Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Jo Esten Grøtting

Å uttrykke det generelle

En casestudie om generealisering og begrunnelse i 10.- trinns elevers arbeid med figurfølger

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Hermund André Torkildsen
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Jo Esten Grøtting

Å uttrykke det generelle

En casestudie om generealisering og begrunnelse i 10.- trinns elevers arbeid med figurfølger

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Hermund André Torkildsen
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min tid som lærerstudent ved Rotvoll, og NTNU. Det å skrive en sånn oppgave har vært interessant, men også krevende. I løpet av prosessen har det vært flere opp- og nedturer, men alt i alt har det vært veldig spennende og lærerikt. Når prosjektet nå går mot slutten er det noen jeg vil takke.

Først og fremst vil jeg takke alle deltakere i studien. Involverte elever, lærere og ledelse ved ungdomsskolen jeg gjorde mine undersøkelser på. Spesielt lærer og elever som ble observert i arbeidet med oppgaver, og som gjorde en fantastisk innsats.

Takk til min veileder Hermund Torkildsen for alle gode råd. Spesielt i perioder da jeg var usikker på diverse momenter i oppgaven har han gitt meg tro på at det jeg har tenkt kan fungere, og kommet med gode tips i hele oppgaveprosessen.

En stor takk til min samboer som først og fremst har gjort hverdagen utenfor oppgaveskriving veldig fin, men som også har lest oppgaven, og vært entusiastisk i hele prosessen. Jeg vil også takke mine foreldre og søsken med familie som også har vært støttende i prosessen, og har gitt meg andre ting å tenke på i løpet av skriveperioden. Takk til venner, som også har gjort at jeg har kunne glemt masteroppgaven i en liten periode.

Sist, men ikke minst; takk til alle medstudenter opp i gjennom mine fem år her på skolen. Spesielt til den flotte gjengen jeg har delt kontor med i skriveprosessen. Det har vært en flott ramme å skrive masteroppgave i.

Jo Esten Grøtting

Trondheim, mai 2015

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabelliste

1.0. Innledning: Generalisering og algebra

1.1. Bakgrunn og aktualitet

«Resultatene for TIMSS 2015 viser at det har gått fra vondt til verre. Norske elever er alarmerende dårlig i algebra» sier Liv Sissel Grønmo, i et intervju med Dagsavisen (Fladberg, 2016). Grønmo er prosjektleder for TIMMS Advanced 2015 og kommenterer resultatene i TIMMS- undersøkelsen for 2015. Der kom det frem at norske elever på 8. trinn gjorde det litt bedre i matematikk enn i samme undersøkelse årene før. Denne lille bedringen skyldtes hovedsakelig en bedring innen hverdagsmatematikk, som tallregning og statistikk, men ifølge prosjektlederen; ingen grunn til å ta av: «For den matten som gjør at vi skal utvikle eksperter i viktige yrker som ingeniør, økonomi, informatikk, data, fysikk, kjemi og naturvitenskap, går utviklingen i gal retning», sier Grønmo (Fladberg, 2016). Hun peker her på at norske elever til stadighet scorer dårlig innen algebra. Enkelte vil ha det til at undersøkelser som TIMMS ikke gir et klart bilde av situasjonen, siden det er mange drilloppgaver som ikke fremmer forståelse. Men det faktum at norske elever sliter med algebra er ikke noe nytt, og underbygges av resultater på slike internasjonale tester som TIMMS og PISA. Hvorfor er det slik? Hvorfor er algebra så krevende innenfor matematikken i skolen?

Det er ikke bare i norsk skole vi finner utfordringer med algebra som tema i skolen. Algebra er sett på som krevende av mange i skolen, og matematikkdidaktikkforskere. Noe av grunnen til dette kan være at synet på algebra i skolen har gjennomgått en endring de siste tiårene. Algebra ble tidligere hovedsakelig sett på som en papir- og blyantaktivitet med manipulering av symboler (Kieran, 2004). I de siste tiårene har det derimot skjedd en endring, i form av at vi ser på algebra som flere grener enn bare symbolmanipulasjon, og benytter algebra i ulike modelleringer på PC. Endringen i synet på algebra henger sammen med flere ting, men kanskje mest av alt var den økende interessen for algebrastudier hos matematikkdidaktikere (Kieran, 2004). Etter mange slike studier er oppfatningen av algebra endret, noe som har ført til utfordringer for skolen å endre undervisningen av algebra. Tradisjonelt har elever blitt introdusert for algebra fra 11- 12- årsalderen, etter at de har godt aritmetisk grunnlag. Flere tidligere studier peker på at dette kan gjøre senere aktiviteter med algebra vanskelig, da elevene blir veldig svarorienterte (Kieran, 2004; Lannin, 2005; Mason, 1996; Radford, 2014). Det fører ofte til at elevene mister en dybdeforståelse for algebra, og kun ser på algebra som forenkling av utrykk. Et aspekt for å øke elevenes forståelse som mange peker på er å fremme generaliseringsaktiviteter. Mason (1996) mener at all matematikkundervisning bør inneholde generalisering, og at det ikke foregår matematikk uten generalisering. Mange land har forsøkt å implementere flere algebraiske aktiviteter, og har gått bort fra den rene symbolmanipulasjonen. I den norske skolen utprøves nå en tidligere innsats som skal styrke lærertettheten til de minste elevene, for å plukke opp de som trenger mer hjelp, uten at innholdet i opplæringen endres nevneverdig. Men er dette svaret på å bedre våre eleveres forståelse i de mer krevende delene av matematikken? Eller bør vi endre måten vi tilnærmer oss emnet algebra? Burde vi i stedet for de tradisjonelle manipuleringsaktivitetene heller følge store deler av forskningen, og fremme generaliseringsarbeid?

Rivera og Becker (2005) mener at barn og unge har en sterk intuisjon av visuelle konsepter, og at algebraundervisning bør bygge på det barna kan. Slik undervisningen har vært blir dette borte bak regler om forenkling og løsning av uttrykk. Med det går elevenes fokus fra det generelle til det konkrete i en oppgave. Skal man få algebra til å bli noe mer enn ren symbolmanipulasjon må det legges opp aktiviteter som fremmer generalisering (Kieran, 2004). Dette kan gjøres på flere måter, og gjennom flere temaer i skolen, som for eksempel funksjoner, geometri og statistikk. Temaet jeg vil fokusere på er figurfølger. Figurfølger gir et godt grunnlag for generalisering. Å beskrive en figurfølge innebærer å finne mønstre i figurer eller i verdier knyttet til figurene. Slike typer oppgaver fremmer algebraisk resonnering i form av man ofte vil finne et generelt uttrykk som representerer en situasjon. English og Warren (1998) fant i sin studie at elever som benyttet algebra i sin resonnering og notasjon, lyktes best med å generalisere figurmønstre. I tillegg fant de at elever som regel klarer å fortsette en figurfølge, men at det er vanskeligere å formalisere et generelt uttrykk. Med å arbeide med slike figurfølgeaktiviteter kan man derfor anvende variabler til å generalisere og begrunne sin strategi, som vil øke elevenes forståelse, og gi en bredere erfaring med algebra. Det å begrunne en påstand oppfordres det også til i tidlig alder. Gjennom muntlige ferdigheter i matematikkfaget skal elevene «argumentere ved hjelp av både et uformelt språk, fagterminologi og begrepsbruk» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det å argumentere for sine påstander er essensielt i arbeid med figurfølgeoppgaver.

1.2. Formål og forskningsspørsmål

Generalisering og begrunnelse er et vanskelig tema, og et tema mange norske elever først møter for alvor i videregående skole. Allikevel er det et nødvendig tema for å kunne modellere ulike matematiske situasjoner, og sett på som viktig i matematikken, som forklart ovenfor. Derfor er det nyttig for elever å få trening i å se det generelle i ulike matematiske kontekster. For å gjøre dette på en god måte bør man vite hvordan elever angriper slike oppgaver. Nærmere bestemt om de klarer å gjenkjenne mønstre, om de ønsker, og evner å generalisere og hvilke utfordringer de møter gjennom en slik prosess. Denne studien vil derfor forsøke å belyse på hvilken måte elever generaliserer figurmønstre, og begrunner sine strategier. Forskningsspørsmålet for denne oppgaven er på bakgrunn av dette formulert slik:

> *Hva kjennetegner elever på 10. trinns valg av generaliseringsstrategier i arbeid med figurfølgeoppgaver, og hvordan begrunner de sine strategier?*

Gjennom dette spørsmålet vil jeg utforske strategivalg til elevene og i hvilken grad generalisering og begrunnelse henger sammen. I tillegg vil jeg se på hvordan elevene bruker informasjonen de får fra figurfølgen. Konkret om elevene hovedsakelig forholder seg til figurene i følgen, eller om de benytter de numeriske verdiene tilknyttet til figuren. Rivera og Becker (2005) viser til at elever enten generaliserer *numerisk* eller *figurativt.* Den *figurative* generaliseringen fokuserer på figurene og deres egenskaper. En *numerisk* generalisering går vekk fra figurene og ser på verdier tilknyttet til figurfølgen, for eksempel ved å lage en tabell og utvikle et uttrykk ut fra dens verdier. I Rivera og Becker (2005) sin studie var det elevene som hadde en *figurativ* tilnærming som lyktes best i å generalisere. For å studere generalisering og begrunnelse vil jeg analysere elevenes utsagn i arbeidsprosessen med oppgavene. I analysen av disse vil jeg bruke et allerede utviklet rammeverk. Dette rammeverket stammer fra John Lannin (2005) og inneholder fem generaliseringsstrategier, og fem nivåer av begrunnelse. Generaliseringsstrategiene deles inn i eksplisitte og ikke-eksplisitte strategier. De ikke- eksplisitte strategiene kan finne neste figur eller verdi i følgen, mens en eksplisitt strategi kan uttrykke hvilken som helst figur eller verdi i følgen. Oppgavene som elevene arbeider med i denne studien vil forsøke å åpne for begge typer generalisering.

1.3. Oppbygging av oppgaven

Denne oppgaven er delt inn i seks kapitler. Påfølgende kapittel tar for seg de teoretiske perspektivene oppgavene bygger på. I teorikapittelet ser jeg først på algebra og algebraiske aktiviteter, før jeg snevrer det inn mot generalisering og begrunnelse, som er hovedområdet for min studie. Kapittel 3 presenterer metoden som er brukt i oppgaven. Dette innebærer valg i forhold til forskningsdesign, datainnsamlingsmetode, analyseprosess og etiske betraktninger opp mot forskningen. I 4. kapittel legger jeg frem, og analyserer utdrag fra observasjonssekvensen som kan belyse forskningsspørsmålet i oppgaven. Dette kapittelet tar for seg oppgave for oppgave deltakerne i studien arbeidet med. 5. kapittel sammenfatter funn fra analysen og drøfter disse opp mot tidligere forskning som er presentert i teorikapittelet. I tillegg vil jeg kort drøfte observasjonsmetoden som er benyttet i forskningen. 6. kapittel runder av oppgaven med å se på generaliseringens rolle, og viktighet i arbeid med elever i grunnskolen, og hvilke didaktiske implikasjoner den kan ha for læring og undervisning.

2.0. Teoretisk perspektiv: Algebraisk generalisering og begrunnelse

En vanlig oppfatning av algebra er at det er en aktivitet som handler om bokstavregning der bokstavene representerer en variabel, en ukjent eller en parameter. Disse bokstavene kan å vise et utrykk som representerer en sammenheng i en bestemt situasjon. Andre vil hevde at algebra er matematisk språk som gir muligheter for matematisk kommunikasjon, på tvers av morsmål, kultur og fagfelt. Og noen vil si at algebra bare er et skolefag som man ikke trenger i hverdagen. I dette kapittelet vil jeg presentere ulike syn på algebra og algebraiske aktiviteter og definere retningen på min studie ut fra disse. Senere vil jeg med bakgrunn i tidligere forskning se på syn på generalisering og begrunnelse. Mitt hovedrammeverk er hentet fra John Lannin (2005), men mitt teoretiske perspektiv er farget av flere forskeres syn på generalisering og begrunnelse.

2.1 Algebra

James Kaput og Maria Blanton mener at algebra må ses bredere og dypere enn å være ren prosessorientert symbolmanipulasjon (2001). De deler inn algebraisk resonnering i fem tråder som henger sammen med hverandre. Generalisering er grunnleggende for fire av trådene, men også i den gjenstående (#2) er det viktig for å gi mening til objektene som blir manipulert.

1. Algebra som generalisering og formalisering av mønstre, spesielt (men ikke bare), algebra som generalisert aritmetikk og resonnering. I dette ligger bruk av aritmetikk for å lage, uttrykke og begrunne generaliseringer.
2. Algebra som prosessorientert symbolmanipulasjon, med gitte regler.
3. Algebra som en studie av strukturer og systemer hentet fra utregninger og relasjoner. Dette inkluderer tenking rundt abstrakte objekter og systemer, som modulær aritmetikk (kongruensregning) eller matriser. Dette er en av røttene innenfor algebra som en matematisk disiplin.
4. Algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og avhengig variasjon. Generalisering med numeriske mønstre eller figurfølger for å gi beskrivelser av funksjoner. Disse beskrivelsene kan også være på rekursiv form, hvor man finner det neste i rekken. Begge beskrivelser er viktig for å bygge konsepter om funksjoner, noe som er viktig for algebraisk tenking i skolen.
5. Algebra som et modellering- og fenomenkontrollert språk. Man bruker modellering som et område for å lage, uttrykke og beskrive situasjoner og fenomener matematisk.

Det kan være å generalisere mønstre fra situasjoner eller fenomener, hvor mønstrene spiller en støtterolle i modelleringsoppgaven. Altså; generaliseringen kommer i bakgrunnen av modellering av selve oppgaven.

(Kaput & Blanton, 2001, s. 346-347)

Kaput og Blantons (2001) tråder ser algebraens dype, men varierte forbindelser til all matematikk, og ønsker å vise hvorfor algebra bør spille en nøkkelrolle i læreplaner for grunnskolen. De peker også på viktigheten av generaliseringsarbeid i skolen, og at det bør være underliggende i alt arbeid i matematikkfaget, i motsetning til et snevert syn på algebra som syntaksstyrte manipulasjoner. Alle de fem trådene i listen ovenfor vil være en del av algebra. I denne studien vil hovedfokuset være på den første og de to siste (#4 og #5), siden forskningen handler om generalisering med figurrekker og evne til å begrunne.

2.1.1. Algebraiske aktiviteter

Carolyn Kieran ga i 2004 sine konklusjoner rundt algebraiske aktiviteter på den 12. ICMI konferansen. Hun presenterer her algebraiske aktiviteter i skolen i tre kategorier; generaliseringsaktiviteter, omgjøringsaktiviteter og globale/ meta-nivå aktiviteter (2004). Min forskning befinner seg hovedsakelig innenfor den første av disse aktivitetene.
Den første aktiviteten; generaliserende aktiviteter bruker algebra til å forme uttrykk og likninger som algebraiske objekter. Eksempler på dette er likninger med en ukjent som representerer situerte problemer, generelle uttrykk som kommer frem fra geometriske mønstre eller figurfølger, eller uttrykk som styrer numeriske sammenhenger. De algebraiske objektene i uttrykkene og ligningene er variabler og ukjente. Kieran (2004) sier videre at fokuset til de generaliserende aktivitetene er representasjonen av situasjoner, verdier, mønstre og relasjoner, og at mye av meningen med algebraen finnes i situasjonen i den enkelte aktiviteten.

Omgjøringsaktiviteter inkluderer å samle like ledd (like variabler med lik eksponent), faktorere, utvide, forenkle uttrykk, løse uttrykk m.m (Kieran, 2004). En stor del av disse aktivitetene handle om å endre et uttrykk eller en ligning, og samtidig beholde ekvivalens. Dette kan sammenliknes med Kaput og Blantons *(*2001*)* 2. tråd *«algebra som prosessorientert symbolmanipulasjon»*.

Globale/meta-nivåaktiviteter beskriver Kieran (2004) som aktiviteter der algebra er et verktøy, men som ikke forholder seg eksplisitt til algebra. Dette er aktiviteter hvor algebra ikke er nødvendig, men kan ikke utelukkes som et verktøy. Slike aktiviteter kan inneholde problemløsning, modellering, å se strukturer, generalisering, argumentering og bevisføring.

2.1.2. Algebra i skolen

Synet på algebra i skoleforskning har gjennomgått en stor endring de siste fire tiårene. Kieran (2004) peker på to ting som bidro til å tvinge frem denne utviklingen; en økende interesse på algebrastudier av matematikkdidaktiske forskere, og inntoget til elektronisk teknologi i klasserommene fra midten av 80- tallet. Studier på feltet gjort på 70- og 80- tallet viste at elever hadde problemer med generaliserings- og manipuleringsaktiviteter, fordi aritmetikken i grunnskolen var svarorientert og det var vanskelig for elever å bryte ut av dette i arbeid med problemløsningsoppgaver (Kieran, 2004). Dette gjorde at forskere og lærere begynte å tenke at det brukes mer tid på å gi mening til objektene som ble manipulert, og det ble startet studier som forsøkte andre typer algebraiske aktiviteter med større fokus på generalisering. I de siste årene har det blitt mer fokus på at elever skal møte algebra tidligere i skoleløpet. Tidligere utvikling innen algebraisk tenkning kan lette møtet med algebraisk symbolspråk (Radford, 2014). Denne tanken er på sin måte kontroversiell, siden tidligere tankegang har vært at elever må ha tilstrekkelig kunnskap innen aritmetikk før de kan lære algebra. Radford (2014) peker på at siden det er mye aritmetikk i algebraiske resonneringsoppgaver, bør det være hensiktsmessig å lære algebraisk resonnering i tidlig alder.

2.1.3. Algebra i norsk skole

I norsk skole har fokuset vært å lære aritmetikk i de første årene av skoleløpet, for så å introdusere algebra fra 5. trinn. Dette ser vi tydelig i kompetansemålene for læreplanen i matematikk. Kompetansemål i matematikk etter 4. trinn sier f.eks. ingenting eksplisitt om algebra. Men et kompetansemål etter 4. trinn er å «gjenkjenne, eksperimentere med, beskrive og videreføre strukturer i tallmønster»(Utdanningsdirektoratet, 2013), som kan åpne opp for en form for generalisering. Sammenligner man med Kaput og Blantons (2001) tråder kan et slikt kompetansemål passe inn under første tråd med algebra som generalisering av mønstre.

Kompetansemål etter 7. trinn gir mulighet for bruk av algebra i form av å beskrive figurmønster. Et kompetansemål er å «stille opp og løse enkle likninger, og løse opp og regne med parenteser i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tall» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Dette målet handler først og fremst om symbolmanipulasjon som prosess. Det andre målet som kan sies å omhandle algebra er å «utforske og beskrive strukturer og forandringer i geometriske mønster og tallmønster med figurer, ord og formler»(Utdanningsdirektoratet, 2013). Dette gir muligheten til å generalisere rundt figur- og tallmønster, som sammenfatter med Kaput og Blantons (2001) første tråd av algebraisk resonnering, og Kierans (2004) første aktivitet. Det må merkes at dette kompetansemålet er relativt omfattende, og sier ikke eksplisitt at algebra må være et verktøy for å oppfylle det. Ut fra disse to kompetansemålene for 7. trinn ser man at algebra som aktivitet først og fremst handler om symbolmanipulasjon i form av likningsløsning, og fremmer ikke direkte flere algebraiske aktiviteter.

Ser man på kompetansemål for 10. trinn er det større fokus på algebra som verktøy, og aktivitet:

Tall og algebra:
- behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knytte uttrykkene til praktiske situasjoner, regne med formler, parenteser og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningene
- løse likninger og ulikheter av første grad og ligningssystemer med to ukjente og bruke dette til å løse praktiske og teoretiske problemer
- bruke tall og variabler i utforskning, eksperimentering og praktisk og teoretisk problemløsning og i prosjekter med teknologi og design
Funksjoner:
- lage funksjoner som beskriver numeriske sammenhenger og praktiske situasjoner, med og uten digitale verktøy, beskrive og tolke dem og oversette mellom ulike representasjoner av funksjoner, som grafer, tabeller, formler og tekster

- identifisere og utnytte egenskapene til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjoner og gi eksempler på praktiske situasjoner som kan beskrives med disse funksjonene

Tabell 1- Algebra i kompetansemål etter 10.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Ut fra Tabell 1 ser man at kompetansemål som omhandler algebra har et fokus på å behandle algebrauttrykk, likningsløsning og å lage og beskrive funksjoner i ulike kontekster. Læreplanen har svært lite fokus på generalisering som algebraisk aktivitet. Enkelte kompetansemål åpner opp for at elever kan arbeide med generaliseringsoppgaver, men nevner ikke eksplisitt generalisering. Både første og tredje mål i Tabell 1 tar inn praktisk problemløsning, som kan gi mulighet for noe generalisering. Det å knytte uttrykk til praktiske situasjoner tar algebra i retning av en generaliserende aktivitet. Kieran (2004) påpeker at fokuset i en generaliserende aktivitet er å beskrive en situasjon, men det kan også gå fra uttrykk til situasjon. Siste kompetansemål i tabellen ovenfor kan også åpne opp for generaliserende aktiviteter, ettersom man kan lage eksempler ut fra funksjoner for å se sammenhengen mellom disse. Men aktiviteter i skolen går ofte bort fra det generelle. Det man da hovedsakelig sitter igjen med er et sterkt fokus på å forenkle og manipulere algebraiske uttrykk, som kan ses i sammenheng med Kaput og Blantons (2001) andre tråd om symbolmanipulasjon og Kierans (2004) andre aktivitet.

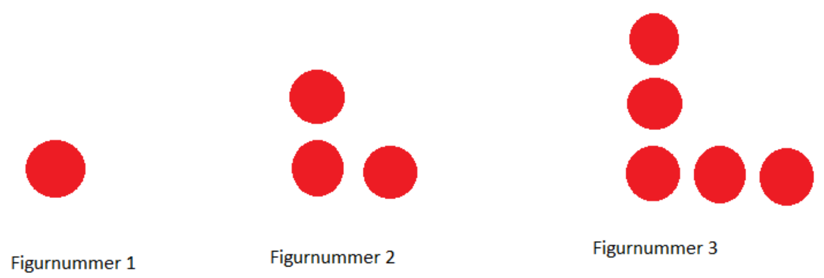
2.2. Generalisering

2.2.1. Hvorfor generalisere?

Kaye Stacey og Mollie Macgregor (2002) har beskrevet læreplanens utvikling og tilnærminger til algebra. De peker på at tradisjonelt ble algebraisk tenking presentert for elever i form av en spesifikk ukjent, mens undervisning nå er på vei til å vises gjennom erfaring med generalisering og gjenkjennelse av generelle relasjoner i mønstre og nummersekvenser. Retningen som algebraisk tenking har tatt ser Lannin (2005) på som fordelaktig siden det å generalisere numeriske situasjoner vil hjelpe elevers forståelse av symbolrepresentasjoner og kan knyttes til tidligere erfaring i aritmetikk. Dette kan videreføres til det å generalisere figurfølger. Mange ser viktigheten av at elever får tidlige erfaringer med generalisering, og ser generalisering som kjernen i all matematikk (Kaput, 2008; Mason, 1996). Mason (1996) mener at hvis lærere ikke ser generalitet i et matematisk tema, og ikke får elever til å arbeide med generalisering, foregår ingen matematisk tenking. Mens Radford (1996) mener generalisering er en epistemologisk norm som ikke fungerer alene, men må ses i sammenheng med problemløsning som konsept. Altså; generalisering er et viktig konsept i matematikk, men må brukes som et verktøy i konteksten det ses i.

2.2.2. Figurmønsteroppgaver

Figurmønsteroppgaver er oppgaver som inneholder en matematisk følge bestående av figurer, der hver figur har et gitt nummer i følgen. I tillegg brukes gjerne begrepet *figurtall* for å beskrive verdien av objekter i en figur. Figurfølger gir elever mulighet til å se relasjoner og mønstre, og oppfordrer til å finne en generell regel for å beskrive følgen (English & Warren, 1998). Figurnummeret er avgjørende for hvordan følgen kan beskrives. Om en følge starter med figur nummer null eller en, kan varieres, men valget bestemmer da hvordan figuren kan uttrykkes. Indekseringen bestemmer altså relasjonen mellom figurnummer og figurtall. Starter man på figur nummer 1 vil figur null ofte ikke gjelde for følgen, fordi et generelt uttrykk ikke stemmer for denne.



Figur 1- Eksempel på figurfølge

I figuren ovenfor kan et eksplisitt uttrykk være $F_n = 2n - 1$, der n er figurnummeret. I denne følgen vil F_0 få -1 sirkler og derfor ikke gjelde for følgen. En annen ting som kjennetegner figurmønsteroppgaver er at de har flere, likeverdige løsninger (English & Warren, 1998). Eksempelet i Figur 1 kan for eksempel også uttrykkes med $F(x) = x^2 - (x-1)^2$, i tillegg til det eksplisitte uttrykket vist ovenfor. Det vanskeligste med figurmønsteroppgaver er ofte ikke å gjenkjenne mønsteret i figuren, men å formalisere det til et generelt uttrykk (English & Warren, 1998). Elever er derfor som regel i stand til å fortsette en følge, men det er vanskeligere å finne en bestemt figur lengre ute i følgen. English og Warren (1998) mener at det å ha en forståelse for variabler er nødvendig for å generalisere. De gjorde en studie på 430 elever mellom tolv og femten år, der de fant at elevene som lyktes best med å generalisere brukte algebra i sin notasjon, mens de mindre dyktige elevene brukte ikke- eksplisitte strategier. I tillegg kommer det frem av deres studie at elever lettere uttrykker sine generaliseringer med sitt muntlige språk, enn å skrive det ned med symboler, men ved vanskeligere generaliseringer gikk elever over til rekursive tilnærminger (English & Warren, 1998).

I sin studie sier English og Warren (1998) at elever kan møte flere utfordringer for å generalisere figurfølger. De kommer derfor med seks forslag til lærere som skal hjelpe elever på vei i arbeidet med figurfølger:

1) *Gi elevene erfaringer med å uttrykke numeriske sammenhenger og relatere disse til symboler.* Elevene må ha forståelse for tall og mengder, og kunne uttrykke dette, før de kan generalisere figurfølger. For eksempel må de forstå at «to grupper med tre», «to multiplisert med tre», «addere tre med seg selv», «multiplisere tre med to», «tre pluss tre» og «tre grupper med to» alle kan skrives som $3 \cdot 2$. Gjennom dette gis det mening til symbolene som brukes.
2) *Hjelpe elever fra rekursiv til eksplisitt tilnærming.* For eksempel uttrykke partall som produktet av $2n$ i stedet for summen av $2 + 2 + 2$...
3) *Gi erfaringer med å fullføre en følge, og i å finne mønstre i følgen.* Dette innebærer å bryte opp mønstre i flere komponenter. Hvis vi ser på Figur 1 ovenfor vil man kunne trekke ut den ene konstante sirkelen og si at antall prikker vil være figurnummeret multiplisert med 2 minus den ene prikken i en hvilken som helst figur.
4) *Gi tilstrekkelig erfaring med enkel manipulering av algebraiske uttrykk.* Elevene må kunne inneha noen basiskunnskaper i å manipulere enkle algebraiske uttrykk.
5) *Relatere algebraiske uttrykk til konkrete kontekster.* Siden figurfølger opererer med konkrete verdier er nyttig å kunne knytte disse verdiene til en kontekst.
6) *Balansere bruken av visuelle mønstre og tabeller som inneholder numeriske data.* Tabeller kan lages slik at elever må tenke over verdier for både figurnummer og figurtall. Dette kan oppfordre elever til å anvende en eksplisitt tilnærming.

(S. 169)

2.2.3. Figurativ og numerisk generalisering

Joanne Rossi Becker og Ferdinand Rivera (2005) skiller mellom *figurativ* og *numerisk* generalisering i elevers arbeid med figurmønsteroppgaver. I det legger de at noen elever forholder seg hovedsakelig til figuren for å generalisere (*figurativt*) mens andre går vekk fra dette og bruker tallene som er knyttet til figuren. De som generaliserer *numerativt* bruker allerede kjente verdier for en figurrekke for å si noe generelt. Begrepet *figurativt* peker på at bildene/ figurene som vises er mer enn tegninger, de inneholder også relasjoner og egenskaper for det man ønsker å vise. Den *figurative* generaliseringen bruker figurens oppbygning og forklarer et generelt uttrykk gjennom det. I Becker & Riveras (2005) undersøkelse var det lærerstudentene som benyttet *figurativ* generalisering som lyktes best med å begrunne sine formler. Studentene som hovedsakelig brukte *numerativ* generalisering i samme undersøkelse utviklet generaliseringer fra de kjente, og egne utregnede verdiene, uten å tenke særlig over de *figurative* relasjonene. Av 42 lærerstudenter var det 26 som hovedsakelig generaliserte *numerativt*, noe som kan sees i sammenheng med tidligere erfaringer med algebra som enkle prosedurale øvelser som bruker variabler og andre numeriske operasjoner. I sin studie legger de vekt på at algebraundervisning i skolen i større grad bør bygge på hva elever kan, siden barn og unge har en sterk intuisjon for visuelle ideer og konsepter. På denne måten vil ikke disse egenskapene gjemmes bort under ny prosedural kunnskap om algebraiske prosesser, og elever kan få en bedre forståelse for generalisering.

2.2.4. Generaliseringsstrategier:

Min teoretiske hovedramme vil være John Lannins (2005) fem generaliseringsstrategier og fem argumenteringsnivåer fra hans studie av 25 sjetteklasseelever som arbeidet med figurmønsteroppgaver. Lannin deler inn sitt rammeverk i to deler; de fem generaliseringsstrategiene i for seg, og de fem ulike nivåene av argumentering. Jeg vil først presentere strategiene for generalisering. De fem strategiene er inspirert av, og utviklet fra tidligere forskning (English & Warren, 1998; Hoyles & Healy, 1999; Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000). Lannin deler dem inn i to kategorier; ikke- eksplisitte og eksplisitte strategier. De eksplisitte strategiene kan gjøre at brukeren finner verdien for hvilken som helst figur i følgen, mens de ikke- eksplisitte ser på en bestemt figur for å bestemme verdien på den neste.

Ikke-eksplisitte strategier:	

Telling	Å tegne et bilde av eller lage en modell for å representere situasjonen for å telle den ønskede egenskapen.
Rekursiv	Bygger på det forrige leddet eller leddene i følgen for å bestemme neste ledd.
Eksplisitte strategier:	
Hel- objekt	Bruker et ledd som en enhet for å finne en annet ledd med å multiplisere den. I strategien kan det gjøres en justering for feiltelling. Bruker vi eksempelet i Figur 1 vil $F_5 = 9$ og enkelte vil da mene at med å doble 9 får man svaret på F_{10}. Siden man da også multipliserer konstantleddet fra den eksplisitte formelen (og med det trekker fra konstanten to ganger) må det legges til en for å justere for metoden.
Gjett- og sjekk	Det gjøres en gjetning på en formel uten å vite hvorfor den skal fungere. Dette skjer vanligvis gjennom å eksperimentere med diverse operasjoner og tall knyttet til konteksten gitt i situasjonen.
Kontekstuell	Man utvikler en eksplisitt formel basert på informasjon som er gitt i situasjonen, kan relateres til en tellestrategi.

Tabell 2- Generaliseringsstrategier (Lannin, 2005, s. 234)

Av de eksplisitte strategiene er det bare den kontekstuelle strategien som alltid viser til konteksten i oppgaven (Lannin, 2005). Gjett- og sjekkstrategien blir ofte validert empirisk, mens hel- objektsstrategien kan knyttes til oppgavekontekst, men brukes ofte feil. Stacey (1989), som også bruker hel- objektsstrategien, sier at feil bruk viser at elever ikke har forståelse av proporsjonal resonnering. Dette kan være å glemme justering for feiltelling, som man ser i Tabell 2.

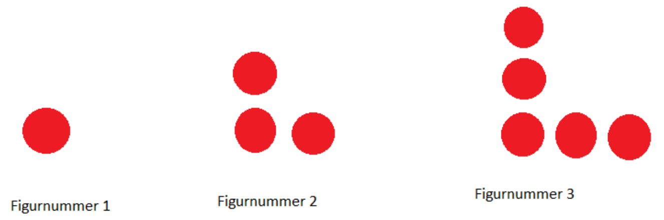
2.3. Begrunning

2.3.1. Valideringsproblemet:

Generalisering kan ikke separeres fra begrunnelse. Radford (1996) definerer det slik: «Generalization as a didactiv device cannot avoid the problem of validity, and validity is in itself a very complex idea» (s.109). Han sier at et av de viktigste trekkene ved generalisering er dens logiske natur, som gjør det mulig å nå en konklusjon. For elever kan denne logikken være veldig forskjellig, ettersom hvordan de tenker matematisk. Dette kan komme til uttrykk i form av hvilken begrunnelse elevene bruker. Ifølge Radford (1996) nøyer mange elever seg med å vise til noen få empiriske eksempler for å bevise sin konklusjon, mens andre synes det er nok å gjette resultatet for de første verdiene i en følge. Andre elever mener at validiteten oppnås når man tester sin konklusjon for et spesifikt nummer i følgen, f. eks. figur nr. 100. Flere studier viser at det er vanskelig for elever å begrunne godt for sine generelle uttrykk (Lannin, 2005; Stacey, 1989), i stedet bruker mange elever empirisk argumentasjon for å støtte sine konklusjoner. Lannin (2005) mener dette kan være på grunn av et tidlig fokus på å finne en spesifikk løsning på en situasjon, i stedet for å si noe generelt om situasjonen. Det at oppgaver i skolen har vært for svarfokusert gjør at elever finner det vanskeligere å skulle gjøre rede for sine konklusjoner i generaliseringsarbeid (Kieran, 2004).

2.3.2. Nivåer for begrunnelse

De fem nivåer for begrunnelse som jeg vil bruke i min analyse er likt det Lannin (2005) benyttet i sine undersøkelser, og stammer fra Simon og Blume (1996) som utviklet dette rammeverket inspirert av idéer fra blant annet Balacheff (1988). Balacheff (1988) opererer stort sett med andre kategorier enn mitt rammeverk, men han har med det *generiske eksempelet*. I tillegg har han en form for *empiriske bevis,* som han kaller *naiv empirisme.* Lannins (2005) nivåer står for en progresjon i evnen til å begrunne, fra ingen begrunnelse (nivå 0) til å gi et matematisk bevis uten å bruke noen eksempler fra konteksten (nivå 4). I nivå 1(henvisning til ekstern autoritet) gis en begrunnelse ved å vise til en kilde som ses på som valid, som kan være matematikklæreren og/eller en lærebok (Simon & Blume, 1996). Et eksempel på dette kan være at eleven viser til arealformelen for et kvadrat i en lærebok, når eleven finner figurtallet for en figur. På neste nivå (*empirisk bevis*) begrunner eleven sin strategi ved å validere sin strategi, eller sitt svar i flere eksempler. I møte med kvadrattall kan dette være å vise at uttrykket $F(n) = n^2$ stemmer for $F(2), F(3)$ og $F(4)$ og et større tall som f.eks. $F(15)$. Noen vil kanskje vise at uttrykket stemmer for en figur lengre ut i følgen, og derfor tenke at formelen er korrekt. På dette nivået sier man ikke noe om hva uttrykket egentlig representerer i figur- eller tallfølgen (Simon & Blume, 1996). Nivå 3 (*generisk eksempel*) handler om å en deduktiv begrunnelse i et spesifikt eksempel. Deduktiv argumentasjon betyr at man bygger en begrunnelse på flere konklusjoner som etterfølger hverandre. I et *generisk eksempel* begrunnes strategien gjennom relasjoner mellom figurnummer, figurtall og egenskaper i en figurfølge. Man bruker et eksempel for å vise til hva som er generelt ved å argumentere for hvorfor det fungerer i alle eksempler (Balacheff, 1988). Går vi tilbake til Figur 1 (også vist nedenfor) vil et *generisk eksempel* si at for $F(3)$ stemmer formelen $F_n = 2n - 1$ fordi vi har to sider med n prikker, og vi subtraherer med 1 fordi en prikk er felles for begge sider. For å kunne kalle dette et *generisk eksempel* må man i tillegg vise til at mønstret er felles for alle figurer i følgen.



Øverste nivå av begrunnelse er her kalt deduktiv begrunning. I en slik begrunnelse frigjør man seg fra eksempler i oppgaven, og fremlegger et deduktivt bevis. I oppgaver med figurfølger er det vanskelig å tenke seg en slik begrunnelse siden det er konkrete kontekster man arbeider med, som gir lite rom for å gå helt utenfor den. Tabell 3 viser en oversikt over de fem nivåene for begrunnelse:

Nivå 0: Ingen begrunnelse	Eleven gir ingen begrunnelse for sin strategi.
Nivå 1: Henvisning til en ekstern autoritet	Begrunner sin metode, eller sitt svar med å vise til en annen, valid kilde.
Nivå 2: Empirisk bevis	Man begrunner med å bruke sin strategi i flere konkrete eksempler.

Nivå 3: Generisk eksempel	En deduktiv begrunnelse vises gjennom et bestemt eksempel.
Nivå 4: Deduktiv begrunning	Validitet blir gitt gjennom et bevis som ser bort fra det spesifikke eksempelet.

Tabell 3- Nivåer av begrunnelse (Lannin, 2005)

3.0. Metode

I dette kapittelet skal jeg begrunne metodiske valg jeg har tatt i arbeid med dette forskningsprosjektet. Først vil forklare mitt forskningsdesign i sammenheng med formål og forskningsspørsmål for oppgaven. Deretter presenteres metoden som er benyttet for datainnsamling, og gjennomføring av den. Videre vil jeg forklare hvordan jeg har gått frem i analysearbeidet med datamaterialet, for til slutt å diskutere svakheter og etiske utfordringer ved metoden.

3.1. Mitt forskningsdesign

Denne oppgaven har som formål å belyse hvordan elever generaliserer og begrunner i arbeid med figurtallsoppgaver. Formålet med prosjektet styrer gjerne designet på forskningen (Cohen, Manion & Morrison, 2011). For å besvare mitt forskningsspørsmål har det vært naturlig for meg å benytte observasjon, og gjøre en studie av få elever. Det ville vært vanskelig, og veldig tidkrevende og gjøre en kvantitativ studie, og gått i dybden på mange elevers strategier for generalisering og argumentasjon. For å belyse denne tematikken lagde jeg oppgaver som fordrer til generalisering, for så å observere elevene i arbeidet med disse. Gjennom observasjon får forskeren tilgang til førstehåndsinformasjon, og slipper å belage seg på sekundære kilder (Cohen et al., 2011). Siden elevene skulle gjøre oppgavene på datamaskin benyttet jeg skjermopptak som observasjonsform, i tillegg til at jeg var tilstede og observerte. Skjermopptak som metode er forholdsvis lite brukt i matematikkdidaktisk forskning, og jeg ser det derfor som nyttig å drøfte denne metoden inngående senere i oppgaven.

3.2. Kvalitativ metode

Kvalitativ forskning har som mål å studere meninger, handlinger, holdninger, intensjoner og oppførsel i detalj (Cohen et al., 2011). Forskningen setter deltakerne i fokus, og studerer et eller flere fenomen i dybden. Mitt forskningsprosjekt vil se på hvordan elever i pargrupper generaliserer og hvilken begrunnelse de benytter for å støtte opp under sine strategier. I en slik kvalitativ forskning er jeg, som forsker en viktig brikke for utfallet av resultatet. Som Postholm (2010) sier må forskeren innse at hans eller hennes subjektive oppfatninger påvirker forskningen. De elevstrategiene som blir presentert i denne oppgaven vil derfor være farget av mine tolkninger og på den måten være subjektive.

3.2.1. Casestudie

Formålet for oppgaven er å se elevers evne til å generalisere figurtallproblem på pc, hvilke utfordringer dette gir, og hvordan elevene argumenterer for påstandene sine. For å finne svar på dette vil jeg bruke videoobservasjon og analysere videoopptak av elevene i pargrupper. Siden de arbeidet i grupper velger jeg ikke enkeltelever som case, fordi argumenteringen skjer i felleskap innad i gruppen. Studien utforsker elevenes arbeid med gitte oppgaver i en dobbelttime i deres eget klasserom. På grunnlag av disse aspektene kan utforskningen betraktes som et « bundet system» (Postholm, 2010). Hun beskriver et «bundet system» som et system som tids- og stedbundet, og en casestudie vil være en passende tilnærming for å utforske prosjektet. I dette prosjektet ser jeg på hver gruppe som en case, og som et verktøy for å kunne si noe om hvordan elever kan generalisere og begrunne i arbeidet med figurtall. En casestudie kan gi en forståelse av et eksempel på mennesker i en ekte situasjon, ved å presentere teorier eller prinsipper (Cohen et al., 2011). Mine caser er tre grupper med to elever som arbeidet med tre figurtalloppgaver på pc i GeoGebra, som jeg bruker for å gi et innblikk i hvilke strategier som benyttes for generalisering og argumentasjon. Min studie, i likhet med andre casestudier, sier ikke noe generelt om tematikken som det forskes på, men resultater fra deltakerne i denne studien kan allikevel være et bidrag til forskningen på feltet.

3.3. Gjennomføring

3.3.1. Samarbeid med skolen og valg av deltakere

I forskningen min for å se på generalisering i algebra ønsket jeg å observere elever som jobbet med figurfølgeoppgaver. Det eneste kriteriet jeg hadde for hvilken skole datainnsamlingen skulle gjennomføres på, var at det skulle skje på en ungdomsskole. I tillegg spurte jeg om skolen brukte GeoGebra i matematikkundervisning, siden det var dette programmet som skulle brukes til min datainnsamling. Jeg fikk ja hos den første skolen jeg kontaktet. Dette er ungdomsskole som er liten i størrelse med ca 100 elever. Den første kontakten var med rektor på skolen, og senere samarbeidet jeg med en lærer på 10. trinn. Han var både kontaktlærer og hadde matematikken i klassen hvor jeg gjennomførte undersøkelsene. Jeg fikk vite at arbeid med tallfølger og spesielt figurtall var noe elevene hadde lite erfaring med, men at de fleste følte seg trygge med å bruke bokstaver for å uttrykke formler. Jeg hadde kontakt med læreren via e-post og vi avtalte at undersøkelsen skulle ta plass første uke i desember 2016, men på grunn av travle tider på skolen ble det flyttet til første uke av januar 2017. Selve gjennomføringen tok 90 minutter og ble gjort i en dobbeltime.

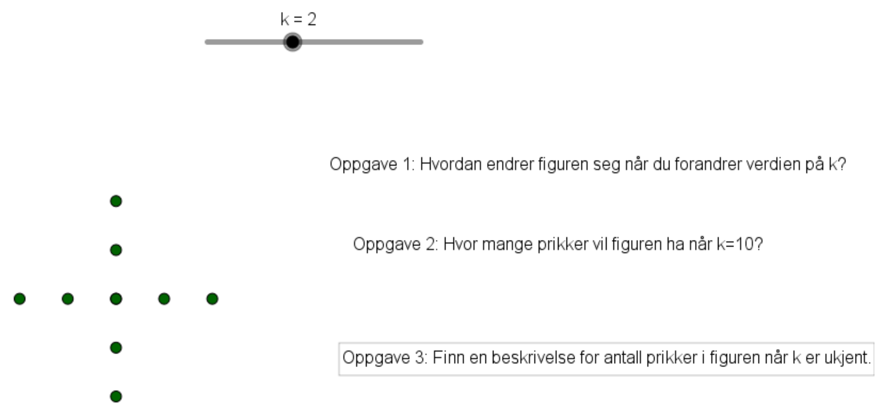
I klassen som deltok i dette prosjektet var det 14 elever. Det ble sendt ut samtykkeskjemaer til foreldre og alle godtok at eleven deres kunne være med på forskningen. Elevene ble satt i par hovedsakelig etter hvem de pleide å arbeide sammen med, slik at det var kjent for dem. Dette for at situasjonen skulle føles mest mulig naturlig for deltakerne. Læreren foreslo en endring siden han visste at nivået i matematikk på et av parene var veldig forskjellig, derfor byttet vi om på to elever. I tillegg bestemte jeg at tre av gruppene skulle observeres med video av dataskjermen, og danne grunnlaget for min datainnsamling. Under gjennomføringen viste det seg at fire elever var borte, så det var fem pargrupper som deltok. Fra de tre parene som skulle filmes var alle til stede, så de hadde en partner de var godt kjent med, og vant til å jobbe sammen med.

3.3.2. Valg av oppgaver

Oppgavene som ble gitt til elevene er figurtallsoppgaver som jeg vurderte ville oppfordre til generalisering. I arbeidet med å velge ut/ lage oppgaver som er hensiktsmessige for denne forskningen er det flere aspekter jeg har tatt hensyn til. 1) Det skal være oppgaver som gir elevene mulighet for å generalisere og begrunne på ulike måter, som innebærer også *figurativ* og *numerativ* generalisering. Det vil si at oppgaveteksten ikke skal oppfordre til en bestemt fremgangsmåte, for eksempel en *rekursiv* strategi. Derfor er det viktig hvordan spørsmålet i oppgaveteksten blir stilt. 2) Oppgavene skal gi en mulighet for å bruke flere av verktøyene som er tilgjengelige i GeoGebra til oppgaveløsning og til å svare på spørsmålet. Jeg gir elevene muligheten til å skrive i en tekstboks, bruke tegneverktøyet og flytte på gliderne som representerer en variabel. De ulike verktøyene blir nærmere forklart senere. 3) Figurfølgene skal være automatisert i GeoGebra. Ved å bruke glidere for å representere en variabel i figurene er det lett for elevene å endre figurnummeret i følgen. Jeg setter grenseverdier på disse parameterne, slik at elevene ikke kan lese av svaret på spørsmålene som gis i hver oppgave.

Oppgave 1- Stjerneoppgave

Oppgave 1 er variant av en type figurfølge som er mye brukt i tidligere forskning (Mason, 1996; Rivera & Becker, 2005).Følgende oppgave ble gitt til elevene:

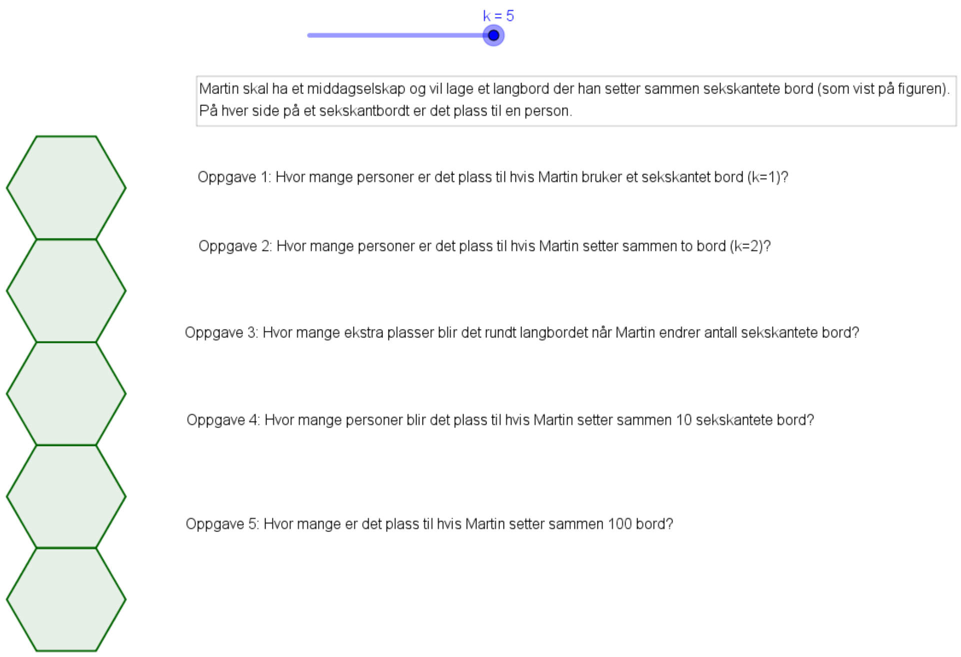


Figur 2- Stjerneoppgave

I denne oppgaven har elevene mulighet til å se de første fem figurene i figurfølgen ved å flytte på glideren som vises øverst på figuren. Neste figur i rekken vil ha en ekstra prikk på hver «arm» i sin retning. Dette gir en rekursiv formel $F_k = F_{k-1} + 4$, og en eksplisitt formel $F_k = 4k + 1$. Som vist på figuren er det tre deloppgaver knyttet til denne situasjonen, i ettertid ser jeg at disse med fordel kunne blitt navngitt med bokstaver for å lettere kunne referere til hver deloppgave. Figurfølgen er på ingen måte kontekstualisert i oppgaveteksten, og navnet «stjerneoppgave» er bare valgt for å gjøre senere henvisninger til den lettere. Jeg antok at denne oppgaven ville være den enkleste for elevene, og at de fleste ville få til å si noe riktig om alle deloppgavene. Jeg forventet ikke at alle ville finne en eksplisitt formel for å uttrykke figuren i deloppgave 3, noe som jeg vurderer at også gjør oppgaven interessant å bruke for å få frem forskjellige strategier. Oppgaveteksten i deloppgave 1 (*Hvordan endrer figuren seg når du forandrer verdien på k?)* ble endret fra å spørre om hva som skjedde når man økte verdien på *k* med en. Dette var for å gjøre det mer generelt, og ikke føre elevene inn på en rekursiv strategi for å løse den, og de videre deloppgavene. Jeg vurderte at denne oppgaven ga mange muligheter for elevene i sine strategivalg, og muligheten til å generalisere både *figurativt* og *numerativt*.

Oppgave 2- Bordoppgaven

Den andre oppgaven jeg brukte er en godt kjent figurfølgeoppgave som jeg valgte å kontekstualisere til å omhandle et middagsselskap. Med å bruke en slik kontekst kan det gjøre det lettere for elevene å knytte oppgaven til noe kjent, som igjen kan hjelpe dem til å forstå figuren.

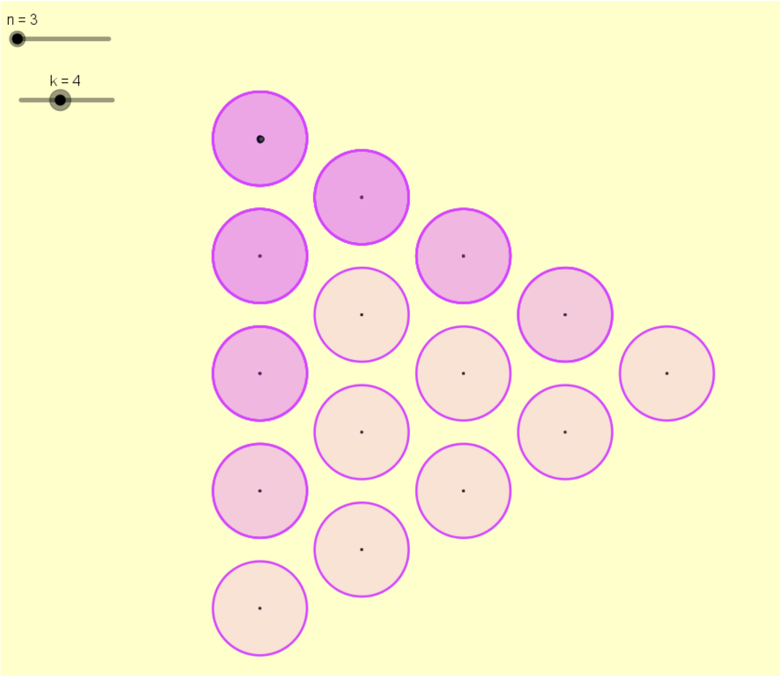


Figur 3- Bordoppgave

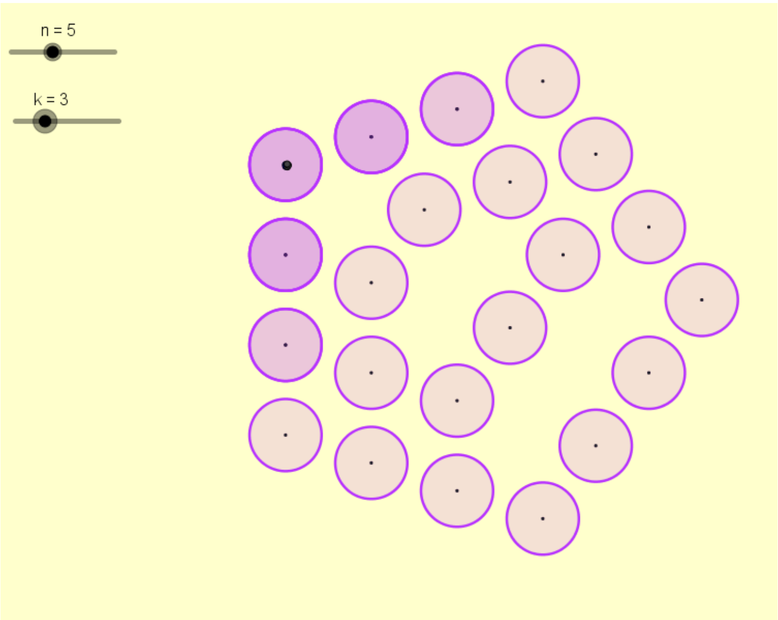
I denne figurfølgen legges det til en regulær sekskant for hver økning i k. Som man kan se ut av Figur 3 vil det være uaktuelt å snakke om figuren k=0, siden man ikke kan snakke om økningen fra k=0 til k=1 på samme måte som for resten av figurfølgen der $F_k = F_{k-1} + 4$. Den eksplisitte formelen $F(k) = 4k + 2$ vil heller ikke gjelde for k=0, fordi den vil gi to plasser rundt null bord. Allikevel er oppgaven interessant på grunn av sine muligheter for generalisering og argumentering. Også i denne oppgaven får elevene se de fem første stegene i figurfølgen, og kan bruke dette for å arbeide med deloppgavene. De to første delspørsmålene er mulige å finne svaret på med direkte avlesning av figuren, men er med fordi det kan hjelpe elevene til å se figurfølgens oppbygning. Deloppgave 3 er forsøkt å holde åpen for å kunne svare med forskjellige strategier, men siden den spør om en økning kan det forventes at elevene bruker en ikke- eksplisitt strategi. De to siste deloppgavene (og spesielt den siste) er for å «tvinge» elevene over en eksplisitt tenkemåte, siden det blir veldig omfattende om man skal løse disse oppgavene med en rekursiv strategi.

Oppgave 3- Kvadratoppgave

Den siste oppgaven ble funnet på GeoGebras egne hjemmesider, og består av to variabler; *n* som styrer formen på figuren i form av hva slags mangekant som vises, og *k* som styrer hvor stor en side i polygonen er.



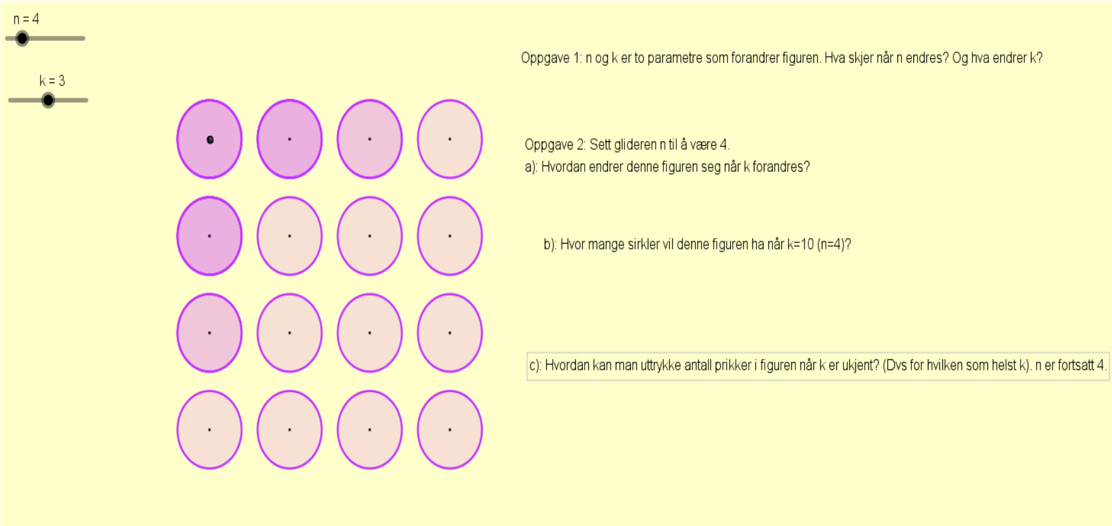
Figur 4- n=3, k=4 -(GeoGebra, 2012)



Figur 5- n=5, k=3 -(GeoGebra, 2012)

Som man kan tyde av Figur 4 og Figur 5 representerer variabelen *n* antall kanter i figuren og *k* utvider den gitte mangekanten med en sirkel på hver side.

Jeg har laget egne deloppgaver til figuren, som hovedsakelig ser på *n=4,* altså en kvadratisk figur:

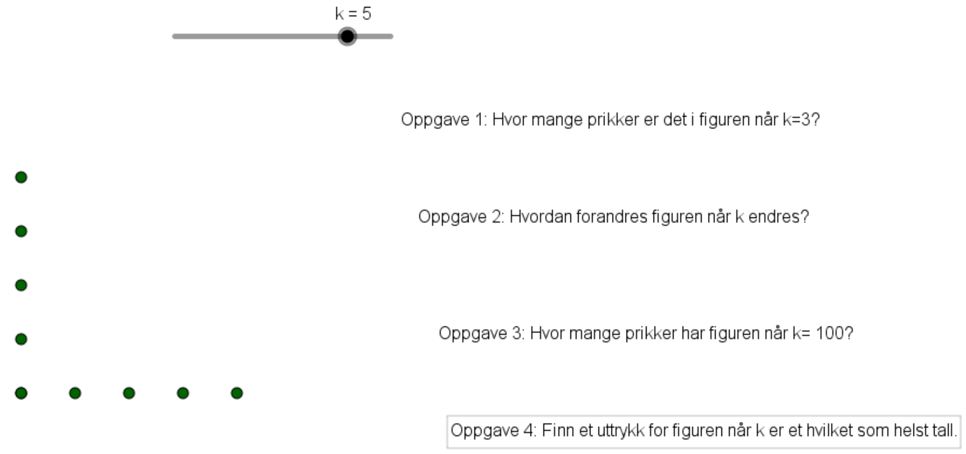


Figur 6-Kvadratoppgave

Første deloppgave ber elevene si noe om de to ulike variablene som kan endres på, mens de resterende oppgavene konsentrerer seg om figuren når *n* er satt til 4. Jeg vurderte denne oppgaven til å være den vanskeligste for elevene å si noe generelt om. Det som kan hjelpe elevene i denne oppgaven er at de kjenner godt kvadratet som figur, og ved å bruke arealformelen for den, kan de nærme seg et eksplisitt uttrykk. Fra Figur 6 ser man at kvadratet har 4 sirkler på hver side når *k=3.* Dette kan by på en utfordring i å si noe generelt om figurens oppbygning, siden det gir den eksplisitte formelen $F(k) = (k+1)^2$ som kan være vanskeligere å finne enn $F(k) = k^2$. Den rekursive formelen for figurfølgen vil være $F(k) = F(k-1) + 2k + 1$. Som sagt forventet jeg at denne oppgaven ville være vanskelig for elevene, og var usikker på om de klarte å benytte noen generaliseringsstrategier for å finne svar på de ulike deloppgavene.

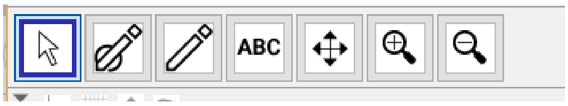
3.3.3. Arbeidsøkten

Siden elevene hadde liten erfaring med generaliseringsarbeid og figurtallsoppgaver, valgte jeg å modellere et eksempel før de selv fikk arbeide med oppgaver.



Figur 7- Eksempeloppgave

Dette var først og fremst for å vise de ulike mulighetene de hadde i GeoGebra med tanke på verktøy og hjelpemidler. Jeg viste elevene disse mulighetene gjennom et eksempel likt noe av det som ventet dem. Gjennom dette eksempelet fikk jeg eksemplifisert hvordan var mulig for elevene å bruke figuren til å resonnere, hva det vil si å generalisere, og hvilke verktøy som var tilgjengelige for dem å bruke.



Figur 8- Tilgjengelige verktøy i GeoGebra

Figur 8 viser verktøyene elevene kunne bruke, som jeg hadde begrenset i forkant. Fra venstre ser vi: 1) Flytt objekter, 2) Frihåndsfigur, som gjør det mulig å tegne fritt, 3) Penn, som tolker det man skriver på skjermen til bokstaver, 4) Tekstboks, hvor man kan skrive inn tekst, 5) Flytt grafikkfelt og 6) & 7) Forstørr og forminsk grafikkfeltet. Målet med å vise dette til elevene var at de da kunne vise frem sine resonneringer på ulike måter når de selv skulle arbeide med oppgaver.

3.4. Datamaterialet

Læreren og jeg var tilgjengelige for å hjelpe elevene, men hadde avklart i forkant av økten at vi skulle ha fokus på ikke å gi for mye hjelp. De tre gruppene det ble gjort opptak av brukte mellom 35 og 50 minutter på å løse oppgavene. Disse opptakene av skjerm og lyd danner grunnlaget for datamaterialet sammen med mine egne feltnotater. Opptaket ble startet i det elevene skulle starte med oppgavene og varte til de var ferdige. Min vurdering av situasjonen for elevene var at de syntes den var naturlig, og at de nærmest glemte at de ble tatt opp. Derfor vil jeg si at det å benytte programvare for skjermopptak i stedet for et filmkamera var nyttig i dette prosjektet, noe jeg vil drøfte mer senere.

3.4.1. Observasjon

For å kunne belyse hvilke generaliseringsstrategier og hvilken argumentasjon elevene benytter, bestemte jeg meg tidlig for at jeg ville observere dem i arbeidet med oppgavene. Ved å bruke observasjon får forskeren direkte tilgang til forskningsdeltakerne og førstehåndsinformasjon som kan gi et mer autentisk datamateriale (Cohen et al., 2011). Morrison (1993) viser til fire hovedpunkter en observatør har mulighet til å samle inn data om:

- Den fysiske situasjonen
    - Det fysiske miljøet forskningen tar plass i og organiseringen av det.
- Den menneskelige situasjonen
    - Organisering av deltakerne i prosjektet; gruppesammensetning og individuelle trekk hos deltakerne som f.eks. kjønn, alder osv.
- Den kommuniserende situasjonen
    - Hvordan det kommuniseres; om det er formelt eller uformelt, hvilken kommunikasjon som er planlagt og ikke.
- Undervisningsopplegg
    - Hvilke ressurser som er tilgjengelige og brukes. Men også pedagogisk stil, pensum og lærerens tilnærming til det.

Fritt oversatt fra Morrison (1993, s. 80)

Min observasjon fokuserte hovedsakelig på det matematiske i interaksjonen mellom elevene, og konkret hvilke strategier som ble brukt for generalisering og begrunnelse. I tillegg ville jeg observere og vurdere hvilken rolle bruk av GeoGebra og datamaskinen spiller i elevenes arbeid. Som forsker vet jeg hvilken tematikk jeg skal se etter, men observasjonen er ikke detaljplanlagt i form av klare kategorier og er etter Cohen et al. (2011) en semi-strukturert observasjon (s. 457). Under observasjonen interagerte jeg med deltakerne i form av å stille spørsmål, og veiledet på eventuelle spørsmål de hadde. Raymond L. Gold beskriver en slik forskerrolle som *observatør- som deltaker* (1958, s. 221). Denne rollen innebærer en mer formell observasjon, enn en ren deltakelse i studien for observatøren (Gold, 1958).

3.4.2. Skjermopptak som observasjonsmetode

Fordi elevene skulle jobbe med oppgaver på datamaskin så jeg det som riktig å bruke programvare for skjermopptak for å kunne observere hvordan de gikk frem i oppgaveløsningen. En slik programvare gir muligheten for å ta opp alt som skjer på skjermen i tillegg til å ta opp lyd med mikrofonen på datamaskinen. På den måten kunne jeg få gode data fra det elevene gjorde, og interaksjonen imellom dem. Skjermopptak med lyd gir god oversikt over deltakernes tanker, men er tidligere lite brukt i didaktisk forskning (Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009). Barmby et al. (2009) sin studie ser på elevers forståelse og resonnering innenfor multiplikasjon. De sier at en fordel med metoden er at skjermopptak gir gode opptak uten at man må tenke over innstillinger i forhold til lys, fokus m.m. En annen studie peker på at man får sett konkret hva deltakere gjør på skjermen, i stedet for å filme dette fra lengre avstand (Tang, Liu, Muller, Lin & Drews, 2006). Tang et al. (2006) har studert bruken av datamaskinen for å koordinere arbeid innad i team, og er ikke didaktisk forskning, men diskuterer bruken av skjermopptak i sin studie.

I min studie ble programvaren *Camstudio* brukt som skjermopptaker. Dette er en gratis programvare, som dermed er lett tilgjengelig for alle. Den er også veldig oversiktlig og enkel i bruk. Opptakene som ble samlet inn var tydelige og oversiktlige å analysere ut fra. For å analysere og transkribere videoene ble dataanalyseringsprogrammet *Nvivo* brukt. Disse to programvarene fungerte godt i fellesskap, og var alt jeg trengte for å samle, bearbeide og analysere mine data. En klar fordel med metoden er man slipper de etiske problemene med å filme deltakernes ansikter, noe som kan være begrensede for datamaterialet, og antall deltakere i studien (Barmby et al., 2009). Men man må vite at man som forsker får tilgang til alt deltakerne gjør på skjermen, noe som kan involvere personlige samtaler med andre via e-post eller sosiale medier (Tang et al., 2006). Da kan man få informasjon om en tredjepart, som ikke har samtykket til å være med på forskningen. I slike tilfeller er det nyttig at deltakeren har mulighet til å pause opptaket (Tang et al., 2006). En slik problemstilling er nok ikke veldig relevant i min studie, men kan forekomme.

En positiv ting med metoden er at det ikke er et fysisk kamera til stede. Dette fører med seg at observasjonen gir bedre muligheter for å få en mer naturlig situasjon enn andre observasjonsmetoder (Barmby et al., 2009). I tillegg kan deltakerne flytte seg rundt for å arbeide på ulike steder fordi alt av opptak skjer på datamaskinen. Dette fordrer naturligvis at datamaskinen er med. Det åpner opp for å variere arbeidsformer i et klasserom, og fortsatt kunne dokumentere det elevene gjør til enhver tid. Opptakene er tilgjengelige videre i forskningsarbeidet og forskeren kan analysere disse, i stedet for bare egne observasjonsnotater som ofte er selektive (Tang et al., 2006). Dette gir grunnlag for å holde datamaterialet mest mulig objektivt. For mitt formål virket dette som en nyttig datainnsamlingsmetode å bruke.

3.5. Analyse av datamaterialet

Etter observasjonsøkten hadde funnet sted begynte jeg arbeidet med å behandle datamaterialet. Jeg startet med å se gjennom videoene fra hver gruppe to ganger, hvor jeg noterte ned interessante matematiske sekvenser for å få et overblikk. Videre transkriberte jeg som sagt lydopptaket ved å bruke programvaren Nvivo, som er et videoanalyseprogram som gjorde det lett å få gode, strukturerte transkripsjoner. I denne prosessen ble deltakerne anonymisert, og navnene som brukes i denne oppgaven er fiktive for at deltakere ikke skal kunne gjenkjennes. Vivi Nilssen skriver at tekster som produseres av forskeren, slik som transkripsjoner vil aldri bli helt nøyaktige (2012). Datamaterialet tolkes av forskeren, og det bestemmes hva som er viktig, i tillegg mister man tonefall, mimikk, gester osv.

I mine transkripsjoner viser jeg til pauser, tenking osv. med å bruke vanlig parenteser ( ). Alt som skjer på dataskjermen vises til med klammeparenteser [ ], for å skille det fra andre hendelser utenfor skjermen.

Etter transkribering så jeg spesifikt etter generaliseringsstrategier og argumentasjon som hadde blitt brukt av deltakerne. Det var i denne prosessen jeg bestemte meg endelig for å analysere med å bruke Lannins strategier for generalisering og argumentasjon, siden han benyttet det samme rammeverket i lignende forskning (2005). Med disse gitte kategoriene ble mitt analysearbeid veldig konkret, men ikke nødvendigvis enkelt. Jeg så først etter hvilke generaliseringsstrategier som elevene hadde benyttet, for så å undersøke hvordan de begrunnet disse. Datamaterialet ble altså analysert etter følgende kategorier:

Generaliseringsstrategi:
Telling
Rekursiv
Hel-objekt
Gjett- og sjekk
Kontekstuell

Figur 9- Generaliseringsstrategier for analyse

Argumentasjonsnivå:
Nivå 0: Ingen argumentasjon
Nivå 1: Henvisning til en ekstern autoritet
Nivå 2: Empirisk bevis
Nivå 3: Generisk eksempel
Nivå 4: Deduktiv argumentering

Figur 10- Nivå av begrunnelse for analyse

Nivå 4- *deduktiv argumentering* er som sagt tidligere vanskelig å tenke seg i arbeid med figurfølger, men er med som et nivå for å vise progresjonen i nivåene. Jeg har også studert annen forskning innenfor samme tematikk, og vurdert mine funn opp mot hva andre har funnet. Jeg har blant annet sett det som nyttig å vurdere mine deltakeres bruk av *figurativ* og *numerisk* generalisering opp mot det Rivera & Becker (2005) beskriver i sin studie. Noe som også hjalp meg i å sette mine funn i kategorier. Dette gjorde det lettere å si hva slags generalisering og begrunnelse som finner sted.

3.6. Validitet og reliabilitet

Min studie har som alle andre nye studier et ansvar ovenfor sitt fagfelt å ivareta enkelte krav om validitet og reliabilitet. Cohen et al. (2011) sier at hvis en forskning ikke er valid er den verdiløs. Og validitet i forskningen kan uttrykkes gjennom blant annet ærlighet, dybde og omfanget av data oppnådd, hvilke deltakere som er med, triangulering og objektiviteten til forskeren. Tidligere har jeg beskrevet min rolle i observasjonene, og det er viktig å reflektere over hva det vil ha å si for studien. Forskeren påvirker både datamaterialet, og ikke minst analysen av det gjennom sin bakgrunn, verdier, holdninger, behov og miljø (Nilssen, 2012). I tillegg vil valg av teoretisk rammeverk være med å bestemme resultatet av studien. Jeg har forsøkt å reflektere over min subjektivitet gjennom hele prosessen med denne oppgaven. Jeg har også prøvd å etterstrebe en realisme under observasjon, transkripsjon og analyse, for at disse skal være gjengitt på og vurdert på mest mulig objektiv måte.

Siden jeg har observert seks tiendeklassingers strategier for generalisering og argumentasjon er det hovedsakelig denne gruppen min studie kan si noe om. Det er ikke mulig for meg å trekke konklusjoner om andre 10. klassinger, eller andre elever generelt. Min studie kan derimot være et bidrag til annen forskning på feltet, og er derfor ikke uten nytteverdi. Robert E. Stake (1995) beskriver viktigheten av relabilitet i kvalitativ forskning som stor. En forsker bidrar med sine studier av en case og leseren tar ut sin tolkning, noe som er meningsfullt for studien (Stake, 1995). På den måten vil både studien og tolkingen til leseren være preget av subjektivitet.

Det er verdt å nevne at selv om elevene virket naturlige under observasjonssekvensen, var det en uvant situasjon for dem. Både det at de ble observert og at måten de arbeidet på var ukjent. Dette kan gi utslag for hvilke data man får under observasjonen.

3.7. Etiske betraktninger

Etiske problemstillinger er noe som dukker opp flere ganger i løpet av en kvalitativ studie. For meg startet slike refleksjoner i det jeg søkte om godkjennelse for prosjektet til Norsk senter for forskningsdata (NSD). Etter prosjektet var blitt godtatt startet kommunikasjonen med skolen, hvor elevene fikk utdelt et samtykkeskjema (Vedlegg 1) med beskrivelse av formål og omfang av prosjektet, hva deres deltakelse innebar, observasjonsmetode, behandling av data og mulighet til å kontakte meg med spørsmål. Deltakerne ble også informert om at de kan trekke seg fra prosjektet på hvilket som helst tidspunkt. Alle elever som fikk utdelt skjemaet samtykket, via sine foresatte.

Datamaterialet innebærer videoopptak av dataskjerm, lydopptak og feltnotater av observasjon. I dette materialet er elevenes navn endret for å sikre at deltakerne ikke kan gjenkjennes. Alle opptak vil slettes etter prosjektets slutt, i henhold til NSDs retningslinjer.

I gjennomføring av observasjonen var det viktig for meg at elevene følte det de gjorde var nyttig. Arbeidsoppgavene de jobbet med var noe som kom i tillegg til deres matematikkpensum, og kunne derfor bli sett på bortkastet tid. Derfor var det gledelig at samtlige elever ønsket å være med på studien, og gjennomførte oppgavene med en god innsats.

4.0. Analyse

I dette kapittelet vil jeg analysere elevens arbeid med oppgave 1, 2 og 3 hver for seg. Siden jeg ser på både generaliseringsstrategier og nivåer for begrunnelse og disse må sees i sammenheng, vil jeg presentere disse sammen. Analysen bruker først og fremst det transkriberte lydopptaket som datamateriale, men vil også inneholde noen observasjoner fra skjermopptaket. I tillegg til å fokusere på Lannins rammeverk vil jeg også analysere den *figurative* og *numeriske* tilnærmingen elevene har.

4.1. Oppgave 1- Stjerneoppgave

4.1.1. Rekursivitet som en start

Stjerneoppgaven var den oppgaven som elevene brukte minst tid på. Alle tre gruppene startet med å flytte på glideren for å endre variabelen k, for så å si noe om hvordan figuren vokste. Denne prosessen involverte en del *telling*, og lite samtale. Her er utsagn fra alle de tre gruppene rett etter at de hadde åpnet denne oppgaven:

333. Petter: Det legges på.. fire prikker, i retning opp, ned, høyre og venstre.

334. Bente: Ja. Legger på en firkant rundt, liksom.

335. P: Ja, ruter på en måte, da.

336. B: Mm, eller kvadrat..

337. P: Ja.

272. Ole: Hvordan endrer figuren seg når du endrer verdien på k; Den øker eller minker med 4.

273. Jon: Ja.

249. Kari: Oppgave 1: Hvordan endrer figuren seg når du forandrer verdien på k?

250. Stine: Pluss fire k.

251. K: Ja.

252. S: Eller det blir fire mer.

253. K: Legger på fire.

254. S: Det blir lagt til fire prikker.

Ut fra disse utsagnene ser man at alle har en rekursiv tilnærming til figurens oppbygning i denne tidlige fasen arbeidet med oppgaven. Alle gruppene sier noe konkret om det som skjer hvis k øker eller minker med en, selv om oppgaveteksten ikke spør spesifikt om det. Første deloppgave lyder: «Hvordan endrer figuren seg når du forandrer verdien på k?» Alle grupper velger å se på hvor mange prikker som legges til når variabelen *k* øker med en, og sier noe om relasjonen mellom disse. Bente og Petter sier noe mer om figurens oppbygning, nemlig i hvilke retninger det blir lagt til prikker. De prøver også å sette ord på figuren med begreper de kjenner til som firkant, ruter og kvadrat. Ole sier at det øker eller minker med fire når *k* endres. Han er den eneste som uttaler at endringen i antall sirkler går begge veier, og på den måten ser figurrekken som et mønster som også minker.
Stine og Kari ser også at det øker med fire når *k* øker med en. Stine sier at det øker med $4k$, noe som kunne tatt henne i retning av et eksplisitt uttrykk for figurrekken, men hun fokuserer på økning fra en figur til neste. Om hun her ser på *k* som en variabel for figurnummeret er noe usikkert siden de senere ikke klarer å finne en eksplisitt formel på egen hånd, men hun er inne på noe sentralt ved figurens oppbygging.

4.1.2. Utfordringer med proporsjonalitet

For deloppgave 2 (*Hvor mange prikker vil figuren ha når k=10?)* bruker de tre gruppene ulike strategier. En interessant forskjell er fokuset på bruk av figurene opp mot de *numeriske* verdiene de kjenner, noe som igjen resulterer i ulik begrunnelse. Kari og Stine forholdt seg til *numeriske* verdier og slet med å finne en god strategi for å si noe generelt om figurfølgen.

259. Kari: Hvor mange prikker? Ja, det blir jo.. Det er jo 10 bortover der nå da.

260. Stine: Nei, det er 11.

261. K: (teller) Ja, det blir det.

262. S: 11 pluss... 10. 21.

263. K: Ja, men det er på fem.

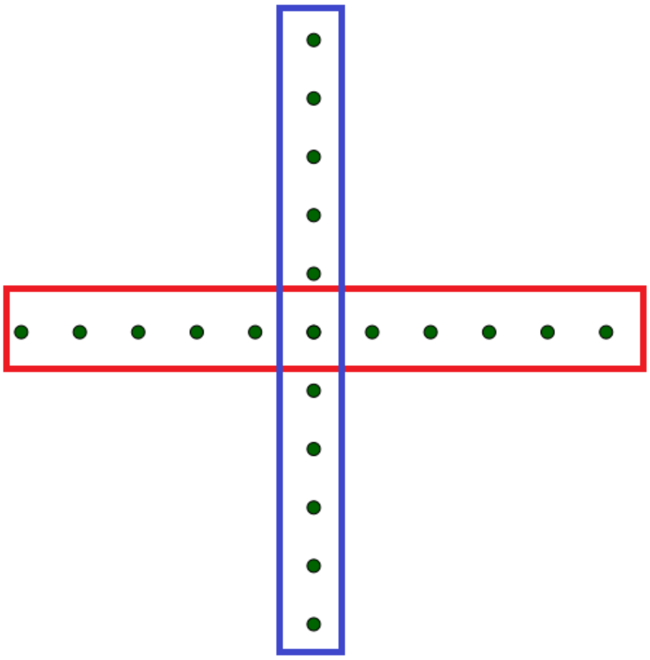
264. S: Ja.

265. K: 21 ganger..

266. S: 42.

267. K: Ja!

De to jentene bruker figuren for *k*=5 for å finne antall prikker når *k=10.* De ser at figurens «armer» har henholdsvis $10 + 11$ prikker som utgjør til sammen blir 21. Fremgangsmåten videre antyder at de forsøker å bruke en *hel- objekt*strategi. De tenker at $F(5) * 2 = F(10)$, noe som ville vært korrekt for en proporsjonal situasjon. Strategien ville fungert dersom de doblet antall prikker ut fra sentrum og addert med konstantleddet til slutt. Feilen i bruk av strategien kan komme av hvordan de to jentene ser på figurens oppbygning.



Figur 11- Stine og Karis dekomponering

Figur 11 viser hvordan jentene ser på figurens oppbygning i form av å ha to «armer». Fra samtalen deres kommer det frem at de kun teller prikken i sentrum en gang, men i utregningen av *k=10* glemmer de at i deres tolkning vil den ene prikken i sentrum være konstant. Det kan tenkes at de med fordel kunne sett figuren som fire «armer» i hver retning ut fra sentrum for å kunne si noe generelt. Utregningen de gjør, og strategien de bruker antyder et *numerisk* fokus, noe som kan komme av at de ikke finner et generelt uttrykk for figurrekken. Jentene benytter heller ingen begrunning for sin strategi. De godtar at $F(10)$ er det dobbelte av $F(5)$, og ser det ikke som nødvendig å verifisere svaret de får på noen måte. Vi ser her at det kan være vanskelig å begrunne en strategi som ikke gir dem rett svar.

4.1.3. Korrekt bruk av eksplisitte strategier

De to andre gruppene bruker andre tilnærminger til deloppgave 2. Der Stine og Kari hovedsakelig forholdt seg til verdiene de fikk ved å se på *k=5,* velger de andre å se på figurfølgens oppbygning gjennom figurene for å si noe generelt om den.

> 272. Ole: Så er det.... 4k+1... Er det ikke det da?
>
> 273. Jon: På oppgave 2?
>
> 274. O: 4k minus, nei pluss 1.

Ole ser fort relasjonen mellom variabelen *k* og antall prikker i en bestemt figur. Utsagnet 272 kommer direkte etter at de har påpekt at antall prikker øker eller minker med fire når *k* endres med en. Ut fra konteksten gitt i oppgaven finner han et eksplisitt uttrykk for å representere figurrekken. Vi kan derfor kategorisere denne strategien som *kontekstuell,* siden Ole lager en formel ut fra situasjonen han har fått. Det kan være at Ole finner det eksplisitte uttrykket ved å se på figurens oppbygning, men i det han skal begrunne sin formel velger han å forholde seg mer til verdiene for flere figurer i rekken.

> 278. Ole: 1k.. Ja, det er jo 1 det er 4 pluss 1. Så er det åtte pluss 1, så tolv pluss 1. 4k pluss 1.
>
> 279. (tenker)
>
> 280. O: Så da blir det, sånn ja... Mmm. Da vi legger på de her, for nå står den på fire, så da blir det 40.. så blir det 41 når den står på 10.

Ole er tydelig ute etter å begrunne sitt eksplisitte uttrykk for å beskrive figurfølgen. Det kan godt tenkes at Ole finner formelen ved å se på figuren og si noe dens oppbygging, men argumentasjonen hans tyder på at han ser på sammenhengen mellom figurnummeret og figurtallet. Han bruker den informasjonen glideren gir han for å se på verdier for k fra 0 til 5. I linje 278 fra samtaleutdraget ser vi Oles forsøk på å overbevise Jon, og muligens seg selv om at $4k + 1$ er et korrekt uttrykk. I begrunnelsen sin viser han til at formelen stemmer for $k = 1, k = 2$ og $k = 3$, som empiriske bevis. Han sier imidlertid ingenting om hva de ulike leddene i formelen representerer i figuren, noe som kunne tatt begrunnelsen hans til neste nivå. Det er også verdt å merke at de to guttene gir det eksplisitte uttrykket som svar på deloppgave 2 (antall prikker når k= 10), og ikke 41 prikker som ville vært det korrekte. Først etter at læreren påpeker spørsmålsstillingen for dem, ser de at det eksplisitte uttrykket bør stå som svar på deloppgave 3. Dette kan tyde på at ønsket om å si noe generelt er veldig sterkt, og overskygger evnen til å besvare den spesifikke deloppgave. På tross av dette viser Ole at han klarer å finne en eksplisitt formel for situasjonen gjennom en *figurativ* generalisering.

Petter og Bente fortsetter i utgangspunktet sin rekursive tilnærming fra første deloppgave, men det er tydelig at de er ute etter å finne et generelt uttrykk for figurfølgen. De forholder seg nesten utelukkende til figurene i følgen og studerer deres egenskaper.

349. Petter: For hver k..

350. Bente: Det blir jo..

351. P: Det øker med fire.

352. B: F, det blir jo tallet her ganger fire, pluss en.

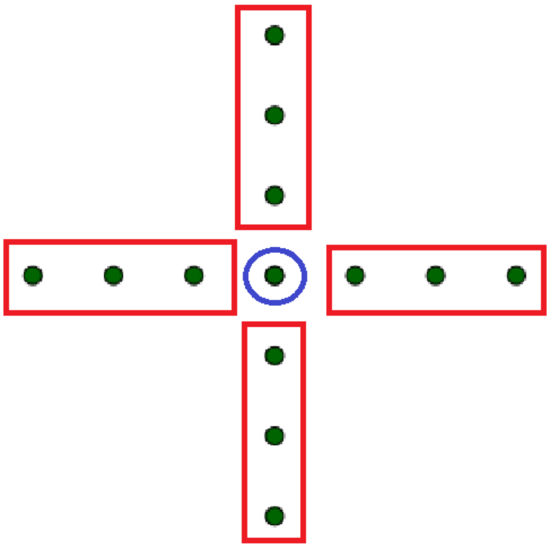
…

356. B: Altså: En ganger fire pluss en. Også k ganger fire pluss en?

357. (tenker)

358. B: For ikke sant når k står på tre, så blir det tre på hver side, tre ganger fire. Også er det den i midten- pluss en. Så hvis det er ti så er det 41, så da er formelen 4k pluss1.

Etter å ha fastslått at antall prikker i figurfølgen øker med fire mellom hver figur finner Bente en eksplisitt formel ved en *kontekstuell* strategi. Hun ser sammenhengen mellom antall prikker ut fra sentrum og variabelen *k.* Hun henviser til «det tallet her» når hun snakker om variabelen, som vises på skjermen med en glider. I motsetning til Stine og Kari ser Bente figurens oppbygning som fire «armer» som endres ved variabelen k, ut fra sentrumsprikken som er konstant. Dette gjør det enklere å sammenhengen mellom antall prikker og variabelen. Bentes begrunnelse for uttrykket ser vi i linje 358, hvor hun forsøker å forklare til Petter hvorfor formelen stemmer.



Figur 12- Bentes dekomponering

Begrunnelsen fokuserer på figuren når *k=3* som og forklarer alle ledd i formelen ut fra figuren. Bente har sett at figuren har *k* prikker i fire retninger, og prikken i sentrum som er konstant, som vist i Figur 12. Denne begrunnelsen forholder seg til en spesifikk figur i figurfølgen og argumenterer deduktivt for det eksplisitte uttrykket $4k + 1$, og kan derfor betegnes som et *generisk eksempel*, som er det høyeste nivået for begrunnelse som fremkom i denne studien. Bente viser en sterk figurativ tilnærming gjennom sin generalisering, noe som hjelper henne med å begrunne sitt uttrykk.

4.2. Oppgave 2- Bordoppgave

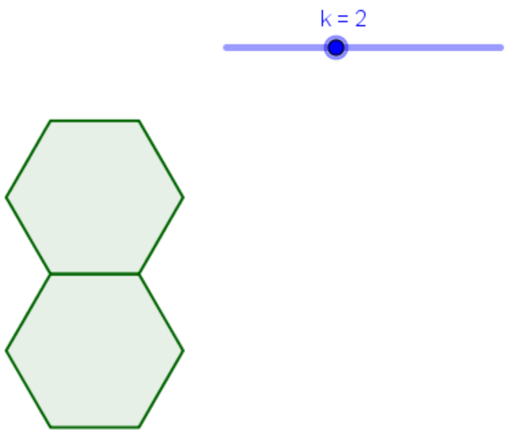
4.2.1. Ønske om generalitet

Oppgave 2 er den eneste av de tre oppgavene hvor elevene kan lese av svaret på noen av deloppgavene direkte fra det som er gitt av informasjon. Deloppgave 1 og 2 spør etter hvor mange sitteplasser det blir rundt langbordet når det er satt sammen henholdsvis ett og to bord. Disse oppgavene gir rom for lite generalisering rundt figurfølgen, men var med for å gi elevene forståelse for konteksten i oppgaven. Generelt sett ble det brukt mange ikke-eksplisitte generaliseringsstrategier på oppgave 2.

Flere av elevene valgte *stegtelle* med fire, for å finne antall sitteplasser i en bestemt figur. Elevene startet da med seks plasser som var rundt det første bordet, og *telte* oppover til ønsket figurnummer. I tillegg var det noen som prøvde ut et generelt uttrykk, men fant etter hvert at metoden ikke fungerte. Et eksempel på det ser vi når Ole og Jon betrakter figurfølgen og skal svare på de to første deloppgavene.

> 162. Ole: Ja nå er det seks, og nå er det plass til seks personer. [holder glideren på k=1]
>
> 163. Jon: Mm.
>
> 164. O: Så, nå vi går hit [flytter glideren til k=2] så er det to ganger k, så er det to bord, minus en person, eller nei det blir to personer. Det blir... Det blir to k minus to, for der [flytter glider k=3] blir det enda to personer borte.
>
> …
>
> 173. J: Du skriver 2 k minus 2 er lik 10.
>
> 174. O: Nei, du trenger ikke et svar på det!
>
> 175. J: Mmm..
>
> 176. O: Fordi k er fortsatt ukjent.

Ole er tilsynelatende mest ute etter å finne et eksplisitt uttrykk for figurfølgen, i stedet for å svare på de to første deloppgavene. Dette gjør at han gjetter på en eksplisitt formel ut fra figuren når $k = 2$.



Figur 13- To bord

Formelen $F(k) = 2k - 2$ viser at han har en misoppfatning til variabelen *k* i denne konteksten. Slik jeg tolker hans utsagn sier han egentlig $2 * 6 - 2$, siden han ser på figurrekken når to bord er satt sammen, som vist i Figur 13. Han ser variabelen *k* som antall sitteplasser pr. bord, og ikke antall bord, som den faktisk styrer. Med en slik misoppfatning av variabelen blir det vanskelig å skulle si noe generelt om figurfølgen.

4.2.2. Oppgave 2.4

I denne deloppgaven skulle elevene finne ut hvor mange sitteplasser det ble rundt langbordet når *k* =10. Det interessante her er at alle grupper benyttet en *tellestrategi* for å finne svaret. Siden oppgave 2.3 spurte etter hvor mange ekstra plasser det blir ved langbordet når antall bord endres, kan *tellestrategien* komme derfra. På oppgave 2.3 svarer alle grupper at antall plasser økes med fire, noe som de tar med inn i oppgave 2.4. Dette kan føre til den rekursive tilnærmingen alle gruppene benytter. Petter starter også med en *tellestrategi*, som er ren *numerisk*, men endrer strategi til en *figurativ* tilnærming.

> 263. Petter: 10, 14, 18, 22, 26,30, 34, 38, 42..
>
> 264. Bente: 42?
>
> 265. P: 42, det stemmer det. Åtte ganger fire pluss to ganger fem. 32 pluss 10. For det er sånn mønsteret ser ut.

Etter å ha talt seg opp til at det er 42 plasser på ti bord forsøker Petter å begrunne sin *tellestrategi* med en *kontekstuell* strategi. Han har sett at figurfølgen har to bord med fem plasser i hver sin ende, og at resterende bord har fire plasser. Med den informasjonen kan han lage et generelt uttrykk for figurfølgen. Ser vi på figuren når *k=10* vil et slikt uttrykk være $4 *$

$8 + 5 * 2$. Generelt kan vi si at Petters tenkemåte gir $k - 2$ bord med fire plasser og 2 bord med fem plasser. En eksplisitt formel for figurfølgen ville da blitt $4(k - 2) + 10$. Petter har sett dette mønsteret ut fra figurene i følgen, men velger likevel å bruke en *tellestrategi* for å finne rett svar på oppgaven. Dette viser at det å si noe generelt om en slik figurfølge er et steg videre fra å beskrive et mønster i et spesifikt eksempel. Petter uttrykker figuren med å bruke dens egenskaper og oppbygning, men klarer ikke å formalisere det til noe generelt. Begrunnelsen til Petter nærmer seg et *generisk eksempel,* men han klarer ikke å si hvorfor hans formel fungerer generelt.

Ole og Jon benytter også samme t*ellestrategi* for å finne antall sitteplasser. De har også kommet frem til at antall sitteplasser vil øke med fire for hvert bord som legges til. Fra det teller de seg oppover til k=10:

202. Jon: 10.

203. Ole: Ja, sant! Her er det? (glider til k= 3)

204. J: 14.

205. O: Så? (flytter glider videre)

206. J: 18

…

213. J: 30, 34, 38.

214. O: 42.

Guttene bruker det de har funnet på forrige deloppgave, nemlig at antall stoler øker med fire når man legger til et bord. Det kan tenkes at valg av strategi kommer fra nettopp denne informasjonen, og at det er vanskelig å bryte ut av den tenkemåten. I løsningen av denne oppgaven ser de ikke direkte på variabelen *k* for å uttrykke tallfølgen, men forholder seg til verdiene de kjenner fra situasjonen. Guttene ser på hvert nytt bord som et ledd på fire og de to endebordene som et ledd på fem. Så *teller* de seg opp til de har ti bord, og på den måten kommer frem til 42 sitteplasser. Dette bekrefter de også senere etter spørsmål fra meg om hvordan de kom frem til svaret sitt:

227. Jon: (Til Jo Esten) Må vi liksom skrive regnestykket på det eller bare skrive svaret?

…

236. Jo Esten: Hvordan tenker dere da?

237. J: Vi telte bare, for vi vet at det øker med fire.

Spørsmålet om de må skrive et regnestykke kommer muligens fra at de føler at metoden de har brukt ikke er tilstrekkelig for å si noe generelt om figurfølgens oppbygning. De to guttene viser et ønske om å si noe mer generelt om tallfølgen enn de har klart med sin *tellestrategi*.

Den samme fremgangsmåten ble også benyttet av Stine og Kari, men de *telte* med et bord for mye og fikk 46 sitteplasser som svar:

192. K: To, fire, seks, åtte ti. Nei. To, fire, seks, åtte, ti, tolv, fjorten, tjue. 20. 40. Det blir 42, blir det for endene.

193. S: Ja, det blir fem her, fire her, fire, fire, fire, fire, fire, fire, fire, fem.

194. K: Mm.

195. K: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, førti... vent a.

196. S: 41, 46.

…

200. S: Jo, pluss ti ikke sant, for det er fem på to av de her.

201. K: Stemmer!

202. S: Ja, det blir 46.

Begge jentene teller først opp til 42 hver for seg, men når de sammen teller over en gang til kommer de til at det er 46 plasser. Siden de har brukt en slik *tellestrategi* er det vanskelig å verifisere om svaret de kommer frem til er rett. Dermed er det lettere å få feil svar hvis man gjør en feil i utregningen, som her en tellefeil.

4.2.3. Feil bruk av strategi

Oppgave 2.5 viste seg å være vanskelig for elevene. Ingen av gruppene klarte å finne et eksplisitt uttrykk uten støtte fra lærer. Og uten et slikt generelt uttrykk blir det krevende å finne løsningen på antall sitteplasser for 100 bord satt sammen. Et forsøk på å finne ut hvor mange sitteplasser det vil være med 100 bord (k=100) ble gjort av Kari og Stine. De hadde funnet ut at for k=10 er det 46 sitteplasser, hvilket egentlig er 42. Når de da skal finne antall plasser for k=100 bruker de en *hel- objektstrategi*, som de også benyttet (ukorrekt) i oppgave 1 (stjerneoppgave). De bruker svaret de har fått for k=10 og forsøker å multiplisere denne verdien for å finne k=100.

224. Stine: Vi har ti bord, og det blir 46, også mangler vi 90 for å få 100.

225. Kari: Men..

226. S: Da tar vi bare 9 ganger 46.

227. K: Ja…

228. K: Ja, hva sa du nå?

229. S: Det er jo 10, det er 46 personer.

230. K: Ja.

231. S: Da mangler vi 90 bord.

232. (tenker)

233. S: Og da tar vi 9 ganger 46.

De to jentene regner ut regnestykket de laget og svarer at det blir 414 sitteplasser når k=100, uten å verifisere svaret, eller strategien på noen måte. Strategien viser noen misoppfatninger de to elevene har. For det første tenker de at kan multiplisere figurtallet for å rett svar, en misoppfatning rundt *hel- objektstrategi*. De tar ikke hensyn til figurens oppbygning og ser ikke at det alltid vil være to ekstra plasser i tillegg til fire for hvert bord. En *hel- objektstrategi* er forsøkt, men på feil måte siden de ikke tenker over konstantleddet i figurfølgen. En annen misoppfatning som kommer til syne hos jentene ved denne strategien er en feil rundt verdien de har og multiplikasjon, nemlig at de multipliserer 46 med 9. Som utdraget fra samtalen ovenfor viser begrunnes dette med at man mangler 90 bord, og må derfor multiplisere F(10) med 9 for å finne F(100), hvilket ikke gir mening når man skal multiplisere noe med 10. Det virker som om de har additiv tilnærming til multiplikasjonsstykket, da de tenker at man må multiplisere 46 med ni for å få det de mangler.

4.2.4. Problematisk å endre tankesett

Som vist tidligere i analysen av denne oppgaven var gruppen til Petter og Bente inne på at figuren for $k = 10$ hadde $8 * 4 + 2 * 5$ plasser, som viser at de hadde sett noe essensielt rundt figurens oppbygning. Dette kunne de tatt med seg videre til siste deloppgave, men de slet med å formalisere det til et generelt uttrykk. Etter at de har brukt en del tid på oppgaven velger jeg derfor å gripe inn. Nedenfor vises en lengre sekvens fra samtalen:

> 282. Jo Esten: Hvorfor øker det med fire og ikke seks da, når man har et sekskantet bord?
>
> 283. Bente: Fordi det går bort plasser i skjøtene mellom bordene.
>
> 284. J. E: Ja, bra. Så det blir fire ekstra?
>
> 285. Petter: Ja, og på de ytterste bordene i en lang rekke blir det plass til fem.
>
> 286.J. E: Ja.
>
> 287. P: Og innenfor de blir det plass til fire bare..
>
> …
>
> 312. P: Men det går ikke når k ganger seks eller sånn, det går ikke..
>
> 313. J. E: Eh, nei. Men hvor mange plasser sa dere det legges til når det legges til et bord?
>
> 314. P: Fire.
>
> 315. J. E: Mm. Og hvor mange plasser ekstra er det utover de fire?.. Til enhver tid?
>
> 316. P: To?
>
> 317. J. E: Hæ?
>
> 318. P: To.
>
> 319. J. E: Mm. Klarer dere da å lage en formel, når dere bruker det?
>
> 320. P: Jajaja, jaja. k ganger fire pluss to.

Petter og Bente har i grunn funnet alle egenskapene i mønsteret som trengs for å komme frem til en generell formell. De sliter bare med å sortere informasjonen på en tilstrekkelig måte, og formalisere det til et uttrykk. Det at de tidligere så på figurfølgen som $F(k) = 4(k-2) + 10$ kan ha ført til at de ikke klarer å omstille tankene i retning av det uttrykket de finner til slutt. Det må nevnes at hvilket som helst av disse uttrykkene stemmer for figurfølgen, og er i så måte likestilt som fremgangsmåter for oppgaven. Allikevel er det når de forstår at det alltid vil være to plasser ekstra (Linje 316- 318) i tillegg til de fire per bord at Petter kommer frem til et eksplisitt uttrykk. Dette kan tyde på at den oppfatningen av mønsteret Petter tidligere hadde, gir han problemer når han skal finne et generelt uttrykk.

Når jeg ba Petter forklare hvorfor antall sitteplasser rundt langbordet kan uttrykkes ved $4k + 2$, benytter han et empirisk bevis.

> 322. P: Hvis du bytter ut k med en; en ganger fire det er fire pluss to er seks.
>
> 323. Jo Esten: Mm.
>
> 324. P: Hvis du bytter k med to, to ganger fire pluss to det blir ti da, eller åtte pluss to da.

Petter viser til de to første figurene i rekken (k=1 og k=2) for å argumentere for at formelen han har funnet er riktig. Petter sier ikke noe om hva de ulike leddene i uttrykket viser i figuren. Han forholder seg til forholdet mellom figurnummeret og figurtallet i to eksempler, og begrunner uttrykket gjennom et *empirisk* bevis.

4.3. Oppgave 3- Kvadratoppgave

Den siste oppgaven var den jeg på forhånd antok ville være den mest krevende for elevene. Dette viste seg å stemme, og det var hovedsakelig kun en gruppe klarte å løse oppgaven på en god måte. Til gjengjeld løste den gruppen alle oppgavene, og sånn sett var ikke oppgaven for vanskelig til å skulle være med i prosjektet. Vi vil se gjennom analysen av denne oppgaven at det er de som forholder seg mest til *figurativ* generalisering som klarer å finne en tilstrekkelig generaliseringsstrategi.

4.3.1. Forståelse av variabler

På første deloppgave blir elevene spurt om å beskrive hva som skjer med figuren når variablene *n* og *k* endres. Formålet med deloppgaven var at elevene skulle få en forståelse for variablene, og spesielt *k* som de bruker i de senere deloppgavene. Gruppenes svar varierer i form av hvilke egenskaper de klarer å se ut fra figuren. Nedenfor vises et bildeutsnitt fra GeoGebra av alle gruppers svar på første deloppgave:

Oppgave 1: n og k er to parametre som forandrer figuren. Hva skjer når n endres? Og hva endrer k?
Figuren skifter form og den blir større.

Figur 14- Stine og Karis svar- oppgave 3.1

N endrer form og K endrer størrelse

Figur 15- Ole og Jons svar- oppgave 3.1

Oppgave 1: n og k er to parametre som forandrer figuren. Hva skjer når n endres? Og hva endrer k?
Når N endres, skifter figuren form og det blir flere sirkler.
Når K endres utvider figuren seg og det oppstår en rekke til med kuler i en type rekkefølge.

Figur 16- Petter og Bentes svar- oppgave 3.1

Alle gruppene sier at figuren endrer form og størrelse når de to variablene skifter verdi. Ut fra Figur 14 ser man at Stine og Kari må sies å ha en nokså begrenset beskrivelse av variablene og figurenes oppbygning. De ser at figuren endrer form og utvides hvis variablenes verdi øker, men evner ikke å si noe mer spesifikt. De to andre gruppene klarer å skille mellom hvilken variabel som endrer hva. Petter og Bente forsøker også å si på hvilken måte figuren utvider seg når *k* endres, med at det legges til en rekke med sirkler. De ulike detaljene i beskrivelsene fra gruppene ser ut til å gi utslag i videre arbeid. Ingen av gruppene sier noe om at variabelen *n* endrer antall kanter på figuren før Petter ser dette i det han og Bente skal løse deloppgave 2, som spør etter hva som skjer når *k* endres når *n=4.*

39. Petter: Å!

40. Bente: Figuren utvider seg.

41. P: Ja, ja! Hvis dette er trekant, så utvider den seg i trekantform.

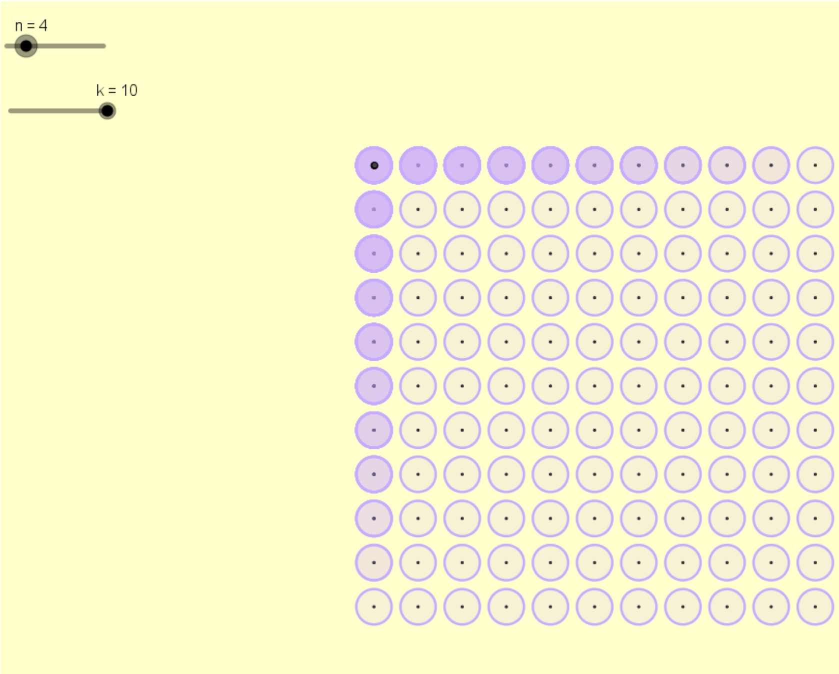
…

45. P: Og nå er det firkant, utvider seg i firkantform, femkant..

Petter oppfatter hva slags figurer som skapes når *n* endres, noe som er essensielt for å forstå figurenes oppbygning. Etter dette er det også lettere å se hvordan disse figurene forandrer seg når man endrer variabelen *k*. Det å si at variabelen *n* endrer hva slags polygonform figuren vil ha, kan betraktes som en *figurativ* generalisering av variabelen *n*.

4.3.2. Utfordrende å begrunne ved feil bruk av strategi

Tredje deloppgave spør etter hvor mange sirkler figuren vil ha når *n*=4 og *k*=10.



Figur 17- K=10

Figur 17 viser figurnummer 10 i følgen. Elevene hadde som sagt tidligere fått oppgitt de fem første figurene i følgen. I figuren ovenfor ser vi at hver side i kvadratet har elleve sirkler, og antall sirkler i hele figuren er derfor 121. Denne oppgaven bø på utfordringer for elevene, og ulike strategier ble benyttet.

49. Stine: 36 ganger2.. 72.

50. Kari: 36 pluss 36 blir det..

51. S: 72.

52. K: 36 pluss 36 blir det 72. Er du sikker på det? Ja, det blir det.

53. S: 36 ganger 2 er 72.

Stine og Kari ser at for $k = 5$ er det 36 sirkler, og velger å doble dette tallet i forsøket på å finne antall sirkler for *k=10.* Som i både «stjerneoppgaven» og «bordoppgaven» forsøker jentene å anvende en *hel- objektsstrategi* ved å multiplisere en kjent verdi, men bruker den på feil måte siden de dobler figurtallet for $k = 5$. De to jentene sier seg fornøyd med svaret de har kommet frem til, dette kan tenkes er på grunn av at de ikke klarer å finne en annen fremgangsmåte. Gjennom samtalen rundt denne oppgaven går de rett på strategien de ender opp å benytte, uten å drøfte hvorfor den er riktig å bruke, eller ikke. Det virker som om de sliter med å finne en god generaliseringsstrategi ut fra figuren og verdiene de har tilgjengelig, noe som igjen fører til at det er vanskelig å begrunne fremgangsmåten de benytter.

4.3.3. Relasjon mellom variabel og figur

En annen strategi blir benyttet av Ole og Jon som prøver å bruke variabelen *k for* å finne antall sirkler når *k=10.*

> 54. Ole: k.... Eh. Nei, det blir to. Det er jo k ganger k.. Eller, ja. Si 5k ganger 5k minus en. Fordi da finner du ut arealet minus en, fordi de er felles for begge to.
>
> 55. (tenker)
>
> 56. Ole: Nei, det trenger du ikke. Bare glem det. (Kort pause). K ganger k!
>
> 57. Jon: Mm. Det blir jo det dobbelte av det der da.
>
> 58. Ole: Ti ganger ti, det er jo 100.
>
> 59. Jon: Mm.

Ole ser at antall sirkler i figuren kan uttrykkes med å multiplisere side med side. Fra skjermopptaket ser man at de to guttene ser på figuren når *k=4.* Den har sider med fem sirkler. Guttene kommer frem til at antall sirkler kan uttrykkes med $k * k$, og derfor velger de å svare at figuren vil 100 sirkler når *k=10.* Det kan tyde på at de glemmer forholdet mellom *k* og antall sirkler på hver side i kvadratet, siden de bruker denne formelen. Strategien tar ikke hensyn til at en side i kvadratet alltid er en større enn *k*, og derfor får de feil svar på oppgaven. Men de klarer ut fra figuren å se at side kan multipliseres med side for å finne antall sirkler. De har helt klart funnet et mønster i figurfølgen som de kan bruke til å si noe generelt. De viser en god *figurativ* tilnærming, men evner ikke helt å få formalisert det til rett uttrykk. Ut fra samtaleutdrag 54 kan det også tyde på at de to guttene ikke har en tilstrekkelig forståelse for variabelen, da Ole bruker *k* for å uttrykke en sirkel i figuren da han sier at et generelt uttrykk kan skrives på formen $5k * 5k$. Dette retter han selv opp senere i samtaleutdraget, som viser at han delvis forstår relasjonen mellom variabelen *k* og antall sirkler.

4.3.4. Utfordring med variabler

Ole og Jon strever også videre med å gi mening til variabelen *k*, og ser ikke hele sammenhengen mellom figurtallet og variabelen i figurrekken. I arbeidet med siste deloppgave der de skal finne en formel for å uttrykke antall sirkler i kvadratet når k er ukjent forsøker Ole å finne et eksplisitt utrykk, men fremgangsmåten virker å være *gjetninger* på å finne et generelt uttrykk for figurfølgen.

> 79. Ole: Xk ganger xk, holdt jeg på å si. Ehm, x, k i parentes ganger x ganger k i parentes.

…

> 86. Ole: Man vet ikke k, så da, si at...
>
> 87. Jon: X ganger k...
>
> 88. Ole: ... antall prikker det gjøres om til x. Og k det er fortsatt k.
>
> 89. (tenker)
>
> 90. Ole: Nei, vent litt. Huff, nå....
>
> 91. Ole: Når.. Antall k er ukjent. Eller.. Antallet ukjent det er jo x kan vi si da ganger k, i parentes.

Ole prøver å bruke k for å lage et generelt utrykk som stemmer for figurrekken. Han har vanskeligheter med å se hva denne variabelen egentlig uttrykker i den gitte konteksten, og sammenhengen med antall prikker i figuren. Det han da velger å gjøre er å ta inn en ny variabel som kan representere antall prikker i hver figur. Dette tyder på at han ikke klarer å se hva variabelen *k* representerer i figurrekken. Det virker som om han gjør en *gjetning* for å finne et generelt uttrykk. Etter å ha tatt inn variabelen *x* for å uttrykke antall prikker i en gitt figur prøver han formelen $(xk)(xk)$. Dette bringer ikke Ole noe nærmere et fungerende uttrykk, og er nok heller med på å forvirre både hans og Jons tankesett. Hvorfor Ole velger å ta inn en ny variabel er usikkert, men det kan tenkes det kommer fra tidligere erfaringer med algebra der bokstaven *x* ofte er brukt. Siden Ole og Jon ikke klarer å finne et eksplisitt uttrykk, føler Ole muligens at han mangler noe for å løse oppgaven og tar derfor inn en ny bokstav.

4.3.5. Kontekstuell strategi

Når Bente og Petter skal finne ut hvor mange sirkler den kvadratiske figuren inneholder når k=10, viser Petter at han ser på figurens oppbygning, fremfor kun å se på verdiene som var kjent. Han ser en sammenheng mellom figurnummeret og hvordan figuren er oppbygd:

> 58. Petter: For, hvis vi tar det sånn da. Eh... Nå er den en større, ja en sirkel større enn en i alle retninger [k=1 på glideren i GeoGebra]. Eller i den og den. Og nå er den fortsatt en større[k=2]. Så hvis vi setter den på ti så blir det elleve.
>
> 59. Bente: Ja.
>
> 60. P: Jo. Der er det fem, og der er det seks.
>
> …
>
> 68. B: Ja, for her sånn er det jo trettiseks.
>
> 69. (tenker)
>
> 70. B: Så det blir 72.
>
> 71. P: Blir det 72?
>
> 72. B: Ja.
>
> 73. P: Ja, hvis...
>
> 74. (tenker)
>
> 75. P: Ja, det blir elleve ganger elleve.

Petter ser at hver side i kvadratet er en større enn figurnummeret, og finner at for k=10 vil hver side ha 11 sirkler. Her har Petter funnet grunnlaget for et eksplisitt uttrykk for figurfølgen som han uttrykker med sitt eget muntlige språk. Det virker som han ikke med en gang kobler sine funn opp mot hvordan regne ut arealet av et kvadrat, som det kan forventes at han er kjent med. Han ser det generelle, men klarer ikke å formalisere det med en gang. Etter litt tenking kommer han frem til at antall sirkler i figuren vil være $11 \cdot 11$ når k=10. Med denne strategien bruker Petter figurens oppbygging til å finne en eksplisitt formel for å uttrykke situasjonen, hvilket kan betegnes som en *kontekstuell* strategi. I begrunnelsen sin viser Petter til k=1, k=2, og k=5 som vi ser fra utdraget ovenfor, og forholder seg derfor til et *empirisk bevis*. Samtidig beskriver han uttrykkets oppbygging med å bruke figuren på en måte som kan gi et *generisk eksempel*, siden han sier at det alltid vil være en prikk mer enn figurnummeret på hver side i kvadratet. Derfor kan det diskuteres om Petter faktisk begrunner med flere *generiske eksempler.* Hvis han hadde begrunnet med å sjekke for verdiene for figurene han nevner ville det vært enkelt å kategorisere som et *empirisk bevis,* men han gir en deduktiv begrunnelse i flere eksempler. I dette tilfellet kan vi si at argumentasjonen til Petter er på vei mot et høyere nivå enn et *empirisk bevis*, men det kan virke som om han føler seg mer komfortabel med å vise til flere *empiriske* eksempler for å begrunne sin strategi.

Når Petter og Bente på siste deloppgave blir spurt om å finne et generelt uttrykk svarer de med en gang at det vil være $(k+1)^2$. De får til å formalisere situasjonen som de kun tidligere har formulert med egne ord. Siden de laget uttrykket på forrige deloppgave, og begrunnet det, gjør de seg fort ferdig med denne oppgaven. Gjennom begge disse deloppgavene viser Petter og Bente en sterk *figurativ* tilnærming til figurfølgen, og klarer å se det generelle.

Begrunnelse benyttet ved ulike strategier:

Nivåer av begrunnelse	Ingen begrunnelse	Empirisk bevis	Generisk eksempel
Generaliseringsstrategier			
Telling		3	
Rekursiv	2	1	
Hel- objekt	3*		
Gjett og sjekk	2*		
Kontekstuell		3	1

Tabell 4-Oppsumering strategier og begrunning.

**uriktig bruk av strategien*

Tabell 4 viser en oppsummering av hvilken form for begrunnelse som ble brukt for de forskjellige generaliseringsstrategiene. Fra tabellen er det tydelig at når elevene anvendte en strategi på feil måte, var det vanskelig å begrunne denne. Som man ser var det hovedsakelig den *kontekstuelle* strategien som skilte seg ut på den måten at den begrunnes med *empiriske bevis* eller det høyeste nivået i denne studien, *generisk eksempel.* I denne tabellen har jeg valgt å sette Petter og Bentes argumentasjon for formelen de fant i «kvadratoppgaven» som et *empirisk bevis,* selv om det kan diskuteres om det er et høyere nivå for begrunnelse. For *tellestrategien* har jeg valgt å si at elevene begrunner gjennom *empiriske bevis,* siden de har sjekket for flere figurer i følgen i det de *telte* seg oppover til den figuren de ville finne.

5.0. Drøfting

Formålet med denne oppgaven er å studere følgende forskningsspørsmål:

Hva kjennetegner elever på 10. trinns valg av generaliseringsstrategier i arbeid med figurtalloppgaver, og hvordan begrunner de sine strategier?

I dette kapittelet vil jeg drøfte mine empiriske funn opp mot presentert teori for å besvare mitt forskningsspørsmål. For å diskutere generalisering og begrunnelse vil jeg ta for meg hver kategori som ble funnet i mine analyser. Videre vil jeg drøfte på hvilken måte generalisering og begrunnelse henger sammen, ut fra mine funn og tidligere studier. Til slutt vil jeg som nevnt tidligere bruke litt tid på å diskutere skjermopptak som observasjonsmetode, siden det er relativt lite brukt i matematikkdidaktisk forskning.

5.1. Elevers generaliseringsstrategier

Observasjonen av elevene viste klare forskjeller i valg av strategier for å generalisere. *Ikke-eksplisitte* strategier ble ofte valgt som en start, før noen av elevene evnet å utvikle eksplisitte strategier som kunne gi dem svaret på vanskeligere oppgaver. Dette stemmer overens med English og Warrens funn som viser at de fleste elever klarer å fortsette et gitt mønster, men det er kun de mer erfarne elevene som evner å formalisere et algebraisk uttrykk (1998). I denne studien var det relativ stor forskjell på de tre gruppene som deltok i evne til å finne, og bruke eksplisitte strategier. Stine og Karis gruppe var den som slet mest med å finne generelle uttrykk som førte til at de ofte brukte *telling*, eller brukte *hel- objekts metode* på feil måte som ga dem feil svar. De to andre gruppene var i all hovedsak ute etter en eksplisitt formel og klarte ofte å finne det. Oppgaver som i stor grad oppfordrer til å finne et *eksplisitt* uttrykk er de som spør etter en figur langt ut i følgen. Som «hvor mange sirkler vil figur nummer 100 ha»? En slik oppgave får noen elever til å tenke at de må finne et eksplisitt uttrykk for å kunne løse oppgaven. Andre ser på oppgaven som et enkeltstående spørsmål som skal regnes ut med verdier de allerede kjenner til. Det var i slike tilfeller at noen av elevene benyttet *gjetting* og *hel- objekts metode* for å forsøke å besvare oppgaven. Ingen av disse strategiene førte frem.

5.1.1. Ikke- eksplisitte strategier

Ikke- eksplisitte strategier ble i hovedsak benyttet på de enkleste deloppgavene der det spørres etter et relativt lavt nummer i følgen. Den mest brukte strategien av de ikke- eksplisitte var *telling*, som alle grupper benyttet på et eller annet tidspunkt. For eksempel på oppgave 2.4 telte alle grupper for å finne antall sitteplasser rundt ti sekskantete bord. Den ene gruppen telte med et bord for mye og fikk derfor feil svar. Dette viser noe av svakheten med en slik strategi, nemlig at den er vanskelig å validere. Det vil derfor være bedre og mer sikkert dersom man klarer å bruke en eksplisitt strategi, siden den lettere kan prøves ut gjennom eksempler. Den andre ikke- eksplisitte strategien er omtalt i denne oppgaven er en *rekursiv* strategi. Den ble også brukt, men ikke i like stor grad som *telling*. Denne strategien benyttet elevene hovedsakelig for å beskrive endringen til en eller flere variabler. Utsagn som «figuren øker eller minker fire» kategoriseres innenfor denne strategien. Strategien ble kun brukt for å beskrive en figurfølges endring fra ett figurnummer til neste, og ble ikke brukt for å løse en oppgave som spør etter en spesifikk verdi. Det virker som at elevene ikke så nytten av en slik tilnærming på de gitte oppgavene. Det kan også tenkes at en rekursiv formel er mer ukjent enn et eksplisitt uttrykk, og derfor vanskeligere å tilnærme seg. Eksplisitte uttrykk er elevene kjent med gjennom funksjonslære, mens en rekursiv formel har de lite erfaring med. Utsagnet «figuren øker eller minker med fire» kunne blitt formalisert til et algebraisk, rekursivt uttrykk, men dette skjedde ikke. Etter denne, og lignende rekursive uttalelser benyttet elevene seg enten av *telling*, eller så endret de tenkemåte og forsøkte å finne en eksplisitt formel.

5.1.2. Eksplisitte strategier

Eksplisitte strategier førte i større grad enn de ikke- eksplisitte frem til riktig løsning på oppgavene. De som benyttet en *kontekstuell* strategi fikk utelukkende rett svar. Denne strategien ble brukt av Ole og Jon på en oppgave, og av Bente og Petter på tre deloppgaver. I bruk av denne strategien vises det tydelig til figuren for å formalisere et generelt uttrykk. I følge Lannin (2005) viser alltid denne strategien til konteksten i oppgaven. Dette underbygges i denne studien. Den *kontekstuelle* strategien kjennetegnes nettopp med at man finner et eksplisitt uttrykk gjennom å bruke den informasjonen man har tilgjengelig fra situasjonen (Lannin, 2005). Dette har vi sett blant annet i elevenes arbeid med «stjerneoppgaven», der Ole og Jons og Petter og Bentes grupper så hvordan figurfølgen var oppbygd via det *figurative* for å utvikle et generelt uttrykk. Petter og Bentes tilnærming til «kvadratoppgaven» viser også en lignende strategi, der de hele tiden ser på egenskaper til en figur i følgen og klarer å finne frem den eksplisitte formelen $F(k) = (k+1)^2$. Ut fra disse strategiene kan man tyde at det er hensiktsmessig i figurmønsteroppgaver når elever evner å bruke konteksten og figuren for å generalisere. Dette sammenfaller med funn i tidligere studier gjort på feltet (English & Warren, 1998; Rivera & Becker, 2005).

Gjett- og sjekkstrategien ble ikke brukt veldig mye i denne studien. Den ble kun benyttet av Ole og Jon i deres arbeid med «kvadratoppgaven». De *gjettet* på flere uttrykk i arbeidet med å gi en generell beskrivelse av antall sirkler i figurfølgen. *Gjettestrategien* kom som et resultat av at de så et mønster i figurfølgens oppbygning, men evnet ikke å formalisere et generelt uttrykk fra den informasjonen de hadde tilgjengelig. Siden de ikke evnet å finne en formel direkte fra figurene, gikk de bort fra disse og så de *numeriske* verdiene som var tilgjengelige i oppgaven. Ole forsøkte $F(k) = k^2$ og $F(k) = (xk)(xk)$ for å uttrykke antall sirkler i kvadratet. Fra dialogen deres kom det ikke frem at de forsøkte å validere disse *gjetningene,* men siden de gikk vekk fra begge to, er det naturlig å anta at de *sjekket* begge uttrykk og fant at det ikke stemte for den aktuelle følgen. En slik *sjekk* er naturlig å gjøre ved å prøve sitt uttrykk på for et eller flere eksempler. Lannin (2005) sier at *gjett- og sjekkstrategien* valideres empirisk, noe som trolig er den tilnærmingen Ole og Jon også gjorde i denne oppgaven. Situasjonen viste at det kan være vanskeligere å komme frem til et korrekt eksplisitt uttrykk når man går bort fra figuren, og over til *numeriske* verdier for å generalisere. Dette kom også frem i Becker og Rivera (2005) i sin studie.

Den siste eksplisitte strategien; *hel- objekts* metode, ble også brukt i denne studien. Alle ganger ble strategien anvendt ukorrekt, og ga feil løsning på den aktuelle oppgaven. Dette er likt med funn fra tidligere forskning (Lannin, 2005; Stacey, 1989). Stacey (1989) peker på at feil bruk av denne strategien viser elevenes manglende forståelse for proporsjonal resonnering. Stine og Kari benyttet utelukkende *hel- objektsmetoden* når de skulle finne figurtallet til en figur lengre ut i rekken (fra figurnummer 10 og oppover). I sin tilnærming tok de ikke hensyn til å justere svaret, hvilket var nødvendig i alle oppgavene metoden ble anvendt. For eksempel i «stjerneoppgaven» benyttet de en slik strategi for å finne antall prikker for den tiende figuren i følgen. De multipliserte da antall prikker i figur nummer fem med to, og fikk svaret 42 for den tiende figuren. Men glemte å justere svaret sitt for at den ene prikken i sentrum av figuren vil være konstant, og ikke endrer seg. Strategien viser at de går vekk fra figuren og ser heller på tallene de har tilgjengelig for å generalisere. Becker og Rivera (2005) sier at en slik *numerisk* generalisering ikke fører frem til rett svar like ofte som en *figurativ* tilnærming.

5.2. Begrunnelse

I denne studien benyttet elevene seg av tre ulike nivåer for begrunnelse. Fra analysen av oppgavearbeidet har vi sett at mange elever slet med å begrunne strategien som de brukte. Derfor er det mest brukte begrunnelsesnivået i studien *nivå 0* (*ingen argumentasjon*). Utover det brukte elevene *empiriske bevis* (*nivå 2)* og *generiske eksempler* (*nivå 3)* for å begrunne sine svar og generaliseringsstrategier. Dette sammenfaller med Lannins studie (2005) der *empiriske bevis* og *generiske eksempler* var begrunnelsen som hovedsakelig ble brukt. Det virker tydelig at elevene som generaliserte ved å bruke figurene, lettest klarte å begrunne sin tenkemåte. Dette stemmer overens med tidligere studier som er gjort innenfor figurfølgearbeid (Rivera & Becker, 2005).

5.2.1. Empiriske bevis

I oppgaver hvor elevene forsøkte å begrunne sin fremgangsmetode ble det nesten utelukkende brukt *empiriske bevis.* En omfattende bruk av *empiriske bevis* for å begrunne sine generaliseringer speiler tidligere forskning (Lannin, 2005; Mason, 1996; Stacey, 1989). Lannin (2005) mener dette henger sammen med elevers tidligere erfaringer med å finne spesifikke tilfeller, i stedet for å finne generelle relasjoner. I min studie ble *empiriske bevis* benyttet for å begrunne både ikke-eksplisitte og eksplisitte strategier. I en *tellestrategi* er det naturlig at begrunnelsen er *empirisk* siden den tar for seg spesifikke tilfeller. Man kan allikevel diskutere om det i det hele tatt er en begrunnelse. Det å oppnå validitet gjennom *empiriske bevis* når en rekursiv strategi er brukt må sies å være vanskelig, siden man bare dobbeltsjekker sin egen *telling.* Anvendelse av *empiriske bevis* når en eksplisitt strategi er anvendt, må ses på som mer nyttig, siden man tester ut et generelt uttrykk i noen eksempler og får prøvd sin hypotese. Allikevel vil man alltid prøve å få elevene videre, til å gi en deduktiv begrunnelse gjennom et *generisk eksempel.* Balacheff (1988) omtaler nemlig *empiriske bevis* som *naiv empirisme,* og er ikke gyldig som et matematisk argument. Derfor er det viktig å få elever videre i sitt begrunnelsesnivå. I denne studien var det hovedsakelig ved bruk av en *kontekstuell strategi* at *empiriske bevis* ble benyttet innenfor eksplisitte strategier. Ole og Jon viser dette i «Stjerneoppgaven», og Petter og Bente i «Bordoppgaven». Det som er felles med begge disse eksemplene er at den *kontekstuelle* strategien gir dem et godt grunnlag for å begrunne gjennom et *generisk eksempel,* siden de har sett relasjoner mellom figurnummer og figurens oppbygning. Men i begge eksemplene velger elevene å teste ut sine formler for figurtallet i flere figurer. De beveger seg da fra en *figurativ* mot en *numerisk* tilnærming i det de skal argumentere for sin strategi.

5.2.2. På vei videre

Et interessant eksempel som kom frem fra analysekapittelet er Petters begrunnelse i «kvadratoppgaven». Selv om jeg kategoriserer begrunnelsen som et *empirisk bevis*, inneholder argumentasjonen hans elementer som vi kjenner fra et *generisk eksempel.* Han viste til flere figurer for å overbevise seg selv og Bente, men testet ikke sitt uttrykk opp mot figurtallet til figurene. Han sier at sidene i kvadratet alltid vil være en større enn variabelen *k*, noe som kan sies å være en deduktiv begrunnelse. Petter henviser allikevel til flere figurer for å begrunne sin formel. Hans begrunnelse viser at det er klare sammenhenger mellom de ulike begrunnelsesnivåene, hvilket gir mulighet for en lærer å se hva som må til for å få elevene opp på neste nivå. Grunnen til at han velger et *empirisk bevis* kan være at han er vant til å finne spesifikke svar på oppgaver, og er lite vant med å generalisere, som nevnt tidligere.

5.2.3. Generisk eksempel

Den siste formen for begrunnelse som ble brukt i denne studien var *generisk eksempel.* Dette ble anvendt av Petter og Bente i arbeid med «Stjerneoppgaven». Her evnet Bente å bruke en figur i figurfølgen for å beskrive hvordan den var bygd opp. Både gjennom generaliseringsstrategi og begrunnelse forholder hun seg til figuren, og går ikke til *numeriske* verdier på noe tidspunkt. Hun finner formelen $4k + 1$ med å se at det er fire «armer» i hver sin retning med *n* antall prikker, pluss den ene prikken i sentrum av figuren. Gjennom et eksempel viser hun en deduktiv begrunnelse som viser hvorfor formelen gjelder for hele følgen. En slik begrunnelse må sies å være den høyeste form for begrunnelse i arbeid med figurfølgeoppgaver, siden man alltid må forholde seg til en gitt kontekst, som gjør det vanskelig å løsrive seg fra den og gi en *deduktiv begrunning* (*nivå 4*) utenfor et eksempel.

5.3. Sammenheng mellom generalisering og begrunnelse

Elever som fant en god strategi for å løse en oppgave så ofte mønstre og relasjoner i figurene gitt i situasjonen, som hjalp dem til å begrunne sin tilnærmingsmetode. Uten å ha sett slike mønstre for å utvikle en strategi er det vanskelig å begrunne. Luis Radford (1996) sier at generalisering som et didaktisk verktøy ikke kan unngå problemet med validitet, og validering er i seg selv komplekst. Denne studien underbygger dette, da elevene som sliter med å si noe generelt, heller ikke i særlig grad klarer å begrunne sin tilnærming. I de tilfellene hvor elevene ikke begrunner sin strategi eller sitt svar på oppgaven har de ofte fått feil svar. Fraværet av begrunnelse kommer nok nettopp fra dette, da det er vanskeligere å begrunne en feilaktig strategi enn en som fører frem til korrekt svar på oppgaven. De som ikke hadde noen argumentasjon for sin fremgangsmåte hadde først og fremst fokus på verdiene som kun leses ut fra den gitte informasjonen i oppgavene. Et slikt funn samstemmer med hva Rivera og Becker (2005) fant i sin studie. Dette kan skyldes tidligere erfaringer med algebra som tema i skolen. Elevene er kanskje vant med å finne en bestemt verdi for en ukjent i arbeid med likninger, eller å bestemme spesifikke verdier i arbeid med funksjoner, som for eksempel stigningstallet til en funksjon. Kieran (2004) mener at det er vanskelig for elever å gjøre rede for sine generaliseringer fordi oppgaver i skolen har vært for svarfokusert. Disse erfaringene tar elevene med seg, og i min studie kan nok det ha bidratt til at enkelte elever finner det vanskelig å generalisere, og begrunne sine strategier.

5.4. Skjermopptak (Screen Recording) som metode for datainnsamling

Som nevnt tidligere vil jeg diskutere min observasjonsmetode: skjermopptak. En studie som tidligere har benyttet metoden er Barmby et al. (2009). De sier at metoden har vært lite brukt i didaktisk forskning, men kan gi gode data i elevers arbeid på datamaskin (Barmby et al., 2009). Jeg vil nå diskutere hvordan den fungerte som observasjonsmetode i denne studien.

5.4.1. Diskré observasjon

I gjennomføringen av undersøkelsen opplevde jeg at elevene var positive og arbeidet godt med oppgavene, en mening læreren deres også delte. De første minuttene av observasjonen var noen elever opptatt av det faktum at det de sa og gjorde ble tatt opp. Spesielt gruppen til Stine og Kari slet litt med å komme i gang med oppgavejobbingen, fordi de syntes det var litt flaut å skulle snakke da de visste det tatt opp. Derimot virket det som om det ble fort glemt, og at alle elevene jobbet veldig naturlig. Dette likner tidligere studier som har brukt samme observasjonsmetode (Barmby et al., 2009; Tang et al., 2006). Tang et al. (2006) mener det er en fordel at det ikke er noe kamera fysisk tilstede, som er forstyrrende for deltakerne i en studie. Jeg tror det stemmer for min observasjonsøkt også. Med et videokamera som filmer ansikter kunne det muligens også vært færre som hadde samtykket til deltakelse. Det er verdt å nevne at siden jeg var til stede som observatør, var det en annen ting som kunne skapt en unaturlig situasjon for deltakerne. Slik jeg vurderer det hadde ikke elevene noe stort fokus på det, siden de arbeidet bra med oppgavene og spurte både meg og sin faste lærer om hjelp da det trengtes.

5.4.2. Datamaterialet

I denne studien er det lydopptak og transkripsjoner av elevenes utsagn som danner hoveddelen av resultatene som er analysert. Før gjennomføringen av observasjonen hadde jeg en tanke om at jeg skulle anvende mer av datamaterialet som kom frem på skjermen i forhold til det som ble gjort. Jeg forventet at elevene skulle bruke flere av verktøyene (f.eks. *tegneverktøy, penn* og *flytte grafikkfelt*) de hadde tilgjengelig for å løse oppgavene. Mengden materiale fra dataskjermen som jeg kunne bruke i min oppgave ble derimot ikke så stor som jeg forventet på forhånd. Flere faktorer spiller inn i hvorfor det ble slik. En faktor er oppgavenes struktur. Oppgavene er først og fremst formet med bakgrunn i å få frem ulik generalisering og begrunnelse, og oppfordrer ikke nødvendigvis til å benytte de ulike verktøyene som var tilgjengelige. I analyseprosessen så jeg etter hvert at elevenes fremgangsmåte stort sett bestod av å snakke om en oppgave, for så å skrive ned et svar med *tekstverktøyet*. Svaret elevene skrev ned var ofte noe som de hadde snakket om, så det kom også frem fra dialogen. En annen faktor er formålet med studien. Jeg har analysert datamaterialet ut fra et rammeverk om generalisering og begrunnelse, og derfor ikke spesifikt fokusert på bruken av datamaskinen. Det interessante for denne oppgaven har vært innholdet i det som ble gjort i forhold til generalisering og begrunnelse. Hvis formålet med studien for eksempel hadde vært å studere elevers bruk av ulike verktøy i GeoGebra ville datamaterialet fokusert mer på opptakene fra skjermen. Selv om studien ikke viser til så mye av det som foregikk på skjermen som jeg hadde håpet, tyder det også på en fleksibilitet i metoden. Det at man i tillegg får lydopptak som kan gi gode data viser at en slik observasjonsmetode kan benyttes i mange ulike prosjekter.

6.0. Oppsummering og avslutning

Formålet med denne oppgaven har vært å studere elevers tilnærminger til å generalisere og begrunne i arbeid med figurfølger. For å forske på dette har jeg observert 10. klasseelever i deres arbeid med slike oppgaver. I analysen har jeg presentert funn fra observasjonen på hver oppgave elevene gjorde, etter rammeverket hentet fra Lannin (2005). Fra analysen ble det klart at det er krevende å formalisere et uttrykk for å representere en figurfølge når elevene ikke har noe særlig erfaring med generalisering. Allikevel har denne studien vist flere ulike generaliseringsstrategier og nivåer av begrunnelse. I denne siste delen av oppgaven ønsker jeg å diskutere generalisering og figurfølgers rolle, studiens plass i forskningsfeltet og hvilke didaktiske implikasjoner oppgaven gir.

6.1. Generalisering og begrunnelsens rolle

I kapittel to; *teoretisk perspektiv* så vi på hvilken rolle generalisering har spilt og spiller i den norske skolen. Ut fra dagens kompetansemål er algebraiske aktiviteter først og fremst representert i læreplanen gjennom å forenkle og løse likningsuttrykk eller å beskrive funksjoner. Kaput og Blanton (2001) kategoriserer denne formen for algebra som *prosessorientert symbolmanipulasjon*, og sier at dette har vært hovedfokuset for algebraen i skolen. De mener at algebra må sees bredere og spille en større rolle i læreplaner i grunnskolen. Videre oppfordres det til at generaliseringsarbeid bør vektlegges og være underliggende for alt arbeid i matematikkfaget, et syn de deler med Mason (1996). I tillegg sier flere studier at den tradisjonelle tilnærmingen til algebra gjør det vanskeligere for elever å generalisere når de møter mer avansert matematikk (Kieran, 2004; Lannin, 2005). Så hvordan kan man implementere generalisering i større grad enn tidligere i skolen? I denne studien har jeg tatt utgangspunkt i figurfølger siden jeg mente at de kunne gi et godt grunnlag for å generalisere. Gjennom prosessen med oppgaven har dette synet vedvart, og jeg mener figurfølgeaktiviteter er nyttig for å få en bredere forståelse for algebra.

6.1.1. Figurfølgeoppgaver som grunnlag for generalisering

English og Warren (1998) mener at figurfølgeoppgaver oppfordrer elever til å finne en generell regel for å representere følgen. Gjennom denne oppgaven har vi sett at flere av elevene var ute etter et generelt uttrykk. Selv om elevene i denne studien hadde lite eller ingen erfaring med generalisering, hadde flere av dem et tydelig ønske om å finne det generelle i figurfølgen. Enkelte ganger stod dette ønsket til og med i veien for å løse en relativt enkelt deloppgave, og overskygget evnen til å løse oppgaven. På tross av dette sterke ønsket, viste det seg at det ikke alltid var så lett å finne en generell regel. Som tidligere studier har vist kan det at elever har erfaring med å finne spesifikke løsninger gjøre det vanskelig å uttrykke det generelle (Kieran, 2004; Lannin, 2005). Disse studiene mener at det kommer fra den tradisjonelle algebraundervisningen i skolen, hvor hovedfokuset har vært å kunne regler for å forenkle og løse likningsuttrykk. Elevene i min studie har også i hovedsak vært eksponert for slik undervisning i sin skolegang. Matematikklæreren deres bekreftet i forkant av undersøkelsen at de ikke hadde jobbet med figurfølgeoppgaver, og i svært liten, eller ingen grad med generalisering som tema. Relativt likt med Kieran (2004) og Lannin (2005) mener Rivera og Becker (2005) at tidligere erfaringer med algebra som ren symbolmanipulasjon kan føre til at elever har et *numerisk* fokus når de møter generalisering. Dette vil jeg si underbygges til en viss grad i min studie. Spesielt gruppen til Stine og Kari valgte å forholde seg til *numeriske* verdier for å løse alle oppgaver, og slet med å finne og uttrykke det generelle i figurfølgene. De to andre gruppene forsøkte å finne en generell regel, og klarte det ved flere anledninger. Når de ikke evnet å finne en eksplisitt regel ut fra figuren gikk de over til andre strategier for å løse en oppgave. I enkelte tilfeller gjettet de på en generell regel, men som oftest ble en ikke- eksplisitt strategi brukt for å løse den gitte oppgaven. Denne studien har vist at de elevene som forholder seg til figuren evner best å generalisere. Dette viste også studien til Rivera og Becker (2005). Hvis vi ser dette i lys av den tradisjonelle undervisningen som muligens har ført elevene over til en mer *numerisk* tilnærming, vil jeg argumentere for at tidlig undervisning i algebra med fordel bør inneholde mer generalisering, og større bruk av figurmønstre for å fremme det visuelle og generelle som elever er i stand til å uttrykke i ung alder.

6.2. Studiens plass i forskningsfeltet

Denne studien har sett på generalisering og begrunnelse i en norsk kontekst. Den har studert seks elevers strategivalg for å generalisere og hvordan disse elevene begrunner sitt svar. Studien kan kun si noe konkret om disse seks elevene, men bidrar til et større bilde av elevers valg av generaliseringsstrategi og begrunnelse. Studien støtter tidligere internasjonal forskning som har vist at elever i stor grad benytter empirisk argumentasjon, men at de som anvender en *figurativ* generaliseringsstrategi lykkes oftere i å begrunne sine svar og strategier gjennom et *generisk eksempel.*

I liket med andre kvalitative studier vil denne oppgaven være farget av forskeren (Nilssen, 2012). Jeg har etterstrebet objektivitet i hele studien, men vet at mine synspunkt vil tolke data på en annen måte enn en annen. Man kan diskutere om observasjonsmetoden brukt i denne studien er hensiktsmessig. Jeg ønsket at min rolle som observatør skulle være tilbakeholden og diskré, og bestemte meg for ikke å gjennomføre intervju, noe som kunne gitt meg mulighet til å stille flere oppfølgingsspørsmål. Samtidig kan et intervju styre elevenes svar i større grad enn en observasjon. Skjermopptaket var også med på å minske min rolle som deltakende observatør. En annen ting jeg kunne gjort var å ikke være til stede i det hele tatt under observasjonsøkten, og bare betrakte datamaterialet fra Pc-opptaket. Samtidig vurderer jeg den endelige løsningen til å være god, også etter gjennomført studie, siden datamaterialet viste relativt mye ut fra hvor mange deltakere studien inneholdt.

6.3. Didaktiske implikasjoner

Studien har vist at elever finner arbeid med figurfølger vanskelig. Valg av strategier for å generalisere varierte, og flere av elevene slet med å finne en god tilnærming for å si noe generelt om figurfølgene. English og Warren (1998) foreslår å gi elevene erfaringer med å fullføre en følge, og å finne mønstre for å kunne se det generelle. Dette vil gjøre elevene oppmerksomme på relasjoner mellom figurer i følgen, og kan bidra til at de lettere kan generalisere. En slik erfaring vil også få elever til å fokusere på det *figurative* i følgen, noe som virker å bidra til å finne gode generaliseringsstrategier. Fra denne studien kommer det også frem at mange elever bruker en ikke- eksplisitt strategi. Mange elever anvendte en *tellestrategi* for å finne svar på en spesifikk oppgave. Når en slik strategi først ble benyttet var det også vanskelig å bryte ut av den tenkemåten, noe som igjen gjør det krevende å validere svaret sitt. I generaliseringsarbeid bør derfor læreren hjelpe elevene over til en eksplisitt tilnærming (English & Warren, 1998). I arbeid med figurfølger bør det være et mål å få elevene til å finne en eksplisitt formel for følgen, slik at det generelle står i fokus. Med en eksplisitt tilnærming vil det også være lettere å begrunne sitt svar. Som denne studien har vist er det å gi en begrunnelse gjennom et *generisk eksempel* vanskelig. Som vi har sett, ble denne formen for begrunnelse kun benyttet en gang. Det som kjennetegner et *generisk eksempel* er at man må bruke figuren og knytte dens egenskaper til en variabel. For å få elever opp på et slikt begrunnelsesnivå bør man fokusere på den *figurative* generaliseringen, og gi elevene erfaringer med å representere sammenhenger i en figur med algebraiske uttrykk. Man må også forsikre seg om at elevene ser på et *generisk eksempel* som et høyere begrunnelsesnivå en for eksempel *empiriske bevis*. Mange elever tenker at man oppnår validitet når man tester et uttrykk mange nok ganger empirisk (Radford, 1996), men det *generiske eksempelet* er den matematiske gyldige bevisformen. Derfor bør det også være et mål i arbeid med figurfølger å få elevene opp på dette begrunnelsesnivået.

Som vist ovenfor bør elevene ha en viss forkunnskap og erfaring for å generalisere og begrunne figurfølger på en formell måte. Ferdigheter innen enkel algebra er nyttig for å kunne beskrive det generelle i en figurfølge med en variabel, evne til å gjenkjenne mønstre hjelper elever med å se det generelle, og en grunnleggende tallforståelse trengs for å uttrykke sammenhenger (English & Warren, 1998). Praksis i skolen har vært at slike kunnskaper kommer gjennom henholdsvis likningsløsning og funksjonslære, geometri og «de fire regneartene». Mange ser på dette som naturlige startpunkt for senere å kunne utforske en «vanskeligere» matematikk som å uttrykke generelle relasjoner med algebra. Jeg vil derimot argumentere for at slike ferdigheter kan tilegnes gjennom arbeid med figurmønsteroppgaver. Å introdusere algebra gjennom variabler i en kjent kontekst kan være vel så nyttig som å skulle finne en ukjent i et spesifikt tilfelle. Variabler i figurfølger representerer noe konkret (English & Warren, 1998), og det kan ufarliggjøre bokstaver i matematikken for elever som møter det for første gang hvis de kan knytte det til noe kjent. På samme måte kan evnen til å se mønstre også utvikles gjennom figur- og tallfølger, ved å lære elevene å gjenkjenne og bryte opp mønstre. Dette er nyttig også for lære å begrunne en påstand, noe som kan fremme algebraisk resonnering hos elevene. Jeg mener også at tallforståelse kan utvikles gjennom et slikt arbeid siden mange følger kan uttrykkes på ulike måter, som kan få elever til å forstå at en relasjon kan representeres forskjellig. Derfor må ikke arbeid med figurmønstre nødvendigvis starte med å lete etter en eksplisitt regel, men kan brukes for å introdusere nevnte temaer og begreper, for så å bygge videre på den kunnskapen til å kunne uttrykke en generell regel. Med en slik tilnærming vil generalisering fremmes, og symbolmanipulasjon i algebra kan komme som et supplement for å kunne beskrive, generalisere og modellere matematisk vanskeligere kontekster. Et slikt forsøk på å innføre generalisering tidlig i den norske skolen vil være en interessant forskningsstudie.

Avsluttende bemerkninger

Det at elever skal lære å generalisere figurfølger er ikke viktig i seg selv, men prosessen som læres, kan være viktig for mye annen matematikk (Mason, 1996). Som jeg argumenterte for ovenfor er det mange av disse kunnskapene og ferdighetene som kan tilegnes, og øves på gjennom figurfølger. Denne kunnskapen kan hjelpe elevene i mange sentrale områder av matematikken. Det å se det generelle i en matematisk kontekst er viktig i andre temaer. Det å representere det generelle i en formel, og bruke formelen til å svare på ulike problemer er også nyttig. Og det å bruke matematiske egenskaper fra en kontekst for å begrunne hvorfor det man har gjort er rett, det er kunnskap som kan føre til en høyere evne av resonnering. En logisk resonnering som vektlegges i den norske skolen. I læreplanen for matematikk heter det at:

> Matematisk kompetanse innebærer å bruke problemløsning og modellering til å analysere og omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere gyldigheten av løsningen. Dette har også språklige aspekter, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring ideer. (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Fokuset på det å resonnere i matematikk handler om å danne elevene til å bli viktige samfunnsborgere. Derfor er den kritiske tenkingen et fokusområde også i matematikkfaget. Slik resonnering forekommer ved å vise for hva som er gyldig, og hvordan vi kan bestemme det. Det å generalisere og begrunne figurfølger kan også føre med seg algebraiske resonneringsevner som kan overføres til annen matematikk. Temaer som funksjonslære, likninger, geometri og potensregning åpner opp for abstrakt matematikk og krever en forståelse av algebra. Det å effektivt kunne generalisere og argumentere vil muligens forenkle møtet med disse temaene. Dette vil være interessant å forske videre på, i senere studier. Generalisering er en del av all matematikk, og læreren må være klar over dens posisjon. Med det jeg i denne oppgaven har kalt en tradisjonell tilnærming til algebra i skolen blir matematikken fort et «dødt fag» etter Mason (1996). Dette kan være noe av grunnen til at algebra blir sett på som så vanskelig av mange elever i den norske skolen i dag. Jeg er overbevist om at et større fokus på generaliseringsaktiviteter og vektlegging av begrunning og *figurativ* resonnering er hensiktsmessig for elever i den norske skolen.

Litteratur

Balacheff, N. (1988). Aspects Of Proof In Pupils' Practice Of School Mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, Teachers and Children* (s. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. [journal article]. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217-241. doi: 10.1007/s10649-008-9145-1

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Fladberg, K. L. (2016, 29. 11). -Det har gått fra vondt til verre, *Dagsavisen*. Hentet fra http://www.dagsavisen.no/innenriks/det-har-gatt-fra-vondt-til-verre-1.848461

GeoGebra. (2012). *Polygonal numbers*. Hentet fra https://www.geogebra.org/m/utG9aexy

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223. doi: 10.2307/2573808

Hoyles, C., & Healy, L. (1999). Justifying and Proving in School Mathematics: Student Conceptions and School Data, 1996: Colchester, Essex: UK Data Archive.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning. I J. J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Red.), *Algebra In The Early Grades* (s. 5-18). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elemantary Mathematics Experience Part I: Transforming Tasks Structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (B. 1, s. 344-351). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study* (s. 21-33). Dordrecht: Springer Netherlands.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. doi: 10.1207/s15327833mtl0703_3

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Springer Netherlands.

Morrison, K. (1993). *Planning and Accomplishing School-centred Evaluation*. Norfolk: Peter Francis.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforl.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Radford, L. (1996). Some Reflections on Teaching Algebra through Generalization. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 107-111). Dordrecht: Springer Netherlands.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257-277. doi: 10.1007/s13394-013-0087-2

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2005). Teacher to Teacher: Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2002). Curriculum Reform and Approaches to Algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Red.), *Perspectives on School Algebra* (s. 141-153). Dordrecht: Springer Netherlands.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, California: Sage.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations To Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89-112.

Tang, J., Liu, S., Muller, M., Lin, J., & Drews, C. (2006). Unobtrusive but invasive: using screen recording to collect field data on computer-mediated interaction (s. 479-482).

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. (LK 06). Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.doc?lang=nob

Vedlegg A: Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Generalisering i figurtall»- masterprosjekt Jo Esten Grøtting.

Bakgrunn og formål

Dette prosjektet er et arbeid for en masteroppgave i matematikkdidaktikk som skrives for lærerutdanningen ved NTNU. Masteroppgaven har som formål å utvikle gode pedagogiske, digitale matematikkoppgaver innenfor algebra. For å gjøre dette vil jeg teste ut noen selvutviklede oppgaver på elever i 10. klasse, for å kunne vurdere oppgavene som blir gitt.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien betyr at eleven vil jobbe med gitte matematikkoppgaver, og at elevens arbeid blir analysert for å kunne vurdere oppgavene. Oppgavene utføres på Pc og det vil bli tatt opptak av dataskjermen, og lyd rundt datamaskinen med en programvare for dette. Det er viktig å påpeke at det ikke vil bli tatt videoopptak av eleven selv.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Datamaterialet som samles inn vil anonymiseres, da det ikke er nødvendig for denne masteroppgaven å vite noen personopplysninger. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i noen publikasjon. Det vil kun være meg og min veileder for masteroppgaven ved NTNU som har adgang til datamaterialet. Prosjektet skal etter planen avsluttes 15.06.2017. Datamaterialet vil da slettes.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn.
Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Jo Esten Grøtting på telefon 906……, eller på e-post: joesg@stud.ntnu.no.
Veileder for prosjektet: Hermund Torkildsen- NTNU.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

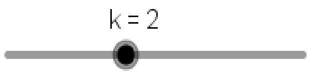
Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til at mitt barn kan delta.

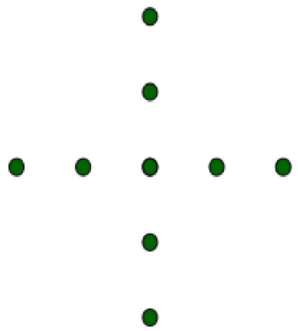
(Signert av prosjektdeltakers foresatt, dato)

Mvh Jo Esten Grøtting

Vedlegg B: «Stjerneoppgave»



Oppgave 1: Hvordan endrer figuren seg når du forandrer verdien på k?

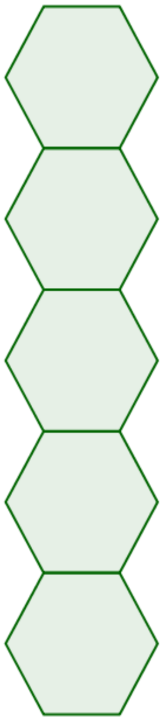


Oppgave 2: Hvor mange prikker vil figuren ha når k=10?

Oppgave 3: Finn en beskrivelse for antall prikker i figuren når k er ukjent.

Vedlegg C: «Bordoppgave

Martin skal ha et middagselskap og vil lage et langbord der han setter sammen sekskantete bord (som vist på figuren). På hver side på et sekskantbordt er det plass til en person.



Oppgave 1: Hvor mange personer er det plass til hvis Martin bruker et sekskantet bord (k=1)?

Oppgave 2: Hvor mange personer er det plass til hvis Martin setter sammen to bord (k=2)?

Oppgave 3: Hvor mange ekstra plasser blir det rundt langbordet når Martin endrer antall sekskantete bord?

Oppgave 4: Hvor mange personer blir det plass til hvis Martin setter sammen 10 sekskantete bord?

Oppgave 5: Hvor mange er det plass til hvis Martin setter sammen 100 bord?

Vedlegg D: «Kvadratoppgave»