Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Liv-Iren Lie

«Få frem x-ene på en måte, få frem svaret på x-ene»

En studie av fire 7.trinnelevers arbeid med likninger, med fokus på strategier, likhetstegn og variabler

Masteroppgave i matematikkdidaktikk, 5-10
Veileder: Hermund A. Torkildsen
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Liv-Iren Lie

«Få frem x-ene på en måte, få frem svaret på x-ene»

En studie av fire 7.trinnelevers arbeid med likninger, med fokus på strategier, likhetstegn og variabler

Masteroppgave i matematikkdidaktikk, 5-10
Veileder: Hermund A. Torkildsen
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Forord

Denne oppgaven markerer slutten som lærerstudent på Rotvoll. Årene her har flydd og på veien har jeg fått mye kunnskap, gode venner, en flott kjæreste og et barn. Alt jeg har rukket! Det siste året har vært det mest krevende på lenge, og jeg har flere å takke for at jeg til slutt klarte å komme i mål.

Først og fremst vil jeg takke min kjæreste Eivind som har vært en enorm støtte og motivator gjennom hele prosessen. Takk for at du har hatt troa på meg fra start til slutt, for at du har lyttet på utallige bekymringer og gleder ved prosjektet, for at du har tatt så godt vare på Henning når jeg har jobbet med oppgaven og for at du bare er et fantastisk menneske.

Takk til Henning som har krevd at jeg er tilstede som mamma når jeg ikke har jobbet med oppgaven. Det siste studieåret har vært mye mindre stressende enn tidligere på grunn av deg.

Takk til skolen, læreren og ikke minst informantene som har latt meg få bruke av deres tid og løst krevende likningsoppgaver for at jeg skulle få skrive denne oppgaven.

Jeg vil også rette en stor takk til min veileder Hermund som virkelig hjalp meg over kneika i starten av prosjektet og har kommet med råd, veiledning og velment kritikk på samlinger og over mail.

Til slutt vil jeg takke familie og venner for støtte og råd underveis i arbeidet.
Dere er innmari gode å ha!

Liv-Iren Lie
Hallingby, mai 2017

Innholdsfortegnelse

FORORD **1**

INNHOLDSFORTEGNELSE **3**

1.0 INNLEDNING **5**

1.1 BAKGRUNN 5

1.2 AVGRENSNING 6

1.3 TILNÆRMING OG METODE 6

1.4 OPPBYGGING AV OPPGAVEN 7

2.0 TEORI **9**

2.1 ALGEBRA OG ARITMETIKK 9

2.2 FORMELLE OG UFORMELLE LØSNINGSSTRATEGIER 10

2.3 LIKHETSTEGNET 11

2.4 VARIABLER 14

3.0 METODE **17**

3.1 FORSKNINGSDESIGN 17

3.1.1 Intervjustudier *17*

3.1.2 Intervju av barn - Gruppeintervju *18*

3.2 MITT PROSJEKT 19

3.2.1 Utvalg *19*

3.2.2 Kontakt med skolen *20*

3.2.3 Utarbeiding av oppgaver *20*

3.2.4 Gjennomføring *21*

3.2.5 Innhenting av tilleggsinformasjon *22*

3.3 BEARBEIDING OG ANALYSE 22

3.3.1 Videoopptak *22*

3.3.2 Databehandling. *23*

3.3.3 Transkribering *23*

3.3.4 Koding *23*

3.3.5 Strategier *24*

3.3.6 2 Likhetstegnet *26*

3.3.7 Variabler *26*

3.3.8 Andre intervjurunde *27*

3.4 ETISKE PROBLEMSTILLINGER 27

3.5 KVALITET – PÅLITELIGHET, GYLDIGHET OG GENERALISERBARHET. 28
3.6 KRITIKK AV OPPGAVEN 28

4.0 ANALYSE (2) 31

4.1 STRATEGIER 31
4.1.1 Oppgaver med en ukjent 31
4.1.2 Oppgaver med flere ukjente. 40
4.2 ELEVENES SYN PÅ LIKHETSTEGNET 45
4.2.1 Gruppe 1 45
4.2.2 Gruppe 2 47
4.2.3 elevenes syn på likhetstegnet sett i lys av milepæler 48
4.3 VARIABLER 49
4.3.1 Elevenes uttalte oppfatninger av variabler 49
4.3.1 Ukjente 51
4.3.3 Generaliserte tall 52

5.0 DISKUSJON 57

5.3 STRATEGIER I OPPGAVER MED EN UKJENT. 57
5.4 STRATEGIER I OPPGAVER MED FLERE UKJENTE 57
5.1 ELEVENES SYN PÅ LIKHETSTEGNET OG DETS PÅVIRKNING PÅ STRATEGIER 59
5.2 ELEVENES OPPFATNINGER AV BOKSTAVSYMBOLER OG DETS PÅVIRKNING PÅ STRATEGIER 60

6.0 AVSLUTNING 65

6.1 KONKLUDERENDE OPPSUMMERING 65
6.2 IMPLIKASJONER 66

7.0 LITTERATURLISTE 69

8.0 VEDLEGG 71

8.1 VEDLEGG 1 – INFORMASJONSSKRIV 71
8.2 VEDLEGG 2 – OPPGAVER 73

1.0 Innledning

1.1 Bakgrunn

«Norske elever er alarmerende dårlig i algebra», sier Liv Sissel Grønmo, prosjektleder i TIMSS advanced, i en kommentar etter publiseringen av den siste TIMSS-undersøkelsen (Fladberg, 2016). Videre sier hun at «*For den matten som gjør at vi skal utvikle eksperter i viktige yrker som ingeniør, økonomi, informatikk, data, fysikk, kjemi og naturvitenskap, går utviklingen i gal retning»* (Fladberg, 2016).

TIMSS-undersøkelsen det her er snakk om ble gjennomført i 5. og 9. trinn i 2015 og publisert 29. november 2016. Den viser at i 5. trinn presterer norske elever jevnt over godt i matematikk sammenlignet med andre europeiske land. I 9. trinn presterer elevene middels i et europeisk perspektiv. Særlig svake prestasjoner i algebra trekker resultatet ned (Bergem, Kaarstein, & Nilsen, 2016).

Algebra er et stort felt, med mange komponenter. Kaput (2008) mener at algebra har tilknytninger til all matematikk og at det derfor må jobbes med gjennom hele skoleløpet. I den norske læreplanen kommer algebra inn først ved kompetansemålene som skal være nådd etter 7. trinn, og da i form av å stille opp og løse enkle likninger (Utdanningsdirektoratet, 2006) Det går selvsagt an å argumentere for at elevene jobber med algebra også før dette selv om det ikke uttrykkes eksplisitt gjennom LK06. Likevel ser det altså ut som at læreplanen legger opp til at likninger skal være elevenes første møte med algebraen. En likning defineres som «Matematiske uttrykk eller tall forbundet med likhetstegn» (Aubert, 2015). Likningsoppgaver man skal løse vil også inneholde minst en ukjent. Når man løser likninger er målet å finne ut hva verdien(e) til den eller de ukjente er.

Undersøkelser viser at elever har flere vanskeligheter knyttet til likninger. Blant annet har Herscovics og Linchevski (1994) undersøkt en del av utfordringene elever kan ha i overgangen til algebra. Ved å undersøke elevers likningsløsningsstrategier avdekket de et kognitiv gap som de beskriver som elevenes manglende evne til å spontant operere med eller på de ukjente. Knuth med flere har undersøkt elevers syn på likhetstegnet og fant at elevenes syn på likhetstegnet har en effekt på elevenes evne til å løse likninger

(Eric J. Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006). Andre har sett at elevene har vanskeligheter med å oppfatte de ulike rollene til variabler (Akgün & Özdemir, 2006; Küchemann, 1978; Philipp, 1992).

1.2 Avgrensning

Hensikten med denne oppgaven var å få et innblikk i hvordan noen elever i syvendeklasse jobber med likninger. Jeg ønsket å undersøke hvilke strategier elevene benytter seg av for å løse likningene, samt undersøke elevenes syn på likhetstegnet og oppfattelse av variabler. Det var også ønskelig å se om de to siste aspektene kunne ha noen innvirkning på strategiene elevene benyttet seg av. Forskningsspørsmålet i oppgaven er derfor som følger:

1. *Hvilke strategier bruker fire sjuendeklassinger i arbeid med førstegradslikninger?*
2. *Hvordan kan elevenes syn på likhetstegnet og oppfattelse av variabler påvirke strategiene?*

Ved å undersøke elevenes likningsløsningsstrategier ønsker jeg å se generelt på strategiene elevene benytter, samt å se etter tegn på at også disse elevene står overfor et kognitivt gap. Med tanke på at synet på likhetstegnet har vist seg å ha en effekt på elevenes evner til å løse likninger er det interessant å se om dette også har en effekt på elevenes strategier i likningsløsing. Også variabler har tidligere vist seg å være utfordrende for elever. Variabelbegrepet jeg bruker i denne oppgaven er en vid definisjon som vil bli nærmere forklart i teorikapittelet. Siden fokuset i oppgaven er likninger har jeg fokusert på elevenes oppfatninger av variabler som er relatert til likningsløsing. Det er derfor to oppfattelser som er av særlig interesse: variabler som ukjente og variabler som generaliserte tall. For å kunne si noe om hvordan elevenes syn på likhetstegnet og oppfattelse av variabler kan påvirke elevenes strategier vil jeg først analysere *hva* elevenes syn på likhetstegnet og oppfattelse av variabler er før jeg i diskusjonen vil forsøke å svare på *hvordan* dette eventuelt påvirker likningsløsningsstrategiene.

1.3 Tilnærming og metode

Jeg ønsker med denne oppgaven å finne ut hvordan elevene tenker og jobber når de løser likninger, jeg har derfor benyttet meg av en kvalitativ metode. Jeg har intervjuet to grupper på

to elever, der elevene har fått jobbet sammen med oppgaver. Med denne metoden har jeg fått muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål og gå i dybden ved elevenes arbeid. Det ble brukt videoopptak under intervjuene som hovedsakelig har blitt transkribert ut fra elevenes muntlige samtale, men med innspill fra gester og kroppsspråk der det var naturlig. I analysen har også elevenes skriftlige arbeider bidratt til å berike oppgaven. Hovedtyngden i analysen ligger på strategiene elevene benytter i arbeidet med likningene, men også elevenes syn på likhetstegnet og noen av elevenes oppfatninger av variabler har blitt analysert.

1.4 Oppbygging av oppgaven

Denne oppgaven er bygd opp av seks hovedkapitler: Innledning, teori, metode, analyse, diskusjon og avslutning.

Kapittel 2 er teorikapittelet. Denne er delt inn i fire deler. Først en del som omhandler ulike syn på algebra og aritmetikk med hovedvekt på innholdsanalysen til Kaput (2008) som deler algebraen inn i to kjerneaspekter og tre grener. Så er det en del som forklarer forskjellen på formelle og uformelle løsningsstrategier ved likningsløsing. Deretter en del om variablenes rolle i algebra før kapittelet avslutter med en del om likhetstegnets rolle i matematikk generelt og i likningsløsing spesielt.

Kapittel 3 er metodekapittelet. I dette kapittelet vil jeg utdype mitt valg av forskningsmetode: det kvalitative forskningsintervju. Mine metodiske valg i oppgaven vil så bli presentert før det blir en del om analysemetode. Til slutt vil jeg sette et kritisk søkelys på oppgaven gjennom etiske problemstillinger, kvaliteten i oppgaven og kritikk av eget arbeid.

Kapittel 4 er analysekapittelet. Dette kapittelet er delt i tre. Først blir analysen av elevenes løsningsstrategier presentert, deretter blir analysen av elevenes syn på likhetstegnet presentert, og til slutt en presentasjon av elevenes oppfatninger av variabler.

Kapittel 5 er diskusjonskapittelet. Her blir mine funn sammenliknet med funn gjort i andre studier og jeg undersøker om elevenes syn på likhetstegnet og oppfattelse av variabler ser ut til å ha noen påvirkning på strategiene elevene benytter.

Kapittel 6 er avslutningskapittelet. Her vil oppgaven bli oppsummert og jeg vil forsøke å svare på forskningsspørsmålet. Jeg avslutter med å diskutere hvilke implikasjoner denne studien kan ha for lærere i skolen.

2.0 Teori

2.1 Algebra og aritmetikk

Det ser ikke ut til å være noen entydig definisjon av algebra og aritmetikk. På den ene siden blir aritmetikk og algebra sett på som to atskilte enheter, mens det på den andre siden nærmest ses på som to sider av samme sak. Historisk sett ble algebra utviklet ut fra et behov for å generalisere aritmetikken (Van Amerom, 2003), og det er bred enighet om at generalisering er en vesentlig komponent i algebraen (Sfard, 1995). Ut fra dette kan man konkludere med at aritmetikk handler om operasjoner på gitte tall, mens algebraen handler om generaliserte tall. Det foreslås likevel at det ikke finnes et slikt skarpt skille all den tid aritmetikken har en iboende algebraisk karakter. Det finnes generelle regler og strukturer som enkelt kan overføres til algebraisk notasjon(Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006).

Et annet syn på algebra og aritmetikk skiller mellom symbolene som blir brukt, og følgene av dette. Kieran (1989) sier at man kan oppfatte matematiske uttrykk på to måter. Den første er prosedyrisk, da opererer man med tall og jobber mot et endelig resultat. Den andre er strukturell, da opererer man på matematiske objekter. Dette synet stemmer overens med Freudenthals (Van Amerom, 2003), som sier at den mest fremtredende forskjellen mellom algebra og aritmetikk er semantisk. I aritmetikk betyr 3+4 et problem som må løses: legg sammen 3 og 4, mens i algebra betyr 3+4 et tall: 7. På den måten kan algebra ses på som regning med kjente tall, mens algebra krever resonnering om ukjente eller variable enheter.

Kaput (2008) har laget en innholdsanalyse av algebra som fanger opp algebraens mangfoldighet. Han deler algebraen inn i to kjerneaspekter og tre grener. Hver av de tre grenene inneholder begge kjerneaspektene. Det første kjerneaspektet (A) inneholder generalisering uttrykt med konvensjonelle symboler, mens det andre kjerneaspektet (B) handler om de syntaktiske handlingene man gjør på symboler innen organiserte symbolsystemer (Kaput, 2008, s. 10-11). Vanligvis tenker man at aspekt B utvikles senere enn aspekt A fordi regelbaserte handlinger på symboler krever at man kjenner til de tillatte kombinasjonene av symboler og hvordan de forholder seg til hverandre.

Den første grenen (1) handler om å gjøre generaliseringer fra aritmetikk og kvantitativ resonnering. I denne grenen ser man på aritmetiske uttrykk som form i stedet for deres verdi

når det er regnet ut, og de som ser på algebra som generalisert aritmetikk vil befinne seg her. Typiske aktiviteter vil være å finne egenskaper til null, den kommutative lov, inverse egenskaper, finne ut at summen av to oddetall alltid er et partall osv. Generaliseringen er ofte gjort ut fra tall, men kan like gjerne være basert på fysiske enheter (kvantiteter).

Den andre grenen (2) handler om funksjoner, relasjoner og samvarians. Herunder ligger et bredt spekter av aktiviteter. Fra å studere endringer i mønstre geometrisk (figurtall) til å syntaktisk endre funksjonsuttrykk eller sammenlikne mønsteruttrykk for å bestemme om de er ekvivalente eller ikke. Gren 2 har litt uklare grenser mot andre emner i matematikken siden funksjonsideen er både rik og omfattende. I denne grenen brukes en del systemer utover det tradisjonelle symbolsystemet i matematikk. Denne inkluderer tabeller, grafer og ulike pedagogiske systemer som «fuksjonsmaskiner». Ikke alle vil regne aktivitetene i denne grenen som ren algebra, men Kaput mener det må med fordi mye av skolealgebraen plasseres her (Kaput, 2008).

Den tredje grenen (3) handler om modellering og ulike modelleringsaktiviteter. Det kan være aritmetiske problemer som krever algebraisk syntaks for å finne en løsning (som i likninger), ved å generalisere og utrykke mønstre og regulariteter i situasjoner eller fenomener som oppstår utenfor eller innenfor matematikken (som geometriske mønstre), eller generaliseringer fra rene aritmetiske regnefortellinger som i utgangspunktet ikke krever algebra for å løse. I det sistnevnte eksempelet kan man bruke algebra for å undersøke den mer generelle formen, omfanget og relasjonene i det gitte problemet.

Kaput mener at med hjelp av de to kjerneaspektene og tre grenene får man frem algebraens dype og varierte forhold til all matematikken, og at dette gjør at algebra bør spille en nøkkelrolle i læreplanen i skolen (Kaput, 2008).

2.2 Formelle og uformelle løsningsstrategier

Ved løsing av likninger blir fremgangsmåtene man bruker ofte delt inn i formelle- og uformelle løsningsstrategier (Herscovics & Linchevski, 1994; Van Amerom, 2003) Uformelle løsningsstrategier er de strategiene elevene bruker uten noen formell undervisning i likningsløsing, mens de formelle løsningsstrategiene er de strategiene elevene kan ta i bruk etter å ha fått formell undervisning. Skillet mellom disse to kategoriene av

likningsløsningsstrategier ligger i om elevene jobber *rundt* de ukjente eller om de klarer å jobbe *på eller med* de ukjente. Å jobbe *rundt* den ukjente vil si at man finner verdien av den ukjente uten å endre eller flytte på den ukjente. Eksempelvis kan man løse likningen $a + x = b$ ved strategien unwind. Da subtraherer man a fra b, og den ukjente, x, får verdien $a - b$. Ved en formell løsningsstrategi jobber man *med* eller *på* de ukjente. Ved løsing av likningen $x + x = a$ bruker man en formell løsningsstrategi dersom man legger sammen de ukjente og får $2x = a$, det samme gjør man i likningen $2x = a + x$ dersom man trekker fra x på begge sider og får $x = a$. Noen kaller også uformelle strategier for aritmetiske strategier, og formelle strategier for algebraiske strategier (Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994) Dette har en sammenheng med hvordan læreplanen i USA er bygd opp. Der har elevene faget aritmetikk i 6-8 år før de eventuelt går videre med faget algebra. Denne måten å dele inn likningsløsningsstrategier på vil bli kalt uformelle- og formelle løsningsstrategier videre i oppgaven.

I overgangen mellom de uformelle og de formelle løsningsstrategiene har flere forskere funnet det de kaller et kognitivt gap (Herscovics & Linchevski, 1994) eller et didaktisk kutt (Filloy & Rojano, 1989). Dette gapet blir karakterisert som «elevenes manglende evne til å spontant operere med eller på den ukjente» (Fritt oversatt fra: Herscovics & Linchevski, 1994). Dette synet støttes av Filloy og Royano (1989) som mener at man ikke kan regne med at elevene klarer å løse denne typen likninger spontant basert på hvordan de i utgangspunktet håndterer algebraiske operasjoner. Mens Filloy og Royano (1989) mener det didaktiske kuttet finner sted når de ukjente opptrer på begge sider av likhetstegnet, argumenterer Herscovics og Linchevski (1994) for at det kognitive gapet er lokalisert der det er flere ukjente i en likning, også når de er på samme side av likhetstegnet.

2.3 Likhetstegnet

Den utbredte bruken av likhetstegnet i matematikk på alle nivå viser viktigheten av likhetstegnet i matematikk generelt, og algebra spesielt (Eric J Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005). Når man jobber med likninger er det særlig viktig å forstå at likhetstegnet representerer en likhet og ikke er en operasjon, at man skal regne ut, slik mange elever ser ut til å oppfatte likhetstegnet (Falkner, Levi, & Carpenter, 1999; Kieran, 1989; Eric J Knuth et al., 2005; Eric J. Knuth et al., 2006).

Dersom elever blir bedt om å løse oppgaven $8 + 4 = \square + 5$ eller tilsvarende oppgaver har undersøkelser vist at elevene svarer ulikt (Carpenter, Franke, Levi, Bass, & Ball, 2003; Falkner et al., 1999; McNeil & Alibali, 2004). Dersom elevene har et relasjonelt syn på likhetstegnet vil elevene si at det skal stå 7 i boksen. Dette kan de enten finne ut ved å regne ut at begge sidene i likningen skal bli 12, eller de kan se at 5 er én mer enn 4 og at det som skal stå i boksen derfor må være én mindre enn 8.

Dersom elevene derimot har et operasjonelt syn på likhetstegnet har det vist seg at elevene kan svare på tre ulike måter. Den første måten er å legge sammen frem til likhetstegnet. Elevene vil da svare at det skal stå 12 i boksen. Den andre måten er å legge sammen alle tallene i likningen. Elevene vil da si at det skal stå 17 i boksen. Den tredje måten er at elevene først regner ut frem til likhetstegnet og skriver 12 i boksen, deretter summerer elevene 12 med 5 og skriver 17 til slutt. Likningen elevene skriver vil i det siste tilfellet se slik ut: $8 + 4 = 12 + 5 = 17$. I alle disse tre tilfellene ser elevene på likhetstegnet som en operasjon eller en kommando: «regn ut» eller «nå kommer svaret».

Carpenter med flere(2003) har utviklet 4 milepæler man kan jobbe mot etterhvert som elevenes syn på likhetstegnet utvikler seg.

1. Det første steget for å endre elevenes forståelse av likhetstegnet er å få elevene til å fortelle hva de tenker at likhetstegnet betyr. For at elevene skal kunne sammenlikne og bryte ulike oppfatninger må de være klar over sitt eget syn. Dette innebærer mer enn å bare sammenlikne elevenes ulike svar på en likning som $8 + 4 = \square + 5$, men også få frem hvordan de har kommet frem til dette svaret. Noen elever kan si at før likhetstegnet er det to tall med et pluss- eller minustegn mellom seg og etter likhetstegnet kommer svaret, noe som resulterer i at svaret blir 12. Andre kan si at alle tallene i oppgaven må legges sammen og at svaret derfor blir 17. Selv om ingen av disse oppfatningene er korrekte er det viktig at elevene tydelig kan sette ord på tankene sine om likhetstegnet for å senere kunne utfordre disse tankene.
2. Den andre milepælen er oppnådd når elevene aksepterer at regnestykker kan komme i en annen form enn $a + b = c$, men at også stykker som for eksempel $8 = 5 + 3$, $8 = 8$, $3 + 5 = 8 + 0$ eller $3 + 5 = 3 + 5$ er sanne.

3. Den tredje milepælen er oppnådd når elevene anerkjenner at likhetstegnet representerer en relasjon mellom to like tall. Da kan elevene sammenlikne de to sidene av likhetstegnet ved å regne ut hver side.
4. Den fjerde milepælen er oppnådd når elevene klarer å sammenlikne de matematiske uttrykkene uten å måtte regne ut sidene.

Det presiseres at disse milepælene er ment som en guide, og at elevene i en klasse ikke nødvendigvis vil nå de ulike milepælene samtidig eller følge denne spesifikke rekkefølgen (Carpenter et al., 2003).

I en undersøkelse av 752 elever fra 1. til 6. trinn skulle elevene svare på hva som skulle stå i boksen i oppgaven $8 + 4 = \square + 5$. Undersøkelsen viser at kun 6 prosent av elevene mente at 7 skulle stå i boksen, mens 85 prosent mente enten at det skulle stå 12 (summen av 8 og 4) eller 17 (summen av 8, 4 og 5) i boksen(Falkner et al., 1999). Det vil si at kun 6% av elevene så på likhetstegnet som en relasjon, mens 85% så på likhetstegnet som en operasjon. Det var ingenting som tydet på at denne oppfattelsen endret seg med økende alder. Blant annet mente alle de 145 6. klassingene i undersøkelsen at det skulle stå enten 12 eller 17 i boksen.

The following questions are about this statement:

$$3 + 4 \underset{\uparrow}{=} 7$$

(a) The arrow above points to a symbol. What is the name of the symbol?

(b) What does the symbol mean?

(c) Can the symbol mean anything else? If yes, please explain.

Figur 1

Percent of Students at Each Grade Level Who Provided Each Type of Equal Sign Definition as Their Best Definition

Best Definition	Grade 6	Grade 7	Grade 8
Operational	53	36	52
Relational	32	43	31
Other	15	20	17
No response/don't know	0	1	0

Figur 2

I en annen undersøkelse gjort på 6.-8. trinn ble oppgaven i figur 1 gitt (Eric J. Knuth et al., 2006). Svarene på denne oppgaven ble kodet som *relasjonell* dersom de fikk svaret «det samme som» eller liknende, mens det ble kodet som operasjonell dersom elevene skrev noe som «legg sammen tallene» eller «svaret». Figur 2 viser resultatene av denne undersøkelsen. Der kan man se at rundt halvparten av 6.- og 8. klasseelevene, og 36% av 7.klasseelevene hadde en operasjonell forståelse av likhetstegnet, mens henholdsvis 32, 43 og 31 prosent hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Denne undersøkelsen viser en noe bedre forståelse av likhetstegnet enn den Falkner et al. (1999) fant, men heller ikke her er det noe som tyder på at synet på likhetstegnet endrer seg med alderen på elevene.

2.4 Variabler

En del av algebraen inneholder variabler. Variabelbegrepet er svært viktig i matematikken, såpass viktig at oppdagelsen illustrerer et vendepunkt i matematikkhistorien (Philipp, 1992). Fra ideen av en variabel ble introdusert av Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) frem til midten av 1900-tallet ble variabelbegrepet tett knyttet opp mot funksjoner, noe som tydeliggjøres i denne definisjonen fra 1936: «Related numbers that change together, like x and y in the above equation, are called variables. When one variable depends on an other for its value, we say that it is a function of the other» (Philipp, 1992, s. 557). Rundt 1960 ble konseptet variabel utvidet til å gjelde alle bokstavsymboler (literal symbols) i et sett (Kieran, 1989). Det er fortsatt ingen allmenn aksept for en felles definisjon av variabelkonseptet (Akgün & Özdemir, 2006), men denne vide variabeldefinisjonen dominerer feltet (Philipp, 1992). At variabelkonseptet er så vidt gjør det ubrukelig for elever som lærer algebra (Philipp, 1992). Det er derfor viktig at lærere er bevisste og tydelige på de ulike bruksområdene til variablene, slik at elevene gis mulighet til å reflektere over de ulike variablene.

Ordet variabel kan altså både brukes som en vid betegnelse og for å beskrive en bestemt matematisk bruk av bokstaver. Philipp (1992) velger å bruke *literal symbol* i stedet for variabel. Denne termen er også brukt av andre (Kieran, 1989; Eric J Knuth et al., 2005), mens *letters (Bloedy-Vinner, 2001)* og *algebraic letters (MacGregor & Stacey, 1997)* også har blitt brukt. Andre holder på variabelbegrepet (Küchemann, 1978; Usiskin, 1988). I denne oppgaven vil jeg bruke begrepet variabel, og presiserer at jeg da mener den vide betegnelsen.

Følgende liste inneholder sju oppfattelser av variabler (Philipp, 1992):

1. Merkelapper (labels) f, y in $3f = 1y$ (3 feet in 1 yard)
2. Konstanter (constants) π, e, c
3. Ukjente (unknowns) x i $5x - 9 = 91$
4. Generaliserte tall (generalized numbers) a, b i $a + b = b + a$
5. Varierende mengder (varying quantities) x, y i $y = 9x - 2$
6. Parametere (parameters) m, b i $y = mx + b$
7. Abstrakte symboler (Abstract symbols) e, x i $e * x = x$ (der e er identiteten for operasjonen $*$)

De to oppfatningene av bokstavsymboler som er mest aktuelle i denne oppgaven er ukjente og generaliserte tall. Ukjente er variabler som representerer spesifikke tall. Akgün og Özdemir (2006, s. 48-49) presenterer fem punkter som elever bør kunne for å forstå bruken av ukjente:

1. Gjenkjenne og identifisere eksistensen av noe ukjent som kan bestemmes ved å vurdere begrensningene i en problemsituasjon
2. Tolke symboler i likninger som representanter for spesifikke tall
3. Substituere variabler i likninger med tall (ett eller flere) for å danne relasjoner som er sanne.
4. Bestemme ukjente enheter i likninger ved å utføre passende algebraiske og aritmetiske operasjoner, og
5. Symbolisere ukjente enheter i en problemsituasjon og bruke slike symboler for å lage likninger.

Generaliserte tall skiller seg fra ukjente ved at variablene kan ha, eller representere, en rekke tall i stedet for bare en verdi (Küchemann, 1978). Selv om den representerer flere tall er det bare nødvendig å tenke på symbolet for å en verdi av gangen(Eric J Knuth et al., 2005).

Mange problemer knyttet til variabler henger sammen med at elevene ikke greier å gjenkjenne hvilken rolle variablene innehar til en hver tid. Når elever blir bedt om å trekke sammen dette uttrykket: $3x + 5x - 24$, ser man ofte at de lager likningen $3x + 5x - 24 = 0$, for så å løse den og gi svaret $x = 3$ (Philipp, 1992). Denne atferden ville kanskje bli mindre vanlig dersom elevene var klar over at i likningen behandles x-en som en ukjent, mens i uttrykket må x-en behandles som et generalisert tall.

Noen ganger behandles variabler på flere måter i en og samme oppgave. Eksempelvis kan man se på likningen $2x + 3x = 15$. Ofte vil man løse den slik:

$$2x + 3x = 15$$
$$5x = 15$$
$$x = 3$$

Ved å løse oppgaven på denne måten har x-en to ulike funksjoner. Først behandler man den som et generalisert tall ved at man omformer $2x + 3x$ til $5x$, før man ser på den som en ukjent med den spesifikke verdien 3.

En undersøkelse gjort av Küchemann (1978) viser 13-15-åringers fortolkninger av bokstavsymboler. Hans undersøkelser viser at 41% av femtenåringene kunne løse oppgaver med spesifikke ukjente, 35% med generaliserte tall og kun 10% klarte å løse oppgavene knyttet til det han kaller variabler (varierende mengder).

Philipp konkluderer med at dersom mattematikkelever på alle nivå ble oppmuntret til å tenke nøyere gjennom de ulike bruksområdene til variabler i algebra, ville de kanskje utvikle en større konseptuell forståelse for variabler (Philipp, 1992).

3.0 Metode

3.1 Forskningsdesign

3.1.1 Intervjustudier

Steinar Kvale sier at et intervju, *inter view*, er «en utveksling av synspunkter mellom to personer som samtaler om et tema som opptar dem begge» (Kvale, 1997, s. 17). Det er altså samtalen som er det sentrale i denne metoden. Intervjuer kan ta mange ulike former; journalistiske intervjuer, jobbintervjuer, terapeutiske intervjuer, skriftemål, forskningsintervjuer og en hel del andre. Det intervjuet som er relevant i forbindelse med de fleste masteroppgaver i matematikkdidaktikk er det kvalitative forskningsintervjuet. Dette er en styrt samtale der forskeren er den som styrer. Det er forskeren som stiller spørsmål eller bestemmer temaet samtalen skal dreie seg om. Det er ikke meningen at forskeren skal påvirke den intervjuede ut over temaet som skal snakkes om, forskeren skal forsøke å få intervjupersonen til å åpne seg og fortelle sin historie, sin versjon av temaet som tas opp. Forskerens rolle er å gi premissene for samtalen, han bestemmer tema, og stiller spørsmål. Han følger opp svarene til intervjupersonen og kontrollerer situasjonen. Det er ikke snakk om en hverdagslig samtale mellom to likeverdige deltakere, men en styrt samtale med en ujevn maktbalanse (Kvale, 1997).

I denne masteroppgaven er målet å belyse strategier i algebraisk likningsløsing for syvendeklasseelever. Jeg har derfor valgt å intervjue fire elever. Det betyr at jeg ikke kan generalisere mine funn, men får muligheten til å følge opp elevenes innspill og be dem om å utbrodere uklarheter. Dette krever at jeg som intervjuer innehar kunnskap om temaet og greier å fange opp elevenes innspill underveis. En vanlig kritikk av intervjustudier er at de ikke er generaliserbare. Samtidig sier psykologiens historie at dersom man skal innhente generell kunnskap er det best å fokusere på noen få, intensive kasusstudier (Kvale, 1997, s. 59) Flere store navn innen psykologiforskningen, eksempelvis Piaget, Ebbinghaus og Skinner, har gjort pionérstudier med kun én eller noen få deltakere. Flere studier med få forsøkspersoner har senere vist seg å være generaliserbare for større grupper(Kvale, 1997).

Intervjuer kan kategoriseres fra det helt åpne intervjuet der intervjueren introduserer et tema som intervjupersonen snakker helt fritt om, til det strengt lukkede intervjuet med helt faste spørsmål som skal svares på. Mellom dette ligger de halvstrukturerte forskningsintervjuene

som har en intervjuguide med spørsmål eller temaer som skal tas opp, men med mulighet for at rekkefølgen endres eller at intervjueren kan stille oppfølgingsspørsmål og endre noe underveis (Kvale, 1997). Elevene i denne undersøkelsen har ikke jobbet mye med likninger før. Da vil det naturlig nok være lite hensiktsmessig å stille elevene helt åpne spørsmål om egne strategier. For å undersøke strategiene elevene benytter under likningsløsing, må elevene jobbe med å løse likninger. Det er ønskelig å kunne stille oppfølgingsspørsmål og ta tak i utsagn fra elevene underveis, intervjuene i denne undersøkelsen plasseres derfor under det halvstrukturerte forskningsintervjuet.

3.1.2 Intervju av barn - Gruppeintervju

Intervju er en sosial setting, som kan være vanskelig for voksne å forholde seg til, og enda vanskeligere kan det være når man skal intervjue barn. Gruppeintervjuer kan oppleves mindre skremmende for elevene enn individuelle intervjuer (Cohen, Manion, Morrison, & Bell, 2011). I dette tilfellet hadde jeg ikke møtt elevene jeg skulle intervjue på forhånd, kun informert dem om prosjektet i forveien. Jeg hadde altså ingen relasjon til elevene i forkant, noe som kan gjøre intervjusettingen mindre komfortabel enn den ville vært dersom vi hadde fått etablert en positiv relasjon.

Noe man må tenke over når man gjennomfører gruppeintervjuer er at man ikke får meningen til enkeltelever, men man må behandle gruppen som en enhet. Det er ikke sikkert at du får frem alle meningene eller tankene til hvert enkelt gruppemedlem, da det er en risiko for at den ene overkjører den andre. Gruppeintervjuet gjør også at intervjueren får mindre kontroll over intervjusituasjonen, og det gjør analysen mer krevende da det kan bli vanskelig å skille de overlappende stemmene (Kvale, 1997). Samtidig kan du potensielt få flere meninger på den tida som er avsatt for å intervjue og det kan oppstå diskusjoner som gir flere eller rikere svar på oppgaven (Cohen et al., 2011).

Cohen med flere har satt sammen en liste på 28 punkter over vanskeligheter man bør tenke over før man intervjuer barn (Cohen et al., 2011). Blant annet hvordan man kan:

1. Unngå at forskeren blir sett på som en autoritetsfigur (lærer, forelder, voksen i en mektig posisjon).
2. Unngå at barna føler seg ukomfortable eller truet.

3. Få elevene til å avsløre hva de virkelig tenker og føler i stedet for hva de tror forskeren vil høre.
4. Unngå at situasjonen blir sett på som en test av elevene.
5. Fremkalle genuine svar fra barn i stedet for bare respondering på intervjusituasjonen.
6. Unngå problemet at noen barn heller sier hva som helst enn å føle at de ikke har «svaret».

Disse punktene har jeg lagt vekt på under planleggingen og gjennomføringen av intervjuene. Foruten å la elevene jobbe i grupper valgte jeg å trekke meg noen meter unna elevene mens de jobbet med oppgavene. Med dette grepet ønsket jeg at elevene skulle føle seg mer komfortable i situasjonen både med tanke på meg som intervjuer og at de skulle få muligheten til å jobbe med oppgavene i fred. Før intervjuene startet presiserte jeg også for elevene at noen av oppgavene kom til å være vanskelige og jeg ikke var opptatt av om de fikk rett svar eller ikke. Det jeg var interessert i var hvordan de tenkte når de jobbet med oppgavene. Etter hvert oppgaveark bestående av 1-3 oppgaver som elevene hadde løst fikk jeg muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål dersom det var noe som ikke kom klart frem i samtalen mellom elevene.

3.2 Mitt prosjekt

3.2.1 Utvalg

Hovedmålet med oppgaven er å undersøke tre aspekter ved likningsløsing: de uformelle strategiene elevene bruker, synet de har på likhetstegnet og oppfattelsen av variabler.
For å kunne undersøke de uformelle strategiene til elevene var det viktig å intervjue elever som ikke hadde fått formell undervisning i temaet. Det var derfor ønskelig å undersøke disse aspektene hos sjuendeklasseelever som ikke hadde blitt undervist i temaet likninger. Jeg ønsket å intervjue seks elever. To til et pilotintervju og fire til de endelige intervjuene. Siden jeg skulle intervjue noen få elever, var det kun elever i en klasse som fikk tilbud om å delta i studien. Det var viktig for meg at elevene som deltok i prosjektet selv ønsket å være med. Jeg informerte derfor elevene om studien, og delte ut samtykkeskjema. Jeg fikk seks skjemaer i retur, hvorav de to første elevene ble med i pilotundersøkelsen. Intervjuene av de fire siste elevene ble grunnlaget for denne oppgaven. Jeg satte ingen spesielle kriterier for deltakelse, og trengte heller ingen utvalgskriterier siden jeg fikk samtykke av nøyaktig det antallet elever

jeg ønsket å intervjue. Jeg fikk hjelp av læreren til å fordele de fire hoveddeltakerne på to grupper som han mente kom til å jobbe godt sammen.

3.2.2 Kontakt med skolen

Jeg tok kontakt med en lærer jeg kjenner til fra før, og som jeg visste underviste i matematikk på sjuende trinn. Etter å ha fått godkjennelse av læreren sendte jeg mail til rektor ved skolen for å informere om prosjektet mitt. Jeg hadde deretter et kort møte med rektor og avdelingsleder der jeg informerte om studien og vi diskuterte hvordan vi skulle gå frem for elevene. Ledelsen var positiv til studien og bidro med å sende sms til foreldrene i den aktuelle klassen for å fortelle at elevene kom til å ha med seg samtykkeskjema hjem som de måtte se på og returnere så raskt som mulig dersom de ønsket å være med på studien. Etter dette møtet presenterte jeg prosjektet for elevene og delte ut samtykkeskjema.

3.2.3 Utarbeiding av oppgaver

I dette intervjustudiet er det oppgavene elevene jobbet med som danner grunnlaget for å kunne svare på forskningsspørsmålene. Det var derfor viktig at oppgavene var godt planlagt slik at de kunne gi meg svar på det jeg ønsket å finne ut av. Jeg hadde tre fokusområder når jeg skulle lage oppgaver. Jeg ønsket oppgaver som sa noe om hvilke strategier elevene brukte, noe om hvordan de så på likhetstegnet og noe om hvilken kjennskap de hadde til variabler.

Jeg startet med å lage oppgavene som skulle si noe om strategiene elevene brukte. Før jeg lagde oppgavene hadde jeg lest noen artikler om tidligere forskning på området(Alibali, 1999; Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1989; Linchevski & Herscovics, 1996), og det var naturlig å ta utgangspunkt i oppgavene de hadde brukt for å gi noe sammenlikningsgrunnlag. Noen oppgaver er derfor tatt direkte fra artiklene. Jeg ønsket at alle regneartene skulle være representert, både hver for seg og sammen. Jeg ville ha noen korte oppgaver som elevene var kjente med fra før, noen større oppgaver, og noen litt lengre oppgaver. De fleste oppgavene hadde kun en ukjent, men noen oppgaver hadde flere ukjente på en eller begge sider av likningen.

For å se på elevenes syn på likhetstegnet kunne jeg bruke noen av oppgavene jeg allerede hadde laget for å se hvordan likhetstegnet ble brukt av elevene. I tillegg hentet jeg en oppgave fra en artikkel fra Knuth med flere(Eric J. Knuth et al., 2006) der elevene selv skulle beskrive

hva likhetstegnet kunne bety, og noen spesifikke oppgaver fra Herscovics og Linchevski (Herscovics & Linchevski, 1994) som så på om elevene godtok at likhetstegnet representerte en likhet, og ikke en operasjon.

For å undersøke elevenes oppfattelser av variabler fikk elevene en oppgave der de selv skulle fortelle om variabler de kjente til. De fikk også en oppgave der de skulle sammenlikne uttrykk. Likningsoppgavene elevene jobbet inneholdte ukjente, og jeg valgte å la flere ulike symboler og bokstaver representere de ukjente i oppgavene. I matteboka elevene brukte var ukjente representert med en firkant. Jeg startet derfor oppgavene med denne representasjonen, før jeg introduserte x. Senere ble også n og m brukt for å representere de ukjente.

3.2.4 Gjennomføring

Før intervjuene startet informerte jeg elevene kort om hvordan intervjuet kom til å foregå og hvordan jeg kom til å bruke videoopptaket videre. Intervjuene foregikk ved at de fikk utdelt ark med 1-3 oppgaver på. Mens elevene jobbet med oppgavene trakk jeg meg noen meter unna til en annen pult. Etter hvert som elevene var ferdige med arkene stilte jeg dem spørsmål om hva de hadde gjort og hvordan de hadde tenkt etter behov før de fikk utdelt et nytt ark. Unntaksvis brøt jeg inn mens elevene arbeidet. Da var det enten fordi jeg hørte at elevene hadde gjort noe feil, eksempelvis lest oppgaven feil, eller fordi jeg ønsket at elevene skulle uttrykke tankene sine tydeligere før de gikk videre til neste oppgave. En gang var elevene såpass på villspor at jeg valgte å avbryte oppgaven og ba de om å gå videre. Noe av grunnen til at jeg flyttet meg bort er diskutert tidligere i oppgaven i delkapittel 3.1.2, men en annen relevant grunn var at jeg ønsket at elevene skulle diskutere med hverandre for å komme opp med løsninger før de eventuelt tok kontakt med meg. Dette viste seg å fungere bra. Elevene fikk aldri muntlig beskjed om å ikke ta kontakt, men jobbet seg stort sett ut av problemene selv. Noen få ganger stilte elevene spørsmål til meg underveis. Da var det gjerne praktiske spørsmål som ikke hadde noen direkte påvirkning på oppgaven. Dersom elevene stilte meg spørsmål om oppgavene, for eksempel: «hva er n?» svarte jeg med å stille samme spørsmål tilbake til elevene.

Etter å ha analysert elevenes arbeid med oppgavene samt lest meg mer opp på teorien merket jeg at det fortsatt var noen relevante spørsmål til oppgaven som sto ubesvart. Etter å ha

konferert med veileder, snakket med læreren og fått godkjenning av elevene gjorde jeg et nytt kortere intervju av elevene i de samme gruppene.

3.2.5 Innhenting av tilleggsinformasjon

Før intervjuene hadde jeg behov for å vite noe om hvordan elevene var vant til å jobbe med likninger og om de hadde hatt undervisning i temaet tidligere. Jeg har derfor lånt matematikkbøkene elevene bruker samt hatt uformelle samtaler med læreren. Også underveis i prosjektet har det oppstått spørsmål, blant annet virket det som elevene hadde hatt undervisning i regnerekkefølge kort tid før intervjuene. Jeg har i den forbindelse hatt uformelle samtaler med læreren også underveis. Disse samtalene har ikke blitt tatt opp, men jeg har notert meg opplysninger som jeg har ansett som relevante. Noen opplysninger har jeg også fått gjennom samtaler med rektor på skolen.

3.3 Bearbeiding og analyse

For å få svar på forskningsspørsmålet i oppgaven har jeg hatt to runder med intervjuer, da det fortsatt var noen ubesvarte spørsmål etter første runde. Den første intervjurunden var den mest omfattende med 52 oppgaver elevene skulle løse, mens den andre runden besto av seks oppgaver. Hovedtyngden av analysearbeidet ble gjort på de første intervjuene, mens de andre var mer som et supplement. Jeg fokuserer derfor mest på hvordan de første intervjuene ble behandlet før jeg kort sier noe om hvordan jeg brukte svarene i de andre intervjuene.

3.3.1 Videoopptak

Det ble tatt videoopptak av intervjuene av elevene. Fordelen med denne måten å samle inn data på er at jeg får en mer detaljert og ikke-tolket gjengivelse av intervjuene (Tjora, 2012). Samtidig blir transkriberingen og analysen vanskeligere og mer kompleks med video enn med bare lydopptak, de som studeres kan endre oppførsel når det filmes og man kan få så mye datamateriale at det blir vanskelig å få oversikt (Tjora, 2012). I hovedsak var det elevenes muntlige samtale som ble transkribert, men videoopptaket gjorde det mulig for meg å se hvor elevene pekte de gangene de refererte til «den» eller «det» og jeg kunne lese elevenes ansiktuttrykk og kroppsspråk de gangene det var ønskelig.

3.3.2 Databehandling.

Videoopptakene ble transkribert kort tid etter intervjuene. Transkripsjonen ble først gjort ved å bruke analyseprogrammet NVivo. Med dette programmet kan man legge in videoene, transkribere og lage og organisere koder. De ulike utsagnene i transkripsjonen får tidsmerker noe som gjør det enkelt å bytte mellom video og transkripsjon når man har behov for det. I intervjuene mine snakker elevene mye sammen, til tider fullfører de hverandres setninger og avbryter hverandre en del. Hver gang man skal ha en ny linje i Nvivo bruker programmet noen sekunder på å gjøre klart klokkeslett og kople dette opp mot videoen. På grunn av alle skiftene mellom elevenes utsagn tok dette mye tid, og jeg gikk derfor over til å gjøre selve transkriberingen med Excel før jeg overførte transkripsjonen til Nvivo igjen. Jeg mistet da den nøyaktige tidsposisjonen til utsagnene, men hadde fortsatt videoene og transkripsjonene på samme sted.

3.3.3 Transkribering

I hovedsak var det elevenes utsagn som ble transkribert. Fordi det ble brukt videoopptak kunne jeg også supplere transkripsjonene med kroppsspråk eller peking. Disse visuelle kodene ble skrevet i parenteser. Noen ganger klarte jeg ikke å tyde hva elevene sa, dette ble skrevet som (uklart) eller (uklart ord) under transkriberinga. I transkripsjonen, og oppgaven forøvrig, har elevene fått koder i stedet for navn. Elevene fra det første intervjuet har fått kodene 1A og 1B, mens elevene fra det andre intervjuet har fått kodene 2A og 2B. Utsagnene i hvert intervju har blitt nummerert, og begge intervjuene starter på samme nummer. I transkripsjonene fra den andre intervjurunden ble utsagnene nummerert fra neste hele hundre. Det vil si at transkripsjonen fra intervjurunde to startet fra 800 i gruppe 1, og 1100 i gruppe 2. Siden elevene har koder ut fra hvilken gruppe de tilhørte kommer det tydelig frem i utdragene hvilken gruppe det er snakk om selv om utsagnene i begge gruppene har like numre.

3.3.4 Koding

Transkripsjonene ble lest gjennom flere ganger, og jeg noterte ned tanker og stikkord mens jeg leste. På den måten fikk jeg bedre oversikt over datamaterialet. Ut fra forskningsspørsmålet hadde jeg tre overordnede kategorier som var interessante å se på: strategier, syn på likhetstegnet og oppfatninger av bokstavsymboler. Jeg kodet materialet i tre omganger, med fokus på de tre overnevnte kategoriene. Kodingen ble i hovedsak gjort på en deduktiv måte, det vil si at jeg tok utgangspunkt i teorien på feltet når jeg skapte kodene.

3.3.5 Strategier

Likningsløsningsstrategier var den mest omfattende delen av analysen. Målet med denne delen var å se hvordan elevene valgte å løse de ulike oppgavene, og se om det var noen mønstre mellom strategiene elevene brukte og oppgavene de skulle løse. Analysen startet med å kode datamaterialet jeg hadde. I forkant av arbeidet med koding av transkripsjonene hadde jeg lest flere artikler som hadde kodet likningsstrategier til elevene (Alibali, 1999; Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994). Ved at jeg har lest og tenkt over hvilke strategier de hadde funnet, hadde jeg også en formening om hva jeg selv kom til å finne. Jeg brukte dermed en deduktiv metode. Jeg forsøkte likevel å løsrive meg noe fra det jeg hadde lest, og kodet datamaterialet uten å ha de tidligere kodene tilgjengelig. Etter å ha laget opp min egen mening om kodene av løsningsstrategiene leste jeg over kodene og sammenlignet de med de tidligere kodene. Noen av kodene jeg hadde brukt ble deretter endret. Noen ble slått sammen mens andre ble delt opp. De kodene som ble stående til slutt er:

- Tallkunnskap
- Unwind
- Gruppering av tall
- Substitusjon
- Gruppering av ukjente
- Relasjonsstrategi
- Tellestrategi
- Regne ut venstre side
- Ukjent

TALLKUNNSKAP (TK)

Strategien tallkunnskap kjennetegnes ved at likningen løses «automatisk». Med det menes at elevene gjør utregningen uten å tenke seg om, de bare «vet» svaret.

UNWIND (UN)

Denne strategien brukes når elevene «dekoder» likningen. Dette kan gjøres på to måter. Den ene kalles inverse operasjoner. I likninger på formen a+x=b vil elevene da regne ut b-a for å finne x. Den andre kalles complementary subtrahend or factor (Herscovics & Linchevski, 1994). Denne brukes når man bytter plass på a og x i oppgaver på formen a=b-x eller a=b/x.

Dette er en spesialstrategi som kun fungerer der den ukjente er en subtrahend eller dividend. I øvrige tilfeller brukes inverse operasjoner.

GRUPPERING AV TALL (GT)

Når elevene regnet ut deler av likningen ble dette kategorisert som gruppering av tall. De kunne legge sammen alle tallene på den ene siden av likningen for å finne ut hva den andre siden «måtte bli», for så å ta i bruk en tilleggsstrategi for å løse likningen. Denne strategien brukes også dersom elevene regner ut mindre deler av likningen. Dersom elevene eksempelvis legger sammen b og c i likningen $a + x + b + c = d + e$ har de gjort en gruppering.

SUBSTITUSJON (S-)

I denne kategorien gjetter eller velger elevene et tall som de setter inn i stedet for den ukjente for å se om likningen stemmer. Dersom den stemmer på første forsøk får den koden Substitusjon første forsøk (SF). Dersom elevene justerer gjettingen sin på en systematisk måte for å nærme seg rett svar får den koden substitusjon: systematisk (SS). Om de bare gjør en ny tilfeldig gjetting får den koden substitusjon: tilfeldig (ST). Dersom det er uklart hvilken fremgangsmåte elevene har brukt under substitusjonen ble det kodet til substitusjon: uklar (SU).

GRUPPERING AV UKJENTE (GU)

Denne strategien brukes dersom elevene regner sammen deler av likningen som inneholder bokstaver. Denne koden blir brukt når de legger sammen to ledd som inneholder bokstaver (ax+bx=(a+b)x).

RELASJONSSTRATEGI (RS)

Elevenes strategier ble kodet til relasjonsstrategi dersom elevene brukte relasjonene mellom tallene for å bestemme den ukjente uten å regne ut noen av sidene i likningen.

TELLESTRATEGI (TS)

Tellestrategi ble brukt i noen addisjonsoppgaver. I en oppgave $a + b = x + c$ talte elevene opp fra tallet c til summen av a og b for å finne verdien av x.

REGNE UT VENSTRE SIDE (RV)

Dersom elevene brukte denne strategien regnet elevene ut venstre side i likningen, og satte dette som et svar uten å ta hensyn til det som stå på høyre side i likningen.

UKJENT (UK)

Dersom det av en eller annen grunn ikke kom frem hvordan elevene hadde tenkt for å løse en oppgave ble denne kodet som ukjent. Dette kunne være fordi jeg ikke stilte gode nok oppfølgingsspørsmål. Enten stilte jeg de ikke i det hele tatt, eller så var spørsmålene jeg stilte ledende. Elevenes strategier ble også kodet til ukjent dersom elevene ikke klarte å forklare fremgangsmåten sin.

På noen oppgaver brukte elevene flere strategier underveis i arbeidet som de selv forkastet. I disse tilfellene ble kun den eller de strategien(e) elevene til slutt valgte for å løse oppgaven kodet. De gangene elevene brukte en kombinasjon av strategier ble begge strategiene kodet.

3.3.6 2 Likhetstegnet

Elevenes syn på likhetstegnet ble først analysert ved å undersøke om gruppene så på likhetstegnet som en operasjon eller relasjon. Dette gjorde jeg på tre måter. Først så jeg hvordan elevene hadde svart på oppgave 37-39 som var designet for å undersøke elevenes syn på likhetstegnet. Deretter leste jeg gjennom transkripsjonen etter tegn på det ene eller andre synet. Til slutt så jeg etter om noen av strategiene elevene hadde brukt sa noe om elevenes syn på likhetstegnet. Der var det særlig to strategier som kunne si noe om synet: regne venstre side og relasjonsstrategi. Førstnevnte tyder på et operasjonelt syn på likhetstegnet mens det siste tyder på et relasjonelt syn. Etter å ha funnet disse eksemplene forsøkte jeg å plassere elevenes syn på likhetstegnet i en eller flere av milepælene til Carpenter med flere (2003).

3.3.7 Variabler

For å analysere elevenes oppfatninger av variabler ble det tatt utgangspunkt i Philipps (1992) syv oppfattelser av variabler. Analysen ble delt inn i tre deler.

1. **Elevenes uttalte oppfattelser av variabler**

   I oppgave 38 skulle elevene selv fortelle når bokstavsymboler ble brukt i

matematikken. Svarene til elevene ble kodet etter hvilket av Philipps oppfattelser de representerte.

2. **Ukjente**
   I denne delen av analysen undersøkte jeg hvordan elevene oppfattet de ukjente gjennom arbeidet med likningsoppgavene. Under dette kommer også hvordan elevene forholdt seg til ulike representasjoner av de ukjente.
3. **Elevenes oppfattelser av generaliserte tall**
   Denne delen av analysen tok utgangspunkt i elevenes svar på oppgave 39 samt strategien elevene brukte i oppgave 31 og 32. Her ser jeg på hvorvidt elevene klarer å oppfatte bokstavsymboler som generaliserte tall.

3.3.8 Andre intervjurunde

Det andre intervjuet ble gjennomført etter å ha kodet og analysert de første intervjuene fordi datamaterialet mitt viste seg å være ufullstendig på enkelte områder. Disse intervjuene besto av 7 oppgaver, og ligger vedlagt. Disse intervjuene ble også transkribert og kodet på samme måte som det første intervjuet.

3.4 Etiske Problemstillinger

I denne oppgaven intervjuer jeg 7. klassinger for å få svar på forskningsspørsmålene mine. Uansett hvem man intervjuer har man en etisk forpliktelse overfor personen. Her er det snakk om barn, noe som gir ekstra forpliktelser overfor deltakerne. Jeg har søkt og fått godkjent prosjektet av NSD – Norsk senter for forskningsdata. For å få godkjent stiller de en rekke krav. Det kreves godkjenning av elevene og foreldrene for at de kan være deltakere i prosjektet. Jeg informerte elevene muntlig om prosjektet og gav elevene mulighet til å stille spørsmål. Jeg presiserte at eventuell deltakelse var frivillig, og at de hadde rett til å trekke seg underveis i prosjektet uten å gi noen grunn. Deretter delte jeg ut samtykkeskjema der foreldrene måtte skrive under for at barna deres kunne delta. Før hvert intervju sørget jeg også for å spørre elevene om det var greit at jeg intervjuet de og at jeg filmet dem. Det stilles også krav til anonymitet. Man skal ikke kunne gjenkjenne elevene som har deltatt. Dette har jeg løst ved at jeg ikke sier noe om skolen jeg har samlet data på ut over at det er en barneskole, elevene har fått koder i stedet for navn, samt at kjønnet til alle elevene i oppgaven er satt til hunkjønn. Videoopptakene har jeg også behandlet på en forsiktig måte, og de vil bli slettet i det prosjektet er avsluttet.

3.5 Kvalitet – pålitelighet, gyldighet og generaliserbarhet.

Kvaliteten i en kvalitativ oppgave kan vurderes gjennom oppgavens pålitelighet (reliabilitet), gyldighet (validitet) og generaliserbarhet (Tjora, 2012). Pålitelighet i kvalitative studier handler om å redegjøre for hvordan ens egen posisjon kan komme til å prege forskningsarbeidet, mens oppgavens gyldighet handler om hvorvidt oppgaven måler det som var intensjonen å måle, altså hvor treffsikker forskningen er (Tjora, 2012). I dette kapittelet har jeg etter beste evne forsøkt å redegjøre for mine valg gjennom hele forskningsprosessen, for på den måten å styrke påliteligheten og gyldigheten i oppgaven. Mine valg og tolkninger vil påvirke resultatet av oppgaven. I følge Cohen (2011) kan to forskere som undersøker akkurat det samme komme til å ha ulike funn, og begges funn kan være pålitelige. Han siterer videre Kvale som sier at ved intervjuer kan det være like mange fortolkninger som det er forskere. Virkeligheten har flere lag, og det finnes derfor flere virkeligheter om en og samme kontekst (Cohen et al., 2011). Det vil si at dersom en annen hadde gjennomført den samme forskningen som fremkommer av denne oppgaven kunne hun fått andre funn jeg har fått, og vi kunne begge hatt pålitelig forskning.

Denne oppgaven er basert på fire elevers arbeid med likninger. Det er snakk om et svært lite antall, og ut fra dette kan jeg ikke si noe om strategiene til alle 7. klassinger. Funnene mine vil i hovedsak gjelde de elevene jeg har intervjuet. Samtidig har jeg hatt et bevisst forhold til aktuelle teorier og til tidligere forskning på feltet, og forsøkt å sette mine funn i en sammenheng med andres relaterte forskning. Dette sies å kunne gjøre forskningen konservativ, men er viktig for å vise forskningens gyldighet og gi en viss generaliserbarhet eller overførbarhet (Tjora, 2012).

3.6 Kritikk av oppgaven

I denne undersøkelsen har jeg intervjuet to grupper på til sammen fire elever. I tillegg til dette hadde jeg et lite pilotintervju. Etter pilotintervjuet ble det lagt til mange oppgaver som jeg ikke fikk testet før de endelige intervjuene. I etterkant av det første store intervjuet så jeg at ikke alt fungerte helt som jeg hadde tenkt, og endret derfor noen av oppgaven før intervjuet med den andre gruppa. Oppgavene elevene jobbet med ble derfor ikke helt like. De oppgavene det er snakk om har blitt merket slik at det kommer frem av det vedlagte oppgavearket. Oppfølgingsspørsmålene ble også litt ulike etter å ha fått mer erfaring fra det første intervjuet.

Jeg hadde to datainnsamlinger etter at jeg ikke fikk alle svarene jeg ønsket etter den første intervjurunden. Det tok derfor nesten tre måneder fra de første intervjuene til de siste. Jeg vet at de ikke har fått undervisning i likninger på skolen i mellomtiden, men det er likevel snakk om lang tid, noe som ikke er helt heldig.

4.0 ANALYSE (2)

4.1 Strategier

I denne presentasjonen av strategier er analysen delt i to. Jeg vil først presentere strategiene elevene brukte i oppgaver med en ukjent, for deretter å presentere strategiene i oppgavene med flere ukjente.

4.1.1 Oppgaver med en ukjent

4.1.1.1 Tallkunnskap

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{01.\,5+3=x}$	TK	ja	TK	ja
$\mathbf{06.\,2=8-x}$	TK	ja	TK	ja
$\mathbf{07.\,36=100-x}$	TK	ja	UN	ja
$\mathbf{17.\,4\times x=24}$	TK	ja	TK	ja
$\mathbf{18.\,15:x=3}$	TK	ja	TK	ja
$\mathbf{04.\,7+6=x+9}$	GT + TS	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{05.\,2+16=9+x}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{09.\,5-2=x-3}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{14.\,2\times5-3=20-x}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{15.\,17+x+20-20=15-15+5+15}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{16.\,4+x-2+5=11-3+5}$	GT + TK	nei	GT + SF	ja
$\mathbf{21.\,5\times x=20+10}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{22.\,10\times x=5\times20}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{23.\,10*10=x*5}$ **(G1)**	GT + TK	ja		
$\mathbf{25.\,8:2=x:4}$	RV	n	GT + TK	ja
$\mathbf{27.\,x:2=10:4}$	GT + UK	n	GT + TK	ja

Tabell 1 – Tallkunnskap

Tabell 1 viser oppgavene der strategien tallkunnskap ble brukt. Strategien ble brukt både som eneste strategi og i kombinasjon med gruppering. Som eneste strategi ble den brukt ved korte oppgaver med små og enkle tall. Et eksempel på en slik oppgave er: $4*x=24$. Dette utdraget viser elevene i gruppe 2 sin dialog rundt oppgaven.

316	2B:	ja. Fire gange..
317	2A:	seks
318	2B:	ja.
319	2A:	ferdig.
320	L:	ja. Hvordan regnet dere det ut?
321	2A:	jeg bare, der så så jeg bare (uklart)

Utdrag 1 - 4*x=24

Elevene fant verdien av x såpass raskt at det ikke var noen tvil om at dette var automatisert, og når jeg etterpå spurte elevene hvordan de hadde regnet ut oppgaven svarte de at de bare så det. Dette var et typisk eksempel, og det spilte ingen rolle hvilken operasjon som var involvert. Disse oppgavene der tallkunnskap ble brukt som eneste strategi var ment for å få elevene i gang, derav den enkle formen og små tallene.

Tallkunnskap ble også brukt i kombinasjon med gruppering dersom grupperingen førte til at likningen ble kort og med enkle tall. Dette kommer frem i dialogen elevene hadde rundt oppgave 22: $10 \times x = 5 \times 20$.

404	2B:	seks. Fem ganger tjue er hundre. Ti. ferdig.
405	L:	den var grei, men hvordan kom dere frem til det så kjapt der?
406	2B:	(uklart) fem ganger sju er hundre. Og så vet jeg at ti ganger ti er hundre.

Utdrag 2 -10*x=5*20

Her ser vi at elevene startet med å regne sammen, eller gruppere, fem ganger tjue slik at det ble hundre. Likningen endret dermed form til $10 \times x = 100$, og elevene visste raskt at den ukjente måtte være ti. Altså brukte de strategien tallkunnskap.

Denne strategien var svært vellykket for elevene. Strategien ble brukt 26 ganger enten alene eller i en kombinasjon, og kun en gang ble verdien på den ukjente feil. Dette på grunn av en feil elevene gjorde under grupperingen.

4.1.1.2 Unwind

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{02.17 + x = 22}$	TS	ja	UN	ja
$\mathbf{03.56 - x = 41}$	UK	ja	UN	ja
$\mathbf{07.36 = 100 - x}$	TK	ja	UN	ja
$\mathbf{08.250 = x - 300}$	UK	nei	UN	ja

$\mathbf{19.\ 333 = x \times 9}$	UN	ja	SS	ja
$\mathbf{20.\ 525 : x = 15}$	UN	ja	UN	ja
$\mathbf{24.\ 150 \times 150 = 75 \times x\ (G2)}$			GT + UN	ja
$\mathbf{26.\ x : 20 = 1700 : 10}$	GT + UN	ja	GT + UN	ja
$\mathbf{28.\ 500 : x = 1500 : 9}$	R	nei	GT + UN	ja

Tabell 2 - Unwind

I tabell 2 ser man oppgavene der strategien unwind ble brukt. Denne strategien ble brukt på korte oppgaver der tallene var noe større slik at elevene ikke så verdien av den ukjente automatisk. Utdrag 3 viser et eksempel på denne strategien.

401	L:	supert. Hvordan kom dere frem til det denne gangen?
402	1B:	Vi tok kalkulatoren.
403	L:	Ja, hva trykte dere på kalkulatoren?
404	1B:	Vi trykket femti, nei, femhundre og tjuefem delt på femten.

Utdrag 3 - 525:x=15

Her har elevene løst oppgaven $525 : x = 15$ ved å dele 525 på 15 og dermed fått verdien på x, et typisk eksempel på strategien unwind. Denne strategien ble også brukt etter å først ha gruppert. I oppgave 26 valgte begge gruppene å dele 1700 på 10 slik at det ble 170. Deretter brukte de strategien unwind ved å gange 170 med 20. Strategien ble brukt totalt 11 ganger, og førte til suksess alle gangene.

4.1.1.3 Gruppering av tall

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{04.\ 7 + 6 = x + 9}$	GT + TS	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{05.\ 2 + 16 = 9 + x}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{09.\ 5 - 2 = x - 3}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{11.\ 35 + 40 = 34 + x}$	UK	ja	GT + UK	ja
$\mathbf{14.\ 2 \times 5 - 3 = 20 - x}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{15.\ 17 + x + 20 - 20 = 15 - 15 + 5 + 15}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{16.\ 4 + x - 2 + 5 = 11 - 3 + 5}$	GT + TK	nei	GT + SF	nei
$\mathbf{21.\ 5 \times x = 20 + 10}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{22.\ 10 \times x = 5 \times 20}$	GT + TK	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{23.\ 10 \times 10 = x \times 5}$ **(G1)**	GT + TK	ja		
$\mathbf{24.\ 150 \times 150 = 75 \times x}$ **(G2)**			GT + UN	ja
$\mathbf{25.\ 8 : 2 = x : 4}$	RV	nei	GT + TK	ja

$\mathbf{26.}\, x\mathbf{:20 = 1700:10}$	GT + UN	ja	GT + UN	ja
$\mathbf{27.}\, x\mathbf{:2 = 10:4}$	GT + UK	nei	GT + TK	ja
$\mathbf{28.500:}\, x\mathbf{= 1500:9}$	UK	nei	GT + UN	ja

Tabell 3 – Gruppering av tall

Gruppering av tall var en av de mest brukte strategien i arbeidet med likningsoppgavene. Den ble alltid brukt i kombinasjon med en annen strategi, og den ble alltid brukt først. Typisk brukte elevene gruppering av tall for å regne ut siden i likningen uten ukjent for å finne ut hva den andre siden «måtte bli» for å løse likningen. Dette tydeliggjøres i utdrag 4, en samtale om oppgave 9: $2 + 16 = 9 + x$.

105	1B:	okei. To pluss seksten er lik.
106	1A:	atten. Og for at ni skal bli atten så-
107	1B:	da må vi ta ni.

Utdrag 4 - 2+16=9+x

I lengre oppgaver ble også enkeltdeler gruppert. Eksempelvis ble $+20 - 20$ i oppgave 15. $17 + x + 20 - 20 = 15 - 15 + 5 + 15$ regnet sammen til null.

Gruppering av tall ble brukt 25 ganger, og grupperinga ble gjort korrekt 23 av gangene. Én likningsoppgave skilte seg ut fra de andre på den måten at ingen av gruppene grupperte tallene korrekt. Det er oppgave 16. $4 + x - 2 + 5 = 11 - 3 + 5$. Her regnet begge gruppene høyre side korrekt, mens venstre side ble feil. Gruppe 1 ignorerte minustegnet, og la sammen alle tallene på venstre side til å bli elleve, og gav derfor n verdien 2. I gruppe 2 insisterte den ene eleven på at 2 og 5 ble 10, til tross for en protest fra den andre eleven.

292	2B:	tretten. Okei. Da er det ti der.
293	2B:	det er ti.
294	2A:	nei, vi må først ta den.
295	2B:	ja, men sånn, akkurat dette her er ti. Så tar vi 4 pluss n minus ti. Så tar jeg n-
296	2A:	men vi vet jo at to pluss fem er syv. Nei det blir det ikke, eller?
297	2B:	Nei fordi d- det her, det er ti
298	2A:	ja?
299	2B:	da blir det fire pluss n minus ti.

Utdrag 5 - 4+n-2+5=11-3+5

Her insisterte elev 2B på at 2 og 5 var ti. Elev 2A prøvde forsiktig å foreslå at 2 og 5 er 7 i utsagn 296, men det virket som eleven var usikker og godtar at 2 og 5 er 10. På den måten fikk de $4 + n - 10$ på venstre side, og n måtte da være 19.

4.1.1.4 Relasjon

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{10.\ 142 - 23 = 144 - x}$	R	ja	R	ja
$\mathbf{12.\ 220 + x = 230 + 50}$	UK	nei	R	ja
$\mathbf{13.\ 716 - 235 = x - 135}$	R	ja	R	nei

Tabell 4 - Relasjon

Strategien relasjon skilte seg ut fra de andre strategiene på den måten at elevene ikke regnet ut hva venstre og høyre side i likningen var, men kun så på relasjonene mellom tallene i likningen. Oppgave 10. $142 - 23 = 144 - x$ regnet begge gruppene korrekt med hjelp av denne strategien. Utdrag 6 viser hvordan gruppe 1 løste denne oppgaven.

278	1B:	tjuefem.
279	1A:	hvordan regna du ut det?
280	1B:	tjuetre. Der er det bare plussa på to bak. Så plussa jeg på to på den.
281	1A:	Mmh (bekreftende)

Utdrag 6 - 142-23=144-x

Elev 1B så her at 144 var to mer enn 142, og at den ukjente derfor måtte være to mer enn 23, et typisk eksempel på denne strategien. I oppgave 13. $716 - 235 = x - 135$ brukte også begge gruppene strategien relasjon, men gruppe 2 endte opp med feil verdi for den ukjente. Utdrag 7 viser hvordan gruppe 2 løste denne oppgaven.

262	2B	ått.. Nei det er jo bare hundre mer. Min metode funker igjen.
263	2A:	sekshundre og seksten?
264	2B:	da blir det
265	2A:	nei, åttehundre og seksten.
266	2B:	åttehundre og seksten.

Utdrag 7 - 716-235=x-135

Her så elevene at 235 var hundre mer enn 135. De vurderte både 616 og 816 som verdien på den ukjente. Begge disse tallene har en differanse på hundre fra 716: 616 er hundre mindre og

816 er hundre større. Når subtrahenden på venstre side i likningen er hundre mindre enn subtrahenden på den andre siden, må minuenden også være tilsvarende mindre for at likningen skal være balansert. Elevene i gruppe to valgte å gjøre minuenden større i stedet og fikk derfor galt svar.

Elevene løste flere multiplikasjons- og divisjonsoppgaver der det var mulig å løse oppgavene med hjelp av relasjon (oppgave 22- 28). Etter oppgavene ble relasjonen påpekt for elevene, illustrert i utdrag 8

503	L:	skal vi se, men da lurer jeg på det samme der. Ser dere noe mønster i det dere har funnet der?
504	2A:	har vi det da?
505	2B:	togangen. Nei, ja, fordi, dobler to til fire også dobler seks til
506	2A:	Dobler åtte, åtte.
507	2B:	nei dobler åtte seks, seksten eller noe sånt noe.
508	L:	mhm.

Utdrag 8 - 8:2=x:4

Her fikk jeg elevene til å forklare relasjonen som finnes i oppgaven for å se om de tok med seg denne relasjonen videre i de neste oppgavene. Dette valgte elevene i hovedsak ikke å gjøre. I oppgave 24. $150 \times 150 = 75 \times x$ var elev 2B raskt ute med å bruke relasjonen de hadde fått påpekt:

412	2B:	nei. Nei men, søttifem er halvparten av hundre og femti. Så. Sånn som hun sa tidligere. Hvis
413	2A:	Må vi triple det da.
414	2B:	nei så må du doble
415	2A:	men-?
		...
420	2B:	som, ja men vi så på den andre hvis du, hvis man deler den.
		...
428	2B:	ja, nå må du høre på meg. Ja, fordi du har delt den da kan du gange den. Hvis du deler den på to og ganger den på to. Så er det søttifem ganger trehundre.

Utdrag 9 - 150*150=75*x

Elev 2A var uenig, og de valgte til slutt å løse oppgaven med strategiene gruppering av tall og unwind. Da fant de ut at den ukjente var 300, noe elev 2B mente den måtte være i utgangspunktet. Dette oppdaget også elevene:

480	2B:	ja, det var det jeg tenkte først. For da har du liksom delt den og da må du gange den. Fordi søttifem er halvparten av den.
		...
487	2B:	jeg skjønner egentlig ikke helt hvordan, jeg bare vet at det funker.
488	2A:	okei. Da er x lik trehundre da.
489	2B:	ja, jeg tror det
490	2A:	ja.
491	2B:	men jeg skjønte ikke hvorfor akkurat nå.
492	2A:	nei.
493	2B:	jeg skjønte hvorfor i sta.
494	2A:	men ikke nå.
495	2B:	nei

Utdrag 10 - 150*150=75*x

Her påpekte elev 2B selv relasjonen, men etterpå sa hun at hun ikke skjønte hvorfor det funket, men at hun visste at det ble riktig.

I divisjonsoppgavene valgte elevene i hovedsak ikke å bruke relasjonene de hadde fått påpekt. I oppgave 28. $500:x = 1500:9$ mente elev 1A derimot at verdien av den ukjente måtte være 18 fordi det var dobbelt så mye som 9:

522	1A:	okei. Den, den blir ett hundre og femti.
523	1B:	da tar vi-
524	1A:	Det blir atten. Det blir dobbelt så mye som den.
525	1B:	ferdig!
526	L:	er femtenhundre dobbelt så mye som femhundre?
527	1A:	Hm?
528	L:	Er femtenhundre dobbelt så mye som femhundre?
529	1B:	oi, nei.
530	1A:	dobbelt så mye? Nei, åja, sånn ja.
531	1B:	Atten. Er ikke det svaret? Prøv att.. nei.
532	1A:	det er jo svaret. Uansett. Uansett så blir det atten, svaret.
533	L:	blir det det?
534	1A:	ja.
535	L:	hvorfor blir det atten?
536	1A:	fordi atten er dobbelt så mye som ni.

Utdrag 11 - 500:x=1500:9

Her mente elev 1A bestemt at den ukjente måtte være 18 fordi det var dobbelt så mye som 9. Eleven endret ikke oppfatning selv om jeg viste at det ikke var noen annen dobling i

oppgaven. I oppgave 25-27 var dividenden og divisoren på den ene siden av likningen dobbelt så store som på den andre siden, mens i oppgave 28 var de tre ganger så store. Det kan se ut som eleven her feilaktig har generalisert at relasjonen fortsatt vil være som i oppgave 25-27. Man kan kanskje argumentere for at eleven her, riktignok feilaktig, har brukt en relasjon for å løse oppgaven. Eleven har ikke sett på relasjonen mellom tallene i denne oppgaven, og det er derfor ikke kodet som strategien relasjon.

4.1.1.7 Andre strategier

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{02.17 + x = 22}$	TS	ja	UN	ja
$\mathbf{04.7 + 6 = x + 9}$	GT + TS	ja	GT + TK	ja
$\mathbf{16.4 + x - 2 + 5 = 11 - 3 + 5}$	GT + TK	nei	GT + SF	nei
$\mathbf{19.333 = x \times 9}$	UN	ja	SS	ja
$\mathbf{25.8 : 2 = x : 4}$	RV	nei	GT + TK	ja

Tabell 5 - Andre strategier

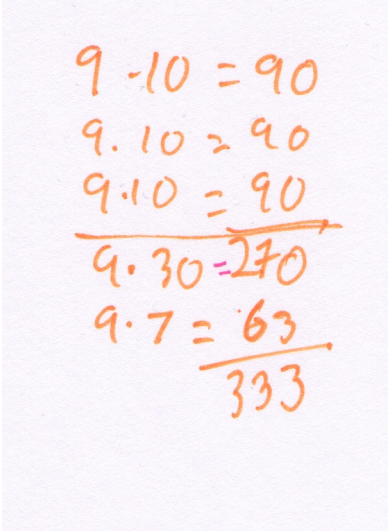
Av andre strategier som ble benyttet i disse oppgavene er strategiene: Tellestrategi, regne ut venstre side, og to tilfeller av substitusjon.

Gruppe 2 brukte substitusjon som strategi i to oppgaver. Den første gangen gjettet de på ett tall før de sjekket det opp og det viste seg å stemme. Resultatet ble feil, men det er på grunn av en feil under grupperingen, som vist i kapittel 4.1.1.3. I det andre tilfellet brukte de systematisk substitusjon i oppgave 19. $333 = x \times 9$. I følgende utdrag kan man se starten av den systematiske substitusjonen:

333	2B:	vi må begynne et sted da. Ni ganger ti
334	2A:	er lik nitti.
335	2B:	er nitti. vi må ha flere nitti.

Utdrag 12 - 333=x*9

Her startet elevene med ni ganger ti og skjønte at det trengtes mer. Bilde 1 viser hvordan de systematisk arbeidet for å nærme seg svaret.



Bilde 1 - 333=x*9

De startet med ti ganger ni, som ble nitti. De la så til nitti to ganger til, og fikk ni ganger tretti som var 270. Deretter så de at de trengte 63 til for å få 333. De visste at ni ganger sju var 63, og fant ut at verdien av den ukjente derfor måtte være 37.

I to addisjonsoppgaver med relativt lave tall valgte gruppe 1 å telle på fingrene fra den ene til den andre kjente verdien. Det antallet fingre de hadde talt var så verdien av den ukjente. Denne strategien var vellykket i begge tilfeller. I oppgave 25. $8:2 = x:4$ regnet de ut venstre side i likningen $(8:2)$ og satte 4 som svar.

4.1.1.6 Oppsummering strategier del 1

I de foregående delkapitlene kommer det frem at strategiene tallkunnskap, unwind, gruppering av tall, relasjon, substitusjon, regne venstre side og tellestrategi har blitt brukt i oppgavene med en ukjent. I de korte oppgavene ble strategiene tallkunnskap og unwind brukt, og i de fleste andre oppgavene ble gruppering av tall brukt. Sistnevnte ble alltid brukt i kombinasjon med en annen strategi. I tre addisjons- og subtraksjonsoppgaver ble relasjon brukt som eneste strategi. Disse oppgavene var på en slik måte at det var ganske lett å se forholdene, eller relasjonene, mellom tallene i likningen.

Generelt klarte elevene å løse likningsoppgavene korrekt ved hjelp av disse strategiene. Av totalt 29 oppgaver løste gruppe 1 21 oppgaver korrekt, mens gruppe 2 løste 26 oppgaver med suksess. Kun én oppgave ble løst feil av begge gruppene.

4.1.2 Oppgaver med flere ukjente.

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{29.\ 16 = x + x}$	TK	ja	TK	ja
$\mathbf{30.\ x + 5 + x = 55}$	TK	ja	TK	ja
$\mathbf{31.\ 2x + 3x = 225}$	GB + UN + UN	nei	GB + UN	ja
$\mathbf{32.\ 7x + 5x + 7 = 55}$	GB + UN	nei	GB + UN + UN	ja
$\mathbf{33.\ x + x = x + 9}$	UK	nei	SS	ja
$\mathbf{34.\ x + x = 18 - x}$	ST	nei	SS	ja
$\mathbf{35.\ 5x + 12 = 3x + 24\ (G2)}$			SS (+R)	ja
$\mathbf{36.\ x + 15 = 4x}$	UN	nei	SS	ja

Tabell 6 - Oppgaver med flere ukjente

Elevene løste til sammen åtte oppgaver med flere ukjente. I fire av oppgavene var de ukjente på samme side av likhetstegnet, mens fire oppgaver hadde ukjente på begge sidene av likhetstegnet.

4.1.2.1 Tallkunnskap

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{29.\ 16 = x + x}$	TK	ja	TK	ja
$\mathbf{30.\ x + 5 + x = 55}$	TK	ja	TK	ja

Tabell 7 - Tallkunnskap

De to første, og enkleste, oppgavene med de ukjente på samme side løste begge gruppene med strategien tallkunnskap. I oppgave 29 ble denne strategien brukt av begge gruppene.

132	2A:	hva blir seksten?
133	2B:	åtte pluss åtte.
134	2A:	ja.

Utdrag 13 - 16 = $\boldsymbol{x + x}$

I dette utdraget ser man at elevene i gruppe 2 umiddelbart så at åtte pluss åtte er seksten, noe som er typisk for denne strategien.

4.1.2.2 Gruppering av bokstaver

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{31.\ 2x + 3x = 225}$	GB** + UN + UN	nei	GB + UN	ja
$\mathbf{32.\ 7x + 5x + 7 = 55}$	GB + UN	nei	GB + UN + UN	ja

Tabell 8 - Gruppering av bokstaver (eleven fikk tips om å gå videre med denne strategien)**

I oppgave 31 og 32 ble strategien gruppering av bokstaver brukt. Disse oppgavene har til felles at de ukjente har koeffisienter og er på samme side av likhetstegnet. Ved arbeidet med oppgave 31 var gruppe 2 svært målbevisste:

1141	2A:	oisann. Hee. To ganger noe pluss tre ganger noe er lik 225.
1142	2B:	da er x det samme tallet.
1143	2A:	men man kan ikke gange to.. Nei. Vi kan, to pluss tre, fem.
1144	2B:	ja og så kan man dele 225 på fem. Er lik x. Og så. Et eller annet. Vi prøver. 225 delt på 5 er lik.
1145	2A:	(trykker på kalkulatoren) delt på fem er lik
1146	2B:	45.
1147	2A:	og nå må vi 2 ganger 45 pluss 3 gange 45.

Utdrag 14 - 2x+3x=225

Her startet elevene med å identifisere at to ganger noe pluss tre ganger noe er lik 225 i utsagn 1141. De valgte å addere koeffisientene 2 og 3, og fikk 5 for deretter å dividere 225 på 5. De mente da at de hadde funnet verdien av x, og sjekket dette ved å sette inn 45 for x. Venstre side i likningen ble da 45, og elevene konkluderte med at x var lik 45.

I gruppe 1 var eleven som løste oppgaven mer usikker på hvordan hun skulle gå frem. Hun hadde i tenkt på to mulige fremgangsmåter. Den ene var å dele 225 på 2 og på 3, og så legge sammen de to svarene. Det andre var å dele 225 på 5. Hun hadde gått bort fra begge fremgangsmåtene, og hadde ingen ny plan. Jeg ba henne om å prøve den siste fremgangsmåten for å se hvordan hun ville jobbe videre. Hun dividerte 225 på 5 og fikk 45, men var usikker på hva det ville si:

955	L:	hva tenker du at førtifem betyr da?
956	1A:	nei liksom, kanskje å få førtifem til å bli en del av x-ene liksom. På en måte
957	L:	mhm. En del av x-ene?
958	1A:	ja liksom sånn at.. Få frem x-ene på en måte, få frem svaret på x-ene.

959	L:	Hvordan tenker du at du kan finne svaret på x-ene da ut fra 45.
960	1A:	det vet jeg ikke.
961	L:	nei. Men..
962	1A:	eller kanskje du kan ta 45 delt på 2 delt på 3.

Utdrag 15 - $2x + 3x = 225$

Dette utdraget viser at eleven tenkte at hun måtte få 45 til å bli en del av x-ene, altså at hun skulle bruke tallet for å få frem de ukjente, men var usikker på hvordan hun skulle gjøre dette. Hun foreslo at man kanskje kunne dele 45 på 2 og 3 for å finne x. Etterpå spurte hun hva svaret på oppgaven var. Jeg sa at x var lik 45, og fikk henne til å sette inn 45 for x for å se at begge sidene i likningen ble 45.

Etterpå fikk eleven utdelt oppgave 32. I den oppgaven valgte hun å legge sammen koeffisientene til bokstavsymbolene på samme måte som i forrige oppgave, og fikk da 12. Deretter delte hun 55 på 12 og rundet svaret hun fikk (4,58333...) av til 4,5. Dette mente hun var verdien på den ukjente. Med denne fremgangsmåten ignorerte eleven at det også sto +7 på venstre side i likningen, noe som gjorde at det ikke ble riktig.

Gruppe 2 prøvde seg først frem både med å legge sammen alle tallene på venstre side i likningen, og å legge sammen koeffisientene for så å dele 55 på svarene:

1157	2B:	vent da, 7+7+5 det er nitten. Prøver vi det.
1158	2A:	55 delt på 19 er lik 2,894736842. (latter)
1159	2B:	prøver 55 delt på 7+5 som er 12.
1160	2A:	55 delt på 12 er lik 4,583333..
1161	2B:	Det var ganske mye, okei. Hmm.
1162	2A:	hmm.. Kanskje minus? Eller liksom. Hvis vi tar det samme som du tenkte i sted, at vi tar minus 7.

Utdrag 16 - $5x + 7x + 7 = 55$

Elevene gikk umiddelbart bort fra disse fremgangsmåtene når de så at tallene de kom ut med var lange, eller «ganske mye» som elev 2B sier i utsagn 1161. De begynte å tenke nytt, og prøvde å subtrahere 7 fra 55 først.

1167	2B:	okei. 55 minus 7
1168	2A:	ja og så deler vi det på de to

1169	2B:	det er da 48 delt på 12. Det stemmer et eller annet.
1170	2A:	48 delt på 12 er lik 4.
1171	2B:	fire ganger sju er, fjort, tjueåtte og fire ganger fem er tjue. 48 + 7 er femtifem ja. Så x er..
1172	2A:	er det 48?
1173	2B:	x er fire

Utdrag 17 - $5x + 7x + 7 = 55$

Her kan man se at elevene først dividerte 7 fra 55 før de delte differansen (48) på summen av koeffisientene (12). Til tross for at elevene ikke nevnte de ukjente underveis i oppgaven, og heller ikke skrev de ned på arkene har dette blitt kodet til strategien gruppering av bokstaver og unwind. Dersom man skulle skrevet fremgangsmåten elevene har brukt matematisk ville det sett slik ut:

1. $7x + 5x + 7 = 55$
2. $7x + 5x = 55 - 7$
3. $7x + 5x = 48$
4. $12x = 48$
5. $x = \frac{48}{12}$
6. $x = 4$

Grupperingen av bokstavsymboler skjer mellom linje 3 og 4. Selv om elevene i denne samtalen ikke nevnte de ukjente, er det tydelig at de var bevisste på at likningen ville være som i linje 4 i det elevene valgte å dividere 48 på 12 for å finne x.

Etter at elevene hadde funnet verdien 4 satte de dette tallet inn for x i likningen og fikk på den måten bekreftet at de hadde funnet rett verdi for x.

4.1.2.3 Substitusjon

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$33. x + x = x + 9$	TK	ja	SS	ja
$34. x + x = 18 - x$	ST	nei	SS	ja
$35. 5x + 12 = 3x + 24$ (G2)			SS	ja
$36. x + 15 = 4x$	UN	nei	SS	ja

Tabell 9 - Substitusjon

Gruppe 1 brukte strategien tilfeldig substitusjon i oppgave 34. De forsøkte med flere ulike tall og fant tallkombinasjoner der likningen stemte uten at tallene var like. Blant annet skrev de $7{,}5 + 7{,}5 = 18 - 3$, men klarte ikke å finne løsningen når alle de ukjente skulle være like.

Gruppe 2 brukte systematisk substitusjon i alle likningsoppgavene med ukjente på begge sidene. Følgende utdrag er en samtale fra gruppens arbeid med oppgave 35:

1201	2B:	så det må være 12 mere enn der. Si tre ganger tre for eksempel blir ni. Fem ganger tre er femten.
1202	2A:	mhm.
1203	2B:	det blir 27 der da så blir det 33 der. Og så..
1204	2A:	ganger fem er det 25..
1205	2B:	tre ganger fire for eksempel. Så hvis x kanskje er fire så bli det 12 der
1206	2A:	mhm. Og 20 der.
1207	2B:	32 der og 36 der. Ikke 4.
1208	2A:	og så går vi til 5. Det er 25, og det blir 15. Da er det 37. det andre er..
1209	2B:	39
1210	2A:	ja.
1211	2B:	to ganger 5 er ti, 22. 2 ganger 3 er seks, tjue. 6 ganger 5 er 30, 6 ganger 3 er 18. 30 42, 18, 30 42.
1212	2A:	hm?
1213	2B:	jeg tar det en gang til. X, seks
1214	2A:	jeg kan skrive det da. 5 gange 6 er lik 30 +12 er lik 42
1215	2B:	det er lik 42 ja. Og 3 ganger 6 er lik
1216	2A:	18 pluss24
1217	2B:	er lik 42.
1218	2A:	ja
1219	2B:	x er 6.

Utdrag 18 - $5x + 12 = 3x + 24$

Her startet elev 2B med å sette inn 3 for x, og så da at venstre side ble 27 og høyre side ble 33. Deretter gikk de systematisk oppover og testet med 4 der sidene ble 32 og 36, og 5 med verdiene 37 og 39. Etter at elevene hadde sett at 5 heller ikke var riktig valgte de å teste om 2 var riktig i stedet for å fortsette å teste med høyere tall. Da de så at heller ikke det stemte testet de til slutt 6, som viste seg å være riktig. Selv om 2-eren skilte seg noe ut fra hvordan man ser for seg en standard systematisk substitusjon er det ikke et helt tilfeldig tall. 2 er bare en mindre enn 3 som de testet først. Man kan derfor tenke seg at når de hadde testet flere tall

oppover som viste seg å ikke stemme, testet de nedover. Dette tyder likevel på at elevene ikke registrerte at differansen mellom verdiene på høyre og venstre side i likningen minket i det de nærmet seg riktig svar.

Unwind

Oppgave	G1	Suksess G1	G2	Suksess G2
$\mathbf{31.\, 2x + 3x = 225}$	GB + UN + UN	nei	GB + UN	ja
$\mathbf{32.\, 7x + 5x + 7 = 55}$	GB + UN	nei	GB + UN + UN	ja
$\mathbf{36.\, x + 15 = 4x}$	UN	nei	SS	ja

Tabell 10 - Unwind

Denne strategien ble i hovedsak brukt i kombinasjon med gruppering. I oppgave 31 ble den brukt etter grupperingen av bokstavsymbolene, mens i oppgave 32 ble den både brukt før og etter grupperingen av gruppe 2. I utdrag 17 kan man se at strategien først ble brukt da elevene regnet 55-7, og etterpå da elevene delte 48 på 12.

Strategien unwind ble brukt som eneste strategi av gruppe 1 i oppgave 36. Da delte eleven 15 på 4, og overså dermed at det også var en ukjent på venstre side i likningen. Løsningen på denne oppgaven ble dermed feil.

4.2 Elevenes syn på likhetstegnet

4.2.1 Gruppe 1

I oppgave 37 fikk elevene spørsmålet: Hva betyr symbolet (likhetstegnet)? Gruppe 1 svarte følgende:

804	1B:	ja. Mhh, det betyr er lik. Det betyr-
805	1A:	men det betyr svaret på et regnestykke
806	1B:	ja, det var det jeg hadde tenkt til å si.

Utdrag 19 - likhetstegnet som operasjon

Her var elevene samstemte om at likhetstegnet betyr «svaret på et regnestykke». Det vil si at elevene ser ut til å først og fremst se på likhetstegnet som en operasjon: regn ut. Dette synet fremkom også i oppgave 25. $8:2 = x:4$. Der satte elevene 4 som verdien av den ukjente. Det

vil si at de regnet ut venstre side i likningen, og satte det som svar uten å ta hensyn til det som sto på høyre side i likningen.

Et annet eksempel på dette synet kom frem etter at gruppe 1 hadde forsøkt å løse oppgavene med flere ukjente som en del av et produkt (oppgave 31, 32 og 36) uten å lykkes. Når eleven (bare en av elevene i gruppe 1 jobbet med akkurat disse oppgavene) var ferdig med oppgave 36. $x + 15 = 4x$ spurte eleven meg hva svaret på oppgaven var. Jeg sa at x var lik 6 og at begge sidene i likningen da ble like. Eleven ble satt ut, og forklarte at hun hadde tenkt at hun skulle finne svaret i oppgaven, og ikke hadde tenkt på at de skulle være like.

	1B:	Jeg tenkte liksom at det var et vanlig regnestykke på en måte, og så at 4x var svaret.

Utdrag 20 - Likhetstegnet som operasjon

Ut fra dette sitatet kan det se ut som eleven så på likhetstegnet som en operasjon i det hun kalte vanlige regnestykker. Hun sa hun hadde sett på disse oppgavene som vanlige regnestykker. Eleven hadde altså sett på likhetstegnet som en operasjon også i disse oppgavene.

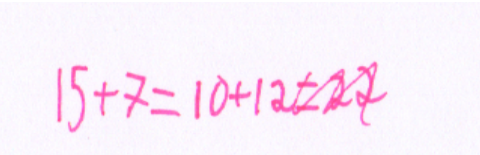
Etter å ha svart på hva likhetstegnet betyr ble elevene spurt om de likhetstegnet kunne bety noe annet. Gruppe 1 svarte følgende:

808	1A:	Ja, det kan bety at det kan være to like.. For eksempel på sånne spill da.. Så da kan det også være at de er like
809	1B:	mhm.
810	L:	for eksempel på sånne spill?
811	1A:	ja, det når det sånn, (viser krokodilletegn med hånda) så er det er lik.
812	1B:	hvis det er sånn, firer her, femmer her. Eller hvis de er like da.
813	L:	ja. Kan det stå flere tall på begge sidene?
814	1A:	ja det kan jo stå sånn fem pluss sju, så kan det stå seks pluss åtte for eksempel da. Da må du bare regne sammen de to og så finner du ut om de er det samme eller ikke

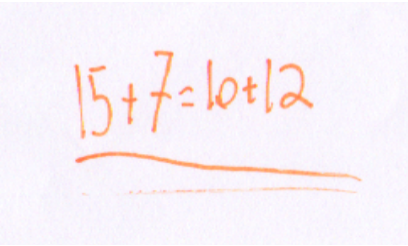
Utdrag 21 - likhetstegnet som relasjon

Her fortalte elevene om et spill der de sammenliknet to tall eller regnestykker for deretter å sette inn et ulikhetssymbol eller likhetstegn. De forklarte at likhetstegnet i dette tilfellet betyr

at det var to like, også når det sto flere tall på begge sidene, altså er det snakk om et relasjonelt syn på likhetstegnet. I oppgave 38 skulle elevene ta stilling til om dette stemmer: $3 + 7 = 6 + 4$, noe elevene sa seg enige i fordi begge sidene er 10. I oppgave 39 skulle elevene ta stilling til om $15 + 7$ er det samme som $10 + 12$. Elevene regnet ut begge stykkene og fant ut at begge var 22, og dermed like. Deretter ble de spurt om hvordan de ville vist at de var like. Bilde 2 og 3 viser svarene til elevene.



Bilde 2 - Elev 1A



Bilde 3 - elev 1B

Det at elevene valgte å skrive opp de to uttrykkene med et likhetstegn mellom seg tyder også på et relasjonelt syn på likhetstegnet. Dette synet ble ytterligere forsterket i oppgavene 10. $142 - 23 = 144 - x$ og 13. $716 - 235 = x - 135$ som elevene løste uten å regne ut venstre og høyre side i likningen.

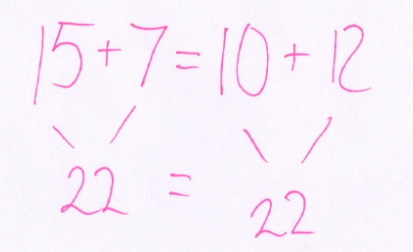
4.2.2 Gruppe 2

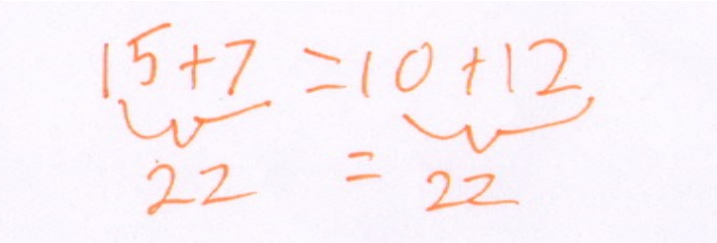
I oppgave 37 skulle elevene forklare hva likhetstegnet betyr. Her er den korte dialogen til gruppe 2:

1102	2B:	er lik ja. «Hva betyr symbolet?» At det skal være like mye-
1103	2A:	-på begge sider
1104	2B:	ja

Utdrag 22 - liketstegnet som relasjon

De svarte at det betyr at det det skal være like mye på begge sider, og kunne ikke komme på noen annen betydning av likhetstegnet. Elevene mente at $3 + 7 = 6 + 4$ stemmer fordi både $3 + 7$ og $6 + 4$ er ti. De mente også at $15 + 7$ er det samme som $10 + 12$ og ville vist det på denne måten:





Bilde 4 - Elev 2B **Bilde 5 - Elev 2A**

Elevene i denne gruppen satte likhetstegn mellom de to uttrykkene, men begge valgte å markere at summen av tallene i begge uttrykkene var 22. Jeg spurte elevene om de kunne vise det på en annen måte, noe de ikke kunne. Da spurte jeg om jeg hadde vist at uttrykkene var like dersom jeg fjernet 22-tallene under.

89	L:	dere trenger ikke å. Det er ikke så viktig. Men det jeg lurer på, ville dere godtatt om jeg tok bort de tjuetorene under? Hadde jeg vist da at de er like? Eller må det stå tjueto?
90	2A:	hvis det ikke står tjueto under må man regne ut.
91	2B:	du må regne ut hva det blir.
92	L:	mhm. ja. Så du burde helst ha tjueto?
93	2A:	Hvis du skal slippe å regne ut, så må det være sånn.

Utdrag 23 - likhetstegnet som relasjon

Utdrag 23 viser at elevene var enige om at det burde stå 22 under for at man skulle vite at de var like, i motsatt fall måtte man regne det ut selv. Samtidig løste elevene i denne gruppa oppgave 10. $142 - 23 = 144 - x$ og oppgave 12. $220 + x = 230 + 50$ korrekt ved å se på relasjonene mellom tallene, og uten å regne ut venstre og høyre side i likningene. Dette tyder på at elevene kan se på likhetstegnet som et relasjonelt symbol på likhet.

4.2.3 elevenes syn på likhetstegnet sett i lys av milepæler

Ut fra oppgavene jeg har gitt elevene har jeg funnet at elevene i gruppe 2 har et utelukkende relasjonelt syn på likhetstegnet. I dette ligger at elevene ser på likhetstegnet som en relasjon mellom to verdier, eller som elevene selv sier: «at det skal være like mye på begge sider». De er dermed innom både den tredje og fjerde milepælen (Carpenter et al., 2003), det vil si at de kjenner likhetstegnet som en representasjon mellom to like nummer (tredje milepæl) og de er i stand til sammenligne matematiske uttrykk uten å regne ut uttrykkene. Når elevene løser likninger uten å regne ut sidene i likningene, som i oppgave 10 og 12 tyder det på at elevene

har nådd den fjerne milepælen. Det at elevene mener at det burde stå 22 under uttrykkene i oppgave 39 for at man skal slippe å regne ut, tyder det på at elevene ikke er konsekvente, og ikke har gått helhjertet over til den fjerde milepælen.

Gruppe 1 har et todelt syn på likhetstegnet. Når de skulle forklare betydningen av likhetstegnet sa de at det betyr «svaret på et regnestykke». Dette viser at de har ser på likhetstegnet som en operasjon. Samtidig sier de at likhetstegnet kan brukes for å vise at to uttrykk er like, altså som en relasjon. Dette todelte synet kommer også frem under arbeidet med oppgavene. I oppgave 25 regner elevene ut venstre side av likningen og setter dette som svaret etter likhetstegnet, mens i de aller fleste oppgavene finner de korrekte verdiene av de ukjente uavhengig av hvor den ukjente befinner seg i likningen. Denne splittelsen gjør det vanskelig å kunne plassere elevene i en bestemt milepæl (Carpenter et al., 2003). Den første milepælen er at elevene uttrykker hva likhetstegnet betyr. Denne milepælen er oppnådd. Den andre milepælen sier at elevene har akseptert at likninger kan skrives på en annen form enn a+b=c. Ut fra kun oppgave 25 virker det som elevene ikke har oppnådd denne milepælen, men de resterende oppgavene viser at de har akseptert likninger i andre former. De har også oppnådd den tredje milepælen i det de bruker likhetstegnet som en relasjon mellom to verdier. Dette viste de blant annet i oppgave 38 og 39. Utregningene i oppgave 10 og 13 viser med all tydelighet at elevene også har oppnådd den fjerde milepælen som er at elevene kan sammenligne uttrykk uten å regne dem ut. De har altså oppnådd alle milepælene, men er likevel inkonsekvent i synet på likhetstegnet. Sitatet i utdrag 20 kan tyde på at elevene ser på likhetstegnet som en operasjon i det de kaller «vanlige oppgaver» - der de skal finne svaret etter likhetstegnet. Synet på likhetstegnet til disse elevene kan derfor se ut til å henge sammen med type oppgave som blir gitt.

4.3 Variabler

4.3.1 Elevenes uttalte oppfatninger av variabler

I oppgave 38 skulle elevene svare på om de kunne komme på noen ganger bokstaver ble brukt i matematikk. I så fall kunne de fortelle når og hvilke, og hva de betydde. I utdrag 24 vises den første responsen til gruppe 1

816	1A:	x.
817	1B:	og så kan.. Er det ikke L? Nei. Y

818	1A:	er det ikke sånn at alle bokstaver unntatt æ, ø og å kan brukes?

Utdrag 24

De fortalte at de hadde hørt om x og y. Elev 1B nevnte også L, noe hun trakk tilbake. Deretter svarte elev 1A med at hun mente alle bokstavene unntatt æ ø og å kunne brukes, de nevnte også a som eksempel på en slik bokstav. Det så ut som elevene hadde ukjente i tankene, noe som også bekreftes utdrag 25.

829	1A:	det er liksom at du må finne ut.. Det er på en måte et mystisk tall da. For eksempel hvis det står seksten pluss x..
830	1B:	hvis det for eksempel står x pluss, minus, gange, vi sier gange, tre er lik-
831	1A:	ni
832	1B:	nei seks. Hva er svaret?
833	1A:	men da er to, nei x. Da er x to da

Utdrag 25

Elevene beskrev disse bokstavene som et mystisk tall som skulle erstattes med et tall. De brukte likningen $x \times 3 = 6$ som eksempel, og sa at det mystiske tallet x da var to.

Ut over dette kom elevene på at bokstaver også ble brukt for å markere oppgave a og b og så videre, og for å navngi sidekantene i en firkant.
Gruppe 2 sitt svar på samme spørsmål vises i det følgende utdraget:

1110	2A:	«A. Kan du komme på noen ganger bokstaver blir brukt i matematikk? Hvis ja, når og hvilke?» Nå lærer vi om omkrets og areal, og da bruker vi det. Bredde ganger lengde.
1111	2B:	og så cm, m, mm og..
1112	2A:	mhm
1113	2B:	og så likninger.
1114	2A:	(nikker) så «hva betyr bokstavene»? B står for bredde, l står for lengde og h står for høyde?.
1115	2B:	g står for grunnlinje. Centimeter står for centimeter.
1116	2A:	cm. Og så er det ml som er millimeter
1117	2B:	mm
1118	2A:	nei, søren, mm. Det er milliliter som er ml. Og så er det mange andre.
1119	L:	enn i likninger?
1120	2B:	jo da står.. Eller da betyr jo en bokstav ett tall eller noe.
1121	2A:	x.

Utdrag 26

Elevene i denne gruppen kunne komme på at bokstaver ble brukt som forkortelser og som mål på lengde og volum, dette er eksempler på det Philipp (1992) kaller merkelapper. De nevner også at bokstaver brukes i likninger, og at da betyr bokstavene et tall.

4.3.1 Ukjente

De ukjente i likningsoppgavene elevene jobbet med ble representert på flere måter. I de første oppgavene elevene løste ble de ukjente representert ved en tom boks. Ganske raskt ble boksen erstattet med en x. Senere ble også n og m brukt som representasjon av den ukjente. Boksen var elevene kjent med fra før, da læreverket deres (multi) har noen oppgaver med denne representasjonen av ukjente. Elevene hadde ingen problemer med å løse oppgavene med boksen, og det var ingen som kommenterte boksene. Det var heller ingen problemer når x ble brukt som representasjon av den ukjente. Når n dukket opp ble dette derimot kommentert av begge gruppene. I gruppe 1 utspant denne samtalen seg i det elevene fikk utdelt oppgaven som inneholdt n:

294	1A:	mm, n?
295	1B:	Hva er n?
296	L:	ja, hva tror dere n er?
297	1B:	ni? Ni nei .
298	1A:	nei. Det er. Åh!
299	1B:	hva er n? Hva er n?
300	1A:	(er oppglødd)
301	1B:	hvis du skjønner hva n er kan du forklare
302	1A:	Det er nesten det samme som x ikke sant
303	1B:	hm, ja det er det
304	1A:	Bare at det er sånn, på den oppgaven her. Ferdig.

Utdrag 27 - n som ukjent

Når elevene fikk utdelt oppgaven hang de seg opp i at det sto en n der med det samme, og de startet med å spørre meg hva n var. Jeg ga dem ikke noe svar, men stilte samme spørsmål tilbake. Elev 1B sitt forslag var da at n var ni. Elev 1A ser mer på oppgaven og blir oppglødd eller entusiastisk i det hun tror hun skjønner hva n er. Når elev 1B ber elev 1A om å forklare, sier hun sier at det nesten er det samme som x. Elevene løser så oppgaven korrekt. Også i gruppe 2 startet elev 2A med å kommentere at det sto en n i likningen. Elev 2B sa at det sikkert var det samme som x, så løste de likningen. I etterkant ble elevene spurt hva de tenkte n ble, og det utspant seg en samtale om n.

239	L:	ferdig? Hva tenker dere at n blir?
240	2A:	hun tenker at det er x.
241	L:	ja
242	2B:	ikke det samme som
243	L:	joda, det er en ukjent. Stemmer det.
244	2A:	jeg tenker liksom at. Jeg tenker at det er en ukjent men at det ikke betyr det samme som x. Det betyr noe annet.
245	L:	ja. Hva mener du med at den betyr noe annet?
246	2A:	At den.. sånn som x betyr en verdi av et tall.. at den betyr.. at det er bare et tall men den er liksom står for noe annet enn liksom
247	L:	mhm. Enn n da?
248	2A:	ja, jeg tenkte at den sto for ni.
249	L:	ja, mhm. Så hvis jeg hadde skrevet t så hadde det kanskje vært-
250	2A:	to.
251	L:	ja, skjønner.
252	2A:	eller ti. Eller tre.

Utdrag 28 - n som ukjent

Også gruppe 2 sammenlignet n med x, og mente at det ikke betyr helt det samme. Elev 2A sa at hun også tenkte at n sto for ni. Hun sa videre at dersom det hadde stått t tenkte hun det kunne stått for to, tre eller ti, altså at bokstaven var en forkortelse for tallet som skulle stå der.

Videre jobbet begge gruppene med flere oppgaver med n som ukjent, og når det dukket opp en oppgave med m ble dette kjapt kommentert av den ene gruppa før de fortsatte å løse den uten problemer.

4.3.3 Generaliserte tall

I oppgave 43 skulle elevene ta stilling til hvilke uttrykk (av et utvalg) som var lik $5x$. Uttrykkene de kunne velge mellom var følgende:

$$6x$$
$$3x + 2x$$
$$5x + x - x$$
$$x + x$$
$$x + x + x + x + x$$
$$x + 4x$$
$$6x - x$$

Begge gruppene markerte uttrykkene $3x + 2x,\ 5x + x - x\ og\ x + x + x + x + x$. Gruppe 2 identifiserte i tillegg at $x + 4x\ og\ 6x - x$ var lik 5x. Begge gruppene identifiserte de like uttrykkene på to måter:

1. Elevene jobbet med bokstavsymbolene som de var
2. Elevene satte inn tall for bokstavsymbolene.

4.3.3.1 Elevene jobbet med bokstavsymbolene som de var

Begge gruppene brukte denne måten å jobbe med de generaliserte tallene. I utdrag 29 er et eksempel fra gruppe 1:

875	1B:	jeg tenker det. (5x+x-x)
876	1A:	men.. Ja, ja. Minus x også
877	L:	hvorfor tenker du det?
878	1B:	fordi det er jo pluss x og minus x og da blir det jo fortsatt pluss

Utdrag 29 - $5x + x - x$

Her mente elev 1B at $5x + x - x$ var det samme som 5x fordi når man plusser på en x for deretter å subtrahere med x vil man fremdeles ha 5x. Dette gjorde eleven uten å sjekke om det stemte med noen spesifikke tall. I utdrag 30 et tilsvarende eksempel fra gruppe 2:

1242	2B:	x pluss x
1243	2A:	x+x+x+x+x det blir jo fem x-er
1244	2B:	det blir fem x-er. (markerer)
1245	2A:	mhm
1246	2B:	og så x pluss 4x. Hvis du har fire x-er så får du en x til..
1247	2A:	da blir det fem x

Utdrag 30 – $x + x + x + x + x, 4x + x$

I denne samtalen identifiserte elevene at $x + x + x + x + x$ og $4x + x$ var det samme som $5x$. I det første eksemplet identifiserte elevene at dersom man adderer noe fem ganger er det det samme som å multiplisere det med fem. I det siste så de at dersom du har fire av noe og legger til en vil du få fem av det. Også i dette utdraget sammenlignet elevene uttrykkene uten å bruke spesifikke tall som eksempler.

4.3.3.2 Elevene satte inn tall for bokstavsymbolene

Det følgende utdraget viser hvordan elev 1A argumenterte overfor elev 1B at $x + x + x + x + x$ var det samme som $5x$:

880	1A:	hvisker: en to tre fire fem (markerer x+x+x+x+x)
881	1B:	nei
882	1A:	jo. Fem x-er
883	1B:	ja, men det-
884	1A:	ikke sant, og hvis alle de x-ene er en.
885	1B:	det vet vi jo ikke.
886	1A:	ja men det kan jo vi sette på uansett. For det står jo ikke i et regnestykke. Så vi kan jo si at de er tjue. Da blir det fem tjuetall.

Utdrag 31 - $x + x + x + x + x$

Her startet elev 1A med å markere uttrykket, før elev 1B sa seg uenig. Eleven brukte så tallene 1 og 20 i stedet for x for å vise at det ble fem enere eller «tjuetall». Elevene i denne gruppen var ikke helt stødige på hvordan de eventuelt kunne sette inn tallene, noe som vises i neste utdrag:

887	1B:	da kan vi si at den her også er riktig da. Hvis vi setter en ener her. (x+4x)
888	1A:	ja, fordi det bare... Nei for da tror jeg den. Blir ikke den til en ener da også (4x)? Hvis vi tar den som en ener (x).
889	L:	ja, selve x-en?
890	1A:	ja, hvis vi setter den til en ener da(x), blir ikke den til en ener da også(4x)?
891	1B:	hun mener.. Må de være like?
892	L:	ehm, altså x-ene er like. Men jeg skjønte ikke helt, hvis x-en er en der så må x-en være en der også. Det stemmer det.
893	1A:	ja, da går det ikke.
894	L:	ja, for hva-.. Hva blir de her da?
895	1A:	da blir, da blir det fem komma en. Tror jeg
896	L:	hva betyr fire x når x-en er en?
897	1A:	gange fire
898	L:	mhm
899	1A:	så da funker det? Fordi da blir det bare gange, for da blir det x ganger fem. Eller, liksom.
900	1B:	vi må passe på om det er minus der
901	1A:	nei det er pluss
902	1B:	åja. (...)

I denne samtalen ønsket elevene å finne ut om $x + 4x$ er det samme som 5x. De prøvde å sette tall for bokstavsymbolene, men var usikre på hvordan de skulle gjøre det. I utsagn 890 spør elev 1A om det stemmer at dersom du setter inn ett tall (1) for den ene x-en så må man også sette det inn for den andre. Når eleven får bekreftet dette mente hun det ikke stemte fordi det da ble 5,1. Dette kan tyde på at da eleven satte 1 for x i 4x, ble det 4,1 for eleven, Når hun da adderte 1 med 4,1 ble det 5,1. Jeg spurte eleven da hva 4x betyr når man setter inn tallet 1 for x. Da kom eleven på at tallene skulle ganges sammen, og begynte på et resonnement som kunne ledet til at de så at $x + 4x$ var det samme som $5x$.

Gruppe 2 identifiserte oppgavene de fikk utdelt i utgangspunktet uten å bruke tall som eksempler. Etterpå fikk de ett ekstra uttrykk å ta stilling til: $x \times x \times x \times x \times x$. Når de diskuterte denne oppgaven satte de inn tallet 5 i stedet for x:

1251	2B:	men si at den x-en der er 5 for eksempel da. Der er det 5×5 (5x) det er 25. Der blir det da $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.
1252	2A:	25.
1253	2B:	nei. 5 ganger 5 er 25
1254	2A:	sant det.
1255	2B:	gange fem er liksom
1256	L:	125
1257	2A:	ja
1258	2B:	og så blir det gange 5 og det blir jo sånn
1259	2A:	masse
1260	2B:	det blir fem ganger så mye.
1261	L:	så det er ikke det samme da?
1262	2A:	nei (begge rister på hodet)

Utdrag 32 - $x * x * x * x * x$

Ved å sette inn 5 for x ble 5x 25. Elevene begynte så å sjekke hva $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ble. De fant ut at fem ganger fem var 25, og når de multipliserte med fem til ble det 125. De anslo videre at 125×5 var «masse», og konkluderte med at dette uttrykket derfor ikke var lik 5x.

5.0 Diskusjon

5.3 Strategier i oppgaver med en ukjent.

I oppgavene med en ukjent ble følgende strategier brukt av elevene: *tallkunnskap*, *unwind*, *gruppering av tall*, *relasjonsstrategi*, *substitusjon*, *tellestrategi*, og *regne venstre side*. Disse strategiene har til felles at de regnes som uformelle fordi elevene finner verdien på de ukjente ved kun å manipulere tallene i likningene (Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994). Noen relevante ulikheter er det likevel mellom strategiene. Mens noen av strategiene regnes som rent aritmetiske, kan andre strategier regnes som algebraiske. Strategiene *tallkunnskap, unwind, gruppering av tall, tellestrategi, substituajon* og *regne venstre side* kan regnes som aritmetiske strategier fordi elevene regner med de kjente tallene i oppgavene for å finne verdien av den ukjente. Ved bruk av *relasjonsstrategien* sammenlikner elevene tallene i likningen uten å regne ut sidene. De bruker mønstrene i tallene for å finne verdien av den ukjente. Denne strategien passer derfor inn i den andre grenen til Kaput (2008) som blant annet handler om relasjoner og mønstre og kan sies å være algebraisk.

5.4 Strategier i oppgaver med flere ukjente

Elevene jobbet med 8 likningsoppgaver med flere ukjente. Disse oppgavene var fordelt i fire kategorier med to oppgaver i hver kategori:

1. Likninger med ukjente på samme side, uten koeffisienter
2. Likninger med ukjente på samme side, med koeffisienter
3. Likninger med ukjente på begge sider, uten koeffisienter
4. Likninger med ukjente på begge sider, med koeffisienter

Elevene benyttet seg av strategiene *gruppering av ukjente*, *substitusjon*, *unwind* og *tallkunnskap* for å løse disse likningene. I kategori 1 ble utelukkende strategien tallkunnskap benyttet. Dette kan forklares av de lave tallene og at de ikke inneholdt noen koeffisienter. Disse likningene var veldig like, eller identiske med oppgaver Herscovics og Linchevski (1994) hadde gitt elever i sin undersøkelse. Oppgavene de hadde gitt elevene var: (38) $n + n = 76$ og (39) $n + 5 + n = 55$ (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 72) mens oppgavene elevene i denne undersøkelsen løste var $29.16 = x + x$ og $30.x + 5 + x = 55$. I deres studie

løste de fleste elevene likningene ved hjelp av å dividere på to, mens henholdsvis 4% og 27% brukte strategien tallkunnskap for å løse oppgavene. Tatt i betraktning at tallet i oppgave 29 er enklere enn i deres oppgave (38) er funnene mine nokså sammenfallende med funnene i denne studien. Herscovics og Linchevski argumenterer for at disse oppgavene må ses på som enkle oppgaver som gjør elevene kjent med likninger med flere ukjente, og at de derfor ikke kan ses på som representative for oppgavene med flere ukjente.

Gruppe 1 løste ingen av oppgavene i kategori 2-4 korrekt. Det kan virke som om mye av årsaken til dette ikke ligger i strategivalgene når man ser at elevene har lyktes med de samme strategiene i oppgavene med en ukjent. Det ser heller ut som hovedtyngden av problemet ligger i elevenes syn på likhetstegnet. Denne siden ved løsing av likninger vil bli diskutert nærmere i kapittel 5.3.

Gruppe 2 løste alle oppgavene med flere ukjente korrekt. I likningene i kategori 2 brukte elevene en kombinasjon av strategiene gruppering av ukjente og unwind. Ved å gruppere de ukjente jobbet elevene med de ukjente. Det vil si at elevene i dette tilfellet brukte en formell løsningsstrategi for å løse likningene. Dette sammenfaller ikke med funnene til Herscovics og Linchevski (1994). I deres studie løste brorparten av elevene oppgavene ved hjelp av substitusjon, mens 2 av de 22 elevene løste noen av likningene i denne kategorien ved å bruke strategien gruppering av ukjente. Siden disse elevene ikke brukte denne strategien konsekvent sluttet de at elevene ikke hadde en stabil formell algebrakunnskap, og at gruppering av ukjente er en strategi elevene ikke gjør spontant (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 72). Oppgave 31 (2x+3x=225) i min undersøkelse var ganske lik oppgave (40) (3n+4n=35) i deres undersøkelse der to av elevene brukte gruppering av ukjente som strategi. Det kan tyde på at dette er en oppgave der det er litt lettere for elevene å se at gruppering av ukjente er en mulig strategi. Oppgave 32. 7x+5x+7=55 er identisk med oppgave (46) hos Herscovics og Linchevski. Denne likningen var det ingen i deres undersøkelse som løste ved hjelp av gruppering av ukjente, mens elevene i min undersøkelse brukte denne løsningsstrategien. Til tross for at elevene i min undersøkelse kun løste to likningsoppgaver i denne kategorien kan det virke som elevene i min undersøkelse var mer konsekvent på bruken av denne strategien. Det var riktignok ikke slik at elevene brukte denne strategien med stor selvsikkerhet. I oppgave 32 forsøkte elevene seg frem med å først gruppere alle tallene på venstre side. Når det viste seg at det ikke fungerte grupperte de tallene med ukjente og fikk da 12x. Deretter forsøkte de å dividere 55 på 12. Når dette heller ikke viste seg å fungere subtraherte de 7 fra

55 før de dividerte på 12. Dette gav elevene verdien 4, og elevene satte så inn 4 for x for å sjekke at likningen ble lik på begge sider. Fremgangsmåten elevene brukte her tyder på at elevene ikke hadde en stabil kunnskap om gruppering av ukjente. Men det kan også vitne om at elevene ikke har fått noen formell undervisning i denne strategien, og at elevene dermed selv har kommet frem til denne strategien. Eleven i gruppe 1 brukte også denne strategien i sitt forsøk på å løse begge likningene. Det at likningene ikke ble løst korrekt handlet mer om at eleven ikke fant ut hvordan man skulle gå videre etter grupperingen. Dette forsterker mistanken om at elevene har brukt denne formelle løsningsstrategien spontant.

Elevene i gruppe 2 løste også oppgavene i kategori 3 og 4 korrekt. Disse oppgavene løste elevene ved bruk av strategien systematisk substitusjon. Med denne strategien jobber elevene ikke på eller med de ukjente, og de brukte derfor en uformell løsningsstrategi. Tilsvarende funn er gjort hos både Herscovics og Linchevski(1994) og Filloy og Rojano(1989). I begge studiene brukte elevene enten systematisk substitusjon eller substitusjon med rett svar på første forsøk for å løse likninger i denne kategorier. Begge mente funnene indikerte at elevene ikke begynte å arbeide med eller på de ukjente spontant i slike oppgaver. Det at heller ikke elevene i denne undersøkelsen brukte formelle løsningsstrategier for å løse disse likningene samsvarer med disse funnene.

5.1 Elevenes syn på likhetstegnet og dets påvirkning på strategier

Analysene av elevenes syn på likhetstegnet viser at elevene i gruppe 2 har et relasjonelt syn på likhetstegnet, mens gruppe 1 både ser på likhetstegnet som en operasjon og relasjon. Dette ser ut til å ha en innvirkning på noen av strategiene elevene har valgt å bruke i arbeidet med likningsløsinga. Gruppe 1 brukte en gang strategien *regne ut venstre side.* Dette er et tydelig eksempel på en strategi som brukes i tilfeller der elevene ser på likhetstegnet som en operasjon (Carpenter et al., 2003). I denne strategien regner elevene ut det som står på venstre side i likningen, og setter det som svar i oppgaven uten å ta hensyn til det som står på høyre side i likningen. Flere undersøkelser viser at en stor andel av elever i skolen har et operasjonelt syn på likhetstegnet, og at dette er en vanlig strategi blant disse elevene (Carpenter et al., 2003; Falkner et al., 1999; Eric J. Knuth et al., 2006). Dette synet på likhetstegnet så også ut til å ha innvirkning på forståelsen av likningsoppgavene med flere ukjente. Etter å ha jobbet med disse oppgavene uten å ha klart å løse dem forklarte eleven at hun hadde forsøkt å finne «svaret» på oppgaven, altså å finne ut hva som skulle stå etter

likhetstegnet. Knuth med flere (2005) fremhever at det er særlig viktig å forstå at likhetstegnet representerer en likhet og ikke en operasjon i likningsløsing. Det at elevene i denne gruppen først og fremst så på likhetstegnet som en operasjon kan derfor forklare elevenes vanskeligheter med noen av oppgavene.

Til tross for at elevene i gruppe 1 så på likhetstegnet som en operasjon, viser analysen at elevene også evner å bruke likhetstegnet som en relasjon, blant annet gjennom at de selv valgte å vise at to regnestykker var like ved å sette et likhetstegn mellom dem. Dette synet delte de med elevene i gruppe 2, som utelukkende så på likhetstegnet som en relasjon. Det vil si at de forstår likhetstegnet som en likhet. Dette er en forutsetning for at elevene i det hele tatt klarer å løse likninger med flere tall og symboler på begge sidene. Dette synet gjør også at elevene kan bruke strategien gruppering av tall der de regner ut den ene siden i likningen for å finne ut hva den andre siden av likningen skal bli. Begge gruppene viser at de har nådd den fjerde og siste av Carpenters milepæler (Carpenter et al., 2003). Dette er en forutsetning for at elevene skal kunne bruke relasjonsstrategi for å løse likninger. Denne strategien ble brukt av begge gruppene i noen addisjons- og subtraksjonsoppgaver.

5.2 Elevenes oppfatninger av bokstavsymboler og dets påvirkning på strategier.

Philipp (1992) presenterte en liste med sju roller, eller bruksområder til bokstavsymboler. Når jeg spurte elevene om de kjente til bokstaver som ble brukt i matematikk fortalte elevene at de hadde kjennskap til to av disse: merkelapper og ukjente. I oppgavene elevene fikk utdelt var ukjente representert. I teorikapittelet (kapittel 2.4) ble det presentert en liste på fem punkter fra Akgün og Özdemir (2006). For å kunne forstå bruken av ukjente bør elevene forstå disse 5 punktene. Punkt 1 og punkt 5 handler om «problemsituasjoner», mens punkt 2-4 er relevant for skriftlige likninger. Elevene viste at de tolket variablene i likningene som ukjente tall. Dette kommer blant annet til uttrykk i utsagn 246 i gruppe 2 (utdrag 28): «(...)x betyr verdien av et tall(...)». Det ble også vist gjennom at elevene substituerte de ukjente med tall i likningene de løste – dette er punkt 3 på listen. Elevene viste også evne til å utføre passende operasjoner for å bestemme verdien av de ukjente. Altså viste elevene at de har kjennskap til- og forstår bruken av ukjente i den grad de fikk vist det gjennom å jobbe med likningsoppgavene i intervjuene.

De ukjente kom i forskjellige former i likningene. De ble blant annet representert ved ulike variabler: □, x, y, n og m. Når elevene fikk likninger der den ukjente ble representert med en tom boks, x eller y løste elevene dem uten at disse representasjonene så ut til å påvirke arbeidet deres. De forsto at disse representerte ukjente, og satte inn en verdi for den ukjente. Etter at elevene hadde jobbet med en del likninger ble n brukt som representant for en ukjent. Det ser ut som elevene ikke var kjente med denne representasjonen siden de kom med utsagn som «hva er n?», «hvis du skjønner hva n er kan du forklare» og «jeg tenkte at det [n] sto for ni». Dette viser at elevene er klare over at variabler kan opptre på flere måter. Elevene tenkte ikke automatisk at de nye bokstavsymbolene var ukjente, men åpnet for at den nye representasjonen kunne bety noe annet. Begge gruppene foreslo at n kunne være en forkortelse for ni, altså som en merkelapp (Philipp, 1992) Dette er kanskje ikke rart med tanke på at mange andre bokstavsymboler elevene møter i matematikken er forkortelser. Elevene nevner selv blant annet at b står for bredde, l for lengde, g for grunnlinje, cm for centimeter og ml for milliliter. Disse eksemplene står riktignok ikke for tall slik elevene foreslo ni for n, men de viser at bokstaver i mange tilfeller er forkortelser i matematikken. Etter at elevene hadde studert den første oppgaven der n representerte den ukjente nøyere løste begge gruppene oppgaven på samme måte som de andre likningene. Det er ingenting som tyder på at bokstavsymbolene som representerte de ukjente hadde noen innvirkning på strategiene som ble brukt i likningsløsingen.

I oppgave 43 skulle elevene sammenlikne ulike uttrykk, og identifisere de uttrykkene som var lik $5x$. For å kunne sammenlikne disse uttrykkene må elevene kunne oppfatte variabler som generaliserte tall (Philipp, 1992). Denne oppgaven viste at elevene evner å vurdere uttrykkene opp mot hverandre, og begge gruppene identifiserte flere like uttrykk. Gruppe 2 identifiserte alle de like uttrykkene uten å inkludere noen av de som ikke var like. Gruppe 1 inkluderte heller ikke noen av uttrykkene som ikke var like, men klarte ikke å identifisere alle de like uttrykkene. Begge gruppene markerte at $3x + 2x$, $5x + x - x$ og $x + x + x + x + x$ var lik $5x$, mens kun gruppe 2 markerte $x + 4x$ og $6x - x$. Elevene identifiserte flere av disse uttrykkene uten å sette inn tall for bokstavene Knuth med flere (2005) sier at selv om generaliserte tall representerer flere tall er det bare nødvendig å tenke på symbolet for å ha en verdi av gangen. De gangene elevene var usikre på om et uttrykk stemte, eller at en av elevene på gruppa var uenig brukte elevene konkrete tall for å sjekke om uttrykket stemte overens med 5x. Tallene 1, 5 og 20 ble brukt som eksempler. Dette viser at elevene skjønner at man kan sette inn tall for disse variablene, og at flere tall kan benyttes. Det er ikke grunnlag

for å si om elevene ser at variablene står for alle tall, men det er ingen tvil om at elevene i det minste forstår at de gjelder for flere tall.

Det at elevene klarer å bruke bokstavsymboler som generaliserte tall er en forutsetning for å kunne bruke strategien gruppering av ukjente i en likning. Philipp (1992) forklarer at man ofte løser likningen 2x+3x=15 med disse tre trinnene:

1. $2x + 3x = 15$
2. $5x = 15$
3. $x = 3$

Denne fremgangsmåten ville jeg kodet til strategiene *gruppering av ukjente* fra trinn 1 til 2, og *unwind* fra trinn 2 til 3. Ved å løse oppgaven på denne måten har variabelen x to ulike funksjoner (Philipp, 1992). Først behandler man den som et generalisert tall ved at man grupperer $2x + 3x$ til $5x$, før man ser på den som en ukjent med den spesifikke verdien 3. Det at elevene kan se på variabler som generaliserte tall ser altså ut til å være en forutsetning for å kunne bruke strategien gruppering av ukjente, noe alle elevene i denne undersøkelsen klarte.

Herscovics og Linchevski (1994) hevder at elevene ikke klarer å operere på eller med ukjente spontant, altså uten undervisning. I deres undersøkelse grupperte to av elevene de ukjente i noen oppgaver der begge de ukjente hadde koeffisienter, mens oppgavene der kun en av de ukjente hadde koeffisient var det ingen som grupperte. I undersøkelsen jeg har gjort grupperte begge gruppene de ukjente i de to oppgavene i kategori 2 (Likninger med ukjente på samme side, med koeffisienter). De ukjente i disse oppgavene hadde koeffisienter og det er derfor ikke grunnlag for å si noe sikkert om hvordan elevene hadde valgt å løse oppgavene dersom kun en av de ukjente hadde koeffisienter. Likevel kan elevenes løsing på oppgave 43 gi en pekepinn på dette. Det er interessant å merke seg at de to uttrykkene som bare ble markert av den ene gruppa var $x + 4x$ og $6x - x$. Disse uttrykkene har til felles at den ene av bokstavsymbolene har koeffisient mens den andre ikke har det. De andre uttrykkene som begge gruppene klarte å identifisere var 3x+2x, 5x+x-x og x+x+x+x+x. I det første uttrykket har begge bokstavsymbolene koeffisienter. I det andre uttrykket hadde kun en av bokstavsymbolene koeffisienter, men den skiller seg ut fordi de to bokstavsymbolene uten koeffisienter nuller hverandre ut – noe begge gruppene brukte som argument for å markere den. Den siste hadde ingen koeffisienter. Man kan spørre seg om det er vanskeligere for

elevene å bruke bokstavsymboler som generaliserte tall når noen av bokstavsymbolene har koeffisienter mens andre ikke har det i ett og samme uttrykk. Det er et spørsmål som kunne vært interessant å undersøke nærmere.

6.0 Avslutning

6.1 Konkluderende oppsummering

I denne studien har jeg undersøkt strategiene fire elever på 7. trinn har brukt for å løse førstegradslikninger. Jeg har også undersøkt elevenes syn på likhetstegnet og oppfattelse av variabler og forsøkt å si noe om hvordan disse synene og oppfatningene kan ha påvirket strategiene elevene har benyttet.

Denne studien viser at elevene bruker en rekke ulike strategier for å løse likningsoppgavene. De strategiene som er funnet er: *Tallkunnskap*, *unwind*, *gruppering av tall*, *Substitusjon*, *gruppering av ukjente*, *relasjonsstrategi*, *tellestrategi* og *regne ut venstre side*. Den strategien som skilte seg mest ut fra tidligere forskning på elever rundt samme alder (Herscovics & Linchevski, 1994) er at elevene i denne undersøkelsen brukte strategien *gruppering av ukjente* uten å ha fått undervisning emnet. Det kan se ut til at en forutsetning for å kunne bruke denne strategien er at elevene klarer å oppfatte variabler som generaliserte tall i tillegg til ukjente, noe det viser seg at elevene i denne undersøkelsen kan.

Elevene i gruppe 2 hadde et relasjonelt syn på likhetstegnet, mens elevene i gruppe 1 både hadde et operasjonelt- og relasjonelt syn på likhetstegnet. Knuth med flere (2006) har funnet at elevers syn på likhetstegnet har en effekt på elevenes evne til å løse likninger. Gruppe 1, som hadde et operasjonelt syn på likhetstegnet, hadde flere feil når de skulle løse likninger enn det gruppe 2 hadde. Ut fra denne studien er det ikke grunnlag for å si noe sikkert om hvorvidt årsaken til dette er synet på likhetstegnet. Likevel viser det seg at dette synet har en innvirkning på noen av strategiene elevene bruker. Gruppe 1 brukte strategien *regne ut venstre side* i en oppgave. Denne strategien viser et operasjonelt syn på likhetstegnet og er ikke en korrekt strategi. Det kunne også se ut som at årsaken til at gruppe 1 ikke klarte å løse likningsoppgavene med flere ukjente var det operasjonelle synet på likhetstegnet. Det at elevene så på likhetstegnet som en relasjon påvirket også strategiene til elevene. For at elevene kunne bruke relasjonsstrategi og gruppering av tall (der de regnet ut den ene siden i likningen for å se hva den andre siden «skulle bli») forutsatte det at elevene hadde en evne til å se på likhetstegnet som en relasjon.

6.2 Implikasjoner

Gjennom denne studien har jeg fått et innblikk i hvordan elever jobber med likninger før de har fått undervisning i temaet. Det har vært spennende å få innsyn i elevenes tanker på en måte som jeg ikke har hatt mulighet til tidligere, og som kanskje ikke er så enkelt å få til i jobben som lærer.

Elevene i denne undersøkelsen «eier» sine egne strategier. Med det mener jeg at elevene selv har kommet frem til de ulike måtene å løse likningene på. Det er ingen som har påvirket dem i akkurat dette, og for det meste forsto elevene selv hva de hadde gjort. Den ene gangen en elev sa: «jeg skjønner egentlig ikke helt hvordan, jeg bare vet at det funker» (utsagn 487, utdrag 10) var i en multiplikasjonsoppgave der eleven prøvde å bruke en relasjon mellom tallene som jeg hadde vist dem tidligere. I de resterende oppgavene elevene lyktes i brukte elevene sin egen forståelse i matematikk under løsingen. Det at elevene klarte å løse så mange og avanserte likningsoppgaver som dette hadde jeg ikke forventet, noe som også er en del av grunnen til at jeg ønsket å ha en ekstra datainnsamling. Denne forståelsen og kunnskapen elevene viser at de innehar tenker jeg det er viktig å ta vare på fremover, også etter at de får undervisning i temaet. Det finnes kjente prosedyrer og regler i likningsløsing som «flytt og bytt» og abc-formelen for å nevne noen. Disse har jeg selv lært i skolen og brukt mye uten egentlig å forstå tankene bak strategiene. Hvordan kan man drive undervisning på en måte som gjør elevene i stand til fortsatt å eie strategiene sine? Hvordan kan man legge til rette for at elevene skal fortsette å forstå *hvorfor* det funker, og ikke bare *at* det funker? Det kan jeg ikke gi et klart svar på da det ikke finnes noen fasit. Likevel tror jeg at det er viktige tanker i jobben som matematikklærer i skolen.

Et annet relevant spørsmål er hvordan man kan endre elevenes syn på likhetstegnet fra et operasjonelt til et relasjonelt syn. Både Falkner med flere (1999) og Knuth med flere (2006) har undersøkt elevenes syn på likhetstegnet, og begge har funnet at en stor prosentandel av elevene ser på likhetstegnet som en operasjon samt at det ikke var noe som tydet på at dette synet endret seg etterhvert som elevene ble eldre. Når det i tillegg viser seg at synet på likhetstegnet har en effekt på elevers evne til å løse likninger (Eric J Knuth et al., 2005), forstår man at dette er viktig å fokusere på i skolen. Elev 1A i denne studien har to syn på likhetstegnet. Det kan virke som eleven har et operasjonelt syn på det hun selv kaller «vanlige oppgaver», samtidig som hun viste at hun hadde et relasjonelt syn i de fleste likningsoppgavene. Kanskje kan en løsning være å jobbe mer med likninger eller

likningsliknende aktiviteter. Carpenter med flere (2003) har utviklet fire milepæler som man kan få elevene til å jobbe mot for at elevene skal få et relasjonelt syn på likhetstegnet. Den kan være lur å ha i tankene når man underviser i matematikk. Det kan innebære at man ikke alltid stiller opp matematikkstykker på en slik måte at «svaret» kommer etter likhetstegnet som i oppgaven $a + b + c = d$, men at man varierer måtene stykkene blir satt opp på i skolen. Ved å ha disse milepælene i bakhodet som lærer vet man hva man ønsker å oppnå. Det kan derfor bli lettere å ta valg som kan føre til en mer relasjonell forståelse av likhetstegnet for elevene.

Likninger skal være elevenes første møte med algebra i følge LK06, og det er først etter 7. trinn at det forventes at elevene skal kunne stille opp og løse enkle likninger (Utdanningsdirektoratet, 2006)Likevel er det en del algebraiske tanker som det kan jobbes med gjennom hele skoleløpet, slik Kaput (2008) også mener man må. Undervisere kan hele skoleløpet være bevisste på å ha en korrekt bruk av likhetstegnet og å variere måten man stiller opp mattestykker på. Etterhvert som man begynner å arbeide med likninger og andre algebraiske temaer kan man bevisstgjøre elevene på variablenes ulike egenskaper, og forsøke å la elevene eie sine egne strategier og prosedyrer. Dette kan være et lite bidrag slik at norske elever i fremtiden unngår å bli stemplet som «alarmerende dårlige».

7.0 Litteraturliste

Akgün, L., & Özdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The Teaching of Mathematics, 9*(1), 45-51.

Alibali, M. W. (1999). How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. *Developmental psychology, 35*(1), 127.

Aubert, K. E. (2015). Ligning*Store norske leksikon* Hentet 15. mai 2017 fra https://snl.no/ligning

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. I *Perspectives on school algebra* (s. 177-189): Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Bass, H., & Ball, D. L. (2003). *Thinking mathematically : integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, N.H: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 87-115.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7th ed. utg.). London: Routledge.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics, 9*(2), 19-25.

Fladberg, K. L. (2016). Det har gått fra vondt til verre. Hentet 11. Desember fra http://www.dagsavisen.no/innenriks/det-har-gatt-fra-vondt-til-verre-1.848461

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics, 27*(1), 59-78.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 5-17.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra, 4*, 33-56.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 297-312.

Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. Anderssen & J. Rygge, Trans.). Oslo: Ad notam Gyldendal.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school, 7*(4), 23-26.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics, 30*(1), 39-65.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS' UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *An International Journal, 33*(1), 1-19. doi: 10.1023/A:1002970913563

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive science, 28*(3), 451-466.
Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher, 85*(7), 557-561.
Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.
Tjora, A. H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.
Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12, 8*, 19.
Utdanningsdirektoratet. (2006). Læreplan i matematikk fellesfag: MAT1-04 (LK06). Hentet 18. mai fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04?lplang=nob
Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 63-75.

8.0 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1 – informasjonsskriv

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"Ligninger"

Bakgrunn og formål
Jeg er student ved NTNU, og skal i år skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Formålet med oppgaven min er å undersøke hvordan elever arbeider med ligninger før de har fått formell undervisning i algebra. Til dette trenger jeg elever som ønsker å delta i studien.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Deltakelse i studien innebærer et intervju sammen med en medelev der de vil arbeide med tilpassede ligninger. Det vil bli tatt lyd- og videoopptak av intervjuet. Tidsrammen er omtrent en skoletime.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Kun jeg og min veileder vil ha tilgang til opplysningene jeg får tilgang til. Materialet vil bli anonymisert, og det vil ikke være mulig å gjenkjenne elevene i masteroppgaven.

Prosjektet skal etter planen avsluttes Juni 2017. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lyd- og video-opptak vil slettes.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med Liv-Iren Lie, liviren.lie@gmail.com, 92849723 eller min veileder Hermund A. Torkildsen, hermund.a.torkildsen@ntnu.no, 73412778

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Forelders/ foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i studien.

Barnets navn/klasse:_____

Jeg samtykker i at: (kryss av der det passer)

- O Mitt barn deltar i forskningsprosjektet om ligninger.
- O Det tas lyd- og videoopptak av intervjuet.

Sted og dato:_____

Forelders/ foresattes underskrift:_____

8.2 Vedlegg 2 – Oppgaver

01. $5 + 3 = x$

02. $17 + x = 22$

03. $56 - x = 41$

04. $7 + 6 = x + 9$

05. $2 + 16 = 9 + x$

06. $2 = 8 - x$

07. $36 = 100 - x$

08. $250 = x - 300$

09. $5 - 2 = x - 3$

10. $142 - 23 = 144 - x$

11. $35 + 40 = 34 + x$

12. $220 + x = 230 + 50$

13. $716 - 235 = x - 135$

14. $2\times5 - 3 = 20 - x$

15. $17 + x + 20 - 20 = 15 - 15 + 5 + 15$

16. $4 + x - 2 + 5 = 11 - 3 + 5$

17. $4\times x = 24$

18. $15: x = 3$

19. $333 = x\times9$

20. $525: x = 15$

21. $5\times x = 20 + 10$

22. $10\times x = 5\times20$

23. $10 * 10 = x * 5$ $(G1)$

24. $150\times150 = 75\times x$ $(G2)$

25. $8: 2 = x: 4$

26. $x: 20 = 1700: 10$

27. $x: 2 = 10: 4$

28. $500: x = 1500: 9$

29. $16 = x + x$

30. $x + 5 + x = 55$

31. $2x + 3x = 225$

32. $7x + 5x + 7 = 55$

33. $x + x = x + 9$

34. $x + x = 18 - x$

35. $5x + 12 = 3x + 24$ (G2)

36. $x + 15 = 4x$

37. $3 + 7 = 4$

a) Pilen over peker på et symbol. Hva heter dette symbolet?
b) Hva betyr symbolet?
c) Kan symbolet bety noe annet? Hvis ja, forklar.

38.

a) Kan du komme på noen ganger bokstaver blir brukt i matematikk? Hvis ja, når og hvilke?

b) Hva betyr bokstavene?

39.

Hvilke er det samme som $5x$

$6x$

$3x + 2x$

$5x + x - x$

$x + x$

$x + x + x + x + x$

$x + 4x$

$6x - x$

(oppgaver markert med (G1) ble kun gitt til gruppe 1, oppgaver merket med (G2) ble kun gitt til gruppe 2)