Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Fredrik Holager

Strategier ved generalisering av figurmønstre

Masteroppgave i matematikkdidaktikk (5-10)
Veileder: Magdalini Lada
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Fredrik Holager

Strategier ved generalisering av figurmønstre

Strategies in the Generalization of Figurate Patterns

Masteroppgave i matematikkdidaktikk (5-10).

Veileder: Magdalini Lada

Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU)

Institutt for lærerutdanning

NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Fredrik Holager

Strategier ved generalisering av figurmønstre

Strategies in the Generalization of Figurate Patterns

Masteroppgave i matematikkdidaktikk (5-10).

Veileder: Magdalini Lada

Trondheim, mai 2017

norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU)

Institutt for lærerutdanning

NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på mitt studium ved lærerutdanningen i Trondheim. Arbeidet med denne oppgaven har vært lærerikt og spennende, men har også hatt sitt innslag av blod, svette og tårer. Jeg håper det jeg har lært kan komme til nytte i mitt arbeid i skolen.

Jeg takker veilederen min Magdalini Lada for godt samarbeid. Jeg vil også takke alle lærerne jeg har hatt på Rotvoll for et bredt og solid fundament for dette arbeidet og mitt fremtidige virke i skolen.

Trondheim, 18. mai 2017

Fredrik Holager

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for tema

Matematikk i grunnskolen får stadig mye omtale i media (Bergset & Færaas, 2016). I den siste tiden har det vært et ekstra fokus på elevers prestasjoner i matematikk etter at resultatene fra TIMSS ble publisert. I følge Bergem (2016) forteller denne undersøkelsen at norske elever på 8. trinn har hatt en fremgang i matematikk, de befinner seg rett over midten av resultatlista for landene som deltok. Totalt sett har vi gått forbi en del andre land i Europa siden forrige undersøkelse i 2011.Vi scorer høyt i de fleste emner som tall og statistikk, men vi ser at algebra er det emneområdet der vi har lavest prestasjoner. At elever ofte sliter med algebra, finner vi også i litteraturen. Måsøval (2011) sier at elever har alvorlige problemer med å lære symbolspråket til algebra og med å lære algebraisk tenking. Stacey og MacGregor (2001) sier også at flere studier har dokumentert at studenter har vanskeligheter med å lage algebraiske formler ut fra mønstre og tabeller.

Mason (1996) sier at algebra er blitt det viktigste vannskillet i samfunnet når det gjelder matematikk. I følge Bishop (2000) sier Committee on the Mathematical Education of Teachers of Mathematics at den teknologiske utviklingen som har forandret arbeidslivet de siste tiårene, har skapt etterspørsel etter "matematiske krefter", altså evne til å utforske, stille hypoteser og resonnere logisk. Mye av den mer avanserte matematikken krever at man behersker algebraisk notasjon. Også fysikkens lover er uttrykt ved algebraisk notasjon, pluss litt differensial- og integral-notasjon. Dette betyr at algebra er sentralt innen det meste av teknologi, naturvitenskap, statistikk og økonomi, og for eksempel innen data-animasjon. Fordi algebra er så sentralt på mange måter velger jeg å se på algebra i arbeidet mitt med masteroppgaven.

Algebra er et stort fagområde, med mange interessante sider. Jeg liker å undervise i algebra, spesielt liker jeg å undervise i algebra på ungdomsskolen. Derfor ønsket jeg å studere elever på disse årstrinnene, blant annet slik at jeg skal kunne gi elevene en best mulig undervisning i algebra. I læreplanen (Utdanningsdirektoratet, udatert), under avsnittet om tall og algebra, står det at elevene etter 10. årstrinn skal kunne «*bruke tal og variablar i utforsking, eksperimentering og … teoretisk problemløysing*». Under avsnittet om funksjoner finner vi videre at eleven skal kunne «*lage funksjonar som beskriv numeriske samanhengar … tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som tabellar, formlar*». Dessuten skal elevene kunne å «*identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjonar*». Elevene skal altså kunne se sammenhenger mellom ulike representasjoner av lineære og kvadratiske funksjoner og kunne gå fra en representasjon til en annen.

Dette ser vi også i land som USA, Canada og Australia. I følge Stacey & MacGregor (2001) har forskere og pedagoger prøvd å definere hva som karakteriserer algebra, ut over at man bruker algebraisk notasjon. Det er blitt en enighet om at arbeid med generaliseringer er et viktig kjennetegn. Som en konsekvens sier læreplanene for matematikkundervisning i disse landene, at elevene skal lære å kjenne igjen og uttrykke generelle regler for å beskrive mønstre.

Hargreaves, Shorrocks-Taylor, & Threlfall (1998) sier generalisering rundt mønstre er spesielt verdifullt som innledning til å lære algebra. Å arbeide med mønstre øver barna i å se regelmessigheter og relasjoner, og gir dem mot til å generalisere.

Vale & Cabrita (2008) sier at mønstre er et effektivt middel til å få elever til å utforske antagelser eller hypoteser, generalisering og andre viktige ideer som er del av studiet av algebra. Når algebra er et verktøy for å uttrykke generelle egenskaper, så legger man i grunnskolen et grunnlag for algebraisk resonnering når man lar elevene utforske mønstre. Oppgaver med mønstere kan gi elevene mulighet til å observere og sette ord på sine egne generaliseringer og oversette dem til symboler. Mønstre og algebra bør undervises i kombinasjon med bruk av tall.

1.2 Problemstilling og begrepsavklaring

Da jeg startet på lærerstudiet ønsket jeg å lære hvordan man burde undervise de forskjellige temaene, kanskje spesielt med fokus på hvilke misforståelser elever ofte har. Derfor ville jeg i denne masterarbeidet studere i detalj hvordan elever kan forstå og misforstå noen matematiske problemer. Jeg ser at jeg må velge et temmelig snevert emne for at arbeidet ikke skal bli uoverkommelig, men jeg vil også se på noe av det mer avanserte som er praktisk gjennomførbart. Jeg har tilgang til elever i en ungdomsskole og vil velge et av de mest teoretisk utfordrende emnene på dette nivået. Ut fra egne erfaringer som vikar, har jeg inntrykk av at algebra er et av de temaene de fleste har utfordringer med.

En av tekstene fra pensum på masterstudiet var en artikkel av Stacey (1989) som diskuterer lineære figurtall og hvilke metoder elever benytter seg av når de arbeider med dem. Jeg har også sett på doktoravhandlingen til Heidi Strømskag Måsøval (2011) som blant annet ser på lineære figurtall og går videre til kvadratiske figurtall. Hun studerer en gruppe lærerstudenter som arbeider med slike oppgaver. Det meste av litteraturen jeg har funnet ser på hvilke metoder eller strategier elever på grunnskolen benytter i arbeider med generalisering av lineære figurtall. Det kan derfor passe bra om jeg studerer ungdomsskole elever og lar dem jobbe hovedsakelig med generalisering av kvadratiske figurtall.

Når jeg studerer hvilke strategier eller metoder elevene benytter når de arbeider med generalisering av figurtall er jeg også interessert i de strategiene eller metodene som fører til feil svar.

I denne besvarelsen bruker jeg ordene figurmønstre, elementer, komponenter, figurtall og så videre, som definert i avsnitt 2.1.1, Figurmønstre.

1.3 Forskingsspørsmål

I litteraturen finner man mange artikler om elevers generalisering av figur- og numeriske mønstre. De rapporterer til dels meget forskjellige strategier.

Jeg vil ha følgende forskningsspørsmål i denne studien:

1) *Hvilke strategier benytter elevene seg av når de arbeider med generalisering av noen lineære og kvadratiske figurmønstre?*
2) *Hvordan kan en samlet liste av strategier se ut, som skal dekke både elevenes strategier og de jeg finner i litteraturen?*

Jeg ønsker som sagt å ha med figurmønstre med kvadratisk utvikling fordi de fleste artiklene jeg har lest ser på lineære figurmønstre og lineære numeriske mønstre. I denne studien ønsker jeg ikke å se på samarbeidet eller kommunikasjonen mellom to eller flere medlemmer av ei gruppe, velger jeg å la elevene arbeide individuelt.

1.4 Oppgavens oppbygging

I kapittel 2, Teori prøver jeg å definere algebra ut fra et matematisk og et pedagogisk synspunkt. Her bruker jeg flere forfattere, se avsnitt 2.2 Algebra. Videre gjengir jeg kort strategiene som er rapportert i litteraturen. Artiklene jeg har lest har hovedsakelig sett på elevers arbeide med figur- og numeriske mønstre.

I kapittel 3, metode, ser jeg på boka Educational Research (Creswell, 2012). Jeg finner imidlertid at jeg egentlig ikke kan basere meg på noen av metodene han presenterer. I stedet har jeg notert hvordan man har gått fram i arbeidene som er rapportert i litteraturen og setter opp en metode ut fra dem. Videre i kapittel 3 vil jeg fortelle hvordan jeg har gått fram for å samle inn data. Til slutt i kapittelet kommer en kort gjennomgang av etikken for et slikt arbeide.

I kapittel 4, Analyse, følger jeg metoden jeg fant fram til i kapittel 3, Metode, og oppsummerer det elevene har gjort i en liste strategier. Mye av detaljene i analysearbeidet finner man i vedlegg 1 og 2.

I kapittel 5, Drøfting samler jeg først strategiene som er omtalt i litteraturen, til en annen liste med strategier. Deretter sammenligner jeg disse to listene med strategier. Mye av detaljene i drøftingen er lagt til vedlegg 3, Forarbeid drøfting. Resultatet av dette arbeidet er en tredje samlet liste strategier som omfatter og drøfter de fra de to første listene.

Jeg har også med en kort drøfting av hvordan oppgavene jeg ga fungerte når elevene arbeidet med dem.

2 Teori

2.1 Begreper

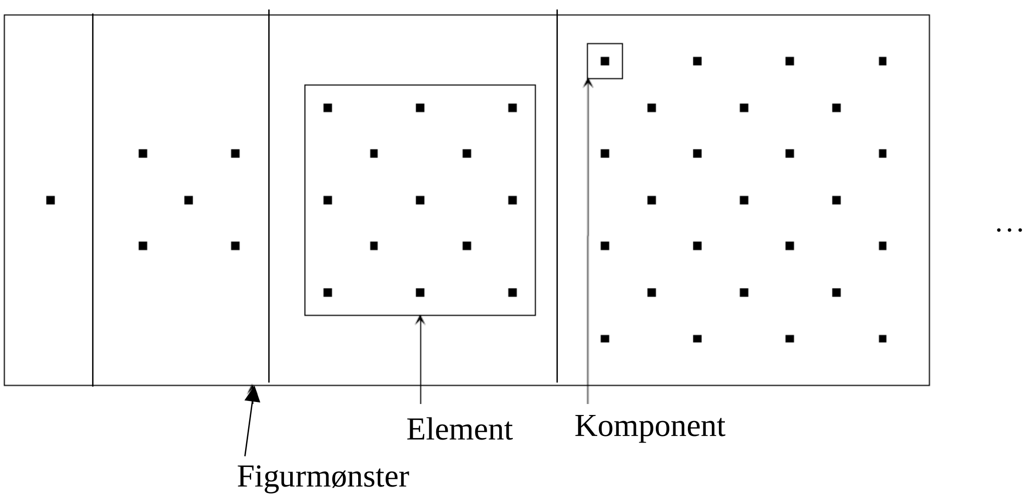
Når man skal forske innen vitenskapelig pedagogikk er det viktig å vite hva ord og begreper betyr. Dette er selvsagt minst like viktig når man skal ta i bruk forskning i undervisningen. Faglitteraturen som er brukt i dette arbeidet gjør det imidlertid ikke alltid klart hva de mener med de forskjellige ordene, og om samme ord kan ha litt forskjellig betydning i forskjellige artikler. Jeg vil derfor se nærmere på en del sentrale begreper.

2.1.1 Figurmøstre

I litteratur og på websteder finner vi betegnelser som *pattern, geometric growing pattern, number pattern, growing and shrinking patterns*. Her må man velge.

Bishop (2000) definerer et numerisk mønster (*number pattern*) som en rekke tall som har en veldefinert regel for å regne ut neste fra de foregående eller fra nummeret i rekka. Hun definerer også et figurmønster (*geometric number pattern*) som en rekke geometriske figurer, hvor figuren bestemmer et tall (antall) og hvor hver figur kan avledes fra de foregående ved en veldefinert regel.

Måsøval (2011) bruker omtrent de samme ordene som Bishop (2000). Hun viser følgende figur (figur 5.1, s. 140):



Her har jeg satt på mine oversettelser av ordene. Her blir altså figurtallene 1, 5, 13, 25. Den eksplisitte formelen for figurmønstret er da $2n^2 - 2n + 1$

Måsøval (2011) bruker også ordene *shape pattern*, *elements* og *components*. Dette blir omtrent det samme som Bishop (2000)

Vale & Cabrita (2008) bruker uttrykket *growth patterns* om det samme.

Jeg velger å følge betegnelsene til Bishop (2000). Jeg vil altså bruke begrepene:
* *Komponent* om en pinne, sidekant, firkant eller hva det nå er man skal telle opp i det følgende.
* Et *element* er en geometrisk figur bygget opp av *komponenter*, og som inngår i et *figurmønster*, eventuelt et *numerisk element*, et tall som inngår i et *numerisk mønster*.
* Et *figurmønster* (*geometric growing pattern* eller *growth pattern* e.l.) er en rekke *elementer* hvor hver figur kan avledes fra de foregående ved en veldefinert regel.
* Et *numerisk mønster* (*number pattern* eller *numeric pattern*) er en rekke *numeriske elementer* dvs. tall, som har en veldefinert regel for å regne ut neste fra det eller de foregående eller fra nummeret i rekka.

2.2 Algebra

Noen av artiklene jeg har gått igjennom diskuterer algebra.

2.2.1 Mason (1996)

Mason (1996) skriver at i skolen er algebra å bruke symboler for å uttrykke og manipulere generelle utsagn som gjelder tall. Generalisering er hjertet i matematikken (altså at ligningen $x + y = y + x$ gjelder uansett hvilke verdier x og y har, og (min merknad:) uansett om disse verdiene gjelder kroner eller Volt eller antall stemmer i et valg.)

Mason (1996) skriver også at algebra er vanligvis det folk tenker på når de tenker på matematisk språk: Rekker av algebraiske symboler. Men disse rekkene av symbolene er ikke selve algebraen. Betydningen av ordet algebra har utviklet seg og blitt bredere. Det har gått fra prosess, altså hvordan regne ut ting, til vitenskapelig objekt. I skolen betyr algebra etter hvert å bruke symboler for å uttrykke og manipulere generelle utsagn som gjelder tall. Her må vi bemerke at alle disipliner er opptatt av finne generelle utsagn. Forskjellene ligger i hva man gjør utsagn om og hvordan man begrunner.

I skolen var det tidligere hovedsakelig lagt vekt på å løse likninger, hvor bokstavene stod for ukjente verdier. I senere år har det blir mer vekt på funksjoner hvor bokstavene representerer en hvilken som helst verdi. Skolealgebra har altså en tendens til å være opptatt av tall og i senere år med funksjoner over tallene. Det finns andre områder hvor generelle symbolske uttrykk kan bli studert og utviklet. Grunnen til å legge vekt på uttrykk av det generelle i figurmønstre er bare for å gi erfaring slik at man får belyst prosessen.

2.2.2 Kieran (2004)

Kieran (2004) lister opp fire tilnærminger til algebra i skolen:
(i) Generalisering av numeriske og geometriske mønstre og lovene som styrer numeriske relasjoner. (ii) Problemløsing. (iii) Funksjoner. (iv) Modellere fysiske og matematiske fenomener.

Et viktig poeng for matematikk i skolen er at det er en aktivitet, noe man gjør. Mer konkret lister de opp tre typer av algebraisk aktivitet i skolen. Genererende aktivitet, transformerende aktivitet og global/metanivå-aktivitet.

1) Genererende aktivitet

Dette betyr å sette opp algebraiske formler. Her lister hun opp tre typiske eksempler. (a) Likninger med ukjente. Eksempel på dette er liknings-oppgavene man kjenner godt fra skolen. (b) Generelle uttrykk som oppstår ved geometriske mønstre og numeriske rekker. Dette er for eksempel figurtallene jeg studerer i denne besvarelsen. (c) Uttrykk for reglene for numeriske egenskaper. Et eksempel er at summen av to påfølgende naturlige tall er et oddetall.

2) Transformerende aktivitet

Dette betyr å skrive om aritmetiske uttrykk og likninger for å gjøre dem enklere i en eller annen forstand. Man har regler for hva man kan gjøre uten at verdiene eller resultatene forandres.

3) Global/metanivå-aktivitet

Her mener man aktivitetene hvor algebra er et verktøy som man i prinsippet kunne klart seg uten. Altså anvendelser av algebra til problemløsing, modellering, studere endringer, generalisering, bevis et cetera.

Videre skriver Kieran (2004) om hva som er de viktige sidene av algebra i skolen. Hun understreker at dette er noe man gjør, flere slags aktiviteter.

I skolen har det vært en tendens til å skille forståelsen av objektene man arbeider med fra dyktighet i å forenkle. Forklaringen av hva symbolene egentlig betød var tidligere temmelig minimalistisk, en side eller to i starten av læreboka i algebra. Men så har Kieran og andre funnet at tilsynelatende tanketom manipulering av formler kan være av betydning for at elevene skal bli så godt kjent med begrepene at de er i stand til å skjønne de generelle sidene ved algebra.

2.2.3 Oppsummering: Hva er algebra?

Fra tidligere vet vi at algebra er et matematisk system hvor det viktigste er at man har
- et sett verdier, altså tall,
- noen operasjoner som tar to slike verdier og produserer en annen verdi fra settet, altså + - * / og så videre,
- hvor man kan skrive bokstaver, altså variabler som står for en hvilken som helst verdi fra settet,
- og man kan skrive ligninger, altså at to tilsynelatende meget forskjellige algebraiske formler gir eller skal gi samme verdi. De er altså enten like for alle mulige verdier av de variable eller vi ønsker å finne verdiene som gjør at de blir like.

Man må lære å bruke dette apparatet på problemer som ikke kommer fra algebraen, det er en av tingene man gjør med figurmønstre. I skolen er det viktig å huske at algebra er aktiviteter, man må bruke algebra på praktiske problemer, man må drille elevene en del i manipulering av uttrykk og ligninger og man må prøve å gi elevene en følelse av hvor generelt dette apparatet er. Et ledd i dette siste er å gi en forståelse av (funksjons)sammenhenger. Det er også noe man kan få fram ved å arbeide med figurmønstre.

2.3 Generalisering

Begrepene *generalisering, induksjon* og *abduksjon* er vanskelige.

Stacey (1989) bruker ordet generalisering om å finne elementer lengre ut i en rekke eller et mønster, gitt at man har noen av de første i rekka.

Mason (1996) skriver i hovedsak om det generelle og hvordan man kan hjelpe elever til å se generelle egenskaper. Han skriver at generalisering er hjerteslagene til matematikken og den kommer fram i mange former. Mason (1996) mener at hvis man ikke er oppmerksom på generaliseringene, så tenker man ikke matematisk. Han understreker altså at begrepet er av største betydning, men uten at han gir en klar og konsis definisjon. Det er trolig meningen at leseren skal se at dette begrepet har mange sider, at det dukker opp i mange forskjellige sammenhenger.

Videre peker han for eksempel på at når læreren viser et eksempel til elevene, er hun oppmerksom på at mange av tallene kunne vært andre uten at noe ville vært vesentlig annerledes. Utregningen er altså mer generell enn det elevene kan få inntrykk av.

Mason (1996) trekker fram teoremet at vinkelsummen i en trekant er 180º. Det viktige her er å få elevene til å forstå at dette ikke gjelder en bestemt trekant, men alle – en hvilken som helst trekant. Og så legger han senere til, at om man måler vinkler nøye, så får man naturligvis ikke nøyaktig 180º. Dette skyldes unøyaktighet i målingen.

Han skriver at alle barn er flinke til å generalisere. Peker du på en stol de aldri har sett før, så ser de det er en stol. (Mitt tillegg: Dette er faktisk ikke så enkelt. Tidligere var en stol noe med sete, ryggstø og 4 bein. I dag består det like gjerne av et sete på en ring med 5 hjul.)

Mason (1996) skriver at generalisering vanligvis krever at man finner mange eksempler på noe, fokuserer på en del av egenskapene til disse og ser bort fra de øvrige slik at man ser et mønster, at alle er like når det gjelder disse egenskapene. Her er det klart at egenskapen som er felles kan være vanskelig å se, det er jo nettopp dette som er utfordringen når man skal løse oppgaver med figurmønster. Man må generere antagelser som man så må kontrollere.

Mason (1996) siterer Harel og Tall (1991) som skiller mellom 3 typer generalisering:
1) Utvidende (expansive) hvor man utvider gyldighet av et eksisterende (kognitivt) skjema med nye tilfeller.

2) Ombyggende (reconstructive) hvor man gjør om og tilpasser et eldre skjema til nye tilfeller.

3) Oppdelende (disjunctive) hvor man ser at nye, beslektede tilfeller må regnes til et nytt skjema, eventuelt et undertilfelle av det eksisterende. Skjema brukes i denne sammenhengen slik som det gjøres i Richard R. Skemp sin artikkel Relational Understanding and Instrumental Understanding (1976).

Hargreaves et al. (1998) forteller at det er lettere for barn å fortsette en rekke enn å forklare regelen for elementene i rekka. Det kan altså være flere nivåer eller trinn i det å generaliseringe figurtall.

Bishop (2000) siterer Dubinsky (1991) som definerer generalisering som en prosess der man bruker et eksisterende skjema (i Piagets mening) på et bredere sett tilfeller. Hun siterer også Dreyfus (1991) som bruker generalisering annerledes, nemlig at man kjenner igjen generelle egenskaper i et sett av mentale objekter, og Mason (1996) som ifølge henne sier at en generalisering er et utsagn som holder for alle medlemmene i et sett. Eksempler på slike generaliseringer er geometriske teoremer og algebraiske identiteter.

Rivera & Becker (2005) bruker både ordet generalisering og ordet induksjon om å finne senere verdier og å finne formel for antall for vilkårlig element.

Radford (2006) beskriver to strategier for å finne antall i et figurmønster. Den ene er gjette, altså prøve og feile. Dette er et eksempel på det han kaller han (naiv) induksjon. Den andre strategien er å studere elementene, legge merke til likheter lokalt – gjerne mellom to naboer – og så generalisere denne til hele mønsteret. Dette betyr at man må sjekke at det man mener er en generell egenskap faktisk er felles for alle, eventuelt finne en annen. Det er denne formen for generalisering Radford mener er viktig å undervise, mye viktigere enn kyndighet i induksjon.

McNab (2006) skriver at generalisering er å trekke ut en abstrakt relasjon fra et sett tilfeller, en relasjon man kan bruke i andre anvendelser. Hun forteller at man tidligere har ment at numeriske representasjoner av matematiske ideer er viktigere enn visuelle/romlige, men at nyere arbeider, også studien hun skriver om, tyder på at barn er avhengige av integrering av numeriske og visuelle/romlige representasjoner for å kunne få en full forståelse av matematiske generaliseringer.

Vale og Cabrita (2008) sier man bruker induktiv resonnering får å få en generalisering i forbindelse med å løse oppgaver med mønstre. For dem er induksjon altså prosessen, generalisering er resultatet.

2.3.1 Oppsummering av generalisering

Vi ser at disse artiklene bruker ordet *generalisere* i minst to betydninger: En generell betydning der man prøver å finne et utsagn som gjelder mange enkelttilfeller, gjerne mange slags tilfeller. Eventuelt kan man innse at et kjent utsagn/egenskap gjelder for flere tilfeller enn man var oppmerksom på. Mason (1996), Bishop (2000) og McNab (2006) bruker *generalisering* i denne generelle betydningen.

Rivera og Becker (2005) og Vale og Cabrita (2008) bruker også ordet *induksjon* i tillegg til *generalisering*. Så vidt jeg forstår bruker de *induksjon* om det å finne senere elementer i rekka eller det å finne en formel for antallet, gitt elementnummer. Radford (2006) bruker ordet *induksjon* i litt nedsettende betydning, om det å finne senere elementer når man ikke helt forstår hva man gjør, mens *generalisering* skal innebære at man gjør det med forståelse.

I følge Burch (2014) er *abduksjon* prosessen med å lage en forklarende hypotese for gitte eksempler og at det omfatter alle operasjoner som inngår når man kommer fram til nye teorier og begreper. Det er et poeng at man skal prøve å finne den enkleste, mest trolige forklaringen. Når man arbeider med oppgaver rundt figurmønstre er det filosofisk sett et meget viktig poeng at man skal velge enkleste, mest trolige forklaring. Hargreaves et al. (1998) gir for eksempel. tallrekka 3 7 10 17 27 i en oppgave og ønsker at elevene skal se at dette er en Fibonacci-rekke som starter med 3 7 (evt. 4 3), altså ikke med 1 1 som er den vanlige. Men det finnes også andre muligheter. Slår man opp på The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (The OEIS Foundation, 2017), finner man at den samme tallrekka også finnes i en kjedebrøk som angår $\sqrt{106}$, altså en korrekt men svært lite nærliggende generalisering – i vår sammenheng.

Forøvrig ser jeg ikke at jeg trenger en nærmere definisjon av *induksjon* eller *abduksjon*: De fleste artiklene bruker *generalisering* i en spesiell betydning tilpasset sammenhengen med figurmønstre, nemlig om å finne elementer lengre ut i rekka enn de som er gitt i oppgaven og om å finne en eksplisitt formel for antall komponenter for et gitt elementnummer. Jeg velger å bruke denne betydningen i dette arbeidet, jeg har ikke bruk for noe mer generelt.

2.4 Strategier

Flere forfattere har skrevet om strategier for å løse oppgaver med figurtall. Ordet strategi brukes her om noe som kanskje kan oppfattes som teknikk eller angrepsmåte.

Jeg har sammenfattet en del artikler om hva som er undersøkt og hvilke strategier de har funnet. I noen tilfeller har jeg også tatt med noe annet som jeg synes er interessant for studiet av figurmønstre.

2.4.1 Stacey (1989)

Stacey (1989) er ofte sitert i litteraturen når man snakker om figurtall. Hun har sett spesielt på hvordan elever i alderen 9 til 13 år arbeider med generalisering av lineære figurtallsoppgaver. Stacey studerte 70 elever fra 7. klasse og 70 fra 8. Elevene fikk se tegninger av to eller tre elementer i rekken. Ga 3 oppgaver, to grafiske figurmønster og ett numerisk mønster; alle vokser lineært. Hun fant fire metoder som elevene brukte. I forklaringen bruker jeg n for elementnummer, $M(n)$ for antallet i det elementet og d for differansen mellom antallet for to elementer etter hverandre i serien.

1) Tellemetoden er den første. Elevene tegnet elementet som det var spørsmål etter og telte opp antall komponenter.

2) Differansemetoden. Elevene la merke til at antallet komponenter økte med samme tall for hvert element bortover. For å finne antallet komponenter i et element langt ute i rekka multipliserte de denne økningen med nummeret til elementet. Eleven antar altså at $M(n) = d * n$. De antok altså at antallet var proporsjonalt med elementnummeret.

3) Hel-objektmetoden. Elevene kjente antallet komponenter i et element som hadde nummer som var en brøkdel av nummeret på elementet det var spørsmål om. De multipliserer så antallet til det lille elementet med nummeret på det store elementet dividert med nummeret på det lille. $M(m * n) = m * M(n)$. De antar altså også her at antallet er proporsjonalt med elementnummeret, men framgangsmåten og tenke-mønsteret til elevene er helt annerledes enn ved differansemetoden.

4) Lineærmetode. Dette er den riktige måten å gjøre det på, man ser at man trenger både multiplikasjon og addisjon for å regne ut antall komponenter fra elementnummeret. Altså $M(n) = a * n + b$, hvor a og b er konstanter.

5) I tillegg til disse fire, beskriver Stacey (1989) en «femte» strategi som kan sees som en kombinasjon av differanse- og hel-objektmetoden. Eleven tar utgangspunkt i et element litt ut i rekka hvor antallet er kjent og i differansen i antall mellom elementer i rekka. Eleven multipliserer differansen i figurnumrene med denne differansen og legger til størrelsen på det mindre elementet. Altså at $M(n) = M(m) + d * (n - m)$. Hvis $M(m)$ er riktig, vil dette gi riktig resultat i motsetning til differanse- og hel-objektmetoden.

2.4.2 Mason (1996)

Mason (1996) fokuserer på generalisering og generaliseringens rolle i algebra. Han har mange eksempler, i en av dem nevner han, uten å begrunne, tre strategier for å generalisere figurmønstre:

1) En av dem går ut på å manipulere elementet slik at det blir lettere å telle opp. Slik jeg forstår det handler det for eksempel om å dele opp figuren i logiske deler slik at det blir lettere å finne antall komponenter i et hvert element. Han diskuterer at forskjellige oppdelinger kan gi forskjellige algebraiske uttrykk, alle ekvivalente naturligvis.

2) Den andre strategien er å finne hvordan man går fra antallet i et element til det neste, altså en rekursjonsformel.

3) Den tredje strategien er uklar. Man kan av og til finne et mønster som gir formelen direkte. Jeg tror at et eksempel er den unge Gauss og trekanttallene: han så at hvis han adderte første og siste tall, andre og nest siste og så videre, så ble oppgaven veldig enkel.

2.4.3 Hargreaves et al. (1998)

Hargreaves et al (1998) har gjort en studie med 315 elever fra flere skoler, formodentlig i England. Man hadde barn fra 3. klasse (7 år gamle) til og med 6. klasse (11 år gamle). Elevene fikk først en kort innføring i numeriske mønstre. De skulle så finne regelen for 9 numeriske mønster, ingen figurmønstre. De ble ikke bedt om å finne verdi for høyere elementnummer. Regelen kunne gis som tekst. 3 av mønstrene viste en lineær utvikling, 3 en kvadratisk og 3 viste Fibonacci-utvikling (altså at neste tall er summen av de to foregående).

Hargreaves et al. (1998) finner 5 strategier:

1) Se på differansene. Dette er den klart mest brukte strategien i undersøkelsen.

Når differansene mellom to følgende elementer alltid er den samme, er man på god vei til å finne en lineær regel. For kvadratiske mønstre kan man allerede nå legge merke til at verdiene øker jevnt, økningen vil i slike oppgaver gjerne være 1, 2 eller 3. Man kan også lett gjenkjenne Fibonacci-mønstre, verdiene av elementene vil selvsagt gjentas i differansene, forskjøvet litt ut i rekka.

n	1		2		3		4		5
Mn	3		5		8		13		21
d		2		3		5		8	

2) Se på differansen mellom differansene. Når differansen mellom differansene er konstant, er regelen selvsagt kvadratisk - og omvendt.

3) Se på egenskaper til elementene. For eksempel at alle er odde, eller avvekslende jamne og odde. Elevene ble spurt om egenskaper ved mønstret, slike svar er selvsagt relevante, de utgjør faktisk en generalisering. Men de førte neppe til svar på det neste spørsmålet.

4) Se etter gangetabell. De yngste barna har antagelig arbeidet med den lille multiplikasjonstabellen. Når alle elementene er jamne, kunne et svar være at alle er i 2-ganger'n, elever trekker fram andre gangerekker også når det ikke passer.

5) Kombinere elementer for å finne andre elementer. Altså som man gjør for å regne ut Fibonacci-rekker. Flere elever har tydeligvis oppdaget at summen av to følgende elementer er lik den neste.

Elevene har fått oppgaver som spenner fra det meget enkle til noe temmelig avansert. Svarene viser også et meget stort spenn, fra elever som nylig har lært 3-ganger'n og ser disse tallene over alt, til elever som gjenkjenner en Fibonacci-rekke.

Oppgavene som Hargreaves et al. (1998) ga gjelder numeriske mønstre, ikke figurmønstre. Imidlertid vil elever ofte regne ut antall komponenter for hvert element før de gjør noe mer. Elevene til Hargreaves et al. (1998) hadde altså ikke mulighet til å resonnere ut fra figurer, noe som kanskje har gitt dem et lite handicap i forhold til andre undersøkelser. De skulle ikke finne verdier for senere elementer, men helst en algebraisk formel. I alle fall burde andre elever kunne bruke de samme strategiene som vi nettopp har listet, på deler av arbeidet med oppgaver med figurmønstre.

2.4.4 Bishop (2000)

Bishop (2000) studerte 12 elever fra 7. klasse (alder 12 - 13), 11 fra 8. klasse (alder 14 - 15). Elevene ble valgt fordi de var flinke til å uttrykke hva de tenkte og fordi læreren deres mente de ikke hadde vondt av å være litt borte fra undervisningen. Oppgavene gikk ut fra 4 lineære figurmønstre, beskrevet med tegning av de 4 første elementene, som kunne gjenskapes med klosser som var vanlige i skolen. Man så på omkretsen av figurene og startet med en gjennomgang av begrepet omkrets. For hvert figurmønster skulle eleven gjøre fire oppgaver:

Første oppgave var å finne omkretsen for en del litt odde nummere i rekka: Bishop (2000) hadde valgt numre som ikke var multipler av hverandre i et forsøk på å unngå strategier som antar proporsjonalitet. Arbeidet ble stoppet så snart eleven hadde vist at hun/han hadde forstått regelen.

Andre oppgave var å uttrykke regelen, helst skriftlig, aller helst som algebraisk uttrykk, slik at en annen elev kunne bruke den på et vilkårlig element-nummer.

Tredje oppgave var å se på 6 forskjellige aritmetiske uttrykk med elementnummer og finne ut hvilke som ga riktig omkrets. Man kan få forskjellige uttrykk ved forskjellige oppdelinger av figuren, for eksempel $n+n+n+2$ og $2+n+(2\times n)$. Begge disse to var riktige, og dermed ekvivalente.

Fjerde oppgave var den inverse av den første, altså eleven ble gitt omkrets og skulle finne elementnummer.

Bishop (2000) fant at elevene brukte følgende strategier i arbeidet med oppgave 1:
1) Modellere (*Model*), noen få elever bygde elementene med klosser og talte sidekanter.
2) Multiplisere (*Multiply 1*), en del multipliserte elementnummeret med et tall, vanligvis den konstante differansen mellom antallene for påfølgende elementer.
3) Proporsjonalitet (*Apply Proportional Reasoning*), de regnet omkretsen av element nr. 12 ved å multiplisere omkretsen av nummer 4 med 3.
4) Hoppe-telle (*Skip Count/Add*), de hadde funnet den konstante differansen, de tok utgangspunkt i en kjent figur og adderte differansen for å finne en og en inntil de kom til det ønskede elementnummeret. Addisjonen ble gjerne gjort ved en slags telling, er differansen 3 kunne de for eksempel telle 7 $_{8\ 9}$ 10 $_{11\ 12}$ 13.
5) Algebraisk uttrykk (*Use an Expression*), de fant en formel for antall for gitt figurnummer og brukte den.
6) Andre svar (*Other*), "vet ikke" og vage angrepsmåter som ikke lot seg kategorisere.

Elevene lærte underveis, arbeidet med senere mønstre gikk greiere enn med det første.

For oppgave 2 fant Bishop følgende strategier:

7) Telle (*Count*), noen elever kunne bare foreslå at man kan finne omkretsen ved å telle opp.
8) Addere (*Add*), noen elever mente man kunne finne omkretsen ved en addisjon. Det ene tallet som skulle inn var vanligvis den konstante differansen.
9) Multiplisere (*Multiply 2*), en del mente elementnummer gange en konstant ga omkretsen.
10) Se mønstret (*Relate to Pattern*), mange hadde funnet det lineære forholdet mellom nummer og omkrets, de skrev et korrekt algebraisk uttrykk.

Artikkelen gir også hyppigheter for de forskjellige strategiene, den fortsetter med strategier for de to siste oppgavene og gir en oversikt over hyppigheter for kombinasjoner av strategier for de foskjellige oppgavene. Alt dette er imidlertid ikke relevant for denne besvarelsen, jeg er interessert i strtategier for å finne verdier for elementer ute i rekka og i strategier som leder til en algebraisk formel.

Bishop (2000) angir at en del av strategiene hun har funnet også er beskrevet av andre:
- Modellere (*Model*) svarer til *Counting Method* hos Stacey (1989)
- Multiplisere (*Multiply 1*) svarer til *Difference Method* hos Stacey (1989)
- Proporsjonalitet (*Apply Proportional Reasoning*) svarer til *Whole Object Method* hos Stacey (1989)
- Seriell addisjon (*Skip Count/Add*) svarer til *Recursive Differencing Strategy* hos Orton & Orton (1994) og til Recursive Strategy hos Swafford & Langrall (2000).
- Algebraisk uttrykk (*Use an Expression*) svarer til *Linear Method* hos Stacey (1989) og til *Functional Strategy* hos Swafford og Langrall (2000).

Bishop (2000) bemerker også at Orton og Orton (1996) fant at elever i alder 10 – 13 år hadde problemer med å løse tilsvarende oppgaver men med kvadratiske figurmønster.

2.4.5 Rivera og Becker (2005)

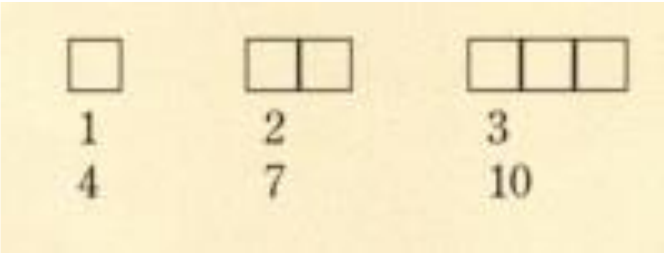
Rivera og Becker (2005) Til innledning forteller de at mer enn 30 000 elever i 8. klasse fra nordre California var blitt testet på figurmønsteroppgaver. 3/4 av elevene kunne finne verdier for elementer lengre ute i rekka, mindre enn 1/5 kunne generalisere til en riktig formel for verdiene.

Rivera & Becker (2005) har lagt merke til at elevene de studerer faller i to grupper. Noen vil helst bruke tallrekker når de skal resonnere rundt rekker av tall eller figurer som utvikler seg etter en veldefinert regel, andre vil helst resonnere ut fra figurene, elementene i rekka. Gruppa som helst arbeider med tall gjør om rekken med elementer til en tabell med elementnummer og antall komponenter og arbeider videre med den.

De sier det er kjent at barn og unge har et sterkt intuitivt grep på matematiske ideer og begreper når de presenteres visuelt. De mener det kan være fordelaktig å utnytte denne evnen i undervisningen av algebra, slik at elevene kan oppleve at de kan lykkes, før man går inn i de mer formelle og abstrakte sidene av algebraen.

n

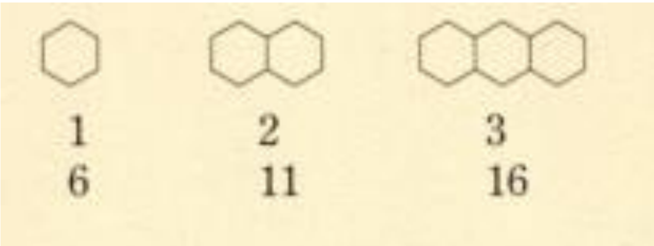
$M(n)$



Oppgave 1 hos Rivera & Becker (2005)

n

$M(n)$



Oppgave 2 hos Rivera & Becker (2005)

I det følgende bruker jeg min oversettelse av terminologien fra artikkelen.

1) Rekursiv induksjon. Elevene har sett at det er en konstant differanse mellom antallene i rekka og gir egentlig som svar $M(n) = M(n-1) + d$, selv om de ikke klarer å skrive ned dette i riktig notasjon.

2) Induksjon med feil start. Også her ser elevene at det er en konstant differanse mellom antallene i rekka og ser at de må multiplisere differansen med elementnummeret. Men de ser ikke helt hvordan rekka starter, antar muligens at første element har nummer 0, og får da formelen $M(n) = M(1) + d * n$.

3) Endelige differanser. Elevene lagde tabell med elementnummer og antall komponenter. Igjen ser elevene at det er en konstant differanse mellom antallene i rekka. Skrev ned $d * n$ og bemerket så at antallene i tabellen manglet en konstant b som var det samme for alle. De kom da fram til riktig svar. Rivera og Becker (2005) er opptatt av at disse elevene ikke kunne peke på noe i figuren som svarte til verdiene for d eller b.

4) Prøve og feile. Dette blir ofte anbefalt som en god metode for å løse oppgaver men kan lede folk ut i gale konklusjoner selv om man har endt opp med riktig svar. Elevene gjettet på en lineær formel, altså $M(n) = a * n + b$. Differansen fikk de impulsivt fra et av elementene, det ble gjerne en for høy verdi. De prøvde så for en eller flere av elementene, justerte a og b etter behov og kom til slutt fram til verdier som passet for alle verdiene. Dette gav ofte riktig resultat, men Rivera og Becker (2005) peker på at det i en del tilfeller resulterte i formler som kunne / burde vært forenklet.

Artiklen (Rivera og Becker, 2005) sier lite konkret om strategier brukt av ungdommer med en mer visuell orientering, ut over at ungdommene så på hvordan ett element ble bygget ut fra det foregående.

Til avslutning gir Rivera & Becker (2005) en del råd om hvordan man bør undervise generalisering av lineære mønstre. Her fletter de inn observasjoner fra en annerledes oppgave, der elever skal resonnere rundt antall hvite fliser som er lagt hele veien rundt et likearmet kors av sorte fliser - som vokser. Oppgaven er interessant, spesielt om man går ned til element nr. 0 med én sort flis, men dette siste skriver de ikke om.

2.4.6 Becker & Rivera (2006)

De starter de med å si at selv om 72% av elevene i 8. klasse i Bay Area (San Francisco) kan finne antallet for elementer utover i et figur- eller numerisk mønster, så kan bare 18% skrive en algebraisk formel for antallet. Altså, elevene ser ut til å være dyktige til å regne på disse mønstrene, men de færreste greier den mer grunnleggende generaliseringsoppgaven. Dette er foruroligende, mener forfatterne.

Spørsmålet for arbeidet er, hvordan tenker elever i 6. klasse når de skal fortsette en figur - eller numerisk rekke, gitt noen få elementer i starten? Kan de begrunne sine generaliseringer, se flere representasjoner av reglene sine, kan de håndtere den inverse operasjonen? Becker & Rivera tar utgangspunkt i tidligere arbeider (bl. a. Rivera & Becker 2005) som fant at folk gjerne har en av to måter å tenke på: Visuelt (*figural*) og numerisk.

I en tidlig del av undersøkelsen fikk elevene flere oppgaver, bl. a. av følgende type: Man ga elevene oppgaveark med et enkelt, lineært figurmønster beskrevet ved de 4 første elementene. De skulle finne antall komponenter for element 10 og 100. De skulle videre skrive en oppskrift som en klassekamerat kunne bruke til å finne antallet for et hvilket som helst element. Til slutt skulle de skrive en algebraisk formel for antallet for gitt elementnummer *n*.

Etter en tid med undervisning i matematikk som til dels var relevant for generalisering i algebra, fikk de et senere sett oppgaver av lignende slag. Spørsmålene var nå noe mer krevende: Finn antall for elementene 10 og 100. Finn en formel for antall gitt elementnummer n, forklar hvordan du fant denne. Kan du finne en formel på en annen måte? Gitt en formel, spørsmålet er om denne er korrekt - begrunn svaret. Man var i denne delen av studien spesielt interessert i evne til *vertical mathematization*, som så vidt jeg forstår betyr å bygge mentale rutiner eller skjema for å løse en viss type problemer av samme matematiske natur.
I første del av studien beskriver Becker & Rivera følgende strategier:

1) <u>rekurrens</u> (Seeing Patterns Additively)
Elevene så at det var samme differanse mellom to etter hverandre og sa for eksempel *legger til 2 hver gang*.

2) <u>opplisting</u> (Near Generalization Through Listing and Visualizing)
For å finne nære verdier (nr. 10) tegnet man, eller listet opp verdiene fra $n=4$ og oppover.

3) <u>proporsjonalitet</u> (Far Generalization Through Direct Proportion)
Enkelte delte opp figuren og resonnerte at det var 100 komponenter horisontalt og 99 vertikalt - altså korrekt. Særlig blant de numerisk orienterte var det en tendens til å overforenkle, når man hadde 19 elementer for $n=10$ regnet de 190 for $n=100$ - altså feil.

4) <u>utvide</u> (Difference to Product)
Man kjenner antallet for element *m* og differansen *d*, da blir $M_n=M_m+d\times(n-m)$. Becker & Rivera siterer en elev som glemmer å legge til M_m, men denne feilen skal vel ikke regnes som del av metoden.

I senere del av studien beskriver de bare en metode:
5) <u>tabell</u> (Numerical Method)

Eleven setter opp en tabell med kolonne for n og for antallet elementer - eller en mer uformell opplisting av antallene. De ser at differansen er konstant lik d, setter opp en formel med $d \times n$ og et tillegg som de finner ved å se hva som må til for å få riktige verdier.

Becker & Rivera gir ikke beskrivelse av metoder som er klart visuelt orientert. De fortsetter artiklen med resultater for oppgavene som gikk på alternative formler og spørsmålet om en gitt formel var ekvivalent den de hadde funnet. Dette er imidlertid ikke interessant for mitt arbeide.

2.4.7 Radford (2006)

Fokus for artikkelen er algebraisk tenking og hvordan elevene kommuniserer når de arbeider med generalisering av figurtall. Selv om fokuset i artikkelen er på noe annet, nevner Radford at strategiene faller i to hovedkategorier:

1) Den første kan vi kalle prøve og feile. Her antar elevene at sammenhengen er lineær og gjetter på de to konstantene (altså a og b i $f(n) = a * n + b$), så sjekker de om formelen gir riktig svar i noen få tilfeller. Når de har en formel som gir riktig svar er de fornøyde. Hvis ikke prøver de med nye verdier for konstantene.

2) Den andre kategorien kan vi kalle fellestrekk. Her har elevene funnet noe som utvikler seg på en enkel måte fra et element til neste. Dette noe kan gjerne være en del i en oppdeling av figuren.

2.4.8 Beatty & Moss (2006)

De har drevet en serie forskingsprosjekter hvor hver består av en før-test på et emne, undervisning som blant annet tar for seg dette emnet og så en ettertest, muligens også en senere test, etter noen måneder, for å finne ut om man fremdeles husker det som ble lært. De la merke til at noen elever stort sett bare resonnerte ut fra tallrekker, altså numerisk, mens andre brukte flere representasjoner - visuell, fortellende, grafisk og numerisk.

I denne studien er Beatty & Moss (2006) spesielt interessert i å se på forskjellene i arbeidsmåter mellom disse to typene elever. De så på elever i 4. klasse i California over en 3-måneders periode og gjorde en senere-test mens de gikk i 5. klasse. De så på hvor mye elevene kunne (poeng i en test) før undervisningsdelen og hvor mye de kunne etterpå. Dessuten undersøkte de hvor mye elevene kunne syv måneder senere (*retention test*) da de gikk i 5. klasse.

Undervisningsdelen strakte seg over en 3-måneders periode. Den startet med et spill de antyder ved Gjett Regelen Min (*Guess My Rule*). Senere skulle elevene bygge figurmønstre med klosser, de ble gitt kort med tall de skulle bruke som elementnummer. Man oppfordret elevene til å tenke mindre på hva neste element vil være, og mer på hva reglen er for dette mønsteret. De fikk så tekstoppgaver som var ment å gjøre dem vant med koeffisient og tillegg i en lineær formel (verdi er elementnummer $*$ koeffisient addert med tillegget). I 5. klasse lærte de også om grafer (y- og x-akse). De så på stigning, skjæringspunkt med aksen, hvordan man lagde graf av et mønster, at man kunne lage mønstre som passet med en gitt graf. De arbeidet med bruk av grafer på praktiske oppgaver.

De gjorde detaljerte intervjuer med to elever, en typisk for de med numerisk tenkemåte, en for de med flerfoldige. Her finner vi resultatene som er mest interessante for meg, strategier som elevene brukte:

1) tabell (*Guess and Check*)
Elevene fikk en samling verdier med tilhørende n, ikke ordnet etter stigende n. dataene viste en lineær sammenheng. Den numerisk orienterte eleven satte opp en tabell med kolonne for *n* og verdi, og satte dataene inn med stigende n. Deretter gjettet hun seg fram til riktig formel. Hun greidde imidlertid ikke å svare på hva verdien var i starten ($n = 0$) eller hva økningen var for hvert skritt i n.

Hun gjorde stort sett det samme med de to andre oppgavene, hvor hun ble gitt lineære figurmønstre. Her var det lett å regne ut differansene og eleven brukte disse til å sette opp formel istedet for gjetting. Hun rotet med det konstante tillegget i den siste oppgaven. Her er Beatty & Moss litt vanskelige å forstå. De sier at hun burde ha brukt en *second differencing strategy*. Det enkleste er vel å se hva tillegget må være ved å sette inn for *n=1*.

2) plott av komponentverdi mot elementnummer
Beatty & Moss forteller at den flerfoldige eleven også fant riktig løsning for den første oppgaven, den med uordnede par $(n, verdi)$. Han har sett det ut fra en graf hvor man har plottet verdi oppover og *n* bortover. Det antydes også at den numerisk orienterte eleven fikk utlevert en slik grafikk. Det bemerkes også at dette ble gjort da elevene var kommet opp i 5. klasse. (Opplysningene om plott/graf er spredt på flere steder i artiklen, jeg håper jeg ikke har misforstått.)

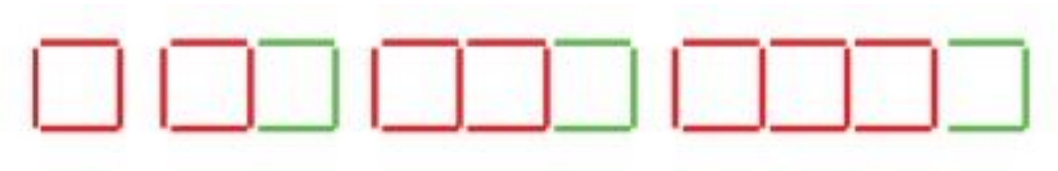
3) oppdeling i figur

Den flerfoldige eleven pekte på figurene i de to siste oppgavene for å vise økningen for hvert skritt i rekka og så at for $n = 1$ hadde man 1, henholdsvis 2 komponenter i tillegg til økningen, altså den fasongen som var økningen i de følgende elementene, det som ville ha vært økning om man hadde hatt en figur for $n = 0$.

Beatty & Moss (2006) understreker også at den flerfoldige eleven kunne forklare egenskaper ved generaliseringen sin mye bedre enn den numerisk orienterte. De flerfoldige elevene husket også godt hvordan man arbeidet med figurmønstre etter 7 måneder, mens de numerisk orienterte hadde glemt omtrent alt.

2.4.9 Vale & Cabrita (2008)

De viser at man kan få forskjellige former på uttrykket for antall elementer ved å dele opp elementene på forskjellige måter. For eksempel vil:



1 2 3 4

kunne gi $N(n) = 1 + n * 3$

mens en annen oppdeling:

1 2 3 4

heller gir $N(n) = 4 + (n - 1) * 3$

De forsket på en del 4. års lærerstudenter og nyutdannede lærere, utdannet for klassene 1 - 6.

De skiller mellom 3 slags oppgaver med mønstre, ikke alle bruker figurmønstre:

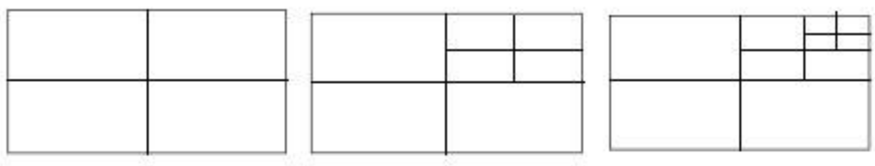
- Opptellingsoppgaver, For eksempel:

Gitt en figur med 'blomster' pent ordnet i grupper og linjer

Oppgaven er å finne flest mulige, forskjellige grupperinger av disse, som gjør det greit å telle blomstene.

- Sekvensoppgaver

Her gir man et figurmønster, for eksempel:



(nr.1) firkant delt i 4, (nr.2) som forrige men med øvre høyre fjerdedel delt i 4, (nr.3), som forrige men med øvre høyre 1/16-del delt i 4.

Oppgaven er å:

- tegne neste element (figur),

- finne antall områder (firkanter av en eller annen størrelse) i hvert element og

- finne antall områder i element nr. 100.

- Problemoppgaver

Et eksempel:

Osvald har malt en kube. Så sager han den opp i flere kuber, alle like store, altså 8 eller 27 eller 64 eller … små kuber. Hvor mange av sidene i de små kubene er malt? (Aha-opplevelsen ligger i å innse at man ikke skal finne hvor mange av de små kubene som har en eller flere sider med maling, men at hver av de opprinnelige 6 sidene i den store kuben deles opp på en enkel måte.)

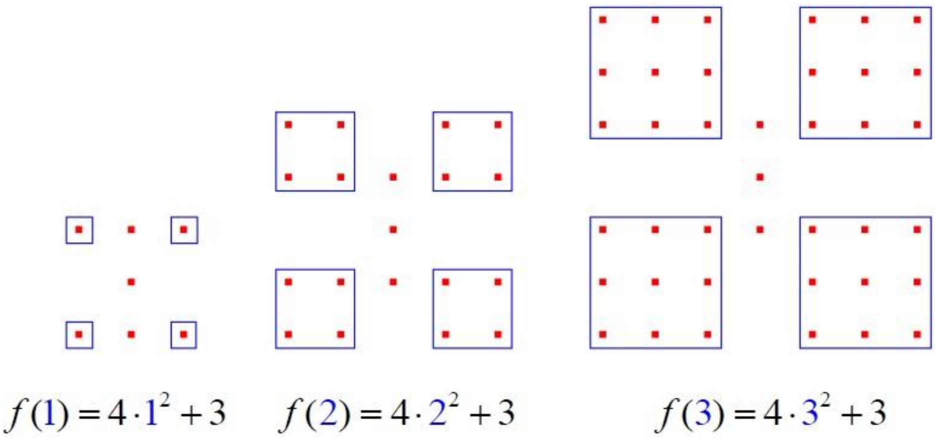
Denne artikkelen (Vale & Cabrita, 2008) inneholder ikke så mye som er direkte relevant for min leting etter strategier, ut over diskusjonen av alternative oppdelinger som man også finner andre steder. Men de viser figurmønstre og oppgaver som jeg ikke har sett før. Den siste oppgaven gir et eksempel på en annen type generalisering enn den vi studerer i denne besvarelsen.

2.4.10 Strømskag (2015)

Hun beskriver en strategi for generalisering av figurmønstre hvor hun har fokus på sammenhengen mellom bildet man ser, den aritmetiske og den algebraiske representasjonen.

Hun skriver ikke at hun har sett strategien hos noen elev, men dette er en måte å gjøre denne typen generalisering på. Dette er en fremgangsmåte som hun muligens har tenkt at matematikklærere kan bruke i skolen.

1) Man skal først se en oppdeling av hvert element slik at man kan gjøre den samme oppdelingen for alle elementene. Så skal man uttrykke antall komponenter i hver del av et element som en funksjon av elementnummeret. Først setter man opp et aritmetisk regneuttrykk for hvert element. Så kan man markere tallet som er elementnummeret i hvert av uttrykkene. Til slutt bytter man ut elementnummeret i uttrykkene med en variabel.



(Figur 4 hos Strømskag, 2015)

Her ser vi at formelen må være $f(n) = 4n^2 + 3$.

Hun viser på en veldig pedagogisk måte hvordan tallene i mange regneuttrykk kan generaliseres til variable i en enkelt algebraisk formel. På den andre siden er det et paradoks at om man underviser denne strategien, da lærer elevene en fremgangsmåte som bringer dem til resultatet uten strev. Noe av poenget er vel å la elevene kjenne på vanskeligheten i å generalisere, å gi dem en erfaring i å oppdage en sammenheng.

3 Metode

Dette kapittelet omhandler de ulike valgene jeg har tatt og hvorfor jeg har tatt dem. Jeg vil også beskrive hvilke metoder jeg har brukt i forbindelse med innsamling og analyse av mine data. Videre vil jeg beskrive mitt forskningsprosjekt. Jeg vil også si noe om utvalget jeg har gjort til min forskning, samt noe om selve gjennomføringen av forskningen. Til slutt i dette kapittelet vil jeg ta for meg de etiske sidene av forskningen og utvalget.

3.1 Metodeteori

3.1.1 Creswell (2012)

Denne oppgaven har som sagt, til hensikt å analysere hvordan en gruppe elever på 9. trinn arbeider med kvadratiske figurtall. For å finne ut hvordan jeg kunne forske på dette valgte jeg å gå gjennom boka Educational Research (Creswell, 2012).

Han (Creswell, 2012) skriver at boka prøver å gi en balansert, inkluderende og integrert oversikt over metodene for pedagogisk forsking. Inkluderende må vel bety at forfatteren (og forlag, assistenter, konsulenter osv.) mener at dette er en noenlunde fullstendig oversikt over metodene som kan benyttes.

Først diskuterer han hvordan man kan finne fram til et interessant problemområde for forsking, skaffe seg oversikt over relevant litteratur, bestemme et formål for arbeidet, forskings spørsmål og evt. hypoteser man vil prøve. Deretter ser han på hvordan man samler inn data i kvantitative undersøkelser og hvordan man analyserer og tolker disse dataene. De neste kapitlene ser på kvalitative metoder, hvordan man samler inn data, analyserer og tolker disse.

Boka beskriver blant annet 3 typer kvalitativ forsking:

1) Grounded theory studie. Her er hovedpoenget at man intervjuer en del subjekter fra gruppen man er interessert i, om emnet man er interessert i. Intervjueren skal ikke styre samtalen strengt, subjektet skal få uttrykke det vedkommende vil. Man skriver ned det som ble sagt (transkriberer) og prøver å finne meninger eller andre trekk i dette som man finner igjen hos flere. Dette vil så være et slags førsteutkast til en kategori i en teori for det som subjektene gjør eller mener.

2) Etnografisk studie. Her ser man på en gruppe som deler en egen kultur. Man beskriver oppførselsmønstre, tro, språk og annet som er felles for gruppen. Man samler informasjon på mange måter.

3) Fortellingsstudie. Man samler informasjon og skriver historien til enkeltpersoner.

Cresswell beskriver til slutt to typer som gjerne omfatter både kvantitative og kvalitative studier.

1) Blandede metoder. Man samler inn og analyserer både kvantitative og kvalitative data.

2) Aksjonsforsking. Man prøver å løse praktiske problemer ved å samle kvantitative og kvalitative data fra en praktisk situasjon, for eksempel undervisning. Man gjør endringer i situasjonen og ser på endringene i dataene.

Den av disse typene som ser ut til å dekke den forskingen jeg gjør best, er Grounded theory. Cresswell beskriver 3 undertyper av denne:

1) Systematisk grounded theory. Her har man et formalisert system for å analysere det som ble sagt i intervjuene. Disse tar sikte på å finne årsaker og konsekvenser.

2) Emerging grounded theory. I analysen skal man finne kategorier som går igjen flere steder i intervjumaterialet og jobbe igjennom dette flere ganger for at kategoriene skal bli så gode som mulige, altså at de til sammen dekker det som er viktig. Samlingen kategorier må stemme med virkeligheten slik subjektene ser det, slik forskerne ser det og slik andre fagfolk ser problemområdet. Man må alltid være beredt til å endre på kategoriene når man får nye data eller ny innsikt.

3) Konstruktivistisk grounded theory. Dette er delvis det samme som den foregående, men man legger mer vekt på holdninger, tro, følelser, antagelser og ideologier. Man aksepterer også at forskeren går inn i arbeidet med en del verdier, erfaringer og prioriteter.

Jeg mener emerging grounded theory ligger nærmest opp til det jeg ønsker å gjøre i arbeidet mitt. Imidlertid har jo artikkelen til Stacey (1989) vært et viktig utgangspunkt. Det betyr nok at jeg vil være litt forutinntatt når jeg starter analysearbeidet, jeg regner jo med å finne en eller flere av Staceys strategier. Faktisk vil alt jeg vet om løsing av oppgaver om figurmønstre kunne sies å styre hvilke kategorier jeg er i stand til å finne. Det betyr vel dessverre at jeg ikke kan benytte meg av emerging grounded theory.

Konstruktivistisk grounded theory aksepterer at forskeren er noe forutinntatt, men jeg er ikke interessert i tro, følelser og lignende, så denne metoden ser heller ikke ut til å være brukbar. Det jeg da gjør for å finne en egnet metode er å følge det andre har gjort når de forsker på figur - og numeriske mønstre.

3.1.2 Metoder i artikler

Her følger en sammenfatning av metodene som er brukt i en del av litteraturen jeg har sett på.

3.1.2.1 Stacey (1989)

Hun beskriver oppgavene som ble gitt, men ikke mye mer om situasjonen til elevene som ble studert. Metoden som ble brukt for å samle inn data er ikke klart beskrevet. Men hun nevner at de fleste elevene fulgte en oppfordring om å gi nøye forklaringer på hva de hadde gjort. Hun siterer ofte hva elever har ment i forskjellige situasjoner. Hun har tydeligvis detaljerte opplysninger fra hver enkelt elev. Det er imidlertid ikke klart om hun har transkripsjon av muntlige svar eller om alt er tatt fra notater elevene har gjort. Det ser ikke ut til at elever har fått noe slags tilbakemeldinger underveis, gale resultater diskuteres. Det er ikke noe som tyder på gruppearbeid.

3.1.2.2 Hargreaves et al. (1998)

Elevene fikk først en kort orientering i bl.a. hvordan de skulle føre svar i skjemaer som ble delt ut. For å få fram hvordan de hadde tenkt, inneholdt svarskjemaene 3 spørsmål:

* Fortell meg om dette tallmønsteret.

* Hva er reglen for dette tallmønsteret

* Fortell hvordan du tenkte rundt tallene for å finne reglen.

Arbeidet ble registrert i form av disse skjemaene, ett for hver elev og hvert mønster de skulle arbeide med. Man har så gruppert svarene etter en uformell forståelse av hva elevene har tenkt, det ser ikke ut til at Hargreaves et al. (1998) har brukt noe formelt opplegg for koding av det som elevene har skrevet. Forfatterne forteller også at man har gjort en beslektet studie der 60 barn ble intervjuet mens de arbeidet med numeriske mønstre, og at resultatene lignet mye på det man rapporterer i denne artiklen, metoden med svarskjemaer har trolig ikke påvirket resultatene vesentlig.

3.1.2.3 Bishop (2000)

Elevene ble intervjuet enkeltvis. Intervjueren ga elevene god tid, og oppfordret dem til å tenke godt etter om de virket usikre. Når tenkemåten ikke var tydelig spurte intervjueren om forklaring. Elevene ble spesielt spurt om de kunne finne flere generaliseringer og representasjoner. Intervjuene ble videofilmet, transkribert og kodet. Bishop bygde så en oversikt over strategiene brukt av hver elev. Hun brukte *axial coding* som beskrevet av Strauss & Corbin (1990) for finne sammenhenger mellom kategorier. Til slutt undersøkte hun hvilke strategier hver elev hadde brukt på de forskjellige oppgavene.

3.1.2.4 Rivera & Becker (2005)

De intervjuet 42 ungdommer og transkriberte det de sa, trolig ved hjelp av videoopptak. Intervjueren har i noen tilfeller stilt spørsmål for å klargjøre detaljert hva ungdommen har forstått. I tillegg samlet man inn kladdearkene ungdommene brukte. Rivera & Becker sier ikke noe om formell koding eller klassifisering, jeg må anta de har klassifisert etter sin uformelle forståelse av hvordan ungdommene tenkte.

3.1.2.5 Becker & Rivera (2006)

konsentrerte seg nokså tidlig om 12 av 29 elever i 6. klasse (11 år gamle) fra nordre California. Elevene ble intervjuet (dette ser ut til å bety enkeltvis) i starten av skoleåret. Der fikk de arbeide med enkle figurmønstre. Hele klassen fikk så undervisning som var relevant for generalisering av slike mønstre. Undervisningen ble forberedt i samarbeid med en av forfatterne. Ved slutten av halvåret ble 11 av de 12 intervjuet igjen, de ble gitt oppgaver tilsvarende de som ble gitt ved starten av studien.

Man videotapet alle intervjuer, før og etter, og all relevant undervisning med hele klassen. Man samlet også inn notatene elevene gjorde i disse situasjonene. Becker & Rivera nevner ikke noe om koding eller annen formalisert analyse av materialet.

3.1.2.6 Beatty & Moss (2006)

I strategidelen har jeg beskrevet at elevene var med på en før-test, relevant undervisning, etter-test og en senere-test. Ved hjelp av variansanalyse (*ANOVA*) delte man elevene i 6 grupper, høy middels og lave prestasjoner i matematikk og samtidig i 2 grupper, numerisk og flerfoldig tenkemåte. Ingen elever gikk fra en gruppe til en annen i løpet av denne studien, alle fikk vesentlig høyere test-skår etter undervisningsdelen. Dette tyder på at undervisningsdelen fungerte godt for alle gruppene.

Beatty & Moss valgte ut en numerisk og en flerfoldig elev. Disse var flinke og interesserte, men ellers typisk for gruppa. Disse (bl.a.) ble intervjuet, dette ble video-tapet, transkribert og kodet. I artiklen gjengir de deler av det elevene har sagt og hva de har pekt på i figurene. De sier imidlertid ikke noe om kodingen.

3.1.2.7 Vale & Cabrita (2008)

De skriver at de bruker en kvalitativ, utforskende metodikk. Dataene ble samlet inn på litt uformelt vis (de skriver holistisk, beskrivende og tolkende) gjennom observasjoner, spørreskjemaer, notater og besvarelser fra studentene. Artiklen gjengir for eksempel et par kladdeark fra studentene. Det er ingen direkte sitater fra intervjuer, de nevner ikke koding eller andre formelle metoder.

Alle artiklene som er gjennomgått i dette underkapitler refererer Stacey (1989) unntagen Rivera & Becker (2005) og Becker & Rivera (2006). (Beatty & Moss (2006) refererer til Stacey men har glemt å ta den med i referanse-lista til slutt). Dette betyr at de som gjorde disse arbeidene kjente en liste klassifikasjoner da de tolket sine egne data, altså at de ikke benyttet noen skikkelig emerging grounded theory metode.

3.2 Forskingsdesign

For å oppsummere det foregående: Jeg vil da gjøre som de fleste av disse ser ut til å ha gjort: Jeg vil ta videoopptak av intervju med subjektene. Intervjueren (jeg) skal passe på at subjektet holder seg til oppgavene som er gitt, men ellers holde seg mest i bakgrunnen. Jeg vil også samle inn notatene subjektene har gjort. Deretter må jeg transkribere det som ble sagt i intervjuene. Jeg må finne mine tolkinger av hvordan subjektene har tenkt, i tillegg tror jeg det er fornuftig å legge en koding på denne tolkningen, en koding som beskrevet blant annet i Cresswell (2012). Så må jeg prøve å bestemme strategier som er brukt i mitt datamateriale og sammenligne det med de jeg fant i litteraturen.

For å finne ut hvilke strategier elever benytter seg av når de arbeider med figurtall, valgte jeg å intervjue en og en elev. Dette var fordi jeg ville begrense oppgaven til kun å se på hver enkelt elev sine strategier. Jeg var ikke interessert i å se på hvordan elevenes strategier ble påvirket av de andre elevenes innspill.

Jeg gav dem oppgaver på generalisering av figurmønstre. Rollen min under intervjuet var for det meste å være passiv observatør. Jeg tok noen få feltnotater. I noen tilfeller var jeg imidlertid mer aktiv. Når eleven hadde kommet resultat, sa jeg i fra om det var riktig eller galt. Hvis det var galt prøvde jeg å få eleven til å gjøre et nytt forsøk – altså for å gi meg mere data. Hvis elevene forstod oppgavene veldig godt lot jeg være å be dem regne for et høyere elementnummer. Hvis de brukte en arbeidskrevende metode ba jeg dem regne for et eller flere høyere elementnummer, for å se om elevene kunne generalisere bedre. Jeg ba også om forklaring i de tilfellene det ikke var helt klart hvordan de hadde tenkt.

Ved siden av intervjuer med feltnotater, tok jeg også videoopptak av arbeidet deres. Jeg samlet også inn elevenes notater. Rett etter intervjuene med hver enkelt elev satte jeg meg ned og noterte alt jeg trodde kanskje det var greit å huske. Alt dette vil til sammen utgjøre forskningens samlede datamateriale.

3.3 Valg av skole og elever

Jeg har vært tilkallingsvikar på skolen og jeg har også vært vikar på flere av skolens klasser. Videre har jeg god kontakt med både ledelsen og lærerne på skolen. Valget av skole kom derfor naturlig. Jeg jobber også som vikar i matematikk for 7. trinn på skolen. Etter å ha gitt noen av de sterkeste elevene oppgaver med figurtall og spesielt kvadratiske figurtall merket jeg raskt at dette var fremmed for dem. Jeg vurderte en stund om jeg skulle undervise elevene i kvadratiske figurtall, men jeg var redd for at elevene ville ta i bruk mine strategier for å løse slike oppgaver. Valget falt til slutt på 9. trinn, da jeg har god relasjon til disse elevene.

Dessuten har 9. trinn hatt to år matematikk mer enn 7. trinn. Disse burde være i stand til å løse oppgaver med kvadratiske figurtall.

Jeg studerte 7 elever fra 9. trinn. I utgangspunktet ønsket jeg ikke å ha med de aller svakeste elevene fordi jeg var redd det ble lite resultater fra dem. Imidlertid viste det seg at ingen av de svakeste elevene ønsket å være med, slik at jeg kun har elever med karakter 3 eller bedre i matematikk. Deltagelse i studien var selvfølgelig frivillig.

Innsamling av datamaterialet mitt ble gjort i flere skolehverdager i uke 50 i 2016 og i uke 14 i 2017.

3.4 Situasjonen for elevene

Selve intervjuet med elevene så jeg for meg at ville bli en nokså fremmed situasjon for dem. Elevene skulle løse oppgaver en og en, med kun meg og et videokamera i rommet. For å gjøre situasjonen så lite fremmed som mulig, brukte jeg en av klassens undervisningsrom til å gjennomføre intervjuene. Videre har jeg, som nevnt tidligere, god relasjon til elevene. Her valgte jeg elever som har lett for å komme bort til meg i friminuttene på skolen for å prate med meg. Jeg så på dette som et tegn på at elevene følte seg trygge på meg.

Jeg fortalte at jeg var veldig interessert i de tilfellene hvor de ikke kom fram til riktig svar på oppgavene. Videre presiserte jeg også elevene på forhånd at hvis det var noen oppgaver de ikke klarte eller andre ting de lurte på underveis, skulle jeg gå gjennom oppgavene med dem etterpå. Dette gjorde jeg så elevene ikke skulle gå ut av rommet med en ubehagelig følelse i kroppen.

Det virket som om flere av elevene så på det som en trygghet. Det var viktig for meg. Jeg hadde på forhånd og i dokumentet jeg sendte ut til foreldrene skrevet at elevene kunne trekke seg fra forskningsprosjektet når de ville, uten å gi noen grunn til hvorfor. Hvis elevene som hadde deltatt sa til de andre elevene som enda ikke hadde deltatt at det var ubehagelig, var jeg redd for at flere ville trekke seg.

Alle elevene fikk de samme oppgavene. Jeg ba også de elevene som hadde deltatt i intervjuet om ikke å fortelle noen av de andre elevene om oppgavene de hadde fått. Bakgrunnen for dette var et ønske om å gi alle elevene så like vilkår som mulig. KILDE. Hvis noen av elevene som allerede hadde deltatt, fortalte en av de som enda ikke hadde vært med ville kanskje denne eleven ha benyttet nøyaktig samme strategi som den som fortalte. Elevene ble plassert ved et bord. Jeg satte meg ved siden av så jeg kunne se hva elevene skrev. Videokameraet ble plassert så jeg fikk se alt elevene skrev. På denne måten ville det være lettere for meg å gå tilbake i tid for å se hvordan elevene hadde tenkt. Dessuten vil et videoopptak gi meg muligheten til å se situasjonen om og om igjen for å minimalisere tolkningen jeg gjorde da jeg gjennomførte intervjuene.

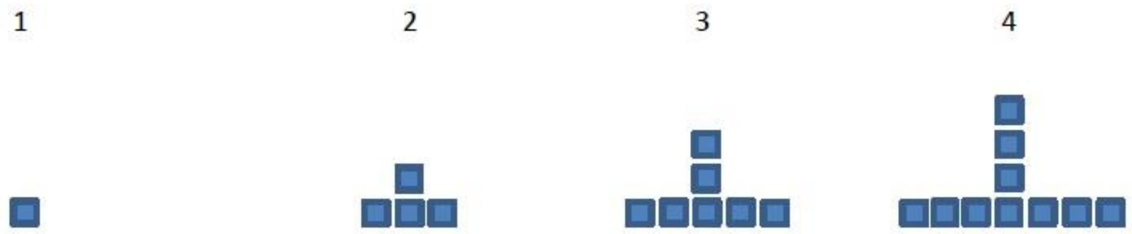
I forkant av intervjuet av hver elev, forklarte jeg om min rolle. Jeg skulle sitte og se på. Elevene kunne ikke spørre meg om noe som handlet om løsning av oppgaven. Hvis det var noe som var uklart kunne de spørre, så skulle jeg vurdere der og da om jeg kunne svare. Elevene kunne se for seg at det var en prøve, hvor de ikke fikk noen karakter. Dette var fordi jeg var redd for at mine strategier lett kunne påvirke elevene hvis jeg hjalp elevene. Etter hver oppgave kunne jeg spørre hver av elevene hvis det var noe jeg synes var uklart i framgangsmåten, eller hvorfor elevene hadde gjort noe på akkurat denne måten. Elevene ble oppfordret til å tenke høyt, altså si alt de tenkte, slik at det skulle være lettere for meg å forstå hva elevene hadde tenkt.

Hver elev ble satt til å finne antall komponenter for element nummer $n = 10$ og $n = 100$. I noen tilfeller ble elevene spurt om å finne antall komponenter i element nummer $n = 1000$. Elevene fikk løse oppgavene på den måten de helst ville. Den første oppgaven er et lineært figurmønster. De tre neste er kvadratiske figurmønstre. Se avsnitt lengre ned for en mer detaljert beskrivelse. Alle elevene fikk de samme oppgavene.

3.5 Figurmønstrene

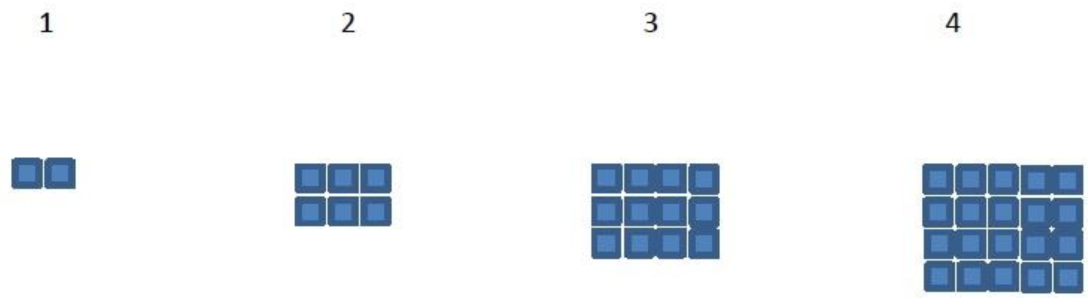
Da jeg skulle velge oppgaver til denne studien, valgte jeg først å starte med den eksplisitte formelen. Deretter satte jeg opp en tabell for de fire første verdiene av n. Til slutt lagde jeg logiske figurer ut fra tabellen. Ettersom noe av hensikten med studien er å se på hvilke strategier elever benytter seg av når de arbeider med kvadratiske figurtall, valgte jeg å ikke gi elevene så vanskelige oppgaver som mulig. Grunnen til at jeg valgte å gi elevene oppgavene i den rekkefølgen jeg gjorde, var at oppgavene skulle starte med noe lettere og bli vanskeligere. Jeg var redd for at hvis den første oppgaven var den vanskeligste ville elevene gi opp etter denne oppgaven.

Oppgave 1 er et lineært figurtall. Den eksplisitte formelen for dette figurtallet er $3n - 2$. Altså blir verdien for element nummer 10 lik 28, for nummer 20 lik 58 og for nummer 100 lik 298. Grunnen til at jeg tok med denne oppgaven, var for å gi elevene en myk start. Dette er en oppgave som elever på lavere årstrinn klarer å løse. Fra tidligere erfaring vil elevene ofte være nervøse når de skal intervjues og vil fokusere like mye på meg og videokameraet på å løse selve oppgaven. Derfor tenkte jeg at en lettere oppgave som alle elevene skulle få til, ville være med på å redusere nervøsiteten deres. Oppgaven finnes flere steder for eksempel hos Mason (1996) og Kieran (2004).



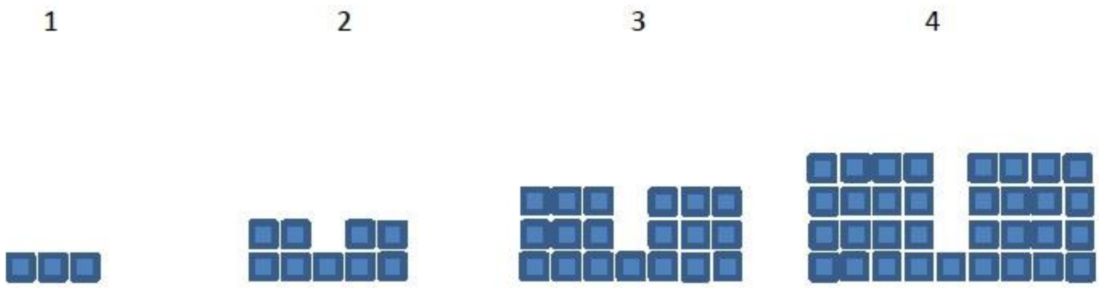
Figurmønster for oppgave nummer 1

Oppgave 2 ble dermed den første oppgaven av de kvadratiske figurtallene. Den eksplisitte formelen for dette figurtallet er $n^2 + n$. Altså blir verdien for element nummer 10 lik 110, for nummer 100 lik 10100.



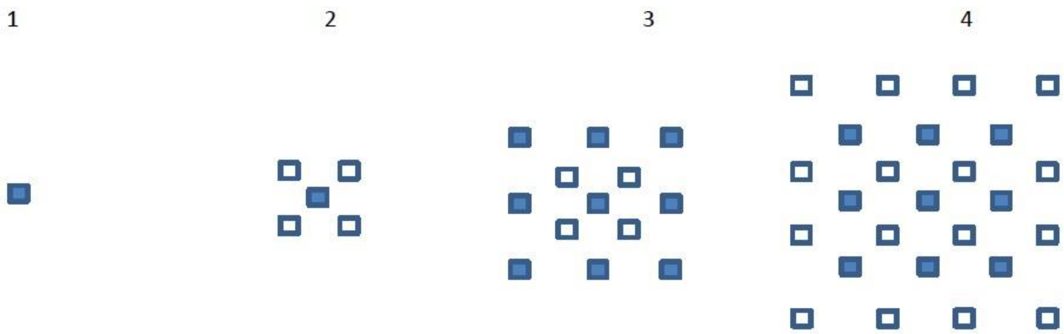
Figurmønster for oppgave nummer 2

Oppgave 3 (se vedlegg) er også et kvadratisk figurtall. Den eksplisitte formelen for dette figurtallet er $2n^2 + 1$. Altså blir verdien for element nummer 10 lik 201, for nummer 100 lik 20001. Oppgaven er inspirert av figur 3 (Strømskag, 2015).



Figurmønster for oppgave nummer 3

Figurmønster 4 (se vedlegg) er den siste oppgaven jeg gav elevene i denne studien. Den eksplisitte formelen for dette figurtallet er $n^2 + (n-1)^2$. Altså blir verdien for element nummer 10 lik 181, for nummer 100 lik 19801. Hentet fra *Factors Constraining Students' Establishment of Algebraic Generality in Shape Patterns* (Strømskag, figur 5.5, s. 145, 2011). Strømskag presenterer dette som en mulig dekomposisjon av et figurmønster til flere konsentriske kvadratiske omriss.



Figurmønster for oppgave nummer 4

3.6 Validitet og reliabilitet

Validitet betyr ifølge Creswell (2012) at man har gode håndfaste bevis på at man observerer det man sier at man skal observere. I mitt tilfelle er dette oftest ikke det noe stort problem: Jeg sier at jeg skal observere strategier for generalisering av lineære og kvadratiske figurmønstre. Jeg vil påstå at det er åpenbart at jeg har valg tilstrekkelig normale figurmønstre av de to typene. Det som er utfordrende er om jeg greier å observere, det vil si gi riktig tolkning av det som elevene gjør. Jeg skal ta videoopptak av intervjuene og kan dermed studere elevenes arbeid grundig. På den andre siden kan jeg allikevel ikke være helt sikker på at jeg tolker riktig, alle kan oppfatte feil. To personer som observerer det samme kan tolke samme observasjon litt forskjellig. Dette kan blant annet skyldes at man har forskjellig erfaringsbakgrunn:

For eksempel sier Hargreaves et al. (1998) at David har funnet alle differansene men gjorde ingen generalisering, sannsynligvis fordi det ikke er effektivt å se på differanser når man arbeider med Fibonacci-rekke. De er altså ikke oppmerksomme på at differansene de gjengir i artikkelen viser veldig klart at dette er en Fibonacci-rekke. Fordi de ikke er oppmerksomme på denne egenskapen, klassifiserer de Davids arbeid urettferdig. Men jeg må legge til, David så heller ikke at tallene i rekka gjentar seg litt lengre ute i serien med differanser.

Resultatene er altså avhengige av at jeg gjør riktige tolkinger av hvordan elevene har tenkt. Tolkningene er skrevet inn i vedlegg 2 Tolkning. Man kan kontrollere mine tolkinger ved å se på transkripsjonen vedlegg 1 Transkripsjon.

Reliabilitet betyr i følge Cresswell (2012) at resultatene er stabile og konsistente. At de er stabile betyr at man får samme resultater ved andre tilsvarende studier. Altså om man har andre elever og kanskje litt andre figurmønstre. At de er konsistente betyr at når en person besvarer noen spørsmål på en måte så burde personen besvare nært beslektede spørsmål på samme måte. I mitt tilfelle betyr vel det at man bruker samme strategi på lignende figurmønstre, spesielt ligner oppgave 2 og 3 på hverandre (se ovenfor).

I kapittel 6 Oppsummering vil det altså være aktuelt å vurdere om jeg har fått til god validitet og reliabilitet.

3.7 Etikk

Etikk betyr først og fremst at man skal fortelle sannheten om hva man har observert. Ikke legge til noe, eller trekke fra noe for å få det til å passe med en teori. Dessuten skal man ikke plagiere andre.

Historien forteller om en del stygge feilskjær innen sosiologisk forskning, det er derfor mye fokus på etikk innen pedagogisk forskingsarbeid.

Blant annet har flere profesjonelle foreninger satt opp retningslinjer for etikk. Creswell (2012, s. 23) nevner American Educational Research Association, American Psychological Association, American Anthropological Association og Joint Committee on Standards for Educational Evaluation. Disse kan sammenfattes i en del punkter. Deltagerne i en forskings-studie har:

- rett til å vite formålet til studien
- rett til å vite hvordan resultatene skal brukes
- rett til å vite sannsynlige sosiale konsekvenser for dem
- rett til å nekte å delta eller å trekke seg ut når som helst
- rett til anonymitet
- de skal ikke ha for stor belønning
- rett til å få noe igjen for å delta

I forkant av intervjuene informerte jeg klassen om hvorfor jeg ville gjøre dette arbeidet og hva resultatet skulle brukes til. Jeg forklarte også hvorfor jeg ville benytte meg av akkurat dem. Elevene fikk med seg et informasjonsskriv (se vedlegg 5) hjem som de skulle lese og diskutere med foreldrene. Her har jeg gjort et poeng av at både foreldre og elev skal skrive under på at eleven ønsker å delta. Jeg håper at dette kan gi elevene en slags eierfølelse til deltagelsen. Da svarene kom tilbake ble jeg positivt overrasket. De fleste ville være med. Flere elever kom i tillegg og spurte om å få lov til å delta. Dette og et generelt godt miljø i klassen får meg til å tro at det ikke vil bli noen mobbing eller uthenging av noen på grunn av denne forskingen. Da jeg informerte elevene fortalte jeg også at det ikke ville bli noen belønning i form av boller eller lignende, faktisk fikk de beskjed om at det ikke ville få noen betydning for karakteren i matematikk. Den eneste belønningen skulle være å få arbeide med noen oppgaver i matematikk.

Ettersom jeg ønsket å ta videoopptak av elevenes arbeid, var jeg pliktig til å melde dette til Personvernombudet for forskning, NSD – Norsk senter for forskningsdata AS (prosjektnummer 52384). Ferdig utfylt meldeskjema er lagt som vedlegg 4

4 Analyse

I dette kapittelet skal jeg analysere datamaterialet fra intervjuene. Jeg intervjuet, som nevnt i kapittel 3, Metode, sju elever som, hver for seg, skulle løse de samme fire oppgavene. Jeg vil analysere materialet ved å oppsummere det og prøve å få en oversikt over strategiene de har brukt.

Et av forskningsspørsmålene jeg skal finne svar på er altså «Hvilke strategier benytter elevene seg av når de arbeider med generalisering av noen lineære og kvadratiske figurmønstre?».

4.1 Selve fremgangsmåten

Ettersom detaljene i hvordan jeg arbeidet med analysen falt på plass i løpet av arbeidet, synes jeg det er naturlig å ha et underkapittel om hvordan analyseprosessen ble gjort.

Jeg transkriberte det som ble sagt og la til beskrivelser av det jeg så elevene gjorde. Selv om jeg hadde gjort dette måtte jeg flere ganger gå tilbake og se på videoopptakene igjen. Resultatet finner man i vedlegg 1 Transkripsjon.

Dette ble ganske ordrikt, så jeg lagde et sammendrag av det elevene hadde gjort. Dette finner man i vedlegg 2 Tolkning. I dette finner man det meste av arbeidet jeg har gjort med analyse av mitt datamateriale. Jeg tok bare med det som jeg oppfattet som klare tanker. Jeg trakk også sammen utsagn elevene hadde gjort etter at jeg stilte spørsmål. Spørsmålene gjaldt stort sett hvordan elevene hadde tenkt i det de nettopp hadde gjort. Det var i mange tilfeller vanskelig å se hvordan eleven hadde tenkt ut fra sammendragene alene. Av og til gikk jeg derfor tilbake til videoopptakene for å prøve å forstå. I løpet av dette arbeidet tok jeg bort deler av sammendraget som jeg ikke kunne forstå noe av.

Jeg syntes også det var vanskelig å legge koding på disse sammendragene. Derfor falt det naturlig å legge til et avsnitt med min tolking av hvordan elevene hadde tenkt. Jeg la inn en slik tolkning hver gang jeg kunne forstå hvordan eleven hadde tenkt for å komme fram til et svar. Det viste seg at disse avsnittene egnet seg bra for å sette på en koding. Resultatet finner man i vedlegg 2 Tolkning.

I dette vedlegget har jeg også lagt inn en koding av det jeg mener elevene har tenkt, altså flere koder for hvert avsnitt med tolkning. Dessuten har jeg der med en oversikt over de forskjellige kodene jeg har brukt. Denne kodingen er resultat av en del prøving og feiling. Det er flere tilfeller hvor det kan være tvil om hvilken koding man burde velge, for et gitt sammendrag og tolkning. Jeg har flere ganger gått tilbake til tolkningen (vedlegg 2) og endret det jeg skrev der. Jeg har selvsagt også revidert listen av kodene under hele arbeidet.

Det slo meg under arbeidet at noen av kodene definerer eller bestemmer strategien eleven benytter. Under avsnittene med min tolkning, fant jeg ofte de samme kodene før og etter disse avgjørende kodene var de samme både for forskjellige elever og noen ganger også i forskjellige oppgaver.

Jeg tok derfor ut alle linjene med koder for de forskjellige tolkingene og sorterte dem mer eller mindre for hånd på disse avgjørende kodene og så at det var mange mønstre som gikk igjen. Så her har man noe som begynner å ligne på strategier. Jeg valgte til slutt å gruppere noen av de avgjørende kodene, som jeg mente det var rimelig å regne som samme strategi.

4.2 Strategiene

Videre i denne besvarelsen bruker jeg betegnelsene n (og ved behov m, p, q) for elementnummer, $M(n)$ for antall komponenter for element n, d for differansen mellom M for to elementer etter hverandre - eventuelt $d(n) = M(n) - M(n-1)$ hvis verdien ikke er konstant for alle. Beskrivelsene antar at man er ute etter å finne $M(n)$, hvor n er lenger ute i rekka enn de man har fått oppgitt elementene for.

1) Tegner og teller

I denne strategien tegner eleven det elementet det spørres etter, ofte også alle elementene fra de som er gitt i oppgaven og oppover, og teller opp.

Jeg klipper ut et typisk eksempel fra vedlegg 2. Dette gjelder elev nummer 1, oppgave 1

Jeg:	*Hvor mange firkanter er det i figur 10?*
Elev:	Fordi hvis du teller her (teller nederst på figur 4) så er det 1, 2, 3, 4. Så er det 4 opp også. Og så legger du på 3 fordi det er en mer enn den forrige. Begynner å tegne. Tegner 10 horisontale, 9 opp og 9 på den horisontale biten.

Min tolkning: **Deler inn i 3 deler. Tegner og teller opp. Gir riktig svar.**

2) Generaliserer muntlig

I denne strategien skjønner eleven hvordan mønsteret utvikler seg. De konkretiserer gjerne beskrivelsen ved å vise utregningen for elementet det spørres etter. De uttrykker ikke det de gjør med algebraisk notasjon.

Et typisk eksempel fra vedlegg 2. Dette gjelder elev nummer 1, oppgave 1. n lik 10:

Jeg: *Hvor mange firkanter er det i figur 10?*

Elev: Begynner med å telle firkantene i hver figur. Figur 1 har 3, figur 2 har 9, figur 3 har 19, figur 4 har, 4 gange 4 som er 12. 12 pluss 12 pluss 1 er 25. (skriver på arket) $10 * 10 = 100 * 2 = 200 + 1 = 201$. Fordi på figur 2 er det 2 der (peker på figur 2 at det er 2 firkanter i hver retning), og 2 der. Det blir 4. Så er det 2 sånne og 1 firkant i midten. På figur 3 er det tre og på 4 er det fire.

Min tolkning: **Teller i elementene på oppgaven. Deler i 3, ser et mønster og bruker det for å kunne si hva verdien er. Gir riktig svar.**

3) Generaliserer skriftlig

I denne strategien kommer eleven fram til en eksplisitt formel. gjerne etter å ha delt opp elementet i deler som er mer oversiktlige, tegnet en del figurer og/eller skrevet verdier for flere av elementene i rekka. Her er det et poeng at eleven bruker algebraisk notasjon.

Et eksempel fra vedlegg 2. Dette gjelder elev nummer 3, oppgave 2. n lik 10:

Jeg: *Hvor mange firkanter er det i figur 10?*

Elev: Begynner med å tegne 3 av figurene fra oppgaven på arket sitt. Blir det 110? Fordi jeg begynner igjen med å se hva figuren og figurnummeret har til felles. Figur 1 er en firkant høy. Figur 2 er 2 firkanter høy, figur 3 er 3 firkanter høy. Figur 1 er også 2 bred som er en mer enn figurnummeret. Figur 2 er 3 bred som igjen er 1 mer enn figurnummeret, og 4 er en mer enn 3.

Min tolkning: **Tegner elementer og ser at antallet er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.**

Jeg: *Kan du finne den eksplisitte formelen for en hvilken som helst figur?*

Elev: Skriver: $n * (n + 1)$

Min tolkning: ***Finner eksplisitt formel.***

4) Muntlig rekurrens

Her ser man en rekurrensregel, altså at dette elementet uttrykkes ved hjelp av det forrige og differansen. I mitt datamateriale fant elevene alltid antall for hvert element som første trinn i denne prosessen. De konkretiserte beskrivelsen ved å vise utregningen for elementet det spørres etter.

Her har eleven naturligvis gjort en generalisering, men jeg reserverer det ordet for de tilfellene hvor elevene har brukt en eksplisitt regneregel. Et typisk eksempel fra vedlegg 2. Dette gjelder elev nummer 2, oppgave 2. Legg merke til at dette ikke er et lineært mønster.

Jeg: *Hvor mange firkanter er det i figur 10?*

Elev: Figur 2 har 6, figur 3 har 6+6 figur 4 har 12+8, figur 5 har 20+10. figur 6 har 30+12, figur 7 har 42+14, figur 8 har 56+16, figur 9 har 72+18, figur 10 har 90+20. Figur 10 har 110 firkanter.

Min tolkning: **Ser at et element er forrige element addert med 6, 8, 10. Altså økningen er i 2 gangen. Riktig bruk av rekurrens.**

5) Regner videre fra et kjent element

Regner videre fra et kjent element nummer n, kjenner differansen mellom elementene og regner ut det som mangler fra n til m og legger sammen. I mitt datamateriale var det alltid konstant differanse mellom elementene, man regnet altså $M(n+m) = M(n) + d * m$. Det var imidlertid flere måter å gjøre den siste utregningen på.

Det var tre måter å gjøre dette på:

5 a) Hoppe-telle

Hvis for eksempel $M(10) = 28$, $m = 10$ og $d = 3$, teller man 28 29 30 31 32 33 34 … 55 56 57 58. Et eksempel fra elev 1, oppgave 1:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 20?

Elev: Så ganger jeg det, nei, kan jeg gange det med noe da? Hvor mye mangler jeg da? 10! 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. Selvfølgelig blir det 30! Jeg kan ikke regne ut 28 ganger 30! Vel vi fortsetter. 11 har 31 (teller på fingrene, og pauser etter hver 3'er) … 43. skriver det ved 15. 46, 49, 52, 55, 58. 58 firkanter blir det i figur nummer 20

Min tolkning: **Teller med 3-gangen fra element 10 til 20, finner tillegget. Glemmer hva hun holder på med. Teller på fingrene fra figur 10 som har 28, 29 30 31 32 33 34 … 55 56 57 58. Fører til riktig svar.**

5 b) Gjentatt addisjon

$M(n+1) = M(n) + d$, $M(n+2) = M(n+1) + d$ og så videre. Forskjellen fra den foregående, Hoppe-telle, er altså ikke stor, men det var tydelig forskjell på hva elevene sa i de to tilfellene. Denne strategien ligner også på nummer 4) Muntlig rekurrens

Et eksempel fra elev 3, oppgave 1:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Elev: Skriver figur 5 har 10+3=13, figur 6 har 13+3=16, figur 7 har 19, figur 8 har 22, figur 9 har 25, figur 10 har 28.

Min tolkning: **Legger sammen summen av forrige figur med differansen, gjentar til 10. Fører til riktig svar.**

5 c) Tillegg

Man multipliserer, altså $M(n+m) = M(n) + d * m.$

Et eksempel fra elev 6 oppgave 1.

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Elev: Tegner figur nummer 5 og 6. Det blir 24 i figur 10, fordi du plusser alltid på 2 på den horisontale biten og 1 på den vertikale biten. Da blir det 2 gange 5, så må jeg legge til 9 som jeg har på figur 5. Det blir 19. Så må jeg legge til 5 fordi den vertikale biten øker med 1 for hver så 5 gange 1. Da får jeg 19 pluss 5 som er 24. Så må jeg legge til disse 4 (peker på figur 5). Da blir det 28.

Min tolkning: **Tegner element 5 og 6. Deler elementene i horisontal og vertikal del. Ser at økningen fra element 5 til 10 er differansen multiplisert med 5. Teller på element 5 og legger til økningen. Gjør dette for hver del. Får riktig svar.**

6) Feil håndtering av overlapp

I noen tilfeller er det fort gjort å dele opp figuren slik at noen av delene har komponenter til felles. Eleven håndterer ikke dette riktig, teller ett eller flere komponenter flere ganger og får altså for høyt antall.

Et eksempel fra elev 1 oppgave 1:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 20?

Elev: Da blir det det samme, altså 20 pluss 19 ned og 30 opp, nei 20 opp mener jeg! Altså 59 til sammen.

Min tolkning: **Deler inn i 3 deler, men teller en av komponentene flere ganger. Fører ikke til riktig svar.**

7) Antar proporsjonalitet

Eleven antar at økningen av antall komponenter fra et mindre element til et større er proporsjonalt med elementnummer. Altså at $M(n * k) = n * M(k)$. Dette kan jo bli riktig hvis det er et lineært figurmønster uten konstantledd.

Et eksempel fra elev 5, oppgave 4:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Elev: Teller firkantene i figur nummer 4, finner 25. Foreslår å multiplisere med 2 og addere halvparten av figur 4, for å finne element 10.

Min tolkning: **Antar proporsjonalitet, gir feil svar.**

8) Oppfatter elementene feil

Eleven har egentlig misforstått oppgaven, generaliserer feil.

8 a) Trekantede deler

Eleven mener at et element med kvadratisk form kan deles i to trekanter med kvadratets side som grunnlinje i trekanten.

Etter det første eksempelet på dette oppfattet jeg det som bare rot. Imidlertid kom det et eksempel til. Da må jeg nok regne det som en strategi. Et eksempel fra elev 4, oppgave 4:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Elev: Teller på figur 4. 55 der, så 110 til sammen. Fordi hvis du starter på en av sidene så er det 4, så 3, 2, 1 inn til midten. Så for figur 10 vil det være 10, 9, 8 osv, altså 55. og 110 til sammen.

Min tolkning: **Deler elementet i 2 trekanter, hver trekant består av komponentene fra en side inn til og med komponenten i midten (10…1). Sier at hele elementet består av 2 slike og at antallet derfor er 110, altså feil.**

8 b) Misoppfatter elementene

Oppfatter figuren feil for eksempel at en ramme på fire rader og fire kolonner har 16 komponenter, hvor det altså egentlig er 12.

Eksempel fra elev 6, oppgave 4:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Elev: Figur 10, 10*10=100, 9*9=81, 8*8=64, 7*7=49, 6*6=36, 5*5=25. Teller antall firkanter i figur nummer 4 og legger antallet sammen med alle summene og får 380. fordi i den ytterste firkanten på figur 4 er det fire gange fire firkanter, så på figur 10 er det ti gange ti i den ytterste firkanten. Videre så er det noen firkanter inne i figuren også, så jeg tok 9 gange 9 til og med 5 gange 5.

Min tolkning: **Prøver å dele figuren i konsentriske skall, men bruker feil formel for antallet i hvert skall. Får feil svar.**

8 c) Lineær feil

Antar lineær utvikling av figurmønsteret der dette ikke er tilfelle.

Eksempel fra elev 2, oppgave 2:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Elev: Skriver på arket sitt, figur 1 har 2, figur 2 har 2+4, figur 3 har 4+6 figur 4 har 6+8, figur 5 har 8+10. figur 6 har 10+12, figur 7 har 12+14, figur 8 har 14+16, figur 9 har 16+18, figur 10 har 18+20. da er det 38 firkanter i figur 10.

Min tolkning: **Ser at element 1 er 0+2, element 2 er 2+4. Antar at dette fortsetter slik at økningen fra element 2 til 3 er 4+6. Altså sum av 2 gangen. Altså en lineær rekke.**

8 d) Eksponentiell feil

Eleven ender opp med å anta at figurmønsteret har eksponentiell utvikling. Dette skjer gjerne ved at eleven finner en rekurrensformel hvor han adderer inn to foregående elementer, enten det foregående elementet to ganger eller de to foregående som i en Fibonacci-rekke.

Eksempel fra elev 2, oppgave 4:

Jeg: Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Elev: Skriver på arket sitt: Figur 5 har 25+24, figur 6 har 49+48, figur 7 har 97+96, figur 8 har 193+192, figur 9 har 385+384, figur 10 har 769+768. Figur 10 har 1537 firkanter.

Min tolkning: **Bruker en rekurrens og adderer forrige element med en mindre enn forrige element. Resultatet minner om en Fibonacci-rekke, feil svar.**

5 Drøfting

I dette kapittelet har jeg sammenlignet strategiene jeg fant i kapittel 4 Analyse, avsnitt 4.2, med strategiene jeg fant i litteraturen. For å gjøre dette noenlunde oversiktlig har jeg først laget en oppsummering av strategiene fra litteraturen (avsnitt 5.1 nedenfor).

Ettersom det andre forskningsspørsmålet gikk ut på å lage en samlet liste av strategier fra både eget materiale og litteraturen, var det naturlig å sammenligne disse to settene av strategier for å finne ut hva som var felles. Da jeg startet med dette regnet jeg med at det ville være symmetri i sammenligningen av strategiene fra de to listene, altså at en strategi fra den ene svarte mer eller mindre til en strategi fra den andre. For å være sikker på at dette stemte lagde jeg to oversikter, en med utgangspunkt i den ene lista og en med utgangspunkt i den andre. Under arbeidet oppdaget jeg at det var betydelige forskjeller mellom disse to listene. Men dette ble mange lister og mye gjentagelser. Jeg valgte derfor å legge disse sammenligningene i Vedlegg 3, Forarbeid drøfting.

Jeg så at jeg kunne legge det vesentlige av drøftingen fra vedlegget i den samlede lista av strategier, se avsnitt 5.2. Dette passet godt med drøfting og forklaring av de samlede strategiene.

Legg merke til at strategiene jeg fant i studien med elever er merket med arabiske tall, mens strategiene jeg finner i oppsummering av litteraturen vil jeg merke med romertall, små bokstaver. I den samlede lista (5.2) bruker jeg romertall, store bokstaver, eventuelt etterfulgt av liten bokstav a, b, c for underpunkter.

5.1 Oppsummering av strategiene fra litteraturen

Flere av strategiene beskrevet i de forskjellige artiklene må regnes å være de samme. Jeg vil derfor lage en samlet liste over de forskjellige strategiene som er beskrevet i den litteraturen jeg har sett igjennom. I det følgende refererer jeg til denne lista ved, ganske kort å si, i litteraturen.

i) Tellemetoden

Man tegner neste element, neste til den og så videre til man har den man er ute etter (n) og teller så antall komponenter. Har man et numerisk mønster, teller man ut en etter en til man har nådd n.

Dette er strategi 1 fra Stacey (1989) og strategi 1 og 7 hos Bishop (2000), hun peker på likheten med Stacey. Hos Bishop kunne elevene bygge mønstrene med klosser i stedet for å tegne. Det er også det samme som strategi 2 i Becker & Rivera (2006). (Strategien fører ofte til riktig resultat, men krever mye arbeid, ofte uoverkommelig mye for høye elementnummer.)

I de tilfellene man har numeriske mønstre kan denne tellemetoden ses på som xv) Hoppe-telle, se lengre ned.

ii) Differansemetoden

Man har funnet at differansen i antall mellom to elementer i rekka er konstant, d. For å finne antallet for n regner de $Mn = d * n$.

Dette er strategi 2 fra Stacey (1989) og strategi 2 hos hos Bishop (2000), hun peker på likheten med Stacey. Strategien brukes på lineære mønstre. (Den gir feil resultat, unntatt i spesialtillfellet der det ikke er noe element, altså $M = 0$ for $n = 0$.)

iii) Differanse-analyse

Man setter opp en tabell med kolonne for $n = 1, 2, 3, \ldots$ og for tilsvarende $M(n)$. Man legger til en kolonne for tilsvarende $d * n$, gjerne litt forskjøvet vertikalt, slik at dn står mellom $M(n)$ og $M(n-1)$. Er d-ene like fortsetter man som lineærmetoden nedenfor. Ser verdiene ut til å stige jevnt fortsetter man med differanse-differanse-metoden, se nedenfor. Ser man at $dn = M(n-1)$ for de tilgjengelige n, så utgjør M-ene rimeligvis en Fibonacci-rekke. I dette siste tilfellet må man normalt fortsette med tellemetoden, over. (Binets formel er ikke pensum.)

Dette er strategi 1 fra Hargreaves et al. (1998), bortsett fra at de ikke nevner at den er nyttig også for Fibonacci-rekker. Den er videre strategi 5 hos Becker & Rivera (2006) selv om de bare ser på lineære mønstre. (Strategien er god.)

iv) Uregelmessig tabell

Man setter opp en tabell med n og verdi, men har ikke data for alle n så man kan ikke regne ut alle differansene. I stedet kan man estimere en koeffisient i den lineære formelen og prøve om den stemmer, samtidig må man estimere konstant-leddet og så må man gjette igjen om det ikke passet. Dette blir altså en mellomting mellom differanse-analysen, se over, og prøve-og-feile, se nedenfor.

Dette er strategi 1 fra Beatty & Moss (2006). (Den er god på samme måte som prøve-og-feile.)

v) Differanse av differansene

Man har gjerne allerede en tabell med kolonner for (n, Mn og dn). Man legger til en kolonne for differansen mellom differansene, $fn = dn - d(n-1)$. Er denne konstant uansett n, så finnes det en annengrads formel for M_n. (Denne verdien f er 2 ganger koeffisienten i n^2-leddet).

Dette er strategi 2 hos Hargreave et al. ´98. (Det er en holdbar strategi.)

vi) Konstant rekurrens

Man ser at differansen d er konstant men klarer ikke å uttrykke dette i en direkte formel. I stedet uttrykker de, mer eller mindre formelt, at $M(n) = M(n-1) + d$.

Dette er strategi 1 i Rivera & Becker (2005) og strategi 1 i Becker & Rivera (2006). (Dette er matematisk holdbart men ikke nødvendigvis det svaret læreren ønsket.)

vii) Kombinere elementer

Prøv å finne et mønster hvor summen av 2 eller 3 elementer er lik en av de følgende, altså en spesiell prøve-og-feile-metode.

Dette er strategi 5 fra Hargreave et al (1998). (Denne er korrekt nok, spesielt passer den for Fibonacci-rekker.)

viii) Hel-objektmetoden

Man kjenner verdien M_p for element nr. p og skal finne den for element $n=p\times q$. Man regner $M_q = M_p\times q$.

Dette er strategi 3 fra Stacey (1989) og strategi 1 hos Bishop (2000), hun peker på likheten med Stacey. Det er strategi 3 hos Becker & Rivera (2006) når elevene gjør en vanlig feil: glemmer 0-verdien.

Strategien brukes på lineære mønstre men kan muligens dukke opp også for andre. (Strategien er feil.)

ix) Lineær med feil start

Man ser at mønstret er lineært med differanse d og bruker formelen $M_n=d\times n+b$, men tar feil verdi for b, ofte brukte de $b=M_1$. Dette ligner noe på strategi ii) Differansemetoden, hvor man rett og slett glemmer konstantleddet b.

Dette er strategi 2 i Rivera & Becker (2005)

Dette er en såpass vanlig feil at jeg velger å sette den opp som en egen strategi. Det viser også at eleven ikke har forstått forskjellen mellom proporsjonal og lineær. (For ordens skyld: strategien er feil).

x) Lineærmetoden

Man ser at mønstret er lineært med differanse d og konstant-ledd b, og bruker den lineære formelen $M_n=d\times n+b$. Differansen finner man ofte ved å sette opp en tabell som nevnt over, eller man ser på utviklingen i figurrekka direkte. b-verdien finner man ved å tenke seg $n=0$ eller hva som må legges til for en annen n.

Dette er strategi 4 fra Stacey (1989) og strategi 5 og 10 hos Bishop (2000). Bishop sier også at den svarer til *Functional Strategy* hos Swafford & Langrall (2000). Det er strategi 3 i Rivera & Becker (2005), selv om den artiklen fokuserte på at elevene ikke kunne relatere tallene i formlen til komponenter i figurene. (Her har vi jo den 'riktige' strategien, som altså kan ende opp med forskjellige ekvivalente formler.)

xi) Oppdeling på figur

Man deler opp elementene slik at man ser formelen for hver del og legger sammen.

Dette er strategi 3 i Becker & Rivera (2006), forutsatt elevene ikke gjør feil - altså gjorde en fornuftig oppdeling av elementene. Det er strategi 2 hos Radford (2006) og strategi 3 hos Beatty & Moss (2006). Det er også strategien som presenteres i Strømskag (2015). I denne siste viser hun på en veldig fin måte hvordan man finner formelen ut fra de oppdelte elementene. (Metoden er i orden.)

xii) Hale-metoden

Man ser at mønsteret er lineært, med differanse d og kjenner antallet $M(q)$ for et tidligere element q. Man regner så at $M(n) = M(q) + d * (n - q)$ (hvor jeg oppfatter leddet $d * (n - q)$ som en hale satt på element q).

Dette er strategi 5 fra Stacey og strategi 4 i Becker & Rivera (2006). (Dette skal også gi riktig resultat.)

xiii) Plott verdi mot elementnummer

Lager man denne figuren vil elementene ligge på en rett linje om man har en lineær sammenheng. Mange vil faktisk mene at det er denne framgangsmåten som har ført til betegnelsen lineær i vår sammenheng. Av figuren kan man selvsagt lese koeffesientene i den vanlige lineære formelen. Et slikt plott kan brukes for mange andre sammenhenger, som kjent. På den andre siden kan det være vanskelig å se om grafen krummer seg litt og det kan være vanskelig å se hvordan den krummer seg når den krummer seg. Det kan derfor ofte være fornuftig å fortsette med differanse-analyse-strategien.

Dette er strategi 2 hos Beatty & Moss. (Dette kan man kalle ingeniørmetoden, den er i orden.)

xiv) Prøve og feile

Dette er jo en av de mest sentrale metodene i matematikken, selv om man vanligvis ikke liker den. I skolen vil figurmønsteroppgaver oftest være lineære og konstantene vil være små heltall. I slike tilfeller kan gjetting og prøving føre fram.

Dette er strategi 4 hos Rivera & Becker (2005), strategi 1 hos Radford (2006). Det er også noen av strategiene over som benytter prøve-og-feile til sist i prosessen. (Hvis etterprøvingen er god er det en matematisk holdbar metode.)

xv) Hoppe-telle

Dette er en variant av hale-metoden, se over, hvor man teller eller adderer seg fram, ett og ett element, istedenfor å multiplisere. Altså 1 $_{2\ 3}$ 4 $_{5\ 6}$ 7 $_{8\ 9}$ 10 …

Dette er metode 4 hos Bishop (2000). Hun skriver at denne svarer til *Recursive Differencing Strategy* hos Orton & Orton (1994) og til Recursive Strategy hos Swafford & Langrall (2000). (Den bør gi rett resultat).

xvi) Se etter gangetabell

altså, om alle M_n er et multippel av et tall i 2..9.

Dette er stategi 4 hos Hargreave et al (1998), og vil nok helst dukke opp når man ser på elever i småskolen. Dette er nok et utslag av det Brosseau kaller *didactical contract* (referert i Strømskag Måsøval (2011). (Den vil neppe kunne føre til riktig resultat.)

Strategiene 8 og 9 i Bishop (2000) består vel egentlig i vill gjetning som ikke har noe med saken å gjøre.

Strategi 3 til Hargreave et al. (1998) er nok ikke relevant for meg: noen av elevene deres fant at alle elementene var odde, evt. annen hver jamn og odd. Dette er selvsagt utmerkede generaliseringer av de numeriske rekkene elevene så på, men ikke av det slaget vi er interesserte i her.

5.2 En samlet liste av strategiene

I dette avsnittet vil jeg sette opp en samlet liste av strategier hvor jeg tar med det jeg har funnet i litteraturen, avsnitt 5.1, og det jeg fant i analysearbeidet, punkt 4.2. Jeg vil også prøve å få med tanker jeg gjorde meg i drøftingen man finner i Vedlegg 3, Forarbeid drøfting. Dette gjelder spesielt hva som er mer eller mindre det samme og hva som kan grupperes. Jeg lager en liste av strategier med beskrivelse.

I) Uregelmessig tabell

Man setter opp en tabell med n og verdi, men har ikke data for alle n så man kan ikke regne ut alle differansene. I stedet kan man estimere en koeffisient i den lineære formelen og prøve om den stemmer, samtidig må man estimere konstant-leddet og så må man gjette igjen om det ikke passet. Dette blir altså en mellomting mellom iii) Differanse-analyse og xiv) Prøve-og-feile.

Denne fant den ikke i analysen min. Strategien svarer til iv) Uregelmessig tabell fra litteraturen. I litteraturen dukker den opp i forbindelse med en oppgave som er veldig annerledes enn de jeg har gitt. Beatty og Moss (2006) gav en oppgave hvor man fikk utlevert en del data par, altså alder og høyde, for et fabeldyr. Det var ikke sortert på alder og man fikk heller ikke en fullstendig liste over alle aldre. Der ble det veldig naturlig å lage en uregelmessig tabell og arbeide ut fra den..

II) Prøve og feile

Dette er jo en av de mest sentrale metodene i matematikken, selv om man vanligvis ikke liker den. I skolen vil figurmønsteroppgaver oftest være lineære og konstantene vil være små heltall. I slike tilfeller kan gjetting og prøving føre fram.

Denne strategien svarer til xiv) Prøve og feile fra litteraturen. Jeg har ikke funnet noen strategi som svarer helt til denne i analysen, men jeg ser jo at noen elever har kommet med mange litt tilfeldige forslag. Dette kan jo ligne litt på det vi snakker om her, se vedlegg 1 Transkripsjon, elev 1, oppgave 1.

II.a) Kombinere elementer

Prøv å finne et mønster hvor summen av 2 eller 3 elementer er lik en av de følgende, altså en spesiell prøve-og-feile-metode.

Denne strategien svarer til vii) Kombinerte elementer fra litteraturen. Jeg fant ikke noe som svarer til denne i analysen. Dette er vel naturlig, metoden er først og fremst interessant for mønstre som er Fibonacci-rekker.

III) Regner videre fra et kjent element

Man regner eller tegner videre fra et kjent element nummer n, man kjenner forskjellen (differansen) mellom elementene og regner ut eller tegner det som mangler fra n til m og legger sammen.

Denne strategien svarer til 5) Regner videre fra et kjent element fra analysen. Det var imidlertid flere måter å gjøre den siste utregningen på. Jeg har satt disse som underpunkter nedenfor.

III.a) Tellemetoden

I denne strategien tegner eleven det elementet, n, det spørres etter, ofte også alle elementene fra de som er gitt i oppgaven og oppover, og teller opp. Har man et numerisk mønster, teller man ut en etter en til man har nådd n.

Denne strategien svarer til i) Tellemetoden i litteraturen og 1) Tegner og teller fra analysen.

III.b) Hoppe-telle

Hvis for eksempel $M(10) = 28$, $m = 10$ og $d = 3$, teller man $28 \ {\scriptstyle 29\ 30}\ 31\ {\scriptstyle 32\ 33}\ 34 \ \dots\ 55\ {\scriptstyle 56\ 57}$ 58. Et eksempel fra elev 1, oppgave 1:

I litteraturen finner vi nummer xv) Hoppe-telle som svarer til denne strategien. Denne svarer også til 5 a) Hoppe-telle og i noen grad til 5 b) Gjentatt addisjon fra analysen.

III.c) Gjentatt addisjon

$M(n+1) = M(n) + d$, $M(n+2) = M(n+1) + d$ og så videre. Forskjellen fra den foregående, Hoppe-telle, er altså ikke stor, men det var tydelig forskjell på hva elevene sa i de to tilfellene. Denne strategien ligner også på nummer 4) Muntlig rekurrens

Denne strategien svarer til 5 b) Gjentatt addisjon fra analysen. Den er så lik III.b) Hoppe-telle at det er rimelig at vi ikke finner denne forskjellen i litteraturen.

III.d) Tillegg

Man forutsetter at mønsteret er lineært, med differanse d og kjenner antallet $M(n)$ for et tidligere element n. Man regner så at $M(n+m) = M(n) + d * m$. (Jeg oppfatter altså leddet $d * m$ som et tillegg til det for element n).

Denne strategien finner jeg som xii) Hale-metoden i litteraturen og som nummer 5 c) Tillegg i analysen.

III.e) Konstant rekurrens

Man ser at differansen d er konstant men klarer ikke å uttrykke dette i en direkte formel. I stedet uttrykker de, mer eller mindre formelt, at $M(n) = M(n-1) + d$.

Denne strategien svarer til vi) Konstant rekurrens fra litteraturen. Den er også et spesialtilfelle av nummer 4) Muntlig rekurrens fra analysen. Dette siste gjelder hvis man ser bort fra at jeg noterte meg at det bare forekom i muntlige utsagn. Litteraturen sier ikke om det er muntlig eller skriftlig.

III.f) Muntlig rekurrens

Her ser man en rekurrensregel, altså at dette elementet uttrykkes ved hjelp av det forrige og differansen. I mitt datamateriale fant elevene alltid antall for hvert element som første trinn i denne prosessen. De konkretiserte gjerne beskrivelsen av det de gjorde ved å vise utregningen for elementet det spørres etter. I denne strategien bør vi utelukke lineære mønstre, de faller under III.e) Konstant rekurrens.

Ettersom vi utelukker lineære mønstre er det ingen strategi som svarer til dette i litteraturen. Dette svarer til 4) Muntlig rekurrens i analysen. I min studie fant jeg faktisk tilfeller hvor elever brukte rekurrens for kvadratiske rekker. I kvadratiske rekker er naturligvis differansen til differansen konstant (og lik to ganger koeffisienten for n^2).

IV) Generalisering

Her har jeg flere varianter av at man har sett et mønster. Dette skjedde ofte etter at man hadde brukt en av de forberedende strategiene fra punkt V) Forberedelse, se nedenfor.

I min studie var det vanlig å bruke tegning og telling av elementer for å bli kjent med mønsteret. Mange delte også opp figurmønsteret som en forberedelse for generalisering. Jeg har ikke en egen strategi for dette i analysen, men jeg har en kode, Deler, den finner man mange steder i vedlegg 2, Tolkning. Jeg har typisk endt opp med å si at elevene i disse tilfellene har brukt strategi 2) Generaliserer uformelt eller 3) Generaliserer med algebraisk notasjon. I litteraturen har vi spesialtilfeller, se IV.a nedenfor.

Jeg har satt opp 3 underpunkter i denne strategien. Det er vanskelig å unngå at disse overlapper noe. IV.a Lineærmetoden gjelder vel uansett om de uttrykker seg formelt eller uformelt, og vil være et spesialtilfelle av IV.b og IV.c. Grunnen til at jeg tar med IV.a er at den er nevnt i flere av de sentrale artiklene jeg har sett på i denne studien.

IV.a) Lineærmetoden

Man ser at mønstret er lineært med differanse d og konstant-ledd b, og bruker den lineære formelen $M(n) = d * n + b$. Differansen finner man ofte ved å sette opp en tabell som nevnt over, eller man ser på utviklingen i figurrekka direkte. b-verdien finner man ved å tenke seg $n=0$ eller hva som må legges til for en annen n.

Denne strategien svarer til x) Lineærmetoden i litteraturen. Den er et spesialtilfelle av strategiene 2) Generaliserer muntlig og 3) Generaliserer skriftlig fra analysen. Disse to dekker også kvadratiske mønstre.

IV.b) Generaliserer uformelt

I denne strategien skjønner eleven hvordan mønsteret utvikler seg, som regel etter en oppdeling. De konkretiserer gjerne beskrivelsen ved å vise utregningen for elementet det spørres etter. De uttrykker ikke det de gjør med algebraisk notasjon.

Denne svarer til strategi 2) fra analysen. Den omfatter, som sagt, også tilfeller hvor mønsteret ikke er lineært. Strategi x) Lineærmetoden i litteraturen faller inn som et spesialtilfelle under denne strategien. I litteraturen fant jeg ingen strategi for å finne eksplisitt formel for annet enn lineære mønstre.

Denne strategien fokuserer på tilfellene hvor eleven ikke uttrykker seg i algebraisk notasjon. I litteraturen jeg har lest, skilles det ikke klart mellom bruk av formell eller uformell notasjon. Jeg mener at dette skillet er viktig fordi eleven som uttrykte seg ved algebraisk notasjon, hadde en mer direkte angrepsmåte enn de som uttrykte generaliseringen uformelt.

IV.c) Generaliserer med algebraisk notasjon

I denne strategien kommer eleven fram til en eksplisitt formel. gjerne etter å ha delt opp elementet i deler som er mer oversiktlige, tegnet en del figurer og/eller skrevet verdier for flere av elementene i rekka. Her er det et poeng at eleven bruker algebraisk notasjon.

Denne strategien svarer til 3) Generaliserer skriftlig fra analysen. Det jeg sa om forrige punkt gjelder naturligvis denne strategien også. Nummer x) Lineærmetoden i litteraturen blir på samme måte som forrige et spesialtilfelle av denne bortsett fra differensieringen mellom formell og uformell.

V) Forberedelse

V.a) Differanse-analyse

Man setter opp en tabell med kolonne for $n = 1, 2, 3, \dots$ og for tilsvarende $M(n)$. Man legger til en kolonne for tilsvarende $d * n$, gjerne litt forskjøvet vertikalt, slik at dn står mellom $M(n)$ og $M(n-1)$. Er d-ene like fortsetter man som lineærmetoden nedenfor. Ser verdiene ut til å stige jevnt fortsetter man med differanse-differanse-metoden, se nedenfor. Ser man at $dn = M(n-1)$ for de tilgjengelige n, så utgjør M-ene rimeligvis en Fibonacci-rekke. I dette siste tilfellet må man normalt fortsette med tellemetoden, over. (Binets formel er ikke pensum.)

Denne forberedelsesstrategien svarer til iii) Differanse analyse i litteraturen. I analysen har jeg ikke noen egen strategi for dette, ikke engang en kode for annet enn konstante differanser. Imidlertid har jeg i Vedlegg 2, Tolkning, flere steder skrevet at eleven finner differanser for kvadratiske mønstre. Det er et vurderingsspørsmål om jeg burde ha hatt en slik kode eller strategi. En grunn til at jeg ikke har lagt vekt på dette er nok at ut fra litteraturen vil denne metoden være vanligere når man arbeider med numeriske mønstre. Differanse-analyse er en god metode for å få oversikt over mange slags mønstre.

V.b) differanse av differansene

Man har gjerne allerede en tabell med kolonner for (n, Mn og dn). Man legger til en kolonne for differansen mellom differansene, $fn = dn - d(n-1)$. Er denne konstant uansett n, så finnes det en annengrads formel for M_n. (Denne verdien f er 2 ganger koeffisienten i n^2-leddet). Dette blir ofte en del 2 av V.a) Differanse-analyse, i de tilfellene hvor det ikke er en konstant differanse.

Denne forberedelsesstrategien svarer til v) Differanse av differanse i litteraturen. Dette er også en strategi jeg ikke har funnet i analysen.

V.c Oppdeling på figur

Man deler opp elementene slik at man ser formelen for hver del og legger sammen.

Denne forberedelsesstrategien svarer til xi) Oppdeling på figur i litteraturen. Jeg har ikke noe tilsvarende i listen av strategier fra analysen. Imidlertid har jeg en kode for Deler som brukes på flere steder i Vedlegg 2 Tolkning. Dette gjelder for eksempel nesten alle elevene når de arbeider med oppgave 3. Jeg har typisk endt opp med å tolke disse som 2) Generaliserer uformelt eller 3) Generaliserer med algebraisk notasjon. Jeg har ikke noen egen gruppe for forberedelsesstrategier i analysen.

V.d) Plott verdi mot elementnummer

Lager man denne figuren vil elementene ligge på en rett linje om man har en lineær sammenheng. Mange vil faktisk mene at det er denne framgangsmåten som har ført til betegnelsen lineær i vår sammenheng. Av figuren kan man selvsagt lese koeffisientene i den vanlige lineære formelen. Et slikt plott kan brukes for mange andre sammenhenger, som kjent. På den andre siden kan det være vanskelig å se om grafen krummer seg litt og det kan være vanskelig å se hvordan den krummer seg når den krummer seg. Det kan derfor ofte være fornuftig å fortsette med differanse-analyse-strategien.

Denne forberedelsesstrategien svarer til xiii) Plott verdi mot elementnummer i litteraturen. I analysen har jeg ikke sett noe tilsvarende. Dette hadde vel kanskje falt mer naturlig om elevene skulle finne løsning ved hjelp av Excel eller Geogebra, eventuelt om oppgaven inneholdt en tabell av verdipar $(n, M(n))$ altså ikke et mønster.

VI) Proporsjonalitet

Elevene er ofte vant med å arbeide med proporsjonalitet fra matematikktimene. De kan derfor ha en tendens til å bruke det også når det ikke er på sin plass. Dette resulterer i at eleven ikke håndterer konstantleddet korrekt. Dette er jo også tilfelle for neste strategi VII) Feil med konstantleddet.

VI.a) Differansemetoden

Man har funnet at differansen i antall mellom to elementer i rekka er konstant, d. For å finne antallet for n regner de $M(n) = d * n$.

Denne strategien svarer til ii) Differansemetoden i litteraturen. Jeg fant ikke noe i elevenes arbeid som svarer til denne strategien. Jeg har ingen god forklaring på dette.

VI.b) Hel-objektmetoden

Eleven antar at økningen av antall komponenter fra et mindre element til et større er proporsjonalt med elementnummer. Altså at $M(n * k) = n * M(k)$. Dette kan jo bli riktig hvis det er et lineært figurmønster uten konstantledd.

Denne strategien svarer til viii) Hel-objektmetoden i litteraturen og til 7) Antar proporsjonalitet fra analysen. I litteraturen har man bare sett denne for lineære mønstre, i min studie så jeg den også brukt for kvadratiske mønstre. Som jeg pekte på tidligere kan denne metoden gi riktig resultat for lineære mønstre hvis konstantleddet er lik null, men i litteraturen har ingen presentert dette som et interessant tilfelle. Videre vil strateg VI.a) Differansemetoden være spesialtilfelle av denne.

VII) Feil med konstantleddet

Forskjellen mellom denne og VI) Proporsjonalitet er, naturligvis, at her ser vi på tilfellene hvor eleven ikke har tenkt proporsjonalitet men får feil i konstantleddet av andre grunner. Grunnen til at jeg ikke regner denne gruppen sammen med VI) er at feil med proporsjonalitet er mye vanligere og at jeg oppfatter tankeprosessene som tydelig forskjellige.

VII.a) Lineær med feil start

Man ser at mønstret er lineært med differanse d og bruker formelen $M(n) = d * n + b$, men tar feil verdi for b, ofte brukte de $b = M(1)$.

Denne strategien svarer til ix) Lineær med feil start i litteraturen. Dette ligner også noe på strategi ii) Differansemetoden, hvor man rett og slett glemmer konstantleddet b. Jeg har ikke funnet denne i analysen.

VII.b) Feil håndtering av overlapp

I noen tilfeller er det fort gjort å dele opp figuren slik at noen av delene har komponenter til felles. Eleven håndterer ikke dette riktig, teller ett eller flere komponenter flere ganger og får altså for høyt antall.

Denne strategien svarer til 6) Feil håndtering av overlapp fra analysen. Jeg ser ikke noen strategi i litteraturen som svarer godt til denne. Imidlertid kan man se denne som xi) Oppdeling på figur i litteraturen, når man gjør en passende feil i oppdelingen, altså når det gjelder overlapp.

VIII) Oppfatter feil

Dette er kanskje ikke en ren strategi men mer eksempler på hvordan man kan tenke feil. De kan ses på som strategier hvis de gjentas eller hvis de er beskrevet i litteraturen. Strategien 8 d) Eksponentiell feil fra analysen tar jeg ikke med, den har jeg bare sett en gang.

VIII.a) Se etter gangetabell

altså, om alle M_n er et multippel av et tall i 2..9.

Denne strategien svarer til xvi) Se etter gangetabell i litteraturen. I analysen har jeg sett et eksempel som minner om xvi) Se etter gangetabell, se vedlegg 1 Transkripsjon, elev 1, mot slutten av oppgave 1. Jeg har imidlertid ikke satt opp noen strategi for dette.

VIII.b) Trekantede deler

Eleven mener at et element med kvadratisk form kan deles i to trekanter med kvadratets side som grunnlinje i trekanten.

Denne strategien svarer til 8 a) Trekantede deler fra analysen. Jeg fant to tilfeller av denne strategien i vedlegg 2, Tolkning. Måsøval (2011) har en figur (Figur 5.4, s. 144) som viser hvordan det kvadratiske elementet i mitt figurmønster 4 (avsnitt 3.5), kan deles i fire trekanter. Elevene kan ha tenkt på noe i denne samme retningen men har rotet det til. Jeg har ikke funnet noen slik strategi i litteraturen.

VIII.c) Misoppfatter elementene

Oppfatter figuren feil for eksempel at en ramme på fire rader og fire kolonner har 16 komponenter, hvor det altså egentlig er 12.

Denne strategien svarer til 8 b) Misoppfatter elementene feil fra analysen. Jeg har ikke funnet noe som svarer til denne strategien i litteraturen. Man finner 3 eksempler på dette i Vedlegg 2, Tolkning.

VIII.d) Lineær feil

Antar lineær utvikling av figurmønsteret der dette ikke er tilfelle.

Denne strategien svarer til 8 c) Lineær feil fra analysen. Den er ikke omtalt i litteraturen. Jeg tar den med som en strategi her fordi jeg mener det er en nærliggende feil å gjøre. I Vedlegg 2, Tolkning finner man at elever generaliserer ut fra ett eller to elementer og antar et lineært mønster.

5.3 Erfaringer med oppgavene

Da jeg planla intervjuene tenkte jeg at hovedfokuset i dette arbeidet skulle være på generalisering av kvadratiske figurmønstre. Jeg ville imidlertid ha med en liten oppvarming slik at elevene ble vant med situasjonen og ikke fokusere på kameraet og meg. Første oppgave ble derfor et lineært figurmønster som man har sett flere steder i litteraturen, blant annet i Mason (1996). Denne oppgaven skulle være lettest, så skulle de neste bli gradvis vanskeligere. De tre neste fargemønstrene er kvadratiske.

Det viste seg imidlertid at oppgave 1 ble nokså vanskelig, elevene brukte mye tid på denne. Det ser vi også i vedlegg 2 Tolkning. Her kommer omtrent halvparten av tolkningene som ble kodet fra oppgave 1. Den andre halvparten kom jevnt fordelt fra de resterende 3 oppgavene. Fokuset for arbeidet mitt ble derfor flyttet litt, som man ser ovenfor. Oppgave 2 og 3 gikk overraskende lett for elevene. Dette kan kanskje skyldes at de hadde fått litt trening i løpet av oppgave 1. Man ser forøvrig at oppgave 1 har negativt konstantledd, oppgave 2 har ikke noe konstantledd og oppgave 3 har et positivt konstantledd. Jeg fikk inntrykk av at oppgaver med negativt konstantledd var utfordrende.

Oppgave 4 var tydelig den vanskeligste, kun 2 av 7 elever klarte denne på egenhånd. Dette skyldes trolig at det er vanskelig å oppdage at den kan sees som to regelmessige kvadrater, det ene inne i det andre. Flere av de andre mønstrene kunne ses som foregående element med et tillegg. Dette var imidlertid ikke så fornuftig på oppgave 4.

En interessant observasjon jeg gjorde er, at når elevene fant de en strategi som fungerte for oppgaven de holdt på med, prøvde å bruke den på neste oppgave. Hvis den ikke fungerte, prøvde de en ny strategi som de tok med seg videre. De gikk vanligvis ikke tilbake til en strategi som hadde fungert tidligere.

6 Oppsummering

I denne besvarelsen forsøker jeg, med hjelp av teori, datamateriale fra observasjoner etterfulgt av analyse og drøfting, å besvare 2 spørsmål. Det første er «*Hvilke strategier benytter elevene seg av når de arbeider med generalisering av noen lineære og kvadratiske figurmønstre?*». Svar på dette finner man i avsnitt 4.2 Strategiene. I hovedsak fant jeg de samme strategiene som jeg fant i litteraturen, se avsnitt 5.1 Oppsummering av strategiene.

Det andre spørsmålet er «*Hvordan kan en samlet liste av strategier se ut, som skal dekke både elevenes strategier og de jeg finner i litteraturen?*». Denne lista finner man i avsnitt 5.2 En samlet liste av strategiene. Her skilte jeg ut en del strategier som førte til riktig resultat, noen som fungerte som forberedelser for disse og til slutt tre grupper av strategier som normalt vil gi feil resultat.

I intervjuene med elevene ga jeg bare oppgaver med figurmønstre. I litteraturen har man også sett på numeriske mønstre. Det er derfor naturlig at jeg ikke har observert alle strategiene som er nevnt i litteraturen.

Reliabiliteten for den praktiske delen av denne studien ser bra ut. Jeg finner stort sett strategier som er funnet i litteraturen, i alle fall når jeg ser på sammenlignbare oppgaver.

Jeg føler at i denne studien har det stort sett vært klart hvordan jeg skal tolke elevenes arbeid. Allikevel er det noen få tilfeller hvor jeg har vært usikker. Et eksempel finner vi i transkripsjonen av elev 1, oppgave 1: «*Tenker. Teller på figur 2. Det er 4 minus 2 som blir 2, peker på figurnummeret. Teller på figur 3. 7 minus 3 som blir 4. Så figur 4, 10 minus 4 som blir 6. Altså 2, 4, 6!*». Dette kan man enten tolke som en ren tilfeldighet, altså gjetting. Man kan også mene at eleven er på sporet av en generalisering.

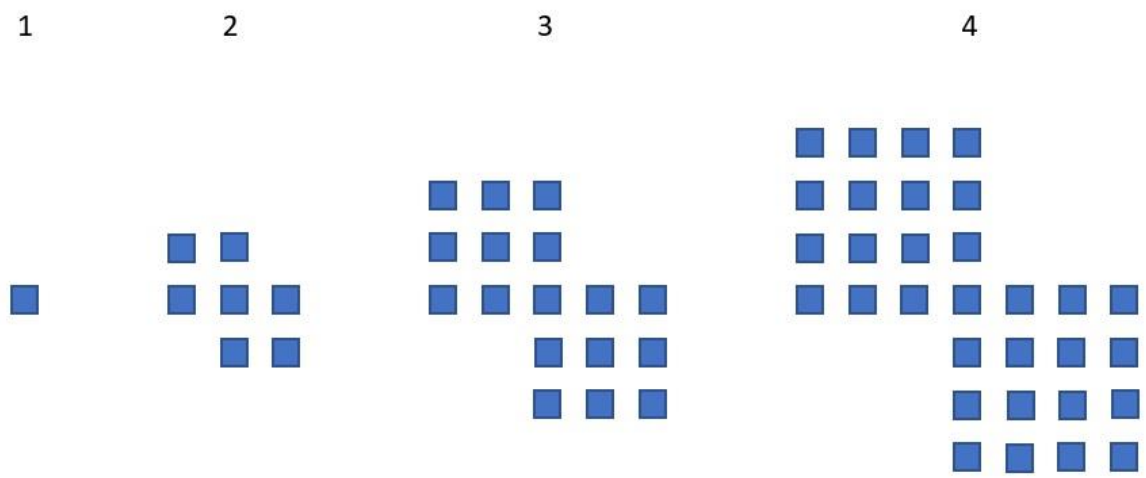
Jeg brukte litteraturen for å finne ut av terminologi og arbeidsmetoder i tillegg til at jeg noterte strategiene som jeg fant. Dette ga en brukbar oversikt og forståelse. Hovedlinjen i arbeidet videre var at jeg gjorde intervjuer med elever, transkriberte, tolket og kodet dette. Det elevene hadde gjort ble utgangspunkt for strategiene mine. Deretter sammenfattet jeg litteraturen jeg hadde gått gjennom til en annen liste med strategier. Til slutt integrerte jeg disse to listene med strategier. Jeg gjorde det i denne rekkefølgen fordi jeg ville forstå hva elevene mine hadde gjort, uten å farge dette med strategiene fra litteraturen. Altså at fokus var på hva de faktisk hadde gjort, ikke på at elevenes arbeid skulle passe inn i gitte kategorier eller strategier.

Ettersom lista over strategier fra litteraturen ble bare litt utvidet eller generalisert gjennom denne studien, kan det se ut til at både reliabiliteten og validiteten er god.

En av utfordringene under dette arbeidet har vært å forstå hva elevene har ment og skrive en tolkning. En annen har vært å sette sammen den samlede lista over strategier. Her var det mange tvilstilfelle rund hvordan jeg skulle strukturere lista og hvilke tilfeller som skulle høre med i hver strategi. Det ble i noen tilfeller nødvendig å gå tilbake til tolkningen, til og med til transkripsjon og videoopptak. Der hvor det var flere mulige tolkninger, valgte jeg en.

6.1 Videre arbeid

Det hadde vært interessant å gjøre nye intervjuer med lignende oppgaver og analysere resultatene ut fra strategiene i avsnitt 5.2 En samlet liste av strategiene. Da vil det antakeligvis være fornuftig å bare ha kvadratiske figurmønstre, se avsnitt 5.3 Erfaringer med oppgavene. Videre tror jeg det vil være interessant å ha med kvadratiske figurmønstre med negativt konstantledd. Man kunne for eksempel bruke:



Kvadratisk figurmønster med negativt konstantledd.

Hvis vi antar at lista begynner å bli noenlunde komplett, kunne man prøve å gjøre en kvantitativ undersøkelse med sikte på å finne hyppighetene av de forskjellige strategiene. I en slik kvantitativ undersøkelse vil det nok ikke være hensiktsmessig å bruke en flervalgsprøve (multiple choice), fordi svaralternativer vil være ledende spørsmål. Elevene ville i så fall knapt gjøre selvstendige generaliseringer.

7 Kilder

Beatty, R., & Moss, J. (2006). Multiple vs. numeric approaches to developing functional understanding through patterns – Affordances and limitations for grade 4 students. I Alatorre, S., Cortina, J. L., Saiz, M., & Mendez, A. (Red.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 87-94). Merida: Universidad Pedagogica Nacional,

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth Graders' Figural and Numerical Strategies for Generalizing Patterns in Algebra. I Alatorre, S., Cortina, J. L., Saiz, M., & Mendez, A. (Red.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education*, 2 (95), s. 95–101, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Bergem, O. K. (2016) 2 Hovedresultater i matematikk. I Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (Red.) *Vi kan lykkes i realfag Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22-44). doi: 10.18261/97882150279999-2016-03

Bergset, M. R., & Færaas, A. (2016, 29. november) Forskarar: Derfor heng Noreg etter resten av verda på algebra. Hentet fra https://www.nrk.no/norge/norske-elevar-slit-med-algebra-ifolgje-internasjonal-test-_-her-fortel-forskarar-korfor-1.13250576

Bishop, J. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12* (2), s. 107-126. doi:10.1007/BF03217079

Burch, R. (2014). *Charles Sanders Peirce*. Hentet fra https://plato.stanford.edu/entries/peirce/#dia Stanford Encyclopedia of Philosophy.

Creswell J. W. (2012). Educational Research : planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research. Boston. Pearson.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Number Patterns. *Educational Studies, 24* (3), s 315-331, doi:10.1080/0305569980240305

Kieran, K., (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. I Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (s. 21-33). doi:10.1007/1-4020-8131-6 et.

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra.* I *Approaches to algebra* (s. 65-86). Springer, Netherlands.

McNab, S. L. (2006). Supporting algebraic thinking and generalizing about fucntional relationship through patterning in a second grade classroom. I Alatorre, S., Cortina, J. L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Red.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 118-122). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Måsøval, H. S. (2011). *Factors Constraining Students' Establishment of Algebraic Generality in Shape Patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college* (Doktoravhandling, University of Agder Faculty of Engineering and Science). University of Agder Faculty of Engineering and Science.

Orton, J., & Orton, A (1996). Making sense of children's patterning. I Puig, L., & Guitiérrez, A. (Red.), *Proceedings of the 20th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (s. 83–90). Valencia: Program Committee.

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective*. I *PME-NA XXVIII*. Mérida: Universidad Pedagógica National.

Rivera, F. D. og Becker, J. R. (2005). *Teacher to Teacher: Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra*. I *Mathematics Teaching in the Middle School 11* (24), s. 198-203. National Council of Teachers of Mathematics.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164. doi: DOI: 10.1007/BF00579460

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Strømskag, H. (2015) *A pattern-based approach to elementary algebra. Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research*. I Mathematics Education.

The OEIS Foundation (2017, 04.05). *Search: seq:3,7,10,17,27*. Hentet fra http://oeis.org/search?q=3%2C7%2C10%2C17%2C27&language=english&go=Search

Vale, I., & Cabrita, I. (2008). Learning through patterns: a powerful approach to algebraic thinking. I K. Kumpulainen & A. Toom (Red.), *ETEN 18 - The Proceedings of the 18th Annual Conference of the European Teacher Education Network* (s. 63-69). Liverpool, England.

Utdanningsdirektoratet. (udatert) *Læreplan i matematikk fellesfag : Kompetansemål etter 10. årssteget*. Hentet 09.03.2017 fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Vedlegg 1, Transkripsjon

Elev 1

Oppgave 1 17:50

Der er oppgave 1, her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4

Ja den går opp med 2, peker på den horisontale biten, og den går opp med 1, peker på den vertikale

Hvor mange firkanter vil figur nummer 10 ha?

Teller figurene 1, 2, 3, 4 (fortsetter på hendene) 5, 6, 7, 8, 9, 10. 6 mer da.

Teller på figur 4, 7 firkanter ned 4 opp. Figur nummer 10 vil da ha 10 opp.

Teller på figur 3, 5 ned.

Så på figur 4 er det 7 ned og på figur 3 er det 5 ned.

Skriver på figur 3 er det 5 ned og 3 opp.

Figur 10 vil da ha 10 opp, og 19 ned.

Er det rett?

Nei.

Du vil sikkert vite hvorfor jeg trodde det var sånn?

Ja.

Fordi hvis du teller her (teller nederst på figur 4) så er det 1, 2, 3, 4. Så er det 4 opp også. Og så legger du på 3 fordi det er en mer enn den forrige.

Begynner å tegne. Tegner 10 horisontale, 9 opp og 9 på den horisontale biten. Sånn da? Det er vel rett?

Ja. Nå vil jeg vite hvor mange firkanter det er i figur nummer 20.

Da blir det det samme, altså 20 pluss 19 ned og 30 opp, nei 20 opp mener jeg! Altså 59 til sammen.

Det blir ikke riktig.

Da tror jeg det blir 40 nede, så 60 til sammen!

Er du sikker på det?

Nei. Hmm.. Hvis jeg tar figur 2, 10 ganger da får jeg jo 20. Da må jeg bare gange med 10! Nei. Jo. Hvordan ganger jeg det med 10 da? Jo. 1, 2, 3 (teller på figur 2) gange 10 blir 30. og 1, 2 (teller på samme figur) gange 10 blir 20. Jeg tror det blir 50 til sammen. Blir ikke det helt feil?

Hva tror du selv da?

Jeg tror jeg må gange med 20. Da blir det 60 nede. Nei, det kan ikke stemme. Hvordan skal jeg løse figur 2 da? Nei, stemmer.. du kan ikke snakke. Tegner figur 2. Skriver 3 ned og 2 opp. Tenker. Nei jeg gir opp. Skal det ikke være den der da? Peker på forslaget om 59.

Nei, men det er nesten riktig.

Da blir det 40 ned. Altså 60.

Men hvis du ser tilbake på figur nummer 2. Hvor mange firkanter er det på figur 2?

4! Aha! Åja, jeg skjønte det nå! Det skal være 40 firkanter på figur nummer 20! Nei, det kan ikke stemme. Er du sikker på at ikke du har regnet feil nå da?

Ja, jeg er sikker.

Er du sikker på at det ikke er 40? Skal det være 40?

Nei.

Tenker en stund. Teller på figurene: Figur 1 har 1, figur 2 har 4, figur 3 har 7, figur 4 har 10. Så da er det 3 mellom 1 og 2, 3 mellom 2 og 3 og 3 mellom 3 og 4. Det går opp med 3 for hver gang. Da blir figur nummer 5, 10 ganger 3. Nei. Det blir 13. 6 blir 16, 7 blir 19, 8 blir 22, jeg skal ikke gjøre sånn hele veien altså, 9 blir 25 og 10 blir 28. Så ganger jeg det, nei, kan jeg gange det med noe da? Hvor mye mangler jeg da? 10! 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. Selvfølgelig blir det 30! Jeg kan ikke regne ut 28 ganger 30! Jo det kan jeg! Dette blir helt feil regnemåte, for dette blir over 200! Vel vi fortsetter. 11 har 31 (teller på fingrene, og pauser etter hver 3'er)… 43. skriver det ved 15. 46, 49, 52, 55, 58. 58 firkanter blir det i figur nummer 20.

Ja.

Det blir 38 ned, ikke 39! Fordi 20 pluss 38 er 58!

Nå vil jeg vite hvor mange firkanter det er i figur nummer 100.

Jeg klarte så vidt 20. Ok, hva gjorde jeg ista? Det øker med 3 og figur 20 var 58. Så 38 gange 5 blir 190. Jeg tenkte at på figur 20 var det 38 og 100 er 5 ganger større enn 20. så da må det være 190 firkanter i figur 20.

Hmm? Hvordan tenkte du nå?

Tenker. Teller på figur 2. Det er 4 minus 2 som blir 2, peker på figurnummeret. Teller på figur 3. 7 minus 3 som blir 4. Så figur 4, 10 minus 4 som blir 6. Altså 2, 4, 6! Ehm, hvordan var det jeg tenkte nå? Teller på fingrene, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. Da har jeg 10, ikke sant? 10 blir 20? Ja, selvfølgelig! Skriver 20 blir 10. Så hvis jeg ganger 20 med… 10, det blir 200. Det blir ikke over 300. Blir det over 300?

Hva tror du da?

Så da tar du 200 ned og 100 opp. 300 til sammen på figur nummer 100.

Hvordan tenkte du da?

Ehm, her ganger du med 2 mer (peker på figur nummer 3). Hmm, hvordan var det jeg tenkte. Skjønner du hva jeg mente? Teller på figur 2, her er det 4, minus 2, det blir 2. teller på figur 3. 7 minus 3 det blir 4. Teller på figur nummer 4, 10 minus 4 blir 6. Da har du 2-gangen, 2, 4, 6. Så for figur 5 har du 8 her, peker på figur 5 skal være 8. Fordi 5 minus som blir 8. Vent litt da. 13, fordi 5 minus 13 er 8. Så da er den vertikale biten 5. Da blir det (peker på det som er igjen) det blir 8. Så tenkte jeg sånn. Blir det rett?

Nesten.

Nesten? Sikkert 2 mindre da, nei.. 1 mindre. Så 99 opp da.

Er det endelig svar?

Ja!

Det er nesten rett..

98 da! Fordi det blir minus 2 her (peker på utregningen av figur nummer 20)

Oppgave 2 Feil ved opptak

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å skrive: Figur 1 har 2, figur 2 har 6, figur 3 har 12, figur 4 har 20. Videre skriver hun ned differansen fra figur 1 til 2 som er 4, fra 2 til 3 som er 6, fra figur 3 til 4 som er 8. Ser at differansen øker med 2 for hver gang. Regner da videre til og med fi

Oppgave 3 2:18

Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å telle firkantene i hver figur. Figur 1 har 3, figur 2 har 9, figur 3 har 19, figur 4 har, 4 gange 4 som er 12. 12 pluss 12 pluss 1 er 25. (skriver på arket) $10 * 10 = 100 * 2 = 200 + 1 = 201$.

Hvordan tenkte du?

På figur 2 er det 2 der (peker på figur 2 at det er 2 firkanter i hver retning), og 2 der. Det blir 4. Så er det 2 sånne og 1 firkant i midten. På figur 3 er det tre og på 4 er det fire.

Bra. Hvor mange firkanter er det i figur 100 da?

Skriver på arket sitt $100 * 100 = 10000$, $10000 * 2 = 20000 + 1 = 20001$.

Oppgave 4 2:22

Her skal du finne hvor mange firkanter det er i figur nummer 10.

Begynner å skrive på arket sitt, figur 1 er 1, figur 2 er 5, figur 3 er 13. teller høyt på figur 4. 4 pluss 3 pluss 4. Åh, jeg fant det ut! Så 25 firkanter. Jeg skjønte at det var noe siden firkantene var forskjellig farge. Teller på figur nummer 4 og skriver på arket sitt. 10*10 =100, 9*9=81. Legger sammen og finner 181.

Hvordan tenkte du nå?

Først så telte jeg firkantene i hver figur. Da så jeg at det var et system i de blå og de hvite firkantene. Da jeg telte på figur 4, så jeg at det var 4 gange 4 hvite og 3 blå, som er en mindre enn 4 gange 3 blå. Altså 16 pluss 9 som er 25. Så i figur 10 ville det være 10 hvite, så jeg tok 10 gange 10 som ble 100. Så måtte det være 9 blå, da ble det 9 gange 9 som er 81. så plusset jeg sammen det til 181.

Bra! Hvor mange firkanter er det i figur 100 da?

Skriver på arket sitt, $100 * 100 = 10000$, $99 * 99 = 9801$, $10000 + 9801 = 19801$.

Elev 2

oppgave 1 18:08

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4. Det jeg lurer på er hvordan figur nummer 10 vil se ut?

Tegner på arket, figur 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 og 10. Hun tegner figur 1 slik som figur 2 ser ut, altså med 4 firkanter på figur 1. På figur 6 øker hun den vertikale biten med en ekstra firkant, slik at hun har 7 istedenfor de 6 det skulle vært om hun fulgte sitt mønster (egentlig 5). (Dette forplanter seg videre, slik at hun på figur 10 har 33 firkanter, ikke 28). Sånn!

Hvor mange firkanter har du i figur 10?

Hun teller og kommer fram til 33.

Kan du forklare meg hvordan du tenkte for å komme fram til det?

Figuren øker med 3 for hver gang.

Er du sikker på at det blir 33 i figur 10 da?

Hun skriver: Figur 2 har 1+3, figur 3 har 4+3, figur 4 har 7+3, figur 5 har 10+3, figur 6 har 13+3, figur 7 har 16+3, figur 8 har 19+3, figur 9 har 22+3, figur 10 har 25+3, figur 11 har 28+3. Så figur 10 har 28.

Supert! Hvor mange firkanter er det i figur 100?

280? Fordi 28 gange 10 er 280 og 10 gange 10 er 100.

Er du sikker på at det blir rett?

Ikke når du spør sånn, nei. *tenker et par minutter*. Jeg vet ikke helt jeg.

Du vet at økningen fra en figur til neste er?

3

Ja, kan du prøve å finne en formel, ved hjelp av figurene du har, som kan brukes for figurene du har?

tenker et minutt. 1 gange 2 er 3. Nei. 1 gange… Nei, jeg skjønner ikke helt.

Så du vet at økningen fra en figur til neste er 3. Hvor mye starter du med på første figur?

1.. Så du starter med 1 så plusser du på 3 så plusser du på 3 igjen og så 3 igjen. Jeg kan ta 90 gange 3. Og plusse på 28. Fordi når for å komme til figur 10 plusser du 3, 10 ganger. Så for å komme til figur 100 må du plusse på 3, 90 ganger til. Skriver på arket sitt. 90*3=270. 270+28=298.

Supert.

Oppgave 2 7:53

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Skriver på arket sitt, figur 1 har 2, figur 2 har 2+4, figur 3 har 4+6 figur 4 har 6+8, figur 5 har 8+10. figur 6 har 10+12, figur 7 har 12+14, figur 8 har 14+16, figur 9 har 16+18, figur 10 har 18+20. da er det 38 firkanter i figur 10. *ser på figurene på oppgaven*. Åja, det blir, skriver på arket sitt. Figur 2 har 6, figur 3 har 6+6 figur 4 har 12+8, figur 5 har 20+10. figur 6 har 30+12, figur 7 har 42+14, figur 8 har 56+16, figur 9 har 72+18, figur 10 har 90+20. Figur 10 har 110 firkanter.

Supert! Hvor mange firkanter er det i figur nummer 100?

Så for figur nummer 2 vil det være 2 gange 3, som er 6. For figur 3 er det 3 gange 4 som er 12. Ja, det stemmer. Så for figur 10 vil det være 10 gange 11 som er 110. For figur 100 vil det være 100 gange 101 som er 10100.

Hvordan tenkte du da?

Det så ut som det passet med 2 gange 3 som er 6 og 3 gange 4 som er 12. Så tegnet jeg figur 4 for å se om det stemte. Det gjorde det.

Supert!

Oppgave 3 4:02

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4. Det jeg lurer på er hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Skriver på arket sitt: Figur 2 har 3+6. Figur 3 har 9+10. Figur 4 har 19+14, figur 5 har 33+18. Figur 6 har 51+22, figur 7 har 73+26, figur 8 har 99+30, figur 9 har 129+34, figur 10 har 163+38. Figur 10 har 201 firkanter.

Hvordan tenkte du da?

Du tar forrige figur og legger på fire mer enn forrige gang. Så for figur 2 tar du 3+6. For figur 3 tar du den forrige som er 9 og plusser på fire mer enn forrige gang, altså 10. Da får du 19. osv.

Oppgave 4 19:24

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Skriver på arket sitt: Figur 5 har 25+24, figur 6 har 49+48, figur 7 har 97+96, figur 8 har 193+192, figur 9 har 385+384, figur 10 har 769+768. Figur 10 har 1537 firkanter.

Hvordan tenkte du da?

Ser på figurene på oppgaven for å forklare. Ser at økningen til økningen er 4. Skriver på nytt ark: Figur 5 har 25+12=37, figur 6 har 37+16, figur 7 har 53+20, figur 8 har 73+24=97, figur 9 har 97+28=125, figur 10 har 125+32=157. Fra figur 1 til 2 blir det lagt til 4, fra figur 2 til 3 blir det lagt til 4+4, fra figur 3 til fire blir det lagt til 8+4. *90 sekunder tenking*. Nei, jeg skjønner ikke.

Hvis du fortsetter den tenkinga du holder på med nå, hvordan blir det da?

Så økninga fra figur 1 til 2 er 4, fra figur 2 til 3 er det 8, fra figur 3 til 4 er det 12. Da må økninga fra 4 til 5 være 16. Skriver på arket sitt: figur 5 har +16, figur 6 har + 20, figur 7 har

+ 24, figur 9 har + 28 figur 10 har + 32. Teller på oppgaven med figurene og tenker en stund. Nei, jeg vet ikke.

Hvis du bare ser på figur nummer 3, for å se hvor mange firkanter den består av. Kan du fortelle meg det?

Sidelengden på figur 3 er 3, på figur 4 er den 4, så på figur 5 vil den være 5. På figur 3 blir det 3 gange 3, på figur 4 blir det 4 gange 4. Skriver på arket sitt: på figur 5 blir det 5 gange 5.

Har du med alle prikkene da?

Nei. Jeg har ikke med alle, fordi de er ikke et kvadrat. På figur 5 blir det 5+5+3+3. Nei, jeg skjønner ikke.

På figur nummer 2. Hvor mange hvite og hvor mange blå firkanter består den figuren av?

1 blå og 4 hvite.

Hva med figur nummer 3?

9 blå og 4 hvite.

Og på nummer 4?

16 hvite og 9 blå.

Hvor mange hvite vil det da være på figur 5?

16

Ja, og hvor mange blå?

Sikkert mange flere. 25.

Så på figur nummer 5 har du 25 blå og 16 hvite. Ser du noen sammenheng der?

Nei

vi stopper der

Elev 3

Oppgave 1 6:53

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å tegne de fire figurene fra oppgaven på arket sitt. Skriver figur 5 har 10+3=13, figur 6 har 13+3=16, figur 7 har 19, figur 8 har 22, figur 9 har 25, figur 10 har 28.

Supert. Hvor mange firkanter er det i figur nummer 100?

Skriver på arket: $n + n + (n - 2)$. Eller $n + (n - 1) * 2$, fordi figuren har n firkanter i høyden og to armer som hver er $n - 1$. Jeg starter med å se hva figuren og figurnummeret har til felles. Figur to har en høyde på to firkanter, figur 3 har en høyde på 3 firkanter. De to armene er en mindre enn n.

Oppgave 2 1:52

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å tegne 3 av figurene fra oppgaven på arket sitt. Blir det 110?

Hvordan tenkte du da?

Jeg begynner igjen med å se hva figuren og figurnummeret har til felles. Figur 1 er en firkant høy. Figur 2 er 2 firkanter høy, figur 3 er 3 firkanter høy. Figur 1 er også 2 bred som er en mer enn figurnummeret. Figur 2 er 3 bred som igjen er 1 mer enn figurnummeret, og 4 er en mer enn 3.

Supert! Klarer du å skrive den eksplisitte formelen til figuren?

Skriver: $n * (n + 1)$

Oppgave 3 5:09

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å tegne de fire figurene fra oppgaven på arket sitt. Skriver: figur 1 er 1*1+1*1+1, figur 2 er 2*2+2*2+1, figur 3 er 3*3+3*3+1 figur 4 er 4*4+4*4+1. Skriver så: $(n * n) * 2 + 1$. Så figur 10 er $(10 * 10) * 2 + 1 = 201$.

Supert! Jeg liker at du går via den eksplisitte formelen for å finne svaret! Hvordan tenkte du her?

Jeg begynte med å se på likheten mellom figurene. Først tenkte jeg på 2 ganger 3 fordi figur nummer 1 hadde tre firkanter, men da satt jeg igjen med 2 firkanter i figur nummer 2. Så prøvde jeg det samme på figur 3, men da ble jeg sittende igjen med 4 firkanter istedenfor bare 1. Deretter så jeg på figurnummeret i forhold til den ene sida. Figur nummer 2 har 2 grupper med firkanter som har en høyde og bredde på 2 firkanter. På figur 3 er det 2 grupper med firkanter som har en høyde på 3 og en bredde på 3 firkanter. Da vil det bli figurnummeret gange med seg selv, gange 2 fordi det er 2 like grupper. Til slutt må jeg legge til 1 fordi den ene forandrer seg ikke fra en figur til neste.

Oppgave 4 8:00

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Er det noen forskjell på firkantene eller er det bare fargen?

Nei, det er bare fargen.

Begynner med å tegne de fire figurene fra oppgaven på arket sitt. Skriver så:

$4 * 4 + (4 - 1) * (4 - 1)$, $n * n + (n - 1) * 2$. Så figur 10 er 10*10=100 og 9*9=81. 100+81=181.

Hvordan tenkte du her?

Figuren består av 2 kvadrater. Et av dem består av hvite firkanter og et av blå. På figur 4 er det 4*4 hvite og 3*3 blå. Det gjelder også på figur 3. Det store kvadratet er 3*3 og det lille kvadratet inni er en mindre altså 2*2.

Elev 4

Oppgave 1 3:29

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Tegner figur 10.

Hvordan tenkte du da?

Jeg så at på figur 2 var det 2 firkanter fra hver av armene til og med sentrum, på figur 3, var det 3 og på figur 4 var det fire. Derfor er det 10 firkanter fra hver av armene inn til sentrum av figuren.

Hvor mange firkanter vil det da være på figur nummer 100?

Det vil være 300. Nei, vent litt. 298 vil det være fordi hvis hver av armene er 100 lange bruker jeg den firkanten i midten 3 ganger, da må jeg trekke fra 2 for ikke å bruke den mer enn 1 gang.

Oppgave 2 2:06

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Det vil være 100.

Hvorfor det?

Eller kanskje det vil være 90 fordi.. Nei vent, det er 5 i bredden på figur 4. Da vil det være 110 i figur nummer 10. Fordi figuren er alltid 1 mer i bredden enn i høyden. Høyden er det samme som figurnummeret. Så på figur nummer 10 vil det være 10 nedover og 11 bortover.

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Den vil være 100 nedover og 101 bortover, så 10100.

Oppgave 3 8:38

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Det vil være 81 firkanter i figur nummer 10. Fordi figuren er 4 firkanter høy, så på figur 10 vil det være 4 horisontale rekker med 10 i hver. Så er det 2 sånne grupper og 1 i midten.

Er du sikker på det?

101

Hvordan tenkte du da?

Fordi den nederste linja vil være 11 til sammen. Så vil figuren være 10 høy. Da får du 2 grupper på 50 og 1 i midten. 101 til sammen.

Hva er forskjellen på for eksempel figur nummer 3 og figur nummer 4?

Figur nummer 3 har 3 firkanter fra midten til en av sidene og fra bunn til topp. Figur 4 har 4 fra midten til en av sidene og 4 fra bunn til topp. Så figuren vil alltid bli en høyere fra en figur til neste, men ikke i midten.

Hvordan vil figur nummer 5 se ut da?

Tegner figur 5, men tegner den med 2 grupper på 5 i bredde og 6 i høyden og 1 i midten. Innser at den er 1 for høy, så det blir to grupper på 5*5 og 1 i midten.

Hvordan vil figur nummer 10 se ut da? Du trenger ikke tegne den, bare fortell meg.

Den vil være 10 firkanter fra midten til en av sidene og 10 høy.

Hvor mange prikker vil den bestå av da?

Teller på figur nummer 5 som nettopp ble tegnet. Tenker litt. 101.

Hvis figuren hadde bare vært (legger over ark slik at figuren blir n^2) sånn. Hvor mange firkanter ville det vært i figur nummer 10 da?

Sier med en stemme som tyder på at han har skjønt noe: Da ville det vært 100. Så hele figuren vil da være 201.

Hvordan ville figur nummer 100 ha sett ut da?

Den ville vært den ville vært 100 fra midten til hver av sidene og 100 fra bunn til topp.

Kan du si noe mer om den?

Nei, jeg tror ikke det.

Oppgave 4 24:30

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Teller på figur 4. 55 der, så 110 til sammen. Fordi hvis du starter på en av sidene så er det 4, så 3, 2, 1 inn til midten. Så for figur 10 vil det være 10, 9, 8 osv, altså 55. og 110 til sammen.

Nei vent litt. Den vil være 20 i omkrets, så blir det.. Omkretsen av hvert kvadrat innover i figuren går ned med 4. Nei, jeg vet ikke.

Hvordan vil figur nummer 5 se ut da?

Begynner å tegne på figuren. Tegner 5 firkanter på hver side av figuren, så omkretsen av figur 5 blir 20.

Hvor mange firkanter er det i figur nummer 4?

26. Teller en gang til og får 25.

Hvor mange av dem er blå, og hvor mange er hvite?

16 hvite og 9 blå. Hva kan være sammenhengen da.. *tenker i 2 min*. På figur 10 vil det være 10, 9, 8, til du kommer til 1 (fra en sidekant til firkanten i midten). Så vil det være det samme på den andre siden. 1 gange 1 er 1 (peker på figur 2), 2 gange 2 er 4 (peker på figur 3), 3 gange 3 er 9 (peker på figur 4) og 4 gange fire som blir 16 blå rundt (på figur 5). *tenker i 2 min* Figur 10 har 72 blå. Skallet rundt vil bli 30 firkanter på figur 10.

Hvordan tenker du nå?

På figur 10 vil det være 10 firkanter på toppen og 10 på bunnen og halvparten på hver av sidene. (Bruker figur 4 hvor det er 4 på topp og bunn og 2 på hver av sidene). Det vil stå igjen noen firkanter i midten. Det må være 8. det vil bli 46 firkanter i det ytterste skallet i figur 10. Fordi 10+10+8+8 *tenker i 5 min*. Nei, jeg klarer det ikke.

Hvis du ser på de blå firkantene i figur nummer 3. Hvilken figur danner de?

Et kvadrat.

Hvordan finner du arealet av et kvadrat?

Side gange side. Sånn ja. Skriver: 100+81+64+49+36+25+16+9+4+1=385.

Så på figur 4 vil summen av firkantene være 16+9+4+1?

Ja, for den går jo alltid 1 innover for hver gang. Fordi det blir jo 10 gange 10 og 9 gange 9 og 8 gange 8 osv. Det går jo innover på en måte.

Så hvis du bare ser på figur 4. Kan du sette strek over de du har regnet med da?

Begynner med 16. setter strek over alle de hvite firkantene. Åi, sånn ja. Da vil det bli 385 gange 2.

Er du sikker på det?

Ja, jeg tror det?

Hvis du fortsetter med å sette strek over dem du har regnet med på figur 4, hvordan blir det da?

setter strek over de 12 ytterste hvite firkantene. Men nå er det jo 9 firkanter.

Men hvis du skal sette strek over alle de hvite firkantene, hvor mange firkanter må du sette strek over da?

Åja, da bruker jo de fire hvite i tillegg! Fordi de ytterste hvite er jo 12 og 12 pluss 4 er jo 16. Vent, da blir det jo.. Så på 10 gange 10 vil jeg jo få med alle de hvite innover i figuren også. *går tilbake til regnestykket han har skrevet: 100+81+64+49+36+25+16+9+4+1. Setter stek over 4, 16, 36 og 64. Vent litt. Hvis jeg har 100 bruker jeg jo opp alle de andre også.

Er du sikker på det?

Ja, fordi da har jeg jo tatt med alle de andre. Men.. det er jo partallene som blir hvite, så da er det bare dem jeg kan sette strek over. Så da må det bli 100 pluss alle oddetallene i figur nummer 10.

Hvis du ser på figur nummer 4. Hvor mange av oddetallene bruker du opp når du tar 3 gange 3 da?

Da bruker jeg jo opp alle de blå rutene. Så da vil 81 bruke opp alle de andre oddetallene. Da vil det bli 181 firkanter i figur nummer 10.

Det blir det.

Vi avslutter der.

Elev 5

Oppgave 1 5:07

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Setter i gang med å tegne figuren. Tegner en firkant i midten med 3 armer som er 9 firkanter hver.

Hvordan tenkte du?

Man legger på en firkant på hver arm. Den starter med en firkant i midten på figur en. På figur 2 får du en firkant på hver arm. For hver figur legger man på 3 figurer.

Hvor mange firkanter er det i figur nummer 100?

280. Fordi figur 100 er 10 ganger figur 10, så da blir det 28 gange 10.

Nei, det er ikke rett.

På figur 100 skal hver arm ha 99 firkanter, så 99 pluss 99 pluss 99 pluss 1 i midten. Legger sammen 99+99+99 og får 308. legger på 1 og får 309. Nei, det kan ikke stemme. Trykker regnestykket på kalkulator og får 298.

Kan du forklare meg hvordan figur nummer 1000 vil se ut?

Den vil ha 3 armer på 999 og 1 i midten. Så $999 * 3 + 1$.

Oppgave 2 2:27

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Tegner 10 firkanter vertikalt og 10 horisontalt, slik at det blir 11 til sammen. Begynner så og fylle inn firkanter

Kan du forklare hvordan figuren ser ut?

Den er 10 vertikalt og 11 horisontalt, fordi på figur 4 er det 4 vertikale og 5 horisontale firkanter. Så 110 firkanter i figur nummer 10.

Hvor mange firkanter vil figur nummer 100 ha?

Da vil det være 100 firkanter vertikalt og 101 firkanter horisontalt, så 10100 firkanter til sammen.

Oppgave 3 2:32

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

*Tegner 10 firkanter horisontalt. Så 9 firkanter vertikalt fra firkant nummer 10 (10*10). Tegner så 11 firkanter og på firkant nummer 10 fra motsatt side tegner hun 9 firkanter vertikalt* (tegner altså omrisset av figur nummer 10). Så figur nummer 10 vil ha 201 firkanter, fordi 10*10*2+1. Fordi figur 4 er 4 der (horisontalt) og 4 der (vertikalt), så er det 2 sånne og 1 i midten, så figur 10 vil være 10 der (horisontalt) og 10 der (vertikalt).

Hva med figur nummer 100?

Der vil det være 100*100*2+1, altså 20 001.

Oppgave 4 17:44

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å tegne figur nummer 2, tegner så 3 firkanter til høyre for de to ytterste i figur nummer 2, så fire utenfor der osv til hun har 10 firkanter vertikalt, som en trekant inn til firkanten i midten. Altså 10, 9, 8 osv. Teller firkantene i figur nummer 4, finner 25. Det må være 10 rader. Det blir minst 40. På figur 4 er det fire firkanter ytterst, så på figur 10 må det være ti firkanter ytterst. Så da må det bli 10 gange 10 fordi på figur 3 er det 3 gange 3 og på figur 2 er det 2 gange 2. Okei, 10 gange 10 er 100. På figur 5 er det 41. det kan jeg jo bare gange med 2 for å finne antallet i figur nummer 10. Nei, det går ikke. *tenker i noen minutter* Nei, jeg vet ikke.

Tror du at det er noen grunn til at noen av firkantene er blå og noen er hvite?

Det er vel et mønster av noe slag? Det er oddetall og partall, fordi på figur 2 og 4 er de ytterste hvite og på figur 1 og 3 er de ytterste blå. Så på figur 3 er det $3 * 3$ blå og $2 * 2$ hvite. På figur 4 er det $4 * 4$ hvite og $3 * 3$ blå. Så på figur 10 er det $10 * 10$ hvite og $9 * 9$ blå. Som er 181 til sammen.

Hva med figur 100?

Da må det bli $100 * 100$ pluss $90 * 90$. Så 18 100. *tenker litt* Nei. $99 * 99$.

Elev 6

Oppgave 1 9:00

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Tegner figur nummer 5 og 6. Det blir 24, fordi du plusser alltid på 2 på den horisontale biten og 1 på den vertikale biten. Da blir det 2 gange 5, så må jeg legge til 9 som jeg har på figur 5. Det blir 19. Så må jeg legge til 5 fordi den vertikale biten øker med 1 for hver så 5 gange 1. Da får jeg 19 pluss 5 som er 24. Så må jeg legge til disse 4 (peker på figur 5). Da blir det 28.

Hvor mange firkanter er det i figur 100 da?

Da blir det 90 gange 2 pluss 90 gange 1 pluss 28, som er 298. Fordi nå har jeg allerede funnet figur 10 og det er 28. Den horisontale biten øker med 2 og den vertikale med 1. Det må jeg gange med 90, så må jeg legge til 28.

Oppgave 2 12:46

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Skriver: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. Legger de sammen og får 110.

Hvordan tenkte du?

Jeg ser at økninga fra ingen figur til figur 1 er to, økninga fra figur 1 til figur 2 er fire, økninga fra figur 2 til figur 3 er 6 osv. Så la jeg sammen det 10 ganger og fikk 110. (egen kommentar: figuren er forrige figur pluss økninga. Økninga er 2n)

Supert! Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Da blir det litt mye å telle. Trykker på kalkulator: 110*10. Nei. Det blir feil. Jeg skal jo bare legge sammen partallene. *Tenker i 5 min*. Figur 2 er 2 høy, figur 3 er 3 høy, så figur 100 er 100 høy. Figur 2 er 3 bred, figur 3 er 4 bred så figur 100 må være 101 bred. Så figur nummer 100 har 10100 firkanter.

Oppgave 3 3:35

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Det må være 201, fordi på figur 4 er det to grupper (kvadrater) på fire gange fire firkanter og en i midten. Så for figur 10 må det være to grupper på ti gange ti firkanter og en i midten.

Hvor mange firkanter er det da i figur 100?

20 001.

Supert

Oppgave 4 25:38

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Skriver: Figur 10, 10*10=100, 9*9=81, 8*8=64, 7*7=49, 6*6=36, 5*5=25. Teller antall firkanter i figur nummer 4 og legger antallet sammen med alle summene og får 380.

I den ytterste firkanten på figur 4 er det fire gange fire firkanter, så på figur 10 er det ti gange ti i den ytterste firkanten. Videre så er det noen firkanter inne i figuren også, så jeg tok 9 gange 9 til og med 5 gange 5.

Det er ikke riktig

Fortsetter multiplikasjonen fra tidligere, men går til og med 1 gange 1 og legger sammen. Summen blir da 385 ($10^2 + 9^2 + \cdots 2^2 + 1^2$).

Det er heller ikke riktig.

Tenker i noen minutter. Nei, det går ikke.

Se om den metoden du brukte, for å finne antall firkanter i figur nummer 10, fungerer for en av figurene du har på oppgaven.

Teller firkantene på figur 4 og finner 25 firkanter. *tenker i flere minutter*. Så på figur 4 er den ytterste firkanten 4+3+3+2. Den innenfor er 3+2+2+1 osv. Så for figur 10 er det 10+9+9+8. Men det blir litt mye å gjøre det hele veien. *Tenker noen minutter*. Nei, det går ikke.

Tegn figur 4 med de blå og hvite hver for seg.

Tegner. Åja! Jeg trenger ikke å legge sammen alle tallene ($10^2 + 9^2 + \cdots 2^2 + 1^2$), jeg trenger bare å legge sammen de to første. Da har jeg jo fått med alle inni også. Da blir det 10 gange 10 som er 100 og 9 gange 9 som er 81. 100 pluss 81 er 181.

Elev 7

Oppgave 1 20:19

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å tegne figur nummer 1, 2, 3 og 4. Ser at den horisontale biten øker med 2 firkanter for hver gang, fortsetter med å kun tegne den horisontale biten. Finner ut at på figur 10 er den horisontale biten 19 firkanter. På figur 3 er den 3 høy, på figur 4 er den 4 høy, derfor er den 10 høy på figur 10, men den ene firkanten har vi allerede telt med, så derfor er det 19+9 som er 28 firkanter i figur 10.

Supert! Hvor mange firkanter er det i figur nummer 100?

På figur 10 var det 19 firkanter horisontalt, så jeg ganget med 10 og fikk 190. På figur 100 er det også 100 firkanter i høyden. En av dem er allerede brukt opp, så da er det 99 firkanter. 190 pluss 99 er 289.

Det er ikke riktig.

Skriver 2*90=180. 180+99=279. Fordi fra figur 10 til figur 100 er det 90. For hver figur legger du til 2 på den horisontale biten.

Det er ikke riktig.

Det øker til sammen 99 ganger fra figur 1 til figur 100. Det er altså 99 gange 2 firkanter i den horisontale biten. Legger så til den vertikale biten som er 99 og får 297. Nei vent, siden jeg bare ser på økninga til den horisontale biten så teller jeg ikke med den i midten. Da blir det 2 gange 99 som er 198. så må jeg legge til 100 fordi den er 100 høy.

Oppgave 2 2:03

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

I figur nummer 4 er det 4 firkanter i høyden og 5 firkanter i bredden, så i figur 10 er det 10 i høyden og 11 i bredden, altså 110 firkanter.

Hva med figur 100?

Da må det være 100 i høyden og 101 i bredden, altså 10100 firkanter.

Oppgave 3 1:26

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

201, fordi hvis du ser på figur 4 er den 4 høy og 4 bred som er 16. Så er det 2 sånne, altså 32 og 1 i midten. For figur 10 er det 10 gange 10 som er 100, så må du gange med 2. Da blir det 200 og 1 i midten. 201 til sammen.

Hva med figur nummer 100?

Da er det 100 i lengden og 100 i bredden, gange 2 fordi det er 2 sånne, og 1 i midten. 20 001 til sammen.

Oppgave 4 14:57

Her ser du figur nummer 1, 2, 3 og 4, Hvor mange firkanter er det i figur nummer 10?

Begynner med å telle antall firkanter i figur nummer 3 og 4. På figur 4 er det fire firkanter i lengde og bredde på den ytterste firkanten. Da må det være 10 firkanter i lengde og bredde på figur 10. Altså 40 firkanter i den ytterste firkanten, så er det 1 mindre i de mindre firkantene. Da blir det 40+36+… Nei, jeg tror jeg må tegne den jeg. Tegner den ytterste firkanten. Finner ut at det er 10+9+9+9 firkanter i ytterste skall. Kommer ingen vei.

Vedlegg 2, Tolkning

Koder	**Forklaring**
Tegner	Tegner element(er)
Deler	Tenker hvert element delt på samme måte, normalt slik at det er lettere å regne for hver del
Skriv-rekke	Skriver antall komponenter for hvert element
Skriv-aritm	Skriver et eksplisitt uttrykk for antall komponenter i et element
Teller	Teller antall komponenter i et element fra oppgave eller egen tegning
Konstant-diff	Ser at differansen mellom to elementer er den samme for hele rekka
Regner	Regner antall komponenter, vanligvis i en del av et element eller ved å sette inn verdier i en formel.
Gener-munt	Generaliserer muntlig – konkretisert ved utregning
Gener-forml	Generaliserer skriftlig – skriver formel for antall komponenter
Rekurr-munt	Ser generell rekurrens-regel, formulerer muntlig – konkretisert vet utregning
Hopp-telle	Teller men hopper over verdier for å finne neste: $M(n) + d = M(n+1)$, $M(n+1) + d = M(n+2) \ldots M(n+m)$: 10 $_{11\ 12}$ 13 $_{14\ 15}$ 16 $_{17\ 18}$ 19 -gjøres samtidig med å telle elementnummer

Tillegg	Regner $M(n+m) = Mn + dm$
Serie-add	Regner $M(n) + d = M(n+1)$, $M(n+1) + d = M(n+2) \dots M(n+m)$
Regn-rekurr	Regner serie verdier ved hjelp av rekurrens formel
Overlapp-feil	Tar med et eller flere komponenter flere ganger etter oppdeling
Propor-feil	Regner proporsjonalitet mellom elementer $M(n * k) = n * M(k)$
Regnefeil	Unøyaktighet i regning
Tegnefeil	Unøyaktighet i tegning
Start-feil	Starter første element feil
Roter	Glemmer deler, husker feil verdi til utregning, husker ikke hva verdier skulle brukes til
Lineær-feil	Antar lineær utvikling der det ikke stemmer
Expon-feil	Antar eksponentiell utvikling, gjerne ved rekurrens, for eksempel Fibonacci-rekke
Trekant-dele	Mener at en kvadratisk form kan deles i 2 trekanter med et av kvadratets sider som grunnlinje
Oppfatt-feil	Oppfatter element feil, for eksempel at antall komponenter i ei ramme med $4 * 4$ er 16, skal være 12, eventuelt at høyden på et element alltid er 4.

Gener-uklar	Ser en generalisering, men uklart – greier ikke utnytte
R	Gav riktig resultat
(R)	Burde ha gitt riktig resultat, men gjorde en slurvefeil
F	Strategi som gir feil resultat

Forklaring av analyse av transkripsjon

I dette vedlegget har jeg klippet ut det jeg mener er det vesentlige av det elevene sa og gjorde. Jeg har kun tatt med det jeg har kunnet forstå. Jeg ser også at jeg kan ha vært litt ledende i noen av spørsmålene eller tilbakemeldingene jeg ga. Elevenes utsagn som kan være påvirket av dette har jeg ikke tatt med videre.

Det jeg sa er gjengitt med innrykk, det elevene sa med vanlig skrifttype og vanlig marg. Videre har jeg skrevet inn min tolkning av hva elevene har tenkt, ganske kortfattet. Dette er skrevet med fete typer. Til slutt har jeg skrevet på analyse-koder med kursiv skrift. Det jeg oppfatter som avgjørende for strategien har jeg dessuten satt i fete typer. Jeg avslutter linja med koding med R når eleven kom fram til riktig svar, (R) når strategien burde ha gitt riktig svar og F når strategien ikke gir riktig resultat.

Jeg tror jeg best kan forklare oppsettet av resultatene av analysen ved et eksempel:

<u>Sammendrag av transkripsjon:</u>

Figur 2 har 6, figur 3 har 6+6 figur 4 har 12+8, figur 5 har 20+10. figur 6 har 30+12, figur 7 har 42+14, figur 8 har 56+16, figur 9 har 72+18, figur 10 har 90+20. Figur 10 har 110 firkanter.

<u>Min tolkning av sammendraget:</u>

Ser at et element er forrige element addert med 6, 8, 10. Altså økningen er i 2 gangen. Riktig bruk av rekurrens.

Koding av tolkningen:

Rekurr-munt *regn-rekurr R*

Oppgave 1

Elev 1

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Fordi hvis du teller her (teller nederst på figur 4) så er det 1, 2, 3, 4. Så er det 4 opp også. Og så legger du på 3 fordi det er en mer enn den forrige.

Begynner å tegne. Tegner 10 horisontale, 9 opp og 9 på den horisontale biten.

Deler inn i 3 deler. Tegner og teller opp. Fører til riktig svar.
Deler, ***tegner, teller****, R*

Hvor mange firkanter er det i figur 20?

Da blir det det samme, altså 20 pluss 19 ned og 30 opp, nei 20 opp mener jeg! Altså 59 til sammen.

Deler inn i 3 deler, men teller en av komponentene flere ganger. Fører ikke til riktig svar.

Deler regner overlapp-feil *F*

Da må jeg bare gange med 10! Nei! Jo! Hvordan ganger jeg det med 10 da? Jo! 1, 2, 3 (teller på figur 2) gange 10 blir 30. og 1, 2 (teller på samme figur) gange 10 blir 20. Jeg tror det blir 50 til sammen.

Tar utgangspunkt i element 2 og vil multiplisere med 10. Deler inn i 2 deler, multipliserer og adderer delene. Teller en av komponentene flere ganger. Fører ikke til riktig svar.

Propor-feil *deler regner overlapp-feil F*

Figur 2 har 4 firkanter! Det skal være 40 firkanter på figur nummer 20, fordi jeg ganger bare med 10.

Multipliserer antall komponenter i element 2 med 10 for å finne antall komponenter i element 20. Fører ikke til riktig svar.

Propor-feil *F*

Teller på figurene. Figur 1 har 1, figur 2 har 4, figur 3 har 7, figur 4 har 10. Så da er det 3 mellom 1 og 2, 3 mellom 2 og 3 og 3 mellom 3 og 4. Det går opp med 3 for hver gang. Da blir figur nummer 5, 10 ganger 3. Nei. Det blir 13. 6 blir 16, 7 blir 19, 8 blir 22, jeg skal ikke gjøre sånn hele veien altså, 9 blir 25 og 10 blir 28.

Teller på elementene på oppgaven. Finner differansen. Teller videre på fingrene, 10 11 12 13… 25 26 27 28. Fører til riktig svar.

Konstant-diff ***hopp-telle*** *R*

Så ganger jeg det, nei, kan jeg gange det med noe da? Hvor mye mangler jeg da? 10! 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. Selvfølgelig blir det 30! Jeg kan ikke regne ut 28 ganger 30! Vel vi fortsetter. 11 har 31 (teller på fingrene, og pauser etter hver 3'er) … 43. skriver det ved 15. 46, 49, 52, 55, 58. 58 firkanter blir det i figur nummer 20

Teller med 3-gangen fra element 10 til 20, finner tillegget. Glemmer hva hun holder på med. Teller på fingrene fra figur 10 som har 28, 29 30 31 32 33 34 … 55 56 57 58. Fører til riktig svar.

Konstant-diff serie-add roter ***hopp-telle*** *R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Det øker med 3 og figur 20 var 58. Så 38 gange 5 blir 190. Jeg tenkte at på figur 20 var det 38 og 100 er 5 ganger større enn 20. så da må det være 190 firkanter i figur 20.

Multipliserer antall komponenter i en av delene av element 20 med 5 for å finne antall komponenter i element 100. Glemmer den andre delen. Fører ikke til riktig svar.

*Deler **propor-feil** roter F*

Teller på figur 2. Det er 4 minus 2 som blir 2, peker på figurnummeret. Teller på figur 3. 7 minus 3 som blir 4. Så figur 4, 10 minus 4 som blir 6. Altså 2, 4, 6!

Gjetter fra tall på arket, finner ut at hvis hun tar antall komponenter i et element og subtraherer elementnummeret får hun tall i 2-gangen. Fører ikke til riktig svar.

Gener-uklar F

Elev 2

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Tegner på arket, figur 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 og 10. Hun tegner figur 1 slik som figur 2 ser ut, altså med 4 firkanter på figur 1. På figur 6 øker hun den vertikale biten med en ekstra firkant, slik at hun har 7 istedenfor de 6 det skulle vært om hun fulgte sitt mønster (egentlig 5). (Dette forplanter seg videre, slik at hun på figur 10 har 33 firkanter, ikke 28). Fordi figuren øker med 3 for hver gang.

Tegner og teller opp. Tegner feil slik at det ikke fører til riktig svar, men skulle ha gitt riktig.

***Tegner** tellefeil **teller** (R)*

Figur 2 har 1+3, figur 3 har 4+3, figur 4 har 7+3, figur 5 har 10+3, figur 6 har 13+3, figur 7 har 16+3, figur 8 har 19+3, figur 9 har 22+3, figur 10 har 25+3, figur 11 har 28+3. Så figur 10 har 28.

(Jeg tror hun tenker at figur 1 har 1, så legger hun til 3 og får at figur 2 har 4. Så legger hun til 3 og får at figur 3 har 7)

Legger sammen summen av forrige figur med differansen, gjentar til 10. Fører til riktig svar.

Konstant-diff ***serie-add*** *R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

280? Fordi 28 gange 10 er 280 og 10 gange 10 er 100.

Multipliserer antall i element nummer 10 med 10 for å finne antall i element nummer 100. Fører ikke til riktig svar.

Propor-feil *F*

Jeg kan ta 90 gange 3. Og plusse på 28. Fordi når for å komme til figur 10 plusser du 3, 10 ganger. Så for å komme til figur 100 må du plusse på 3, 90 ganger til. Skriver på arket sitt. 90*3=270. 270+28=298.

Multipliserer differansen med antall elementer hun «mangler». Legger så til antall komponenter i element nummer 10. Fører til riktig svar.

Konstant-diff ***tillegg*** *R*

Elev 3

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Skriver figur 5 har 10+3=13, figur 6 har 13+3=16, figur 7 har 19, figur 8 har 22, figur 9 har 25, figur 10 har 28.

Legger sammen summen av forrige figur med differansen, gjentar til 10. Fører til riktig svar.

Konstant-diff ***serie-add*** *R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Skriver på arket: $n+n+(n-2)$. Eller $n+(n-1)*2$, fordi figuren har n firkanter i høyden og to armer som hver er $n-1$. Jeg starter med å se hva figuren og figurnummeret har til felles. Figur to har en høyde på to firkanter, figur 3 har en høyde på 3 firkanter. De to armene er en mindre enn n.

Ser at figuren består av 3 deler. En av delene består av like mange komponenter som elementnummeret. De to andre er en mindre enn elementnummeret. Setter inn elementnummeret hun skal finne for n. Fører til riktig svar.

*Deler **gener-formel** regner R*

Elev 4

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Tegner figur 10. Jeg så at på figur 2 var det 2 firkanter fra hver av armene til og med sentrum, på figur 3, var det 3 og på figur 4 var det fire. Derfor er det 10 firkanter fra hver av armene inn til sentrum av figuren.

Tegner figur 10 direkte. Ser at figuren består av 3 like biter, hvor hver av bitene består av like mange komponenter som elementnummeret, men at den i midten brukes tre ganger. Må derfor trekke fra 2. *Fører til riktig svar.*

*Deler **gener-munt** regner R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

298 vil det være fordi hvis hver av armene er 100 lange bruker jeg den firkanten i midten 3 ganger, da må jeg trekke fra 2 for ikke å bruke den mer enn 1 gang.

Hver av bitene består av like mange komponenter som elementnummeret, men at den i midten brukes tre ganger. Må derfor trekke fra 2. Fører til riktig svar.

*Deler **gener-munt** regner R*

Elev 5

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Tegner en firkant i midten med 3 armer som er 9 firkanter hver. Fordi du legger på en firkant på hver arm. Den starter med en firkant i midten på figur en. På figur 2 får du en firkant på hver arm. For hver figur legger man på 3 firkanter.

Tegner og teller opp. Ser at elementet har 4 deler, 1 i midten og 3 armer. Hver arm er $\mathbf{n-1}$. Fører til riktig svar.

*Deler **gener-munt** regner R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

280. Fordi figur 100 er 10 ganger figur 10, så da blir det 28 gange 10.

Multipliserer antall i element 10 med 10 for å finne element 100. Fører til feil svar.

***Propor-feil** F*

På figur 100 skal hver arm ha 99 firkanter, så 99 pluss 99 pluss 99 pluss 1 i midten. Legger sammen 99+99+99 og får 308. legger på 1 og får 309. Nei, det kan ikke stemme. Trykker regnestykket på kalkulator og får 298.

Ser at figuren har 4 deler og at armene er $\mathbf{n-1}$. Legger så til en i midten. Fører til riktig svar.

*Deler **gener-munt** regner R*

Elev 6

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Tegner figur nummer 5 og 6. Det blir 24 i figur 10, fordi du plusser alltid på 2 på den horisontale biten og 1 på den vertikale biten. Da blir det 2 gange 5, så må jeg legge til 9 som jeg har på figur 5. Det blir 19. Så må jeg legge til 5 fordi den vertikale biten øker med 1 for hver så 5 gange 1. Da får jeg 19 pluss 5 som er 24. Så må jeg legge til disse 4 (peker på figur 5). Da blir det 28.

Tegner element 5 og 6. Deler elementene i horisontal og vertikal del. Ser at økningen fra element 5 til 10 er differansen multiplisert med 5. Teller på element 5 og legger til økningen. Gjør dette for hver del. Får riktig svar.

Tegner deler konstant-diff ***tillegg*** *regner R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Da blir det 90 gange 2 pluss 90 gange 1 pluss 28, som er 298. Fordi nå har jeg allerede funnet figur 10 og det er 28. Den horisontale biten øker med 2 og den vertikale med 1. Det må jeg gange med 90, så må jeg legge til 28.

Deler i 2. Multipliserer hver del med differansen hun «mangler». Legger sammen med figur 10. Får riktig svar.

Tegner deler konstant-diff ***tillegg*** *regner R*

Elev 7

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Begynner med å tegne figur nummer 1, 2, 3 og 4. Ser at den horisontale biten øker med 2 firkanter for hver gang, fortsetter med å kun tegne den horisontale biten. Finner ut at på figur 10 er den horisontale biten 19 firkanter. På figur 3 er den 3 høy, på figur 4 er den 4 høy, derfor er den 10 høy på figur 10, men den ene firkanten har vi allerede telt med, så derfor er det 19+9 som er 28 firkanter i figur 10.

Tegner element 1 til 4. Deler i horisontal og vertikal del og finner differansen. Teller komponenter i horisontal del av element 4 og adderer 2 for å finne antallet for elementene opp til 10. Ser at antallet vertikalt er $\mathbf{n-1}$. Adderer antallet for delene og får riktig svar.

Tegner deler konstant-diff ***serie-add/gener-munt*** *regner R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

På figur 10 var det 19 firkanter horisontalt, så jeg ganget med 10 og fikk 190. På figur 100 er det også 100 firkanter i høyden. En av dem er allerede brukt opp, så da er det 99 firkanter. 190 pluss 99 er 289.

Deler i horisontal og vertikal del. Vet fra før at den horisontale biten i element 10 er 19. Multipliserer 19 med 10 for å finne antall i element 100. Legger dette sammen med den vertikale biten som er $\mathbf{n-1}$. Fører ikke til riktig svar.

(bruker forrige) ***propor-feil****/regner F*

Skriver 2*90=180. 180+99=279. Fordi fra figur 10 til figur 100 er det 90. For hver figur legger du til 2 på den horisontale biten.

Multipliserer differansen i den horisontale biten med det hun «mangler». Legger dette sammen med den vertikale biten som er $\mathbf{n-1}$. Glemmer å addere antall komponenter i den horisontale biten for element 10 og får feil svar.

(bruker forrige) ***tillegg****/regner roter (R)*

Det øker til sammen 99 ganger fra figur 1 til figur 100. Det er altså 99 gange 2 firkanter i den horisontale biten. Legger så til den vertikale biten som er 99 og får 297. Nei vent, siden jeg bare ser på økninga til den horisontale biten så teller jeg ikke med den i midten. Da blir det 2 gange 99 som er 198. Så må jeg legge til 100 fordi den er 100 høy.

Multipliserer differansen i den horisontale biten med det hun «mangler». Legger dette sammen med den vertikale biten som er $\mathbf{n-1}$. Legger til den i midten og får riktig.

(bruker forrige) ***gener-munt*** *regner R*

Oppgave 2

Elev 1

Feil ved opptak

Elev 2

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Skriver på arket sitt, figur 1 har 2, figur 2 har 2+4, figur 3 har 4+6 figur 4 har 6+8, figur 5 har 8+10. figur 6 har 10+12, figur 7 har 12+14, figur 8 har 14+16, figur 9 har 16+18, figur 10 har 18+20. da er det 38 firkanter i figur 10.

Ser at element 1 er 0+2, element 2 er 2+4. Antar at dette fortsetter slik at økningen fra element 2 til 3 er 4+6. Altså sum av 2 gangen. Altså en lineær rekke.

Lineær-feil *F*

Figur 2 har 6, figur 3 har 6+6 figur 4 har 12+8, figur 5 har 20+10. figur 6 har 30+12, figur 7 har 42+14, figur 8 har 56+16, figur 9 har 72+18, figur 10 har 90+20. Figur 10 har 110 firkanter.

Ser at et element er forrige element addert med 6, 8, 10. Altså økningen er i 2 gangen. Riktig bruk av rekurrens.

Rekurr-munt *regn-rekurr R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Tegner element 4 og 5. Så for figur nummer 2 vil det være 2 gange 3, som er 6. For figur 3 er det 3 gange 4 som er 12. Ja, det stemmer. Så for figur 10 vil det være 10 gange 11 som er 110. For figur 100 vil det være 100 gange 101 som er 10100. Fordi det så ut som det passet med 2 gange 3 som er 6 og 3 gange 4 som er 12. Så tegnet jeg figur 4 for å se om det stemte. Det gjorde det.

Etter å ha tegnet element 5 innser hun at hun kan multiplisere, at svaret er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.

Gener-munt *regner R*

Elev 3

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Begynner med å tegne 3 av figurene fra oppgaven på arket sitt. Blir det 110? Fordi jeg begynner igjen med å se hva figuren og figurnummeret har til felles. Figur 1 er en firkant høy. Figur 2 er 2 firkanter høy, figur 3 er 3 firkanter høy. Figur 1 er også 2 bred som er en mer enn figurnummeret. Figur 2 er 3 bred som igjen er 1 mer enn figurnummeret, og 4 er en mer enn 3.

Tegner elementer og ser at antallet er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.

Gener-forml *R*

Kan du finne den eksplisitte formelen for en hvilken som helst figur?

Skriver: $n * (n + 1)$

Finner eksplisitt formel.

Gener-forml *R*

Elev 4

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Det vil være 100, eller kanskje det vil være 90 fordi.. Nei vent, det er 5 i bredden på figur 4. Da vil det være 110 i figur nummer 10. Fordi figuren er alltid 1 mer i bredden enn i høyden. Høyden er det samme som figurnummeret. Så på figur nummer 10 vil det være 10 nedover og 11 bortover

Ser at antallet er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.

Gener-munt *regner R*

Elev 5

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Tegner 10 firkanter vertikalt og 10 horisontalt, slik at det blir 11 til sammen. Den er 10 vertikalt og 11 horisontalt, fordi på figur 4 er det 4 vertikale og 5 horisontale firkanter. Så 110 firkanter i figur nummer 10.

Ser at antallet er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.

Gener-munt *regner R*

Elev 6

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Skriver: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. Legger de sammen og får 110. Jeg ser at økninga fra ingen figur til figur 1 er 2, økninga fra figur 1 til figur 2 er 4, økninga fra figur 2 til figur 3 er 6 osv. Så la jeg sammen det 10 ganger og fikk 110.

Ser at differansen er 2-gangen og at summen blir riktig verdi.

Rekurr-munt *regn-rekurr R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Da blir det litt mye å telle. Trykker på kalkulator: 110*10. Nei. Det blir feil. Jeg skal jo bare legge sammen partallene. *Tenker i 5 min*. Figur 2 er 2 høy, figur 3 er 3 høy, så figur 100 er 100 høy. Figur 2 er 3 bred, figur 3 er 4 bred så figur 100 må være 101 bred. Så figur nummer 100 har 10100 firkanter.

Tenker først proporsjonalitet men ser så at antallet er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.

Gener-munt *regner R*

Elev 7

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

I figur nummer 4 er det 4 firkanter i høyden og 5 firkanter i bredden, så i figur 10 er det 10 i høyden og 11 i bredden, altså 110 firkanter.

Ser at antallet er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.

Gener-munt *regner R*

Hvor mange firkanter er det i figur 100?

Da må det være 100 i høyden og 101 i bredden, altså 10100 firkanter.

Ser at antallet er elementnummeret multiplisert med elementnummeret pluss 1.

Gener-munt *regner R*

Oppgave 3

Elev 1

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Begynner med å telle firkantene i hver figur. Figur 1 har 3, figur 2 har 9, figur 3 har 19, figur 4 har, 4 gange 4 som er 12. 12 pluss 12 pluss 1 er 25. (skriver på arket) $10 * 10 = 100 * 2 = 200 + 1 = 201$. Fordi på figur 2 er det 2 der (peker på figur 2 at det er 2 firkanter i hver retning), og 2 der. Det blir 4. Så er det 2 sånne og 1 firkant i midten. På figur 3 er det tre og på 4 er det fire.

Teller i elementene på oppgaven. Deler i 3, ser et mønster og bruker det for å kunne si hva verdien er. Gir riktig svar.

Gener-munt *regner R*

Elev 2

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Figur 2 har 3+6. Figur 3 har 9+10. Figur 4 har 19+14, figur 5 har 33+18. Figur 6 har 51+22, figur 7 har 73+26, figur 8 har 99+30, figur 9 har 129+34, figur 10 har 163+38. Figur 10 har 201 firkanter. Fordi du tar forrige figur og legger på fire mer enn forrige gang. Så for figur 2 tar du 3+6. For figur 3 tar du den forrige som er 9 og plusser på fire mer enn forrige gang, altså 10. Da får du 19. osv.

Bruker rekurrens, altså at antallet er forrige element addert med differansen 2, 6, 10, (øker lineært med 4).

Rekurr-munt *regn-rekurr R*

Her burde jeg ha spurt om element 100, men det glemte jeg.

Elev 3

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Begynner med å tegne de fire figurene fra oppgaven på arket sitt. Skriver: figur 1 er 1*1+1*1+1, figur 2 er 2*2+2*2+1, figur 3 er 3*3+3*3+1 figur 4 er 4*4+4*4+1. Skriver så: $(n * n) * 2 + 1$. Så figur 10 er $(10 * 10) * 2 + 1 = 201$. Fordi jeg begynte med å se på likheten mellom figurene. Først tenkte jeg på 2 ganger 3 fordi figur nummer 1 hadde tre firkanter, men da satt jeg igjen med 2 firkanter i figur nummer 2. Så prøvde jeg det samme på figur 3, men da ble jeg sittende igjen med 4 firkanter istedenfor bare 1. Deretter så jeg på figurnummeret i forhold til den ene sida. Figur nummer 2 har 2 grupper med firkanter som har en høyde og bredde på 2 firkanter. På figur 3 er det 2 grupper med firkanter som har en høyde på 3 og en bredde på 3 firkanter. Da vil det bli figurnummeret gange med seg selv, gange 2 fordi det er 2 like grupper. Til slutt må jeg legge til 1 fordi den ene forandrer seg ikke fra en figur til neste.

Tegner element 1-3, deler elementene i 3, bruker mønsteret til å skrive den eksplisitte formelen. Bruker formelen til å finne element 10.

*Tegner deler **skriv-aritm gener-formel** regner R*

Elev 4

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Det vil være 81 firkanter i figur nummer 10. Fordi figuren er 4 firkanter høy, så på figur 10 vil det være 4 horisontale rekker med 10 i hver. Så er det 2 sånne grupper og 1 i midten.

Ser på element 4. Deler i 3 deler, tror høyden på 4 vil gjelde alle elementene. Finner ikke rett svar.

*Deler **oppfatt-feil** F*

101. Fordi den nederste linja vil være 11 til sammen. Så vil figuren være 10 høy. Da får du 2 grupper på 50 og 1 i midten. 101 til sammen.

Ser på element 5. Deler i 3 deler, ser ikke de to store gruppene er kvadratiske. Finner ikke rett svar.

Deler ***oppfatt-feil*** *F*

Elev 5

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Tegner 10 firkanter horisontalt. Så 9 firkanter vertikalt fra firkant nummer 10 (10*10). Tegner så 11 firkanter og på firkant nummer 10 fra motsatt side tegner hun 9 firkanter vertikalt* (tegner altså omrisset av figur nummer 10). Så figur nummer 10 vil ha 201 firkanter, fordi 10*10*2+1.

Tegner delvis omrisset av element 10, deler i 3 deler, bruker mønsteret til å finne element 10.

Tegner ***gener-munt*** *regner R*

Elev 6

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Det må være 201, fordi på figur 4 er det to grupper (kvadrater) på fire gange fire firkanter og en i midten. Så for figur 10 må det være to grupper på ti gange ti firkanter og en i midten

Ser 3 deler, bruker mønsteret til å finne element 10.

Deler ***gener-munt*** *regner R*

Elev 7

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

201, fordi hvis du ser på figur 4 er den 4 høy og 4 bred som er 16. Så er det 2 sånne, altså 32 og 1 i midten. For figur 10 er det 10 gange 10 som er 100, så må du gange med 2. Da blir det 200 og 1 i midten. 201 til sammen.

Ser 3 deler, bruker mønsteret til å finne element 10.

*Deler **gener-munt** regner R*

Oppgave 4

Elev 1

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Begynner å skrive på arket sitt, figur 1 er 1, figur 2 er 5, figur 3 er 13. Teller høyt på figur 4. 4 pluss 3 pluss 4. Åh, jeg fant det ut! Så 25 firkanter. Jeg skjønte at det var noe siden firkantene var forskjellig farge. Teller på figur nummer 4 og skriver på arket sitt. 10*10 =100, 9*9=81. Legger sammen og finner 181. Først så telte jeg firkantene i hver figur. Da så jeg at det var et system i de blå og de hvite firkantene. Da jeg telte på figur 4, så jeg at det var 4 gange 4 hvite og 3 blå, som er en mindre enn 4 gange 3 blå. Altså 16 pluss 9 som er 25. Så i figur 10 ville det være 10 hvite, så jeg tok 10 gange 10 som ble 100. Så måtte det være 9 blå, da ble det 9 gange 9 som er 81. så plusset jeg sammen det til 181.

Teller antall i element 1-4. Ser 2 deler, blå og hvite. Ser mønsteret i elementene og bruker dette til å finne element 10.

*Deler **gener-munt** regner R*

Elev 2

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Skriver på arket sitt: Figur 5 har 25+24, figur 6 har 49+48, figur 7 har 97+96, figur 8 har 193+192, figur 9 har 385+384, figur 10 har 769+768. Figur 10 har 1537 firkanter.

Bruker en rekurrens og adderer forrige element med en mindre enn forrige element. Resultatet minner om en Fibonacci-rekke, feil svar.

*Skriv-rekke **expon-feil** regn-rekurr F*

Ser på figurene på oppgaven for å forklare. Ser at økningen til økningen er 4. Skriver på nytt ark: Figur 5 har 25+12=37, figur 6 har 37+16, figur 7 har 53+20, figur 8 har 73+24=97, figur 9 har 97+28=125, figur 10 har 125+32=157.

Ser at differansen er 4-gangen, bruker rekurrens altså elementet er forrige element addert med 4, 8, 12 osv. Regnefeil: legger til 12 istedenfor 16. Dette forplanter seg og gir feil svar.

Skriv-rekke ***rekurr-munt*** *regn-rekurr roter (R)*

Fra figur 1 til 2 blir det lagt til 4, fra figur 2 til 3 blir det lagt til 4+4, fra figur 3 til fire blir det lagt til 8+4. *90 sekunder tenking*. Nei, jeg skjønner ikke. Så økninga fra figur 1 til 2 er 4, fra figur 2 til 3 er det 8, fra figur 3 til 4 er det 12. Da må økninga fra 4 til 5 være 16. Skriver på arket sitt: figur 5 har +16, figur 6 har + 20, figur 7 har + 24, figur 9 har + 28 figur 10 har + 32.

Prøver igjen, teller feil. Ender på +32 som hun hadde forrige gang og får feil svar.

Skriv-rekke ***rekurr-munt*** *regn-rekurr roter (R)*

Elev 3

> *Hvor mange firkanter er det i figur 10?*

Begynner med å tegne de fire figurene fra oppgaven på arket sitt. Skriver så:

$4 * 4 + (4 - 1) * (4 - 1), n * n + (n - 1) * 2$. Så figur 10 er 10*10=100 og 9*9=81. 100+81=181. Fordi figuren består av 2 kvadrater. Et av dem består av hvite firkanter og et av blå. På figur 4 er det 4*4 hvite og 3*3 blå. Det gjelder også på figur 3. Det store kvadratet er 3*3 og det lille kvadratet inni er en mindre altså 2*2.

Tegner element 1-4, deler i blå og hvite, ser mønsteret og skriver en formel. Formelen er riktig tenkt men gjør feil i notasjonen. Får riktig svar.

Tegner skriv-aritm ***gener-forml*** *regner R*

Elev 4

> *Hvor mange firkanter er det i figur 10?*

Teller på figur 4. 55 der, så 110 til sammen. Fordi hvis du starter på en av sidene så er det 4, så 3, 2, 1 inn til midten. Så for figur 10 vil det være 10, 9, 8 osv, altså 55. og 110 til sammen.

Deler elementet i 2 trekanter, hver trekant består av komponentene fra en side inn til og med komponenten i midten (10…1). Sier at hele elementet består av 2 slike og at antallet derfor er 110, altså feil.

*Teller **trekant-dele** F*

Elev 5

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Begynner med å tegne figur nummer 2, tegner så 3 firkanter til høyre for de to ytterste i figur nummer 2, så tre utenfor der osv til hun har 10 firkanter vertikalt, som en trekant inn til firkanten i midten. Altså 10, 9, 8 osv.

Tegner element 2, legger på så hun får en del av element 10, en trekant med grunnlinje 10 (10…1).

*Tegner **trekant-dele** F*

Teller firkantene i figur nummer 4, finner 25. Foreslår å multiplisere med 2 og addere halvparten av figur 4, for å finne element 10.

Antar proporsjonalitet, gir feil svar.

*Teller **propor-feil** F*

Elev 6

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Skriver: Figur 10, 10*10=100, 9*9=81, 8*8=64, 7*7=49, 6*6=36, 5*5=25. Teller antall firkanter i figur nummer 4 og legger antallet sammen med alle summene og får 380.

I den ytterste firkanten på figur 4 er det fire gange fire firkanter, så på figur 10 er det ti gange ti i den ytterste firkanten. Videre så er det noen firkanter inne i figuren også, så jeg tok 9 gange 9 til og med 5 gange 5.

Prøver å dele figuren i konsentriske skall, men bruker feil formel for antallet i hvert skall. Får feil svar.

Skriv-rekke deler ***oppfatt-feil*** *F*

Elev 7

Hvor mange firkanter er det i figur 10?

Begynner med å telle antall firkanter i figur nummer 3 og 4. På figur 4 er det fire firkanter i lengde og bredde på den ytterste firkanten. Da må det være 10 firkanter i lengde og bredde på figur 10. Altså 40 firkanter i den ytterste firkanten, så er det 1 mindre i de mindre firkantene. Da blir det 40+36+… Nei, jeg tror jeg må tegne den jeg. Tegner den ytterste firkanten. Finner ut at det er 10+9+9+9 firkanter i ytterste skall.

Prøver å dele figuren i konsentriske skall, får det ikke til.

Deler roter

Vedlegg 3, Forarbeid drøfting

5.2 Med utgangspunkt i avsnitt 4.2, Strategiene

1) Tegner og teller

I min strategi nummer 1) Tegner og teller mener jeg svarer meget godt til i) Tellemetoden.

2) Generaliserer muntlig

Jeg mener at nummer x) Lineærmetoden faller inn som et spesialtilfelle under denne strategien. Strategi 2 omfatter også tilfeller hvor mønsteret ikke er lineært. I litteraturen fant jeg ingen strategi for å finne eksplisitt formel for annet enn lineære mønstre.

Denne strategien fokuserer på tilfellene hvor eleven ikke uttrykker seg i algebraisk notasjon. I litteraturen jeg har lest, skilles det ikke klart mellom bruk av formell eller uformell notasjon. Jeg mener at dette skillet er viktig fordi eleven som uttrykte seg ved algebraisk notasjon, hadde en mer direkte angrepsmåte enn de som uttrykte generaliseringen uformelt.

3) Generaliserer skriftlig

Det jeg sa om forrige punkt gjelder naturligvis denne strategien også. Nummer x) Lineærmetoden blir på samme måte som forrige et spesialtilfelle av denne bortsett fra differensieringen mellom formell og uformell.

4) Muntlig rekurrens

Strategi vi) Konstant rekurrens er et spesialtilfelle av denne. I min studie fant jeg faktisk også tilfeller hvor elever brukte rekurrens for kvadratiske rekker. I kvadratiske rekker er naturligvis differansen til differansen konstant (og lik to ganger koeffisienten for n^2).

5) Regner videre fra et kjent element

Her har jeg notert tre forskjellige strategier som adskiller seg ved hvordan man regner ut og legger til tillegget. I litteraturen finner vi nummer xv) Hoppe-telle som svarer til 5 a) Hoppe-telle. Vi finner også xii) Hale-metoden som svarer til nummer 5 c) Tillegg. 5 b) Gjentatt addisjon er så lik 5 a) Hoppe-telle at det er rimelig at vi ikke finner denne forskjellen i litteraturen. For øvrig ser jeg at dette ligner en del på strategi 1) Tegner og teller.

6) Feil håndtering av overlapp

Her er det ikke noen strategi i litteraturen som svarer godt til denne. Jeg ser en viss likhet med ix) Lineær med feil start, i begge tilfeller finner man feil konstant-ledd. Videre kan man oppfatte strategi 6) som xi) Oppdeling på figur, forutsatt at man gjør en passende feil i oppdelingen, altså når det gjelder overlapp.

7) Antar proporsjonalitet

Denne strategien svarer godt til viii) Hel-objektmetoden. I litteraturen har man bare sett denne for lineære mønstre, i min studie så jeg den også brukt for kvadratiske mønstre. Som jeg pekte på tidligere kan denne metoden gi riktig resultat for lineære mønstre hvis konstantleddet er lik null, men i litteraturen har ingen presentert dette som et interessant tilfelle. Videre vil strategi ii) Differansemetoden være spesialtilfelle av denne.

8) oppfatter elementene feil

Dette er kanskje ikke en ren strategi men mer eksempler på hvordan man kan tenke feil. Jeg har ikke funnet noen strategier i litteraturen som diskuterer slike misforståelser.

8 a) Trekantede deler. Strømskag (2011) har en figur (Figur 5.4, s. 144) som viser hvordan det kvadratiske elementet i mitt figurmønster 4 (avsnitt 3.5), kan deles i fire trekanter. Elevene kan ha tenkt på noe i denne samme retningen men har rotet det til. Men jeg har ikke sett dette som en strategi i arbeidet med strategiene fra litteraturen.

5.3 Med utgangspunkt i avsnitt 5.1, Strategiene

i) Tellemetoden

Tellemetoden fra oppsummeringen av strategier i litteraturen ovenfor oppfatter jeg å være det samme som strategi 1) Tegner og teller fra avsnitt 4.2 Strategiene fra Analysen.

i) Tellemetoden tar man også med numeriske mønstre. Dette ligner på det jeg har i 5 a) Hoppe-telle og for øvrig xv) Hoppe-telle.

ii) Differansemetoden

Jeg fant ikke noe i elevenes arbeid som svarer til Differansemetoden. Jeg har ingen god forklaring på dette.

iii) Differanse-analyse

Jeg har heller ikke funnet noe som svarer til Differanse-analyse. Grunnen til dette kan være at ut fra teorien ser det ut til at denne metoden er vanligere når man arbeider med numeriske mønstre. Differanse-analyse er en god metode for å få oversikt over mange slags mønstre.

iv) Uregelmessig tabell

Uregelmessig tabell har jeg heller ikke funnet. Den dukker opp i forbindelse med en oppgave som er veldig annerledes enn de jeg har gitt. Beatty og Moss (2006) gav en oppgave hvor man fikk utlevert en del data par, altså alder og høyde, for et fabeldyr. Det var ikke sortert på alder og man fikk heller ikke en fullstendig liste over alle aldre. Der ble det veldig naturlig å lage en uregelmessig tabell og arbeide ut fra den. Men noen slik oppgave ga ikke jeg.

v) Differanse av differanse

Differanse av differanse er også en strategi jeg ikke har funnet i mine data. Dette er nok fordi dette er en strategi som naturlig kan følge etter iii) Differanse-analyse når det ikke er et lineært mønster.

vi) Konstant rekurrens

Jeg ser at Konstant rekurrens er et spesialtilfelle av nummer 4) Muntlig rekurrens om man ser bort fra at jeg noterte meg at det bare forekom i muntlige utsagn mens man ikke sier noe om det er muntlig eller skriftlig i Rivera og Becker (2005) og Becker og Rivera (2006).

vii) Kombinerte elementer

Jeg fant ikke noe som svarer til Kombinerte elementer. Dette er vel naturlig, metoden er først og fremst interessant for mønstre som er Fibonacci-rekker.

viii) Hel-objektmetoden

Hel-objektmetoden svarer godt til strategi 7) Antar proporsjonalitet.

ix) Lineær med feil start

Lineær med feil start har jeg heller ikke funnet selv om strategi 6) Feil håndtering av overlapp gir samme symptom, nemlig feil konstantledd.

x) Lineærmetoden

Strategi Lineærmetoden svarer til strategiene 2) Generaliserer muntlig og 3) Generaliserer skriftlig.

xi) Oppdeling på figur

Oppdeling på figur finner jeg på flere steder i vedlegg 1 Transkripsjon, dette gjelder for eksempel nesten alle elevene når de arbeider med oppgave 3. Jeg har typisk endt opp med å tolke disse som 2) Generaliserer muntlig eller 3) Generaliserer skriftlig.

Jeg har en kode, Deler, for oppdeling, se vedlegg 2 Tolkning. Jeg har ikke sett på dette som en egen strategi, men heller som et trappetrinn på veien mot en løsning.

xii) Hale-metoden

Hale-metoden kjenner jeg igjen som metode 5c) Tillegg.

xiii) Plott verdi mot elementnummer

Plott verdi mot elementnummer har jeg ikke sett. Dette hadde vært mer naturlig om elevene skulle finne løsning ved hjelp av Excel/Geogebra, eventuelt om oppgaven inneholdt en tabell av verdipar $(n, M(n))$ altså ikke et mønster.

xiv) Prøve og feile

Jeg har ikke noen koding som svarer til xiv) Prøve og feile, men jeg ser jo at noen elever har kommet med mange litt tilfeldige forslag. Dette kan jo ligne litt på xiv) Prøve og feile, se vedlegg 1, Transkripsjon, elev 1, oppgave 1.

xv) Hoppe-telle

Hoppe-telle dette svarer til 5 a) Hoppe-telle og i noen grad 5 b) Gjentatt addisjon.

xvi) Se etter gangetabell

Jeg har sett et eksempel som minner om xvi) Se etter gangetabell, se vedlegg 1 Transkripsjon, elev 1, mot slutten av oppgave 1. Jeg har imidlertid ikke satt opp noen strategi for dette.

Vedlegg 4 Meldeskjema

MELDESKJEMA

Meldeskjema (versjon 1.6) for forsknings- og studentprosjekt som medfører meldeplikt eller konsesjonsplikt
(jf. personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter).

1. Intro		
Samles det inn direkte personidentifiserende opplysninger?	Ja ● Nei ○	En person vil være direkte identifiserbar via navn, personnummer, eller andre personentydige kjennetegn. Les mer om hva personopplysninger er. NB! Selv om opplysningene skal anonymiseres i oppgave/rapport, må det krysses av dersom det skal innhentes/registreres personidentifiserende opplysninger i forbindelse med prosjektet. Les mer om hva behandling av personopplysninger innebærer.
Hvis ja, hvilke?	■ Navn □ 11-sifret fødselsnummer □ Adresse □ E-post □ Telefonnummer ■ Annet	
Annet, spesifiser hvilke	Videoopptak	
Skal direkte personidentifiserende opplysninger kobles til datamaterialet (koblingsnøkkel)?	Ja ○ Nei ●	Merk at meldeplikten utløses selv om du ikke får tilgang til koblingsnøkkel, slik fremgangsmåten ofte er når man benytter en databehandler.
Samles det inn bakgrunnsopplysninger som kan identifisere enkeltpersoner (indirekte personidentifiserende opplysninger)?	Ja ○ Nei ●	En person vil være indirekte identifiserbar dersom det er mulig å identifisere vedkommende gjennom bakgrunnsopplysninger som for eksempel bostedskommune eller arbeidsplass/skole kombinert med opplysninger som alder, kjønn, yrke, diagnose, etc. NB! For at stemme skal regnes som personidentifiserende, må denne bli registrert i kombinasjon med andre opplysninger, slik at personer kan gjenkjennes.
Hvis ja, hvilke		
Skal det registreres personopplysninger (direkte/indirekte/via IP-/epost adresse, etc) ved hjelp av nettbaserte spørreskjema?	Ja ○ Nei ●	Les mer om nettbaserte spørreskjema.
Blir det registrert personopplysninger på digitale bilde- eller videoopptak?	Ja ○ Nei ●	Bilde/videoopptak av ansikter vil regnes som personidentifiserende.
Søkes det vurdering fra REK om hvorvidt prosjektet er omfattet av helseforskningsloven?	Ja ○ Nei ●	NB! Dersom REK (Regional Komité for medisinsk og helsefaglig forskningsetikk) har vurdert prosjektet som helseforskning, er det ikke nødvendig å sende inn meldeskjema til personvernombudet (NB! Gjelder ikke prosjekter som skal benytte data fra pseudonyme helseregistre). Les mer. Dersom tilbakemelding fra REK ikke foreligger, anbefaler vi at du avventer videre utfylling til svar fra REK foreligger.
2. Prosjekttittel		
Prosjektittel	Hva kjennetegner ungdomtrinnselevers arbeid med kvadratiske figurtall?	Oppgi prosjektets tittel. NB! Dette kan ikke være «Masteroppgave» eller liknende, navnet må beskrive prosjektets innhold.
3. Behandlingsansvarlig institusjon		
Institusjon	NTNU	Velg den institusjonen du er tilknyttet. Alle nivå må oppgis. Ved studentprosjekt er det studentens tilknytning som er avgjørende. Dersom institusjonen ikke finnes på listen, har den ikke avtale med NSD som personvernombud. Vennligst ta kontakt med institusjonen. Les mer om behandlingsansvarlig institusjon.
Avdeling/Fakultet	Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU)	
Institutt	Institutt for lærerutdanning	
4. Daglig ansvarlig (forsker, veileder, stipendiat)		

Fornavn	Magdalini	Før opp navnet på den som har det daglige ansvaret for prosjektet. Veileder er vanligvis daglig ansvarlig ved studentprosjekt. Les mer om daglig ansvarlig. Daglig ansvarlig og student må i utgangspunktet være tilknyttet samme institusjon. Dersom studenten har ekstern veileder, kan biveileder eller fagansvarlig ved studiestedet stå som daglig ansvarlig. Arbeidssted må være tilknyttet behandlingsansvarlig institusjon, f.eks. underavdeling, institutt etc. NB! Det er viktig at du oppgir en e-postadresse som brukes aktivt. Vennligst gi oss beskjed dersom den endres.
Etternavn	Lada	
Stilling	Førsteamanuensis	
Telefon	73412375	
Mobil	-	
E-post	magdalini.lada@ntnu.no	
Alternativ e-post	magdalini.lada@ntnu.no	
Arbeidssted	Rotvoll Bygg E	
Adresse (arb.)	Rotvoll alle 1	
Postnr./sted (arb.sted)	7053 Ranheim	
5. Student (master, bachelor)		
Studentprosjekt	Ja ● Nei ○	Dersom det er flere studenter som samarbeider om et prosjekt, skal det velges en kontaktperson som føres opp her. Øvrige studenter kan føres opp under pkt 10.
Fornavn	Fredrik	
Etternavn	Holager	
Telefon	90975755	
Mobil	90975755	
E-post	fholager@yahoo.no	
Alternativ e-post	fholager@yahoo.no	
Privatadresse	Rydningen 22	
Postnr./sted (privatadr.)	7027 Trondheim	
Type oppgave	● Masteroppgave ○ Bacheloroppgave ○ Semesteroppgave ○ Annet	
6. Formålet med prosjektet		
Formål	Formålet med prosjektet er å se hvordan elever på 9. trinn arbeider med kvadratiske figurtall, for å se om de benytter seg av noen strategier. dette kan være både strategier som fører til riktig og galt svar.	Redegjør kort for prosjektets formål, problemstilling, forskningsspørsmål e.l.
7. Hvilke personer skal det innhentes personopplysninger om (utvalg)?		
Kryss av for utvalg	□ Barnehagebarn ■ Skoleelever □ Pasienter □ Brukere/klienter/kunder □ Ansatte □ Barnevernsbarn □ Lærere □ Helsepersonell □ Asylsøkere □ Andre	Les mer om forskjellige forskningstematikker og utvalg.
Beskriv utvalg/deltakere	Elevene blir tilfeldig valgt fra klassen, bortsett fra de aller svakeste elevene (karakter 1 og 2 i matematikk).	Med utvalg menes dem som deltar i undersøkelsen eller dem det innhentes opplysninger om.
Rekruttering/trekking	Utvelgelsen til forskningen gjøres i samarbeid av elevenes matematikklærer og meg.	Beskriv hvordan utvalget trekkes eller rekrutteres og oppgi hvem som foretar den. Et utvalg kan rekrutteres gjennom f.eks. en bedrift, skole, idrettsmiljø eller eget nettverk, eller trekkes fra registre som f.eks. Folkeregisteret, SSB-registre, pasientregistre.
Førstegangskontakt	Jeg jobber i dag på skolen som vikar og har vært vikar for elevene sporadisk frem til jul 2016.	Beskriv hvordan førstegangskontakten opprettes og oppgi hvem som foretar den. Les mer om førstegagskontakt og forskjellige utvalg på våre temasider.

Side 2

Alder på utvalget	■ Barn (0-15 år) □ Ungdom (16-17 år) □ Voksne (over 18 år)	Les om forskning som involverer barn på våre nettsider.
Omtrentlig antall personer som inngår i utvalget	10	
Samles det inn sensitive personopplysninger?	Ja ○ Nei ●	Les mer om sensitive opplysninger.
Hvis ja, hvilke?	□ Rasemessig eller etnisk bakgrunn, eller politisk, filosofisk eller religiøs oppfatning □ At en person har vært mistenkt, siktet, tiltalt eller dømt for en straffbar handling □ Helseforhold □ Seksuelle forhold □ Medlemskap i fagforeninger	
Inkluderes det myndige personer med redusert eller manglende samtykkekompetanse?	Ja ○ Nei ●	Les mer om pasienter, brukere og personer med redusert eller manglende samtykkekompetanse.
Samles det inn personopplysninger om personer som selv ikke deltar (tredjepersoner)?	Ja ○ Nei ●	Med opplysninger om tredjeperson menes opplysninger som kan identifisere personer (direkte eller indirekte) som ikke inngår i utvalget. Eksempler på tredjeperson er kollega, elev, klient, familiemedlem, som identifiseres i datamaterialet. Les mer.
8. Metode for innsamling av personopplysninger		
Kryss av for hvilke datainnsamlingsmetoder og datakilder som vil benyttes	□ Papirbasert spørreskjema □ Elektronisk spørreskjema □ Personlig intervju □ Gruppeintervju ■ Observasjon □ Deltakende observasjon □ Blogg/sosiale medier/internett □ Psykologiske/pedagogiske tester □ Medisinske undersøkelser/tester □ Journaldata (medisinske journaler)	Personopplysninger kan innhentes direkte fra den registrerte f.eks. gjennom spørreskjema,intervju, tester, og/eller ulike journaler (f.eks. elevmapper, NAV, PPT, sykehus) og/eller registre (f.eks.Statistisk sentralbyrå, sentrale helseregistre). NB! Dersom personopplysninger innhentes fra forskjellige personer (utvalg) og med forskjellige metoder, må dette spesifiseres i kommentar-boksen. Husk også å legge ved relevante vedlegg til alle utvalgs-gruppene og metodene som skal benyttes. Les mer om registerstudier. Dersom du skal anvende registerdata, må variabelliste lastes opp under pkt. 15 Les mer om forskningsmetoder.
	□ Registerdata	
	□ Annen innsamlingsmetode	
Tilleggsopplysninger		
9. Informasjon og samtykke		
Oppgi hvordan utvalget/deltakerne informeres	■ Skriftlig ■ Muntlig □ Informeres ikke	Dersom utvalget ikke skal,informeres om behandlingen av personopplysninger må det begrunnes. Les mer.Vennligst send inn mal for skriftlig eller muntlig informasjon til deltakerne sammen med meldeskjema. Last ned en veiledende mal her. Les om krav til informasjon og samtykke. NB! Vedlegg lastes opp til sist i meldeskjemaet, se punkt 15 Vedlegg.
Samtykker utvalget til deltakelse?	● Ja ○ Nei ○ Flere utvalg, ikke samtykke fra alle	For at et samtykke til deltakelse i forskning skal være gyldig, må det være frivillig, uttrykkelig og informert. Samtykke kan gis skriftlig, muntlig eller gjennom en aktiv handling. For eksempel vil et besvart spørreskjema være å regne som et aktivt samtykke. Dersom det ikke skal innhentes samtykke, må det begrunnes. Les mer.
Innhentes det samtykke fra foreldre for barn under 15 år?	Ja ● Nei ○	Les mer om forskning som involverer barn og samtykke fra unge.
Hvis nei, begrunn		
10. Informasjonssikkerhet		
Spesifiser	Videoopptak oppbevares på et videokamera hjemme hos meg. Videokameraet har ikke kontakt med omverdenen (wifi, bluetooth, osv).	NB! Som hovedregel bør ikke direkte personidentifiserende opplysninger registreres sammen med det øvrige datamaterialet. Vi anbefaler koblingsnøkkel.

Hvordan registreres og oppbevares personopplysningene?	□ På server i virksomhetens nettverk □ Fysisk isolert PC tilhørende virksomheten (dvs. ingen tilknytning til andre datamaskiner eller nettverk, interne eller eksterne) □ Datamaskin i nettverkssystem tilknyttet Internett tilhørende virksomheten □ Privat datamaskin ■ Videoopptak/fotografi □ Lydopptak □ Notater/papir □ Mobile lagringsenheter (bærbar datamaskin, minnepenn, minnekort, cd, ekstern harddisk, mobiltelefon) □ Annen registreringsmetode	Merk av for hvilke hjelpemidler som benyttes for registrering og analyse av opplysninger. Sett flere kryss dersom opplysningene registreres på flere måter. Med «virksomhet» menes her behandlingsansvarlig institusjon. NB! Som hovedregel bør data som inneholder personopplysninger lagres på behandlingsansvarlig sin forskningsserver. Lagring på andre medier - som privat pc, mobiltelefon, minnepinne, server på annet arbeidssted - er mindre sikkert, og må derfor begrunnes. Slik lagring må avklares med behandlingsansvarlig institusjon, og personopplysningene bør krypteres.
Annen registreringsmetode beskriv		
Hvordan er datamaterialet beskyttet mot at uvedkommende får innsyn?	Videokameraet har ikke kontakt med omverdenen (wifi, bluetooth, osv). Det befinner seg hjemme hos meg i et hus med alarm.	Er f.eks. datamaskintilgangen beskyttet med brukernavn og passord, står datamaskinen i et låsbart rom, og hvordan sikres bærbare enheter, utskrifter og opptak?
Samles opplysningene inn/behandles av en databehandler (ekstern aktør)?	Ja ○ Nei ●	Dersom det benyttes eksterne til helt eller delvis å behandle personopplysninger, f.eks. Questback, transkriberingsassistent eller tolk, er dette å betrakte som en databehandler. Slike oppdrag må kontraktsreguleres.
Hvis ja, hvilken		
Overføres personopplysninger ved hjelp av e-post/Internett?	Ja ○ Nei ●	F.eks. ved overføring av data til samarbeidspartner, databehandler mm.
Hvis ja, beskriv?		Dersom personopplysninger skal sendes via Internett, bør de krypteres tilstrekkelig. Vi anbefaler ikke lagring av personopplysninger på nettskytjenester. Bruk av nettskytjenester må avklares med behandlingsansvarlig institusjon. Dersom nettskytjeneste benyttes, skal det inngås skriftlig databehandleravtale med leverandøren av tjenesten. Les mer.
Skal andre personer enn daglig ansvarlig/student ha tilgang til datamaterialet med personopplysninger?	Ja ○ Nei ●	
Hvis ja, hvem (oppgi navn og arbeidssted)?		
Utleveres/deles personopplysninger med andre institusjoner eller land?	● Nei ○ Andre institusjoner ○ Institusjoner i andre land	F.eks. ved nasjonale samarbeidsprosjekter der personopplysninger utveksles eller ved internasjonale samarbeidsprosjekter der personopplysninger utveksles.
11. Vurdering/godkjenning fra andre instanser		
Søkes det om dispensasjon fra taushetsplikten for å få tilgang til data?	Ja ○ Nei ●	For å få tilgang til taushetsbelagte opplysninger fra f.eks. NAV, PPT, sykehus, må det søkes om dispensasjon fra taushetsplikten. Dispensasjon søkes vanligvis fra aktuelt departement.
Hvis ja, hvilke		
Søkes det godkjenning fra andre instanser?	Ja ○ Nei ●	I noen forskningsprosjekter kan det være nødvendig å søke flere tillatelser. Søkes det f.eks. om tilgang til data fra en registereier? Søkes det om tillatelse til forskning i en virksomhet eller en skole? Les mer om andre godkjenninger.
Hvis ja, hvilken		
12. Periode for behandling av personopplysninger		
Prosjektstart Planlagt dato for prosjektslutt	01.01.2017 31.07.2017	Prosjektstart Vennligst oppgi tidspunktet for når kontakt med utvalget skal gjøres/datainnsamlingen starter. Prosjektslutt: Vennligst oppgi tidspunktet for når datamaterialet enten skal anonymiseres/slettes, eller arkiveres i påvente av oppfølgingsstudier eller annet.
Skal personopplysninger publiseres (direkte eller indirekte)?	□ Ja, direkte (navn e.l.) □ Ja, indirekte (identifiserende bakgrunnsopplysninger) ■ Nei, publiseres anonymt	Les mer om direkte og indirekte personidentifiserende opplysninger. NB! Dersom personopplysninger skal publiseres, må det vanligvis innhentes eksplisitt samtykke til dette fra den enkelte, og deltakere bør gis anledning til å lese gjennom og godkjenne sitater.

Side 4

Hva skal skje med datamaterialet ved prosjektslutt?	■ Datamaterialet anonymiseres □ Datamaterialet oppbevares med personidentifikasjon	NB! Her menes datamaterialet, ikke publikasjon. Selv om data publiseres med personidentifikasjon skal som regel øvrig data anonymiseres.Med anonymisering menes at datamaterialet bearbeides slik at det ikke lenger er mulig å føre opplysningene tilbake til enkeltpersoner. Les mer om anonymisering av data.
13. Finansiering		
Hvordan finansieres prosjektet?	Ingen finansiering.	Fylles ut ved eventuell ekstern finansiering (oppdragsforskning, annet).
14. Tilleggsopplysninger		
Tilleggsopplysninger		Dersom prosjektet er del av et prosjekt (eller skal ha data fra et prosjekt) som allerede har tilrådning fra personvernombudet og/eller konsesjon fra Datatilsynet, beskriv dette her og oppgi navn på prosjektleder, prosjekttittel og/eller prosjektnummer.
15. Vedlegg		
Vedlegg	Antall vedlegg: 1. • Foresp_rsel om deltakelse i forskningsprosjektet.docx	

Vedlegg 5

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet
«Studie av hvordan elever arbeider med matematikkoppgaver»

Bakgrunn og formål

Jeg arbeider for tiden med en masteroppgave ved lærerutdanningen ved NTNU. Veilederen min er førsteamanuensis Magdalini Lada.

Jeg ønsker nå å se på hvordan elevene løser en viss type oppgaver. De skal se på generalisering av rekker. Jeg er spesielt interessert i hvilke problemer elevene har og hvilke misforståelser de kan møte på.

Jeg vil velge ut noen av elevene med hjelp fra matematikklæreren deres, Sissel Rinbø. Utvalget vil bli gjort mer eller mindre tilfeldig.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Elevene vil få matematikkoppgaver og jeg vil observere hvordan de arbeider. Elevene skal arbeide individuelt. Jeg vil gjerne ta video (eller bare lydopptak) av arbeidet og samle inn notatene de gjør underveis. Jeg vil sitte sammen med elevene når de jobber og gjerne spørre om hvordan de tenker. For hver elev, vil dette arbeidet vil ta omtrent 45 minutter og foregå i skoletiden. Det kan også bli aktuelt med et kort intervju noen dager senere.

Dersom du ønsker å se hvilke oppgaver elevene skal løse, så kontakt meg.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Resultatene vil bli skrevet inn i master besvarelsen min men på en slik måte at elevene vil bli anonymisert. Jeg og veileder er de eneste som vil få tilgang til innsamlet materiale. Opptak vil bli slettet og notatene destruert når jeg er ferdig med dem. Arbeidet vil ikke få innflytelse på karakteren i faget (men elevene kan jo lære litt matematikk underveis).

Prosjektet skal etter planen avsluttes senest 01.07.2017.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert/slettet.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Fredrik Holager, telefonnummer 90975755.

Veileder førsteamanuensis Magdalini Lada har telefonnummer 73412375.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg (elev) _____________ vil gjerne delta i denne studien.

………………………………………………. (elevens signatur)

Jeg (foresatte) har mottatt informasjon om studien, og gir tillatelse til at elev _____________ deltar i denne studien

……………………………………………………………………. (foresattes signatur og dato)

Jeg gir tillatelse til at lyd- og videopptak gjøres av elev _____________ i denne studien

………………………………………………. (foresattes signatur)

eventuelt gir jeg tillatelse til at bare lydopptak gjøres

………………………………………………. (foresattes signatur)