner grunnlaget for å forstå desimaltall og prosent, og aritmetikk med brøk er nødvendig for å kunne lære algebra (Subramaniam, 2013). Siegler et al. (2012) viser at forståelse for brøk og heltallsdivisjon hos amerikanske og britiske tiåringer er en sterkere indikator på hvordan elevene vil prestere i matematikk i videregående skole enn andre faktorer som deres IQ, sosioøkonomiske status og kunnskap om de tre andre regneartene med hele tall.

Samtidig som brøk er et sentralt og viktig emne i skolen viser flere studier at brøk er et begrep som er vanskelig å beherske for elever (Bjerke, Eriksen, Rodal, & Ånestad, 2013; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). At elever har problemer med brøk og brøkregning kan blant annet skyldes en krevende overgang fra heltall til brøk (Lamon, 2012, s. 21), at brøk er et komplekst begrep bestående av ulike aspekter: del av en helhet, forhold, kvotient, operator og måleenhet/tallstørrelse (Behr, Lesh, Post, & E., 1983), at det fokuseres for lite på bruken av ulike representasjoner (Bjerke et al., 2013; Kurt & Cakiroglu, 2009) eller at undervisningen fokuserer på algoritmer heller enn forståelse (Mack, 1990; Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015, s. 395).

For å skape forståelse for brøkoperasjoner og brøkalgoritmer anbefales det at man i undervisningen tar i bruk flere og ulike representasjoner. De ulike representasjonene vil blant annet kunne hjelpe elevene med å forstå de grunnleggende idéene som ligger bak brøkalgoritmene og årsaken til at algoritmene fungerer (Siegler et al., 2010, s. 28). Eksempler på ulike representasjoner kan være ulike typer illustrasjoner, skriftlig eller muntlig språk, symboler, tabeller og grafer (Duval, 2006). Representasjonene vil gi tilgang til, og *stå for*, det matematiske objektet, som i dette tilfellet er en brøkoperasjon. I tillegg vil representasjonene fungere som verktøy for å kunne operere på og med de matematiske objektene (Duval, 2006).

1.2 Tema og problemstillinger

En aktuell brøkoperasjon i norsk grunnskole er addisjon av brøk. Ifølge kompetansemål i Kunnskapsløftet skal elever etter 7. årstrinn kunne finne fellesnevner og utføre addisjon av brøker (Utdanningsdirektoratet, 2013). Kompetansemålet sier at elevene skal kunne addere brøker, men sier ikke noe om *hvordan* elevene skal addere brøker, og heller ikke noe om *hva* det å kunne utføre addisjon av brøk faktisk innebærer. Innebærer det å kunne bruke en algoritme? Innebærer det å kunne representere addisjon av brøk på ulike måter? I læring av matematikk er addisjon av brøk en viktig, men samtidig utfordrende operasjon, og bruk av ulike representasjoner er sentralt for forståelsen av operasjonen (Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008; Deliyianni & Gagatsis, 2013). Av den grunn ønsker jeg i denne masteroppgaven å undersøke elevers kompetanse i addisjon av brøk. Først og fremst for å se hvordan elever behersker operasjonen med å addere brøker, men også for å se om de kan representere addisjonen ved hjelp av ulike representasjoner. I tillegg ønsker jeg å undersøke representasjonenes betydning i matematikk og særlig innenfor emnet brøk. Av den grunn blir de overordnete problemstillingene for masteroppgaven som følgende:

- *Hva kjennetegner elevers kompetanse i brøk og addisjon av brøk?*
- *Hvilken rolle spiller representasjoner i matematisk kompetanse generelt, og i brøkkompetanse spesielt?*

Gjennom å undersøke disse to problemstillingene ønsker jeg for det første å få innsikt i didaktisk teori på området, som jeg senere kan benytte til å undersøke elevers kompetanse i brøk og addisjon av brøk. Gjennom en slik undersøkelse ønsker jeg blant annet å få innsikt i hva elever kan, og hva de eventuelt ikke kan, i forbindelse med brøk, addisjon av brøk og bruk av ulike representasjoner. Med en slik innsikt kan man så være med å forebygge og/eller oppklare feil som oppstår i forbindelse med arbeid med brøk og addisjon av brøk, og på den måten hjelpe elever med å beherske det vanskelige, men viktige brøkbegrepet.

1.3 Oppgavens oppbygging

Denne masteroppgaven består av i alt sju kapitler. I andre kapittel presenteres teori om sosiokulturell læringsteori, matematisk kompetanse, matematiske representasjoner og teori om brøk og addisjon av brøk. Denne teorien har vært relevant for å undersøke problemstillingene nærmere, for utvikling av forskningsspørsmålene som blir presentert i slutten av teorikapittelet, for utvikling av instrumentet som brukes til å undersøke elevers kompetanse, for analyse av resultatene og for drøftingen av resultatene. Sentrale begrep vil også bli forklart i teorikapittelet. I det tredje kapittelet presenteres teori om måling, som er metoden som vil bli brukt i studien for å undersøke elevers kompetanse og belyse representasjonenes rolle i addisjon av brøk. Som det fjerde kapittelet kommer imidlertid metodekapittelet. Her gjør jeg blant annet rede for utvikling av måleinstrumentet, for andre metodiske valg og for gjennomføring av undersøkelsen. Deretter kommer analysekapittelet hvor viktige resultater presenteres. Etter analysen kommer drøftingskapittelet hvor analyseresultatene drøftes opp mot presentert teori. I tillegg drøftes blant annet resultatene i sammenheng med didaktiske anbefalinger for å se hvilken betydning resultatene kan ha for undervisning og læring av brøk og addisjon av brøk. Til slutt kommer et eget kapittel som oppsummerer og avslutter forskningsprosjektet.

2.0 Teori – kompetanse, representasjoner og brøk

2.1 Sosiokulturell læringsteori – intellektuelle redskaper og mediering

Denne masteroppgaven er gjennomført med et sosiokulturelt læringssyn, noe som blant annet legger føringer for fokus i oppgaven og analyse av resultater. Læring og utvikling i et sosiokulturelt perspektiv «(…) handler om hvordan mennesker tilegner seg kunnskap og formes av deltakelse i kulturelle aktiviteter, og hvordan de tar i bruk de redskapene som kulturen stiller til disposisjon» (Säljö, 2010, s. 18). Samspillet mellom mennesker er altså sentralt i et sosiokulturelt syn på læring, likeså er bruken av redskaper. For å forstå hvordan bruken av disse redskapene henger sammen med hvordan mennesker lærer og tenker må et annet vesentlig begrep innenfor sosiokulturell teori defineres, nemlig begrepet mediering:

> Begrepet mediere – som kommer fra det tyske Vermittlung (formidle) - antyder at mennesker ikke står i direkte, umiddelbar og ufortolket kontakt med omverdenen. Tvert i mot håndterer vi den ved hjelp av ulike fysiske og intellektuelle redskaper som utgjør integrerte deler av våre sosiale praksiser (Säljö, 2010, s. 83).

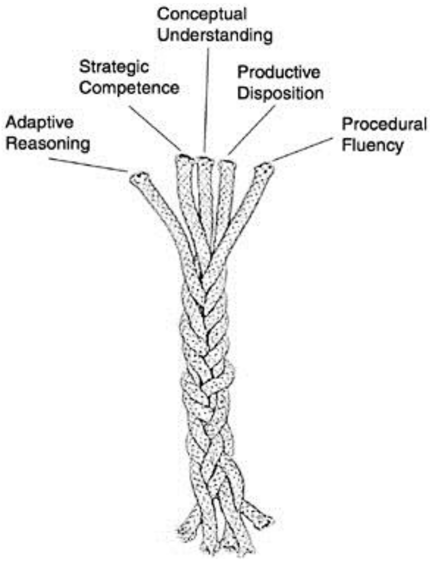
Med andre ord tar vi mennesker i bruk fysiske og/eller intellektuelle redskaper for å mediere, eller formidle, virkeligheten for oss selv og andre. «Med redskap eller verktøy menes de ressursene, så vel språklige (eller intellektuelle) som fysiske, som vi har tilgang til, og som vi bruker når vi forstår vår omverden og handler i den» (Säljö, 2010, s. 21). Medierende redskaper er altså hjelpemidler vi mennesker tar i bruk blant annet for å kommunisere med andre og som støtte og hjelp i en læringsprosess. Eksempler på medierende redskaper i matematikk er fysiske redskaper som kalkulator, passer og linjal og intellektuelle redskaper som bruk av språk. I denne masteroppgaven vil språket ha ulike former og være både skriftlig og muntlig og inneholde symboler, illustrasjoner, tegn og tall.

I et sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling spiller altså medierende redskaper en sentral rolle, og det å mestre bruken av redskaper er viktig for menneskers kognitive utvikling (Säljö, 2010; Vygotsky, 1978). Når man skal undersøke elevers kompetanse fra et sosiokulturelt perspektiv blir det derfor naturlig å studere hvordan elever behersker bruken av ulike medierende redskaper, og i denne masteroppgaven vil studier av elevers bruk av intellektuelle redskaper som for eksempel språket være sentralt. Språket som medierende redskap har ulike funksjoner, og dets *semiotiske funksjon* gir oss mulighet til å bruke språk (og tegn) for å mediere og gi mening til blant annet objekter eller fenomener. Uttrykket *semiotisk* betegner «(…) den tegnavhengige eller betydningsskapende kraften som ligger i det menneskelige språket (…)» (Säljö, 2010, s. 88), og ved hjelp av språk (og tegn) kan vi blant annet mediere samme objekt eller fenomen på flere forskjellige måter og gi det ulik betydning. Innenfor matematikken utnyttes derfor språkets *semiotiske funksjon* til å mediere matematiske objekter. Matematiske objekter medieres gjennom matematiske representasjoner, som består av språk (og tegn), og ved hjelp av ulike matematiske representasjoner kan man mediere et matematisk objekt på ulike måter. For eksempel kan et matematisk regnestykke medieres med et symboluttrykk, ved hjelp av naturlig språk eller ved bruk av en illustrasjon. Ulike måter å mediere det matematiske objektet på gir oss blant annet ulike perspektiver på objektet og ulike måter vi kan behandle det på (Säljö, 2010, s. 99). I denne masteroppgaven vil derfor ulike representasjoner av brøk være de medierende redskapene som elevene skal vise sin kompetanse i bruken av.

I et sosiokulturelt syn på læring og utvikling skapes kunnskap og erfaringer gjennom kommunikasjon med andre, og av den grunn er språket og dets ressurser menneskets aller viktigste medierende redskap. Med språket som redskap kan vi også få tilgang til menneskers tanker. «Kommunikasjon er bindeleddet mellom det indre (tenking) og det ytre (interaksjon)» (Säljö, 2010, s. 69), og ved bruk av muntlig og skriftlig språk kan vi blant annet mediere våre tanker og kunnskaper for oss selv og for andre (Säljö, 2010). Tenkning i et sosiokulturelt perspektiv kan betraktes som en indre samtale hvor den som tenker bruker språklige (og andre intellektuelle) redskaper. Den indre samtalen kan imidlertid ingen andre enn den aktuelle personen følge, og i et sosiokulturelt perspektiv er det derfor ikke mulig å studere tenking direkte. Det som imidlertid kan studeres er det mennesker gjør, sier eller skriver, altså hvordan de evner å mediere sin tenkning gjennom bruk av redskaper. Det betyr igjen at det ikke er mulig å uttale seg om elevers kompetanse direkte, bare hvordan de medierer (/formidler) sin kompetanse ved hjelp av redskaper (Säljö, 2010). I denne masteroppgaven skal elevers kompetanse undersøkes, og i tråd med et sosiokulturelt syn på læring og utvikling menes den kompetansen elevene *viser* gjennom bruk av språk og andre intellektuelle redskaper. Når elevenes kompetanse omtales videre i studien menes derfor den kompetansen elevene *viser* gjennom besvarelser på oppgaver, og ikke elevenes direkte kompetanse. For å kunne undersøke hvilken kompetanse elever *viser* må man imidlertid først vite hva matematisk kompetanse er og hva det innebærer. Av den grunn presenteres teori om matematisk kompetanse i neste delkapittel.

2.2 Matematisk kompetanse (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)

Mathematical proficiency, oversatt til matematisk kompetanse, beskriver fem delkompetanser ved matematikk som Kilpatrick et al. (2001) mener er nødvendig å fokusere på om man skal lykkes med læring av matematikk og for at elever skal kunne bli matematisk kompetente. De fem ulike kompetansene er: conceptual understanding (forståelse), prosedural fluency (prosedural kompetanse), strategic competence (strategisk kompetanse), adaptiv reasoning (resonneringsevne) og productive disposition (engasjement) (se ***Feil! Fant ikke referansekilden.***). Disse delkompetansene fremstilles som sammenflettede tråder som er avhengige av hverandre (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Nedenfor vil jeg gi en kort presentasjon av de ulike delkompetansene.



Figur 1. Sammenflettede tråder av matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s. 117)

2.2.1 Forståelse

Forståelse handler blant annet om å vite hva matematiske begrep og operasjoner innebærer, og å vite hvorfor en matematisk idé er viktig. I motsetning til å kunne spesifikke metoder og isolerte fakta innebærer forståelse det å kunne se helheten i sin matematiske kunnskap og å kunne lære nye idéer ved å knytte det opp mot det som allerede er kjent. Med forståelse er det derfor lettere å huske metoder og regler og å bruke dem riktig, og forståelsen danner et godt grunnlag for å lære ny kunnskap og for å kunne løse nye og ukjente problem. En indikasjon på at en elev har forståelse er blant annet at eleven kan representere matematiske situasjoner på ulike måter, og vet når ulike representasjoner er hensiktsmessig å bruke. Man må også kunne se hvordan ulike representasjoner henger sammen med hverandre, og være klar over forskjeller og likheter mellom representasjonene (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-119). Når forståelse omtales videre i denne masteroppgaven er det Kilpatrick et al. (2001) sitt forståelsesbegrep det henvises til.

2.2.2 Prosedural kompetanse

Prosedural kompetanse innebærer blant annet å ha kunnskap om prosedyrer og å vite når og hvordan de skal brukes. Det innebærer også å ha kompetanse til å utføre prosedyrene fleksibelt, nøyaktig og effektivt, i tillegg til å kunne estimere et resultat. I skolen konkurrerer ofte forståelse og prosedural kompetanse om oppmerksomheten, men ifølge Kilpatrick et al. (2001) er forståelse og prosedural kompetanse avhengige av hverandre, og man kan derfor ikke utelate det ene til fordel for det andre. Forståelse gjør det lettere å lære prosedural kompetanse, og på samme måte kan prosedural kompetanse være med på å utvikle og styrke forståelsen for et matematisk konsept. Hvis elever bruker prosedyrer uten forståelse er det en viss fare for at de vil bruke prosedyrene feil og at de vil glemme dem etter hvert. Forståelsen vil derimot kunne hjelpe elevene å hente frem prosedyrene fra glemmeboken i tillegg til å avdekke feilbruk av prosedyrene (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-124).

2.2.3 Strategisk kompetanse

Strategisk kompetanse er knyttet til problemløsning og handler om evnen til å kunne formulere matematiske problem, representere og løse dem. Elevene bør kunne flere og ulike løsningsstrategier og også kunne se hvilken strategi som er nyttig for spesifikke problem. Innenfor strategisk kompetanse er matematiske representasjoner sentralt, fordi et viktig steg i problemløsning er å kunne lage en representasjon av problemet som fanger det relevante i problemet og som utelater irrelevante elementer (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-129).

Det er et gjensidighetsforhold mellom strategisk kompetanse, forståelse og prosedural kompetanse. For å løse et problem må man ha forståelse for det matematiske i problemet, og også kompetanse i å utføre enkle prosedyrer. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) er det også slik at prosedural kompetanse og forståelse utvikles når de tar i bruk sin strategiske kompetanse.

2.2.4 Resonneringsevne

Resonneringsevne handler om å tenke logisk på forholdet mellom begreper og situasjoner, og i matematikk er resonnering limet som holder alt sammen (Kilpatrick et al., 2001, s. 129). Resonnering inkluderer det å gi uformelle forklaringer og begrunnelser for sine strategier og svar, men også det å kunne gi mer formelle forklaringer og å føre matematiske beviser. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) trenger elevene øvelse i å begrunne prosedyrer, og det å begrunne prosedyren én gang er ikke tilstrekkelig. Hvis for eksempel elevene har lært å addere brøker, er det ikke nok å bare la dem øve seg på å addere brøker. Om de skal forstå prosedyren godt trenger de også øvelse i å forklare og begrunne prosedyren i mange ulike kontekster. Særlig gjennom problemløsning samhandler resonneringsevne med de andre trådene av matematisk kompetanse. I problemløsning må man for eksempel resonnere over hvilke representasjoner, strategier og prosedyrer som er hensiktsmessige og man må også kunne vurdere om svaret man får virker fornuftig (Kilpatrick et al., 2001, s. 130).

2.2.5 Engasjement

Engasjement handler om å kunne se på matematikk som forståelig og nyttig, om å kunne tro på at man selv er i stand til å lære det, og at innsats i faget vil lønne seg. Engasjement utvikles sammen med de andre trådene og hjelper samtidig hver av trådene til å utvikles. For å kunne utvikle de andre trådene av matematisk kompetanse må man nemlig ha engasjement og troen på at matematikk er forståelig, og at man selv er i stand til å kunne lære det (Kilpatrick et al., 2001, s. 131-133).

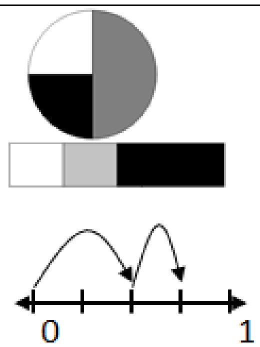
2.2.6 De ulike kompetansene må utvikles samtidig

Tradisjonell undervisningen har hatt en tendens til å være regelbasert, og det å hjelpe elevene til å bli raske og nøyaktige i å utføre prosedyrer har blitt vektlagt (Kilpatrick et al., 2001, s. 240). For mye fokus på prosedyrer, uten å koble det opp mot forståelse og resonering, kan imidlertid føre til at elevene bare pugger reglene og at de behandler symboler på en mekanisk måte, uten å tenke over hva symbolene faktisk betyr. Et slikt fokus kan også føre til at elevene lærer at det å forstå hvorfor algoritmen virker, ikke er like viktig som det å komme frem til riktig svar. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) er ikke dette en gunstig måte å lære matematikk på, og de ser derfor på de ulike delkompetansene som sammenflettede tråder som er avhengige av hverandre. Undervisningen må strebe etter å stimulere til alle fem kompetansene slik at de påvirker hverandre kontinuerlig og utvikles synkront. En elev kan nemlig ikke sies å være matematisk kompetent hvis én eller flere av kompetansene er lite utviklet. Samtidig er det viktig å huske at læring er en gradvis prosess som tar tid. En hver matematisk idé kan forstås på mange ulike nivåer og måter, og for hvert skoleår skal elevene utvikle og styrke sin matematiske kompetanse (Kilpatrick et al., 2001).

Som vi har sett går bruk av representasjoner igjen i flere av Kilpatrick et al. sine delkompetanser. For å være matematisk kompetent må man altså kunne håndtere matematiske representasjoner på mange ulike måter. Men hva er egentlig representasjoner, og hvorfor er det sentralt i matematikk? Disse spørsmålene vil neste delkapittel forsøke å besvare.

2.3 Representasjoner i matematikk (Duval, 2006)

«A representation is something that stands for something else» (Duval, 2006, s. 103), og i matematikk er vi nødt til å bruke representasjoner for å uttrykke matematiske objekter og tanker. Alle representasjonene som brukes i matematikk er intellektuelle medierende redskaper som tas i bruk for å uttrykke og behandle det matematiske objektet. Videre i studien vil derfor representasjoner behandles som en instans av intellektuelle medierende redskaper, og å representere vil være ensbetydende med å mediere matematiske objekter. De matematiske representasjonene representerer, eller formidler, derfor det matematiske objektet. Et matematisk objekt kan for eksempel være en funksjon, en tallfølge eller et regnestykke, og siden de matematiske objektene ikke kan studeres ved hjelp av sanser eller instrumenter er bruk av representasjoner den eneste måten vi kan få tilgang til dem på. Gjennom bruk av språk og andre representasjoner kan vi altså uttrykke og gi betydning til de matematiske objektene, og alle representasjonene som brukes i matematikk kalles derfor av Duval (2006) for *semiotiske representasjoner*. Duval skiller videre mellom fire forskjellige *semiotiske representasjonssystemer*, hvor representasjonene plasseres i de ulike systemene etter hvilke egenskaper representasjonene har. De fire systemene er naturlig språk, illustrasjoner, symbolspråk og tabeller/diagrammer/grafer (*Figur 2*). De ulike systemene kan betegne samme matematiske objekt, men på ulike måter, derav navnet *semiotiske* representasjonssystem.

Naturlig språk	**Illustrasjoner**	**Symbolspråk**	**Tabeller, diagrammer, grafer**
Kan uttrykkes skriftlig eller muntlig. Eks. tekstoppgaver, forklaringer, besvarelser, bevis, teoremer.	Tegninger, mønster, skisser	Kan uttrykkes kun skriftlig. Beregninger, bevis, formler.	Tabeller, diagrammer, grafer
«Tore spiser en halv sjokolade mens Anna spiser en fjerdedel av den samme sjokoladen»		$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ 1 $\frac{1}{3}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{3}{4}$ $+$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

Figur 2. Duval (2006) sine fire semiotiske representasjonssystemer, og eksempler på hvordan det matematiske objektet $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ *kan representeres på ulike måter.*

Ifølge Duval (2006) består matematisk aktivitet av å bearbeide det matematiske objektet, noe som omtales som *transformasjoner* på representasjoner. Eksempler på transformasjoner kan være å utvide brøker i et regnestykke slik at de får like nevnere, eller å illustrere et regnestykke. Duval skiller mellom to typer transformasjoner av matematiske objekter, *behandlinger* og *omdanninger*. *Behandlinger* er transformasjoner *innenfor* samme representasjonssystem. Det kan for eksempel være å manipulere og forenkle uttrykk eller utføre en regneoperasjon: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Omdanninger er transformasjoner hvor man skifter *mellom* to ulike representasjonssystem, uten å endre det matematiske objektet. Eksempel på omdanning kan være å oversette fra symboluttrykk til illustrasjon og omvendt.

For å kunne kommunisere i matematikk og uttrykke matematiske ideer må vi bruke ulike representasjonssystem (Duval, 2006). Hvert system uttrykker forskjellige aspekter ved det matematiske objektet og ingen representasjon dekker alle aspektene alene. Det er derfor nødvendig å kunne erstatte representasjoner med hverandre avhengig av hva man vil belyse og finne ut.

> No kind of mathematical processing can be performed without using a semiotic system of representation, because mathematical processing always involves *substituting some semiotic representation for another (Duval, 2006, s. 107).*

Den store betydningen representasjoner har i matematikk gjør at Duval beskriver transformasjoner på representasjoner som hjertet av matematisk aktivitet, fordi det alltid handler om å bruke representasjoner og å erstatte en representasjon med en annen.

2.3.1 Utfordringer med bruken av semiotiske representasjonssystemer

I følge Duval (2006) er både behandlinger og omdanninger kilder til vanskeligheter for elever, og mens behandlinger er den transformasjonen som får mest oppmerksomhet i undervisningen er det omdanninger «(…) that limits considerably the capacity of students to use the acquired knowledge as well as their capacity to acquire new knowledge in mathematics» (Duval, 2006, s. 121). Å ikke håndtere en omdanning kan med andre ord være hemmende for å løse matematiske problem og for ny læring i matematikk. For å kunne bruke matematikken i problemløsning er man blant annet nødt til å kunne skille mellom det representerte og dens representasjon slik at man er i stand til å trekke ut det som er matematisk relevant. Duval (2006, s. 124) skriver at nettopp dette kan være utfordrende for elever i og med at matematiske objekt bare er tilgjengelig via representasjoner. Dette fører ofte til at samme objekt i to forskjellige representasjonssystemer blir betraktet som to forskjellige matematiske objekt. For eksempel trenger det ikke å være innlysende at en graf og et funksjonsuttrykk representerer det samme matematiske objektet. Det å ikke gjenkjenne det samme matematiske objektet på tvers av de ulike representasjonssystemene kan imidlertid føre til en manglende evne til å skifte representasjonssystem (Duval, 2006, s. 124), noe som igjen kan hindre elever i å beherske matematikken. Ofte krever nemlig oppgaver, både i matteboka og i yrkeslivet, at man kan skifte mellom ulike representasjonssystem for å klare å løse problemet. For eksempel kan man i en oppgave i matematikkboka, eller i yrkeslivet, få presentert en situasjon om prisvekst på boliger, og bli bedt om å lage et funksjonsuttrykk som beskriver prisveksten som funksjon av tid. I tillegg kan man for eksempel bli bedt om å fremstille prisveksten grafisk.

2.3.2 Hvorfor bruke ulike representasjonssystemer og skifte mellom dem?

En årsak til at matematikk ofte krever et skifte i representasjonssystemer er at de ulike systemene belyser ulike aspekter ved det matematiske objektet. For å belyse det man ønsker er det derfor nødvendig å kjenne til flere representasjonssystem og ha evnen til å kunne skifte mellom dem. Et skifte i representasjonssystem kommer ofte av visuelle årsaker, eller at man velger det representasjonssystemet som er mest hensiktsmessig med tanke på å utføre behandlinger enkelt og effektivt (Duval, 2006, s. 112 og 127). Noen prosesser er nemlig enklere å utføre i ett representasjonssystem enn i et annet, og valg av representasjonssystem kan derfor være avgjørende for om en prosess blir enkel eller vanskelig å utføre. I arbeid med figurmønster er det for eksempel mer effektivt å bruke et funksjonsuttrykk enn å lage en tabell om man skal finne figur nr. 1000. Velger man imidlertid å bruke tabell er det også fort gjort å gjøre feil siden tabellen blir relativt stor, og valg av representasjonssystem kan dermed også være avgjørende for om man kommer frem til riktig svar. I mange tilfeller er det også nødvendig å bruke to (eller flere) representasjonssystemer samtidig. I klasserommet har vi blant annet en tendens til å forklare med naturlig språk samtidig som det blir skrevet på symbolspråket, og i oppgaveløsning kan det være nødvendig å bruke to representasjons-systemer samtidig for å blant annet visualisere noe som er utført i et annet representasjonssystem, eller for å se om man har løst oppgaven riktig (Duval, 2006).

Duvals fire semiotiske representasjonssystemer sammen med begrepene behandling og omdanning kan brukes som et rammeverk til å analysere matematisk aktivitet, til å identifisere problemer med matematisk kompetanse og til å kartlegge elevers kompetanse i et matematisk emne (Duval, 2006, s. 111). Ifølge Duval (2006, s. 121) vil man ved å bruke rammeverket til å systematisk variere start- og målrepresentasjonene kunne observere en systematisk variasjon i prestasjoner. Blant annet kan man observere at å endre retning på omdanningen kan føre til endrede prestasjoner. Duvals rammeverk vil derfor være gunstig å benytte til å undersøke elevers kompetanse og for å undersøke hvilken rolle representasjoner spiller i matematisk kompetanse generelt og i brøkkompetanse spesielt, og rammeverket vil derfor benyttes i denne studien.

Før man kan undersøke elevers kompetanse i brøk og addisjon av brøk er det imidlertid nødvendig å definere hva brøk er, hva kompetanse i brøk innebærer og hvilke representasjoner som er sentrale innenfor emnet. Dette vil derfor være fokus i neste delkapittel.

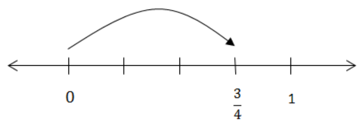
2.4 Kompetanse og representasjoner i brøk

Brøk er et av de viktigste, men samtidig også et av de vanskeligste matematiske emnene elever møter i grunnskolen (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Brøk er viktig fordi det blant annet danner grunnlaget for å forstå desimaltall og prosent, og aritmetikk med brøk er nødvendig for å senere kunne lære algebra (Subramaniam, 2013). Brøk i seg selv trenger vi blant annet for å kunne angi størrelser mellom de hele tallene, for å angi størrelser som er mindre enn enheten og for å kunne uttrykke forhold mellom størrelser. I tillegg trenger vi brøk for å kunne angi svar uten rest ved divisjon (Birkeland, Breiteig, & Venheim, 2012, s. 186). Brøk er samtidig vanskelig blant annet fordi det er et komplekst begrep (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), noe som gjør at begrepet kan defineres på ulike måter:

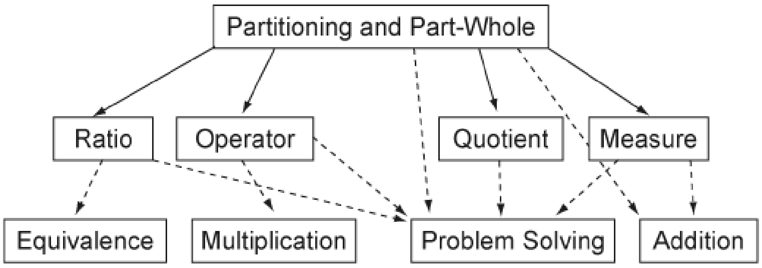
- «En brøk er en tallstørrelse satt sammen av to tall, skrevet over hverandre med en strek mellom, *brøkstreken*. Over brøkstreken står *telleren*, under står *nevneren*» (Birkeland et al., 2012, s. 185).
- «En brøk består av tre elementer, teller, brøkstrek og nevner. Brøkstrek er det samme som deletegn. En brøk er en del av noe» (Matematikknett, 2017).

Definisjonene ovenfor er bare noen eksempler på ulike måter man kan definere brøk på. I Birkeland et al. (2012) defineres brøk som en tallstørrelse uttrykt ved hjelp av to tall med en strek i mellom. På Matematikknett (2017) defineres denne streken som et divisjonstegn, og brøk som en del av noe. Årsaken til at brøk kan defineres på ulike måter er nettopp det at brøkbegrepet er komplekst og består av fem ulike aspekter: «brøk som del av en helhet» «brøk som forhold», «brøk som operator», «brøk som kvotient» og «brøk som måleenhet/tallstørrelse» (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). *Tabell 1* viser hvordan den samme brøken kan tolkes på ulike måter i ulike aspekt.

Tabell 1. Brøken $\frac{3}{4}$ tolkes på ulike måter i ulike aspekt.

Aspekt	**Tolkning av ¾:**
Brøk som del av en helhet	¾ = 3 like deler av en enhet delt i 4 like store deler: 
Brøk som forhold /proporsjon	Forholdet mellom to størrelser/mengder, for eksempel at forholdet mellom gutter og jenter i en klasse er ¾ eller 3:4. For hver 3-er gruppe med gutter har man da 4 jenter.
Brøk som operator	«¾ av en størrelse», for eksempel ¾ av 100 kr.
Brøk som kvotient	¾ = 3 kaker delt på 4 personer.
Brøk som måleenhet/ tall-størrelse	3/4 = 3 × (1/4 av måleenheten) fra 0. 

Til tross for at brøk kan defineres og tolkes på ulike måter i ulike aspekt, kan man ikke betrakte aspektene som isolerte fra hverandre. Aspektene henger nemlig sammen med hverandre, noe Behr et al. (1983) fremstiller i en modell (*Figur 3*). I modellen fremstilles blant annet «brøk som del av en helhet» som et grunnleggende aspekt nødvendig for å kunne lære de andre aspektene ved brøkbegrepet. Evnen til å kunne dele en helhet i like store deler (partitioning) blir også fremstilt som grunnleggende for alle de andre aspektene. Modellen viser i tillegg hvordan brøkbegrepets fem aspekter henger sammen med operasjoner på brøk, likeverdige brøker og problemløsning (Behr et al., 1983). Blant annet fremstilles «brøk som forhold» som den mest naturlige inngangsporten for å introdusere likeverdige brøker. «Brøk som operator» er nyttig for å utvikle forståelse for multiplikasjon med brøk, og «brøk som måleenhet/ tallstørrelse» er nyttig for å utvikle forståelse for addisjon av brøk. Modellen viser videre at en forståelse for alle fem aspektene er nødvendig for å kunne løse problemer som involverer brøk (Behr et al., 1983). Det er altså mange forskjellige aspekt gjemt under samme brøksymbol, og forståelse for brøk innebærer å kunne koordinere mellom de ulike aspektene (Lamon, 2012, s. 32).



Figur 3. Brøkens fem aspekt i en teoretisk modell som viser hvordan de henger sammen med hverandre og også hvordan de knyttes opp mot operasjoner på brøk, likeverdige brøker og problemløsning (Behr et al., 1983).

Denne studien dreier seg om addisjon av brøk, og ut fra Behr et al. (1983) sin teoretiske modell (*Figur 3*) er «brøk som del av en helhet» og «brøk som måleenhet/tallstørrelse» mest relevante for denne regneoperasjonen. Disse to aspektene presenteres derfor nærmere. I tillegg presenteres teori om likeverdige brøker, siden kunnskap om det også er viktig for å kunne addere brøker (Laird, Ebby, Petit, & Marsden, 2015, s. 129).

2.4.1 Brøk som del av en helhet

Under aspektet «brøk som del av en helhet» refererer brøksymbolet $\frac{a}{b}$ til en brøkdel av en enhet, *b* angir hvor mange like deler enheten er delt opp i og *a* angir antall like deler som vi ønsker å betrakte (Lamon, 2012, s. 145). Enheten kan være et kontinuerlig objekt, som for eksempel en kake. Hvis kaken deles i fire like store deler vil brøken $\frac{1}{4}$ angi størrelsen på hver del. Enheten kan også være diskrete objekter, som for eksempel fire kaker. Da vil brøken $\frac{1}{4}$ angi én kake. Brøken er altså en sammenligning mellom antall deler en har og antall deler enheten er delt opp i. I kontinuerlige objekter beskriver brøken en del av et areal, og visuelle representasjoner i den sammenheng blir kalt arealmodeller. I diskrete objekter beskriver brøken en del av en mengde, og visuelle representasjoner i den sammenheng blir kalt mengdemodeller (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Van de Walle et al., 2015, s. 367 og 369). I arealmodeller må delene i enheten ha nøyaktig lik størrelse, men trenger ikke å ha lik form (McIntosh, 2007, s. 27).

For å beherske «brøk som del av en helhet» må man blant annet kunne identifisere enheten, og forstå at delene i enheten må være av lik størrelse eller av likt antall, avhengig av hva enheten er (Lamon, 2012, s. 145). Man må også kunne dele opp enheten i like store deler (Behr et al., 1983). I tillegg må man forstå at dess flere deler enheten er delt opp i, jo mindre blir delene, og man må kunne rekonstruere enheten når en del er gitt (Boulet, 1998, referert i Pantziara & Phillippou, 2012). Forskning viser at «brøk som del av en helhet» er det brøkaspektet elever behersker best (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ved å la 646 elever i 5. og 6. klasse gjennomføre en test, undersøkte Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) hvordan elever behersker de ulike brøkaspektene. Testen bestod av oppgaver ment for å teste kompetanse i hver av de fem ulike aspektene, og resultatene viste at elevenes gjennomsnittscore var høyest på oppgavene ment for å teste deres kompetanse i «brøk som del av en helhet».

2.4.2 Brøk som måleenhet og tallstørrelse

Under aspektet «brøk som måleenhet og tallstørrelse» kan brøk betraktes både som et mål på en enhet og som en tallstørrelse. For eksempel kan brøken $\frac{3}{4}$ betraktes som 3×(1/4-enheter) fra et gitt startpunkt, men også som et tall (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Avhengig av om man bruker en én – eller todimensjonal modell, er brøken et mål på et intervall eller et areal. I en endimensjonal modell måler brøken avstanden mellom to gitte punkter, og her kan bruken av tallinja være nyttig (Lamon, 2012, s. 210). Bruk av tallinja krever imidlertid en forståelse for at brøken representerer en avstand fra null til et gitt punkt på tallinja, som er en lineær skala (Wong, 2013b). Brøk kan representeres som et punkt eller en pil på tallinja (Wong, 2013a).

For å beherske «brøk som måleenhet og tallstørrelse» må man kunne dele opp en enhet i like intervaller, være i stand til å sammenligne størrelsen på to vilkårlige brøker samt og kunne finne brøker mellom to gitte brøker (Lamon, 2012, s. 214). I tillegg må man kunne plassere og identifisere brøk på tallinja (Wong, 2013a, 2013b). I undersøkelsen til Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) presterte elevene dårligst på oppgavene som testet deres kompetanse i «brøk som måleenhet og tallstørrelse». Resultatene fra deres studie antyder dermed at «brøk som måleenhet og tallstørrelse» er vanskelig å beherske for elever (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

2.4.3 Likeverdige brøker

At to brøker er likeverdige betyr at brøkene har ulike symboler og navn, men lik tallverdi eller størrelse. Antall ulike navn for samme brøk er uendelig (Laird et al., 2015, s. 129). Eksempler på likeverdige brøker er $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$. Alle disse brøkene har ulike symboler, men står for samme tallverdi, og det er viktig å forstå at verdien av brøken ikke endrer seg selv om tallene i brøken øker eller minker (McIntosh, 2007, s. 29). En god forståelse for likeverdige brøker er blant annet avgjørende for evnen til å kunne addere brøker med ulike nevnere (Laird et al., 2015, s. 129).

2.4.4 Årsaker til vansker rundt brøk og addisjon av brøk

Som allerede nevnt er brøkbegrepet vanskelig å beherske for elever, noe som er dokumentert i flere studier (Bjerke et al., 2013; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). At brøk er et komplekst begrep bestående av ulike aspekter er bare én av mange årsaker til problemene. Nedenfor presenteres i tillegg noen flere årsaker til at brøk kan bli problematisk for elever.

2.4.4.1 Overgangen fra hele tall til brøk er krevende

Overgangen fra heltall til brøk representerer et stort kognitivt sprang for elever (Lamon, 2012, s. 21). Dette innebærer blant annet et nytt notasjonssystem, hvor en ny type tall brukes for å angi objekter og deler av objekter. Det kan være vanskelig for elever å forstå at én brøk står for ett tall, selv om den uttrykkes ved hjelp av to tall. Det kan også være problematisk å forstå at den samme mengden/tallstørrelsen kan beskrives med forskjellige navn (som for eksempel $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{6}{12}$ osv.) (Lamon, 2012, s. 21-25).

Overgangen fra hele tall til brøk innebærer også nye enheter. Fra de naturlige tallene er elever vant med at enheten *én* alltid refererer til ett enkelt objekt. I brøk kan imidlertid enheten bestå av mer enn ett objekt, fordi brøk er en relativ størrelse som avhenger av størrelsen på enheten (Lamon, 2012, s. 21; Van de Walle et al., 2015, s. 371). I enhver brøkoppgave er det derfor viktig å kunne identifisere enheten, og forsikre seg om at brøkene blir tolket ut fra denne enheten (Lamon, 2012, s. 145).

Overgangen fra hele tall til brøk innebærer også nye prosedyrer for addisjon av brøk: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \neq \frac{3}{8}$. Flere elever prøver imidlertid å forbinde operasjoner på de hele tallene med operasjoner til brøk, noe som kan føre til at teller og nevner behandles som to separate tall, og at nevner adderes med nevner (Kerslake, 1986; Mack, 1990; Siegler et al., 2010, s. 32).

2.4.4.2 Brøk består av ulike aspekter

Som allerede nevnt består brøk av fem ulike aspekter, og en god forståelse av brøk innebærer å kunne koordinere mellom de ulike aspektene. Derfor er det i undervisningen viktig å fokusere på alle aspektene av brøk (Lamon, 2012, s. 32). Tradisjonelt har imidlertid «brøk som del av en helhet» fått mest oppmerksomhet i undervisning, og for mange har brøk og del av en helhet blitt synonymt (Lamon, 2012, s. 33). Ved å fokusere på bare ett eller noen få aspekter vil elever få en mangelfull forståelse for brøk. Dette kan blant annet føre til at kunnskap om «brøk som del av en helhet» blir overført til for eksempel tallinjen (Pearn & Stephens, 2004). Tallinjen skiller seg fra arealmodeller ved at den er kontinuerlig, det vil si at det ikke er et visuelt skille mellom enhetene, noe det som regel er mellom enhetene i arealmodeller (Laird et al., 2015, s. 96). Når tallinjen viser mer enn én enhet kan en overføring av kunnskap føre til at elever betrakter hele tallinjen som enheten, og finner brøkdelen av hele tallinjen i stedet for brøkdelen av den definerte enheten (Hannula, 2003; Pearn & Stephens, 2004; Wong, 2013b). Hannula (2003) gjennomførte oppgavebaserte intervjuer på 20 7. klasseelever, mens Pearn og Stephens (2004) intervjuet 12 8. klassinger. I begge studiene ble det å betrakte brøker som del av en helhet på tallinjen avslørt som én av flere misoppfatninger blant elevene. Overføringen av brøk som del av en helhet til tallinjen fører til at elever får feil fordi de identifiserer og arbeider med feil enhet.

2.4.4.3 Problemer med terminologi

Å forstå at brøk handler om deling i like store deler eller i et likt antall objekter er grunnleggende for en god forståelse for brøk (Laird et al., 2015, s. 55). I et upresist hverdagsspråk brukes imidlertid begrepet «en brøkdel» om en liten udefinert mengde (Lamon, 2012, s. 26), i tillegg kan vi også snakke om «den største halvdelen». Slike hverdagslige uttrykk kan føre til en misoppfatning om at brøkdeler ikke nødvendigvis trenger å være nøyaktig like store. Måten vi omtaler brøk på gjør det heller ikke tydelig at det er snakk om deling i helt like store deler (McIntosh, 2007, s. 23). Til eksempel sier ikke begrepet «firedeler» noe om at delene er av samme størrelse. Når elever skal illustrere brøker kan denne misoppfattelsen føre til at elever tar hensyn til antall deler antydet av nevneren, men at de for eksempel ikke illustrerer delene i en arealmodell med lik størrelse (Peck & Jencks, 1981). Av de 20 6.klasseelevene som ble intervjuet av Peck og Jencks (1981) var det for eksempel hele 9 elever som ikke var klar over at delene i en arealmodell måtte ha lik størrelse.

2.4.4.4 Fokus på algoritmer heller en forståelse

> «I tradisjonelt skolearbeid med brøk har vi ofte brukt liten tid på å hjelpe elevene til å forstå hva brøk er. Vi har vært mer interessert i å lære bort reglene for de fire rekneoperasjonene. Disse reglene er vanskelige nok i seg selv, og enda verre når man ikke forstår tallene en skal gjøre operasjonene med» (McIntosh, 2007, s. 27).

Uten en god forståelse for brøk vil det kunne oppstå feil i flere av leddene involvert i en regneoperasjon med brøk. Dessuten kan algoritmer, lært uten forståelse for tallene og operasjonene, være lett å glemme (Kilpatrick et al., 2001, s. 123; Van de Walle et al., 2015, s. 396). Forskning viser også at en god forståelse for de ulike aspektene ved brøk kan heve elevers prestasjoner relatert til operasjoner på brøk (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) fant i sin studie at elevers kompetanse i de ulike brøkaspektene forklarte en stor del av variasjonen i elevenes prestasjoner på oppgaver relatert til brøkoperasjoner, og anbefaler av den grunn å bruke tid på å utvikle forståelse for de ulike brøkaspektene før man introduserer brøkoperasjoner i undervisningen. Når en omsider har skapt en god forståelse for brøkbegrepet og dets ulike aspekter kan man gå videre til å lære om operasjoner med brøk, som for eksempel addisjon. Blant annet er addisjon av brøk en logisk fortsettelse fra utforskingen av brøkbegrepet, og forståelse for «brøk som del av en helhet», for «brøk som måleenhet/ tallstørrelse» og for likeverdige brøker danner grunnlaget for å forstå addisjon av brøk (Laird et al., 2015, s. 146).

Addisjon av brøk uten forståelse for brøkbegrepet kan føre til at elever gjør flere feil. Som tidligere nevnt kan elever blant annet addere nevner med nevner, fordi de behandler teller og nevner som separate tall, eller at de ikke forstår at brøkdelene må være like store. En annen vanlig feil som elever gjør i forbindelse med addisjon av brøk er ifølge Siegler et al. (2010, s. 32) at de mislykkes med å finne felles nevner og i stedet bare bruker den største nevneren i regnestykket som nevner i svaret. $\frac{2}{6}+\frac{2}{3}$ blir da til $\frac{4}{6}$. En annen feil som fører til samme svar er at man utvider nevnerne slik at de blir like, men ikke utvider tellerne tilsvarende. Da vil regnestykket $\frac{2}{6}+\frac{2}{3}$ bli utvidet til $\frac{2}{6}+\frac{2}{6}$. Elever som gjør slike feil har heller ikke forstått at ulike nevnere refererer til ulike størrelser på brøkdelene og at addisjon av brøk krever like nevnere (Siegler et al., 2010, s. 32).

2.4.5 Addisjon av brøk

«When the parts of a set is known, addition is used to name the whole in terms of the parts" (Van de Walle, 2015, s. 198). Addisjon er altså en matematisk operasjon hvor man legger sammen kvantifiserbare enheter. Tallene som legges sammen kalles *addender* og resultatet av addisjonen kalles *summen*. Symbolet for addisjon er + (pluss) (Aarnes, 2009). Addisjon er en operasjon med kommutativ egenskap, som betyr at man kan skifte rekkefølgen på addendene uten at summen endres ($a + b = b + a$). Addisjon har også assosiativ egenskap som betyr at når man skal addere tre tall, spiller det ingen rolle hvilke to tall man adderer først ($(a + b) + c = a + (b + c)$)(Van de Walle et al., 2015, s. 201-202).

Addisjon med brøk er enklest når brøkene som inngår har lik nevner. Regnestykket $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$ spør egentlig etter «hvor mange firedeler er det til sammen?». Enheten er den samme og i prinsippet er det egentlig bare å telle firedeler. Nevneren forteller oss hva vi skal telle, og telleren sier hvor langt vi skal telle. Når man skal addere brøker med ulike nevnere er det enklest å starte med brøker hvor den ene nevneren er en multiplum av den andre, for eksempel $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}$, og deretter gå videre til brøker hvor nevnerne ikke er multiplum av hverandre, for eksempel $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$. Ved addisjon av brøk anbefales det i tillegg å inkludere brøker som er større enn én hel (Van de Walle et al., 2015, s. 403-405).

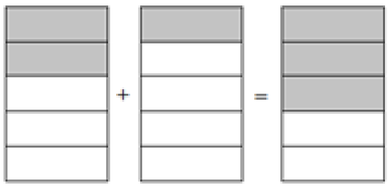
2.4.6 Bruk av representasjoner i forbindelse med addisjon av brøk

En indikasjon på forståelse er ifølge Kilpatrick et al. (2001) blant annet at man kan representere matematiske situasjoner på ulike måter. For å kunne vise en fullgod kompetanse i å addere brøker er det derfor ikke tilstrekkelig å bare kunne algoritmer for å addere brøker. Man må i tillegg kunne representere addisjonen på andre måter. Algoritmer alene vil blant annet ikke hjelpe elever med å forstå meningen med operasjonen, og uten forståelse for algoritmene blir det vanskelig å vite når de skal anvendes. Uten forståelse for algoritmene har man heller ingen måte å vurdere om svaret gir mening på, og dessuten vil en dårlig forstått algoritme være lett å glemme (Kilpatrick et al., 2001, s. 122; Van de Walle et al., 2015, s. 396). I en rapport som oppsummerer forskning på læring av brøk anbefaler derfor Siegler et al. (2010) at man blant annet utforsker og visualiserer addisjon av brøk ved hjelp av flere ulike representasjoner. Dette for å hjelpe elevene med å forstå meningen bak addisjonsalgoritmene, og hjelpe dem til en bedre forståelse for addisjonsprosessen (Siegler et al., 2010, s. 26).

To sentrale representasjonstyper i forbindelse med addisjon av brøk er arealmodeller, som for eksempel sirkler og rektangler, og lineære modeller, som for eksempel tallinja (Cramer et al., 2008; Siegler et al., 2010, s. 28). Bruk av arealmodeller kan blant annet hjelpe elevene med å forstå «brøk som del av en helhet» og med å forstå brøkenes relative størrelse. Arealmodeller kan også demonstrere behovet for å *finne* felles nevner i tillegg til å hjelpe elevene med å forstå *hvordan* man kan finne felles nevner og hva felles nevner *betyr*. Det å kunne finne felles nevner er nemlig avgjørende for å forstå hvordan man skal addere brøker med symboler (Cramer et al., 2008). Sammen med arealmodeller kan også tallinja være med å styrke elevenes forståelse for addisjon av brøk (Cramer et al., 2008). En fordel med tallinjen er at den kan relateres til linjalen og termometeret, noe som er kjent for elevene. Addisjon kan da illustreres som «hopp» (Van de Walle et al., 2015, s. 400).

2.4.7 Relevant litteratur

Bruk av visuelle representasjoner samtidig som man lærer seg algoritmene for addisjon av brøk vil kunne hjelpe på forståelsen av algoritmen, og i tillegg kunne være med å forebygge feil og misoppfatninger som kan oppstå når man bare regner med symboler (Van de Walle et al., 2015, s. 403). Etter at man har utforsket addisjon av brøk ved hjelp av visuelle representasjoner kan man imidlertid addere brøker med kun symboler, men ifølge Van de Walle et al. (2015, s. 404) skal elever være i stand til å kunne visualisere et hvert regnestykke. Herman et al. (2004) fant at de fleste elevene i sin undersøkelse kunne finne summen av to brøker ved å anvende standardprosedyrer, men at de ikke kunne representere selve addisjonsprosessen ved hjelp av visuelle representasjoner. Denne studien ble gjennomført i Tsjekkia hvor de intervjuet 19 elever mellom 6. og 9. klasse i tillegg til 6 lærerstudenter. Det som gikk igjen var at deltakerne prøvde å tilpasse representasjonene til symbolregningen de allerede hadde utført. De representerte addendene hver for seg, og svaret/summen for seg, men klarte ikke å visualisere selve addisjonen (*Figur 4*). Ifølge forfatterne antyder resultatene at deltakerne betrakter addisjon av brøk som en prosess bare på symboler (Herman et al., 2004).



Figur 4. Eksempel på en illustrasjon hvor addendene representeres i egne figurer og hvor summen representeres i en egen figur til slutt.

Det å representere to brøker som skal adderes i to ulike figurer (*Figur 4*) kan føre til misforståelser om at også nevnerne skal adderes (Birkeland et al., 2012, s. 197). I tillegg viser ikke en slik representasjon hva plusstegnet egentlig betyr.

At elever ikke har særlig god kompetanse i å skifte mellom ulike representasjoner for addisjon av brøk er også vist i en kvantitativ undersøkelse gjennomført av Deliyianni og Gagatsis (2013). De undersøkte representasjonskompetansen til 388 kypriotiske elever ved hjelp av en test, som elevene, som gikk i 5. – 8. klasse, gjennomførte tre ganger. Testen bestod blant annet av oppgaver med behandling av symboler og omdanningsoppgaver fra symbol til illustrasjon og omvendt, og både arealmodell og tallinje ble brukt som illustrasjoner. Til tross for at elevenes representasjonskompetanse forbedret seg i løpet av de tre målingene som ble gjennomført, konkluderte Deliyianni og Gagatsis (2013) med at elevenes evner til å skifte mellom ulike representasjoner for addisjon av brøk var lave. Samtidig viste studien at evnen til å kunne bruke ulike representasjoner og å skifte mellom dem er relatert til suksess i problemløsning.

2.5 Forskningsspørsmål

Av den presenterte teorien vet vi blant annet at det anbefales å skape forståelse for algoritmen for addisjon av brøk ved å bruke flere og ulike representasjoner. Samtidig rapporterte de utenlandske studiene nevnt i forrige avsnitt (Deliyianni & Gagatsis, 2013; Herman et al., 2004) om elevers svake kompetanser innenfor bruk av ulike representasjoner i forbindelse med addisjon av brøk. Det vil derfor være interessant å undersøke *norske* elevers representasjonskompetanse innenfor addisjon av brøk. Ved å gjøre det vil jeg blant annet kunne sette teori om elevers representasjonskompetanse inn i en norsk kontekst. Med representasjonskompetanse menes i denne studien elevenes evner til å kunne *behandle* og *omdanne* et addisjonsstykke bestående av brøker, og deres evne til å kunne bruke ulike typer representasjoner. Ifølge kompetansemål i Kunnskapsløftet skal elever etter 7. årstrinn kunne utføre addisjon av brøk (Utdanningsdirektoratet, 2013), noe som betyr at elever i 8. klasse skal ha lært å addere brøker. En naturlig målgruppe for min studie vil derfor være 8. klasseelever.

På bakgrunn av teori vet vi også at tallinje og arealmodeller er sentrale representasjoner i forbindelse med addisjon av brøk. Begge disse representasjonene plasseres innenfor Duval (2006) sitt illustrasjonssystem. Av empiri vet vi også at disse illustrasjonene (tallinje og arealmodell) kan være med å styrke elevenes forståelse for prosedyren og algoritmen for å addere brøker (Cramer et al., 2008; Siegler et al., 2010, s. 28). Forskning viser imidlertid at elever behersker oppgaver hvor arealmodellen er involvert bedre enn oppgaver som involverer bruk av tallinja (Kurt & Cakiroglu, 2009). Ved å teste omdanningskompetansen til 1456 tyrkiske elever mellom 6. og 8. klasse fant Kurt og Cakiroglu (2009) at elevene presterte dårligere på omdanninger hvor tallinjen var involvert enn på omdanninger hvor arealmodeller var involvert. Oppgavene bestod imidlertid av omdanninger av brøk, og ikke addisjon av brøk. I min studie vil det derfor også være interessant å undersøke om elevers prestasjoner på ulike omdanningsoppgaver varierer avhengig av hvilken illustrasjon som inngår, når temaet er addisjon av brøk.

Både behandlinger og omdanninger er kilder til vanskeligheter for elevene, men omdanning omtales som en mer kompleks transformasjon enn en behandling. Årsaken til det er at en omdanning krever at man kan kjenne igjen det matematiske objektet på tvers av de ulike semiotiske representasjonssystemene (Duval, 2006). Ifølge Duval (2006) kan også retning på omdanningen ha noe å si for elevenes prestasjoner på oppgaven. Om omdanningsoppgaver faktisk *er* vanskeligere enn behandlingsoppgaver, og om vanskegrad på oppgavene varierer ut fra retning på omdanningen når det gjelder addisjon av brøk, sier litteraturen imidlertid ingenting om. Av den grunn er jeg interessert i å undersøke *vanskegraden* på oppgaver for å kunne finne ut om teorien til Duval (2006) stemmer for addisjon av brøk i en norsk kontekst. I tillegg er det relevant å undersøke om illustrasjonstype (arealmodell eller tallinje) har noe å si for oppgavens vanskegrad. Forskningsspørsmålene for masteroppgaven blir derfor som følgende:

- *Hva slags representasjonskompetanse innenfor addisjon av brøk viser norske 8.klasseelever?*
- *Er det forskjell i vanskegrad på behandlingsoppgaver kontra omdanningsoppgaver når det gjelder addisjon av brøk?*
    - *Spiller det noen rolle hvilken retning omdanningen går?*
    - *Spiller det noen rolle om det er arealmodell eller tallinje som inngår som illustrasjon i oppgaven?*

Med representasjonskompetanse menes som sagt elevenes evner til å kunne *behandle* og *omdanne* et addisjonsstykke bestående av brøker, og deres evne til å kunne bruke ulike typer representasjoner. Av den grunn velger jeg å dele representasjonskompetanse opp i *behandlingskompetanse* og *omdanningskompetanse*. Representasjonskompetanse, bestående av behandlingskompetanse og omdanningskompetanse, velger jeg å se på som en del av Kilpatrick et al. (2001) sin matematiske kompetanse, siden bruk av representasjoner er sentralt i flere av kompetansene og at prosedural kompetanse innebærer å ha kunnskap om prosedyren for å addere brøker. For å kunne vise en god omdanningskompetanse er elevene derfor avhengige av å ha god prosedural kompetanse, en god forståelse, god resoneringsevne og god strategisk kompetanse. For å kunne vise god behandlingskompetanse trenger elevene bare å ha ulike grader av prosedural kompetanse, men det vil imidlertid være en fordel å ha koblet den prosedurale kompetansen sammen med de andre delkompetansene til Kilpatrick et al., slik at man i tillegg kan vise forståelse for prosedyren, resonnere rundt løsningsmetoder og svar og anvende prosedyren i problemløsning.

For å kunne finne svar på mine forskningsspørsmål om elevers representasjonskompetanse og oppgavers vanskegrad er *måling* en hensiktsmessig metode. Av den grunn presenteres et kapittel om måling.

3.0 Måling – fra testresultater til målinger

«Mål alt hvad der lader sig måle, og gør det måleligt som ikke er måleligt i forvejen», dette var Galileo Galileis oppskrift på god (natur-)vitenskap (Kjørup, 2003, s. 48). Men hva er *måling* og hvordan kan noe gjøres *målbart*? I dette kapittelet presenteres teori om måling og metoder for å gjøre representasjonskompetanse og vanskegrad målbart.

3.1 Måling og ønskelige egenskaper ved målinger

Måling handler om å kunne sette tall på objekter (Wu & Adams, 2007, s. 5). Selv prøvde Galileo Galilei blant annet å utvikle et instrument for å kunne sette tall på temperatur, for på Galileos tid var termometeret, som et måleinstrument for temperatur, enda ikke oppfunnet. Termometeret som Galileo utviklet var imidlertid sensitivt både for temperatur og atmosfærisk trykk, og oppfylte dermed ikke kravet om at måleinstrumenter må være endimensjonale, altså at de bare skal måle én faktor av gangen. Med et flerdimensjonalt måleinstrument blir det nemlig vanskelig å vite om endringene skyldes endring i den ene eller den andre faktoren, eller endring i begge. Måleresultatene vil dermed være vanskelig og tolke og vil ikke være nyttige (Bond & Fox, 2015, s. 40). Siden Galileos termometer ikke var endimensjonalt var det heller ikke invariant, noe som også er en ønskelig egenskap ved målinger (Bond & Fox, 2015, s. 83). Invarians handler om at måleinstrumentet forblir konstant og uavhengig av det vi måler, og at det vi måler forblir konstant og uavhengig av måleinstrumentet som blir brukt (Wright & Stone, 1979, s. xii). Vi ønsker blant annet at målebåndet ikke forandrer seg ut fra hvilket objekt vi måler, og at lengden på objektene ikke forandrer seg selv om vi bytter ut målebåndet med et annet. Hvis målingene ikke er invariante vil det for eksempel bli vanskelig å sammenligne to måleresultater.

Ideen om å måle krever også en idé om en variabel hvor målene skal plasseres (Wright & Stone, 1979, s. 1). «En variabel er en spesifikk egenskap eller et kjennetegn ved enhetene som varierer med forskjellige verdier» (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 125). I min studie vil *addisjon av brøk* utgjøre variabelen, og hvis vi ser for oss variabelen som en loddrett linje vil målingene se ut som punkt på denne linja. Målene vil da kunne beskrive økende grad av kompetanse og vanskegrad innenfor addisjon av brøk.

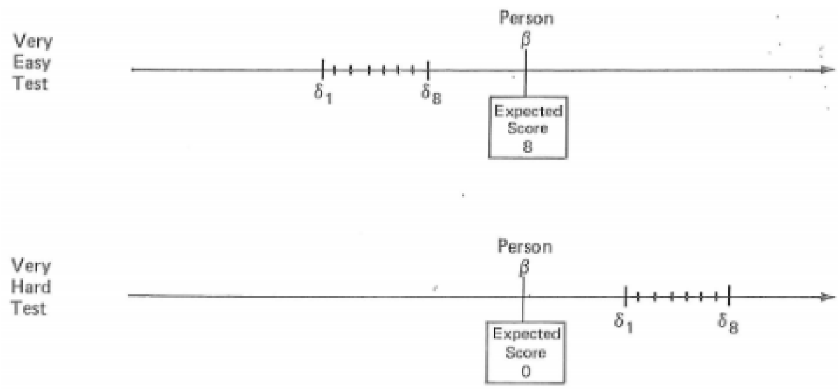
I motsetning til da Galileo levde er vi i dag omgitt av måleinstrumenter på alle kanter (Wu & Adams, 2007, s. 4). I den fysiske verden har vi veletablerte, endimensjonale og invariante måleinstrumenter blant annet for å måle temperatur, lengde, tyngde og mengde, og målene kan gi os nyttig informasjon om verden rundt oss. I den psyko-sosiale verden har vi også mange måleinstrumenter. Blant annet kan psykologen måle graden av depresjon hos en pasient og læreren kan måle elevers grad av matematisk kompetanse. Likevel er mange av disse måleinstrumentene kanskje ikke like veletablerte som i den fysiske verden. Utfordringen med målinger i den psyko-sosiale verden er nemlig at størrelsene vi ønsker å måle ikke er fysiske objekter som enkelt kan måles med en vekt eller et målebånd. Det man ønsker å måle kan bare observeres som symptomer eller tegn, også kalt *latente trekk*, gjennom for eksempel muntlige forklaringer eller testresultater (Wu & Adams, 2007, s. 4).

For å kunne måle elevers representasjonskompetanse og oppgavers vanskegrad må jeg derfor ha en metode for å gjøre observasjoner av *latente trekk* om til målinger. Ved å la elever komme med muntlige forklaringer på oppgaver innenfor addisjon av brøk ville jeg fått en grundig innsikt i noen elevers representasjonskompetanse og deres subjektive oppfatning av oppgavers vanskegrad. Ved å gjennomføre en test kan jeg få en innsikt i flere elevers representasjonskompetanse, og en objektiv måling av oppgavers vanskegrad. Derfor vil det å bruke en test være mest hensiktsmessig i mitt tilfelle. Variabelen *addisjon av brøk* vil være en *latent variabel*, som vil defineres ved å konstruere oppgaver som kan lokke frem *latente trekk* av variabelen hos elevene jeg ønsker å måle (Wright & Stone, 1979, s. 2). Testresultatene må så gjøres om til målinger, og i skolesammenheng brukes vanligvis to ulike metoder for dette: klassisk testteori eller Item Response Theory. Disse metodene velges avhengig av hva hensikten med målingen og testen er.

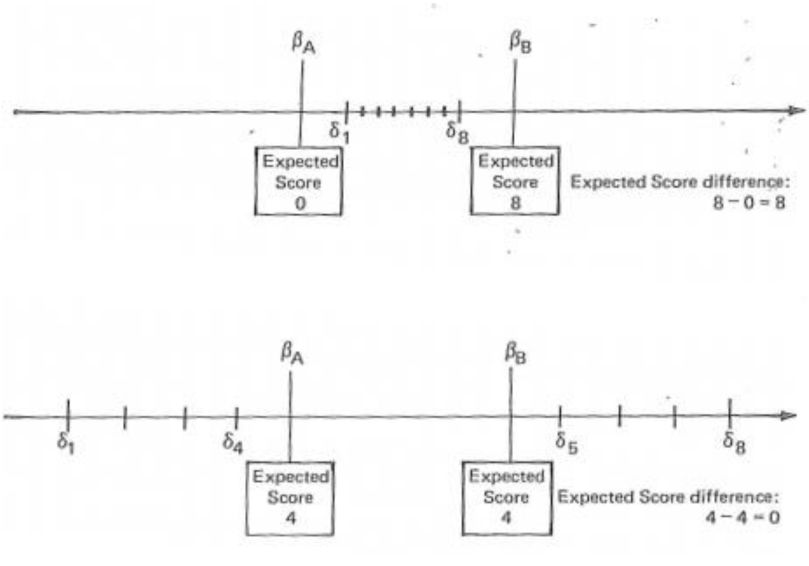
3.2 Klassisk testteori (KTT)

Hvis hensikten med testen er å rangere elever etter kompetanse eller oppgaver etter vanskegrad kan man bruke klassisk testteori (KTT)(Wu & Adams, 2007, s. 16). Blant annet er det vanlig å bestemme kompetansen til en person ut fra oppnådd poengsum på testen, og vanskegrad til en oppgave ut fra hvor mange personer som får til oppgaven (Wright & Stone, 1979, s. xiii).

KTT har imidlertid noen svakheter ved seg. Blant annet vil kompetansen til personene avhenge av hvilke oppgaver som er med i testen, så hvis testen inneholder mange enkle oppgaver vil personene skåre høyt, mens hvis testen inneholder mange vanskelige oppgaver vil personene skåre lavt (se *Figur 5*). På samme måte vil oppgavenes vanskegrad avhenge av hvilke personer som tar testen. Hvis mange kompetente personer tar testen vil oppgavene bli klassifisert som enkle, men hvis personene som tar testen ikke er så kompetente vil oppgavene bli klassifisert som vanskelige (Wright & Stone, 1979, s. 5). KTT oppfyller dermed ikke kravet for invariante målinger. Et annet problem med å bruke KTT er at ulike tester om samme tema kan gi ulik informasjon om forskjellen i kompetanse mellom to personer. For eksempel kan en test vise stor forskjell i kompetanse hos to personer, mens en annen test kan vise at de samme personene er like flinke (*Figur 6*) (Wright & Stone, 1979, s. 8). Skal vi kunne bruke tester til å blant annet måle elever og deres fremgang, sammenligne elever mot hverandre og oppgaver mot hverandre er vi derfor nødt til å bruke en metode som gir oss en variabel (målestokk) med like enheter.



Figur 5. To tester kan gi ulik informasjon om en elevs kompetanse avhengig av om oppgavene i testen er lett eller vanskelig. δ_1 – δ_8 betegner 8 oppgaver med ulik vanskegrad. Bildet er hentet fra Wright og Stone (1979, s. 5).



Figur 6. To tester kan gi ulik informasjon om forskjell i kompetanse mellom de to personene A og B. På den øverste testen blir forskjellen i score stor, mens på den nederste testen scorer de likt. β_A og β_B betegner personenes kompetanse, mens δ_1 – δ_8 betegner 8 oppgaver med ulik vanskegrad. Bildet er hentet fra Wright og Stone (1979, s. 8).

Ved bruk av KTT er det heller ikke åpenbart hvordan vi kan knytte personskår til oppgaveskår. Hvis en person skårer 25 % på testen kan vi ikke uten videre si hvilke oppgaver personen behersker, og for en ideell måling er det ønskelig at personskårene også forteller oss hvilke oppgaver personene behersker (Wu & Adams, 2007, s. 12).

Bruk av KTT vil derfor ikke være tilstrekkelig hvis hensikten med testen er å kunne gjennomføre invariante målinger av elevers kompetanse og oppgavers vanskegrad, og å kunne sammenligne elevers kompetanse med oppgavenes vanskegrad, noe som er ønskelig i denne studien.

3.3 Item Response Theory (IRT)

Item Response theory (IRT) skiller seg fra KTT ved at fokus ligger på hver av de individuelle oppgavene (items) i testen i motsetning til testen som en helhet (Bond & Fox, 2015, s. 302). I stedet for å bruke oppnådd poengsum på testen til å anslå kompetanse og vanskegrad brukes det i IRT matematiske modeller som gjør at estimeringen av elevers kompetanse ikke er avhengig av nøyaktig hvilke oppgaver elevene besvarte, og at estimeringen av oppgavers vanskegrad ikke blir avhengig av elevene som deltok (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. 5). Enkelt forklart handler IRT om å plassere personer etter kompetanse og å kunne plassere oppgaver etter deres vanskegrad og deretter bruke en matematisk modell hvor personens kompetanse og oppgavens vanskegrad brukes til å anslå sannsynligheten for at en person lykkes med en oppgave (Wu & Adams, 2007, s. 13). IRT-analyse av tester brukes i dag av de aller fleste storskala prøvesystemer, som for eksempel nasjonale prøver og internasjonale undersøkelser (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. 4). Det finnes imidlertid flere IRT-modeller, og den enkleste modellen er Rasch-modellen som er en én-parameter modell. Det vil si at bare oppgavens vanskegrad brukes til å bestemme elevens sannsynlighet for å svare riktig på oppgaven (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. 6). Et eksempel på en undersøkelse som har benyttet seg av Rasch-modellen som analysemodell er OECD-undersøkelsen «Programme for International Student Assessment» (PISA) (Kjærnsli, Lie, Olsen, & Roe, 2007, s. 293). Rasch-modellen vil også benyttes i denne studien for å kunne gjøre elevers representasjonskompetanse og oppgavers vanskegrad målbart.

3.3.1 Rasch-modellen

De grunnleggende antagelsene for å kunne gjøre Rasch-analyser er at en hver person kan karakteriseres med et kompetansenivå, at en oppgave kan karakteriseres med en vanskegrad og at disse egenskapene kan uttrykkes som tall langs samme variabel (linje). Ettersom parameterne er definert på samme akse (samme dimensjon) hvor enheten er den samme langs hele aksen kan differansen mellom disse tallene brukes til å beregne sannsynligheten for hvordan en person vil prestere på ulike oppgaver (Bond & Fox, 2015, s. 32). Det sentrale i Rasch målinger er altså å kunne anta sannsynligheten for hva som skjer når en person v med kompetanse β_v besvarer en oppgave l med en vanskegrad δ_l. Siden personens kompetanse β_v

og oppgavens vanskegrad δ_l skal plasseres langs samme variabel/ (linje), er det differansen mellom dem ($\beta_v - \delta_l$) som mest naturlig beskriver forholdet mellom dem (Wright & Stone, 1979, s. 12).

3.3.2 Underkategorier av Rasch-modellen

I kvantifiseringen av besvarelser på en oppgave må man bestemme seg for en skala å vurdere besvarelsene etter. Ulike verdimengder for vurderingen gir opphav til ulike underkategorier av Raschmodellen.

«The Dichotomous Rasch Model» skiller kun mellom riktig svar (1) og feil svar (0) (Engelhard, 2013, s. 11). Sannsynligheten for at en person *v* med en kompetanse β_v svarer riktig på en oppgave *l* med en vanskegrad δ_l uttrykkes slik:

$P\{x_{vl} = 1 \mid \beta_v, \delta_l\} = \frac{\exp(\beta v - \delta l)}{[1+\exp(\beta v - \delta l)]}$ (Wright & Stone, 1979, s. 15)

Av denne Rasch-modellen ser vi at hvis differansen mellom kompetanse og vanskegrad er større enn 0 er sannsynligheten for å svare riktig på oppgaven større enn 0,5. Hvis differansen ($\beta_v - \delta_l$) er lik 0, er sannsynligheten for riktig svar på oppgaven lik 0,5, og hvis differansen ($\beta_v - \delta_l$) er mindre enn 0 er sannsynligheten for riktig svar mindre enn 0,5.

Noen ganger kan en besvarelse være verken riktig eller gal, men noe midt i mellom. Med flere enn to nivåer på besvarelsen blir «The Partial Credit Rasch Model» aktuell, fordi den gir mulighet for å ha forskjellige antall svarnivå på forskjellige oppgaver i testen (Bond & Fox, 2015, s. 141). I denne modellen uttrykkes sannsynligheten for at en person *v* med en kompetanse β_v svarer k på en oppgave *l* med en vanskegrad δ_l slik:

$$P\{x_{vl} = k \mid \beta_v, \delta_l\} = \frac{\exp(\beta v - \delta lk)}{[1+\exp(\beta v - \delta lk)]}$$

(Engelhard (2013, s. 51), men bokstavene i formelen er endret slik at det passer med formelen presentert i forbindelse med «The Dichotomous Rasch Model»).

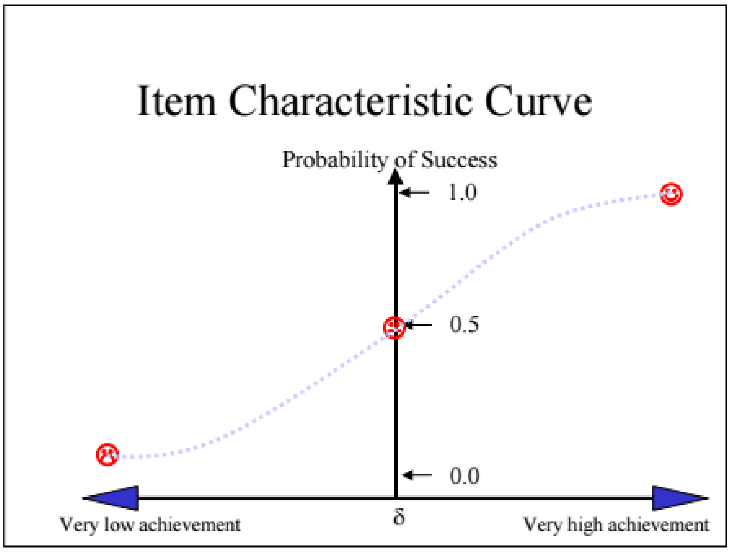
I «The Partial Credit Rasch Model» kan man for eksempel skille mellom galt svar (0), delvis riktig svar (1) og riktig svar (2) (Bond & Fox, 2015, s. 141). En persons kompetanse, β_v og en oppgaves vanskegrad, δ_l estimeres ved sannsynlighetsberegninger, og den matematiske formen på algoritmene gjør at en persons kompetanse, β_v og en oppgaves vanskegrad, δ_l kan estimeres uavhengig av hverandre (Wright & Stone, 1979, s. 20). På den måten oppfyller Rasch-modellen kravet om invariante målinger.

3.3.3 Logits og «variable map»

På samme måte som at en linjal er delt inn i centimeter er enhetene i Rasch-modellen delt inn i logits. Benevnelsen logit er en forkortelse for «log-odds-units» (Engelhard, 2013, s. 8), og i Rasch-modellen uttrykkes både kompetanse og vanskegrad i logits (Wright & Stone, 1979, s. 17). For å kunne gjøre observasjoner om til målinger konverteres oppnådd poengsum (råscore) om til logits, og på den måten beskriver det oddsen eller sannsynligheten for å lykkes med oppgaven (Bond & Fox, 2015, s. 30). Transformasjonen fra råscore til logits øker sannsynligheten for at variabelen (målestokken) får like enheter (Engelhard, 2013, s. 8). Mange programmer for Rasch-analyser kan lage en billedlig fremstilling av forholdet mellom ulike personer, mellom ulike oppgaver og mellom personer og oppgaver. Disse billedlige fremstillingene har flere ulike navn, som for eksempel «variabel map», «item-person' map» og «Wright map». I kartene som fremstilles er både oppgaver og personer plassert på logit-skalaen. Kartene gir derfor mye informasjon om blant annet ulike personers kompetanse, ulike oppgavers vanskegrad, og om forholdet mellom personer og oppgaver (Bond & Fox, 2015, s. 67).

3.3.4 Item characteristic curve og person characteristic curve

Man kan også fremstille en graf som beskriver sannsynligheten for å lykkes med en oppgave som funksjon av kompetanse (*Figur 7*). En slik graf kalles "Item Characteristic Curve" (ICC) (Wright & Stone, 1979, s. 12). Førsteaksen i en ICC uttrykker kompetanse og andreaksen uttrykker sannsynlighet for riktig svar. *Figur 4* viser at for personer med høy kompetanse er sannsynligheten for riktig svar nær 1, mens den for personer med lav kompetanse er nær 0. For en person med gjennomsnittlig kompetanse er sannsynligheten for riktig svar 0,5. Oppgavens vanskegrad er definert som kompetansen til personer som har 50 % sannsynlighet for å få riktig svar på oppgaven (Wu & Adams, 2007, s. 13).



Figur 7. Eksempel på en «Item Characteristic Curve». Bildet er hentet fra Wu og Adams (2007, s. 13). De blå prikkene viser sannsynligheten for riktig svar som funksjon av kompetanse.

På samme måte som en ICC kan det også lages grafer som beskriver en persons sannsynlighet for å få riktig svar på oppgaver med ulik vanskegrad. Da kalles grafen «Person Characteristic Curve» (PCC). Førsteaksen i en PCC uttrykker da oppgavenes vanskegrad (Wright & Stone, 1979, s. 12).

3.3.5 Endimensjonalitet og invarians i Rasch-målinger

Som nevnt i starten er endimensjonalitet et viktig prinsipp for alle måleinstrumenter, og dermed er det også et sentralt prinsipp i Rasch-målinger at varierende resultater skal kunne forklares ut fra variasjon i kompetanse (Bond & Fox, 2015, s. 40). Hvis måleresultatene skal være meningsfulle må alle oppgavene i testen bidra til å måle én faktor. Hvis for eksempel ulike oppgaver i en test stiller ulike krav til elevene, for eksempel at man for å løse én oppgave må ha god leseforståelse, mens man for å løse en annen oppgave må være god til å tolke komplekse modeller vil resultatene være vanskelig å tolke, fordi vi ikke vet hva variasjonen i resultatene skyldes (Bond & Fox, 2015, s. 41). Når vi konstruerer tester må vi derfor gjøre vårt beste slik at det er personens kompetanse som dominerer testprestasjonen, og slik at det er oppgavens vanskegrad som styrer hvordan personer med ulik kompetanse svarer på oppgaven (Wright & Stone, 1979, s. 11).

Når det gjelder kravet om invariante målinger må vi forsikre oss om at en oppgaves vanskegrad forblir den samme uavhengig av hvem som løser oppgaven, og at personers kompetanse ikke forandrer seg ut fra hvilke oppgaver de løser. Engelhard (2013, s. 37) gir fem kriterier for invariante målinger (fritt oversatt):

- Målingen av en persons kompetanse skal være uavhengig av oppgavene som er med i testen.
- Personer med høy kompetanse skal alltid ha høyere sannsynlighet for å lykkes med en oppgave enn personer med lavere kompetanse.
- Målingen av en oppgaves vanskegrad skal være uavhengig av personene som tok testen.
- Enhver person skal ha større sannsynlighet for å lykkes med en lett oppgave enn en vanskeligere oppgave.
- Personer og oppgaver må kunne plasseres på én og samme latente variabel/(linje).

Prinsippet om invarians er også nært knyttet til prinsippet om endimensjonalitet, det at vi bare skal måle én faktor av gangen (Bond & Fox, 2015, s. 84). Hvis det er andre ting enn en persons kompetanse og en oppgaves vanskegrad som påvirker sannsynligheten for riktig svar er Rasch-modellen svekket. Faktorer som kan spille inn på sannsynligheten for riktig svar er for eksempel at elever gjetter på svaret. Dette er spesielt relevant i forhold til flervalgsoppgaver. Andre faktorer er for eksempel svaravhengighet, for eksempel hvis en oppgave gir hint slik at det blir lettere å løse en annen oppgave, eller at man må bruke svaret på en tidligere oppgave til å løse en annen oppgave. Kjønn, religion og andre faktorer kan også spille inn på sannsynligheten for å få riktig svar på en oppgave. Dette kalles «Differential Item Functioning» (DIF), og betyr at oppgaven «virker» forskjellige på forskjellige personer. For eksempel kan gutter prestere bedre enn jenter på en oppgave om fotball fordi gutter er mer interessert i fotball enn jenter (Wu & Adams, 2007, s. 74). Hvis slike faktorer spiller inn svekkes kvaliteten på måleinstrumentet fordi prinsippet om endimensjonalitet er brutt, noe som gjør at målingene ikke blir invariante.

4.0 Metode

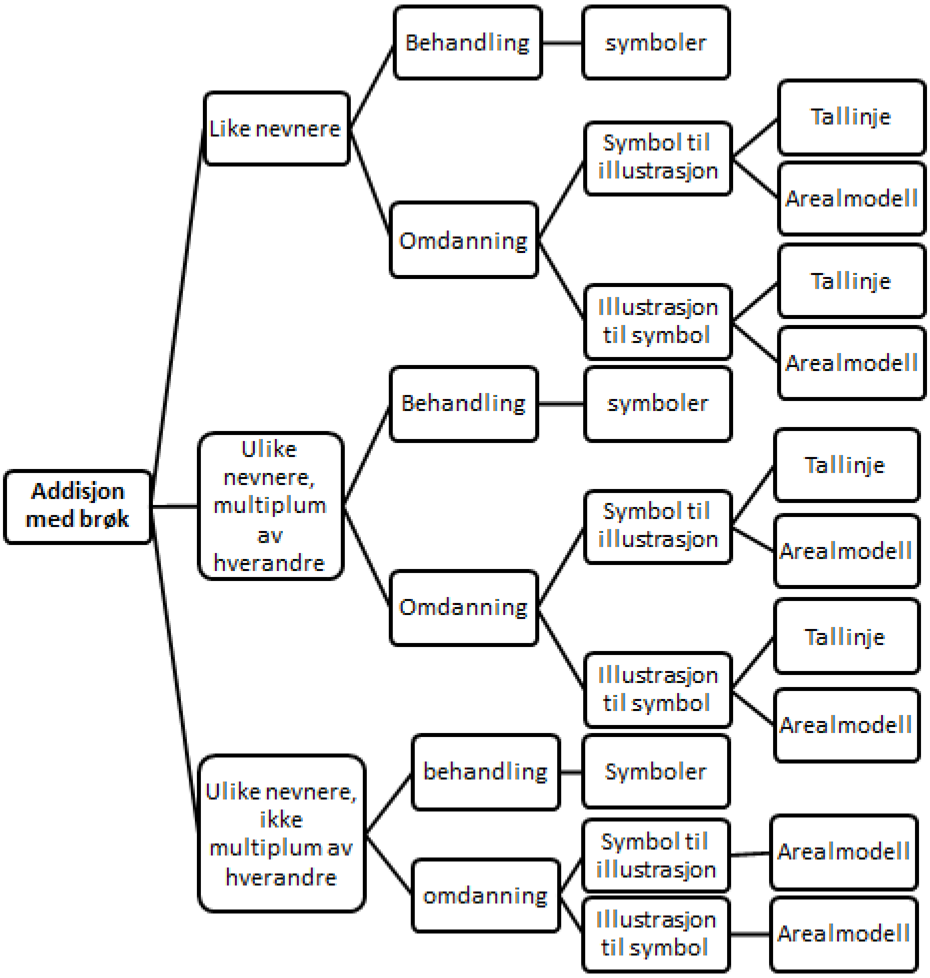
I denne masteroppgaven er måling valgt som metode. For å kunne måle er man avhengig av et måleinstrument, og et instrument for å måle elevers kompetanse og oppgavers vanskegrad innenfor addisjon av brøk finnes ikke. En del av masteroppgaven har derfor bestått av å utvikle et måleinstrument for å kunne besvare mine forskningsspørsmål, og i dette metodekapittelet vil jeg derfor blant annet redegjøre for utviklingen av måleinstrumentet. Som allerede nevnt i forrige kapittel er hverken kompetanse eller vanskegrad fysiske størrelser som kan måles direkte. Slike størrelser kan bare måles ved hjelp av tegn/symptomer, også kalt *latente trekk*, gjennom for eksempel muntlige forklaringer eller testresultater. Som begrunnet i forrige kapittel vil en test være mest hensiktsmessig i mitt tilfelle, og testresultatene vil kunne gi en indikasjon på størrelsene som skal måles. For å gjøre testresultatene om til målinger vil Rasch-modellen bli benyttet, blant annet fordi den gir mer presise målinger enn for eksempel klassisk testteori (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. 3). I tillegg til valget om å gjennomføre en test, og anvende Rasch-modellen til analyse av testresultatene har jeg også vært nødt til å gjøre andre metodiske valg, og i dette kapittelet vil jeg presentere og begrunne valg jeg har tatt i arbeidet med studien. I forskning er det også en del etiske normer, og metodekapittelet vil også vise hvordan jeg har forholdt meg til disse gjennom mitt forskningsprosjekt.

4.1 Utvikling av måleinstrumentet/ testoppgavene

For å kunne bruke en test til å måle må man først utarbeide en klar idé om variabelen man ønsker å måle på (Wright & Stone, 1979, s. 4). I denne masteroppgaven blir dette *behandlinger* og *omdanninger* i ulike representasjonssystem i forbindelse med addisjon av brøk. Videre må man konstruere oppgaver som er relevante for idéen og som kan lokke frem tegn av den tiltenkte variabelen i oppgavebesvarelsen hos personene man ønsker å måle (Wright & Stone, 1979, s. 4). For å utvikle oppgaver som omhandlet behandlinger og omdanninger i ulike representasjonssystemer i forbindelse med addisjon av brøk ble Duval (2006) sitt rammeverk benyttet. På bakgrunn av teori om addisjon av brøk, og hvordan man kan skape forståelse for prosedyren, valgte jeg i testen å ta med behandlingsoppgaver hvor elevene skulle gjøre behandlinger innenfor representasjonssystemet symboler, og omdanningsoppgaver hvor elevene skulle gjøre omdanninger fra symboler til illustrasjoner og motsatt. Innenfor representasjonssystemet *illustrasjoner* er både arealmodell og tallinje benyttet, siden disse illustrasjonene er sentrale i forbindelse med addisjon av brøk (Cramer et al., 2008; Siegler et al., 2010, s. 28).

Når man skal lære å addere brøker anbefaler Van de Walle et al. (2015, s. 403-404) å begynne med brøker hvor nevnerne er like. Deretter kan man gå videre til å addere brøker med ulike nevnere, men hvor den ene nevneren er multiplum av den andre. Til slutt kan man introdusere addisjon av brøker hvor nevnerne ikke er multiplum av hverandre og hvor begge nevnerne må endres for å få like nevnere. Årsaken til denne anbefalte progresjonen skyldes trolig at kompleksiteten i regnestykket øker gradvis. Av den grunn antas det at de ulike typene regnestykker har ulik vanskegrad. For å lage variasjon i vanskegrad består derfor testen av regnestykker hvor brøkene har like nevnere og av regnestykker hvor brøkene har ulike nevnere, og hvor den ene nevneren er multiplum av den andre, i tillegg til regnestykker med ulike nevnere hvor den ene nevneren *ikke* er multiplum av den andre. Van de Walle et al. (2015) anbefaler i tillegg å både inkludere addisjon av brøker hvor summen blir under én (ekte brøk) og addisjon av brøker hvor summen blir over én (uekte brøk). For å teste om det er forskjell i vanskegrad på regnestykker hvor summen blir mindre enn én og hvor summen blir større enn én, er begge typer regnestykker med i testen. For å redusere antall oppgaver i testen er det imidlertid bare addisjonsoppgaver med *like nevnere* som både har sum mindre enn én og større enn én. Når brøkene som skal adderes har ulike nevnere, og den ene nevneren ikke er multiplum av den andre, er det bare med oppgaver hvor arealmodellen inngår som illustrasjon. Dette for å redusere antall oppgaver og for å spare tid ved gjennomføring av testen.

Figur 8 gir en oversikt over oppgavetyper i testen. For å utvide måleinstrumentet og forsikre meg om at variabelen ble «kort nok» er det i tillegg med noen oppgaver som tester elevene på forkunnskaper jeg tror kreves for å kunne utføre addisjon av brøk. For å spare tid ved gjennomføring av testen er ikke oppgavene i testen satt i kontekst. Med oppgavene i kontekst ville det blitt mer lesing, noe som trolig hadde ført til at elevene hadde brukt lengre tid på gjennomføringen. Totalt består testen av 18 oppgaver, som igjen er delt i flere deloppgaver slik at det til sammen er 35 deloppgaver i testen. Testen i sin helhet ligger vedlagt (vedlegg 1 og vedlegg 2). Disse oppgavene vil da utgjøre variabelen hvor målene skal plasseres. Vedlagt ligger også en beskrivelse av oppgavenes hensikt og opprinnelse (vedlegg 3).



Figur 8. Ulike typer representasjonsoppgaver som er med i testen.

4.2 Pilotering av testen

Pilotstudier er en viktig del av et forskningsprosjekt (Cohen, Manion, Morrison, & Bell, 2011, s. 118), og pilotering av en test kan gjennomføres på ulike måter avhengig av hensikten med pilotstudien (Cohen et al., 2011, s. 492). I dette forskningsprosjektet er det gjennomført tre ulike pilotstudier av testen. Pilot 1 ble gjennomført på en medstudent, som i tillegg jobber i ungdomsskolen. Hensikten med denne piloteringen var blant annet for å få en indikasjon på tidsbruk, tilbakemeldinger på hvordan oppgavene kunne tolkes og løses, og hvordan testen opplevdes som en helhet. En tilbakemelding som jeg da fikk var at omdanningsoppgavene fra symbol til illustrasjon ble påvirket av illustrasjonene i omdanningsoppgavene fra illustrasjon til symbol. For å unngå at elevene fikk hjelp til å illustrere av de illustrasjonene som allerede var gitt, ble testen derfor delt i to deler. Den første delen av testen ble bestående av oppgaver hvor elevene skulle omdanne regnestykker fra symbol til illustrasjon, og den andre delen av testen ble bestående av de resterende oppgavene.

Pilot 2 ble gjennomført etter at testen var delt i to deler. Denne gangen fikk jeg to voksne personer utenfor fagmiljøet til å gjennomføre testen, og hensikten var å sjekke tidsbruk og klarhet i oppgaveinstruksene. Pilotdeltakerne fikk utdelt del 1 av testen først, og måtte levere inn del 1 før de fikk utdelt del 2 av testen. De brukte 50 minutter på gjennomføringen, og tilbakemeldingene var slik at jeg valgte å ikke gjøre noen endringer på testen før pilot 3.

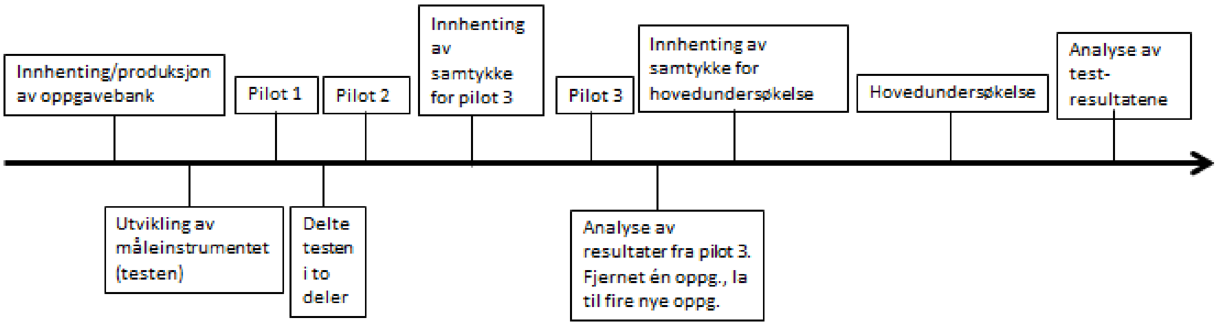
Pilot 3 ble gjennomført på 14 8.klasseelever. Hensikten med denne pilotering var blant annet for å sjekke om testen var egnet for 8. klassinger og å sjekke om testen kunne være et godt måleinstrument. Det vil si å sjekke testens reliabilitet, sjekke at oppgavene ikke var for enkle, at de heller ikke var for vanskelige og at testen kunne skille mellom elever. Før pilot 3 tok jeg kontakt med ledelsen til en ungdomsskole i Midt-Norge, som ga meg lov til å gjennomføre pilotstudien i en 8. klasse på skolen. Siden elevene var under 15 år måtte samtykkeskjema (vedlegg 6) sendes ut til hjemmene slik at foresatte kunne samtykke (NESH, 2016, s. 20). Pilot 3 ble gjennomført 1. november 2016. Elevene i pilot 3 hadde ikke jobbet med brøk tidligere dette skoleåret, men hadde kjennskap til brøk og addisjon av brøk fra tidligere skoleår. Elevene brukte mellom 45 og 60 minutter på gjennomføringen av testen, og ingen fikk gå ut av klasserommet før alle var ferdige. Det var ro i klasserommet under gjennomføringen, og jeg opplevde at elevene tok testen alvorlig.

På bakgrunn av resultater og analyser fra pilot 3 ble testen noe endret. En oppgave ble fjernet fordi den ikke ga den informasjonen jeg ville, og fire oppgaver (oppgave 5, 6, 8d og 17b) ble lagt til. Oppgave 5 og 6 ble lagt til for å undersøke hvilken representasjon av addisjon av brøk elevene foretrekker når de får velge blant flere representasjoner. Oppgave 8d og 17b ble lagt til for å kunne undersøke elevenes kompetanse i brøk som tallstørrelse/måleenhet grundigere. I tillegg markerte jeg enheten i oppgave 9e med tykkere linjer.

4.3 Gjennomføring av hovedundersøkelsen

Hovedundersøkelsen ble gjennomført på en annen ungdomsskole i Midt-Norge. 52 elever fra fire forskjellige 8. klasser deltok i undersøkelsen. På forhånd tok jeg kontakt med skolens ledelse for å høre om det var interesse for å delta i forskningsprosjektet. Denne fremgangsmåten er i tråd med det Cohen et al. (2011, s. 81) anbefaler. Deretter ble jeg satt i kontakt med en matematikklærer på 8.trinn som jeg presenterte prosjektet for. Tre uker før gjennomføringen var jeg på skolen for å presentere meg selv, informere om prosjektet og for å dele ut samtykkeskjema. Elevene ble blant annet fortalt at det skulle gjennomføres en brøktest, men at de ikke kom til å få karakter på testen, og at de heller ikke trengte å øve til den. Under informasjonen kunne elevene stille spørsmål om prosjektet, noe også Cohen et al. (2011, s. 80) anbefaler. Siden elevenes alder tilsier at foresatte må samtykke i elevenes deltakelse ble det i tillegg sendt ut en informasjonsmail til hjemmene. Undersøkelsen ble gjennomført 13. og 14. desember 2016. To klasser tok testen 13. desember og to klasser tok testen 14. desember. På begge dagene satte jeg i gang én klasse og var til stede i 30 minutter før jeg gikk til den andre klassen og satte i gang dem. I den andre klassen var jeg også til stede i starten, men gikk tilbake for å avslutte i den første klassen. Elevene var imidlertid aldri alene i klasserommet da det var andre lærere og assistenter til stede. Heller ikke ved denne skolen hadde de jobbet med brøk tidligere dette skoleåret, men tre klasser hadde hatt én temadag med brøk tidligere på høsten.

Før gjennomføringen av testen ble det gjentatt at de ikke skulle få karakter på testen, men at det ble forventet at de gjorde sitt beste. Tidligere var de kun blitt fortalt at temaet var brøk, nå ble det spesifisert at testen handlet om addisjon av brøk. Årsaken til at jeg ikke ville fortelle det tidligere var for å unngå at elevene øvde på addisjon av brøk, noe som kanskje ville påvirket resultatet. Siden elevene i pilot 3 ikke hadde hatt om brøk tidligere dette skoleåret ønsket jeg at det skulle være mest mulig likt mellom utvalgene, og av den grunn ville jeg ikke fortelle spesifikt tema til elevene på forhånd. For å spare tid under gjennomføringen ga jeg beskjed om å ikke bruke alt for mye tid på å tegne. Jeg tegnet en sirkel, et rektangel og en tallinje på tavlen og sa at de kunne tegne omtrent like nøyaktig som det jeg gjorde. Jeg viste også hvordan de raskt kunne fargelegge en rute ved å skravere den, og at jeg skulle skjønne at det var ment å fargelegge hele ruten. Hvis de ikke hadde to forskjellige farger tilgjengelig viste jeg dem hvordan de kunne prikke en annen rute og at jeg da skulle forstå at dette var en annen farge. Disse instruksene ble også gjort før gjennomføringen av pilot 3. Elevene fikk ikke bruke kalkulator, men fikk lov til å stille spørsmål underveis hvis det var noe som var uklart. Den første dagen av gjennomføringen brukte elevene mellom 45 og 60 minutter på gjennomføringen, og ingen fikk gå ut av klasserommet før alle var ferdige. Den andre dagen av gjennomføringen gikk brannalarmen under gjennomføringen. Den ene klassen måtte forlate klasserommet midt under testen, men fikk tilbake tiden de mistet på grunn av evakueringen. Den andre klassen skulle akkurat til å starte på testen da brannalarmen gikk. De kunne ikke få tilbake tiden de hadde mistet, og fikk derfor bare 45 minutter til rådighet på testen. De fleste ble likevel ferdige, men to elever rakk ikke å gjøre den siste oppgaven. Likevel vil jeg ikke tro at evakueringen hadde nevneverdig mye å si for resultatene. Bortsett fra evakueringen var det ro i alle fire klassene under gjennomføringen og jeg opplevde at elevene tok testen seriøst. *Figur 9* oppsummerer forskningsprosjektets gang fra oppstart til ferdig innsamlede data.



Figur 9. Forskningsprosjektets gang fra oppstart til ferdig innsamlede data.

4.4 Analyse av testresultater

Analysearbeidet av testresultatene er todelt. Først gjennomførte jeg kvalitative analyser av hver elevs besvarelse fra pilot 3 og hovedundersøkelsen. Den kvalitative analysen av testbesvarelsene ga meg innsikt i elevenes representasjonskompetanse og dannet grunnlag for å kunne kategorisere ulike typer besvarelser. Samtidig dannet den kvalitative analysen også dannet grunnlaget for å senere kunne gjennomføre kvantitative Rasch-analyser av testresultatene.

4.4.1 Kvalitativ analyse av testresultater og utvikling av kode- og rettemal

Kvalitativ dataanalyse handler blant annet om å betrakte, organisere og forklare dataene (Cohen et al., 2011, s. 537). Ved å studere testbesvarelsene etter pilot 3 og hovedundersøkelsen dannet jeg meg et bilde av hvilke svar som var mulige å gi på hver oppgave i testen, og på bakgrunn av en slik kvalitativ analyse utarbeidet jeg bokstavkoder for de ulike besvarelsene. Jeg observerte blant annet at det fantes gode og mindre gode svarmuligheter på en del oppgaver, selv om de ikke kunne sies å være direkte feil. Av den grunn ble det nødvendig å kategorisere ulike svarnivå på oppgavene, som igjen gir opphav til ulik poenggiving. Ved hjelp av teori satte jeg derfor ulike poeng på de ulike bokstavkodene, og dette har dannet grunnlaget for retting og poenggiving av testbesvarelsene. Jeg har også valgt å kode for ulike feil, for på den måten å få mest mulig innsikt i elevenes representasjonskompetanse. Kode- og rettemalen som jeg utviklet på bakgrunn av kvalitative analyser og brøkteori ligger vedlagt i vedlegg 4.

Det er nødvendig å påpeke at den kvalitative analysen av testbesvarelsene er gjennomført med et sosiokulturelt syn på læring. I et sosiokulturelt perspektiv er det ikke mulig å undersøke hvordan mennesker tenker, men hva mennesker gjør, sier eller skriver, altså hvordan de evner å mediere sin tenkning gjennom bruk av redskaper. Det vil si at man ikke kan uttale seg om elevers kompetanse, bare hvordan de medierer (/representerer) sin kompetanse ved hjelp av redskaper (Säljö, 2010, s. 120). I analysen har jeg altså lagt vekt på hvilken kompetanse elevene *viser*, og ikke hvilken kompetanse jeg tror og mener de har. Blant annet har jeg i analysen av omdanningsoppgavene fra symbol til illustrasjon prøvd å se om jeg, som en utenforstående person, hadde forstått hvilket regnestykke som var illustrert, uten at jeg hadde visst det på forhånd. I flere av illustrasjonsoppgavene viser elevene at de vet svaret på regnestykket, men lykkes ikke med å vise hvordan addendene settes sammen og utgjør en sum. Slike besvarelser har fått 0 poeng fordi de ikke klarer å mediere sin kompetanse ved hjelp av de medierende redskapene de blir bedt om å bruke.

Et utdrag fra kode- og rettemalen er gitt i *Figur 10*. Figuren viser de ulike svarnivåene på omdanningsoppgavene fra symbol til illustrasjon hvor arealmodellen inngår. Som figuren viser har oppgavene fått fem ulike svarnivå: 4, 3, 2, 1 og 0. For å få full score og 4 poeng på oppgavene måtte hele addisjonsprosessen være illustrert. Elevene som har illustrert addendene hver for seg, og svaret for seg har fått 3 eller 2 poeng, avhengig av om addendene «overlapper» eller ikke. Hvis addendene «overlapper» viser ikke illustrasjonen hvordan addendene settes sammen og utgjør helheten, noe den gjør hvis addendene ikke «overlapper», og av den grunn har jeg skilt mellom disse illustrasjonene. Årsaken til at slike illustrasjoner ikke får full score er at illustrasjonene ikke viser hva plusstegnet betyr, og at det derfor kan ligne på at illustrasjonen er tilpasset et regnestykke man på forhånd har løst med symboler. I tillegg har jeg valgt å sette ulike bokstavkoder for ulike feil som elevene gjør. På den måten kan jeg se hvor mange elever som gjør de ulike feilene, noe som gir meg en bedre innsikt i hva som eventuelt kan være utfordrende og vanskelig for elever. Noen elever har også valgt å ikke besvare enkelte oppgaver. På grunn av at det er vanskelig å vite om ubesvarte oppgaver skyldes at de var for vanskelige for elevene, at elevene ikke orket å gjøre dem eller at det ikke ble tid til å gjøre dem, har jeg valgt å kode oppgavene som ubesvarte og ikke som feilsvar (kode H, *Figur 10*).

Videre har jeg i rettinga av illustrasjonene godtatt at ikke alle delene har nøyaktig samme størrelse, siden de fleste illustrerte regnestykkene uten linjal og passer. At elevene måtte tegne på frihånd var et valg jeg tok for å spare tid under gjennomføringen av testen, men figurer som har store størrelsesforskjeller på delene har imidlertid ikke blitt godkjent og slike besvarelser har fått en egen bokstavkode (kode F, *Figur 10*). I oppgave 3a blir summen over én. Her burde et kriterium vært at elevene definerte enheten som ett objekt, med tekst eller på annet vis. Det er det imidlertid ingen elever som har gjort, og av den grunn har jeg valgt å se bort fra dette under arbeidet med å kode og rette besvarelser på oppgaven.

Svarkategorier	Kode 1	Kode 2
Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	4
Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper» ikke	B	3
Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper»	C	2
Illustrerer bare svaret/addendene	D	1
Legger sammen nevner med nevner	E	0
Deler ikke inn i like store deler	F	0
Annet	G	0
Ubesvart/ Udefinerbart	H	9

Figur 10. Utdrag fra kode- og rettemalen. Kodene viser koder og svarnivå for omdanningsoppgaver fra symbol til illustrasjon hvor arealmodellen inngikk som illustrasjon. (Årsaken til at kode H har fått 9 poeng er med hensyn til den kvantitative analysen som blir presentert senere).

Figur 11 viser kodene og poengene for omdanningsoppgavene fra symbol til illustrasjon hvor tallinjen inngikk. Som figuren viser har disse oppgavene fått tre ulike svarnivå: 2, 1 og 0. For å få full score og 2 poeng måtte hele addisjonsprosessen være illustrert. Elever som illustrerte addendene for seg og svaret for seg, men på samme tallinje, har fått 1 poeng. Det samme har elevene som bare har illustrert addendene eller bare svaret.

Svarkategorier	Kode 1	Kode 2
Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	2
Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg	B	1
Illustrerer bare svaret/ addendene	C	1
Tallinja viser heltall/del-hel-tenkning	D	0
Legger sammen nevner med nevner	E	0
Annet (f.eks. at de ikke lykkes med å illustrere addisjonsprosessen)	F	0
Ubesvart/ Udefinerbart	G	9

Figur 11. Utdrag fra kode- og rettemalen. Kodene viser koder og svarnivå for omdanningsoppgaver fra symbol til illustrasjon hvor tallinjen inngikk som illustrasjon. (Årsaken til at kode G har fått 9 poeng er med hensyn til den kvantitative analysen som blir presentert senere).

På omdanningsoppgavene fra illustrasjon til symbol valgte jeg å sette tre ulike svarnivå: 2,1 og 0. For å få full score med 2 poeng måtte elevene identifisere og skrive ned hele regnestykket, men for å få 1 poeng holdt det å skrive ned bare summen eller bare regnestykket. På oppgavene hvor tallinjen inngikk som representasjon valgte jeg også å gi 2 poeng til de som skrev regnestykket med desimaltall. Dette fordi det ikke var presisert i oppgaveteksten at svaret skulle være på brøkform. På omdanningsoppgavene fra illustrasjon til symbol hvor arealmodellen inngikk som illustrasjon har flere elever valgt å svare med hele tall. På grunn av at jeg ikke vet om et heltallssvar skyldes misoppfattelser av brøk som del av en helhet, eller om eksempelet i oppgave 9 (se vedlegg 2) er villedende, har jeg valgt å kode disse besvarelsene som udefinerbare.

Ved å kategorisere og kode elevenes testbesvarelser har jeg fått innsikt i hvilken representasjonskompetanse elevene viser. Samtidig har poenggivinga dannet grunnlaget for å kunne gjøre testresultatene om til målinger av representasjonskompetanse og vanskegrad.

4.4.2 Kvantitativ Rasch-analyse av testresultatene

Som tidligere nevnt har jeg valgt å gjøre Rasch-analyser av testresultatene. Rasch-modellen oppfyller kravet til invariante målinger, og gir mer presise mål enn den klassiske testteorien (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. 3). Siden den kvalitative analysen av testbesvarelsene viste at det ble nødvendig med flere svarnivå på flere av oppgavene i testen ble jeg nødt til å benytte «The Partial Credit Rasch Model» som analysemodell. I Rasch-analysen av testresultatene er software-programmet Winsteps blitt benyttet. Winsteps er et program hvor man kan utføre Rasch-analyser av datasett, og er utviklet av Mike Linacre (Bond & Fox, 2015, s. xviii). Etter at jeg hadde rettet alle testbesvarelsene la jeg resultatene inn i Winsteps, og deretter har Winsteps kalkulert kompetansenivå på elevene og vanskegrad på oppgavene ut fra Rasch-modellens matematiske formler. I analysen er det blant annet disse verdiene jeg tar utgangspunkt i for å finne svar på mine forskningsspørsmål. For eksempel vil vanskegraden til oppgaver undersøkes gjennom oppgavenes logit-mål beregnet av Winsteps, og alle mål på grupper av oppgaver vil i analysen bli oppgitt som (gjennomsnitt ± standardavvik) med mindre noe annet er oppgitt.

I og med at jeg har definert høyeste svarnivå som 4 i Winstepsfila, har jeg satt kode 9 på ubesvarte oppgaver og udefinerbare besvarelser (se *Figur 10* og *Figur 11)*. Winsteps vil tolke denne koden som «*missing data*», og koden vil derfor ikke påvirke resultatene (Bond & Fox, 2015, s. 327). I analysen av testresultatene har jeg valgt å ta med resultatene fra pilot 3 i tillegg til resultatene fra hovedundersøkelsen. Siden oppgave 5, 6, 8d og 17b ble lagt til testen etter gjennomføringen av pilot 3, har ikke pilotelevene fått mulighet til å besvare disse oppgavene. På oppgavene 5, 6, 8d og 17b har pilotelevenes besvarelser derfor blitt kodet som «missing data». Det at elevene ikke har gjort alle oppgavene i testen vil derfor ikke påvirke deres måleresultat.

4.5 Analyse av måleinstrumentets kvalitet

Det må påpekes at Rasch-modellen er et teoretisk ideal, og ingen virkelige data vil passe perfekt til Rasch-modellen. Derfor er analyser av hvor godt dataene passer til modellen nødvendig som en slags kvalitetskontroll (Bond & Fox, 2015, s. 163). Slike analyser vil fortelle oss hvordan elevene presterer i forhold til det man ønsker, hvor godt oppgavene fungerer i forhold til Rasch-modellen og om testen er et egnet måleinstrument. Nedenfor vil jeg beskrive hvordan jeg vil sjekke kvaliteten på instrumentet og presentere viktige begreper i denne sammenhengen.

4.5.1 Tilpasningsstatistikk

Blant annet brukes tilpasningsstatistikk for å kvalitetssjekke måleinstrumentet. Denne statistikken fremstilles av Winsteps og forteller oss hvor stor eller liten variasjon det er i datamaterialet i forhold til det som blir antatt av Rasch-modellen. Vanligvis fokuseres det på to aspekter av tilpasning, infit og outfit, og disse verdiene beregnes på to forskjellige måter, og gir ulik informasjon om hvordan datamaterialet passer til modellen (Bond & Fox, 2015, s. 269). Infit er mer sensitiv for besvarelser av personer som ligger rundt oppgavens vanskegrad (inlier-sensitiv), mens outfit er mer sensitiv for besvarelser av personer som ikke ligger rundt oppgavens vanskegrad (outlier-sensitiv). Høye eller lave infitverdier kan være vanskelig å avdekke, mens høye eller lave outfitverdier kan skyldes slurvefeil eller gjetting med heldig utfall. Disse er vanligvis enkle å avdekke og eventuelt fjerne fra datasettet (Linacre, 2002). Høye eller lave outfitverdier er mindre truende for datasettet enn høye eller lave infitverdier, og derfor vil jeg i analysen av måleinstrumentet legge mest vekt på infitverdiene, noe som er vanlig praksis i Rasch-analyser (Bond & Fox, 2015, s. 67). Ved første gjennomgang av analyseresultatene valgte jeg imidlertid å fjerne én besvarelse fra én elev på oppgave 9a, i og med at denne besvarelsen ga høy outfit og mest sannsynlig skyldtes en slurvefeil. Denne besvarelsen blir dermed ikke med i videre analyser.

Infit- og outfitverdier kan rapporteres på to ulike måter. I denne masteroppgaven legger jeg vekt på «*mean-square-values*». Disse verdiene viser størrelsen på tilfeldighetene i datasettet (Linacre, 2002). Det er ønskelig at disse verdiene ligger så nært én som mulig, men litt variasjon godtas. Hvilke verdier på infit- og outfit- «mean-square-values» som godtas varierer fra artikkel til artikkel, men Linacre (2002) hevder at infit- og outfitverdier *(mean-square-*values) mellom 0,50 og 1,50 er tilstrekkelig for å gjøre målinger og disse verdiene vil også være gjeldene for denne oppgaven. En infitverdi på 1,50 indikerer 50 % mer variasjon i dataene enn forventet ut fra Rasch-modellen. En outfitverdi på 0,50 indikerer 50 % mindre variasjon i dataene enn det Rasch-modellen forventet (Bond & Fox, 2015, s. 269). Verdier under 0,50 kan sies å overdiskriminere, de passer for godt til å være sannsynlig ifølge Rasch-modellen, mens verdier over 1,50 kan sies å underdiskriminere. Det vil si at de er for uforutsigbare i forhold til Rasch-modellen (Bond & Fox, 2015, s. 272). Infit- og outfitverdier for hver oppgave vil dermed kunne fortelle hvor godt hver enkelt oppgave i testen passer til Rasch-modellen.

4.5.2 Endimensjonalitet

Winsteps diagnostiserer også dimensjonaliteten i datasettet, og finner med det svar på om oppgavene i oppgavesettet bidrar til mål langs en endimensjonal latent variabel, eller om det må tas høyde for flere underdimensjoner av variabelen (Bond & Fox, 2015, s. 40). Når man skal finne ut av om måleinstrumentet er endimensjonalt eller ikke må man se på verdiene som forteller hvor mye av variasjonen i resultatene som kan forklares av Rasch-dimensjonen (Raw variance explained by…), sammenlignet med hvor mye av variasjonen som ikke kan forklares med Rasch-dimensjonen (unexplnd variance) (Linacre, u.å-b). Dimensjonaliteten i et måleinstrument er imidlertid komplisert, fordi det avhenger like mye av hensikten bak bruken av måleinstrumentet. Man må blant annet vurdere om måleinstrumentet vil bli forbedret ved å eventuelt fjerne en dimensjon, eller om det vil miste noe av sin hensikt (Linacre, u.å-b). Verdiene som Winsteps gir er dermed ikke like viktig som innholdet i de oppgavene som eventuelt skiller seg ut. Hvis innholdet i oppgavene som skiller seg ut er forskjellig fra de andre oppgavene, har man muligens en egen dimensjon (Linacre, 2012, s. 19). Det blir derfor viktig å undersøke innholdet i oppgavene som skiller seg ut. Hvis det er snakk om flere dimensjoner forventer vi også at personmålene skal være forskjellige for de ulike dimensjonene slik at de ulike dimensjonene forteller ulike historier (Linacre, 2012, u.å-a).

4.6 Validitet og reliabilitet i studien

Sentralt i forskning er kravene om validitet og reliabilitet. Reliabilitet er knyttet til hvor pålitelig forskningen er og er en nødvendig forutsetning for validitet i forskningen (Cohen et al., 2011, s. 179 og 199). Hvis forskningen skal være reliabel må det bevises at de samme resultatene ville ha oppstått hvis forskningen var gjennomført på en annen (men lik) gruppe respondenter i samme kontekst (Cohen et al., 2011, s. 199). Det er imidlertid mange faktorer som kan påvirke reliabiliteten til en test. Når på døgnet testen gjennomføres, hvilken tid på året testen gjennomføres, lengden på testen, motivasjon og seriøsitet hos testdeltakerne, testnerver hos deltakerne og måten testen blir rettet på er alle faktorer som kan påvirke reliabiliteten på testen (Cohen et al., 2011, s. 210). Gjennom å bruke Winsteps som analyseprogram får man et mål på hvor godt oppgavene i testen og testdeltakerne passer til Rasch-modellen og gir dermed også et mål på reliabiliteten i forskningen. Disse verdiene vil bli presentert i starten av analysekapittelet. Validitet er knyttet til gyldigheten til forskningen, blant annet til ærlighet, grundighet og objektiviteten til forskeren. Gjennom nøyaktige datainnsamlinger, et tilpasset måleinstrument og nøyaktige statistiske behandlinger kan validiteten i et forskningsprosjekt økes (Cohen et al., 2011, s. 179). Reliabilitet og validitet i dette forskningsprosjektet har jeg prøvd å holde ved å blant annet:

- gjennomføre pilotstudier for å sjekke at oppgavene måler det jeg ønsket at de skulle måle
- holde varigheten på testen til maksimalt 60 minutter for å sikre best mulig konsentrasjon, motivasjon og innsats hos testdeltakerne
- være åpen om datainnsamling, retting og analyse av testresultater
- presentere statistiske mål på måleinstrumentets kvalitet (presenteres i analysekapittelet)
- Sammenligne resultatene med tidligere forskningsresultater

Å være oppmerksom på og reflektere over faktorer som kan påvirke reliabilitet og validitet i forskningen er viktig, men selv om målet bør være å minimere faktorer som reduserer validiteten så mye som mulig, er det likevel ikke mulig at forskning blir 100 % valid (Cohen et al., 2011, s. 179).

4.7 Etiske forholdsregler

Som forsker må man forholde seg til forskningsetiske retningslinjer (NESH, 2016), noe som innebærer at en del etiske forholdsregler må tas i forbindelse med planlegging og gjennomføring av et forskningsprosjekt. Dette handler blant annet om respekt for forskningsdeltakernes frihet og medbestemmelse (NESH, 2016, s. 12). Ved oppstart av prosjektet ble det søkt om godkjenning av Norsk senter for forskningsdata (NSD), og ingen datainnsamling ble gjort før prosjektet var godkjent. Videre ble elevene informert ved at jeg var på skolen og fortalte om forskningsprosjektets formål, hvordan data skulle behandles og hva deltakelse i prosjektet innebar. Elevenes foresatte ble også informert gjennom en mail og et informert samtykkeskjema (se vedlegg 6). Elevene ble informert om at det var frivillig å delta og at de når som helst kunne trekke seg fra prosjektet, noe som er i tråd med de forskningsetiske retningslinjene (NESH, 2016). Samtykke til deltakelse ble gitt gjennom at elevene fysisk leverte inn et underskrevet samtykkeskjema.

Under gjennomføring av pilot 3 og hovedundersøkelsen fikk ikke elevene lov til å skrive navn på oppgaveheftene. Elevene ble i stedet tildelt hvert sitt nummer, og jeg gikk rundt med en navneliste for å koble numrene med elevenes fornavn. Nummer og navneliste ble benyttet av to årsaker: for å kunne koble sammen del 1 og del 2 av testen og for å kunne sjekke nummererte besvarelser opp mot samtykkeskjema for å forsikre meg om at det ikke ble med besvarelser fra noen som ikke hadde samtykket til deltakelse. Navnelistene er etter gjennomføringen blitt oppbevart adskilt fra oppgavebesvarelsene, og under retting og analyse har jeg kun sett på elevenes nummer. I analysen har jeg endret numrene på elevene, slik at det ikke skal være mulig å koble en besvarelse til en bestemt elev. På denne måten oppfylles kravet om konfidensialitet i forskningsstudien (NESH, 2016, s. 16 og 18). Ved prosjektets slutt vil all data bli anonymisert i henhold til NSD sine retningslinjer.

5.0 Analyse

For å kunne besvare forskningsspørsmålene som handler om måling av oppgavers vanskegrad og elevers representasjonskompetanse ble det først nødvendig å utvikle et måleinstrument. Først i analysedelen presenteres derfor resultater som forteller hvor godt testen passer som et måleinstrument. Med oppgavers vanskegrad menes i denne studien oppgavenes logit-mål, og for å si noe om elevenes representasjonskompetanse brukes både elevenes logit-mål og kvalitative analyser av elevenes besvarelser. Resultatene fra pilot 3 er lagt til slik at besvarelser fra 66 elever inngår i analysen. Analysekapittelet er oppdelt etter metode, det vil si at kvantitative resultater presenteres før kvalitative resultater. I tillegg er analysekapittelet oppdelt slik at fokus først rettes mot oppgavene i testen og deres vanskegrad, før fokus rettes mot elevene og deres representasjonskompetanse.

5.1 Testen som måleinstrument

Ved å bruke Rasch-analyser får man blant annet et mål på personers kompetansenivå og oppgavers vanskegrad, og både kompetansenivå og vanskegrad måles i logits. Programmet Winsteps gir i tillegg mål på hvor godt oppgavene i testen og deltakerne i undersøkelsen passer til Rasch-modellen, og *Tabell 2* gir en oppsummering av disse verdiene.

Tabell 2. Gjennomsnittlig oppgave- og elev-estimat samt testens reliabilitet.

Statistikk	Oppgaveestimat (35 deloppgaver)	Elevestimat (66 elever)
Gjennomsnittsverdi	0,00	0,37
Standardavvik	1,89	1,23
Reliabilitet av estimatene	0,95	0,89

Tabellen viser at oppgavenes gjennomsnittlige vanskegrad er definert til å være 0 logit, noe som er standard i Rasch-modellen (Bond & Fox, 2015, s. 70). Standardavviket på oppgavenes vanskegrad varierer imidlertid fra test til test, og i denne testen er standardavviket på ± 1,89 logits, noe som betyr at en stor del av oppgavene befinner seg innenfor området mellom -1,89 logits og 1,89 logits. Elevenes gjennomsnittlige kompetanse er estimert til å være 0,37 ± 1,23 logits. At elevenes gjennomsnittlig kompetanse ligger over gjennomsnittlig vanskegrad på oppgavene indikerer at testen var litt for lett for gjennomsnittet av elevene (Bond & Fox, 2015, s. 73). Reliabiliteten på oppgaveestimatet er på 0,95, noe som betyr at det er stor sannsynlighet for at estimatene av oppgavenes vanskegrad blir de samme hvis vi gir testen til et annet passende utvalg av elever (Bond & Fox, 2015, s. 70). Reliabiliteten på elevenes kompetanse er på 0,89. Dess høyere denne verdien er, dess større sannsynlighet er det for at estimatene av elevenes kompetanse blir de samme hvis de samme elevene gjennomfører en liknende test. En verdi på 0,89 er innenfor akseptable grenser i så måte (Bond & Fox, 2015, s. 73).

Disse verdiene gir en oppsummering av hvor godt Rasch-modellen passer til de innsamlede dataene. Selv om disse verdiene gir brukbare hint må man gå dypere inn i analysen for å få mer nøyaktige indikasjoner på hvor godt dataene faktisk passer til Rasch-modellen (Bond & Fox, 2015, s. 71). Først da kan man finne ut om testen er et brukbart måleinstrument eller om måleinstrumentet vil forbedres ved å fjerne noen oppgaver som ikke passer særlig godt til modellen. *Tabell 3* viser en oversikt over mean-square infit- og outfitverdier på oppgavene i testen. Gjennomsnittlig infitverdi på oppgavene er på 0,97 ± 0,20 logits. Laveste infitverdi på en oppgave er på 0,65, noe som betyr at denne oppgaven har 35 % mindre variasjon i resultatene enn det Rasch-modellen forventet. Høyeste infitverdi er 1,49, noe som betyr at oppgaven har 49 % mer variasjon i resultatene enn det Rasch-modellen forventet. Alle oppgavene er dermed innenfor Linacre (2002) sine akseptable grenseverdier på 0,50 og 1,50. Gjennomsnittlig outfitverdi på oppgavene (0,90 ± 0,41 logits) antyder imidlertid at en del oppgaver har for lav outfitverdi. Som *Tabell 3* viser er 0,07 laveste outfitverdi. Dette er en ekstremt lav verdi, og oppgaven har mye mindre variasjon i datasettet enn det Rasch-modellen forventet. Høyeste outfitverdi er 1,84, og oppgaven med denne verdien har 84 % mer variasjon i resultatene enn det Rasch-modellen forventet. Som nevnt i teoridelen er upassende outfitverdier mindre truende for målingene enn upassende infitverdier (Linacre, 2002), og på grunn av at alle oppgavene har akseptable infitverdier, og i tillegg er viktige for hensikten til studien, valgte jeg å ikke fjerne noen oppgaver før videre analyser.

Tabell 3. Oversikt over infit- og outfitstatistikk.

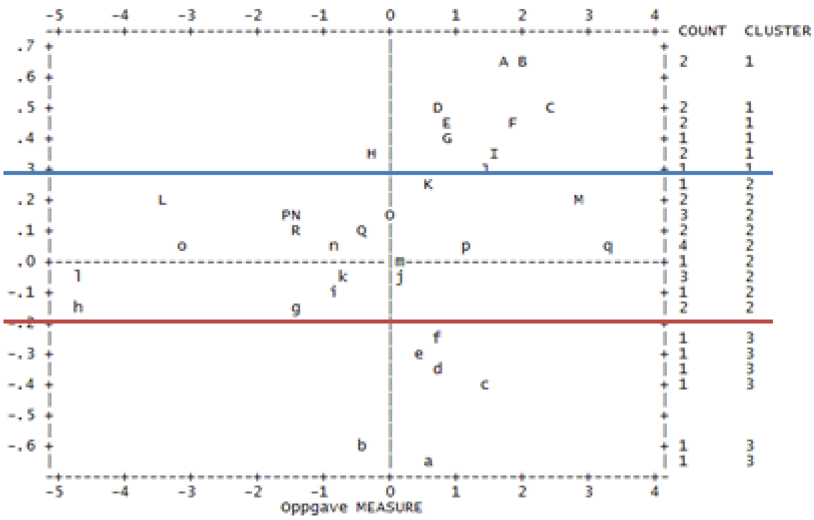
Statistikk	Infit (35 deloppgaver)	Outfit (35 deloppgaver)
Gjennomsnitt (MNSQ)	0,97	0,90
Standardavvik	0,20	0,41
Min.-verdi	0,65	0,07
Max.-verdi	1,49	1,84

5.1.1 Underdimensjoner av den latente variabelen *addisjon av brøk*

Et viktig prinsipp i alle målinger er prinsippet om endimensjonalitet, det at vi kun skal måle én faktor av gangen (Bond & Fox, 2015, s. 40). I Rasch-målinger ønsker vi at variasjoner i prestasjoner skal skyldes varierende kompetanse, og at ingen andre faktorer påvirker resultatet. *Tabell 4* viser at målingene bare kan forklare 52,5 % av variansen i datasettet (Raw variance explained by measures). Dette er bare litt over halvparten av forskjellene hos de målte elevene, noe som indikerer at det må være noe annet som påvirker målingene (Bond & Fox, 2015, s. 130). Videre undersøkelser av *Tabell 4* og tabell 23.1 i Winsteps (*Figur 12*) forteller meg at måleinstrumentet kan bestå av tre underdimensjoner.

Tabell 4. Dimensjonsanalyse i Winsteps

```
     Table of STANDARDIZED RESIDUAL variance in Eigenvalue units = Oppgave information units
                                           Eigenvalue   Observed    Expected
Total raw variance in observations     =      73.6616 100.0%          100.0%
  Raw variance explained by measures   =      38.6616  52.5%           55.5%
    Raw variance explained by persons  =      21.7469  29.5%           31.2%
    Raw Variance explained by items    =      16.9147  23.0%           24.3%
  Raw unexplained variance (total)     =      35.0000  47.5% 100.0%    44.5%
    Unexplned variance in 1st contrast =       3.8067   5.2%  10.9%
    Unexplned variance in 2nd contrast =       2.8695   3.9%   8.2%
    Unexplned variance in 3rd contrast =       2.5832   3.5%   7.4%
```



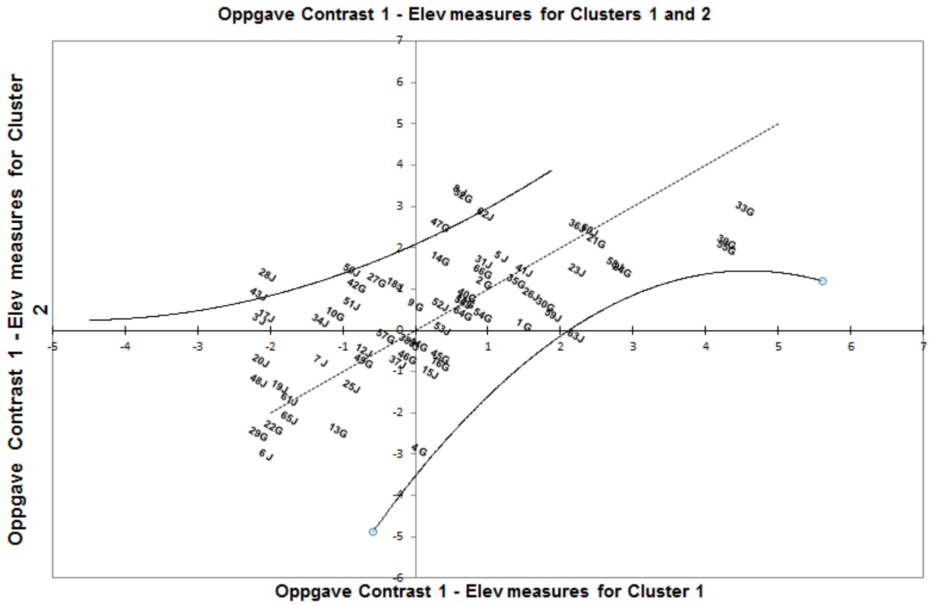
Figur 12. Tabell 23.1 i Winsteps. Beregning av dimensjoner i Winsteps. Figuren antyder at den latente variabelen «addisjon av brøk» kan bestå av tre underdimensjoner.

Av *Figur 12* ser vi at den røde og den blå streken skiller mellom oppgaver i tre ulike «clustere». For å finne ut om dette er noe jeg bør ta hensyn til i analysen av elever og oppgaver måtte oppgavene i hver cluster studeres for å se om oppgavene i hver cluster har noe til felles og om de utgjør en forskjell fra de andre oppgaveclustrene. *Tabell 5* viser at alle oppgavene i cluster 1, bortsett fra én oppgave har tallinje som illustrasjonstype, mens fire oppgaver i cluster 3 inneholder arealmodell som illustrasjonstype. Dette tyder altså på at tallinjeoppgaver og arealmodelloppgaver kan utgjøre to ulike underdimensjoner av den latente variabelen «addisjon av brøk».

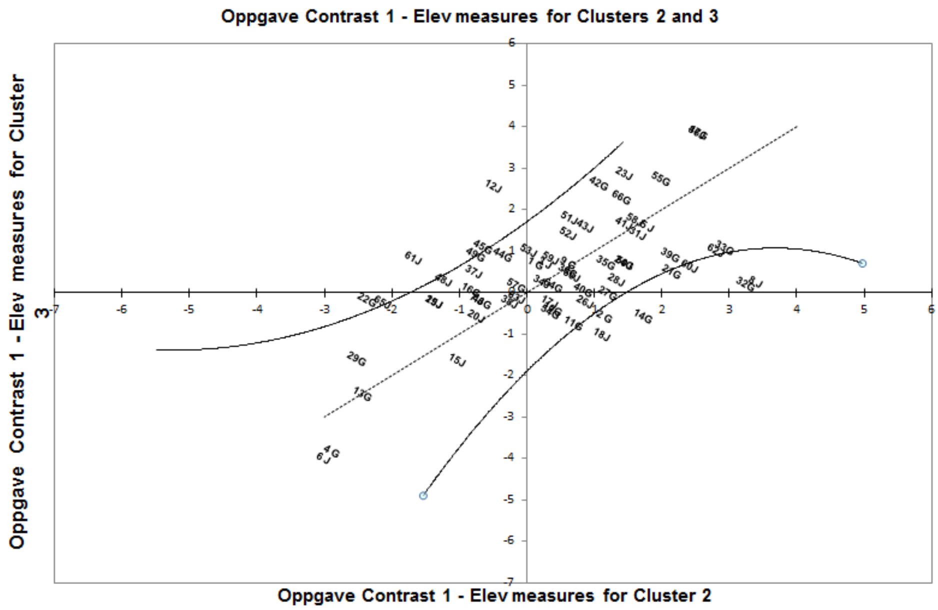
Tabell 5. Viser hvilke oppgaver som havner i cluster 1 og 3, og hvilke likhetstrekk oppgavene i hver cluster har.

Cluster 1 (oppgaver over den blå streken i *Figur 12*)	Illustrasjonstype	**Cluster 3** (oppgaver under den røde streken i *Figur 12*)	Illustrasjonstype
A (oppgave 1b)	Tallinje	a (oppgave 2a)	Arealmodell
B (oppgave 3b)	Tallinje	b (oppgave 1a)	Arealmodell
C (oppgave 8c)	Tallinje	c (oppgave 4)	Arealmodell
D (oppgave 8d)	Tallinje	d (oppgave 3a)	Arealmodell
E (oppgave 17b)	Tallinje	e (oppgave 6)	Tallinje
F (oppgave 2b)	Tallinje	f (oppgave 15)	-
G (oppgave 9c)	Tallinje		
H (oppgave 17a)	Tallinje		
I (oppgave 12)	Tallinje		
J (oppgave 18)	-		

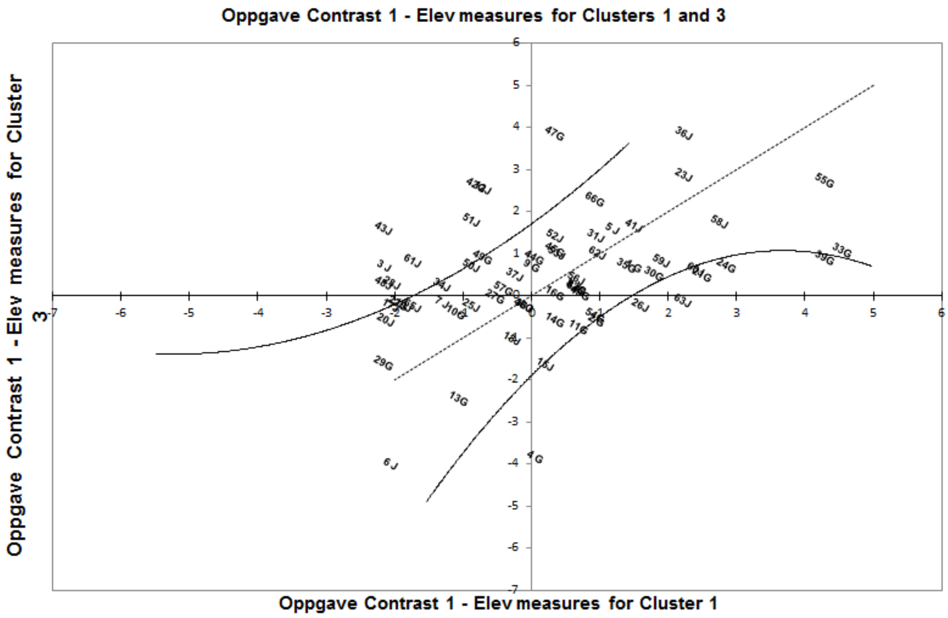
Årsaken til at det oppstår underdimensjoner kan være at noen elever presterer godt på oppgavene i cluster 1, og dårlig på oppgaver i cluster 3 og omvendt. *Figur 13, Figur 14* og *Figur 15* viser en sammenligning av elevers mål ut fra hvilke oppgaver de blir målt med. Alle elevene som faller innenfor de buede linjene får ikke statistisk forskjellige mål i de ulike clustrene, mens elever som faller utenfor får endrede mål (Linacre, u.å-a). *Figur 13* viser at det er snakk om seks elever som får litt endrede mål avhengig av om de måles med oppgaver i cluster 1 eller cluster 2, *Figur 14* viser at det er ni elever som faller utenfor de buede linjene og som derfor får forskjellige mål for cluster 2 og cluster 3 og *Figur 15* viser at det er fjorten elever som faller utenfor de buede linjene og som får forskjellige mål for cluster 1 og cluster 3.



Figur 13. Mål på elever, cluster 1 mot cluster 2.



Figur 14. Mål på elever, cluster 2 mot cluster 3.



Figur 15. Mål på elever, cluster 1 mot cluster 3.

Analysene viser altså at noen elever får ulike mål for de ulike dimensjonene. Hvis for eksempel måleinstrumentet skal brukes til å måle elevers kompetanse i vurderingsøyemed kan det derfor, for å få mest mulig nøyaktige målinger, være hensiktsmessig å fjerne oppgavene som ligger i cluster 1 og cluster 3. I min studie er jeg imidlertid interessert i å sammenligne behandlingsoppgaver mot omdanningsoppgaver og å sammenligne arealmodelloppgaver mot tallinjeoppgaver. Siden mange omdanningsoppgaver ligger i cluster 1 og cluster 3, mens alle behandlingsoppgavene ligger i cluster 2 ville det å fjerne oppgavene i cluster 1 og 3 ført til at testen mistet noe av sin hensikt. Sammen med behandlingsoppgavene i cluster 2 er det også en blanding av tallinjeoppgaver og arealmodelloppgaver, og i tillegg er alle oppgavene i testen knyttet til representasjonssystemet symboler, enten ved å behandle symboler eller ved å omdanne til eller fra symboler. Clustrene er derfor ikke helt løsrevet fra hverandre, og av den grunn velger jeg å ikke fjerne noen oppgaver, og å beholde måleinstrumentet som det er. Likevel er jeg oppmerksom på at de ulike illustrasjonstypene kan utgjøre to ulike dimensjoner, og at dette påvirker kvaliteten på måleinstrumentet i negativ retning, siden endimensjonalitet er et viktig prinsipp i alle målinger (Bond & Fox, 2015, s. 40).

For videre analyser har jeg valgt å utelate oppgavene som testet forkunnskaper i forbindelse med addisjon av brøk, for å fokusere på oppgaver som gikk direkte på behandling og omdanning av regnestykker. En oversikt over alle testoppgavenes vanskegrad er vist i et «variable map» som ligger vedlagt (vedlegg 5).

5.2 Oppgavers ulike vanskegrad

I sammenligningen av oppgavers vanskegrad velger jeg å se bort fra behandlingsoppgavene 11a og 11c, i og med at disse regnestykkene bestod av brøker med like tellere, noe ingen av regnestykkene i omdanningsoppgavene gjorde. Jeg velger også å se bort fra oppgave 13, hvor enheten var to objekter og omdanningen var fra illustrasjon til symbol. Dette fordi det ikke var med en oppgave hvor elevene skulle gjøre en omdanning fra symbol til illustrasjon hvor de skulle illustrere med to objekter som enhet. Det gir derfor ingen mening å ta med disse oppgavene i sammenligningen.

Figur 16 viser oppgaver og elever i et «variable map». Her er oppgavene delt opp i kategorier og angitt med oppgavenummer til høyre i kartet. Elevene er vist på venstre side av kartet, og er representert som kryss. Den vertikale linjen i midten representerer logitskalaen som brukes til å beskrive både elevenes kompetansenivå og oppgavenes vanskegrad. Både oppgavenes vanskegrad og elevenes kompetansenivå øker med økende logits. Det vil si at de enkleste oppgavene befinner seg nederst på kartet med negative logits, og at de gradvis øker i vanskegrad oppover langs logitskalaen. Elevers kompetansenivå blir fremstilt på samme måte med økende kompetanse oppover på kartet. Siden logitskalaen har jevne enheter, vil like avstander på kartet beskrive like verdier.

5.2.1 Kompleksiteten i regnestykket

For å lage variasjon i vanskegrad på oppgavene i testen ble det på forhånd antatt at regnestykker har ulik vanskegrad avhengig av om brøkene som skal adderes har like nevnere eller ikke. Videre ble det antatt at regnestykker av brøker med ulike nevnere, men hvor den ene nevneren er multiplum av den andre, er enklere regnestykker enn regnestykker av brøker med ulike nevnere, og hvor den ene nevneren ikke er multiplum av den andre. Analysene bekreftet at antakelsene om økende vanskegrad ut fra økende kompleksitet i regnestykket stemte for dette datamaterialet. I testen var det i tillegg både regnestykker med sum under én og regnestykker med sum over én. Dette for å teste om det er forskjell i vanskegrad avhengig av om summen er større eller mindre enn én, noe analysene av datamaterialet viste at det var. *Tabell 6* viser at den gjennomsnittlige vanskegraden varierer både ut fra kompleksiteten i regnestykkene og ut fra om summen ble større eller mindre enn én. Regnestykker med like nevnere, og sum under én har fått lavest gjennomsnittlig vanskegrad, og vil heretter bli omtalt som regnestykker av *grad 1*. Regnestykker med ulike nevnere, hvor den ene nevneren er multiplum av den andre har fått nest lavest gjennomsnittlig vanskegrad, og vil heretter bli omtalt som regnestykker av *grad 2*. Regnestykker med like nevnere, men hvor summen blir over én har fått nest høyeste gjennomsnittlige vanskegrad, og vil heretter bli omtalt som regnestykker av *grad 3*. Regnestykker med ulike nevnere, og hvor den ene nevneren ikke er multiplum av den andre har fått høyest gjennomsnittlig vanskegrad og vil heretter bli omtalt som regnestykker av *grad 4*.

```
MEASURE Elev - MAP - Oppgave
         <more>|<rare>
    4           +
                |T
                |
                |
                |
                |
    3           +
               T|                        9e
            X   |
            X   |
                |
           XX   |
    2       X   +                                                  3b
           XX   |S                                                 2b      1b
           XX  S|
        XXXXX   |                        12
           XX   |                                                  4
                |                        9d
    1   XXXXX   +
        XXXXX   |                        9c
          XXX   |                        14                        3a
        XXXXX   |                                                  2a
       XXXXXX  M|
          XXX   |                        9b
    0    XXXX   +M 11e
        XXXXX   |
           XX   |  11d
            X   |                                                  1a
            X   |
           XX  S|  11f
   -1      XX   +
                |
                |
           XX   |                          9a
                |
                |S
   -2          T+
            X   |
                |
            X   |
                |
                |
   -3           +
            X   |  11b
            X   |
                |
                |
                |T
   -4           +

                 Behandling            Omdanning                Omdanning
                 av symbol             fra illustrasjon         fra symbol til
                                       til symbol (OIS)         illustrasjon (OSI)
```

Figur 16. «Variable map» som viser behandlingsoppgavene og omdanningsoppgavene adskilt fra hverandre. Oppgavene som er markert med grønn farge er oppgaver hvor arealmodellen inngår som illustrasjon, mens oppgavene som er markert med blå farge er oppgaver hvor tallinjen inngår som illustrasjon.

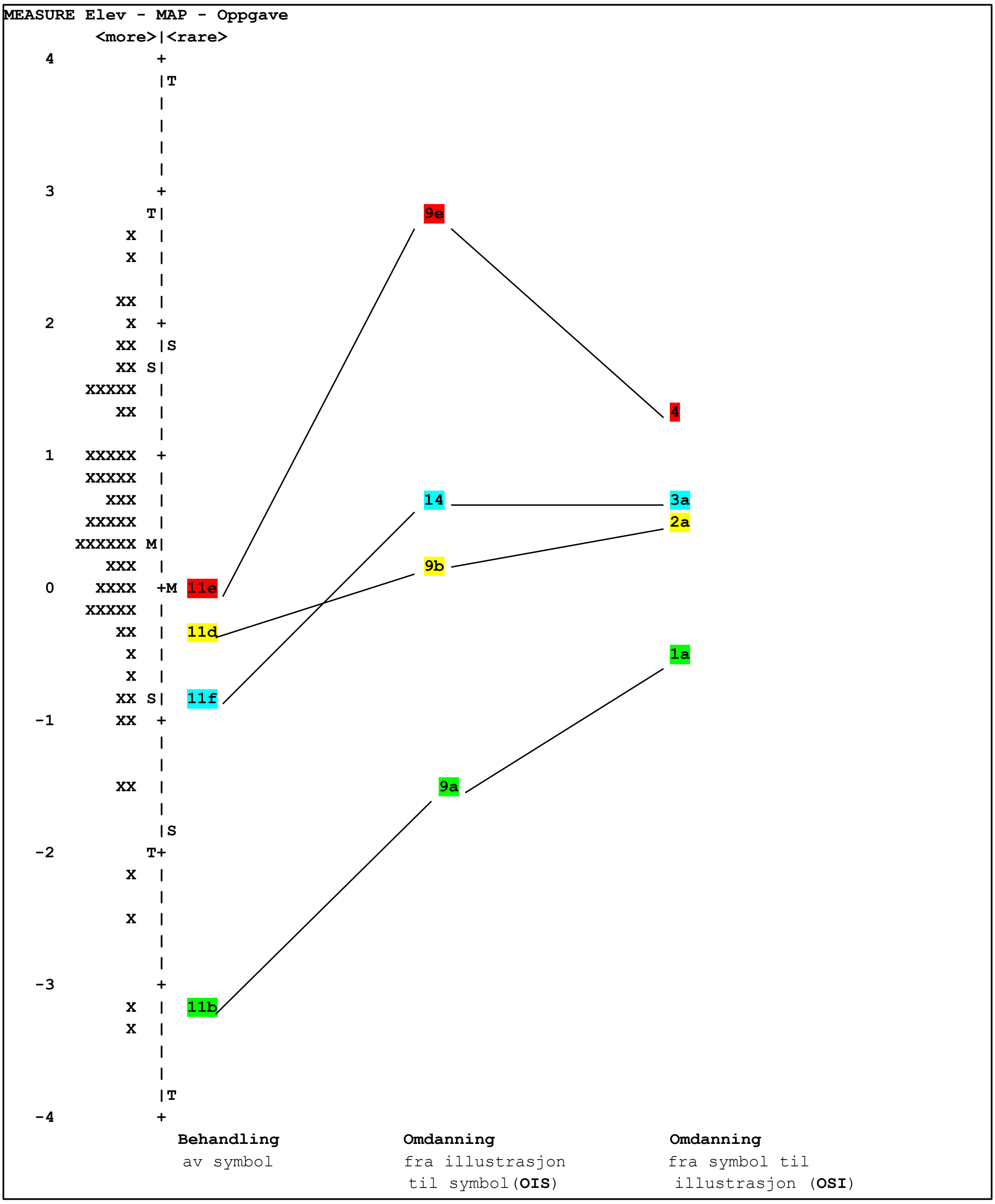
5.2.2 Er omdanningsoppgaver vanskeligere enn behandlingsoppgaver?

Selv om både behandlinger og omdanninger er transformasjoner på representasjoner som byr på vanskeligheter for elevene, er omdanning en mer kompleks transformasjon enn det behandling er (Duval, 2006, s. 112 og 115). Den økte kompleksiteten i en omdanning viser seg også i denne studien ved at omdanningsoppgavene i testen har fått høyere vanskegrad sammenlignet med vanskegraden på behandlingsoppgavene i testen. Dette resultatet fremstilles i *Figur 16*. I *Figur 16* vises behandlingsoppgavene nærmest logitskalaen, og omdanningsoppgavene i de to kolonnene lengst til høyre i kartet (markert med grønn og blå farge). Av figuren ser man at de fleste omdanningsoppgavene plasserer seg over behandlingsoppgavene på logitskalaen, noe som betyr at de har høyere vanskegrad. Forskjellen i vanskegrad mellom behandlingsoppgavene (-1,08 ± 1,19 logits) og omdanningsoppgavene (0,97 ± 1,08 logits) er statistisk signifikant (p = 0,004; uavhengige utvalgs t-test). Det betyr at det er svært lite sannsynlig at høyere vanskegrad på omdanningsoppgavene skyldes tilfeldigheter. For elevgruppen som er undersøkt overføres derfor den økte kompleksiteten i en omdanningstransformasjon til økt vanskegrad som målt ved det kvantitative instrumentet.

5.2.3 Spiller det noen rolle hvilken retning omdanningen går?

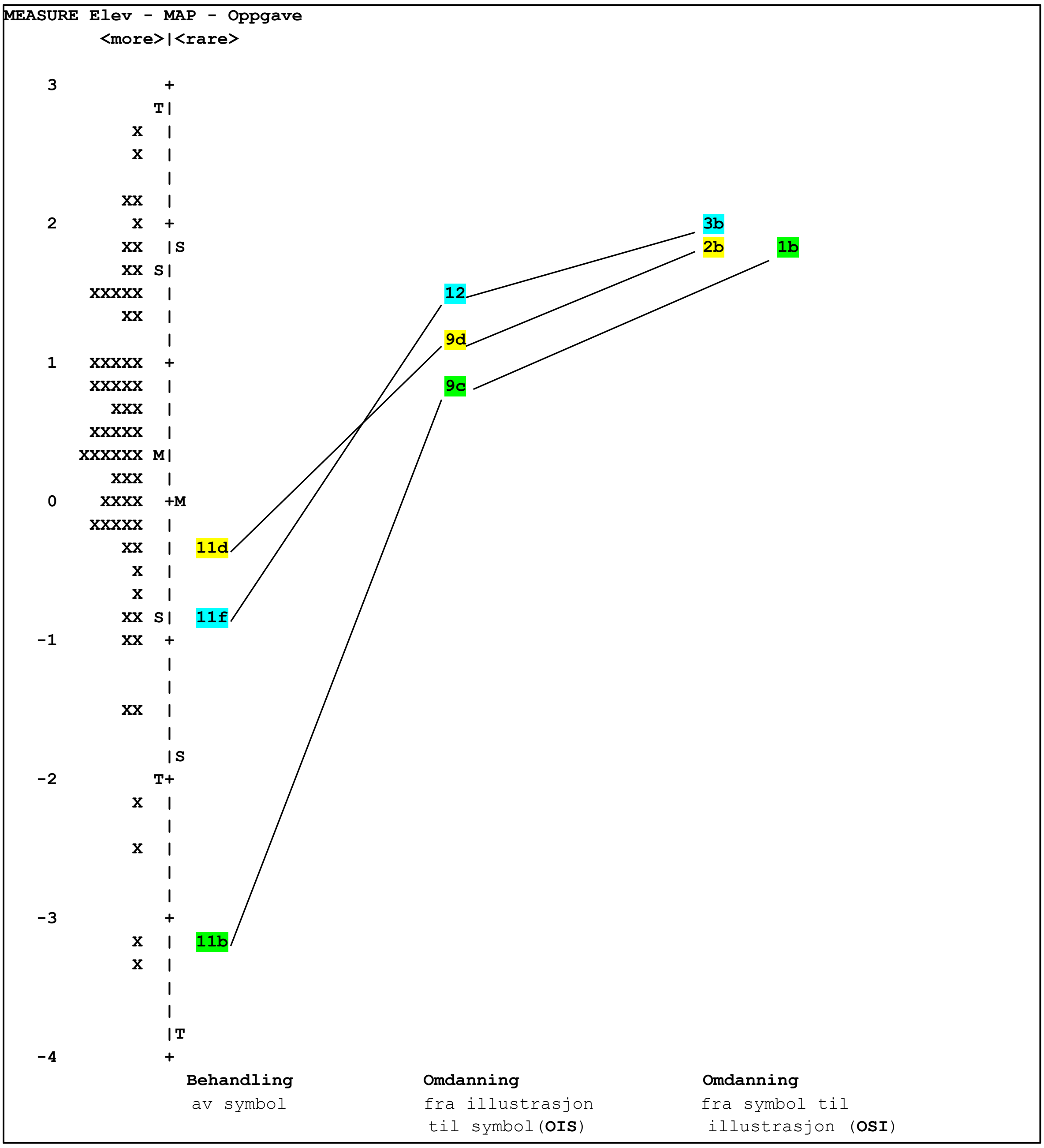
Det å snu retning på omdanningen kan føre til at oppgaven endres for elevene og én retning kan være mer problematisk enn den andre retningen (Duval, 2006, s. 122). Om dette gjelder for addisjon av brøk sier teorien ingenting om og derfor er det interessant å undersøke. Kartet i *Figur 16* viser omdanningsoppgavene fra illustrasjon til symbol (*OIS-oppgavene*) og omdanningsoppgavene fra symbol til illustrasjon (*OSI-oppgavene*) adskilt fra hverandre. Forskjellen i vanskegrad på OIS-oppgavene (0,81 ± 1,26 logits), og OSI-oppgavene (1,12 ± 0,84 logits) er ikke statistisk signifikant (p=0,32; uavhengige utvalgs t-test). Som helhet kan man derfor ikke ut fra resultatene fastslå at retning på omdanningen har noe å si for vanskegraden på oppgavene.

Sammenligner man imidlertid oppgavene hvor arealmodellen inngikk og oppgavene hvor tallinjen inngikk hver for seg kan man likevel se en trend til at OIS-oppgavene er litt enklere enn OSI-oppgavene. Av kartet i *Figur 16* ser man nemlig at oppgave 9e er med å trekke opp gjennomsnittet i OIS – oppgavene. Denne oppgaven kan sammenlignes med oppgave 4 i OSI-kategorien, fordi begge oppgavene består av regnestykker av grad 4 (ulike nevnere hvor den ene nevneren ikke er multiplum av den andre). *Figur 17* viser behandlingsoppgaver og omdanningsoppgaver hvor arealmodellen inngår som illustrasjon, og hvor strekene går mellom oppgaver av samme grad (like nevnere, ulike nevnere osv.). Av figuren ser man at strekene går oppover når man beveger seg fra venstre mot høyre i figuren, med unntak av streken mellom oppgave 9e og oppgave 4. Det kan være at oppgave 9e er blitt estimert for vanskelig eller at oppgave 4 er blitt estimert for enkel, eller at mønsteret (de ulike vanskegradene) forandrer seg når oppgavene blir bestående av regnestykker av grad 4.



Figur 17. «Variable map» for oppgaver hvor illustrasjonen som inngår er en arealmodell. Grønn farge er oppgaver hvor regnestykkene er av grad 1, gul farge er oppgaver hvor regnestykkene er av grad 2, blå farge er oppgaver hvor regnestykkene er av grad 3, og rød farge er oppgaver hvor regnestykkene er av grad 4.

Ser man på tallinjeoppgavene (*Figur 18*) viser resultatene en enda tydeligere trend til at en omdanning fra symbol til illustrasjon (OSI) er vanskeligere enn å gjøre en omdanning i motsatt retning (OIS). *Figur 18* viser behandlingsoppgaver og omdanningsoppgaver hvor illustrasjonen er en tallinje. Av figuren ser man at strekene går oppover når man beveger seg fra venstre mot høyre i kartet. Det betyr at behandlingsoppgavene er de enkleste, deretter OIS-oppgavene og vanskeligst er OSI- oppgavene.

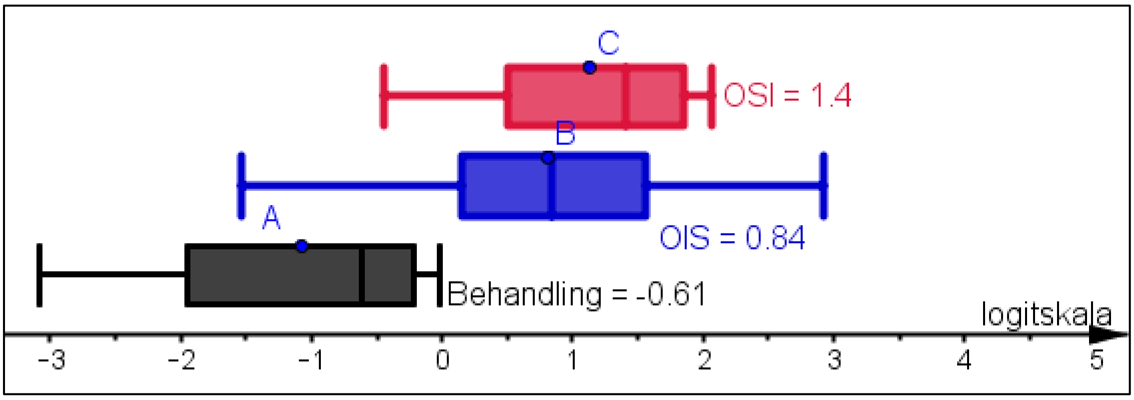


Figur 18. «Variable map» for oppgaver hvor illustrasjonen som inngår er en tallinje. Grønn farge er oppgaver hvor regnestykkene er av grad 1, gul farge er oppgaver hvor regnestykkene er av grad 2, og blå farge er oppgaver hvor regnestykkene er av grad 3.

5.2.4 Spiller det noen rolle om det er arealmodell eller tallinje som inngår som illustrasjon i oppgavene?

Av teori vet vi at brøk som måleenhet/tallstørrelse er vanskelig å beherske for elever, og at de derfor presterer bedre på omdanningsoppgaver som involverer arealmodell enn på omdanningsoppgaver som involverer tallinje (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Kurt & Cakiroglu, 2009). *Figur 16* antyder også at illustrasjonstype påvirker oppgavenes vanskegrad. Av figuren ser man at tallinjeoppgavene (markert med blå farge) plasserer seg over de fleste oppgavene hvor arealmodellen inngikk som illustrasjon (markert med grønn farge). I sammenligningen mellom tallinje og arealmodell velger jeg å se bort fra oppgave 9e og oppgave 4, som var regnestykker av grad 4, fordi det ikke var med tilsvarende oppgaver hvor tallinja inngikk som illustrasjon. Forskjellen i vanskegrad mellom oppgavene hvor arealmodellen inngikk (-0,01 ± 0,78 logits) og oppgavene hvor tallinja inngikk (1,54 ± 0,42 logits) er statistisk signifikant (p=0,002; uavhengige utvalgs t-test). Det betyr at det er lite sannsynlig at forskjellen i vanskegrad mellom arealmodelloppgaver og tallinjeoppgaver skyldes tilfeldigheter, og for elevgruppen som er undersøkt spiller det altså en rolle om det er arealmodell eller tallinje som inngår som illustrasjonstype i oppgavene.

5.2.5 Oppsummering av oppgavers vanskegrad



Figur 19. Box Plots i Geogebra. Boksene viser den midtre halvdelen av oppgaveverdiene for hver oppgavetype. Streken inne i boksene markerer medianverdiene. Strekene ut av boksene markerer de øvre og de nedre kvartilene av verdiene. OIS (blå boks)= omdanning fra illustrasjon til symbol, mens OSI (rød boks)= omdanning fra symbol til illustrasjon. De blå prikkene A, B og C markerer gjennomsnittsverdien.

Rasch-analysene viser at behandlingsoppgavene er enklere enn omdanningsoppgavene. Som helhet kan man ikke ut fra resultatene fastslå at retning på omdanningen spiller en rolle for oppgavenes vanskegrad, i og med at forskjellene ikke er statistisk signifikante. Likevel kan resultatene vise en tendens til at OSI-oppgavene er litt vanskeligere enn OIS-oppgavene. *Figur 19* viser denne sammenhengen i en Boks Plot. Av figuren ser man at både medianverdien (strekene inne i boksene) og gjennomsnittsverdien (punktene A, B og C) befinner seg lengre til høyre på logitskalaen for omdanningsoppgavene, og at verdiene for OSI er plassert lengst til høyre. Videre har analysen avslørt at det er forskjell på om illustrasjonen som inngår i oppgaven er en tallinje eller en arealmodell. Dette vises i ulik vanskegrad mellom oppgavene. Tabell 6 viser en sammenligning av oppgaver i samme kategorier. Tabellen viser hvordan oppgavenes vanskegrad varierer ut ifra om det matematiske objektet skal behandles, eller om det skal omdannes og også at vanskegraden varierer ut fra hvilken illustrasjon som inngår i oppgaven. I tillegg viser *Tabell 6* en tendens til at vanskegraden varier ut fra hvilken retning omdanningen går. Når illustrasjonen er en arealmodell er imidlertid gjennomsnittlig vanskegrad på OIS-oppgaver den samme som på OSI-oppgaver. Her er det oppgave 9e som drar opp gjennomsnittet. *Tabell 6* viser også at vanskegraden øker ut i fra om det matematiske regnestykket er av grad 1, grad 2, grad 3 eller grad 4. Her er det imidlertid ett unntak, på behandlingsoppgavene er oppgave 11f (grad 3) enklere enn oppgave 11d (grad 2).

Tabell 6. En oversikt over oppgaver av ulike typer, deres vanskegrad og gjennomsnittlig vanskegrad for de ulike typene av oppgaver.

	Behandling	**Omdanning fra illustrasjon til symbol, arealmodell**	**Omdanning fra symbol til illustrasjon, arealmodell**	**Omdanning fra illustrasjon til symbol, tallinje**	**Omdanning fra symbol til illustrasjon, tallinje**	**Gj.snitlig vanskegrad**
Grad 1 Like nevnere	Oppgave 11b $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$ Vanskegrad: **-3,09 logits**	Oppgave 9a $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$ Vanskegrad: **-1,54 logits**	Oppgave 1a $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}$ Vanskegrad: **-0,44 logits**	Oppgave 9c $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$ Vanskegrad: **0,84 logits**	Oppgave 1b $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ Vanskegrad: **1,75 logits**	-0,50 logits SD = 1,71
Grad 2 Ulike nevnere	Oppgave 11d $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$ Vanskegrad: **-0,42 logits**	Oppgave 9b $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$ Vanskegrad: **0,15 logits**	Oppgave 2a $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$ Vanskegrad: **0,51 logits**	Oppgave 9d $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}$ Vanskegrad: **1,16 logits**	Oppgave 2b $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$ Vanskegrad: **1,85 logits**	0,65 logits SD = 0,79
Grad 3 Like nevnere, sum over 1	Oppgave 11f $\frac{6}{9}+\frac{5}{9}$ Vanskegrad: **-0,80 logits**	Oppgave 14 $\frac{5}{8}+\frac{4}{8}$ Vanskegrad: **0,61 logits**	Oppgave 3a $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$ Vanskegrad: **0,68 logits**	Oppgave 12 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ Vanskegrad: **1,56 logits**	Oppgave 3b $\frac{3}{6}+\frac{4}{6}$ Vanskegrad: **2,06 logits**	0,82 logits SD = 0,98
Grad 4 Ulike nevnere, hvor nevnerne ikke er multiplum av hverandre	Oppgave 11e $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$ Vanskegrad: **-0,02 logits**	Oppgave 9e $\frac{1}{10}+\frac{2}{6}$ Vanskegrad: **2,92 logits**	Oppgave 4 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ Vanskegrad: **1,40 logits**			1,43 logits SD = 1,20
Gj.snittlig vanskegrad	-1,08 logits SD = 1,19	0,54 logits SD = 1,59	0,54 logits SD = 0,66	1,19 logits SD = 0,29	1,89 logits SD = 0,13	

5.3 Elevenes representasjonskompetanse innenfor addisjon av brøk i et Rasch-instrument

Som tidligere nevnt får man ved å bruke Rasch-analyser blant annet et mål på personers kompetansenivå og oppgavers vanskegrad. Både vanskegrad og kompetansenivå måles med samme måleenhet, logits, noe som gjør det mulig å sammenligne oppgavers vanskegrad mot elevers kompetansenivå. Winsteps fremstiller en sammenligning mellom elever og oppgaver i et «variable map», som vist i *Figur 16*. Hittil i analysekapittelet er kartet i *Figur 16* brukt til å sammenligne ulike oppgavetyper, men i denne delen av analysekapittelet skal kartet brukes til å sammenligne oppgavene med elevene for på den måten å kunne si noe om elevenes representasjonskompetanse. Elevene er plassert ved oppgaver som de ut fra Rasch-modellens sannsynlighetsregning har 50 % sannsynlighet for å lykkes med. Det betyr at elever har en viss sannsynlighet for å klare oppgaver som ligger over deres kompetansenivå, og også en viss sannsynlighet for å mislykkes med oppgaver som ligger under deres kompetansenivå. Av *Figur 16* kan man derfor få mye nyttig informasjon om hvilke oppgaver elevene har stor sannsynlighet for å lykkes med, hvilke oppgaver de har stor sannsynlighet for å mislykkes med og dermed mye informasjon om elevenes representasjonskompetanse innenfor addisjon av brøk.

5.3.1 Behandlingskompetanse

Ifølge kompetansemål i Kunnskapsløftet skal elever etter 7. årstrinn kunne finne fellesnevner og utføre addisjon av brøk (Utdanningsdirektoratet, 2013). Om det å kunne utføre addisjon av brøk innebærer å kunne gjøre en behandling, eller om det innebærer å ta i bruk og omdanne ulike representasjoner i forbindelse med addisjon av brøk står det ingenting om i Kunnskapsløftet, og det kan derfor være forskjell på hva som vektlegges i lærebøker og undervisning. Resultatene fra denne studien viser imidlertid at elevene har større sannsynlighet for å lykkes med behandlingsoppgavene enn med omdanningsoppgavene. Elevenes kompetansenivå (0,37 ± 1,23 logits) er høyere enn behandlingsoppgavene vanskegrad (-1,08 ± 1,19 logits). Kartet i *Figur 16* viser at den vanskeligste behandlingsoppgaven (11e) hadde vanskegrad på -0,02 logits. Det betyr at alle behandlingsoppgavene ligger under gjennomsnittlig kompetansenivå hos elevene. Av *Figur 16* ser man blant annet at alle elevene har stor sannsynlighet for å lykkes med oppgave 11b hvor regnestykket var av grad 1, men at 23 elever har 50 % sannsynlighet eller mindre for å svare riktig på oppgave 11e, hvor regnestykket var av grad 4. Omdanningsoppgavenes vanskegrad (0,97 ± 1,08 logits) ligger derimot over elevenes gjennomsnittlige kompetansenivå. Resultatene antyder derfor at elevene samlet sett har bedre behandlingskompetanse enn omdanningskompetanse.

5.3.2 Omdanningskompetanse: fra illustrasjon til symbol (OIS)

Teorien sier at en omdanning er en mer kompleks transformasjon enn en behandling (Duval, 2006), noe som kommer frem i ulik vanskegrad på oppgavene i denne studien. Ulik vanskegrad betyr igjen at elevene i studien har større sannsynlighet for å lykkes med behandlingsoppgavene enn med omdanningsoppgavene. Når det gjelder omdanning fra illustrasjon til symbol viser *Figur 16* at de fleste elevene har stor sannsynlighet for å svare riktig på oppgave 9a, hvor illustrasjonen var en arealmodell som var delt i like store deler og hvor regnestykket ble av grad 1. Kartet viser videre at 43 elever har 50 % sannsynlighet eller mer for å svare riktig på oppgave 9b, hvor illustrasjonen var en arealmodell, men som ikke var delt i like store deler og hvor regnestykket ble av grad 2. *Figur 16* viser i tillegg at alle elevene har stor sannsynlighet for å mislykkes med oppgave 9e. I oppgave 9e var illustrasjonen en arealmodell, og regnestykket ble av grad 4. Av kartet i *Figur 16* ser man også at færre elever har stor sannsynlighet for å lykkes med tallinjeoppgavene (9c, 9d og 12) enn de tilsvarende oppgavene hvor arealmodellen er involvert (oppgave 9a, 9b og 14).

5.3.3 Omdanningskompetanse: fra symbol til illustrasjon (OSI)

Ifølge Van de Walle et al. (2015) skal elever kunne visualisere et hvert regnestykke. Herman et al. (2004) fant i sin studie at elever kan finne summen av to brøker ved å anvende en algoritme, men at de ikke var i stand til å representere addisjonen. Kartet i *Figur 16* viser antydninger til samme resultat også i denne studien, ved at færre elever er i stand til å gjøre en omdanning fra symbol til illustrasjon enn til å gjennomføre en behandling. *Figur 16* viser at 10 elever har mindre enn 50 % sannsynlighet for å lykkes med oppgave 1a, som var den enkleste oppgaven i omdanning fra symbol til illustrasjon. Videre ser man at kun fem elever har større enn 50 % sannsynlighet for å lykkes med alle oppgavene i OSI-kategorien. Disse fem elevene har kompetansenivå som er høyere enn vanskegraden til oppgave 3b, som var den vanskeligste oppgaven i denne kategorien. Av kartet ser man også at færre elever har stor sannsynlighet for å lykkes med tallinjeoppgavene (oppgave 1b, 2b og 3b) enn de tilsvarende oppgavene hvor illustrasjonen skulle være en arealmodell (oppgave 1a, 2a, og 3a).

Generelt antyder analysene av omdanningsoppgavene at elevene behersket omdanningsoppgaver hvor arealmodellen inngikk bedre enn omdanningsoppgavene hvor tallinjen inngikk. Vanskegrad på arealmodelloppgavene (-0,01 ± 0,78 logits) er lavere enn elevenes kompetansenivå (0,37 ± 1,23 logits), mens vanskegrad på tallinjeoppgavene (1,54 ± 0,42 logits) er høyere enn elevenes kompetansenivå.

5.4 Et dypdykk i elevenes representasjonskompetanse innenfor addisjon av brøk

Rasch-analyser gir svar på oppgavenes vanskegrad og elevenes kompetansenivå. Analysene forteller dermed hvilke oppgaver elevene har stor sannsynlighet for å få til og hvilke oppgaver de har lav sannsynlighet for å få til. Det Rasch-analysene imidlertid ikke gir svar på er hvordan elevene velger å svare, og hvilke feil elevene gjør. Derfor velger jeg å utdype Rasch-analysen med mer kvalitative analyser for å finne svar på hva slags representasjonskompetanse elevene viser. Disse analysene kan kanskje også hjelpe til med å forklare hvorfor elever har større sannsynlighet for å lykkes med behandlingsoppgavene enn med omdanningsoppgavene, og hvorfor de behersker omdanningsoppgaver hvor arealmodellen inngår som illustrasjon bedre enn omdanningsoppgaver hvor tallinja inngår som illustrasjon.

Nedenfor vil jeg derfor presentere hvilken representasjonskompetanse elevene viser gjennom testbesvarelsene. I analysen har jeg kategorisert elevene etter hvordan de har besvart oppgavene, og jeg har valgt å presentere behandlingsoppgavene for seg, OIS-oppgavene for seg og OSI-oppgavene for seg.

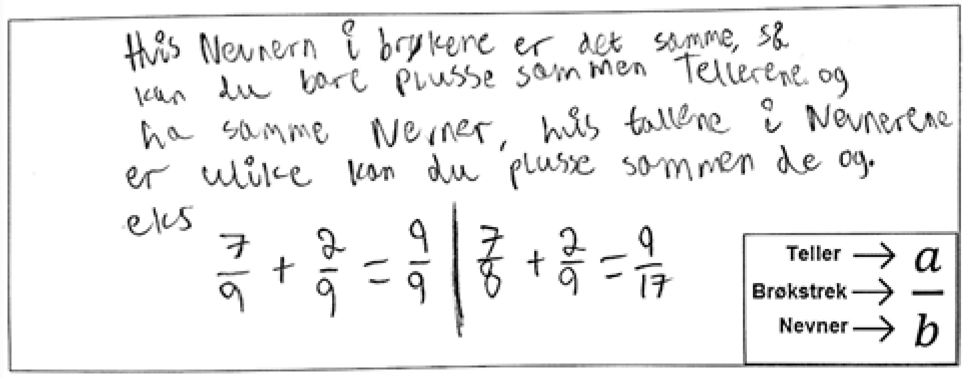
5.4.1 Behandlingskompetanse

Øverste rad i *Tabell 7* viser hvilke behandlingsoppgaver som var med i oppgaveheftet. *Tabell 7* viser også en oversikt over antall elever som fikk riktige svar, antall elever som adderte nevner med nevner og antall elever som utvidet nevner uten å utvide teller. I tillegg viser tabellen antall elever som ga andre feilsvar og antall elever som lot være å svare på oppgavene.

Tabell 7. En oversikt over behandlingsoppgavene i oppgaveheftet. Tabellen viser antall elever med riktige svar, antall elever som gjør ulike typer feil, antall elever som ikke har besvart oppgavene og antall elever totalt.

	11a $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$	**11b** $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$	**11c** $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$	**11d** $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$	**11e** $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$	**11f** $\frac{6}{9}+\frac{5}{9}$
Riktig svar	64	61	44	40	33	46
Adderer nevner med nevner	1	2	7	9	9	3
Utvider nevner, men ikke teller	x	x	1	3	1	x
Andre feilsvar	x	2	7	7	11	14
Ubesvart	1	1	7	7	12	3
Totalt antall elever	66	66	66	66	66	66

Av *Tabell 7* ser man at bare én elev feilet på oppgave 11a), i tillegg til at en elev lot være å svare. Eleven som hadde feil svar har lagt sammen nevner med nevner, og dermed fått svaret $\frac{2}{6}$ i stedet for det riktige svaret $\frac{2}{3}$. På oppgave 11b) har fire elever feilet. Av disse har to lagt sammen nevner med nevner, mens de to andre har svart henholdsvis $\frac{7}{7}$ og $\frac{3}{7}$. Jeg kan ikke finne noen grunn til hvorfor de får disse svarene, bortsett fra at de har gjort regnefeil, og derfor har de blitt plassert under «andre feilsvar». Av tabellen ser man at antall riktige svar på oppgavene går ned når nevnerne blir ulike, og at oppgave 11e, som er et regnestykke av grad 4, har færrest riktige svar. Tabellen viser også at flere elever har latt være å svare på oppgaver hvor nevnerne er ulike enn på oppgavene hvor nevnerne er like. Det er også flere elever som velger å addere nevner med nevner når nevnerne er ulike. *Figur 20* viser hvordan en elev forklarer denne strategien. I tillegg er det én elev i 11c og 11e og tre elever i 11d som utvider nevnerne slik at de blir like, men utvider ikke tellerne. Da vil $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$ bli til $\frac{4}{6}$. En annen forklaring på dette svaret er at de ignorerer nevnerne og adderer tellerne (Siegler et al., 2010, s. 32). Andre feil som forekommer er for eksempel at én elev kryssadderer brøkene når nevnerne er ulike slik at $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$ blir til $\frac{6}{7}$. En annen elev multipliserer brøkene når nevnerne blir ulike. Siden det bare er én elev som kryssadderer og én elev som multipliserer har disse havnet i kategorien «andre feilsvar».



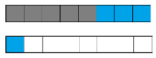
Figur 20. Viser hvordan en elev forklarer hvordan man legger sammen brøker med like nevnere og brøker med ulike nevnere.

5.4.2 Omdanningskompetanse: fra illustrasjon til symbol (OIS)

Analysene har vist at omdanningsoppgavene er vanskeligere enn behandlingsoppgavene, noe som kan skyldes at en omdanning er mer kompleks enn en behandling (Duval, 2006). Den økte kompleksiteten viste seg også i at færre elever hadde stor sannsynlighet med å lykkes med omdanningsoppgavene enn med behandlingsoppgavene. *Tabell 8* og *Tabell 9* viser en oversikt over elevenes besvarelser på OIS-oppgavene. *Tabell 8* viser oppgavene hvor arealmodellen inngikk som illustrasjon, og *Tabell 9* viser oppgavene hvor tallinjen inngikk som illustrasjon. Analysene viser at det er andre typer feil som oppstår i omdanningsoppgavene enn i behandlingsoppgavene, noe som trolig er årsaken til at elevene presterer dårligere på omdanningsoppgavene sammenlignet med behandlingsoppgavene.

5.4.2.1 Arealmodell

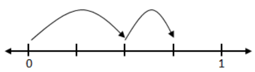
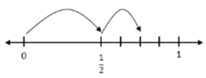
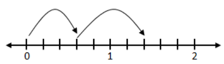
Tabell 8. En oversikt over OIS-oppgavene hvor arealmodellen inngikk som illustrasjon. Tabellen viser antall elever med riktige svar, antall elever som gjør ulike typer feil, antall elever som ikke har besvart oppgavene og antall elever totalt.

Arealmodell	**9a**	**9b**	**9e**	**13**	**14**
Illustrasjon ↓ Symbol	 ↓ $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}$	 ↓ $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$	 ↓ $\frac{1}{10}+\frac{2}{6}=\frac{13}{30}$	 ↓ $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$	 ↓ $\frac{5}{8}+\frac{4}{8}=\frac{9}{8}$
Riktig svar	31	22	2	1	16
Bare svar/bare regnestykke	15	13	1	3	16
Identifiserer feil enhet	0	3	20	35	11
Legger sammen nevnerne	0	0	0	0	1
Teller antall deler uten å ta hensyn til delenes størrelse	x	7	13	7	x
Andre feilsvar	4	5	11	6	9
Ubesvart/udefinerbart	16	16	19	14	13
Totalt antall elever	66	66	66	66	66

Av *Tabell 8* ser man at rundt halvparten av elevene svarer riktig på oppgave 9a, men at antall riktige svar synker når regnestykkene blir av grad 2, 3 og 4. Det kunne kanskje vært naturlig å tro at samme type feil blir gjort i omdanningsoppgavene som i behandlingsoppgavene, men som *Tabell 8* viser er det bare én elev som legger sammen nevner med nevner, og dette kun på én oppgave. Elevene som legger sammen nevner med nevner i behandlingsoppgavene har gjort andre typer feil i OIS-oppgavene. Feil som går igjen hos flere elever er at de blant annet ikke identifiserer riktig enhet. Til eksempel svarer 20 elever at $\frac{13}{15}$ av figuren i oppgave 9e er fargelagt, noe som indikerer at elevene betrakter figuren som to enheter i stedet for én enhet. I oppgave 13 svarer 35 elever at $\frac{5}{6}$ av figuren er fargelagt, (eller at de bare oppgir regnestykket $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$). Årsaken til dette svaret skyldes trolig at den grå delen av enheten utgjør $\frac{1}{2}$ av den ene sirkelen, mens den blå delen av enheten utgjør $\frac{1}{3}$ av den andre sirkelen, og at elevene bare setter opp dette regnestykket uten å tenke på hva enheten er. Når enhetene blir bestående av deler med ulik størrelse viser *Tabell 8* at en del elever teller antall deler uten å ta hensyn til deres størrelse. Til eksempel har 13 elever svart at $\frac{3}{8}$ av figuren i oppgave 9e er fargelagt. Et slikt svar skyldes nok at figuren er delt i 8 deler, noe som indikerer at disse elevene ikke er klar over at delene må ha lik størrelse.

5.4.2.2 Tallinje

Tabell 9. En oversikt over OIS-oppgavene hvor tallinjen inngikk som illustrasjon. Tabellen viser antall elever med riktige svar, antall elever som gjør ulike typer feil, antall elever som ikke har besvart oppgavene og antall elever totalt.

Tallinje	**9c**	**9d**	**12**
Illustrasjon ↓ Symbol	 ↓ $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	 ↓ $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)$	 ↓ $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$
Riktig svar	21	16	11
Bare svar/ bare regnestykke	4	5	2
Heltallssvar	3	4	3
Legger sammen verdiene der pilene peker	6	0	0
Identifiserer ikke riktig enhet	0	2	6
Andre feilsvar	20	26	25
Ubesvart/Udefinerbart	12	13	19
Totalt antall elever	66	66	66

Av Tabell 9 ser man at 21 elever har fått riktig svar på oppgave 9c hvor regnestykket er av grad 1 og at antallet riktige svar synker når regnestykkene blir av grad 2 og 3. Typiske trekk ved besvarelsene som går igjen hos flere elever er at noen elever avgir et svar i heltall, dette til tross for at tallinjen er markert med 0 og 1. Et heltallssvar kan indikere at disse elevene tror at tallinjen bare består av hele tall. *Tabell 9* viser også at seks elever i oppgave 9c har oppgitt brøkene som tilsvarer punktet på tallinjen hvor pilene peker. En slik strategi fører til svaret $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ i stedet for det riktige svaret $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Årsaken til denne strategien kan være at de ikke forstår hvordan addisjonsprosessen representeres på tallinja eller at de ikke forstår at pilene indikerer avstander. Tabellen viser at også på tallinjeoppgavene er det noen elever som mislykkes med å identifisere riktig enhet. På oppgave 9d gjelder dette to elever som har avgitt svaret $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}$ i stedet for det riktige svaret $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)$ noe som antyder at de ikke tenker over hva enheten er. På oppgave 12 er det seks elever som har avgitt svaret $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ noe som antyder at de betrakter hele tallinjen som en enhet, og at de tenker på brøk som del av en helhet og ikke som en måleenhet. Som *Tabell 9* viser er mange elever plassert i kategorien «andre feilsvar». Av disse svarene er det vanskelig å finne noe mønster, og slike svar kan blant annet skyldes regnefeil, tellefeil, gjetting eller andre ting.

5.4.3 Omdanningskompetanse: fra symbol til illustrasjon (OSI)

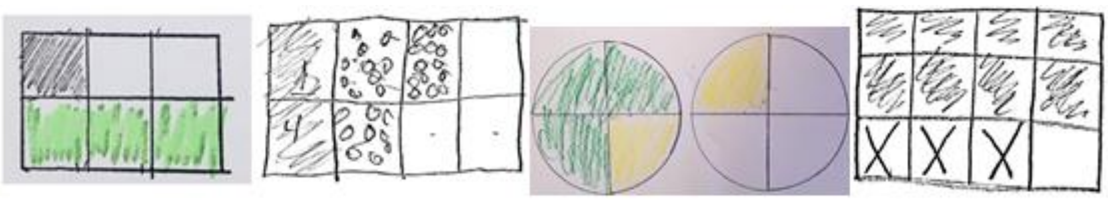
Del 1 av oppgaveheftet bestod av oppgaver hvor regnestykker i symboler skulle omdannes til illustrasjoner. Selv om forskjellene ikke er statistisk signifikant har vi av analysen sett en tendens til at disse oppgavene er litt vanskeligere enn OIS-oppgavene. *Tabell 10* gir en oversikt over regnestykkene som skulle representeres med arealmodell som illustrasjonen, mens *Tabell 11* viser en oversikt over regnestykkene som skulle representeres med tallinje som illustrasjon. Tabellene gir i tillegg en oversikt over hvordan elevene valgte å representere regnestykkene, og antall elevere som valgte de ulike typene representasjoner. Eksempler på de ulike typene representasjoner blir også presentert i analysen

5.4.3.1 Arealmodell

Tabell 10. Oversikt over OSI-oppgavene hvor illustrasjonen skulle være en arealmodell. Tabellen viser også ulike typer besvarelser og antall elever som avga de ulike svarene.

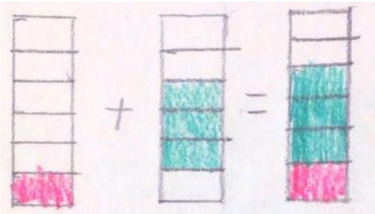
<u>Arealmodell</u> Symbol → illustrasjon	**1a** $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}$	**2a** $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$	**3a** $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$	**4** $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$
Illustrerer hele addisjonsprosessen	18	17	10	8
Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper» ikke	7	3	4	1
Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper»	28	16	22	9
Illustrerer bare svaret/addendene	10	8	14	8
Legger sammen nevner med nevner	1	4	4	4
Deler ikke inn i like store deler	0	4	1	7
Andre feilsvar	2	9	9	20
Ubesvart/ Udefinerbart	0	5	2	9
Totalt antall elever	66	66	66	66

Som *Tabell 10* viser klarte 18 elever å illustrere addisjonsprosessen fullstendig i oppgave 1a, hvor regnestykket var av grad 1, og 17 elever klarte det i oppgave 2a hvor regnestykket var av grad 2. Når regnestykket var av grad 3 (oppgave 3a) og grad 4 (oppgave 4) klarte henholdsvis 10 og 8 elever det. Eksempler på slike illustrasjoner er vist i *Figur 21*. Antall elever som klarte å illustrere addisjonsprosessen minker altså for hver oppgave etter som regnestykkene øker i grad.

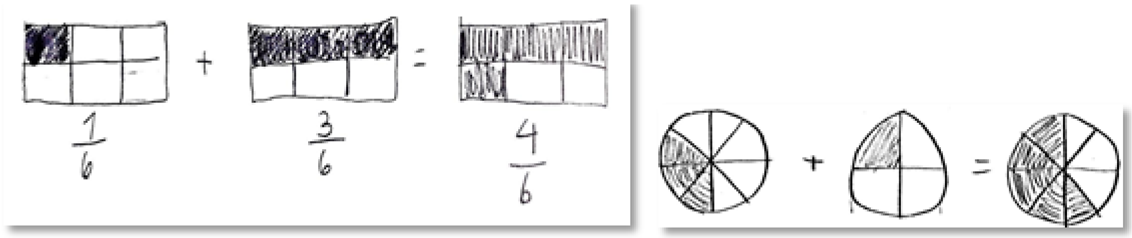


Figur 21. Eksempler på besvarelser hvor addisjonsprosessen er fullstendig representert. Figuren lengst til venstre representerer regnestykket i oppgave 1a, den neste figuren representerer regnestykket i oppgave 2a. Den tredje figuren representerer regnestykket i oppgave 3a, mens den siste figuren representerer regnestykket i oppgave 4.

Tabell 10 viser at noen elever har valgt å illustrere hver addend i egne figurer, og deretter svaret i en egen figur til slutt (se *Figur 22* og *Figur 23*). Dette funnet er i tråd med resultatene i studien til Herman et. al (2004), hvor de fleste av elevene valgte å representere regnestykkene slik. Årsaken til at jeg har valgt å skille mellom en besvarelse som vist i *Figur 22* og besvarelser som vist i *Figur 23* er at representasjonen i *Figur 22* viser hvordan addendene settes sammen og utgjør en del av en helhet, mens representasjonene i *Figur 23* ikke viser hvordan addendene settes sammen. Begge disse typene besvarelser kan likevel antyde at elevene tilpasser illustrasjonen til et regnestykke de allerede har løst med symboler.

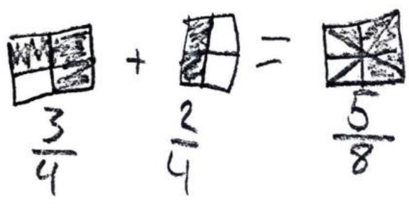


Figur 22. Eksempel på en besvarelse på oppgave 1a. Addendene representeres i egne figurer, og summen representeres så i en egen figur hvor addendene blir satt sammen.



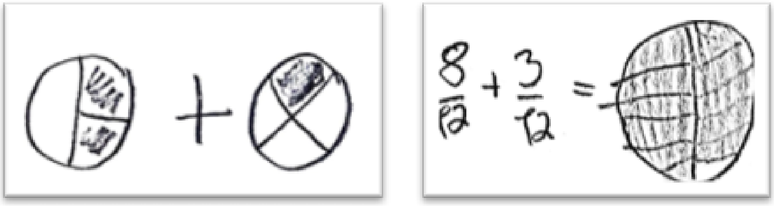
Figur 23. Eksempel på besvarelser på henholdsvis oppgave 1a og 2a. Hver addend representeres i egne figurer, og summen representeres så i en egen figur til slutt. Den siste figuren viser ikke hvordan addendene blir satt sammen og utgjør en del av en helhet.

Av *Tabell 10* ser vi at også i OSI-oppgavene er det noen som legger sammen nevner med nevner. Antallet elever som gjør dette øker når regnestykkene blir av grad 2, 3 og 4. Dette samsvarer med resultatene på behandlingsoppgavene. Et eksempel på en slik illustrasjon er vist i *Figur 24*. En slik strategi antyder at elevene ikke resonnerer særlig mye over størrelsen på hver addend, i og med at summen blir mindre enn addendene til sammen.



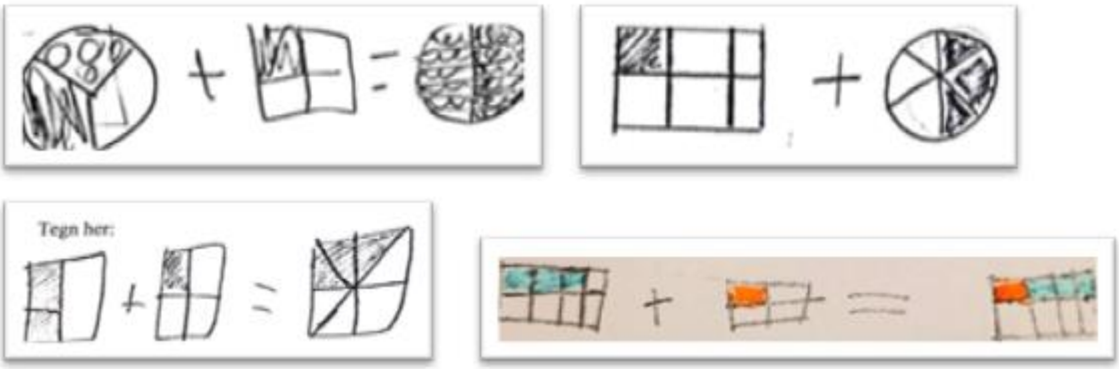
Figur 24. Eksempel på besvarelse hvor nevnerne adderes.

Tabell 10 viser også at noen elever ikke deler inn enheten i like store deler når regnestykkene blir av grad 2, 3 og 4. Eksempler på slike illustrasjoner er vist i *Figur 25*. Disse elevene er trolig ikke klar over at delene må ha lik størrelse.



Figur 25. Eksempel på besvarelser hvor delene ikke har samme størrelse.

Under «andre feilsvar» i *Tabell 10* plasseres elever som for eksempel representerer hver addend i to ulike figurer med ulik form, som for eksempel et rektangel og en sirkel. Elever som gjør flere typer feil plasseres også i denne kategorien. Det kan for eksempel være at de representerer hver addend i ulike typer figurer, og i tillegg ikke deler inn i like store deler, eller at de legger sammen nevner med nevner, og samtidig ikke deler inn i like store deler. Noen eksempler er vist i *Figur 26*. Som tabellen viser er hele 20 elever plassert i denne kategorien når regnestykket som skulle illustreres var av grad 4.



Figur 26. Eksempler på besvarelser plassert under «andre feilsvar» i Tabell 10.

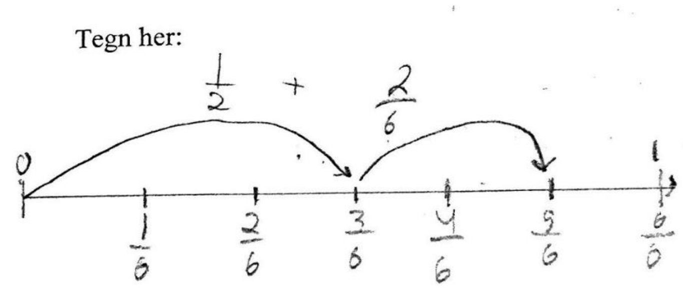
5.4.3.2 Tallinje

Tabell 11. Oversikt over OSI-oppgavene, hvor illustrasjonen skulle være en tallinje. Tabellen viser også ulike typer besvarelser og antall elever som avga de ulike svarene.

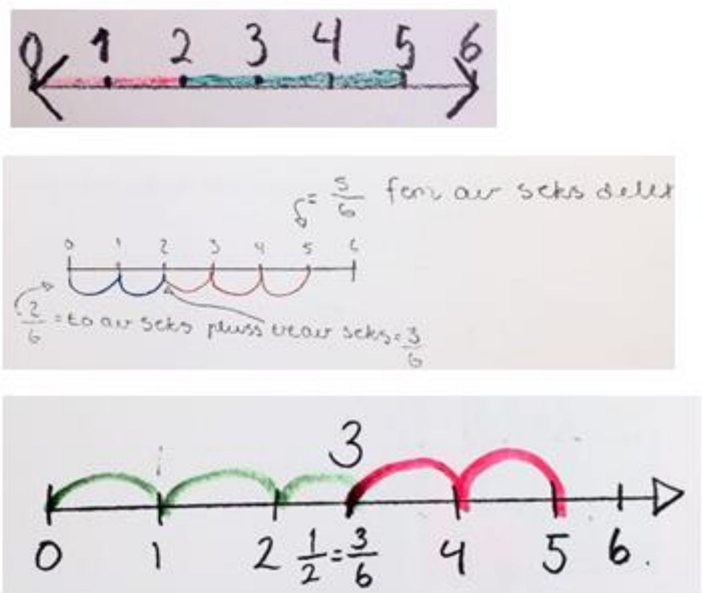
<u>Tallinje</u> Symbol → illustrasjon	**1b** $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	**2b** $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$	**3b** $\frac{3}{6}+\frac{4}{6}$
Illustrerer hele addisjonsprosessen	10	8	7
Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg	2	1	1
Illustrerer bare svaret/ addendene	2	2	2
Tallinja viser heltall/ del-hel-tenkning	17	15	16
Legger sammen nevner med nevner	0	0	0
Andre feilsvar (f.eks. at de ikke lykkes med å illustrere addisjonsprosessen)	31	27	30
Ubesvart/ Udefinerbart	4	13	10
Totalt antall elever	66	66	66

Tabell 11 gir en oversikt over oppgavene hvor illustrasjonen skulle være en tallinje, og en oversikt over hvordan elevene valgte å representere regnestykkene på tallinja. Tabellen viser at ganske få elever lyktes med å illustrere hele addisjonsprosessen, og at antallet minker når regnestykket øker fra grad 1 og opp til grad 3. *Figur 27* viser et eksempel på en illustrasjon hvor hele addisjonsprosessen er representert på tallinjen. Som *Tabell 11* viser har flere elever markert tallinjen med heltall, og markert tellerne som addender. Eksempler på slike illustrasjoner er gitt i *Figur 28*. Ved å markere tallinjen med hele tall antyder man «brøk som del av en helhetstenkning», og ikke brøk som måleenhet eller tallstørrelse. At noen elever tenker på brøk som del av en helhet selv på tallinjen kommer tydelig frem i oppgave 3b hvor flere representerer en sum over én ved hjelp av to adskilte tallinjer. Et eksempel er gitt i *Figur 29*. *Tabell 11* viser at ingen elever legger sammen nevner med nevner i disse oppgavene, noe som skyldes at de gjør flere andre feil i tillegg. Alle elever som gjør flere typer feil eller som ikke har klart å illustrere addisjonsprosessen har havnet i kategorien «andre feilsvar». Eksempler på slike besvarelser er gitt i *Figur 30*. Av tabellen ser man at nesten halvparten av

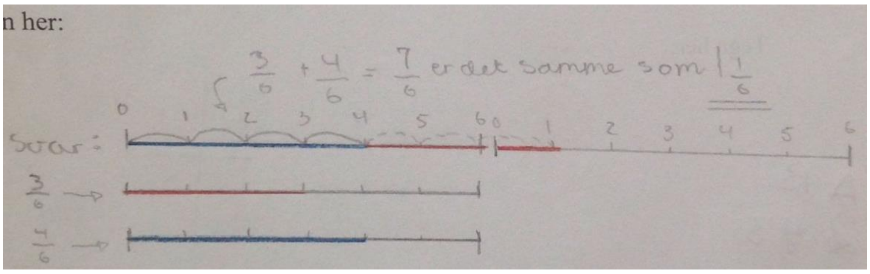
elevene har havnet i denne kategorien, og i flere av disse besvarelsene viser elevene at de vet hva summen på addisjonsstykket blir, men at de ikke evner å representere det på tallinjen, noe som kan antyde at elevene ikke er vant til å representere addisjon på tallinjen.



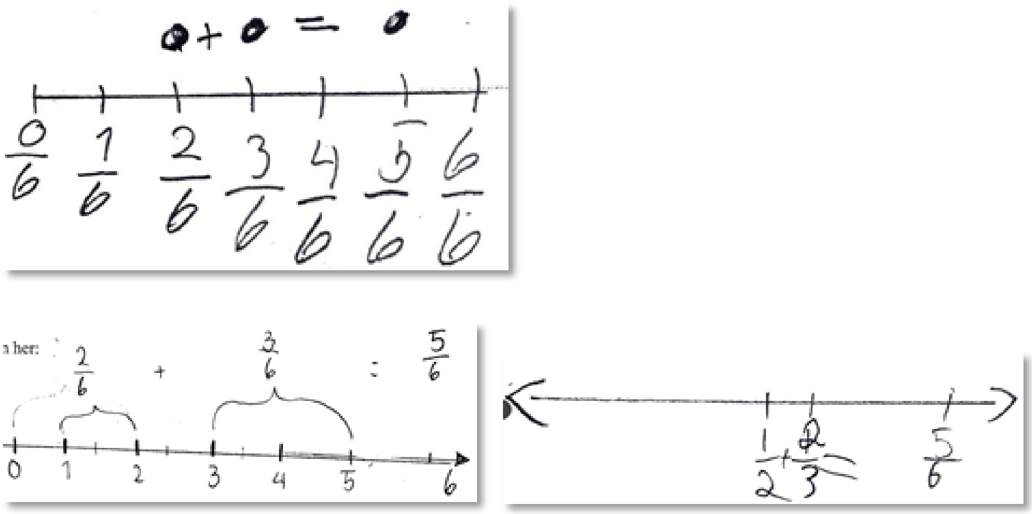
Figur 27. Eksempel på en illustrasjon hvor hele addisjonsprosessen er illustrert på tallinjen.



Figur 28. Eksempler på illustrasjoner hvor tallinjen viser hele tall, og/eller hvor «brøk som del av en helhet» er representert.



Figur 29. Eksempler på "brøk som del av en helhetstenkning". Summen blir over én, og det representeres på to adskilte tallinjer.



Figur 30. Eksempler på illustrasjoner under "andre feilsvar" i Tabell 11. I disse illustrasjonene illustreres ikke addisjonsprosessen riktig.

6.0 Drøfting

Denne masteroppgaven skal forsøke å gi svar på om omdanningsoppgaver er vanskeligere enn behandlingsoppgaver, om det spiller noen rolle hvilken retning omdanningen går og om illustrasjonstype har noe å si for vanskegraden på oppgavene, når tema er addisjon av brøk. I tillegg skal den forsøke å gi svar på hvilken representasjonskompetanse 8. klasseelever viser. I analysekapittelet så vi at omdanningsoppgavene var vanskeligere enn behandlingsoppgavene og at omdanningsoppgavene hvor tallinjen inngikk som illustrasjon var vanskeligere enn omdanningsoppgavene hvor arealmodellen inngikk som illustrasjon. Som helhet viste ikke analyseresultatene at retning på omdanningen hadde noe å si for vanskegraden på oppgavene, men analysene viste likevel en tendens til at retningen på omdanningen hadde noe å si for vanskegraden på oppgavene. Videre så vi i analysekapittelet at elevene viste bedre behandlingskompetanse enn omdanningskompetanse, og at noen elever viste en svak kompetanse i brøk og addisjon av brøk gjennom å gjøre feil både i behandlingsoppgavene og omdanningsoppgavene eller bare i omdanningsoppgavene. I drøftingskapittelet vil jeg diskutere disse resultatene opp mot presentert teori, i tillegg til å drøfte funnene opp mot didaktiske anbefalinger, for å se hvilke betydninger resultatene kan ha for undervisning og læring av brøk og addisjon av brøk i skolen.

6.1 Behandlingsoppgaver og elevenes behandlingskompetanse

Analysen viste at behandlingsoppgavene var enklere enn omdanningsoppgavene, noe som samsvarer med teorien om at omdanning er en mer kompleks transformasjon enn en behandling (Duval, 2006). I gjennomsnitt var omdanningsoppgavene 2,05 logits vanskeligere enn behandlingsoppgavene. Denne forskjellen utgjør omtrent $\frac{1}{3}$ av variasjonsbredden på alle behandlings- og omdanningsoppgavene i *Figur 16*. Forskjellen i vanskegrad mellom behandlingsoppgaver og omdanningsoppgaver er blant annet viktig å være klar over når man som lærer skal utvikle tester og vurdere elevers kompetanse på bakgrunn av tester og oppgaveløsning. Siden behandlingsoppgavene var enklere enn omdanningsoppgavene hadde elevene større sannsynlighet for å lykkes med behandlingsoppgavene enn med omdanningsoppgavene. I tillegg viste analyseresultatene at elevenes gjennomsnittlige kompetansenivå havnet mellom gjennomsnittlig vanskegrad på behandlingsoppgavene og omdanningsoppgavene, noe som antyder at elevene samlet sett har bedre behandlingskompetanse enn omdanningskompetanse. For å utføre behandlingsoppgavene og vise behandlingskompetanse trenger man kun å ha prosedural kompetanse, men man kan også ha en prosedural kompetanse som er utviklet og sammenflettet med de andre kompetansene til

Kilpatrick et al. (2001). Elevene som har et kompetansenivå som ligger over behandlingsoppgavenes vanskegrad vil jeg påstå viser god behandlingskompetanse noe som antyder at de har utviklet den prosedurale kompetansen sammen med de andre delkompetansene til Kilpatrick et al.. Videre vil jeg påstå at elever med kompetansenivå som ligger ved behandlingsoppgavenes vanskegrad viser ulike grader av prosedural kompetanse, som ikke er særlig godt koblet sammen med de andre delkompetansene til Kilpatrick et al. (2001). Den kvalitative analysen viste at de fleste elevene behersket addisjon av regnestykker av grad 1 (like nevnere), men antallet riktige svar sank når nevnerne ble ulike (grad 2 og 4) og når summen av regnestykket ble større enn én (grad 3). For eksempel var det bare 50 % av elevene som hadde riktig svar på oppgaven hvor regnestykket var av grad 4.

En årsak til at elevene presterte bedre på behandlingsoppgaver enn på omdanningsoppgaver kan være at behandling er den transformasjonen som har fått mest oppmerksomhet, gjennom at prosedyrer og algoritmer tradisjonelt har hatt hovedfokus i undervisningen (Duval, 2006; McIntosh, 2007, s. 27; Van de Walle et al., 2015, s. 395). Mange lærere vil blant annet mene at det å bare lære bort algoritmen er mer effektivt i tillegg til at det fører til mindre forvirring blant elevene (Van de Walle et al., 2015, s. 396). En prioritering av prosedyrer og algoritmer kan imidlertid føre til at elevene ikke utvikler forståelse for algoritmene, noe som igjen kan føre til at elevene etter hvert vil glemme algoritmene, blande sammen ulike algoritmer eller lage seg egne regler (Kilpatrick et al., 2001, s. 122; Van de Walle et al., 2015, s. 396). Den kvalitative analysen i denne studien viser eksempler på dette i elevenes besvarelser. For eksempel adderer noen elever nevner med nevner, mens andre utvider nevner, men ikke teller, eller ignorerer nevnerne og bare bruker den største nevneren i regnestykket. Dette er feil som samsvarer med funn i andre studier (Kerslake, 1986; Mack, 1990), og som jeg mener kan skyldes at elevene ikke har utviklet en god nok forståelse for addisjon av brøk i undervisningen. Analysen viste også at antall «*andre feilsvar*» på behandlingsoppgavene økte når nevnerne i regnestykkene ble ulike. Slike svar kan skyldes sammenblanding av algoritmer eller at de lager seg egne regler for addisjon av brøk. For eksempel viste resultatene at én elev kryssadderte brøkene, noe som trolig skyldes en sammenblanding av reglene for brøkaddisjon og brøkdivisjon. En annen elev multipliserte brøkene når nevnerne var ulike, noe som kanskje skyldes at eleven har laget seg egne regler for hvordan man adderer brøker, samtidig som eleven blander reglene for addisjon og multiplikasjon av brøker. Elevene vet at de skal gjøre noe annet når nevnerne er ulike, men klarer ikke å huske eller resonnere seg frem til hva det var de skulle gjøre. Analysen viste også at flere elever lot være å svare på oppgaver hvor nevnerne var ulike, noe som kan være en indikasjon på at de har glemt hvordan de skal addere brøker med ulike nevnere.

Selv om nesten alle elevene viser god kompetanse i å addere brøker med like nevnere, og at halvparten av elevene fikk til alle behandlingsoppgavene viser analyseresultatene at en del elever ikke husker eller behersker regnestykker av grad 2, 3, og 4. Hos disse elevene blandes ulike regler og algoritmer sammen, noe som kan antyde at algoritmene for addisjon av brøk er lært uten at de har blitt koblet sammen med blant annet forståelse og resonnering. Selv om noen vil mene at det å fokusere på algoritmer er effektivt, indikerer resultatene fra studien at et slikt fokus ikke nødvendigvis er det mest effektive i det lange løp. I tillegg er det kanskje heller ikke den strategien som vil føre til minst forvirring blant elevene. Av den grunn foreslår flere studier å knytte algoritmer opp mot blant annet visuelle representasjoner for å skape mer forståelse for hvordan og hvorfor algoritmen fungerer (Cramer et al., 2008; Siegler et al., 2010). Ved å ta i bruk ulike visuelle representasjoner for å skape forståelse for algoritmen vil man trolig også bidra til at Kilpatrick et al. (2001) sine delkompetanser blir mer flettet sammen og at elevene blir mer matematisk kompetente. På bakgrunn av resultatene vil jeg derfor i likhet med Siegler et al. (2010) og Van de Walle et al. (2015) foreslå at man i undervisningen tar seg tid til å gi elevene en forståelse for meningen bak prosedyren og algoritmene for å addere brøker heller enn å bare fokusere på pugging av algoritmer for addisjon av brøk.

6.2 Omdanningsoppgaver og elevenes omdanningskompetanse

Som allerede nevnt viste analysen at omdanningsoppgavene var vanskeligere enn behandlingsoppgavene. Duval (2006) forklarer dette med at omdanningsoppgaver er mer komplekse fordi de krever at man kan gjenkjenne det matematiske objektet på tvers av de ulike semiotiske representasjonssystemene, noe som kan være ganske krevende. Ifølge Kunnskapsløftet skal elever etter 7.-årstrinn kunne finne fellesnevner og utføre addisjon av brøk (Utdanningsdirektoratet, 2013). For å vise fullgod kompetanse i å addere brøker er det ifølge Kilpatrick et al. (2001) ikke tilstrekkelig å bare kunne algoritmer for å addere brøker. Man må i tillegg blant annet vise forståelse for algoritmene gjennom å kunne representere addisjonen på andre måter. En god forståelse for prosedyren med å addere brøker skapes blant annet gjennom at man knytter algoritmen opp mot visuelle representasjoner (Siegler et al., 2010), noe som krever at man kan gjenkjenne regnestykkene på tvers av de semiotiske representasjonssystemene *symboler* og *illustrasjoner*. For å klare det må man ha en god omdanningskompetanse, bestående av en god prosedural kompetanse, en god forståelse for prosedyren, gode resonneringsevner og en god strategisk kompetanse. Rasch-analysene viste imidlertid at elevenes gjennomsnittlige kompetansenivå lå under omdanningsoppgavenes gjennomsnittlige vanskegrad, noe som antyder at mange elever ikke behersker en omdanning av regnestykker mellom to ulike semiotiske representasjonssystem. De kvalitative analysene viste videre at det var ulike årsaker til at noen elever mislyktes med å omdanne regnestykkene.

6.2.1 Feil som oppstår i omdanningsoppgavene

Ifølge McIntosh (2007, s. 27) har det i skolearbeid generelt vært tradisjon for å bruke forholdsvis mer tid på å lære bort reglene for regneoperasjoner, enn på å utvikle forståelse for tallene en skal gjøre operasjonene med. Denne prioriteringen kommer også frem i denne undersøkelsen ved at elevene viste bedre behandlingskompetanse enn omdannings-kompetanse. I tillegg avslørte den kvalitative analysen av omdanningsoppgavene at en del elever viser en mangelfull kompetanse i brøkbegrepet, noe som kan være en indikasjon på at det ikke har vært brukt tid på å utvikle grunnleggende forståelse for brøk. Videre vil jeg nevne noen slike feil som gikk igjen blant elevene, og samtidig presentere tiltak for å kunne forebygge slike grunnleggende brøkfeil i fremtiden.

6.2.1.1 Enhetsfeil

Brøk er en relativ størrelse som avhenger av størrelsen på enheten, og for å beherske «brøk som del av en helhet» må man kunne identifisere enheten og sørge for at hver brøk betraktes ut fra denne enheten (Lamon, 2012, s. 145; Van de Walle et al., 2015, s. 371). Ved behandlingsoppgaver trenger man imidlertid ikke å tenke på hva enheten er (Lamon, 2012, s. 145), men ved omdanningsoppgaver er det nødvendig å kunne identifisere riktig enhet og å betrakte brøkene ut fra riktig enhet. Analysen av omdanningsoppgavene fra illustrasjon til symbol (OIS-oppgavene) viste allikevel at mange elever mislyktes på grunn av at de ikke identifiserte riktig enhet. Dette gjaldt spesielt når illustrasjonen var en arealmodell, men analysen viste også tegn til at det å identifisere riktig enhet på tallinjen kan være utfordrende for noen elever. Aller verst var det på oppgave 13, hvor hele 35 elever identifiserte feil enhet. I denne oppgaven bestod enheten av to objekter, og det at så mange elever feilet kan være et tegn på at det brukes mest enheter av ett objekt, og at elevene ikke er vant med å håndtere enheter bestående av flere objekter (Lamon, 2012, s. 146). Problemet med å ikke betrakte brøker ut fra riktig enhet viste seg i OSI-oppgavene ved at elevene illustrerte ett og samme regnestykke med ulike enheter, for eksempel med et rektangel og en sirkel. Slike enhetsfeil kan oppstå som et resultat av at overgangen fra heltall til brøk fører til nye enheter, og at tallet én ikke nødvendigvis lenger kan knyttes til ett enkelt objekt. For å gjøre elevene klar over at identifisering av enheten er viktig og nødvendig og i tillegg redusere risikoen for at de identifiserer og betrakter feil enhet, anbefales det å gi elevene trening i å arbeide med varierte enheter som er både diskrete og kontinuerlige (Lamon, 2012, s. 146).

6.2.1.2 Brøk som del av en helhet på tallinjen

Brøk består av fem ulike aspekter, og en god forståelse av brøk innebærer å kunne koordinere mellom de ulike aspektene (Behr et al., 1983; Lamon, 2012, s. 32). Analysen av testresultatene har imidlertid vist en antydning til at noen elever overfører kunnskap om «brøk som del av en helhet» til tallinjen. I OIS-oppgavene kom dette frem ved at elevene betraktet hele tallinjen som enhet når tallinjen ble over én enhet lang. I OSI-oppgavene kom dette frem ved at elevene markerte tallinjen med hele tall opp til størrelsen på nevneren. Deretter markerte de tellerne som addender (se *Figur 28* i analysen). Når summen ble over én representerte noen elever summen på to atskilte tallinjer, noe som indikerer at elevene ikke er vant til å arbeide med kontinuerlige enheter som det tallinjen er et eksempel på. At elevene assosierer brøk med «del av en helhet» og overfører kunnskap om «brøk som del av en helhet» til tallinjen er i tråd med resultater fra annen forskning (Hannula, 2003; Pearn & Stephens, 2004; Wong, 2013b). For å unngå en slik overføring av kunnskap mellom ulike aspekter er det viktig at undervisning og lærebøker fokuserer på alle aspektene ved brøk. På den måten kan elevene forstå at brøk ikke bare beskriver del av en helhet, men at brøk også kan beskrive en tallstørrelse eller måleenhet.

6.2.1.3 Tar ikke hensyn til delenes ulike størrelse

For å beherske «brøk som del av en helhet» er det også nødvendig å forstå at delene i enheten må ha lik størrelse, eller være av likt antall (Lamon, 2012, s. 145), noe som ifølge modellen til Behr et al. (1983) er grunnleggende for å beherske alle andre aspekter ved brøk. Analysen av arealmodelloppgavene viser imidlertid at flere elever ikke tar hensyn til at delene må være like store. I OIS-oppgavene kommer denne feilen frem ved at elevene avgir et svar hvor nevneren tilsvarer antall deler enheten er delt opp i, selv om delene ikke har lik størrelse. I OSI-oppgavene kommer dette frem ved at elevene deler opp enheten i deler av ulik størrelse. Dette funnet er i tråd med funn i studien til Peck og Jencks (1981). Det at brøkdelene for noen elever ikke fremstår som like store deler er en vanlig misoppfattelse som ifølge McIntosh (2007, s. 23) kan skyldes et upresist hverdagsspråk. For å unngå denne misoppfattelsen anbefales det å bruke brøkspråket presist og i sammenheng med rettferdig deling (McIntosh, 2007, s. 24), samt å knytte det opp mot visuelle representasjoner (Laird et al., 2015, s. 55).

6.2.1.4 Adderer nevner med nevner

Overgangen fra heltall til brøk innebærer nye regler for addisjon $\frac{1}{3}+\frac{2}{5} \neq \frac{3}{8}$. Analysen viste imidlertid at noen elever adderte nevner med nevner både på behandlingsoppgavene og på OSI-oppgavene. Denne feilen kommer av at elevene behandler teller og nevner som to separate tall og overfører regneregler fra de hele tallene til regning med brøk. For å unngå en slik feil anbefales det å la elevene jobbe med meningsfulle oppgaver (Siegler et al., 2010, s. 32), i tillegg til å fokusere på at addisjon handler om å legge sammen deler av samme størrelse (Mack, 2004). Jeg vil også tro det er en fordel å la elevene jobbe med visuelle representasjoner og å la de resonnere over hva de egentlig gjør. Da kan de kanskje oppdage at en slik strategi ikke gir mening. Jeg vil i tillegg hevde at elevene som illustrerer addisjon ved å legge sammen nevnerne ikke viser særlig god resonneringsevne, i og med at addendene illustreres større enn summen. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) er god resonneringsevne en nødvendighet om man skal være matematisk kompetent, noe som blant annet innebærer at man kan tenke logisk rundt begreper og situasjoner og vurdere om svaret man får virker fornuftig. Elevene som illustrerer addisjon ved å legge sammen nevnerne kan for eksempel ikke ha resonnert rundt hva addisjon og brøk egentlig er, og videre om svaret de har fått virker fornuftig. Det er interessant at det bare var én elev på én oppgave som adderte nevner med nevner i OIS-oppgavene. Dette skyldtes at de andre gjorde andre, mer grunnleggende brøkfeil og på den måten unngikk å måtte addere brøker med ulike nevnere.

På grunnlag av feilene som er nevnt ovenfor vil jeg i tråd med andre studier foreslå å bruke mer tid på selve brøkbegrepet heller enn å stresse med å undervise algoritmer (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012, s. 255; Peck & Jencks, 1981). I tillegg viser forskning at en god forståelse for de ulike aspektene ved brøk kan heve elevers prestasjoner relatert til operasjoner på brøk (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), og det å bruke mer tid på brøkbegrepet heller enn brøkalgoritmene kan derfor bli en vinn-vinn situasjon. Uten den grunnleggende kompetansen for brøk vil prosedyrene og algoritmene kunne fremstå som vanskelige og lite meningsfulle (McIntosh, 2007). I tillegg vil det være lett å gjøre feil når elevene blir bedt om å gjøre en omdanning av et regnestykke eller når man er nødt til å gjøre en omdanning for å løse et problem eller sjekke et svar. Analysen viser også at omdanningsoppgavene krever en bedre kunnskap om brøkbegrepet enn det behandlingsoppgavene gjør. At flere elever identifiserer og betrakter brøker ut fra feil enhet, at de overfører kunnskap om «brøk som del av en helhet» til tallinjen og at de ikke tar hensyn til brøkdelenes størrelse kom nemlig ikke frem i analysen av behandlingsoppgavene. For å kunne få en grundig innsikt i elevers kompetanse understreker dette resultatet derfor også viktigheten av å inkludere omdanningsoppgaver i undervisningen, selv om omdannings-oppgaver er vanskeligere enn behandlingsoppgaver.

6.2.2 Retning på omdanningen

Ifølge Duval (2006) kan en endring av retningen på omdanningen føre til at oppgaven endres for elevene og at én retning oppleves som mer problematisk enn den andre, men som helhet viste ikke analyseresultatene forskjell i vanskegrad på OIS-oppgavene og OSI-oppgavene. Likevel viste resultatene en tendens til at OSI-oppgavene var litt vanskeligere enn OIS-oppgavene, når vi ser bort fra regnestykkene av grad 4 (oppgave 9e og oppgave 4). Selv om det å gjøre en omdanning fra symbol til illustrasjon kan være litt vanskeligere enn å gjøre en omdanning i motsatt retning viser de kvalitative analysene fra undersøkelsen at det er viktig å gjøre omdanninger i begge retninger fordi de kan avsløre ulik kompetanse og ulike feil som elevene kan gjøre. For eksempel var det flere av dem som adderte nevner med nevner i OSI-oppgavene som unngikk å gjøre denne feilen i OIS-oppgavene fordi de gjorde andre feil i stedet. Ved å bruke omdanningsoppgaver som går i begge retninger kan man derfor få en bedre innsikt i hvilken kompetanse elevene evner å vise gjennom bruk av ulike representasjoner, og også mer innsikt i ulike typer feil som kan oppstå i omdanningsprosessene. Trolig vil det å gjøre omdanninger i begge retninger også kunne øke elevenes forståelse for den matematiske operasjonen.

6.3 Addisjon av brøk med arealmodell og tallinje

Et av målene med studien var å undersøke om illustrasjonstype spiller noen rolle for omdanningsoppgavenes vanskegrad, og analysen avslørte at tallinjeoppgavene var vanskeligere enn arealmodelloppgavene. I gjennomsnitt var tallinjeoppgavene 1,55 logits vanskeligere enn oppgavene med arealmodell. Denne forskjellen utgjør omtrent $\frac{1}{4}$ av variasjonsbredden på alle behandlings- og omdanningsoppgavene i *Figur 16*. Illustrasjonstype er altså med å avgjøre en oppgaves vanskegrad sammen med graden på regnestykket og retningen på omdanningen. At en tallinjeoppgave er vanskeligere enn en arealmodelloppgave, selv om regnestykket er av samme grad og at oppgaven ellers er lik, er viktig å være klar over når man skal utvikle tester og oppgaver, og når man skal vurdere elevers prestasjoner på ulike oppgaver.

Analysene viste også at gjennomsnittlig vanskegrad på omdanningsoppgavene hvor arealmodellen inngikk som illustrasjon lå under elevenes gjennomsnittlige kompetansenivå, mens gjennomsnittlig vanskegrad på oppgavene hvor tallinjen inngikk som illustrasjon lå over elevenes gjennomsnittlige kompetansenivå. Det resultatet antyder at elevene har større sannsynlighet for å lykkes med omdanningsoppgaver hvor arealmodellen er involvert, enn med omdanningsoppgaver hvor tallinja er involvert, noe som samsvarer med andre studier som er gjennomført (Kurt & Cakiroglu, 2009). Min studie skiller seg imidlertid fra studien til Kurt og Cakiroglu (2009) ved at de testet elevers omdanningskompetanse innenfor brøk, og jeg testet elevers omdanningskompetanse innenfor addisjon av brøk. I tillegg brukte jeg Rasch-analyser, mens Kurt og Cakiroglu anvendte klassisk testteori. Det viser seg imidlertid at resultatene antyder det samme. Årsaker til at elever presterer bedre på omdanninger hvor arealmodellen er involvert enn på omdanninger hvor tallinja er involvert kan være at hovedfokus i brøkundervisning og lærebøker har vært på «brøk som del av en helhet» sammen med arealmodeller, og at elevene mangler øvelse og erfaring i å behandle brøk som en tallstørrelse eller en måleenhet (Behr et al., 1983; Lamon, 2012, s. 33). Til tross for at tallinjeoppgaver er vanskeligere enn oppgaver hvor arealmodeller er involvert, er det viktig å inkludere begge typer illustrasjoner i undervisning, oppgaver og tester. En god forståelse for brøk krever nemlig at man kan koordinere mellom de ulike aspektene for brøk (Behr et al., 1983; Lamon, 2012, s. 32), blant annet fordi en forståelse for alle de fem aspektene er nødvendig for å kunne løse problemer med brøk (Behr et al., 1983).

For å styrke elevenes forståelse for addisjon av brøk blir arealmodellen og tallinja trukket frem som gode hjelpemidler (Cramer et al., 2008; Van de Walle et al., 2015). Skal man imidlertid ha utbytte av å bruke illustrasjoner til å visualisere addisjonen er det nødvendig med en forståelse for de ulike representasjonene, i tillegg til en forståelse av hva addisjon er og hva det innebærer. Den kvalitative analysen av elevenes besvarelser antydet at forståelsen for representasjonene og addisjonsprosessen var mangelfull for en del elever. Blant annet viste analysen av OIS-oppgavene hvor tallinjen inngikk som illustrasjon, at noen elever svarte med heltall, noe som kan indikere at de tror tallinjen bare består av hele tall. Både på OIS-oppgavene og OSI-oppgavene viste analysene også at noen elever dro med seg kunnskap om «brøk som del av en helhet» over til tallinja, noe jeg mener er tegn på at elevene ikke har erfaring og kunnskap om brøk på tallinja. I tillegg havnet nesten halvparten av elevene i kategorien «andre feilsvar», noe som kan tyde på at elevene har lite erfaring og lite kunnskap om å jobbe med addisjon på tallinjen. I OSI-oppgavene viste nemlig flere av illustrasjonene at de visste svaret på addisjonen, men at de ikke klarte å illustrere det på tallinjen. Uten forståelsen for representasjonene og operasjonen vil nok illustrasjonene fremstå som lite meningsfulle for elevene.

At mange elever har en svak forståelse av addisjon og hva det innebærer viste også OSI-oppgavene hvor addisjonen skulle illustreres ved hjelp av arealmodellen. Mange av elevene illustrerte nemlig regnestykket ved hjelp av tre figurer, addendene i egne figurer og summen i en egen figur til slutt. Dette funnet samsvarer med studien til Herman et al. (2004), hvor de fleste elevene valgte å illustrere regnestykket slik. I en slik illustrasjon kommer det ikke frem hva plusstegnet betyr, fordi det er bare de skraverte delene som legges sammen og ikke enhetene. Derfor kan en slik illustrasjon antyde at elevene tilpasser illustrasjonen til et regnestykke de allerede har løst med symboler. I boken *Matematikk for lærere 1* av Birkeland et al. (2012) advares det mot å bruke en slik illustrasjon fordi den kan føre til misoppfatningen om at nevnerne også skal adderes. Likevel har jeg sett at flere lærebøker (for eksempel Torkildsen og Maugesten (2007) og Tofteberg, Tangen, Stedøy-Johansen og Alseth (2013)) nettopp bruker en slik illustrasjon for å visualisere addisjon av brøk, noe som kanskje kan forklare årsaken til at mange elever valgte en slik illustrasjon også i denne undersøkelsen. Siden representasjonskompetanse og evnen til problemløsning henger sammen (Behr et al., 1983; Deliyianni & Gagatsis, 2013) vil jeg derfor avslutte drøftingskapittelet med en oppfordring til lærere og lærebokforfattere om å fokusere på bruken av ulike representasjoner, sammen med meningen bak operasjonene, slik at vi kan utnytte de ulike representasjonene som de gode hjelpemidlene de faktisk kan være.

6.4 Drøfting av metode og studiens bidrag til forskningsfeltet

I denne studien er både kvalitativ og kvantitativ metode benyttet for å finne svar på forskningsspørsmålene. Først ble det gjort kvalitative analyser av elevenes besvarelser, noe som dannet grunnlaget for å kunne gjennomføre kvantitative Rasch-analyser. Valget om å benytte Rasch-modellen til analyse av testresultatene ble basert på ønsket om å kunne gjennomføre invariante målinger av oppgavers vanskegrad og elevers kompetanse og å kunne sammenligne elevers kompetanse med oppgavers vanskegrad. Dette valget mener jeg også var hensiktsmessig blant annet siden mange elever ikke svarte på en del oppgaver i testen. En fordel med Rasch-modellen er nettopp at ubesvarte oppgaver (missing data) ikke påvirker målingene i like stor grad (Bond & Fox, 2015, s. 172), sammenlignet med for eksempel bruk av klassisk testteori. Valget om å anvende Rasch-modellen gjør også at studien skiller seg fra andre studier innenfor fagfeltet. En forutsetning for å gjøre gode Rasch-målinger er imidlertid at måleinstrumentet som benyttes er endimensjonalt. Måleinstrumentet som ble utviklet i denne studien viste seg å ha tre ulike underdimensjoner, noe som kan ha påvirket kvaliteten på måleresultatene. I tillegg er det viktig å være klar over at måten man retter og poengsetter besvarelsene også har betydning for hvordan måleresultatene blir. På den måten har den kvalitative analysen også hatt innvirkning på måleresultatene og dermed også påvirket svarene på forskningsspørsmålene.

Ved å gjennomføre denne studien har jeg belyst representasjonenes viktige rolle i matematisk kompetanse, og satt teori om representasjonsbruk tilknyttet brøk og addisjon av brøk inn i en norsk kontekst. Studien gir blant annet innsikt i hvilken kompetanse norske elever kan vise, hvilken kompetanse de ikke klarer å vise, og hvilke utfordringer de har når det gjelder representasjonsbruk tilknyttet brøk og addisjon av brøk. I tillegg bidrar studien med innsikt om oppgavers ulike vanskegrader. Studien skiller seg fra andre relevante studier ved at den blant annet undersøker vanskegraden på oppgaver, og med det bidrar med nyttig informasjon når tester skal utvikles og elevers kompetanse skal vurderes. I tillegg skiller studien seg fra andre studier ved at den undersøker og sammenligner både behandlingsoppgaver og flere ulike omdanningsoppgaver. For eksempel undersøkte Herman et al. (2004), med sine intervjuer, hvordan deltakerne gjennomførte en behandling og en omdanning fra symbol til illustrasjon. Min studie har i tillegg undersøkt hvordan elever gjennomfører en omdanning fra illustrasjon til symbol, og med det tilført informasjon om hvordan elever håndterer en omdanning i den retningen. Deliyianni og Gagatsis (2013) undersøkte derimot elevenes samlede representasjonskompetanse gjennom en kvantitativ studie. Min studie har gått mer i dybden på hvordan elevene håndterte de ulike transformasjonene innenfor og i mellom ulike semiotiske representasjonssystem, og også sett på hvordan elever behersker tallinjen og arealmodellen ulikt.

7.0 Oppsummering og avslutning

7.1 Oppsummering av studien

Hensikten med denne studien har vært å undersøke elevers kompetanse innenfor brøk og særlig addisjon av brøk og å belyse representasjoners rolle i matematisk kompetanse generelt, og i brøkkompetanse spesielt. Gjennom teori om matematisk kompetanse og representasjoner i matematikk har det blitt klart at representasjoner spiller en sentral rolle i matematikk. Matematiske objekter kan nemlig ikke uttrykkes uten bruk av semiotiske representasjoner, og matematisk aktivitet består av å *transformere*, behandle og/eller omdanne, representasjoner av matematiske objekter (Duval, 2006). Det å kunne representere et matematisk objekt på ulike måter er med andre ord viktig for å kunne løse matematiske problem. Bruk av, og kunnskap om, ulike representasjoner er av den grunn sentralt i matematisk kompetanse. For å kunne sies å være matematisk kompetent og for å kunne løse matematiske problem må man blant annet ha forståelse for ulike representasjoner av samme objekt slik at man er i stand til å resonnere over hvilke representasjoner som er mest hensiktsmessig å bruke til å representere og løse problemet (Kilpatrick et al., 2001). Når det kommer til brøk er arealmodell og tallinje sentrale representasjoner, og disse representasjonene kan blant annet hjelpe elevene med å forstå «brøk som del av en helhet», «brøk som måleenhet/tallstørrelse» og i tillegg styrke elevenes forståelse for addisjon av brøk med symboler (Siegler et al., 2010; Van de Walle et al., 2015).

Siden representasjoner spiller en sentral rolle både i matematisk kompetanse generelt og i brøkkompetanse spesielt ble det i denne studien naturlig å fokusere på bruken av ulike representasjoner for å undersøke elevers kompetanse i brøk og addisjon av brøk. Gjennom å anvende teori om brøk, om representasjoner og om matematisk kompetanse ble det derfor utviklet en test som undersøkte elevenes representasjonskompetanse ved hjelp av behandlingsoppgaver og omdanningsoppgaver i forbindelse med addisjon av brøk. For å belyse representasjonenes rolle i forbindelse med addisjon av brøk og for å kunne sammenligne elevers kompetanse med oppgavers vanskegrad ble det også gjort målinger av oppgavenes vanskegrad. Måleresultatene viste at behandlingsoppgavene var enklere enn omdanningsoppgavene og at oppgavenes vanskegrad varierte ut fra hvilken illustrasjon som inngikk i oppgaven, hvor tallinjeoppgavene viste seg å være de vanskeligste oppgavene. I tillegg viste resultatene en tendens til at vanskegraden varierte ut fra retning på omdanningen, hvor omdanning fra symbol til illustrasjon var den vanskeligste retningen. Når det gjelder elevenes kompetanse i å addere brøker viste resultatene fra studien at elevene behersket behandling av symboler bedre enn omdanninger i begge retninger mellom symboler og illustrasjoner. I tillegg viste det seg at elevene håndterte omdanninger hvor arealmodellen var involvert bedre enn omdanninger hvor tallinjen var involvert. Gjennom å gjøre ulike feil på addisjonsoppgavene, som for eksempel å addere nevner med nevner, ikke identifisere riktig enhet, ikke ta hensyn til delenes ulike størrelse eller å betrakte hele tallinjen som enheten viste noen elever en manglende kompetanse om det grunnleggende i brøkbegrepet og en svak forståelse for de ulike representasjonene. Uten en god kompetanse i brøk og forståelse for de ulike representasjonene som kan brukes, blir det videre vanskelig å vise god kompetanse i addisjon av brøk. Ut fra resultatene, og ved hjelp av presentert teori, kan man dermed danne seg en oppfatning av hvordan jeg og andre lærere bør legge opp undervisninga i brøk og addisjon av brøk. Blant annet vil det være gunstig å gi elevene en god forståelse for brøkbegrepet før man går videre til å addere brøker. Videre vil det være viktig å fokusere på bruken av ulike representasjoner for addisjon av brøk samtidig som man bruker tid på å utvikle forståelse, prosedural kompetanse, strategisk kompetanse, resonneringsevne og engasjement hos elevene (Kilpatrick et al., 2001). På den måten kan man forhåpentligvis hjelpe elevene med å flette sammen de ulike delkompetansene slik at de får en solid kompetanse i å addere brøker, og kan oppfylle Kunnskapsløftets kompetansemål om å *kunne finne fellesnevner og utføre addisjon av brøker.*

7.2 Begrensninger ved studien og videre forskning

En begrensning ved denne studien er det lave antallet forskningsdeltakere. I tillegg valgte mange elever og foresatte å ikke samtykke til deltakelse. Hvis disse elevene representerer samme gruppe av for eksempel elever med lav eller elever med høy kompetanse, vil ikke resultatene vise et fullstendig bilde av elevers representasjonskompetanse. På bakgrunn av resultatene vil det derfor ikke være mulig å si noe generelt, men studien kan gi en indikasjon på oppgavers vanskegrad og 8.klasseelevers representasjonskompetanse. For fremtidig forskning hadde det vært interessant å gjennomføre studien på et større utvalg av elever med mer geografisk spredning, for å se om dette gir like eller andre resultater. Det hadde også vært interessant å se hva som hadde skjedd med elevenes representasjonskompetanse etter en undervisningsperiode i temaet, hvor man hadde fokusert på bruken av ulike representasjoner for addisjon av brøk. I tillegg hadde det vært interessant å undersøke ulike læreverk for å se hvordan de legger opp arbeid med brøk og addisjon av brøk, og hvilke representasjoner de benytter seg av. For eksempel undersøkt om det prioriteres mest behandlingsoppgaver eller om det er jevnt fordelt mellom behandlingsoppgaver og omdanningsoppgaver. Kanskje kunne en slik studie vært med på å forklare noe av resultatene fra denne studien. I tillegg hadde det vært interessant å undersøke elevers kompetanse innenfor andre regnearter tilknyttet brøk. Siden brøk er et sentralt emne i norsk grunnskole og forståelse for brøk er en indikator på hvordan elever vil prestere i matematikk i videregående skole (Siegler et al., 2012), vil jeg oppfordre til mer fokus på forskningsfeltet slik at vi som lærere blir bedre rustet til å hjelpe elever med å beherske brøkbegrepet.

Referanseliste

Aarnes, J. F. (2009). *Addisjon. Store norske leksikon*. Hentet fra https://snl.no/addisjon

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & E., S. (1983). Rational Number Concepts. I R. L. M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91-125). Hentet fra http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/83_1.html.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2012). *Matematikk for lærere 1*. Oslo: Universitetsforlaget.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C., & Ånestad, G. (2013). *Når brøk ikke er tall – Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse.* Trondheim: Akademika forlag.

Bond, T. G., & Fox, C. M. (2015). *Applying the Rasch model. Fundamental measurement in the human sciences* (3. utg.). Hentet fra http://www.tandfebooks.com/doi/view/10.4324/9781315814698

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *An International Journal, 64*(3), 293-316. doi: 10.1007/s10649-006-9036-2

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 490-496. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/41182601

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: a longitudinal study. *Educational Psychology, 33*(4), 427-442. doi: 10.1080/01443410.2013.765540

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *An International Journal, 61*(1), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Engelhard, G. (2013). *Invariant measurement : using Rasch models in the social, behavioral, and health sciences*. Hentet fra http://eds.b.ebscohost.com/eds/ebookviewer/ebook/bmxlYmtfXzU3MzUzNV9fQU41?sid=2bcc9982-3ca8-49c5-8690-a46e92f1949b@sessionmgr102&vid=0&format=EB&rid=1

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference*, 17-24. Hentet fra http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500981.pdf

Herman, J., Ilucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, J., Simpson, A., . . . Ulryhova, M. (2004). Images of fractions *as* processes and images of fractions *in* processes. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 249-256. Hentet fra https://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR024_Sulista.pdf

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children´s Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. Hentet fra https://eric.ed.gov/?id=ED295826

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Hentet fra http://ebookcentral.proquest.com/lib/ntnu/reader.action?docID=3375421

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., & Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006*. Hentet fra https://www.udir.no/globalassets/upload/forskning/internasjonale_undersokelser/5/tid_for_tunge_loft.pdf

Kjørup, S. (2003). *Forskning og samfund. En grunbog i videnskabsteori.* København: Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag A/S.

Kurt, G., & Cakiroglu, E. (2009). Middle grade students' performances in translating among representations of fractions: A Turkish perspective. *Learning and Individual Differences, 19*(4), 404-410. doi: 10.1016/j.lindif.2009.02.005

Laird, R. E., Ebby, C. B., Petit, M. M., & Marsden, E. L. (2015). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom: Second edition*. Hentet fra https://www.dawsonera.com/readonline/9781315746098 doi:10.4324/9781315746098

Lamon, S., J. (2012). *Teaching Fractions And Ratios For Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (3. utg.). New York og London: Routledge.

Linacre, J. M. (2002). What Do Infit and Outfit, Mean-square and Standardized Mean? *Rasch Measurement Transactions 16 (2)*. Hentet fra https://www.rasch.org/rmt/rmt162f.htm

Linacre, J. M. (2012). *Winsteps Tutorial 4*. Hentet fra http://www.winsteps.com/a/winsteps-tutorial-4.pdf

Linacre, J. M. (u.å-a). *Cluster Measure Plot - Table 23.6*. Hentet 20.02. 2017, fra http://www.winsteps.com/winman/clusterplot.htm

Linacre, J. M. (u.å-b). *Dimensionality investigation - an example*. Hentet 20.02. 2017, fra http://www.winsteps.com/winman/multidimensionality.htm

Mack, N. K. (1990). Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32. doi: 10.2307/749454

Mack, N. K. (2004). Connecting to Develop Computational Fluency with Fractions. *Teaching Children Mathematics, 11*(4), 226-232. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/41199806

Matematikknett. (2017). *Brøkregning*. Hentet fra http://matematikk.net/side/Br%C3%B8k

McIntosh, A. (2007). *Alle teller. Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen. Kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelse på området TALL og TALLFORSTÅELSE* (M. R. Settemsdal & I. M. Stedøy-Johansen, Overs.). Trondheim: Matematikksenteret.

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of Students' "Conception" of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 61-83. doi: 10.1007/s10649-011-9338-x

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why You Have to Probe to Discover What Year 8 Students Really Think About Fractions. I R. F. M. M. R. I. Putt (Red.), *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 2* (s. 430-437). Sydney, Australia: MERGA. Hentet fra https://www.merga.net.au/documents/RP512004.pdf.

Peck, D. M., & Jencks, S. M. (1981). Conceptual Issues in the Teaching and Learning of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(5), 339-348. doi: 10.2307/748834

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., . . . Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide (NCEE #2010-4039)*. Washington, DC: National Center for Education

Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Hentet fra http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED512043.pdf.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., . . . Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691-697. doi: 10.1177/0956797612440101

Subramaniam, K. (2013). Research on the Learning of Fractions and Multiplicative Reasoning: A Review. I S. Chunawala (Red.), *The epiSTEME reviews: Research Trend in Science, Technology and Mathematics Education* (B. 4). New Delhi, India: Macmillan.

Säljö, R. (2010). *Læring i praksis. Et sosiokulturelt perspektiv.* (S. Moen, Overs.). Oslo: Cappelen akademisk forlag.

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M., & Alseth, B. (2013). *Maximum 8. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Torkildsen, S. H., & Maugesten, M. (2007). *Sirkel 9a. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Aschehoug.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. (LK06). Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2016). *Metodegrunnlag for nasjonale prøver*. Hentet fra https://www.udir.no/globalassets/filer/vurdering/nasjonaleprover/metodegrunnlag-for-nasjonale-prover.pdf

Van de Walle, J., A., Karp, K., S., & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Harlow: Pearson Education

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The development of higher Psychological Processes*. London: Harvard University Press.

Wong, M. (2006). Assessment Instrument for Identifying Students' Understanding of Fraction Equivalence. Form B.

Wong, M. (2013a). Identifying Fractions on a Number Line. *Australian Primary Mathematics Classroom, 18*(3), 13-18. Hentet fra http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=99013409&site=eds-live

Wong, M. (2013b). Locating Fractions on a Number Line. *Australian Primary Mathematics Classroom, 18*(4), 22-26. Hentet fra http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=99009695&site=eds-live

Wright, B. D., & Stone, M. H. (1979). *The measurement model. Best Test Design. Rasch Measurement*. Chicago: Mesa Press.

Wu, M., & Adams, R. (2007). *Applying the Rasch model to psycho-social measurement: A practical approach*. Melbourne: Educational Measurement Solutions.

Vedlegg

Vedlegg 1: Del 1 av testen

Nummer på elev: ________

Gutt☐ Jente☐

OPPGAVEHEFTE, DEL 1 | BRØK

Tusen takk for at du bidrar til mitt forskningsprosjekt og for at du gjør ditt beste. Lykke til!

Oppgave 1

I denne oppgaven skal du illustrere regnestykkene ved hjelp av en tegning. Bruk ulike farger eller tegn striper, prikker osv.

a) Bruk en ***firkant eller en sirkel*** til å vise hvordan regnestykket nedenfor kan illustreres. Svaret på regnestykket skal komme frem i figuren.

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6}$$

Tegn her:

Forklar hvordan du tenkte for å løse oppgaven:

b) Bruk en ***tallinje*** til å vise hvordan regnestykket nedenfor kan illustreres. Svaret på regnestykket skal komme frem i illustrasjonen.

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$

Tegn her:

Oppgave 2

a) Bruk en ***firkant eller en sirkel*** til å vise hvordan regnestykket nedenfor kan illustreres. Svaret på regnestykket skal komme frem i figuren.

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$$

Tegn her:

b) Bruk en ***tallinje*** til å vise hvordan regnestykket nedenfor kan illustreres. Svaret på regnestykket skal komme frem i illustrasjonen.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$$

Tegn her:

Oppgave 3

a) Bruk en ***firkant eller en sirkel*** til å vise hvordan regnestykket nedenfor kan illustreres. Svaret på regnestykket skal komme frem i figuren.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$$

Tegn her:

b) Bruk en ***tallinje*** til å vise hvordan regnestykket nedenfor kan illustreres. Svaret på regnestykket skal komme frem i illustrasjonen.

$$\frac{3}{6} + \frac{4}{6}$$

Tegn her:

Oppgave 4

a) Bruk en ***firkant eller en sirkel*** til å vise hvordan regnestykket nedenfor kan illustreres. Svaret på regnestykket skal komme frem i figuren.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

Tegn her:

Forklar hvordan du tenkte for å løse oppgaven:

Rekk opp hånda når du er ferdig, så får du del 2 av oppgaveheftet.

Vedlegg 2: Del 2 av testen

Nummer på elev: ________

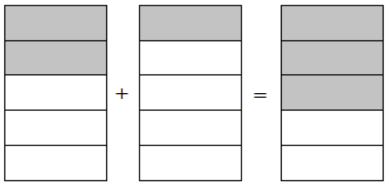
OPPGAVEHEFTE, DEL 2

BRØK

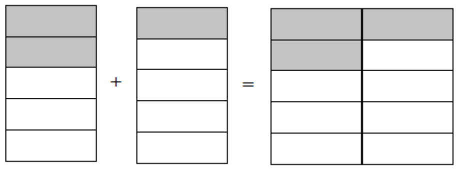
Oppgave 5

a) Sett ring rundt den illustrasjonen du mener forklarer regnestykket $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ best. (Her trenger jeg din hjelp til å finne den beste illustrasjonen).

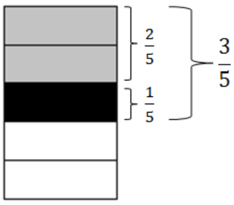
1.



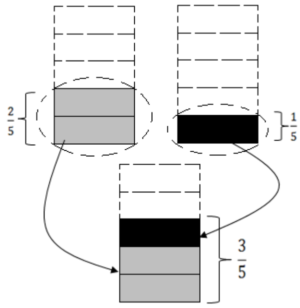
2.



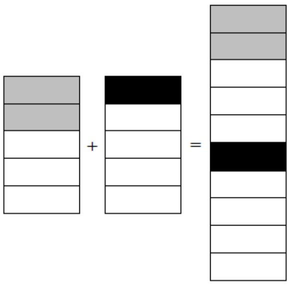
3.



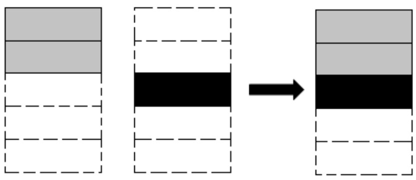
4.



5.



6.

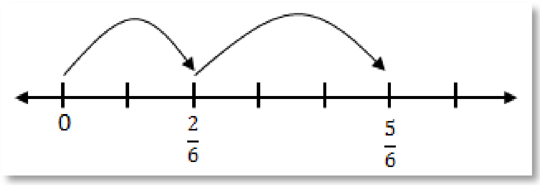


b) Forklar hvorfor du mener alternativet du valgte illustrerer regnestykket best:

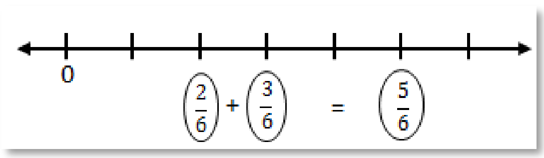
Oppgave 6

a) Sett ring rundt den illustrasjonen du mener forklarer regnestykket $\frac{2}{6} + \frac{3}{6}$ best. (Her trenger jeg din hjelp til å finne den beste illustrasjonen).

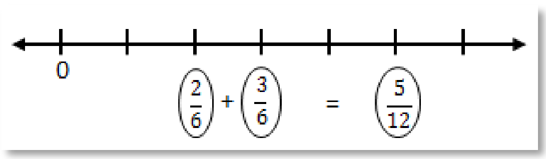
1.



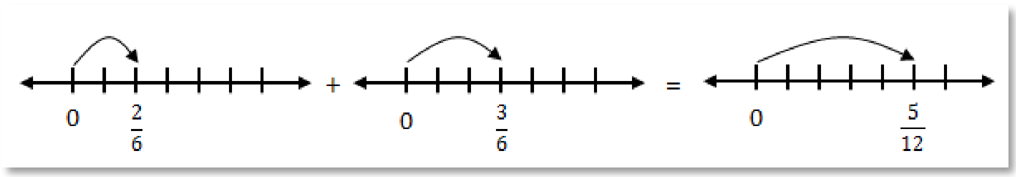
2.



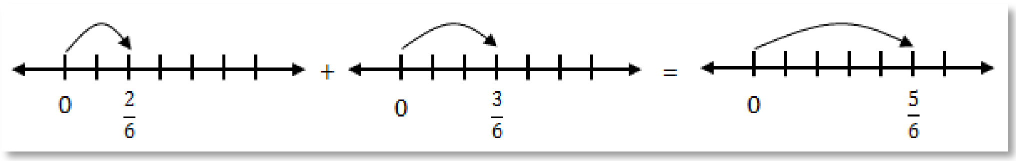
3.



4.



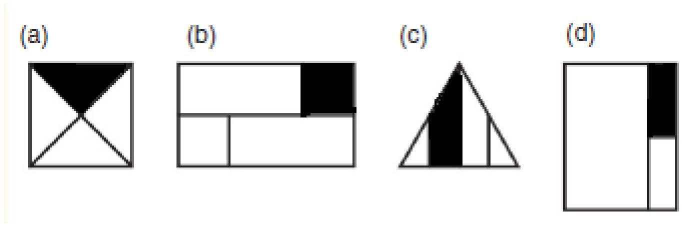
5.



b) Forklar hvorfor du mener alternativet du valgte illustrerer regnestykket best:

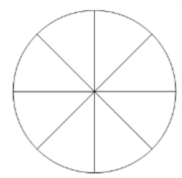
Oppgave 7

Sett ring rundt alle figurene som viser $\frac{1}{4}$:



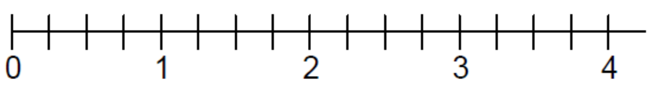
Oppgave 8

a) Fargelegg slik at $\frac{1}{2}$ av figuren er fargelagt:



b) Fargelegg slik at $\frac{1}{2}$ av figuren er fargelagt:

c) Plasser tallet $\frac{1}{2}$ på tallinjen (sett kryss):

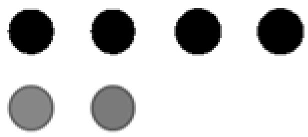


d) Plasser tallet 1 på tallinjen (sett kryss):

Oppgave 9

Eksempel:

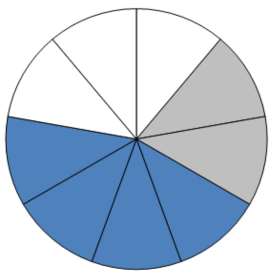
Anna har svarte klinkekuler, og Olav har grå klinkekuler. Skriv ned regnestykket som viser hvor mange hver av dem har, og hvor mange de har til sammen.



4 + 2 = 6

I denne oppgaven med brøk skal du gjøre det samme som i eksempelet med heltall over.

a) Skriv ned regnestykket som viser hvor stor del av figuren som er fargelagt.

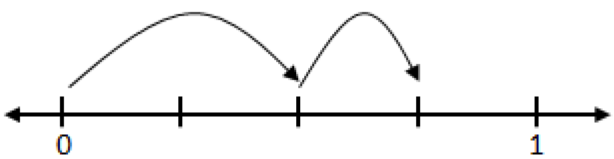


____

b) Skriv ned regnestykket som viser hvor stor del av figuren som er fargelagt.

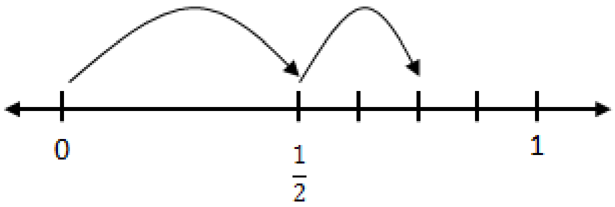
____

c) Skriv ned regnestykket som er illustrert på tallinja.



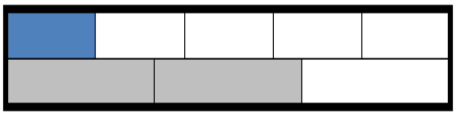
____

d) Skriv ned regnestykket som er illustrert på tallinja.



____

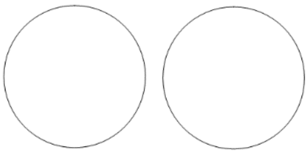
e) Skriv ned regnestykket som viser hvor stor del av figuren som er fargelagt.



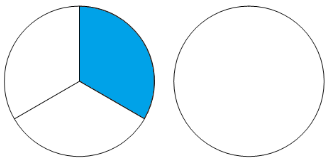
____

f) Forklar hvordan du løste oppgave **e):**

Oppgave 10

 Disse to sirklene utgjør en hel tegning.

Hvor stor del av en hel tegning er fargelagt under?

 ______________________________

Oppgave 11

Finn svaret på disse addisjonsoppgavene:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$ ______________________________

b) $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} =$ ______________________________

c) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} =$ ______________________________

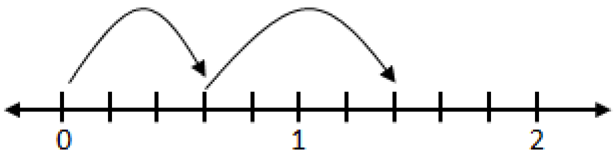
d) $\frac{3}{6} + \frac{1}{3} =$ ______________________________

e) $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} =$ ______________________________

f) $\frac{6}{9} + \frac{5}{9} =$ ______________________________

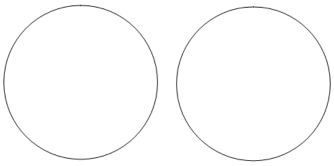
Oppgave 12

Skriv ned regnestykket som er illustrert på tallinja.

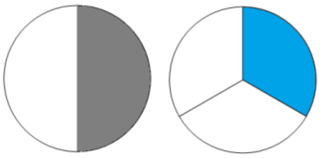


____

Oppgave 13



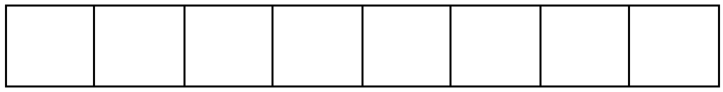
Disse to sirklene utgjør en hel tegning.



Skriv ned regnestykket som viser hvor stor del av en hel tegning som er fargelagt.

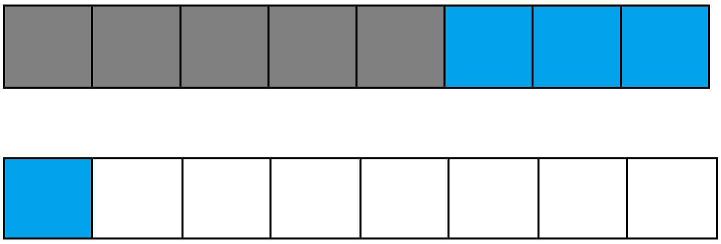
____

Oppgave 14



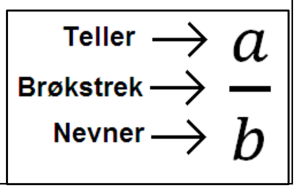
Rektangelet over representerer én hel figur.

Skriv ned regnestykket som viser hvor stor del av en hel figur som er fargelagt under:



Oppgave 15

Forklar for en 6.klassing hvordan man legger sammen to brøker:



<u>Oppgave 16</u>

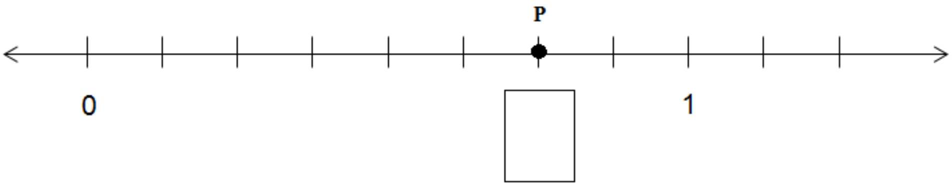
Skriv tall i boksene nedenfor slik at brøkene får samme verdi:

(a) $\frac{4}{5} = \frac{\square}{10}$

(b) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{\square}$

<u>Oppgave 17</u>

a) Hvilken brøk representerer punktet P på tallinja nedenfor:



b) Hvilken brøk representerer punktet P på tallinja nedenfor:

Oppgave 18

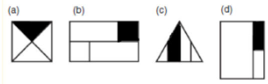
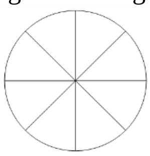
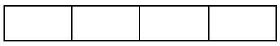
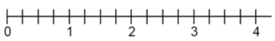
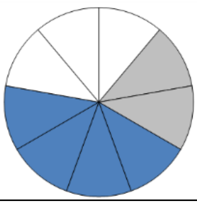
a) Skriv en brøk som ligger mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$:__________________________

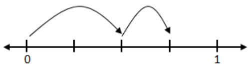
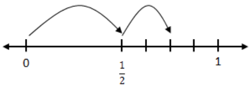
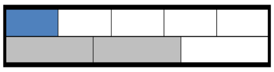
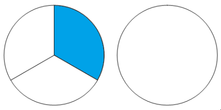
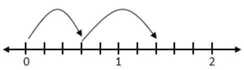
b) Forklar hvordan du tenkte for å løse oppgaven:

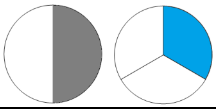
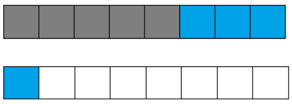
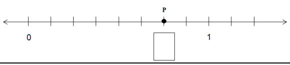
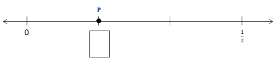
Tusen takk for at du gjorde ditt beste☺

Vedlegg 3: Oppgavenes hensikt og opprinnelse

Oppg. nr. i heftet	**Oppgavebeskrivelse**	**Oppgavens hensikt**	**Oppgavens opprinnelse**
1a)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Like nevnere: $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}$	For å se om elevene håndterer en omdanning mellom symbol og illustrasjon når nevnerne er like, og arealmodellen skal benyttes som illustrasjon.	Omdanningsoppgavene mellom symbol og illustrasjon er inspirert av studien til Herman et al. (2004).
1b)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Tallinje. Like nevnere: $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	For å se om elevene håndterer en omdanning mellom symbol og illustrasjon når nevnerne er like, og tallinjen skal benyttes som illustrasjon.	
2a)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Ulike nevnere: $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$	For å se om elevene håndterer en omdanning mellom symbol og illustrasjon når nevnerne er ulike, og arealmodellen skal benyttes.	
2b)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Tallinje. Ulike nevnere: $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$	For å se om elevene håndterer en omdanning mellom symbol og illustrasjon når nevnerne er ulike, og tallinjen skal benyttes som illustrasjon.	
3a)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Like nevnere. Svaret over 1: $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$	For å se om elevene håndterer en omdanning mellom symbol og arealmodell når nevnerne er like, men hvor summen blir over én.	
3b)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Tallinje. Like nevnere. Svaret over 1: $\frac{3}{6}+\frac{4}{6}$	For å se om elevene håndterer en omdanning mellom symbol og tallinje når nevnerne er like, men hvor summen blir over én.	
4	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Ulike nevnere som ikke er	For å se om elevene håndterer en omdanning mellom symbol og arealmodell når nevnerne er ulike, og	

	multiplum av hverandre: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$	hvor den ene nevneren ikke er multiplum av den andre.	
5	Gjenkjenning av illustrasjon av addisjonsprosess. Arealmodell. Like nevnere.	For å se hvilken illustrasjon elevene foretrekker når det gjelder addisjon av brøk med arealmodell.	
6	Gjenkjenning av illustrasjon av addisjonsprosess. Tallinje. Like nevnere.	For å se hvilken illustrasjon elevene foretrekker når det gjelder addisjon av brøk på tallinjen. Og om de klarer å gjenkjenne den riktige illustrasjonen.	
7	Sett ring rundt alle figurene som viser $\frac{1}{4}$. 	For å teste om elevene er klar over at delene i helheten må ha lik størrelse.	Figurene er inspirert av Van de Walle, Karp, & Bay Williams (2015, s. 373).
8a)	Fargelegg slik at $\frac{1}{2}$ av figuren er fargelagt. 	For å teste om elevene har kontroll på likeverdige brøker, og at de vet at $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$.	
8b)	Fargelegg slik at $\frac{1}{2}$ av figuren er fargelagt. 	For å teste om elevene har kontroll på likeverdige brøker, og at de vet at $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.	
8c)	Plasser tallet $\frac{1}{2}$ på tallinjen. 	For å teste om elevene kan plassere $\frac{1}{2}$ på tallinjen. I tillegg tester oppgaven om de betrakter hele tallinjen som enheten eller ikke.	Oppgaven er hentet fra Wong (2013b).
8d) (denne oppgaven fikk ikke elevene i pilot 3)	Plasser tallet 1 på tallinjen. ($\frac{1}{3}$ er markert på tallinjen) 	For å teste elevenes forståelse av brøk på tallinjen.	Oppgaven er hentet fra Wong (2013a).
9a)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Arealmodell. Like nevnere 	For å teste om elevene håndterer en omdanning mellom arealmodell og symbol, når delene i figuren har lik størrelse.	
9b)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Arealmodell. Ulike nevnere. 	For å teste om elevene håndterer en omdanning mellom arealmodell og symbol, når delene i figuren ikke har lik størrelse.	Oppgaven er hentet fra Deliyianni & Gagatsis (2013).
9c)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Tallinje. Like	For å teste om elevene håndterer en omdanning mellom tallinje og symbol,	

	nevnere. 	når tallinja har jevne enheter.	
9d)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Tallinje. Ulike nevnere. 	For å teste om elevene håndterer en omdanning mellom tallinje og symbol, når tallinja viser ujevne enheter.	
9e)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Arealmodell. Ulike nevnere som ikke er multiplum av hverandre. 	For å teste om elevene håndterer en omdanning mellom arealmodell og symbol, når delene i figuren ikke har lik størrelse. Regnestykket blir bestående av nevnere hvor den ene nevneren ikke er multiplum av den andre.	
10	Hvor stor del av en hel tegning er fargelagt under? (enheten er definert som to objekter) 	For å teste hvordan elevene håndterer enheter bestående av to objekter.	
11a)	Behandling, finn svaret: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$	For å teste elevenes behandlingskompetanse av regnestykker med like tellere og like nevnere.	
11b)	Behandling, finn svaret: $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$	For å teste elevenes behandlingskompetanse av regnestykker med ulike tellere og like nevnere.	
11c)	Behandling, finn svaret: $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$	For å teste elevenes behandlingskompetanse av regnestykker med like tellere og ulike nevnere.	
11d)	Behandling, finn svaret: $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$	For å teste elevenes behandlingskompetanse av regnestykker med ulike tellere og ulike nevnere.	
11e)	Behandling, finn svaret: $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$	For å teste elevenes behandlingskompetanse av regnestykker med ulike tellere og ulike nevnere, hvor den ene nevneren ikke er multiplum av den andre.	
11f)	Behandling, finn svaret: $\frac{6}{9}+\frac{5}{9}$	For å teste elevenes behandlingskompetanse av regnestykker med ulike tellere, like nevnere, men hvor summen blir over 1.	
12	Omdanning. Illustrasjon til symbol. Tallinje. Svar over 1. Like nevnere. 	For å teste elevenes evne til å omdanne fra tallinje til symbol når summen blir over 1. Oppgaven tester også om elevene betrakter hele tallinjen som enhet eller ikke.	
13	Omdanning. Illustrasjon til symbol. (Enheten er definert som	For å teste om elevene håndterer omdanning fra illustrasjon til symbol når enheten er to objekter. Regnestykket blir	

	to objekter). 	bestående av brøker hvor den ene nevneren ikke er multiplum av den andre.	
14	Omdanning. Illustrasjon til symbol. Arealmodell. Svaret over 1. Like nevnere. (Enheten er definert til ett objekt). 	For å teste om elevene håndterer en omdanning fra arealmodell til symbol når summen blir over 1, og delene har lik størrelse.	
15	Forklar hvordan du legger sammen to brøker.	For å teste elevenes evner til å kunne forklare hvordan man legger sammen to brøker. En slik forklaring kan også gi innsikt i elevenes metoder, slik at det blir enklere å forstå hvordan de håndterer behandlings- og omdanningsoppgavene.	
16 a)	Skriv tall i boksen nedenfor slik at brøkene får samme verdi: $\frac{4}{5} = \frac{\quad}{10}$	For å teste elevenes kompetanse for likeverdige brøker, og for å se om det er en forutsetning for å kunne addere brøker med ulike nevnere.	Hentet fra Wong (2006).
16b)	Skriv tall i boksen nedenfor slik at brøkene får samme verdi: $\frac{6}{8} = \frac{\quad}{\quad}$	For å teste elevenes kompetanse for likeverdige brøker, og for å se om det er en forutsetning for å kunne addere brøker med ulike nevnere.	Hentet fra Wong (2006).
17a)	Hvilken brøk representerer punktet P på tallinja nedenfor. 	For å teste elevenes kompetanse i brøk på tallinjen. Oppgaven kan blant annet avsløre om elevene betrakter hele tallinjen som enhet eller ikke.	Hentet fra Wong (2013b).
17b) (denne oppgaven fikk ikke elevene i pilot 3)	Hvilken brøk representerer punktet P på tallinja nedenfor. (bare halve enheten er vist) 	For å teste elevenes kompetanse i brøk på tallinjen, og om de klarer å finne riktig brøk selv om tallinjen bare viser halve enheten.	Hentet fra Pantziara & Philippou (2012).
18	Skriv en brøk som ligger mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$.	For å teste elevenes kompetanse i brøk som tallstørrelse.	Hentet fra Bjerke et al. (2013).

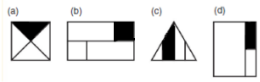
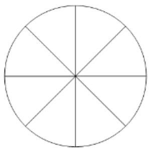
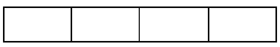
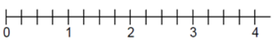
Vedlegg 4: Kode- og rettemal, samt fordeling av antall elever på de ulike svarene

Oppg. nr. i heftet	Oppgavebeskrivelse	Svarkategorier	Kode 1	Kode 2	Antall elever (totalt 66)
1a)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Like nevnere: $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}$	Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	4	18
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper» ikke	B	3	7
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper»	C	2	28
		Illustrerer bare svaret/addendene	D	1	10
		Legger sammen nevner med nevner	E	0	1
		Deler ikke inn i like store deler	F	0	0
		Annet	G	0	2
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	0
1b)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Tallinje. Like nevnere: $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	2	10
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg	B	1	2
		Illustrerer bare svaret/ addendene	C	1	2
		Tallinja viser heltall/del-hel-tenkning	D	0	17
		Legger sammen nevner med nevner	E	0	0
		Annet (f.eks. at de ikke lykkes med å illustrere addisjonsprosessen)	F	0	31

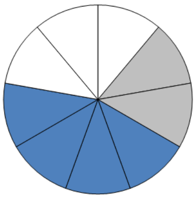
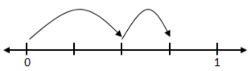
		Ubesvart/ Udefinerbart	G	9	4
2a)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Ulike nevnere: $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$	Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	4	17
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper» ikke	B	3	3
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper»	C	2	16
		Illustrerer bare svaret/ addendene	D	1	8
		Legger sammen nevner med nevner	E	0	4
		Deler ikke inn i like store deler	F	0	4
		Annet	G	0	9
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	5
2b)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Tallinje. Ulike nevnere: $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$	Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	2	8
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg	B	1	1
		Illustrerer bare svaret/ bare addendene	C	1	2
		Tallinja viser heltall/del-hel-tenkning	D	0	15
		Legger sammen nevner med nevner	E	0	0
		Annet	F	0	27
		Ubesvart/ Udefinerbart	G	9	13

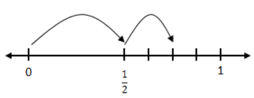
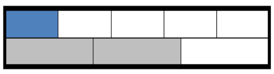
3a)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Like nevnere. Svaret over 1: $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$	Illustrerer hele addisjonsprosessen (også med overlapp i én figur)	A	4	10
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper» ikke	B	3	4
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper»	C	2	22
		Illustrerer bare svaret/ bare addendene	D	1	14
		Legger sammen nevner med nevner	E	0	4
		Deler ikke inn i like store deler	F	0	1
		Annet	G	0	9
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	2
3b)	Omdanning, symbol til illustrasjon. Tallinje. Like nevnere. Svaret over 1: $\frac{3}{6} + \frac{4}{6}$	Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	2	7
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg	B	1	1
		Illustrerer bare svaret/ bare addendene	C	1	2
		Tallinja viser heltall/del-hel-tenkning	D	0	16
		Legger sammen nevner med nevner	E	0	0
		Annet	F	0	30
		Ubesvart/ Udefinerbart	G	9	10
4	Omdanning, symbol til illustrasjon. Arealmodell. Ulike nevnere som ikke er	Illustrerer hele addisjonsprosessen	A	4	8

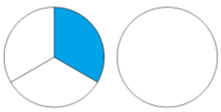
	multiplum av hverandre: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$	Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper» ikke	B	3	1
		Illustrerer addendene hver for seg og svaret for seg, addendene «overlapper»	C	2	9
		Illustrerer bare svaret/ bare addendene	D	1	8
		Legger sammen nevner med nevner	E	0	4
		Deler ikke inn i like store deler	F	0	7
		Annet	G	0	20
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	9
5 (denne oppgaven fikk ikke elevene i pilot 3)	Gjenkjenning av illustrasjon av addisjonsprosess. Arealmodell. Like nevnere.	Alternativ 3	A	2	5
		Alternativ 4	B	2	4
		Alternativ 6	C	2	1
		Alternativ 1	D	1	38
		Alternativ 2	E	0	1
		Alternativ 5	F	0	0
		Hvis de har krysset av for flere riktige alternative	G	2	3
6 (denne oppgaven	Gjenkjenning av illustrasjon av addisjonsprosess. Tallinje. Like nevnere.	Alternativ 1	A	1	25
		Alternativ 2	B	0	14

fikk ikke eleven e i pilot 3)		Alternativ 3	C	0	3
		Alternativ 4	D	0	2
		Alternativ 5	E	0	8
7	Sett ring rundt alle figurene som viser $\frac{1}{4}$. 	Kun alternativ a	A	1	47
		Alternativ a, b og c	B	0	18
		Andre kombinasjoner	C	0	1
8a)	Fargelegg slik at $\frac{1}{2}$ av figuren er fargelagt. 	Halve figuren er fargelagt	A	1	62
		$\frac{1}{4}$ av figuren er fargelagt	B	0	2
		Annet	C	0	1
		Ubesvart	D	9	1
8b)	Fargelegg slik at $\frac{1}{2}$ av figuren er fargelagt. 	Halve figuren er fargelagt	A	1	65
		$\frac{1}{4}$ av figuren er fargelagt	B	0	1
		Annet	C	0	0
8c)	Plasser tallet $\frac{1}{2}$ på tallinjen. 	$\frac{1}{2}$	A	1	11
		1	B	0	5
		$1\frac{1}{2}$	C	0	5

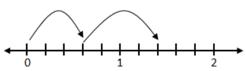
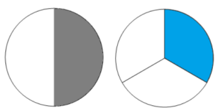
		2	D	0	42
		$2\frac{1}{2}$	E	0	0
		Mindre enn $\frac{1}{2}$	F	0	0
		Mellom 1 og $1\frac{1}{2}$	G	0	0
		Mellom 2 og $2\frac{1}{2}$	H	0	1
		Ubesvart	I	9	2
8d) (denne oppgaven fikk ikke elevene i pilot 3)	Plasser tallet 1 på tallinjen. ($\frac{1}{3}$ er markert på tallinjen) 	Tilnærmet plassert på 1	A	1	21
		$\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{3}$	B	0	8
		Mindre enn $\frac{1}{3}$	C	0	2
		Enden av linja	D	0	9
		$\frac{2}{3}$	E	0	2
		Annet	F	0	5
		Ubesvart	G	9	5
9a)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Arealmodell. Like nevnere	$\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}$	A	2	31
		Bare svaret $\frac{6}{9}$ /bare regnestykket $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$	B	1	15

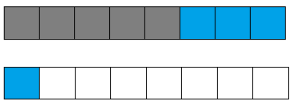
		$\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{18}$	C	0	0
		Annet	D	0	4
		Ubesvart/ Udefinerbart	E	9	16
9b)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Arealmodell. Ulike nevnere. 	$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$	A	2	22
		Bare svaret $\frac{5}{6}$ /bare regnestykket $\frac{1}{2} + \frac{2}{6}$	B	1	13
		$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$	C	0	1
		$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$	D	0	7
		$\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	E	0	2
		Legger sammen nevnerne	F	0	0
		Annet	G	0	5
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	16
9c)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Tallinje. Like nevnere. 	$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	A	2	16
		$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	B	2	2
		0,50 + 0,25 = 0,75	C	2	3
		Bare svaret $\frac{3}{4}$ /bare regnestykket $\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$	D	1	4

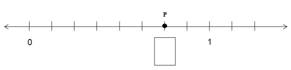
		2 + 1 = 3	E	0	3
		$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$	F	0	6
		Annet	G	0	20
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	12
9d)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Tallinje. Ulike nevnere. 	$\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)$	A	2	15
		0.50 + 0.25 = 0.75	B	2	1
		Bare svaret $\frac{6}{8}eller\,\frac{3}{4}$ / bare regnestykket $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}og/eller\,\frac{4}{8}+\frac{2}{8}$	C	1	5
		$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1$	D	0	2
		$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$	E	0	0
		4 + 2 = 6	F	0	4
		Annet	G	0	26
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	13
9e)	Omdanning, illustrasjon til symbol. Arealmodell. Ulike nevnere som ikke er multiplum av hverandre. 	$\frac{1}{10}+\frac{2}{6}=\frac{3}{30}+\frac{10}{30}=\frac{13}{30}=\left(\frac{26}{60}\right)$	A	2	2
		Bare svaret $\frac{13}{30}$ /bare regnestykket $\frac{1}{10}+\frac{2}{6}$	B	1	1

		$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{15}+\frac{10}{15}=\frac{13}{15}$	C	0	20
		$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$	D	0	13
		Legger sammen nevnerne	E	0	0
		Annet	F	0	11
		Ubesvart/ Udefinerbart	G	9	19
10	Hvor stor del av en hel tegning er fargelagt under? (enheten er definert som to objekter) 	$\frac{1}{6}$	A	1	33
		$\frac{1}{3}$	B	0	16
		Andre feilsvar	C	0	10
		Ubesvart	D	9	7
11a)	Behandling, finn svaret: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ og andre likeverdige brøker	A	1	64
		$\frac{2}{6}$	B	0	1
		Andre feilsvar	C	0	0
		Ubesvart	D	9	1
11b)	Behandling, finn svaret: $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$ og andre likeverdige brøker	A	1	61
		$\frac{6}{14}$	B	0	2
		Andre feilsvar	C	0	2

		Ubesvart	D	9	1
11c)	Behandling, finn svaret: $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$ og andre likeverdige brøker	A	1	44
		$\frac{2}{12}$	B	0	7
		$\frac{2}{8}$	C	0	1
		Andre feilsvar	D	0	7
		Ubesvart	E	9	7
11d)	Behandling, finn svaret: $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$ og andre likeverdige brøker	A	1	40
		$\frac{4}{9}$	B	0	9
		$\frac{4}{6}/\frac{2}{3}$	C	0	3
		Andre feilsvar	D	0	7
		Ubesvart	E	9	7
11e)	Behandling, finn svaret: $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$	$\frac{14}{15}$ og andre likeverdige brøker	A	1	33
		$\frac{4}{8}$	B	0	9
		$\frac{4}{15}$	C	0	1
		Andre feilsvar	D	0	11

		Ubesvart	E	9	12
11f)	Behandling, finn svaret: $\frac{6}{9}+\frac{5}{9}$	$\frac{11}{9}=1\frac{2}{9}$ og andre likeverdige brøker	A	1	46
		$\frac{11}{18}$	B	0	3
		Andre feilsvar	C	0	14
		Ubesvart	D	9	3
12	Omdanning. Illustrasjon til symbol. Tallinje. Svar over 1. Like nevnere.  	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$	A	2	11
		0,60 + 0,8 = 1,4	B	2	0
		Bare svaret $\frac{7}{5}$ og eller $1\frac{2}{5}$ /bare regnestykket $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	C	1	2
		$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$	D	0	6
		Legger sammen nevnerne	E	0	0
		3 + 4 = 7	F	0	3
		Annet	G	0	25
		Ubesvart/ Udefinerbart	H	9	19
13	Omdanning. Illustrasjon til symbol. (Enheten er definert som to objekter). 	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}=\left(\frac{10}{24}\right)$	A	2	1
		Bare svaret $\frac{5}{12}$ / bare regnestykket $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ og eller $\frac{3}{12}+\frac{2}{12}$	B	1	3
		$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$	C	0	35

		Legger sammen nevnerne	D	0	0
		$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$	E	0	7
		Annet	F	0	6
		Ubesvart/ Udefinerbart	G	9	14
14	Omdanning. Illustrasjon til symbol. Arealmodell. Svaret over 1. Like nevnere. (Enheten er definert til ett objekt). 	$\frac{5}{8}+\frac{4}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$	A	2	9
		$\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$	B	2	7
		Bare svaret $\frac{9}{8}$ og eller $1\frac{1}{8}$ / bare regnestykket $\frac{5}{8}+\frac{4}{8}$	C	1	16
		$\frac{5}{16}+\frac{4}{16}=\frac{9}{16}$	D	0	11
		Legger sammen nevnerne	E	0	1
		Annet	F	0	9
		Ubesvart/ Udefinerbart	G	9	13
15	Forklar hvordan du legger sammen to brøker.	Forklarer hvordan man legger sammen alle typer brøker	A	2	10
		Forklarer kun for brøker med like nevnere	B	1	25
		Forklarer feil	C	0	14
		Forklarer ikke	D	9	17
16 a)	Skriv tall i boksen nedenfor slik at brøkene	8	A	1	50

	får samme verdi: $\frac{4}{5} = \frac{}{10}$	9	B	0	6
		5	C	0	2
		Andre feilsvar	D	0	4
		Ubesvart	E	9	4
16b)	Skriv tall i boksen nedenfor slik at brøkene får samme verdi: $\frac{6}{8} = \frac{}{}$	$\frac{3}{4}$	A	1	22
		$\frac{12}{16}$	B	1	25
		$\frac{9}{12}$	C	1	0
		Andre riktige svar	D	1	1
		$\frac{8}{10}$	E	0	4
		Andre feilsvar	F	0	8
		Ubesvart	G	9	6
17a)	Hvilken brøk representerer punktet P på tallinja nedenfor. 	$\frac{6}{8}$	A	1	31
		$\frac{3}{4}$	B	1	2
		$\frac{6}{10}$	C	0	4
		6	D	0	3

		$\frac{7}{11}$	E	0	0
		Andre feilsvar	F	0	11
		Ubesvart	G	9	15
17b) (denne oppgaven fikk ikke elevene i pilot 3)	Hvilken brøk representerer punktet P på tallinja nedenfor. (bare halve enheten er gitt) 	$\frac{1}{6}$	A	1	13
		Andre riktige svar	B	1	1
		$\frac{1}{3}$	C	0	3
		Andre feilsvar	D	0	16
		Ubesvart	E	9	19
18	Skriv en brøk som ligger mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$.	$\frac{7}{12}$	A	1	6
		$\frac{3}{5}$	B	1	1
		$\frac{6}{10}$	C	1	3
		Andre riktige svar	D	1	6
		$\frac{1}{3}$	E	0	10
		$\frac{2}{2}$	F	0	1
		$\frac{4}{6}$	G	0	6

		Andre feilsvar Ubesvart	H I	0 9	16 17

Vedlegg 5: «Variable map» for alle testens oppgaver

```
MEASURE Elev - MAP - Oppgave
         <more>|<rare>
    4          +
               |T
               |
               |
               |  13
               |
    3          +  9e
              T|
          XX   |
               |
               |  8c
          XX   |
    2      X   +  3b
          XX   |S 1b     2b
         XXX  S|
        XXXX   |  12
          XX   |  18     4
               |  9d
    1   XXXX   +
       XXXXX   |  15     17b    9c
         XXX   |  14     3a     8d
      XXXXXX   |  2a     6
      XXXXXX  M|
         XXX   |  10     9b
    0   XXXX   +M 11e
       XXXXX   |
          XX   |  11d    17a
           X   |  1a
           X   |  7
          XX  S|  11c    11f
   -1     XX   +
               |
               |  16b
          XX   |  16a    5      9a
               |
               |S
   -2          +
           X  T|
               |
           X   |
               |
               |
   -3          +
           X   |  11b
           X   |
               |  8a
               |
               |T
   -4          +
               |
               |
               |
               |
               |  11a    8b
   -5          +
         <less>|<freq>
```

Vedlegg 6: Samtykkeerklæring

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"Forståelse for brøk"

Bakgrunn og formål

Dette forskningsprosjektet er en masterstudie ved NTNU – fakultet for lærer- og tolkeutdanning. Formålet med studien er å utvikle et kvalitetssikret oppgavesett for vurdering av elevers forståelse for brøk.

Din skole har takket ja til å være med på prosjektet. I en skoletime vil alle elevene i klassen arbeide med oppgaver om brøk. Kun besvarelser hvor foresatte har samtykket til deltakelse kan være med i studien.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i prosjektet består i hovedsak av å besvare oppgaver som omhandler brøk. Det vil bli avsatt ca. én time til besvarelsen, som skal gjennomføres med penn og papir, og som samles inn når den avsatte tiden er utløpt. I etterkant kan det bli aktuelt å plukke ut noen elever til et intervju for å undersøke løsningsstrategier for enkelte oppgaver. Dette vil eventuelt gjøres i samråd med klassens lærer, og her vil det bli gjort lydopptak. Dersom foreldre/foresatte ønsker tilgang på oppgavesamling og/eller intervjuguide er det tilgjengelig ved forespørsel.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Det vil bli samlet inn navn og alder på elevene. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt og kun student og veileder vil ha innsyn i datamaterialet. Navnelister vil bli oppbevart adskilt fra oppgavebesvarelsene. All data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere.

Prosjektet avsluttes 20.08.17. Da vil all data bli fullstendig anonymisert og eventuelle lydopptak vil bli slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.
Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med mastergradsstudent Julie Gausen, juliega@(...).no, tlf. (…), eller førsteamanuensis Trygve Solstad, trygve.solstad@(...).no.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Forelders/ foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsskrivet og samtykker i at mitt barn kan delta i aktiviteter knyttet til studien:

Barnets navn/klasse: ____

Jeg samtykker i at: (sett kryss der det passer)

- Mitt barn gjennomfører oppgaver om brøk knyttet til prosjektet. Anonymiserte besvarelser fra barnet, der barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, kan brukes i prosjektets publikasjon.

- Mitt barn deltar i intervju hvor det tas lydopptak for transkribering og analyse. Lydopptakene skal ikke offentliggjøres og slettes ved prosjektets slutt, men anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, kan brukes i prosjektets publikasjon.

Sted og dato:____

Forelders/ foresattes underskrift: ______________________________

Vennligst lever skjemaet til ________________

Tusen takk!