Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Elisabeth Skrondal

Kunsten å tenke i matematikk

En kvalitativ studie om elevers valg og bruk av estimeringsstrategier i arbeid med addisjon og multiplikasjon av brøk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1-7
Veileder: Ole Enge
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Elisabeth Skrondal

Kunsten å tenke i matematikk

En kvalitativ studie om elevers valg og bruk av estimeringsstrategier i arbeid med addisjon og multiplikasjon av brøk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1-7
Veileder: Ole Enge
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

FORORD

Etter snart fem år på Rotvoll, nærmer det seg slutten. Det har vært en lang og lærerik prosess hvor jeg har gjennomgått en faglig og personlig utvikling, som jeg ikke ville vært foruten. De siste årene har vært spesielt engasjerende og har økt min interesse for matematikkdidaktikk. Ikke minst har arbeidet gitt meg erfaring og motivasjon til å møte den nye hverdagen som matematikklærer på grunnskolen.

Det er mange som fortjener en takk for at masteroppgaven til slutt ble ferdigstilt. Først og fremst vil jeg takke min veileder, Ole Enge, for de konstruktive tilbakemeldingene jeg har fått underveis. Takk til medstudenter, spesielt dere jeg har vært så heldig å dele kontor med, for det gode humøret, alt det sosiale og inspirerende samtaler. Uten dere hadde det vært vanskelig å holde motet oppe i en så omfattende skriveprosess. En stor takk rettes også til informantene og skolen der jeg gjennomførte datainnsamlingene. Jeg setter pris på at dere lot meg ta av deres tid, og at dere ga meg tillit til å gjennomføre studien. Tusen takk til alle som har hjulpet meg på veien, med alt fra tålmodighet og oppmuntring til språkvask og hjelp til å sortere tanker. Jeg vil også rette en spesiell takk til Edel og Erik, som tok seg tid til å lese korrektur. Til sist en stor takk til min samboer Fredrik, for god hjelp, veiledning og støtte underveis.

Hjertelig takk!

Elisabeth Skrondal

Trondheim, mai, 2017

INNHOLD

FIGUROVERSIKT

TABELLER

1.0 INNLEDNING- ESTIMERING I BRØK

1.1 BAKGRUNN FOR OPPGAVEN

Brøk blir ofte omtalt som et av de mest komplekse områdene i matematikkfaget (Lamon, 2012; Ma, 2010). Det er en påstand, som jeg av egen erfaring som lærer, kan si meg enig i. Lærere flest vil gjennom sine yrkeskarrierer møte elever som blir usikre i møtet med brøkregning. Internasjonale undersøkelser som TIMSS[1] (Bergem, 2016) og PISA[2] (Kjærnsli & Olsen, 2013) påviser også at mange elever strever i arbeid med brøk, og påpeker at det finnes et forbedringspotensial for brøkregning i norsk skole. Undersøkelsene viser at norske elever gjør det bedre emneområdet Tall, som også omfatter regneoperasjoner i brøk. Det kan være på bakgrunn av det økte fokuset på brøk i matematikkfaget, slik det er nedfelt i skolens læreplanverk (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Likevel er avstanden fra de østasiatiske landene som presterer best størst innen dette emneområdet, og det er fortsatt et forbedringspotensial blant norske elever. Det reiser et spørsmål om hvorfor elever strever i møtet med brøk.

Det er identifisert flere årsaker til hvorfor enkelte elever har vanskeligheter med å lære seg brøk. McNamara og Shaughnessy (2015, s. 5) har påpekt at ulike deler av brøkbegrepet bryter med grunnleggende forestillinger om heltall. Hos noen elever er det forvirrende å skulle forstå brøk som et tall og ikke som «[…] two integers written with a bar between them» (Lamon, 2012, s. 29). Andre kan oppleve brøkbegrepet som utfordrende, fordi tallet 1 vanligvis refererer til et objekt i arbeid med å telle et sett med objekter, men i brøk kan 1 bestå av mer enn et objekt. Dette objektet kan bli delt opp i flere deler og kan bestå av mange ulike sett med like deler. På den måten kan brøk oppfattes som et abstrakt begrep for enkelte elever (Lamon, 2012). Det kompliseres også av at brøk består av flere tolkninger, der det blir sagt at de som skal beherske kunsten med å utføre regneoperasjoner i brøk er avhengig av å forstå de ulike tolkningene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2012).

Felles for forklaringene om hvorfor elever opplever brøk som utfordrende er at det gir et inntrykk av at brøk oppfattes som fjernt og abstrakt. Blant annet fordi brøk ikke opptrer på den måten elever er vant til å forholde seg til tall og mengder på (Lamon, 2012). Johanning sier at

[1] Trends in International Mathematics and Science Study. Resultater hentet fra *Vi kan lykkes i realfag- resultater og analyser fra TIMSS 2015.*
[2] Programme for International Student Assessment. Resultater hentet fra den norske hovedrapporten fra PISA 2015.

for å forstå brøk er det er nødvendig at elever utvikler «[…] a sense of size for various fraction quantities» (2011, s. 98). En slik forståelse inngår i det hun omtaler som «number sense» (på norsk omtalt som tallforståelse), og er viktig for at elevene skal kunne utføre regneoperasjoner i brøk (B. J. Reys, 1994).

Å utvikle tallforståelse er et utfordrende prosjekt. Forskere innen matematikkdidaktikk foreslår derfor at estimering kan bidra til å støtte en elevs forståelse av matematikk (McIntosh, Reys & Reys, 1997; B. J. Reys, Reys & Penafiel, 1991; Sowder, 1992; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2014). Estimering beskrives som en ferdighet enkelte kan ta i bruk for å løse aritmetiske problem, hvor det ikke er fokus på et eksakt svar (Lefevre, Greenham & Waheed, 1993, s. 95). Denne ferdigheten kan tas i bruk for å tenke i matematikk, men også for å skape mening i regneoperasjoner. I tillegg til å være en ferdighet med praktisk betydning, gir evnen til å estimere også informasjon om elever sin aritmetiske forståelse. Det vil si deres forståelse for å knytte mengde til tall, og evnen til å tenke ut og bruke strategier for å manipulere tall (Dowker, Flood, Griffiths, Harriss & Hook, 1996). Ved å ta i bruk estimering i undervisning, kan en lærer oppmuntre til en reflektert tankegang som retter fokus på en begrepsforståelse, fremfor å bare memorere regler og prosedyrer i matematikk. På denne måten kan det utvikles en begrepsforståelse i arbeid med regneoperasjoner i brøk (B. J. Reys, 1994; B. J. Reys et al., 1991).

1.2 FORSKNINGSSPØRSMÅL

På bakgrunn av disse refleksjonene, tar denne studien utgangspunkt i estimering i arbeid med brøk. Ved å se på hvilke estimeringsstrategier elevene benytter seg av og hvordan de velger å begrunne fremgangsmåten sin i en estimeringsprosess, kan en lærer få et innblikk i en elevs tallforståelse i brøk. I denne studien har jeg valgt å belyse følgende forskningsspørsmål:

- *Hvilke estimeringsstrategier bruker en gruppe elever i 6.trinn i arbeid med addisjon og multiplikasjon av brøk?*

I tillegg har jeg formulert følgende tilleggsspørsmål:

- *Hvordan tar elevene i bruk strategiene, og hvilke muligheter skaper arbeidet med estimering for å utvikle forståelse for brøk?*

Til grunn for denne masteroppgaven ligger det et ønske om å finne ut hvilke tilnærminger, om de så er kognitive, praktiske eller sosiale, som gjør at en elev lykkes i brøkregning. Det er ikke innenfor rammene til denne studien å måle sammenhengen mellom estimering og elevenes prestasjoner i matematikk. Denne sammenhengen er et komplekst spørsmål, som fortsatt opptar forskere i fagfeltet (Booth & Siegler, 2006; Hanson & Hogan, 2000; Lefevre et al., 1993; Siegler & Booth, 2004; Sowder & Schappelle, 1989). Derfor har studien en snevrere tilnærming. Den ønsker først og fremst å belyse hvilke estimeringsstrategier som kan avdekkes blant norske elever i skolen i arbeid med brøkregning. Det gjøres ved å undersøke noen elevers valg av estimeringsstrategier i deres arbeid med addisjon og multiplikasjon i brøk. Elevene blir bedt om å svare på disse oppgavene og forklare hvert steg i estimeringsprosessen. Å observere elevers strategier og hvordan de begrunner sine valg, gir ikke bare informasjon om selve estimeringsprosessen, men også innblikk i elevenes generelle forståelse for matematiske begreper og sammenhenger (Dowker, 1992, s. 45). Ideen er at det derfra skal være mulig å avdekke noen mønstre når det gjelder hvordan elevene tar i bruk strategiene. Det kan til slutt også gi en pekepinn på hvordan arbeidet med estimeringsstrategier kan bidra til å utvikle forståelse for brøk.

For å kunne belyse forskningsspørsmålene er jeg avhengig av å avklare en rekke metodiske og teoretiske utfordringer. For det første er det nødvendig med en teoretisk forankret ide om hva det vil si å forstå, og hva det innebærer å utvikle forståelse for brøk. Dette kan høres ut som et spørsmål som har et opplagt svar, men i fagfeltet er det uenighet om hvordan brøkforståelse kan utvikles. Blant annet legger Skemp (1976) stor vekt på å utvikle relasjonell forståelse i matematikk. Det vil si å «heve seg over det matematiske temaet», eller å utvikle en intuitiv forståelse for tall og evnen til å se sammenhengen mellom disse. Mer spesifikt går det ut på å forstå hvordan og hvorfor en prosedyre fungerer. Det forutsetter at eleven kan ta i bruk fleksible strategier, se sammenhenger mellom operasjoner med tall (Hiebert et al., 1997), forstår hvordan tall kan bli tatt fra hverandre og satt sammen på andre måter, og deretter er i stand til å utforme hensiktsmessige estimat (Burns, 2007). Å legge til rette for at elever kan utvikle sin forståelse i brøk, støttes også av Utdanningsdirektoratet som påpeker at «Ved å gi elevene et solid grunnlag for forståelsen av brøkbegrepet, kan en unngå at brøkregning blir mekanisk og drillpreget, og at eleven etter hvert sier at brøk er vanskelig og noe de ikke forstår» (u.å., s. 2). Norske utdanningsmyndigheter legger dermed vekt på å forstå, ikke bare å kunne brøkregning.

Utdanningsdirektoratet (2012) vektlegger at skolen skal være en institusjon som gir livslang læring. For at kunnskapen skal vare livet ut, er det viktig at elevene forstår det de lærer, og er i stand til å bruke det fleksibelt i hverdagslige situasjoner (Hiebert et al., 1997). Å anvende estimering før en elev regner ut et eksakt svar, kan bidra til at eleven blir mer fleksible i sin tenking. I tillegg kan de ta i bruk flere strategier og utvikle mer forståelse for tall og operasjoner (Sowder, 1992, s. 381-382). Ifølge (Johanning, 2011) er estimering mer enn en ferdighet eller et isolert emne i matematikk. Estimering er først og fremst et resonneringsverktøy som kan brukes for å kunne tenke, og for å utvikle kunnskap om brøk, men også matematikk generelt. Ved å ta i bruk estimering i undervisning, kan en elev utvikle egne prosedyrer og skape mening rundt operasjoner i brøk. Det å lære seg å estimere er en effektiv måte for å utvikle forståelse for tall, og i tillegg blir det omtalt som en viktig ferdighet for problemløsning generelt (Van de Walle et al., 2014). Slik sett er det en ferdighet som kan komme til syne i flere områder i matematikk.

Selv om estimering er et viktig verktøy for å kunne tenke om matematikk, omtaler Carpenter, Copurn, Reys og Wilson estimering som «[…] one of the most neglected skills in the mathematics curriculum» (1976, s. 296). I 1976 ble resultatene fra den første National assessment of educational progress [3] publisert, der funnene indikerte at elever var i dårlig stand til å estimere og manglet en intuitiv forståelse for tall (Carpenter et al., 1976). Siden den gang har flere forskere undersøkt denne matematiske ferdigheten (for eksempel Lemaire, Lecacheur & Farioli, 2000; Liu, 2009; R. E. Reys et al., 1991), men fortsatt finnes det lite nyere forskning på dette området. En av årsakene til at det er lite forskning om estimering, sammenlignet med andre matematiske ferdigheter, kan være at det er vanskelig å måle (Carpenter et al., 1976). En annen årsak kan være at en estimeringsoppgave blir sett på som en åpen oppgave, der problemet som regel ikke har *ett* riktig svar (Dowker et al., 1996). Dermed kan det være utfordrende å vurdere om en elev har rett eller galt svar.

Tidligere forskning har utledet ulike teoretiske modeller om bruk av estimering i utregning. Blant annet har forskere undersøkt strategier som blir tatt i bruk i estimering (Dowker, 1992; Hanson & Hogan, 2000; Levine, 1982; Sowder & Wheeler, 1989), viktigheten av estimering for å kunne utvikle tallforståelse (Sowder, 1992) og ulike prosesser som blir tatt i bruk av gode estimatorer (R. E. Reys, Rybolt, Bestgen & Wyatt, 1982). Min studie baserer seg hovedsakelig

[3] Forkortelse: NAEP. Er den største amerikanske vurderingsinnstansen og vurderer kontinuerlig hva elever kan i matematikk, lesing, skriving og flere andre felt.

på en sammenfatning av disse teoriene, med en modifisert versjon av R. E. Reys et al. (1982) sin teori om ulike kognitive prosesser i estimering. Med dette som bakgrunn vil jeg kunne plassere elevenes estimeringsstrategier og si noe om hvordan elevene tar de i bruk.

1.3 OPPBYGGING AV STUDIEN

Oppgaven er bygd opp av seks kapitler. Etter innledningskapittelet følger et teorikapittel der hensikten er å gjøre rede for teoretiske konsepter knyttet til brøk og estimering, før oppgavens konseptuelle fundament forklares i dybden. Studiens teoretiske utgangspunkt baseres hovedsakelig på R. E. Reys et al. (1982) sin teoretiske modell, som beskriver kognitive prosesser som finnes blant dem som er gode til å estimere. Selv om rammeverket ble utviklet så sent som på tidlig på 80- tallet, blir prosessene fortsatt omtalt i andre undersøkelser (B. J. Reys et al., 1991; R. E. Reys, Reys, Nohda & Emori, 1995). Prosessene kan derfor anses som en overordnet modell for å kategorisere de strategiene som jeg finner i egen studie.

Videre i oppgaven begrunnes studiens forskningsdesign i kapittel 3. Hovedfokuset i kapittelet er å vise hvordan datainnsamlingen ble gjennomført, og deretter presentere egne betraktninger for de metodiske valgene som er gjort. I kapittel 4 presenteres og analyseres sentrale utdrag fra observasjoner av elevgruppene i arbeid med estimeringsoppgaver, med en oppsummering av funn til slutt. I dette kapittelet belyses elevenes valg- og bruk av strategier. I neste kapittel drøftes utfordringene med å plassere en strategi under en kognitiv prosess, resultatene av det empiriske grunnlaget og hvilke muligheter estimering kan skape for å utvikle forståelse i brøk. Avslutningsvis vil jeg oppsummere funnene, studiens bidrag, og eventuelt hvordan studien eventuelt kan vise vei for fremtidige undersøkelser.

2.0 TEORI- FORSKNING OM BRØK OG ESTIMERING

I dette kapittelet blir det teoretiske grunnlaget for analyse og presentasjon presentert. Målet med studien er å belyse hvilke estimeringsstrategier elevene velger og hvordan de tar de i bruk. I tillegg ønsker studien å belyse hvilke muligheter estimering skaper for å utvikle forståelse i brøk. På bakgrunn av disse spørsmålene har jeg valgt å plassere studien i et konstruktivistisk læringsperspektiv. Dette læringssynet blir presentert først i teorikapittelet, slik at jeg kan gjøre rede for hvilket syn på læring som ligger til grunn. Deretter kommer en teoretisk gjennomgang av brøk, som er det overordnede temaet i denne studien. Den siste delen av teorien er delt i to og omhandler estimering. I første del vil jeg blant annet gjøre rede for hva det vil si å estimere og gi eksempler på hvilke strategier som kan identifiseres i arbeid med estimering. I den andre delen presenteres rammeverket som studien tar utgangspunkt i. Dette rammeverket omhandler hvilke kognitive prosesser som kan tas i betraktning i arbeid med estimering, og er utviklet av R. E. Reys et al. (1982). Estimeringsstrategiene som jeg identifiserer i undersøkelsen, blir så langt som mulig plassert i dette rammeverket, først og fremst for å kunne si noe om *hvordan* elevene bruker strategiene de tar i bruk. Teorikapittelet er dermed delt opp i tre hoveddeler: læringssyn, brøk og estimering.

2.1 LÆRINGGSYN

2.1.1 KONSTRUKTIVISTISK LÆRINGSTEORI

Konstruktivisme kan karakteriseres som en teori om kunnskap om læring, med hovedvekt på at kunnskap finnes i hodet på hver enkelt og bygges opp gjennom aktiv læring (Von Glasersfeld, 2001). Blant annet hevder konstruktivistene at det er mennesket som produserer kunnskapen, og at hver enkelt person har en velutviklet kapasitet til å organisere kunnskapen (Magoon, 1977). Viten kan dermed ikke mottas passivt, men må bygges aktivt opp av det tenkende subjektet (Von Glasersfeld, 2001).

Ifølge Illeris (2006, s. 128) kan læring innenfor et konstruktivistisk perspektiv skje både ved en sosial og en individualistisk tilnærming. Sosialkonstruktivistene hevder at sosiale relasjoner er grunnlaget for hvordan mennesket forstår omverdenen, og dermed også hvordan de skaper kunnskap. De var likevel enige om at læring utvikles individuelt. Menneskets oppfatning av verden endres både på bakgrunn av selvstendig refleksjon, og ved at læringskulturen er sosial (Illeris, 2006, s. 128). Selv om det er noen begrepsforskjeller mellom konstruktivister med en sosial tilnærming og de med et mer individualistisk syn, er de enige om at all kunnskap konstruert av hver enkelt (Noddings, 1990, s. 10).

Von Glasersfeld (2001) viser til flere eksempler på hvordan en lærer kan legge opp til aktiv læring blant elevene. Blant annet bør ikke undervisning starte med presentasjoner av ferdig kunnskap, men heller skape muligheter for å la elevene tenke. Det er heller ingen god ide å si at noe er feil når elevene viser frem arbeidet sitt. Å forsømme elevens arbeid er den sikreste måten å slukke en elev sin gnist i faget. Ikke overraskende, mister de da interesse for å håndtere nye oppgaver. Eventuelt kan en elev starte en samtale om problemet som oppstår, slik at elevene kan forklare tankegangen sin til lærer eller medelever. En slik verbalisering er en form for tenking som kan bringe frem flere store ideer innen det matematiske temaet, og som kan gi mulighet til å løse problemer. Å legge til rette for slike aktiviteter i undervisning, vil gjøre det lettere for elever å forstå og håndtere flere matematiske områder (Von Glasersfeld, 2001).

2.1.2 MATEMATISK FORSTÅELSE

Begrepet å *forstå* blir ofte brukt i matematiske sammenhenger. Ifølge Hiebert et al. (1997, s. 4) er det vanskelig definere og beskrive hva forståelse er, fordi begrepet er svært komplekst og er noe som alltid forandres og utvikles. Derfor kan forståelse beskrives på ulike måter. Det er likevel *en* definisjon som har fungert og blitt brukt i flere år, som går ut på at forståelse handler om å se hvordan noe er relatert til eller henger sammen med noe vi allerede vet fra før av. Det vil si at å forstå matematikk går ut på å se hvordan et begrep kan relateres og skape sammenhenger til andre begreper. For eksempel kan vi lære å memorere regler og prosedyrer i matematikk, men det betyr ikke at vi alltid vil forstå hvordan prosedyren fungerer. Forståelse er dermed ikke noe vi har eller ikke har, men noe som alltid forandres og utvikles hos hvert enkelt individ.

Begrepet *number sense*[4] er et av de begrepene som ofte blir brukt i sammenheng med forståelse i matematikk. McIntosh et al. (1997) definerer tallforståelse slik:

> *Number sense* refers to a person’s general understanding of numbers and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgments and to develop useful and efficient strategies for dealing with numbers and operations (s. 322).

[4] Fra nå av omtalt som tallforståelse.

Det vil si at forståelse i matematikk og tallforståelse går hånd i hånd med et fokus på å være fleksibel og utvikle effektive strategier for arbeid med tall. NCTM[5] (referert i B. J. Reys, 1994) omtaler begrepet tallforståelse som en *intuitiv forståelse for tall* og en måte å tenke på i matematikk. Dette bør være en del av alle emner i matematikkundervisning for at kunnskapen skal være meningsfull. Å utvikle tallforståelse er også et av hovedområdene i læreplanen, der begrepet tall omfatter hele tall, brøk, desimaltall og prosent (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Det stilles dermed krav til at lærerne i skolen også bør ha tallforståelse. På denne måten kan læreren bidra til å fremme utvikling av prosedyrer og ferdigheter i matematikk som blir meningsfulle for elevene.

Skemp (1976) fremhever også betydningen av forståelse i matematikk. I den sammenheng skiller han mellom relasjonell og instrumentell forståelse. Ifølge Skemp beskrives instrumentell forståelse som et sett «rules without reasons» (1976, s. 89) . Det vil si at en elev vet hva som skal gjøres og hvorfor i arbeid med for eksempel et regnestykke i brøk. Med denne forståelsen bruker en elev gjerne kjente regler og prosedyrer for å regne seg frem til svaret. Når en elev først har kommet frem til et svar, er det ofte at resten av arbeidet ignoreres (Skemp, 1976). Det vil si at utregningsfeil kan bli oversett, fordi fremgangsmåten har blitt gjennomført riktig steg for steg.

Å kun basere seg på en instrumentell forståelse vil ikke alltid være holdbart for å forstå matematikk. Skemp (1976) snakker i den sammenheng om relasjonell forståelse. Denne forståelsen kan kjennetegnes ved at en elev ikke bare vet *hvilke* metoder som virker, men også *hvorfor* de fungerer. En av fordelene med relasjonell forståelse er at eleven aktivt oppdager store ideer og sammenhenger i matematikk, som et resultat av egenproduserte og fleksible strategier. Det fører til at strategiene blir mer overførbare til andre lignende oppgaver i matematikk. Selv om instrumentell og relasjonell forståelse representerer to ulike fremgangsmåter for å løse problemer, er det ikke slik at det ene er bedre enn det andre. Hiebert et al. (1997, s. 25) sier at en lærer heller må se på forståelse som et resultat av å løse problemer, i stedet for noe som kan undervises direkte. Begrep og prosedyrer bør ikke undervises hver for seg, men fokuset bør heller rettes mot å løse problemer, slik at begrepene og prosedyrene utvikles sammen. Dette bør gjøres på en måte slik at kunnskapen blir en del av elevenes hverdagslogikk og sikre at strategiene blir mer tilpasningsdyktig (Hiebert et al., 1997).

[5] National council of teachers of mathematics.

Ifølge Skemp (1976) er en av fordelene med å tilnærme seg prosedyrer, basert på en instrumentell forståelse, at det kan være raskere å forstå. Mindre kunnskap er involvert, noe som fører til at eleven kommer fortere frem til svaret. Likevel kan det være problematisk dersom elevene ikke kjenner hensikten med reglene og hvorfor de fungerer. For eksempel vil det være vanskelig å gå tilbake og forstå prosedyren dersom den ikke har blitt benyttet over lengre tid, og dermed vil fremgangsmåten være lettere å glemme (Hiebert et al., 1997, s. 25).

2.1 BRØK

Ifølge Lamon (2012, s. 29) kan begrepet brøk bli brukt på to forskjellige måter. Brøk kan bli sett på som et todelt symbol, som kan brukes for å skrive bestemte heltall: $\frac{a}{b}$. En slik tilnærming viser til et notasjonssystem som representerer et symbol bestående av to heltall med en strek mellom. Brøk kan også bli sett på som et rasjonalt tall, som ikke er negativt. Tallene skrives dermed på formen $\frac{a}{b}$, der a og b er positive heltall, og b ≠ 0. Selv om brøk kan bli sett på som et rasjonalt tall, må ikke disse to begrepene bli sett på som synonyme. Alle rasjonale tall kan bli skrevet i brøk, men ikke alle tall skrevet i brøkform er rasjonale. For eksempel er $\frac{2.1}{4.1}$ (vanligvis skrevet som $\frac{21}{41}$), $\frac{2}{3}$ og $\frac{2}{1}$ rasjonale tall, men ikke $\frac{\pi}{2}$. Slike tall kalles irrasjonale tall (Lamon, 2012), men vil ikke bli behandlet videre i denne sammenhengen, da det ikke er en del av studiens fokusområde.

2.1.1 ABSOLUTT OG RELATIV TENKNING I BRØK

For at elever skal forstå brøkbegrepet mer enn bare en notasjon, bør elevene kunne veksle mellom å tenke om brøk på to ulike måter. Disse omtaler Lamon (2012) som relativ- og absolutt tenking, også omtalt som multiplikativ- og additiv tenking. Relativ tenking i brøk går ut på å forstå flere viktige begrep. Blant annet innebærer en slik tenking å se sammenhengen mellom størrelsen på en del (teller) og antall deler (nevner). I tillegg går det ut på å forstå sammenhengen mellom likeverdige brøker. For eksempel kan $\frac{3}{5}$ skrives på mange ulike måter, som blant annet $\frac{12}{20}$ eller $\frac{6}{10}$. For at elevene skal forstå brøk, bør den relative tenkningen introduseres, ikke bare den absolutte.

For å sette ord på hva det vil innebære å tenke relativt og absolutt, trekker Lamon (2012, s. 39) frem et eksempel om to trær som vokser like langt: *Tre A er 8 meter langt og tre B er 10 meter* *langt. I løpet av en gitt tidsperiode har hvert enkelt tre vokst 6 meter. Det vil si at tre A nå er 14 meter langt, og tre B 16 meter langt.* Til denne oppgaven stiller hun spørsmålet: hvilket tre har vokst lengst? For å finne ut av hvilket tre som har vokst lengst, er det ikke holdbart med en absolutt tenkning. Det vil si at en elev ikke kan avgjøre hvilket tre som har vokst lengst ved å telle, fordi begge trærne har vokst like mye, men med ulikt utgangspunkt. Ifølge Lamon (2012, s. 42) er det i slike sammenhenger nødvendig med relativ tenkning for å løse oppgaver basert på sammenligning. Denne tenkningen beskrives som en mer kompleks abstraksjon enn absolutt tenkning. For å finne svar på en slik oppgave, må eleven sammenligne den relative mengden til den samme enheten. Det vil si at en elev sammenligner tre A og tre B med størrelsene før og etter. Forholdet representeres dermed som brøk der tre A→ $\frac{8}{14}$ og tre B→ $\frac{10}{16}$. Slik vil en elev kunne se at begge brøkene mangler like mye fra en hel, men også at tre B består av flere deler. Basert på denne informasjonen vil delene være mindre, noe som tilsier at tre B har vokst lengst.

Mack (1998, s. 34) sier at å forstå multiplikasjon av brøk involverer å forstå ideer både innen brøk og multiplikasjon. Blant annet bør elevene forstå at det er nødvendig med like store deler og at størrelsen av hver del avhenger av den gitte enheten. I tillegg bør elevene forstå at brøk kan ha mange likeverdige representasjoner. For eksempel viser $\frac{6}{9}$ og $\frac{10}{15}$ samme forhold som $\frac{2}{3}$. Son & Senk (2010, s. 121) hevder at multiplikasjon av heltall ofte blir representert som gjentatt addisjon. Dersom en elev skal ta i bruk additive resonneringer i arbeid med brøk, kan det hindre å gi mening til operasjonen som skal utføres. Mack (1998) sier at mange sitasjoner med brøk innebærer ulike situasjoner med del-del-hel. Det vil si oppgaver som går ut på å finne $\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2}$ av 1 hel eller $\frac{1}{4} \bullet \frac{1}{2}$. I slike sammenhenger vil elevens additive resonnering være lite hensiktsmessig fordi eleven ofte bruker repetert addisjon i multiplikasjon (Son & Senk, 2010, s. 121).

2.1.2 SAMMENLIGNING AV BRØK

En brøk kan representeres på ulike måter. En av de vanligste måtene er å sammenligne brøk som del-hel, gjerne av to sirkulære modeller, der formålet er å finne ut av hvor mange deler av helheten som er skravert (Van de Walle et al., 2014, s. 311). Sowder (1988) sier at ved å kun referere tilbake til sirkulære modeller for å sammenligne størrelsen av to brøker, kan det føre til at elevene blir «modell-fattige». Hun fremhever viktigheten av å gi elevene oppgaver som involverer sammenligninger av størrelser på brøk med følgende utsagn:

> The connection between the comparison of fractions and development of number is clear. Comparing fractions is necessary for obtaining an intuitive feel of the size of fractions. If a fractional number is recognised to be close to $\frac{1}{3}$ or $\frac{1}{2}$, for example, one has a better feel for its magnitude. This fractional number sense is particularly important when estimating with fractions. (s. 189).

Det vil si at evnen til å sortere og sammenligne brøk ut i fra størrelser er viktig for god tallforståelse.

Elever trenger trening i det Lamon (2012, s. 136) omtaler som *fraction sense*. Det vi si at elever bør utvikle en indre intuisjon, som kan hjelpe dem med å skape sammenhenger, avgjøre størrelser, plassere rekkefølge og avgjøre om et svar er hensiktsmessig eller ikke i brøk. Det kan blant annet gjøres ved å sammenligne to brøker. Ifølge Lamon (2012, s. 136) er det sjeldent vanskelig å se den relative størrelsen på to brøker dersom nevneren er det samme. For eksempel vil det å sammenligne brøkene $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$ være det samme som å spørre om 2 deler er like store som 3 deler, dersom enheten er delt opp i like store deler. Det er derfor viktig å variere sammenligningsoppgavene, med for eksempel brøk med to like tellere, eller ulike tellere og nevnere.

Ifølge Lamon (2012, s. 136) er det mer kritisk å sammenligne brøker dersom telleren er den samme. I dette tilfellet kan for eksempel brøkene $\frac{3}{7}$ og $\frac{3}{5}$ blir sett på som to kaker, der en kake har blitt delt opp i 7 deler og den andre kaken i 5 deler. Slik kan en elev se at helheten er den samme, men at den har blitt delt opp i ulike deler. Kaken som er delt opp i 5 deler vil derfor være størst, fordi de med færrest deler gir større kakestykker. Å sammenligne to like tellere krever derfor en annen tankegang enn å sammenligne to like nevnere. I de fleste tilfeller er det ikke holdbart å bare se på hvilken av tellerne som er størst, spørsmålet rettes heller mot hvilken av tellerne som består av størst del (Lamon, 2012, s. 136).

Å sammenligne brøker med forskjellige tellere og nevnere, kan ofte være mer utfordrende enn brøker med like tellere eller nevnere. Dette skjer fordi ulikt antall deler med ulike størrelser på delene skal sammenlignes (Lamon, 2012, s. 136). For eksempel: *Du ønsker mest mulig kake. Vil du heller ha 3 biter som er delt opp i 5 like deler ($\frac{3}{5}$) eller 4 biter fra en kake som er delt opp i 9 like deler ($\frac{4}{9}$)?* I denne oppgaven er du nødt til å avgjøre hvilket alternativ som gir deg mest kake: er det færre biter som er delt opp i større deler, eller flere biter delt opp i mindre deler. En måte å avgjøre hvilken brøk som er størst kan være å sammenligne brøkene med $\frac{1}{2}$, og dermed se at $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{4}{9}$, fordi $\frac{3}{5}$ er mer enn $\frac{1}{2}$.

Bezuk & Bieck (referert i B. Reys, Kim & Bay, 1999 s. 530) sier at å sammenligne brøk med referansepunkter[6] som 0, $\frac{1}{2}$ og 1 er et viktig ferdighet i slike tilfeller. Slik kan størrelsen på brøken avgjøres og dermed kunne avdekke om svaret til regnestykket er hensiktsmessig eller ikke. For å finne ut hvilken av brøkene $\frac{5}{8}$ og $\frac{4}{9}$ som er størst, brukes ofte den tradisjonelle teknikken som går ut på å gjøre om nevnerne til felles nevner og deretter sammenligne tellerne. Å ta i bruk referansepunkter kan gjøre estimeringsprosessen mer effektiv ved å for eksempel sammenligne brøkene til $\frac{1}{2}$. Slik kan en elev se at $\frac{5}{8}$ er større enn $\frac{1}{2}$, og $\frac{4}{9}$ er mindre enn $\frac{1}{2}$, så derfor må $\frac{5}{8}$ være størst (B. Reys et al., 1999, s. 530).

2.1.3 BRØK SOM DEL- HEL

Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) definerer tolkningen av brøk som *del-hel* som et sett av diskre objekter eller et sammenhengende objekt som er delt opp i like deler. Et eksempel på en slik tolkning kan være i arbeid med et rektangel som er delt opp i fire like deler, der kun tre deler er skravert. For å beskrive situasjonen defineres størrelsen på det skraverte område som $\frac{3}{4}$. Det vil si at i symbolet $\frac{a}{b}$, representerer *a* deler, og at *a* må sees i sammenheng med helheten som er delt opp i *b* like deler. En del trenger ikke nødvendigvis alltid å bety det samme som et objekt. En del kan i noen tilfeller bestå av mer enn et objekt. For eksempel kan en enhet bestå av 18 klinkekuler. Da vil $\frac{1}{6}$ bety 1 av 6 like deler, der en del består av 3 klinkekuler (Lamon, 2012, s. 145).

For å forstå tolkningen av brøk som del-hel, bør flere ideer ligge til grunn (Lamon, 2012, s. 145). Charalambos og Pitta-Pantazi (2007) poengterer at elevene må forstå at delene i helheten må være delt opp i like store deler. I tillegg er det nødvendig at elevene forstår at det er en sammenheng mellom delene og helheten. Det innebærer mellom annet å forstå at delene til sammen utgjør en hel, og at sammenhengen mellom delene og helheten er bevart uavhengig av størrelse, form og kontekst. Lamon (2012, s. 145) nevner flere store ideer, og en av disse går ut

[6] Omtalt som «benchmarks» på engelsk.

på at antall deler avhenger av hvor mange like deler som er formet. Det vil si at å øke antall deler, fører til at størrelsen på hver del reduseres. Dess færre antall deler, dess større er delene i hver del. For eksempel vil $\frac{1}{3}$ av en kake (færre deler) representere mer kake enn $\frac{1}{6}$ (flere deler) av samme kake.

En annen viktig ide som ligger til grunn for å forstå brøk som del-hel er, ifølge Lamon (2012, s. 145), å oppdage sammenhengen mellom *likeverdige brøker*. Mange ulike brøker kan vise til samme størrelse. Når to brøker representerer samme størrelse, sier vi at brøkene er likeverdige. Et eksempel på likeverdige brøker er $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Selv om brøkene består av ulike tellere og nevner, representerer de fortsatt det samme. I den sammenhengen kan «*unitizing*» brukes i arbeid med likeverdig brøker. «Unitizing» vil si å omgruppere antall enere til nye grupper. For eksempel kan en kasse med 24 brusflasker blir representert som 2 (pakker med 12) eller 4 (pakker med 6). «Unitizing» kan derfor relateres til likeverdige brøker, fordi det går ut på at samme enhet blir delt opp og representert med ulike grupper. Ideene legges så til grunn for å kunne sammenligne brøker og å oppdage sammenhengen mellom likeverdige brøker (Lamon, 2012, s. 145).

2.1.4 TOLKNINGER AV BRØK

Læring og undervisning av brøk har tradisjonelt vært et av de mest komplekse områdene innenfor matematikken. En medvirkende årsak kan være at brøk består av flere tolkninger enn bare del-hel sammenligninger (Lamon, 2012, s. 32-33). Kieren (referert i Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) foreslo at brøk hovedsakelig består av fem tolkninger[7]. Alle tolkningene henger sammen, og må beherskes dersom en elev skal ha et godt utviklet brøkbegrep. Det vil si at et ensidig fokus på kun en av tolkningene, vil gi mangelfull forståelse. Kieren kalte disse tolkningene for: del-hel, ratio, operator, kvotient og måling. Behr, Lesh, Post og Silver (referert i Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) tok senere utgangspunkt i ideene til Kieren, og videreutviklet et teoretisk rammeverk som knyttet de ulike tolkningene av brøk til operasjoner, ekvivalens og problemløsning i brøk. De hevdet på sin side at tolkningen av del-hel var å finne i alle de andre tolkningene. De unngikk derfor å identifisere del-hel som en femte tolkning, men så det heller som et fundament til de andre tolkningene av brøk.

[7] Disse tolkningene er tatt med i teorikapittelet for å kunne gi leseren bedre innsikt i hva det vil si å forstå brøk. Tolkningene av brøk vil ikke bli spesielt mye brukt for å analysere, men blir mer brukt som en overordnet teori for brøk. Jeg har derfor valgt å ikke gå noe spesielt i dybden i hver tolkning.

Lamon (2012, s. 31) definerer forhold, også omtalt som ratio, som en sammenligning av to mengder. For å gripe forestillingen om brøk som et forhold, må elevene forstå at det finnes to typer forhold som sammenligner målinger av samme type: del-hel sammenligning og del-del sammenligning. Del- hel sammenligninger er et forhold som sammenligner en del av et sett med hele settet. For eksempel kan sammenligningen representere forholdet mellom de som spiller tennis til hele klassen. Del-del sammenligninger er et forhold som sammenligner deler av et sett, med en annen del av et annet sett. Det kan for eksempel være elever som spiller tennis til de som ikke spiller tennis. Eleven bør deretter forstå at forholdet mellom to brøker endres sammen og ikke hver for seg. Det vil si at teller og nevner blir multiplisert med samme tall slik at forholdet fortsatt opprettholdes. Slik vil forholdet være konstant (Lamon, 2012).

Lamon (2012) sier videre at tolkningen av brøk som *operator* går ut at brøken beskriver en operasjon og kan derfor beskrives som en funksjon. Det vil si at brøken blir brukt for å forminske og forstørre, forkorte og utvide, øke og redusere eller multiplisere og dividere. Dersom en elev har forståelse for brøk som operator vil det innebære å forstå at $\frac{3}{4}$ kan bety 3 • [$\frac{1}{4}$ av en enhet] eller $\frac{1}{4}$ av [3 ganger en enhet]. For å tolke brøk som en operator er det viktig at eleven forstår at å dele enheten på 4 og multiplisere resultatet med 3, er det samme som å multiplisere enheten med $\frac{3}{4}$ (Lamon, 2012).

Hvilken som helst brøk kan bli sett på som et resultat av et divisjonsstykke. I slike tilfeller vil brøken bli sett på som en *kvotient* (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ifølge Kieren angir brøken $\frac{x}{y}$ en verdi som fremstilles når x er dividert med y, der x og y representerer et heltall (referert i Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Eksempelvis kan $\frac{3}{4}$ skrives på formen 3:4, eller $\frac{a}{b}$ = a:b. I regnestykket representerer a dividend, b divisor og $\frac{a}{b}$ kvotient. Charalambos & Pitta-Pantazi (2007) sier at det er nødvendig å forstå ideen om at telleren referer til antall deler, og nevneren til antall deler enheten består av, for å forstå brøk som kvotient.

Å tolke brøk som *måling* innebærer å identifisere en lengde, for eksempel en meter, og deretter bruke den gitte målegjenstanden for å avgjøre lengden på et objekt (Van de Walle et al., 2014, s. 311). I brøk handler det om å angi mengden som blir beskrevet gjennom brøken, og deretter sammenligne brøken med en annen gitt mengde (Lamon, 2012, s. 210). For eksempel kan det å tolke brøk som måling, brukes for å vise at $\frac{3}{4}$ er distansen 3 ($\frac{1}{4}$-deler) fra et gitt punkt eller at det er nødvendig med $\frac{3}{4}$ liter mel til en kakeoppskrift. Rasjonale tall er ofte assosiert med en tallinje, der brøkene ofte blir omtalt som punkt. Disse punktene er egentlig en måling av en distanse, men forutsetter at de rasjonale tallene er positive. For at en elev skal kunne forstå brøk som måling, må de forstå tettheten i de rasjonale tallene. Oppnår elevene en slik forståelse, vil de også lettere kunne oppdage at det finnes uendelig mange tall mellom to brøker. Slik kan en elev kunne sammenligne brøker lettere (Lamon, 2012, s. 209-210).

2.2 ESTIMERING

Estimering defineres av McIntosh et al. på følgende måte: «Estimation refers to producing an approximate answer to a computation, one that is «close enough» to allow a decision to be made. Estimation often involves the user in mental computation as a preliminary first step to forming an estimate» (1997, s. 322). Estimering handler etter denne definisjonen om å finne et tall som er tilnærmet det eksakte tallet. Det vil si at dersom en elev presenteres for regnestykket $\frac{16}{18} + \frac{4}{5}$ kan et riktig estimat gi svaret 2. Dette estimatet vil være svært nær det eksakte svaret, siden $\frac{16}{18}$ mangler $\frac{2}{18}$ fra en hel og $\frac{4}{5}$ mangler $\frac{1}{5}$, noe som tilsier at begge brøkene er svært nær 1. Siden estimeringsproblemer ikke bare vil ha et riktig svar blir, estimering omtalt som en åpen oppgave. Estimering kan derfor være et verktøy som kan tas i bruk for å undersøke elevenes variasjoner i valg av strategier (Dowker et al., 1996).

Estimering er en av de mest effektive måtene å utvikle begrepsforståelse i brøk på (Van de Walle et al., 2014). Denne sammenhengen understøttes av R. E. Reys og Yang (1998) som gikk ut på å undersøke sammenhengen mellom ferdigheter i utregning og tallforståelse blant 6.- og 8. klassinger i Taiwan. I studien ga de blant annet elevene i oppgave å estimere svaret til $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$, der kun 24 prosent svarte 2. De færreste var derfor i stand til å estimere summen på de to brøkene. Likevel var en høyere prosentdel (61 og 63 prosent) av elevene i stand til å *regne ut* summen. Å regne ut summen bestod av en prosess som gikk ut på å finne felles nevner av 13 og 8, og deretter legge til tellerne. Å estimere en sum av de to brøkene krevde ingen andre ferdigheter enn å avgjøre en omtrentlig størrelse av brøkene (R. E. Reys & Yang, 1998). Undersøkelsen viste derfor at tallforståelse og estimering kan ha en sammenheng. Dette funnet bekreftes også av Sowder, som omtaler estimering og mental utregning som: «[…] not only useful tools in everyday life but they can also lead to better number sense» (1992, s. 382).

Reys, Kim og Bay (1999, s. 532) sier at å estimere en sum vil være enklere enn å finne et eksakt svar, men bare dersom en begrepsforståelse er på plass. En slik begrepsmessig forståelse vil blant annet innebære å forstå størrelsen på en brøk og hvordan brøken kan relateres til benchmarks som 0, $\frac{1}{2}$ og 1. Å ha en slik forståelse kan gi eleven en mental modell som kan visualisere brøken en tallinje, som deretter kan representere forholdet mellom teller og nevner.

Sowder (1992) deler estimering opp i tre ulike kategorier[8]: numerisk, måling og utregning. I numerisk estimering angis et tall på en mengde, som for eksempel mengden på antall erter i en krukke eller antall tilskuere på en fotballkamp. En strategi som kan tas i bruk for slik numerisk estimering er å telle en liten oversiktlig mengde, deretter estimere antall seksjoner og ta i bruk produktet for å finne totalen. Sowder (1992) sier at både numerisk- og målingsestimering krever de samme ferdighetene. Mens numerisk estimering er ute etter et tall i en mengde, fokuserer målingsestimering på et estimat av ulike gjenstander som kan måles. Bright (referert i Sowder, 1992), på sin side, definerer målingsestimering som en prosess for å komme frem til en måling uten hjelp av måleverktøy. Han ser på dette som en mental prosess som ofte er knyttet til et visuelt referansepunkt. Det kan for eksempel innebære å estimere vekta på en pose med smågodt eller lengden av et rom. Målingsestimering kan gjøres uten aritmetiske operasjoner og er mer knyttet til kontekst enn det utregningsestimering er (referert i Sowder, 1992).

Denne studien undersøker først og fremst utregningsestimering, og dette begrepet vil heretter bli omtalt som estimering. Lemaire, Lechacheur og Farioli (2000, s. 141) forklarer estimering som det å finne et omtrentlig svar til et aritmetisk problem uten faktisk å regne ut et eksakt svar. Eksempelvis kan $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ = være omtrent $\frac{3}{4}$, fordi begge brøkene representerer et tall mellom $\frac{1}{2}$ og 1. Estimering kan benyttes i butikken for å avgjøre hvor mye varene koster totalt eller i andre situasjoner der det ikke er mulighet for å fastslå presise tall og uten at kalkulator kan bli tatt i bruk som et hjelpemiddel. Lemaire et al. (2000, s. 141) fremhever estimering som en viktig del av den matematiske kognisjonen. Det vil si at en elev sin prestasjon i estimering sier noe om elevens generelle forståelse for matematiske begrep, strategier og deres kognitive utvikling i matematikk.

[8] Egen oversettelse. På engelsk omtalt som *numerosity, measurement* og *computational.*

2.2.1 STRATEGIER I UTREGNINGSESTIMERING

En strategi defineres som en metode for å finne en løsning (Lemaire et al., 2000), og det er denne definisjonen som blir brukt i mitt forskningsprosjekt. For eksempel kan en strategi innebære at regnestykket $\frac{9}{10}+\frac{5}{6}$ estimeres til $1+1$, ved at brøkene blir rundet opp til nærmeste heltall. Hver enkelt strategi vil variere for hvert type problem, og antall strategier som blir identifisert er avhengig av fokuset på studien (Lemaire et al., 2000). Tidligere studier har undersøkt hvilke strategier som tas i bruk av elever på ulike nivå i matematikk (Dowker, 1992; Dowker et al., 1996; Hanson & Hogan, 2000; Lemaire et al., 2000). I disse studiene ble det identifisert flere strategier, som et resultat av at deltakerne bestod av elever i ulike aldersgrupper. I undersøkelsen til Lemaire et al. (2000) bestod deltakerne av elever i 10 årsalderen, og det er disse strategiene som blir ansett som mest relevant med tanke på at deltakerne i denne studien består av elever i samme aldersgruppe. Lemaire et al. (2000) viser til at det hovedsakelig var fire strategier elevene tok i bruk for å estimere et regnestykke med to tall. Strategiene ble omtalt som (a) *avrunding med delkomponering*, (b) *avrunding uten delkomponering,* (c) *kompensering* og (d) *avkorting*[9].

Den først nevnte strategien gikk ut på at hundrere, tiere og enere fortløpende ble regnet ut. Eksempelvis ville bruk av strategien i regnestykket 257+339 føre til dekomponeringen: 200+300+60+40 (Lemaire et al., 2000). I brøk kan det innebære at en elev deler opp brøkene $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$ slik at eleven arbeider med vennligere brøk som for eksempel $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{2}+\frac{2}{6})$. Det vil igjen si at dekomponeringen skjer på bakgrunn av at både $\frac{3}{4}$ og $\frac{5}{6}$ består av minst en halv, og deretter legges «resten» til. Den «resten» som er igjen av de to brøkene kan deretter estimeres til $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\approx\frac{1}{2}$. Dette på bakgrunn av at $\frac{2}{6}$ er nær en halv og $\frac{1}{4}$ er nær $\frac{1}{6}$, og til sammen kan brøkene representere $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Slik kan regnestykket $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$ dekomponeres til $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$.

Avrunding uten dekomponering kan forklares med at en av de to tallene, eller begge, blir avrundet til nærmeste tier eller hundrer, som for eksempel 257+339 til 260+340 (Lemaire et al., 2000). I arbeid med brøk kan det skje ved at brøken rundes opp eller ned til nærmeste 0, $\frac{1}{2}$ eller 1. For eksempel kan regnestykket $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ avrundes til $\frac{1}{2}$+1. Denne resonneringen går ut på at den ene brøken rundes opp og den andre ned, fordi begge brøkene er nær en hel og en halv.

[9] Egen oversettelse fra engelsk til norsk.

Ved bruk av kompensering la elevene til eller tok vekk en mengde til estimatet på bakgrunn av hva som ble gjort tidligere i avrundingen. I regnestykket 257+339 kunne elevene for eksempel runde opp til 300+350, og deretter subtrahere 50 eller 60 for å kompensere for å ha rundet begge tallene opp til større tall (Lemaire et al., 2000). Å kompensere i brøk kan innebære at en elev i første omgang avrunder $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ til 1+1, fordi begge er nær en hel. Siden de begge mangler $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{6}$ fra en hel, og $\frac{1}{4}$ er større enn $\frac{1}{6}$ kan, brøkene estimeres til omtrent $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, slik at (1+1) - $\frac{1}{2}$. På bakgrunn av resonneringen vil et estimat basert på kompensering gi svaret $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\approx 1\,\frac{1}{2}$.

Strategien avkorting ble tatt i bruk når elvene overså tiere og enere, som for eksempel 257+339 til 200+ 300 (Lemaire et al., 2000). Det vil si at en elev, i regning med brøk, runder av til nærmeste 0, $\frac{1}{2}$ eller 1 uten at eleven resonnerer videre om de andre tallene i regnestykket. Blant disse fire strategiene var strategien avkorting den mest effektive og raskeste, og kompensering den strategien som tok lengst tid å bruke. Kompensering ga likevel de mest korrekte estimatene, i motsetning til avrunding med dekomponering og avkorting som ga de minst korrekte estimatene (Lemaire et al., 2000).

2.3 KOGNITIVE PROSESSER I ARBEID MED ESTIMERING

For å avklare hvilke ferdigheter som er nødvendig i estimering, utviklet R. E. Reys et al. (1982) et teoretisk rammeverk, som sier noe om hvilke kognitive prosesser som tas i bruk i arbeid med estimering. Hensikten med studien var hovedsakelig å identifisere og beskrive prosessene som ble tatt i bruk av gode estimatorer. Slik kunne de karakterisere strategiene som ble tatt i bruk når elever estimerte. Studien formulerte tre prosesser på bakgrunn av resultater fra en estimeringstest som ble gitt til 1200 elever i ulik alder. Testen bestod av rene talloppgaver og oppgaver knyttet til kontekst med heltall og desimaltall, og inneholdt kun få elementer av brøk. Prosessene som ble identifisert på bakgrunn av disse oppgavene beskrives å være av høyt nivå, og omtales som *omformulering*, *oversetting* og *kompensering*[10] (R. E. Reys et al., 1982).

Reys et al. (1982) hevdet at gode estimatorer brukte ulike strategier innenfor de tre ulike prosessene. Gode estimatorer ble karakterisert som elever som, i tillegg til å inneha ferdigheter til å ta i bruk de tre ulike prosessene, også hadde god forståelse for plassverdi, grunnleggende

[10] Egen oversetting av reformulation, translation og compensation til norsk.

fakta om tall og aritmetiske egenskaper. Elevene var dermed gode i hoderegning og hadde god selvinnsikt i sine utregninger. I tillegg kunne de ta i bruk varierte strategier og vekslet mellom disse. Det bekrefter også Sowder, som formulerer elever som er gode til å estimere slik: «Good estimators are flexible in their thinking, and they use a variety of strategies. They demonstrate a deep understanding of numbers and operations, and they continually draw upon that understanding» (1992, s. 375).

I undersøkelsen til R. E. Reys et al. (1982) ble flere ulike strategier plassert under en og samme prosess. I tabellen (tabell 1) nedenfor blir strategiene som ble identifisert i undersøkelsen listet opp. Hvert eksempel er oversatt fra engelsk til norsk og deretter omgjort til eksempler med brøk, siden undersøkelsen bestod av strategier basert på heltall. De to strategiene under Utelating av tall[11] har ikke blitt omgjort til brøk, fordi det var vanskeligere å bytte ut heltallseksemplene med brøk. Under samme prosess ble også Endring av tall[12] plassert. I prosessen oversetting har R. E. Reys et al. (1982) plassert strategiene Ulik prosedyre og Forandre operasjonen til en likeverdig form. Endring av tall og Forandre operasjonen til en likeverdig form kan sees på som svært like og det ser ut til at det er lite som skiller strategiene fra hverandre. Jeg har derfor valgt å tolke det som at Endring av tall hovedsakelig baserer seg på endring av ett tall, som eleven anser som hensiktsmessig. Forandre operasjonen til en likeverdig form tolkes som en strategi som en elev tar i bruk i arbeid med å endre en brøk på bakgrunn av de brøkene som er en del av regnestykket. Hver av prosessene blir nøyere beskrevet i følgende tabell (tabell 1).

[11] Egen oversetting av Front-end use of numbers.
[12] Egen oversetting av Substitution of numbers.

<table>
<tr><th colspan="2">OMFORMULERING</th></tr>
<tr><td>Utelating av tall:
a) Bruk av et eller flere tall som er plassert til venstre.

Eks.

87 419
92 765
+ 90 045

De første sifrene legges sammen (sifrene på tusenplasssen), som gir summen 26. Svaret er derfor omtrent 260 000.

b) Avrunding til nærmeste multiplum av 5, 10 eller 100.

87 419   87 400
92 765   ≈   92 800
+ 90 045   90 000</td>
<td>Endring av tall:
a) Bruk av andre tall som er relativt nær det originale tallet.

Eks.
$$\frac{13}{5}$$
13 rundes ned til 12 og 5 opp til 6. 12 er et multiplum av 6, derfor er brøken omtrent lik en halv.

b) Bruk av ekvivalente eller omtrent ekvivalente former for tallet.

Eks.
$$\frac{3}{7}$$
Halvparten av nevneren 7 er 3,5. Derfor er brøken litt under en halv.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OVERSETTING</th></tr>
<tr><td>Ulik prosedyre, men likeverdig

Eks.
$$430 \bullet \frac{5}{9}$$
$\frac{5}{9}$ er omtrent $\frac{1}{2}$, fordi halvparten av nevneren er 4,5 og er dermed svært nær telleren. Dermed er $430 \bullet \frac{1}{2}$ ≈ 215.</td>
<td>Forandre operasjonen til en likeverdig form.

Eks.
$$\frac{8}{9} \bullet 5$$
$\frac{8}{9}$ er svært nær en hel, derfor må svaret være omtrent 5.</td></tr>
<tr><th colspan="2">KOMPENSERING</th></tr>
<tr><td>Kompensering underveis

Eks.
$$\frac{6}{8} + \frac{1}{5}$$
$\frac{6}{8}$ rundes opp til 1. Siden $\frac{1}{5}$ er lite, runder brøken ned til 0. Den ene brøken rundes litt opp og den andre litt ned, noe som tilsier at de gjør opp for hverandre og estimatet 1 vil være nær det eksakte svaret.</td>
<td>Kompensering til slutt

Eks.
$$\frac{7}{9} + \frac{2}{7}$$
$\frac{7}{9}$ mangler $\frac{2}{7}$ fra en hel. $\frac{2}{7}$ er omtrent lik $\frac{2}{9}$, derfor er svaret omtrent en hel. $\frac{1}{7}$ er større en $\frac{1}{9}$ fordi det vil være færre, men større biter. Derfor må svaret være litt over en hel.</td></tr>
</table>

Tabell 1. Kognitive prosesser i estimering (hentet fra R. E. Reys et al., 1982).

2.3.1 OMFORMULERING

Begrepet omformulering kan, ifølge R. E. Reys m. fl. (1982), karakteriseres som en prosess der elever endrer tallet til en mer hensiktsmessig form. Sagt på en annen måte, vil det si at numeriske data blir omformulert til en mer mentalt overkommelig form, samtidig som strukturen i problemet fortsatt er intakt. Bruk av denne strategien kan gjøre det lettere å operere med andre tall i det aktuelle problemet. Til tross for at avrunding er en åpenbar strategi i arbeid med å omformulere, ble også andre strategier observert. R. E. Reys m.fl. (1982) identifiserte ytterligere to strategier som de omtaler som Utelating av tall og Endring av tall. Ulike strategier av omformuleringer kan bestå av avkorting, avrunding eller erstatning til fordel for mer hensiktsmessige tall. I brøk kan det for eksempel bestå av å omformulere $\frac{3}{7}+\frac{7}{9}$ til $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, eller ved å bruke likeverdige (eller omtrent likeverdige) former av tall som for eksempel $\frac{1}{2}$ til 0,5.

2.3.2 OVERSETTING

Den kognitive prosessen oversetting kan ligne litt på omformulering og kan gi samme resultat av et regnestykke. Likevel skiller strategiene i oversetting seg ut fordi eleven er mer opptatt av tallene i problemet, enn strategier i omformulering. Det vil si at eleven har et mer metaperspektivt syn på problemet som skal løses, og er mindre bundet til hvert enkelt tall i regnestykket. Figur 1 viser et eksempel, hentet fra R. E. Reys et al. (1982), som skiller disse to ulike prosessene fra hverandre.

PROBLEM $\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{2}{5}$

Omformulering kan innebære $\rightarrow$ $\frac{4}{8}+\frac{6}{8}+\frac{2}{8}$

-Fordi $\frac{4}{8}$ er ekvivalent med $\frac{1}{2}$, deretter rundes $\frac{4}{6}$ litt opp og $\frac{2}{5}$ litt ned slik at alle får felles nevner.

Strategier fra to ulike prosesser resulterer $1\frac{1}{2}$

Oversetting kan innebære $\rightarrow$ $3 \bullet \frac{1}{2}$

-Fordi hver av de tre brøkene er nær en halv.

Figur 1: Et eksempel på forskjellen mellom omformulering og oversetting.

Prosessen går hovedsakelig ut på at eleven forandrer ligningen eller den matematiske strukturen av et problem til en mer mentalt hensiktsmessig form. Ifølge R. E. Reys et al. (1982) er oversetting en mer fleksibel prosess enn omformulering, og krever en mer avansert begrepskunnskap. Enkelte kan ta i bruk en slik prosess i arbeidet med å for eksempel resonnere seg frem til svaret på regnestykket $\frac{1}{9} \bullet 325$. Her kan brøken oversettes fra $\frac{1}{9}$ til $\frac{1}{10}$, og heltallet 325 ned til 300. På denne måten kan en elev omgjøre oppgaven til en enklere form slik at regnestykket gir $\frac{1}{10} \bullet 300$ med et estimat på 30.

2.3.3 KOMPENSERING

Kompensering beskrives som en justering av svaret eleven avgir på bakgrunn av omformuleringen eller oversettingen. Det vil si at forholdet mellom estimeringen og det eksakte svaret blir reflektert over, noe som kan gjøres underveis eller til slutt (R. E. Reys et al., 1982). Det kan understrekes med følgende eksempel i arbeid med regnestykket $\frac{1}{9} \bullet 325$: siden $\frac{1}{9}$ rundes *ned* til $\frac{1}{10}$, bør 325 rundes *opp* til 350, slik at estimatet blir nærmest mulig det eksakte svaret. Ifølge R. E. Reys et al. (1982), vil det å kompensere til slutt øke sjansen for at verdien av estimatet blir nærmere det eksakte svaret, særlig fordi strategien som blir tatt i bruk blir reflektert over. Elevenes bruk av sin intuitive forståelse for tall vil dermed være avgjørende for om kompenseringen gir et hensiktsmessig resultat. Reys et al. (1982) sier at gode estimatorer ofte tar i bruk kompensering, og at de identifiserer prosessen som nødvendig for å fullføre en vellykket estimering.

3.0 METODE – FREMGANGSMÅTE OG METODISKE VALG

Denne studien benytter seg av et kvalitativt forskningsdesign med deltakende observasjon som metode. I følgende kapittel begrunner jeg de valgene jeg har tatt underveis i prosjektet og beskriver hvilken metode jeg har brukt i forbindelse med innsamling, bearbeiding av data og til slutt analyse av datamaterialet. Først presenteres eget forskningsdesign og metode, og hvorfor metoden anses som hensiktsmessig for å kunne belyse studiens forskningsspørsmål. Deretter beskrives datainnsamlingsprosessen, hvor jeg blant annet går nærmere inn på hvordan jeg gikk fram under undersøkelsen og de valgene jeg tok underveis. Her vil jeg også begrunne valget av oppgaver elevene ble presentert for, slik at leseren kan få innsikt i de metodiske valgene jeg har gjort. Videre beskriver jeg hvordan datamaterialet ble analysert og studiens kvalitet. Avslutningsvis diskuteres de etiske forhåndsreglene som måtte tas hensyn til under innsamling av data.

3.1 EN KVALITATIV STUDIE

Kvalitativ forskning setter deltakere i fokus. Slik er det mulig å si noe om *hvordan* og *hvorfor* en prosess oppstår, i motsetning til kvalitativ forskning som forteller oss *hvor ofte*- og *hvilke* prosesser som oppstår innenfor et felt (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 227). Sagt på en annen måte, vil det si at forskeren benytter seg av en kvalitativ forskningsmetode for å gå i dybden innenfor et utvalgt felt (Nilssen, 2012). Slik kan materialet som analyseres også gi oss mer kunnskap innenfor et spesielt område. Ofte kan datamaterialet i kvalitativ forskning gi bredere variasjoner enn kvantitativ forskning, fordi det i større grad åpner for at empirien kan tale for seg selv (Postholm & Jacobsen, 2011). Bruken av denne metoden åpner ikke for at forskeren kan ta resultatene som absolutte sannheter, fordi de ikke er generaliserbare. Likevel kan funnene gi et bilde av hvordan den gitte situasjonen kan oppstå og dermed hjelpe oss til å forstå fenomenet bedre.

Formålet med studien er hovedsakelig å undersøke hvilke estimeringsstrategier elever velger seg i arbeid med brøk. I tillegg ønsker jeg å si noe om hvordan elevene tar i bruk strategiene og hvordan arbeidet kan gi muligheter for å utvikle forståelse for brøk. For å kunne si noe om dette, ser jeg det som et hensiktsmessig valg å gjennomføre observasjon med tre elevgrupper, bestående av to til tre elever i hver gruppe. Selve observasjonen ble gjennomført i et lukket grupperom, slik at elevene unngikk å bli forstyrret. Å observere elevenes arbeid ga også muligheten til å undersøke om elevene faktisk estimerte eller regnet ut et eksakt svar. Slik kunne jeg som forsker sikre meg bedre innsikt og dypere forståelse for deres strategier, enn jeg ville ha fått ved for eksempel bruk av spørreskjema. Jeg valgte på forhånd å fordele arbeidet med oppgaveheftet i to, og la en plan for at arbeidet skulle gjennomføres på to ulike dager. Slik kunne elevene arbeide med oppgavene i to korte arbeidsøkter, i stedet for en lang økt. Fordelingen av arbeidet over to dager skulle bidra til at de kunne være fokuserte og opplagte i store deler av observasjonen. I tillegg var det praktisk, fordi det passet bedre med skolens timeplan. Under observasjonen la jeg vekt på hvilke strategier elevene brukte og hvordan de begrunnet fremgangsmåten sin. Siden det innsamlede materialet er begrenset og nærheten mellom forsker og informant var stor, har jeg valgt å kalle masterprosjektet for en kvalitativ småskalastudie.

3.1.1 OBSERVASJON SOM KVALITATIV METODE

Observasjon blir ofte benyttet som en metode i kvalitativ forskning. Mange tar i bruk denne metoden fordi den undersøker om folk faktisk gjør det de sier, og gir dermed en bedre virkelighetssjekk (Cohen et al., 2011). Bruk av denne metoden innebærer at observatøren kan ta i bruk alle sansene, og kan skaffe seg så mange inntrykk av aktiviteten som mulig. Det er derfor viktig at observasjonen har et fokus eller et formål (Postholm & Jacobsen, 2011). I denne studien er observasjonen avgrenset til å gjelde elevers arbeid med brøkoppgaver, hvilke strategier de tar i bruk og hvordan de begrunner og tar i bruk strategiene.

Tjora (2012, s. 56) beskriver de ulike rollene en observatør kan ha i et forskningsarbeid. De ulike rollene omtaler han som synlig eller skjult, og aktiv eller passiv. Synlige observatører vil være interaktive, og beveger seg mellom å være enten passive eller aktive observatører. Selv om rollen som observatør kan beskrives, finnes det likevel ingen fasit på hvordan en deltakende observasjon blir utført fordi det kan utføres på mange ulike måter (Fangen, 2010).

Under datainnsamlingen var min rolle å være en aktiv og deltakende observatør. Det innebar at jeg var tilstede i samme rom som elevene og observerte deres arbeid, samtidig som jeg deltok i samtalen til elevene. Som forsker ønsket jeg å unngå og påvirke elevene i samtalene de hadde om oppgavesettet. I den grad jeg deltok i arbeidet, stilte jeg elevene spørsmål underveis, utfordret dem på bruk av strategi og ba dem om å utdype eget valg av strategi nærmere. Slik ønsket jeg å forsikre meg om at jeg hadde oppfattet det som ble observert riktig.

3.2 DATAINNSAMLINGSPROSESSEN

3.2.1 VALG AV SKOLE, TRINN OG DELTAKERE

Høsten 2016 tok jeg kontakt med en rektor på en byskole i Trondheim. Rektoren fikk informasjon om oppgaven jeg var i gang med, hvilken metode jeg hadde valgt å ta i bruk og hva jeg ville undersøke. Jeg fikk umiddelbart positiv respons og tok deretter kontakt med en av kontaktlærerne på 6.trinn. Læreren sendte ut informasjonsbrev, som jeg hadde skrevet på forhånd, til alle foreldre på det aktuelle trinnet (se vedlegg B). I tillegg til informasjon om det planlagte forskningsarbeidet, ba jeg også om samtykke til deltakelse i studien (se vedlegg A). Hele 18 foreldre responderte positivt og samtykket til at deres barn kunne delta.

I samråd med læreren ble totalt åtte elever valgt ut til å delta i undersøkelsen. Hensikten med et styrt utvalg var først og fremst for å gjøre analysearbeidet lettere i ettertid og for å sikre at det ble nok datamateriale. Elevenes kompetanse i matematikk var ikke i fokus i valget av informanter, men ble gjort på bakgrunn av to kriterier vi hadde fastsatt på forhånd. Det første kriteriet gikk ut på at elevene måtte være i stand til å kunne arbeide med matematikk sammen med andre, slik at mangel av samarbeidsevne ikke skulle påvirke funnene. Det andre kriteriet skulle sikre at elevene som deltok i noen grad var i stand til å dele tankene sine med andre medelever. Ettersom det ble tatt lydopptak, var det viktig at elevene var i stand til å sette ord på hvordan de gikk fram og tanker rundt oppgaven.

3.2.2 PILOTUNDERSØKELSE

I forkant av datainnsamlingen gjennomførte jeg imidlertid en pilotundersøkelse med en gruppe på tre elever. Hensikten med undersøkelsen var først og fremst å finne ut av hva jeg kunne fokusere på når det gjaldt estimering ved regning av brøk. Pilotundersøkelsen fokuserte hovedsakelig på hvilke estimeringsoppgaver som kunne benyttes, og jeg deltok jeg ikke i like stor grad med spørsmål som jeg gjorde i den senere studien. I pilotundersøkelsen tok jeg i bruk tekstoppgaver fra en engelsk lærebok, som ble beskrevet som gode estimeringsoppgaver, og som åpnet for mange strategier. Her gjorde jeg meg noen nyttige erfaringer som førte til at jeg endret fokuset for studien. Blant annet viste det seg at tekstoppgavene tok for mye tid for de elevene som deltok, fordi elevene måtte lese en del tekst for å forstå hva oppgaven omhandlet. Gruppen bestod av elever med ulike leseferdigheter, og de som leste sent ble hengende etter. Siden jeg ikke deltok i like stor grad med spørsmål til elevene, førte det til at de som var raskest til å lese fikk god tid til å regne ut et eksakt svar, fremfor å estimere. Jeg valgte derfor å gå bort fra at oppgavesettet kun skulle bestå av tekstoppgaver.

3.2.3 GJENNOMFØRING AV DATAINNSAMLING

Gjennomføringen foregikk på tidspunkter læreren mente passet best og der elevene mistet minst mulig undervisningstimer. Elevene gjennomførte hele oppgavesettet på to ulike dager og varigheten på hver observasjon varierte mellom 25 til 40 minutter. Det ble tatt lydopptak av elevene og alt av skriftlig materiale ble samlet inn. I første omgang ble elevene fordelt i grupper, der den ene gruppen bestod av to elever, mens de andre gruppene var det tre elever. Deretter ble en og en gruppe fulgt til grupperommet der observasjonen skulle foregå. Før jeg ga ut oppgaveheftet, ble elevene fortalt at de skulle være med i et prosjekt som skulle handle om estimering i brøkregning. I tillegg ble alle informert om at de hadde muligheten til å trekke seg fra deltakelsen når som helst, dersom de ønsket det.

I forkant av samtalen ble elevene spurt om hva estimering kunne bety. Jeg understreket også at jeg var interessert i hvordan de tenkte i hver oppgave. Slik ville jeg forsikre meg om at alle visste hva jeg forventet av hver enkelt. Under hele samtalen ble eleven fulgt opp med ulike spørsmål om blant annet hvordan de hadde tenkt, om de kunne forklare strategien sin med andre ord og med spørsmål som utfordret strategiene. Hensikten med å stille elevene spørsmål underveis i arbeidet, var å få en dypere innsikt i deres valg av strategi. I tillegg kunne jeg forsikre meg om at de faktisk gjorde det de sa.

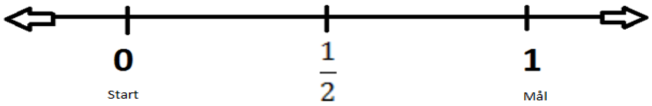
3.3 OPPGAVENE SOM BLE GITT TIL ELEVENE

Under observasjonen fikk elevene et oppgavesett de skulle arbeide med[13]. Oppgavesettet bestod av fire oppgaver, med flere deloppgaver. Første oppgave bestod av en tekstoppgave der elevene skulle plassere hvor langt hver enkelt person var mellom start og mål. Følgende figur (figur 2) viser hvordan oppgaven ble presentert for elevene.

[13] Se hele oppgavesettet samlet i vedlegg C.

Bjørn, Arne, Siri, Amanda og Torleif leker rødt lys. Brøkene under forteller hvor langt de allerede har beveget seg fra start. Kan du estimere hvor vennene skal plasseres på tallinjen for å vise omtrent hvor langt hver enkelt er fra start til mål?

Bjørn $\frac{3}{7}$ *Arne* $\frac{6}{10}$ *Siri* $\frac{5}{15}$ *Amanda* $\frac{7}{9}$ *Torleif* $\frac{1}{3}$



Figur 2: Oppgave 1 som ble gitt til elevene: Plassere brøk på tallinjen.

Denne oppgaven åpner med en kontekst og en tallinje som markerer 0, $\frac{1}{2}$ og 1. Jeg valgte å bruke denne oppgaven i oppgavesettet, for å se om elevene var i stand til å plassere og sortere flere brøker på en og samme tallinje. Ifølge Van de Walle et al. (2014, s. 324) egner mengdene 0, $\frac{1}{2}$ og 1 seg som referansepunkter[14] i arbeid med brøk, fordi punktene kan brukes for å sammenligne brøk som skal plasseres på tallinjen. Evnen til å sammenligne brøk ved å bruke referansepunkter, kan støtte elevene i arbeidet med å resonnere seg til hensiktsmessige estimat i arbeid med addisjon eller subtraksjon i brøk (Johanning, 2011). Under gjennomføringen ble elevene bedt om å peke på hvor hver enkelt brøk skulle plasseres, og spurt om hvordan de ulike brøkene kunne plasseres i forhold til hverandre. For eksempel er $\frac{1}{3}$ og $\frac{5}{15}$ likeverdige brøker og jeg ønsket blant annet undersøke om de oppdaget denne ideen. Det kunne tenkes at enkelte elever ser på brøken $\frac{5}{15}$ som større enn $\frac{1}{3}$, fordi brøk ofte kan bli sett på som heltall med en strek i mellom. Dersom dette er tilfelle, er det mulig at eleven overgeneraliserer sin kunnskap fra heltall og anser de to brøkene som to vidt forskjellige størrelser på tallinja, fordi $15 > 3$.

En tallinje er, ifølge Van de Walle et al. (2014), et eksempel på en lengdemodell som er svært viktig for å utvikle forståelse for brøk. Blant annet kan en lengdemodell hjelpe elever med å se på brøk som en mengde, i stedet for to heltall med en strek mellom. Det kan gi mulighet til å se relasjoner og likhetstrekk mellom heltall og brøk. I tillegg kan oppgaven gi mulighet til å knytte det opp mot det Kunnskapsløftet beskriver som et mål elevene skal kunne etter 7. årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2013a). Her står det blant annet at eleven skal kunne bruke og beskrive brøk, og plassere de ulike størrelsene på tallinja.

[14] Egen oversettelse av begrepet *benchmarks*.

Brøkene som skal plasseres på tallinja består stort sett av oddetallsnevnere. Jeg valgte oddetall og ikke partall fordi jeg ønsket å unngå at elevene delte opp tallinja i like store deler og telte seg frem til brøkens plassering. For eksempel er det lettere å dele opp en tallinje i åtte like deler, enn ni like deler. Slik kunne jeg lettere kontrollere om elevene faktisk estimerte.

Den andre oppgaven eleven ble tildelt bestod av en «*string*» (figur 3). Fosnot og Dolk (2002) omtaler en «string» som en rekke matematiske problemer strukturert i en serie. Utregningsoppgavene i en «string» er som oftest relatert til hverandre, og fremmer relasjoner mellom tall og utregninger. En slik type oppgave fokuserer på å utvikle enkelte strategier eller store ideer innen et matematisk område. Hensikten med oppgaverekken var å la elevene få starte med noe kjent, og deretter gå videre ved å sammenligne regnestykkene med hverandre.

A) $4 \bullet 1$	B) $4 \bullet \frac{1}{2}$	C) $4 \bullet \frac{8}{10}$	D) $4 \bullet \frac{6}{8}$	E) $2 \bullet \frac{6}{8}$	F) $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$

Figur 3: Oppgave 2 som ble gitt til elevene: En «string» med multiplikasjon i brøk.

De første deloppgavene består av regneoppgaver i multiplikasjon med brøk. Å multiplisere brøk er noe elevene har lite erfaring med, ifølge læreren. Tanken bak oppgaven var å undersøke om elevene kunne ta i bruk andre strategier enn de som ble tatt i bruk i addisjon med brøk, sett på bakgrunn av at de har lite erfaring med multiplikasjon med brøk. Oppstillingen av regnestykket er gjennomgående (heltall multiplisert med brøk), først og fremst for at det skulle være oversiktlig for elevene. Hver oppgave ble presentert en etter en, ved at jeg plasserte et hvitt ark over de gjenstående oppgavene. Slik ønsket jeg å forhindre forvirring rundt hvilken oppgave det var snakk om blant elevene. Oppgaven ble tildelt på et ark hvor oppgavene står ramset opp vertikalt, slik at elevene hadde god plass til å eventuelt skrive eller tegne en eller flere representasjoner ved siden av regnestykket. I denne fremstillingen presenteres oppgavene horisontalt for at figur 3, hvor jeg lister opp oppgavene, skal ta mindre plass i teksten. I ettertid har jeg i tillegg gitt hvert regnestykke sin egen bokstav, for at skal være lettere å referere til oppgavene i teksten.

I forkant av samtalen kunne det tenkes at elevene løste regnestykket $4 \bullet \frac{8}{10}$ ved å anse brøken $\frac{8}{10}$ som litt under en hel. På denne måten vil svaret bli nærmere 4. Regnestykket $4 \bullet \frac{6}{8}$ vil gi større svar, fordi nevneren er mindre. Dermed er helheten delt opp i større deler og eleven vil være nærmere en hel, fordi begge brøkene mangler to fra en hel. Regnestykke E viser tilbake til regnestykke D, der svaret blir halvparten så lite, fordi heltallet (til venstre) som multipliseres er redusert fra fire til to.

Helt til slutt har jeg valgt å trekke inn $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$. Dette regnestykket har ikke sammenheng med noen av de andre regnestykkene, og var ment som en utfordring til elevene. Hensikten med oppgaven var først og fremt å se hva elevene ville svare dersom regnestykket bestod av multiplikasjon av to brøk. Elevene har ikke jobbet med slike oppgaver tidligere, og jeg planla derfor å ikke legge noen spesiell vekt på denne deloppgaven.

Den tredje oppgaven elevene ble presentert for (figur 4), gikk ut på å avgjøre om et regnestykke var mer eller mindre enn 1 eller $\frac{1}{2}$. De fleste elevene på 6.trinn er kjent med begrepene mer eller mindre, så dette skulle derfor ikke være et hinder i oppgaveløsningen. Tanken bak oppgaven var at elevene skulle erfare at det å finne felles nevner ikke alltid er nødvendig for å addere brøk. Jeg håpet derfor at oppgaven skulle fremme en slik tankegang, siden de ikke ble bedt om å regne ut. I stedet for å regne ut, skulle elevene heller avgjøre om summen var mer eller mindre enn et gitt referansepunkt.

a) Er $\frac{1}{7} + \frac{4}{9}$ mer eller mindre enn $\frac{1}{2}$? Begrunn svaret.

b) Er $\frac{7}{8} + \frac{1}{10}$ mer eller mindre enn 1? Begrunn svaret.

c) Er $3 \bullet \frac{2}{5}$ mer eller mindre enn 1? Begrunn svaret.

Figur 4: Oppgave 3 som ble gitt til elevene: Addisjon og multiplikasjon i brøk.

I den siste oppgaven (figur 5) var formålet å estimere svar der deler av opplysningene om brøken var utelatt. De manglende opplysningene har jeg valgt å omtale som «tomme bokser». Hensikten med de tomme boksene var at elevene skulle fylle ut disse med informasjon, slik at utsagnene ble korrekt. På arkene elevene ble tildelt, var de tomme boksene formet som et kvadrat uten fyll, fordi de ble tegnet for hånd. I denne teksten vil de se slik ut: ■. Jeg valgte i tillegg å skrive «=» i oppgavearket til elevene, som er matematisk ukorrekt. Det vil si at jeg har tatt i bruk likhetstegnet ukorrekt, fordi den korrekte måten heller burde ha vært «≈». Dette ble gjort fordi elevene ikke hadde kjennskap til tegnet fra før av, og jeg ønsket ikke å forvirre dem.

$\frac{■}{7} + \frac{■}{9}$ = Omtrent 1 **$\frac{■}{■} + \frac{■}{■}$ = Omtrent $\frac{1}{2}$** **$2 \bullet \frac{■}{■}$ = Omtrent 1**

Figur 5: Oppgave 4 som ble gitt til elevene: Fyll ut de tomme boksene i regnestykket.

I den første deloppgaven er tellerne utelatt i et addisjonsstykke. Dersom jeg hadde brukt nevnere bestående av partall, hadde det muligens lagt opp til et mer eksakt svar. Det kunne ha åpnet for at elevene hadde tatt i bruk to likeverdige brøker av $\frac{1}{2}$. Å legge til brøker som er likeverdig med $\frac{1}{2}$ hadde ikke gitt galt svar, men det kan ha tatt bort fokuset fra å sammenligne brøkene. Da kan poenget med å estimere omtrentlige svar ved å reflektere over tellere og nevnere også ha falt bort.

Neste deloppgave er en åpen oppgave der alle boksene står tomme. Det vil si at alle opplysninger om brøkene som skal adderes er utelatt og kun det omtrentlige svaret $\frac{1}{2}$ er oppgitt. Grunnen til at jeg har valgt $\frac{1}{2}$ og ikke 1 (en hel) var for, i større grad, å få elevene til å måtte estimere. Slik kunne jeg unngå å få svar som $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Det kan tenkes at elevene oppgir $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ i stedet, og at de kan bli opptatt av at svaret skulle bli eksakt $\frac{1}{2}$. Denne deloppgaven kunne derfor ha oppgitt opplysning om en teller eller en nevner.

Den siste deloppgaven er den eneste som består av multiplikasjon i oppgaven. Jeg valgte denne oppgaven for å undersøke hvordan elevene reflekterte over regnestykker med brøk i multiplikasjon og om de var i stand til å ta i bruk strategier selv om de har hatt lite undervisning om nettopp dette. Jeg valgte derfor et relativt lavt heltall som brøken skulle multipliseres med. Her kan det tenkes at elevene ville bruke en additiv strategi og tenke addisjon fremfor multiplikasjon. For eksempel kunne det tenkes at en elev adderte to likeverdige brøker, som $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

3.4 BEARBEIDING OG ANALYSE AV DATAMATERIALET

3.4.1 TRANSKRIPSJON

Lydopptakene fra alle observasjoner av elevene ble i ettertid transkribert. Nilssen (2012) sier at i en prosess der overføring av menneskelige situasjoner blir til tekst, kan føre til at både mimikk, tonefall, gester og lignende forsvinner. I tillegg vil forskeren alltid ha sin forforståelse i bunnen og som kan påvirke hva som vektlegges og hvordan**.** I arbeidet med transkriberingen hadde jeg derfor fokus på å gi eksakt innhold av samtalene, slik at jeg kunne få tak i elevenes antatte forståelse og strategier. For at transkriberingen skal gi et eksakt innhold, ble all tekst skrevet på elevenes egen dialekt og uttale. Elevenes notater, som ble skrevet direkte på oppgavesettet, ble samlet inn og tatt bilde av der det var nødvendig. Selve transkriberingsprosessen ble gjort i løpet av kort tid etter innsamlingen av data, og var dermed friskt i minne, slik at det kunne overføres til skriftlig form så nøyaktig som mulig. I transkripsjonen omtaler jeg meg selv som «lærer», og ikke med eget navn, slik at det skal være et tydelig skille mellom hva jeg sier og hva hver enkelt elev sier. Hver samtale starter med linjenummerering 1 slik at jeg kunne ha bedre oversikt over varigheten av samtalen, i arbeid med analysen.

Under transkriberingen brukte jeg følgende tegnsetting/koder for å markere nøling og lignende, i tilfelle det skulle vise seg å ha betydning for analysen:

…	→	nøling under 3 sekunder
(…)	→	kort pause over 3 sekunder
-	→	etter: eleven/lærer blir avbrutt, før: eleven/lærer avbryter
Tekst i *kursiv*	→	legger trykk på ordet

3.4.2 ANALYSEPROSESSEN

Analyse av studiens datamateriale startet med en induktiv prosess. Det vil si at jeg gikk relativt åpent inn i datamaterialet med kun forskningsspørsmål som styrende instans. Likevel er det omtrent umulig å unngå at kvalitative data er fortolkende (Cohen et al., 2011). Tidligere erfaringer og teori knyttet til tematikken som utforskes, vil alltid være med å fokusere forskerens blikk (Postholm & Jacobsen, 2011, s. 53). Selv om min forforståelse kunne påvirke datamaterialet, ville forskningsspørsmålene likevel bestemme studiens fokus og styrte dermed analyseprosessen.

I første omgang bestod kodene hovedsakelig av *misoppfatninger* og *forståelse for brøk.* Jeg oppdaget senere at materialet måtte kodes i andre koder og i mindre deler, siden jeg hadde for lite informasjon til å kunne si noe om elevenes forståelse for brøk. Strauss & Corbin (referert i Postholm & Jacobsen, 2011, s. 104) kaller denne typen fasen for *åpen koding,* og beskriver det som en fase hvor forskeren kategoriserer og setter navn på situasjonene som oppstår. Kodene kan oppstå på bakgrunn av teori eller ved at forskeren utvikler egne koder.

I neste omgang ble transkripsjonen kodet i mindre deler og markert med ulike farger, og representerte strategier elevene benyttet seg av. Disse kodene utviklet jeg selv og bestod hovedsakelig av strategier som ble navngitt på bakgrunn av elevenes fremgangsmåte. Det videre arbeidet gikk deretter ut på å undersøke hvordan hver enkelt strategi ble tatt i bruk. Bruken av strategiene ble sammenlignet med strategiene som ble tatt i bruk av elevene som var gode til å estimere i undersøkelsen til R. E. Reys et al. (1982). I tillegg sammenlignet jeg bruken av strategiene med R. E. Reys et.al sine beskrivelser av prosesser og plasserte strategiene i enten omformulering, oversetting eller kompensering.

Utvalget bestod av elever som hadde lite erfaring med å estimere, og på bakgrunn av dette fant jeg underveis ut at jeg var nødt til å opprette kategorien *annet*, i tillegg til de valgte prosessene. Prosessene til R. E. Reys et al. (1982) er ment for elever som er gode til å estimere, og i undersøkelsen har jeg valgt elever ut i fra andre kriterier. I denne kategorien plasserte jeg derfor de strategiene jeg ikke kunne identifisere i de kognitive prosessene til R.E. Reys.

Ved å tolke og beskrive hver enkelt strategi som elevene tok i bruk, og hvordan de tok den i bruk, var det behov for å gå tilbake til teorien gjentatte ganger. Slik kontrollerte jeg om det jeg hadde sett stemte overens med litteraturen. I noen tilfeller var enkelte strategier mer utfordrende å plassere enn andre, og kan identifiseres i mer enn en av prosessene. På slutten av analysen har jeg valgt å sammenligne strategiene med funnene til Lemaire et al. (2000) og se på hvilke typer estimeringsstrategier elevene velger seg mer overordnet.

R. E. Reys et al. (1982) sin undersøkelse ble brukt av elever som var gode til å estimere. I tillegg tok de i bruk andre oppgaver med fokus på heltall og desimaltall. Oppgavene de tok i bruk i undersøkelsen inneholdte noen få elementer av brøk. Det gjorde at jeg ikke kunne bruke samme analysemetode som R. E. Reys et al. tok i bruk. Ettersom dette er en kvalitativ studie, har jeg i tillegg valgt å beskrive hver enkelt estimeringsstrategi med en eller flere eksempler på hvordan de blir tatt i bruk. De strategiene som blir beskrevet med flere utdrag inneholder derfor enkelte elementer som skiller seg ut.

3.5 STUDIENS KVALITET

Å forankre forskning i empiriske data kan ha flere usikkerhetsmomenter. Blant annet er lav grad av forskerinvolvering en viktig forutsetning for etterprøvbar kunnskap (Nilssen, 2012). Det vil si at dersom forskeren påvirker datamaterialet i større grad, kan det føre til at forskningsresultatet ikke kan anses som valid. Tidligere erfaringer fra egen utdanning i matematikkdidaktikk, i tillegg til litteratur jeg har lest knyttet til studiens tematikk, er bakgrunnskunnskap som jeg har tatt med meg i forskningsarbeidet. Det kan ha betydning for datainnsamlingen, ettersom jeg opptrer som observatør i eget forskningsarbeid. Det er derfor viktig at jeg ikke påvirker elevene med min forforståelse og at jeg er klar over egen forutinntatthet. Ifølge Cohen et al. (2011) er det umulig at undersøkelser blir 100 prosent valide, men gjennom å behandle datamaterialet hensiktsmessig og med passende behandling av data, kan forskningsprosessen strekkes mot idealet. Å gjennomføre en pilotundersøkelse kan være et hjelpemiddel for å forsikre meg om at dataene er gyldige og at elevene ikke blir påvirket av min forforståelse. Pilotundersøkelsen kan også bidra å sikre at det som blir observert er entydig og i tråd med studiens hensikt (Cohen et al., 2011, s. 210).

Med et relativt lite utvalg av elever som utgangspunkt, vil ikke funnene kunne generaliseres mer enn at funnene er gjeldende for de elevene jeg observerte. Jeg kan ikke si noe om de funnene jeg har gjort også gjelder for andre 6.klassinger, men kan likevel bidra med nye tolkninger og forhåpentligvis gi et større bilde av elevenes valg av strategier i arbeid med å estimere brøk. Tidligere forskning om estimeringsstrategier har vært begrenset til ulike områder og med andre oppgaver, som for eksempel fokus på strategier i arbeid med heltall. Mange av studiene har også blitt gjennomført i andre land (for eksempel B. J. Reys et al., 1991; R. E. Reys et al., 1991). Det er derfor mulig at de elevene som har blitt studert tidligere, bruker andre strategier eller strategier som kan ligne på de jeg finner i egen undersøkelse. I lys av annen forskning som er gjort på området, kan min forskning være et bidrag til nye tolkninger innen estimeringsstrategier i arbeid med multiplikasjon og addisjon med brøk på landsbasis.

3.6 ETISKE BETRAKTNINGER

Det vil være mange etiske betraktninger som må overveies før, underveis og etter at en forsker trer inn som kvalitativ forsker i et klasserom. Blant annet skulle det gjøres lydopptak av hele samtalen under observasjonen. Prosjektet ble derfor meldt inn til Personvernombudet for forskning ved Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD), som er et krav dersom en forsker skal behandle personopplysninger ved hjelp av datamaskinelt utstyr. Samtykkeskjemaet (vedlegg D) ble returnert til meg kort tid etter forespørselen. Med godkjenningen fra NSD var neste steg å sende informasjon- og samtykkebrev til foreldre (se vedlegg A). Brevet bestod av informasjon om studien, og at det var mulighet for å trekke seg fra deltakelse når som helst. I tillegg var det opplyst at jeg eller veileder kunne kontaktes dersom foresatte hadde noen spørsmål. Samtykke fra foreldrene ble gitt ved at de leverte inn skjemaet, der de hadde fått anledning til å godkjenne deltakelsen ved å krysse av for om de godkjente at barna deres kunne være med i studien.

I samråd med kontaktlærer ble brevet delt ut til omtrent 33 elever. Brevet ble delt ut til flere elever enn nødvendig, og skulle sikre at jeg hadde flere informanter å velge mellom. Det gjorde det også lettere for kontaktlærer og meg å sette sammen gruppene på bakgrunn av kriteriene som ble gitt.

Under utdelingen av informasjonsbrevene ble elevene samlet og informert muntlig. Elevene ble forklart hva som stod i brevet, og de kunne stille spørsmål direkte til meg eller kontaktlærer dersom de lurte på noe. Den samme informasjonsprosessen ble gjentatt i forkant av hver observasjon og at de kunne trekke seg fra deltakelse når som helst, om de ønsket det. For å sikre konfidensialitet, ble alle navn på det skriftlige materialet endret. Hver enkelt elev har sitt pseudonym, og gruppene består av Gro og Tor (gruppe 1), Nora, Pia og Tommy (gruppe 2) og Trude, Mats og Lucas (gruppe 3). I tillegg har jeg unngått å nevne navnet på skolen. Lydopptakene blir slettet i etterkant av innlevering av masteroppgaven og i henhold til NSD sine retningslinjer.

4.0 ANALYSE- ESTIMERINGSSTRATEGIER SOM TAS I BRUK

Analysekapittelet har som hensikt å belyse hvilke estimeringsstrategier elever tar i bruk i arbeid med addisjon og multiplikasjon med brøk, og hvordan elevene tar i bruk strategiene. Kapittelet er organisert etter de tre prosessene til R. E. Reys et al. (1982) i tabell 1, og funnene plasseres, der det er mulig, under en av disse prosessene. De funnene som ikke kan identifiseres med noen av prosessene, plasseres under kategorien *annet*. Hvert funn i undersøkelsen innledes med en kort beskrivelse, deretter et utdrag hentet fra transkripsjonen, og til slutt en grundigere analyse- og utforskning av hvordan elevene tar i bruk de strategiene de velger. Noen funn vil bestå av flere utdrag, fordi de skiller seg ut på enkelte områder, og det vil jeg forsøke å vise i analysen. Analysen tar utgangspunkt i transkripsjoner av lydopptakene som ble tatt under observasjonen, bilder av elevarbeidet og egne observasjonsnotater. På slutten av analysekapittelet oppsummeres de ulike strategiene som identifiseres i undersøkelsen. I tillegg vil jeg vurdere om det finnes noen likhetstrekk med strategier som ble funnet i Lemaire et al. (2000) sin undersøkelse.

4.1 OMFORMULERING

Som nevnt i teorikapittelet, går den kognitive prosessen omformulering ut på å gjøre tallene til en mer hensiktsmessig form. Slik vil det mentalt være lettere for eleven å håndtere tallene i regnestykket. Selv om tallene i regnestykket blir forandret, er strukturen i problemet fortsatt intakt. I studien observerte jeg at elevene omformulerte ved å bruke strategiene *Brøk til desimaltall* og *Øke likt i teller og nevner*.

4.1.1 BRØK TIL DESIMALTALL

Først vil jeg presentere en strategi som jeg har valgt å kalle Brøk til desimaltall. Det er en strategi som går ut på å bruke en fremgangsmåte der tallene i regnestykket blir forenklet og omformuleres til noe som allerede er kjent. Strategien plasseres under omformulering, fordi det kan relateres til strategien Utbytting av tall (se tabell 1), som finnes i R. E. Reys et al. (1982) sin undersøkelse. Brøk til desimaltall har likhetstrekk med Utbytting av tall, fordi begge strategiene går ut på å bruke omtrent likeverdige former av tall som inngår i problemet. Utdraget som kommer er et typisk eksempel på hvordan strategien ble tatt i bruk.

4. Lærer:	Her ser e at du Gro har plassert tre sjuendedele ($\frac{3}{7}$) litt over en halv på tallinjen. Stemme det?
5. Gro:	Ja, fordi det er større enn en todel ($\frac{1}{2}$). Tallene er større liksom (…), eller… Æ e litt usikker på brøk altså.
6. Tor:	Æ har plassert den ($\frac{3}{7}$) her æ (peker på et punkt svært nære en halv).
7. Tor:	Grunnen til det er fordi at viss man tar det i desimaltall, så blir halvparten (av 7) 3,5. Så den er ganske nærme en halv, men ikke over heller.

Strategien gikk hovedsakelig ut på at eleven, i arbeid med brøkregning, benyttet heltallstenking. Her observerte jeg, ved flere anledninger, at eleven tok i bruk den samme strategi i andre oppgaver. I utdraget innleder Gro i linje 5 med en egen strategi for å plassere brøken $\frac{3}{7}$ på tallinja, før Tor i linje 6-7 fortsetter videre med strategien Brøk til desimaltall.

I elevenes samtale om å plassere $\frac{3}{7}$ på tallinja, velger Gro først å ta i bruk en overføring av regler for heltall. Slik kunne hun si noe om hvor mye brøken representerer. Hun ser enkeltvis på tallene over og under brøkstreken, og betrakter tallene som positive heltall. I utsagnet på linje 5 sier Gro at «[…] det ($\frac{3}{7}$) er større enn en todel ($\frac{1}{2}$)», og kan vise til ideen om at dersom telleren og nevneren er større, er brøken større. Argumentet hennes går ut på at brøken kan betraktes som større, fordi tre er større enn en og sju er større enn to. Det vil si at tallene over og under brøkstreken sees som større, og derfor må $\frac{3}{7}$ være større enn $\frac{1}{2}$. Selv om resonnementet stemmer, dersom tallene over og under brøkstreken hadde vært betraktet som positive heltall, er ikke argumentet matematisk gyldig i brøk.

Etter Gros innspill, bryter Tor inn og spiller videre på hennes resonnement. Han går veien om en halv for å kunne si noe om hvor $\frac{3}{7}$ kan plasseres på tallinja. Det vil si at han tar utgangspunkt i hva som er halvparten av telleren, for å vite hva som representerer halvparten i en brøk med sju i nevneren. Selv om Tor og Gro arbeider ut i fra samme utgangspunkt, tar Tor i bruk andre grep for å argumentere hvor stor brøken er.

I motsetning til Gro, betrakter ikke Tor $\frac{3}{7}$ som to separate heltall, men ser på forholdet mellom nevner og teller og hvordan halvparten av brøken kan representeres. Tor tar derfor utgangspunkt i hvor mange deler helheten er delt opp i, det vil si nevneren, før han videre deler nevneren på to. Ifølge Tor vil halvparten av nevneren 7 resultere i 3,5. Tor ender da opp med brøken $\frac{3,5}{7}$, uten at det kommer direkte til uttrykk muntlig. Resonnementet hans viser derfor at brøken $\frac{3}{7}$ er svært nære en halv, men ikke over, siden det mangler «en halv» i telleren for at brøken skal være nøyaktig halvparten.

Utdraget viser også at Tor velger å ha fokus på et av referansepunktene på tallinja for å avgjøre om brøken skal plasseres før, nøyaktig på samme sted eller over en halv på tallinja. Han viser forståelse for å gå veien om en halv, ved å bestemme om brøken er over eller under en halv på tallinja. Her kommer hans forståelse for at desimaltallet 3,5 er halvparten av sju godt med. Gro derimot, uttrykker i linje 5 at hun er usikker på brøk generelt, og hun utdyper heller ikke strategien videre. Det er derfor vanskelig å si om Gro oppdager at hun har valgt feil fremgangsmåte.

Neste utdrag ble tatt i bruk av gruppe 2. Denne gruppen arbeidet med regnestykket $4 \bullet \frac{8}{10}$, og tok, i likhet med Gro og Tor, i bruk strategien Brøk til desimaltall. Her estimerte Nora et svar på litt over tre. Følgende utdrag er fremhevet, fordi det skiller seg ut i form av at elevene arbeider med å løse et regnestykke, og ikke plassering av *en* brøk på en tallinje. Strategien ser derfor ut til å kunne bli tatt i bruk i andre oppgaver og med flere opplysninger enn bare en brøk.

64. Nora:	ehm… de e jo på en måte fire femtedela da.
65. Pia:	Ehm… æ skjønt ikke æ.
66. Nora:	Kanskje nesten en? (…) nei, det kan de ikke. De e ikkj nesten en, de må værra nesten fire. Litt over tre kanskje?
67. Pia:	hm (…).
68. Nora:	De e jo på en måte null komma åtte da (peker på brøken i regnestykket).

I linje 64 svarer Nora på lærerens spørsmål om omtrent hvor mye $4 \bullet \frac{8}{10}$ er til sammen. Her svarer hun med å si at «[…] de e jo på på en måte fire femtedela da». Om hun mener at $4 \bullet \frac{8}{10}$ er det samme som $\frac{4}{5}$ eller om $\frac{8}{10}$ er det samme som $\frac{4}{5}$, blir ikke kommentert ytterligere. Det kan likevel tenkes at hun sikter til brøken i regnestykket, ettersom $\frac{4}{5}$ og $\frac{8}{10}$ er likeverdige brøker. Pia er lite deltakende i samtalen, og ser ut til å spille liten rolle for Nora sitt valg av strategi. Eleven uttrykker ikke noe spesielt, annet enn at hun forstår lite av Nora sine utsagn.

Fremgangsmåten som Nora tar i bruk, blir ikke utdypet videre. Det kan tenkes at eleven først og fremst har forkortet brøken $\frac{8}{10}$ til $\frac{4}{5}$, da hun nevner denne brøken i begynnelsen av arbeidet. Deretter ser det ut til at eleven har rundet $\frac{8}{10}$ opp til 1, noe som stemmer med svarene hun avgir i linje 66. Det kan se ut som om hun har ignorert tallet 4, som står først i regnestykket, siden hun avgir et estimert svar på nesten 1 i begynnelsen på linje 66. Videre forandrer hun svaret sitt ved å si at det ikke kan være 1, men at det *må* være et sted mellom 3 og 4. Det kan skyldes at hun har rettet fokus på hele regnestykket, inkludert fire. Her kan hun ha tenkt at $\frac{8}{10}$ kan forkortes til $\frac{4}{5}$, og deretter estimeres til omtrent en, og at brøken i tillegg skal multipliseres med fire. Om det er slik hun kan ha tenkt kommer ikke tydelig frem, men hun oppdager uansett at svaret hun avgir ikke stemmer med det første, da hun i linje 66 resonnerer videre og sier «[…] nei, det kan de ikke». Eleven ender dermed til slutt med et estimat på litt over 3.

I samtalen knytter eleven Brøk til desimaltall for å understreke resonnementet om regnestykket $4 \bullet \frac{8}{10}$. Hun omtaler $\frac{8}{10}$ som «null komma åtte», uten at det bli uttrykt muntlig, men som hun fysisk peker på under observasjonen. I etterkant av observasjonen, fortalte kontaktlæreren at elevene nylig hadde arbeidet med avrunding av desimaltall. Det kan være årsaken til at eleven velger å gå veien om å omgjøre Brøk til desimaltall. I tillegg er helheten delt opp i 10 deler, og det kan være årsaken til at eleven tar i bruk erfaringer fra desimaltall der 1 er delt opp i 10 tiendedeler. Slik argumenterer hun også for at $4 \bullet \frac{8}{10}$ = litt over tre og nesten fire, fordi $4 \bullet \frac{8}{10}$ er det samme som 4 • 0,8.

I samme gruppe ønsker Tommy, i likhet med Tor og Nora, å ta i Brøk til desimaltall. I motsetning til Tor, som tar i bruk strategien i arbeid med å plassere en brøk på en tallinje og Nora som arbeider med regnestykke, ønsker Tommy å ta i bruk strategien for å fylle ut de tomme boksene i regnestykket $\frac{\blacksquare}{\blacksquare} + \frac{\blacksquare}{\blacksquare} \approx \frac{1}{2}$:

84. Tommy:	Går de an å skriv for eksempel et tall åsså komma over?
85. Lærer:	Nei.
86. Tommy:	Okei da.
87. Lærer:	Ka hadd du lyst til å skriv da?
88. Tommy:	To komma fem tiendedela.

I motsetning til Tor og Trude, som tar i bruk strategien som et hjelpemiddel på veien mot et estimat, ønsker Tommy å bruke desimal i brøk som et *svar* på oppgaven. Oppgaven er tilsynelatende en åpen oppgave som åpner for flere svar, og som Tommy ser ut til å ville benytte seg av, men som han ikke får helt til. Eleven innleder samtalen med spørsmålet: «Går det an å skriv […]?». Tommy ønsker først, etter å ha sett oppgaven, å skrive $\frac{2,5}{10}$ som svar, fordi det kunne gi regnestykket $\frac{2,5}{10} + \frac{2,5}{10} = \frac{1}{2}$. Tommy ser ut til å henge seg opp i at svaret skal bli nøyaktig en halv og ignorerer at det er godtatt å estimere. Det vil si at Brøk til desimaltall ikke alltid vil være like hensiktsmessig, og at det først og fremst bør fungere som et hjelpemiddel på vei mot et estimat.

4.1.2 ØKE LIKT I TELLER OG NEVNER

Den neste strategien som ble identifisert i undersøkelsen, har jeg valgt å kalle Øke likt i teller og nevner. Denne strategien ble tatt i bruk av elevene Gro og Tor. Her brukte elevene en strategi som går ut på å omformulere brøken til et vennligere tall, det vil si et tall som er relativt nær det originale tallet. Denne strategien kan også, sammenlignet med strategien Brøk til desimaltall, relateres til Utbytting av tall (tabell 1). I følgende utdrag starter Gro å ta i bruk strategien i arbeidet med å plassere brøken $\frac{7}{9}$, hvor Tor forklarer den nærmere.

42. Lærer:	E ser at du peker på et sted mellom en halv og en, Gro.
43. Gro:	Ja, men det e ikke akkurat en halv da.
44. Lærer:	Så det du sier er at den er nærmere en hel enn en halv?
45. Gro:	Ja, fordi det her e en hel åsså da e d en sjuer og det e veldig nærme en hel. Den e liksom ti og da kan det her være åtte (…).
46. Tor:	E trur at det ho meine e at dersom man rykke begge to et hakk opp så hadd det blitt åtte tiendedel i stedet. Da e det lettere å plassere brøken.
47. Lærer:	Ok. Og da er det den samme brøken da?
48. Begge:	…nei.
49. Tor:	men det blir *omtrent.*

I utdraget omformulerer Gro brøken $\frac{7}{9}$ til, ifølge Tor, en mer hensiktsmessig form. I linje 45 sammenligner Gro brøken opp mot 1 og $\frac{1}{2}$, som er to av tre referansepunkter på tallinjen. Hun estimerer derfor at brøken kan plasseres et sted mellom en halv og en hel. Eleven sier videre at brøken kan omformuleres ved at det legges 1 mer i både teller og nevner. På denne måten omformuleres nevneren fra ni til ti, og telleren fra sju til åtte. Det resulterer i brøken $\frac{8}{10}$ som, ifølge Tor, er lettere å plassere på tallinjen (linje 46), enn $\frac{7}{9}$. Som en følge av dette mener Tor at brøken blir omformulert til en mer hensiktsmessig form.

Det kan se ut til at Gro, sammenlignet med Nora, tar i bruk regler i desimaltall, der 1 består av 10 tiendedeler. Årsaken, uten at det blir kommentert i utdraget, kan være at det er lettere for eleven å operere med en brøk som er delt opp i 10 deler enn i 9 deler. Forklaringen Gro avgir i linje 45 er uklar, og eleven bruker et hverdagslig språk for å forklare tankegangen sin. Her sier hun «den e liksom ti og da kan det her være åtte […]». Eleven behandler tallene som om at de kan forvandles slik det passer seg, men et omtrentlig forhold blir fortsatt bevart. Om det er slik hun behandler brøk generelt kommer ikke frem tydelig, men at eleven har fått beskjed om å estimere kan være en medvirkende faktor til at hun bruker en slik fremgangsmåte. Læreren stiller deretter spørsmål om $\frac{7}{9}$ og $\frac{8}{10}$ representerer det samme, og etter litt nøling svarer både Tor og Gro et bestemt nei. Tor følger opp spørsmålet ved å svare, «men det blir *omtrent*». Han legger trykk på ordet omtrent, fordi det var slik estimering ble definert i forkant av samtalen. Om valget av strategi var bevisst eller ikke, kommer ikke tydelig til syne under samtalen. Strategien fungerer fordi $\frac{7 \bullet 10}{9 \bullet 10} = \frac{70}{90}$ og $\frac{8 \bullet 9}{10 \bullet 9} = \frac{72}{90}$. Det vil si at det er så lite som $\frac{2}{90}$ som skiller brøkene $\frac{7}{9}$ og $\frac{8}{10}$ fra hverandre og det omtrentlige forholdet blir fortsatt bevart.

I linje 44 velger læreren å avbryte Gro med noe som kan se ut til å være et veiledende spørsmål. Læreren stiller spørsmål om $\frac{7}{9}$ er nærmere en hel enn en halv, noe Gro ikke har nevnt noe om tidligere. Dette kan ha vært avgjørende for hvordan Gro tar i bruk strategien videre. Tidligere har Gro kun pekt på og uttalt at brøken ikke var nøyaktig en halv, men hun har ikke nevnt noe om at den er nærmere en hel enn en halv. Likevel er eleven, med hjelp fra Tor, i stand til å sammenligne brøken opp mot 1 ved å si at «[…] og det e veldig nærme en», men ikke hvorfor brøken befinner seg et sted mellom $\frac{1}{2}$ og 1.

4.2 OVERSETTING

I teorikapittelet ble den kognitive prosessen oversetting presentert. Prosessen går hovedsakelig ut på at den matematiske strukturen av et problem ble forandret til en mer mentalt hensiktsmessig form. Det vil si at deler av eller hele strukturen i problemet blir forandret, slik at det vil være lettere for eleven å finne frem til en løsning. Under strategien, som jeg har valgt å kalle *Endre til et vennligere problem*, runder eleven brøkene opp i et regnestykke, noe som fører til at strukturen i problemet blir endret. Det er årsaken til at jeg har valgt å plassere strategien under prosessen oversetting, og følgende utdrag er et typisk eksempel på denne strategien.

4.2.1 ENDRE TIL ET VENNLIGERE PROBLEM

I samtalen om regnestykket $\frac{7}{8}+\frac{1}{10}$ var mer eller mindre enn 1, benyttet Nora seg av strategien Endre til et vennligere problem. Strategien skiller seg ut i den grad at eleven endrer den ene brøken på bakgrunn av den andre brøken, som er en del av regnestykket. Dermed endrer Nora den matematiske strukturen i problemet fra $\frac{7}{8}+\frac{1}{10}$ til $\frac{7}{8}+$ litt under $\frac{1}{8}$ slik at hun får regnestykket $\frac{8}{10}+\frac{1}{10}$. Endring av både brøk og den matematiske strukturen er kjennetegn på denne prosessen og følgende utdrag er et typisk eksempel på denne strategien.

55. Nora:	Æ tenke sånn at en tiendedel e mindre enn en åttendedel, så da plusse man på liksom under ein åttendedel pluss sju åttendedel liksom… og da blir de ikke åtte åttendedela, men… eh litt mindre.
56. Lærer:	Så de du sie e at den e veldig nære ein, men ikkje akkurat?
57. Nora:	Ja, og de samme e de på den (peker på $\frac{1}{10}$). Ein åttendedel e jo liksom litt større, så da blir de liksom litt opp te ni tiendedela om man plusse på den… ja, litt rundt der.
58. Lærer:	Åja, du meine viss man regne litt den andre veien?
59. Nora:	Ja.

I utdraget starter eleven med å sammenligne nevnerne for å avgjøre hvilken brøk som er minst. Nora starter først med å sammenligne brøkene som om de hadde bestått av 1 i teller, slik at hun ser på brøkene $\frac{1}{10}$ og $\frac{1}{8}$. Her uttrykker eleven at siden $\frac{1}{10}$ er mindre enn $\frac{1}{8}$, vil det resultere i at hun resonnerer et svar på bakgrunn av $\frac{7}{8}+$ noe mindre enn $\frac{1}{8}$, og derfor må svaret bli litt mindre enn en hel. Det vil si at hun endrer utgangspunktet for regnestykket til en mer hensiktsmessig form for å resonnere seg til et svar på regnestykket.

I utsagnet «[…] da blir de liksom litt opp te ni tiendedela om man plusse på den… […]» hvor hun henviser til brøken med ti som nevner. Her ser det ut til at Nora prøver å uttrykke hva svaret resulteres i, dersom hun snur om på regnestykket. Det vil si at hun tar utgangspunkt i at $\frac{7}{8}$ legges til $\frac{1}{10}$. Her ser det ut til at hun har endret det matematiske problemet slik at begge brøkene har ti i telleren. Det gir Nora regnestykket $\frac{8}{10}+\frac{1}{10}$, som er lettere å regne med. Svaret blir $\frac{9}{10}$, som hun refererer som «[…] litt opp te ni tiendedela […]», og som bekrefter utsagnet hennes om at det vil være litt mindre enn en hel.

Å starte med 1 i telleren kan gi et tydeligere bilde på hvilken brøk som gir størst del. Slik vil fokuset bestå av å sammenligne nevnerne. I tillegg vil det å legge til teller og nevner, i enkelte tilfeller forenkle regneprosessen og gjøre det lettere å avgjøre hvor mye brøkene er til sammen. I utdraget viser Nora forståelse for at dersom nevneren er større, vil det føre til at delene blir mindre, og hun tar i bruk denne relative tenkingen i estimeringsarbeidet.

4.3 KOMPENSERING

I teorikapittelet ble den kognitive prosessen kompensering beskrevet som en prosess hvor eleven foretar en justering, som et resultat av omformuleringen eller oversettingen. Her reflekterer eleven over estimatet han kom fram til og det eksakte svaret. I undersøkelsen brukte elevene enten et kjent regnestykke som utgangspunkt for estimering, eller å sammenligne en eller flere brøker til et referansepunkt hvor eleven reflekterer og argumenterer over estimatet underveis, med støtte i representasjon. Å *Ta utgangspunkt i et kjent regnestykke* og *Kompensering underveis* er eksempler på strategier som blir tatt i bruk i denne prosessen.

4.3.1 TA UTGANGSPUNKT I ET KJENT REGNESTYKKE

Strategien Utgangspunkt i et kjent regnestykke har fått sitt navn på bakgrunn av at eleven begrunner en løsning på et problem ved å utvide problemet fra noe som er kjent, og deretter knytte det opp til noe som ikke er fullt så kjent. Som et eksempel på bruken av denne strategien, trekker jeg frem et utdrag fra Tor og måten han resonnerte seg frem til løsningen av regnestykket $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$. Strategien skiller seg ut fra de andre strategiene ved at eleven reflekterer over regnestykker som er i nærheten av det opprinnelige problemet, og sammenligner disse med svaret. Slik finner han ut om svaret han avgir er hensiktsmessig eller ikke.

165. Tor:	Eller æ tenke at det ikke kan bli en halv… fordi… en gange en, eller en gange en halv e en halv… men ja, viss du ikke har en halv, så kan kan'ke en gange en halv bli en halv.
166. Lærer:	-så det må bli mindre enn det fordi du veit at en halv gange en halv e en halv?
167. Tor:	Ja, så æ tænke at det må bli en fjerdedel da.

168. Lærer:	Okei, og koffor tenke du de?
169. Tor:	Jo, æ sa jo de. En halv gange en halv e halv, så det kan ikke bli en halv.
170. Lærer:	Men koffor akkurat en fjerdedel da, og ikkje-
171. Tor:	-jo, fordi halvparten av en halv e en fjerdedel…eller to fjerdedela da.

Tor tar i bruk et kjent regnestykke for å resonnere seg frem til svaret. Utdarget viser at eleven vet at $1 \cdot \frac{1}{2}$ er like mye som $\frac{1}{2}$, og siden halvparten av 1 er en halv, gir det ikke mening at svaret på $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$ blir like mye eller mer enn en halv. Det viser at forholdet mellom estimeringen og det eksakte svaret blir reflektert over underveis. Tor resonnerer seg derfor fram til at svaret må bli mindre enn en $\frac{1}{2}$, nærmere bestemt $\frac{1}{4}$, på bakgrunn av at halvparten av en halv e en fjerdedel.

I utdraget ser det ut til at Tor trekker inn likeverdige brøker som et hjelpemiddel på vei til svaret. På slutten av utdraget (linje 171), gir eleven uttrykk for at «halvparten av en halv er en fjerdedel…» før han legger til «[…] eller to fjerdedela da». Det kan se ut til å være en glipp fra eleven sin side, og at han egentlig refererer tilbake til $\frac{1}{4}$. Det kan også være at han korrigerte ordet halvparten og at han i stedet mente å si $\frac{2}{4}$. Det vil si at han anser $\frac{2}{4}$ og $\frac{1}{2}$ som likeverdige brøker.

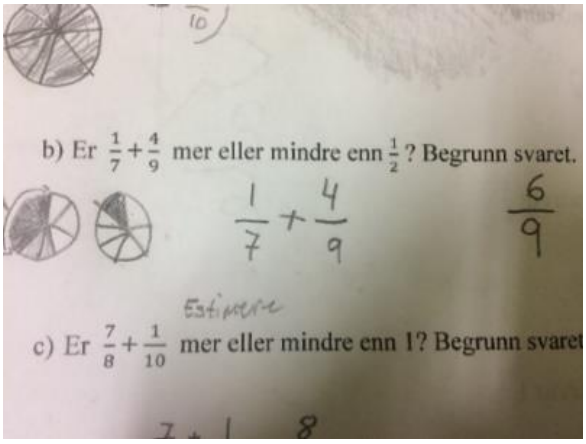
4.3.2 KOMPENSERING UNDERVEIS

I arbeid med strategien Kompensering underveis avgjør eleven hvor mye to brøker blir til sammen ved å sammenligne nevnerne og tellerne. Strategien plasseres under kompensering, fordi eleven justerer tallene underveis slik at estimatet blir mest mulig nær svaret. Her tok eleven i bruk representasjon, en sirkulær representasjon (figur 6), mens andre brukte hendene for å forsterke hvor langt unna summen er en hel. I arbeidet med $\frac{1}{7} + \frac{4}{9}$ bruker Trude strategien Kompensering underveis for å avgjøre om summen er mer eller mindre enn $\frac{1}{2}$.

118. Trude:	De æ tenkt va da at æ… tegna på en måte rundinga med fire nidela der og en sjuendedel…-
119. Lærer:	-mhm.
120. Trude:	…og at æ delt opp på en måte den sjuendedelen og da vart de på en måte to nidela (…) så tok æ dem å der… da vart de seks niendedela.
121. Lærer:	Du delt opp sjuendedelen-
122. Trude:	-ja, den ene sjuendedelen.

123. Lærer: Kossn delt du opp den da? I to liksom?

124. Trude: Heh, ja i to… åsså som om de liksom va en niendedel da.



Figur 6: Illustrasjon av Trude sitt arbeid med å sammenligne nevnere.

I linje 118 starter Trude med å forklare hva hun har tegnet. Her forklarer eleven at tegningen (figur 6) skal representere en sirkel der $\frac{4}{9}$ er skravert, og en sirkel ved siden av der $\frac{1}{7}$ er skravert. Siden $\frac{1}{7}$ og $\frac{4}{9}$ består av to forskjellige nevnere, bestemmer Trude seg for å omgjøre $\frac{1}{7}$ til $\frac{2}{9}$. Eleven forklarer videre at hun overførte $\frac{1}{7}$ til den sirkulære modellen bestående av $\frac{4}{9}$, og slik at $\frac{4}{9}+\frac{1}{7}\approx\frac{6}{9}$. Om hun anser $\frac{1}{7}$ og $\frac{2}{9}$ som likeverdige brøker, eller om hun bruker fremgangsmåten som en støtte for å kunne lage et estimat, blir ikke kommentert. Det vil si at Trude sammenligner nevner og deretter teller og kompenserer ved å tilpasse brøkene. Slik betrakter hun $\frac{1}{7}$ som $\frac{2}{9}$, og gjør det lettere å regne ut, og for å komme nærmest mulig det eksakte svaret.

Representasjonen Trude viser til indikerer at eleven bruker en framgangsmåte på bakgrunn av at dersom nevneren er mindre, består brøken av større deler, og dersom nevneren er større, er brøken delt opp i flere, men mindre biter. Det kan forklare hvorfor eleven kompenserer med flere biter av $\frac{1}{9}$, fordi hun resonnerer at $\frac{1}{7}$ er større enn $\frac{1}{9}$. Utsagnet indikerer at eleven bruker tolkningen av brøk som del-hel, som gjenspeiles i representasjonen og sammenhengen hun skaper mellom delene og helheten.

Andre eksempler på bruk av strategien *sammenligning av et referansepunkt* viste seg da Trude arbeidet med det åpne regnestykket $\frac{\blacksquare}{7}+\frac{\blacksquare}{9}\approx 1$. Her skulle eleven fylle inn i de tomme boksene slik at uttrykket stemte, og til sammen ga et svar på omtrent en. For å fylle inn i de tomme boksene valgte Trude å sammenligne nevnerne først, slik at hun kunne avgjøre hva som burde står i tellerne.

197. Trude: Æ tenkt at æ i hvertfall hadd seks sjuendedela-
198. Lærer: -koffor de? Koffor akkurat dem talla?
199. Trude: Fordi at da va den der høyest da. Da mangle æ … fordi at da mangle æ bare liksom en sjuendedel og da tenkt æ at viss æ får to niendedela, så kan æ liksom ta en niendedel pluss en niendedel… som æ tenkt da kunna bli en sjuendel.
200. Lærer: Koffor tenkt du akkurat på dem talla?
201. Trude: Fordi at den e mindre enn en sjuendedel og da e de bedre med flere.

I dette utdraget ser vi at Trude velger å bruke samme strategi som tidligere. Eleven spiller videre på å se på $\frac{1}{7}$ og $\frac{2}{9}$ som likeverdige brøker, eller omtrent likeverdige brøker. Hun velger deretter å bruke informasjonen til å fylle ut de gjenværende boksene, som til sammen skulle gi summen *omtrent 1*. Elevene starter med brøken bestående av den minste nevneren, og fyller inn i boksen det som skal representere telleren, slik at den er nærmest mulig en hel. Videre estimerer hun hvor mye som skal til for at brøken skal bli enda nærmere en hel ved å legge til en brøk som er nærmest likeverdig. Trude ender derfor til slutt med å skrive tallene $\frac{6}{7} + \frac{2}{9}$ i de tomme boksene.

Her uttrykker eleven enda tydeligere ideen om at mindre nevner gir større deler, og større teller gir mindre deler (linje 201). Selv om Trude har tatt i bruk samme strategi tidligere, skiller utdraget seg ut ved at eleven argumenterer tydeligere enn tidligere, og refererer ikke til representasjon. Her argumenterer hun eksplisitt at $\frac{1}{9}$ er mindre enn $\frac{1}{7}$, og derfor er det bedre med flere deler av $\frac{1}{9}$ slik at $\frac{6}{7}$ kan bli nærmest mulig en hel. Det kan også være årsaken til at Trude ikke snur om på nevnerne ($\frac{6}{7} + \frac{2}{9}$ og ikke $\frac{6}{9} + \frac{2}{7}$), fordi hun ikke kommer like nær en hel. Å legge til flere deler av $\frac{1}{7}$ til $\frac{6}{9}$ ville ha gitt et svar litt lengre unna en hel enn $\frac{1}{9}$ til $\frac{6}{7}$. Hun sier selv at brøken vil være høyest med $\frac{6}{7}$, og det kan indikere at eleven tenker at $\frac{6}{7}$ er større enn $\frac{6}{9}$.

Observasjonen viser at strategien Kompensering underveis ofte ble brukt i utregningsoppgaver med gitt svar. Spesielt ble strategien tatt i bruk i de to oppgavene som inneholdt oddetallsnevnerne 9 og 7 (oppgave 3b og 4a i figur 3). Disse to oppgavene er de eneste addisjonsoppgavene med to brøk bestående av kun oddetallsnevnere. Tidligere har Trude argumentert med sirkulær representasjon for å resonnere og begrunne hvorfor estimeringsstrategien *sammenligning av et referansepunkt* fungerer. Tor tar i bruk samme strategi og resonnerer på samme måte som Trude, men bruker ikke en sirkulær representasjon. I stedet forsterker han forholdet mellom de to ulike nevnerne ved hjelp av hendene og er grunnen til at dette utdraget blir fremhevet. I følgende utdrag forklarer Tor hvorfor $\frac{1}{7} + \frac{4}{9}$ er mer enn $\frac{1}{2}$.

33. Tor:	Æ fant opp et ord (ler). Men æ e underbevist fordi (…) eh… fordi ni… eller fire niendedela de e sikkert så langt unna fra å bli en hel… eller å vær en halv (viser med hendene at det er svært nære).
34. Lærer:	Okei.
35. Tor:	Men viss du tar et tall og liksom tar sju.
36. Gro:	Mer.
37. Tor:	Ja, altså ni e mer enn sju… så… eller sju e mindre enn ni. Så blir de liksom større dela.
38. Lærer:	Større dela.
39. Tor:	Ja, fordi at nevnern e mindre.

Tor begrunner resonnementet sitt ved å understreke ved hjelp av hendene for å vise hvor nær $\frac{4}{9}$ er en hel og deretter en halv. Videre ser det ut at Tor (i linje 35) starter med en ny argumentasjon, men også at han ikke kommer helt i mål med denne. I linje 37 starter eleven med nok en argumentasjon, men det ser ut som at eleven snakker om tallene om hverandre. Her trekker eleven inn heltallstenking, og sier at ni er mer enn sju. Etter litt nøling retter han fort opp utsagnet sitt og sier at sju er mindre enn ni. Det viser det samme resonnementet, men der begrepet *mer* er byttet ut med *mindre,* og tallene er snudd om. Det ser ikke ut til at Tor legger merke til at han argumenterer feil, men poengterer, til tross for feil argumentasjon, til slutt med at det vil være større deler dersom «[…] du tar et tall og liksom man tar sju», som for eleven er det samme som $\frac{1}{7}$. Derfor er $\frac{1}{7} + \frac{4}{9}$ mer enn $\frac{1}{2}$.

Han understreker at det er svært lite som mangler for at brøken skal representerer en halv og markerer dette med hendene. Markeringen kan tyde på at eleven viser til en tolkning av brøk som måling fordi han viser avstanden mellom $\frac{4}{9}$ og $\frac{1}{2}$ med hendene. Elevens forklaring, på linje 37, kan indikere en mulig argumentasjon om at sju er mindre enn ni, og at helheten derfor er delt opp i mindre deler. Det fører til at hver del er større, i motsetning til dersom helheten hadde vært delt opp i ni deler.

I følgende utdrag tar Nora i bruk samme strategi. Selv om eleven sammenligner nevnere på samme måte som flere av sine medelever, skiller Nora seg ut på flere måter. Først og fremst arbeider Nora med nevnere bestående av partall. I foregående utdrag tok elevene i bruk strategien i arbeid med oddetallsnevnere, der de sammenlignet nevnerne for å avgjøre hvilken nevner som ga størst del. Nora bruker samme fremgangsmåte, men med et annet fokus som utgangspunkt. I forhold til elevene som tar i bruk samme strategi i arbeid med addisjonsoppgaver der to brøk skal adderes, tar Nora i bruk strategien i arbeid med multiplikasjon i brøk bestående av et heltall og en brøk. I arbeidet med å avgjøre hvilke av regnestykkene $4 \bullet \frac{8}{10}$ og $4 \bullet \frac{6}{8}$ som er nærmest 4, argumenterer Nora på følgende måte:

87. Nora:	Assa de e to dela fra seks til åtte.
88. Lærer:	Åja. De du sie e at du mangle to fra en heil?
89. Nora:	Ja, og dem her delan e mindre (peker på $\frac{8}{10}$) og dæm e større (peker på $\frac{6}{8}$).
90. Lærer:	Så kæm av dem e nærmast fire?
91. Nora:	Den her (peker på $4 \bullet \frac{8}{10}$)

Sammenlignet med tidligere eksempler, skiller Nora seg ut ved å gå veien om en. Det vil si at hun retter fokus mot hvor mange deler som mangler for at det skal bli en hel. Samtaleutdraget innledes med at Nora oppdager at det mangler to i telleren for at $\frac{6}{8}$ skal bli en hel. Læreren bygger videre på elevens resonnement (i linje 88), ved å stille henne et spørsmål, som i noen grad kan ha vært ledende for elevens resonnering. Dette spørsmålet går ut på om eleven mener at begge brøkene i de ulike regnestykkene mangler to fra en hel. I linje 89 sier Nora seg enig med lærerens spørsmål og utvider deretter argumentet sitt. Her viser hun til størrelsen på de ulike delene. Eleven starter altså først med å gå veien om en hel, og utvider resonnementet ved å sammenligne nevnerne i hvert av regnestykkene. Til slutt avgjør, hun på bakgrunn av eget resonnement om hvilken brøk som gir størst del, at det er $4 \bullet \frac{8}{10}$ som er nærmest fire.

Her beveger eleven seg fra å tenke absolutt til en relativ tenking. Hun starter med å telle hvor mye hver enkelt del mangler fra helheten. Konklusjonen er matematisk korrekt, fordi begge brøkene mangler to i telleren, men består av ulike nevnere, og derfor er den ene brøken større enn den andre. Hun betrakter derfor begge brøkene som ulike brøker. Eleven skifter dermed perspektiv og sammenligner ved å se på brøkene på en annen måte.

I følgende utdrag bruker Trude samme strategi som hun har gjort tidligere. Utdraget er lagt ved fordi eleven i dette tilfellet legger mer vekt på representasjonen hun har tegnet. I arbeidet med å plassere $\frac{1}{3}$ på tallinja, reflekterer og sammenligner eleven brøken med et referansepunkt, slik at hun lettere kan plassere brøken. I utdraget sammenligner Trude $\frac{1}{3}$ med $\frac{1}{2}$, fordi $\frac{1}{2}$ allerede er oppgitt på tallinja. Det gjør hun ved hjelp av en sirkulær representasjon (figur 7). Slik reflekterer hun om svaret som avgis er hensiktsmessig eller ikke.

120. Lærer:	Enn du da, Trude?
121. Trude:	Æ prøvd å plassert den litt heil egentlig…men æ tenkt på en måte at e skulla del opp tallinja i tre… åsså på en måte hopp tre gang sånn da. Da hadd de blitt en tredjedel der… d vart kanskje litt feil.
122. Lærer:	E ser du har plassert den litt nærmar en halv.
123. Trude:	D vart bærre sånn når æ delt opp i tre (…).
124. Lærer:	Åh?
125. Trude:	Ja, viss du dele opp i kakestykka, så blir den litt mindre (en tredjedel er mindre enn en halv)… derfor må den vær litt under.

Figur 7: Illustrasjon av arbeidet til Trude som kompenserer underveis.

Strategien har visse likhetstrekk med de andre utdragene i samme strategi, men skiller seg ut i form av at eleven reflekterer og deretter kompenserer på bakgrunn av en representasjon. I utdraget kompenserer eleven underveis ved at hun ser på antall deler og størrelsen på hver del i representasjonen. Slik finner hun ut at $\frac{1}{3}$ ikke kan plasseres nærmere en hel på tallinja, men at $\frac{1}{3}$ heller bør plasseres nærmere en halv. Eleven har valgt å representere de to mengdene hun har sammenlignet ($\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{2}$), ved hjelp av en sirkulær arealmodell, for å overbevise lærer (observatør) om hvorfor hun vil plassere brøken $\frac{1}{3}$ under en halv på tallinja.

4.4 ANNET

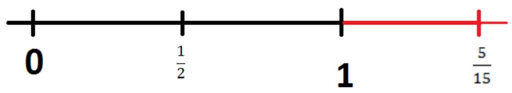
I arbeid med analysen opplevde jeg at ikke alle strategiene kunne plasseres under en av de kognitive prosessene til R. E. Reys et al. (1982). Derfor har jeg opprettet en egen kategori for disse strategiene, som jeg har kalt *annet.* Felles for strategiene som plasseres under denne kategorien er at elevene overgeneraliserer, noe som hindrer dem i arbeidet med å estimere hvor brøken skal på tallinjen, eller i regneoppgaver med addisjon og multiplikasjon av brøk. Under denne kategorien har jeg plassert strategiene *Overgeneralisering av tallinja*, *Omrokkering* og *Veien om hel*.

4.4.1 OVERGENERALISERING AV TALLINJA

Strategien Overgeneralisering av tallinja går hovedsakelig ut på at eleven betrakter brøk som heltall. Her blir ikke tallinjen sett på som en representasjon av tall mellom 0 og 1, som allerede er markert på tallinja. I stedet blir tallinja forlenget, selv om brøken er under 1 hel. Tor hadde tidligere i samtalen plassert $\frac{6}{10}$ på tallinjen, der han hadde omtalt 1 på tallinjen som 10, slik at han lettere kunne forklare hvorfor han valgte å plassere brøken på et punkt litt over en halv. I følgende utdrag fortsetter Gro å betrakte en hel på tallinjen som ti, noe som fører til at tallinjen ikke er tilstrekkelig for å kunne plassere $\frac{5}{15}$.

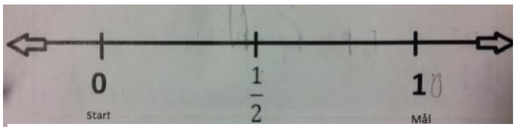
26. Lærer:	Ka meine du?
27. Gro:	Jo, fordi han Tor sa isted at ti e her *(peker på en hel)* og da må femten vær litt over en hel, altså her en plass *(peker forbi en hel på tallinja).*
28. Lærer:	Så du mener at tallinja skulla ha vårre litt lengre. E de de du sie?
29. Tor:	Men hallo! Kan e si nå?
30. Gro:	- ja, men ka om e hadd minusa fem *(peker på nevneren femten)*?
31. Lærer:	Koffor de?
32. Gro:	Fordi her e det ti (peker på en hel) åsså kan e ikke-
33. Lærer:	-men det står jo egentlig en på arket, ikke ti. De va de Tor som sa.
34. Gro:	Jada. Men viss æ tar ti minus fem, så kan e trekk den fem tilbake og da må e ikke trekk linja helt bort. Da kan e plasser den her (peker på litt før en hel).
35. Lærer:	Så det du prøve å si er at fem femtendedel er ganske likt omtrent en hel?
36. Gro:	Ja.

Oppgaven som elevene jobbet med før de ble tildelt denne oppgaven var, som nevnt over, å plassere $\frac{6}{10}$ på tallinja. Det kan forklare hvorfor Gro innledet med å si at Tor tidligere hadde sagt at en hel bestod av ti. Videre forklarer Gro at siden helheten er ti, på nøyaktig samme plass der det allerede er markert en, burde tallinjen forlenges slik som forklart i figur 8:



Figur 8: Illustrasjon av Gro sin forlengelse av tallinjen.

Det vil si at Gro ønsker en tallinje som består av en helhet på 15, fordi 1 representerer en nevner på 10. På oppgavearket hun fikk utdelt, som vist i figur 9, har hun allerede markert en hel som ti ved å skrive en ekstra null.



Figur 9: Gro betrakter en hel som 10.

Utsagnet til eleven tyder på at hun hovedsakelig fokuserer på nevneren, og at telleren blir utelatt i første omgang. I linje 30 sier Gro «- ja, men ka om e hadd minusa fem?», samtidig som hun peker på nevneren i $\frac{5}{15}$. Utsagnet kan indikere at Gro ønsker at nevneren i $\frac{5}{15}$ reduseres til $\frac{5}{10}$, slik at hun lettere kan plassere brøken på den eksisterende tallinja og unngå å forlenge den. Det kan se ut til at det er nettopp dette hun ønsker å poengtere i linje 32, før hun blir avbrutt. Hvor tallet fem kommer fra, blir ikke kommentert, men kan muligens komme av at brøken består av fem i telleren. Om det er tilfelle, ser hun på brøken $\frac{5}{15}$ som en operasjon, slik at $\frac{5}{15} = 15 - 5$.

Selv om læreren poengterer at det står en på tallinja og ikke ti, ønsker Gro likevel å trekke fra fem i nevneren slik at $\frac{5}{15}$ omgjøres til det hun ser på som 10 på tallinja. Slik kan hun, ifølge utsagnet i linje 34, trekke linjen tilbake og dermed plassere brøken på en hel, eller 10 som hun selv omtaler 1 hel som. Til slutt spør læreren om hun mener at $\frac{5}{15}$ er det samme som en hel, noe hun svarer kort og konkret ja på.

Utdraget kan indikere at Gro ser på brøk som separate tall med en strek mellom, og at det er nevneren som bestemmer hvor brøken skal stå på tallinjen. Brøken bli sett på som et resultat av et substraksjonsstykke, og hun bruker telleren som et ledd i et regnestykke. Eleven ser i dette tilfelle ut til å forstå hvordan helheten er oppdelt, men ikke at delene utgjør helheten. Det betyr sannsynligvis at hun ikke ser sammenhengen mellom delene og helheten.

4.4.2 OMROKKERING

Omrokkering er en strategi som har fått navn på bakgrunn av at eleven legger til tellere, og deretter omrokkerer, for å finne summen av to brøker. I likhet med strategien til Gro, Overgeneralisering av tallinja, kan strategien Omrokkering også betraktes som en overgeneralisering der eleven tar i bruk heltallstenking i brøk. Eleven innleder samtalen med å si at $\frac{1}{7}+\frac{4}{9}$ er mer enn en halv og begrunner det slik:

67.	Lucas:	Æ trur… æ sie… meir.
68.	Lærer:	Koffor de?
69.	Lucas:	Æ plussa på en og fire og de blir fem… åsså trekke e fra to fra femmern åsså legg e den der (peker på sju i $\frac{1}{7}$). Da blir de ni og de blir en hel.
70.	Lærer:	Altså du tok ein sjuendedel og fire niendedel… eh… og da tok du først… eh… ein pluss fire og de blir fem. Åsså såg du at du kunna ta to derifra og fløtt den over dit-
71.	Lucas:	-og da blir de også ni.

I utdraget ser det ikke ut til at Lucas ikke viser en særlig intuitiv forståelse av hvor stor brøkene $\frac{1}{7}+\frac{4}{9}$ er til sammen. Det gjør at det er vanskelig å vurdere om summen er mer eller mindre enn en halv. I utdraget starter eleven med en strategi hvor han steg for steg legger til og trekker fra, uten at det gir noe mening hvorfor. Eleven starter først med å legge til tellerne, som resulterer i fem. Det kan tenkes at dette første steget er en videreføring av en kjent prosedyre i addisjon av brøk. Videre trekker han to fra fem (i telleren), som han videre flytter over til nevneren i $\frac{1}{7}$. Når læreren spør han hvilken brøk han vil stå igjen med til slutt, svarer Lucas til slutt at brøken vil bestå av 9 i nevneren. Det vil si at eleven «tar bort» den første brøken i addisjonsstykket, slik at han står igjen med brøken $\frac{3}{9}$. For å gi et bedre bilde av stegene til Lucas, har jeg forsøkt å illustrere fremgangsmåten i figur 10.

$$\frac{1}{7}+\frac{4}{9} \rightarrow \frac{1}{7}\frac{+4}{9} \rightarrow \frac{}{7}+\frac{5}{9} \rightarrow \frac{0}{7+2}+\frac{5-2}{9} \rightarrow \frac{}{9}+\frac{3}{9} \rightarrow \frac{3}{9}$$

Figur 10: Lucas sin bruk av strategien Omrokkering.

Lucas innleder samtalen med å si at han tror at $\frac{1}{7}+\frac{4}{9}$ er mer enn en halv, noe som er matematisk korrekt, fordi $\frac{1}{7}$ er større enn $\frac{1}{9}$ og svaret vil derfor være litt over en halv. Etter at eleven har regnet seg frem til $\frac{3}{9}$, ser det ikke ut til at han reflekterer noe særlig over svaret han fikk. Han svarer til slutt med en brøk som er mindre enn en halv, som er det motsatte av hva han sa i starten av samtalen. Enten kan det indikere at Lucas har vanskeligheter med å definere brøkens hvor mye brøken representerer, eller at det rett og slett var en ren forglemmelse. Uansett indikerer Lucas sin strategi at han tar i bruk en slags gjett og sjekk- fremgangsmåte. Denne fremgangsmåten definerer jeg som en gjetning, der eleven rett og slett prøver seg frem for å se om tallene kan gi noen mening. I tillegg kan fremgangsmåten tyde på at han er ute etter å finne en felles nevner, siden han overfører deler av telleren over til nevneren. Det kan også være årsaken til at han legger til tellerne og omrokerer teller og nevner slik det passer seg for han.

Under observasjonen var det vanskelig å få tak i hvilken strategi Lucas benyttet seg av. Det var først etter transkriberingen jeg forstod fremgangsmåten hans og hvordan han kunne påstå at $\frac{1}{7}+\frac{4}{9}$ er lik $\frac{3}{9}$. I tillegg merket jeg, underveis i observasjonen, at eleven var svært sikker og bestemt på sin egen strategi. Utdraget kan indikere at eleven var ute etter en konkret instrumentell fremgangsmåte, og at han har lite begrep om hva brøk representerer. Det vil si at strategien Lucas tar i bruk, er basert på en prosedyre som han selv har utviklet, men som han kanskje ikke helt forstår.

4.4.3 VEIEN OM EN HEL

Strategien Veien om en hel er enda et eksempel på at en elev trekker frem heltallstenking og overfører denne tenkingen videre i regning med brøk. Strategien har fått navnet på bakgrunn av at elevens påstand om at brøkene mangler like mye fra en hel. I følgende utdrag arbeider Trude med å sammenligne brøker, der en absolutt tenking hindrer eleven i å avgjøre hvilken brøk som er størst. I følgende utdrag blir eleven bedt om å avgjøre hvilken av brøkene $4 \bullet \frac{8}{10}$ og $4 \bullet \frac{6}{8}$ som er størst.

162. Trude:	Dem e like lang.
163. Lærer:	Koffor de?
164. Trude:	Fordi de e igjen to på begge. Viss man plusse på to her, så blir de ti (altså ti tiendedele) og viss du plusse på to her, så blir de åtte (åtte åttendedele). Dæm e på en måte like lang.

Trude har tidligere vist at hun er i stand til å sammenligne brøk ved å sammenligne teller og nevner under prosessen kompensering. Hva som er årsaken til at hun har gått bort fra strategien blir ikke kommentert, og utdraget viser at eleven henger seg opp i at begge mangler to fra å bli en hel. Eleven prøver derfor å bruke en strategi som innebærer å gå veien om hel, det vil si hvor mye som mangler for å få en hel, for å kunne avgjøre hvilken brøk som er størst. Her velger hun å omtale brøkene som «like lange», fordi begge mangler like mye. Videre eksemplifiserer eleven ved å si at dersom hun «plusser på» to vil begge brøkene $\frac{10}{10}$ og $\frac{8}{8}$ representerer en hel.

I utdraget ser det ut til at hun behandler brøken som en absolutt verdi, det vil si at eleven ikke ser på telleren og nevneren i forhold til hverandre, og at det er dette forholdet som angir verdien på brøken. Utdraget viser derfor at Trude ikke er i stand til å veksle mellom absolutt og relativ tenking. Det vil si at hun ikke ser på hvordan teller og nevner henger sammen i forhold til hverandre. På bakgrunn av dette avgjør hun at brøkene representerer det samme, noe som er matematisk ukorrekt siden de består av forskjellige nevnere.

4.5 FUNN: VALG AV STRATEGIER

I analysekapittelet har ulike estimeringsstrategier blitt identifisert og analysert. Selv om det finnes flere eksempler på noen av strategiene, har jeg valgt å bare presentere *ett* eksempel fra utdragene i analysen, og som jeg mener representerer strategien. Strategiene som ble identifisert kommer frem i følgende tabeller (tabell 2 og 3):

<table>
<tr><th colspan="2">OMFORMULERING</th></tr>
<tr><td><u>BRØK TIL DESIMALTALL:</u>

a) Brøk omgjøres til likeverdige eller omtrent likeverdige former i desimaltall.
$\frac{3}{7}$
Dersom brøken omformuleres til desimaltall, vil halvparten av nevneren være 3,5. Brøken er derfor nær en halv, men ikke over siden det er 3 i telleren.

b) Brøk omgjøres til likeverdige eller omtrent likeverdige former i desimaltall og brukes for å løse et multiplikasjonsstykke i brøk.

$4 \bullet \frac{8}{10} \approx 3$ eller nesten fire, fordi $\frac{8}{10}$ er det samme som 0,8. Det gir regnestykket 4•0,8, som har et svar mellom 3 og 4, fordi 0,8 er nesten 1, men ikke nøyaktig 1 hel.</td>
<td><u>ØKE LIKT I TELLER OG NEVNER</u>

Brøken endres til et vennligere tall ved å øke likt i teller og nevner.

$\frac{7}{9}$ økes med 1 i teller og nevner, og omformuleres dermed til $\frac{8}{10}$, som er lettere å plassere på tallinjen.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OVERSETTING</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>ENDRE TIL ET VENNLIGERE PROBLEM</u>

Eleven endrer <u>problemet</u> i et addisjonsstykke i brøk bestående av partallsnevnere til en mer hensiktsmessig form. På bakgrunn av dette endres strukturen i problemet.

$\frac{7}{8} + \frac{1}{10}$ er nesten en hel til sammen. Dersom man tar utgangspunkt i at ti er nevneren man tar utgangspunkt i, kan man endre den første brøken fra $\frac{7}{8}$ til $\frac{8}{10}$. Selv om brøken går fra å mangle en del til to deler fra en hel vil det være nær det eksakte svaret, fordi en helhet delt i ti deler er mindre enn en helhet delt opp i åtte deler. Derfor vil det gå omtrent opp i opp og et regnestykke og et estimat på $\frac{8}{10} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">KOMPENSERING</th></tr>
<tr><td><u>TA UTGANGSPUNKT I ET KJENT REGNESTYKKE</u>

Eleven starter med noe han allerede vet, resonnerer videre, og frem til det originale problemet.

$1 \bullet 1 = 1$
$1 \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$ kan derfor ikke være $\frac{1}{2}$. Svaret må derfor være halvparten, som er $\frac{1}{4}$.</td>
<td><u>SAMMENLIGNING AV ET REFERANSEPUNKT</u>

Regnestykket oversettes til en mer hensiktsmessig form. I tillegg kompenserer eleven tydelig underveis for å komme nærmest mulig det eksakte svaret.

$\frac{1}{7} + \frac{4}{9} \approx \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$

$\frac{1}{7}$ er større enn $\frac{1}{9}$, fordi hver del er større siden helheten er delt opp i færre deler. $\frac{1}{7}$ kan derfor omgjøres til $\frac{2}{9}$.</td></tr>
</table>

Tabell 2: Strategier innen en av de kognitive prosessene som ble funnet i studien.

ANNET		
<u>OVERGENERALISERING AV TALLINJA</u> ***Eleven betrakter en hel som ti og forlenger tallinja for å kunne plassere en brøk med over ti i nevneren.*** $\frac{5}{15} = 1$, fordi en hel er 10 og tallinja må derfor forlenges til 15. Deretter subtraheres 5, siden der står 5 i telleren og eleven ender derfor tilbake til en hel.	<u>OMROKKERING</u> ***Eleven legger sammen teller og teller og omrokkerer for at det skal gi mening.*** $\frac{1}{7}+\frac{4}{9}$ er mer enn $\frac{1}{2}$ På bakgrunn av at summen av tellerne er fem, der to fra denne summen blir overført til nevneren sju. Eleven står derfor igjen med $\frac{3}{9}$.	<u>VEIEN OM EN HEL</u> ***Eleven overfører heltallstenking til regning av brøk.*** $4 \bullet \frac{8}{10}$ og $4 \bullet \frac{6}{8}$ blir like mye fordi begge mangler to i telleren.

Tabell 3: Strategier som ble funnet i studien og som kan plasseres under kategorien annet.

Samlet sett tok elevene i bruk ulike variasjoner av strategier. Sammenlignet med estimeringsstrategier som har blitt identifisert med andre undersøkelser, slik som Lemaire et al. (2000), tok de blant annet i bruk strategier basert på avrunding uten dekomponering og kompensering. Et eksempel på avrunding uten dekomponering og kompensering kan være når elevene rundet av brøken i et problem til nærmeste referansepunkt (0, $\frac{1}{2}$ eller 1), i strategien Kompensering underveis. I noen tilfeller tok elevene også i bruk ulike variasjoner av denne strategien. I Endre til et vennligere problem arbeidet eleven med regnestykket $\frac{7}{8}+\frac{1}{10}$, og betegnet regnestykket som omtrent det samme som $\frac{8}{10}+\frac{1}{10}$, på bakgrunn av at en helhet delt opp i 8 består av større deler enn en helhet delt opp i 10. Derfor var $\frac{7}{8} \approx \frac{8}{10}$, som også er lettere å regne med, fordi det førte til at begge brøkene bestod av samme nevner. Felles for disse strategiene er at elevene, både i min og Lemaire et al. sin undersøkelse, mer aktivt bruker nevneren som utgangspunkt for sammenligning, og reflekterer dermed i større grad enn strategier under prosessen omformulering.

Ingen av elevene tar i bruk strategiene, avrunding med dekomponering og avkorting, som ble funnet i Lemaire et al. (2000) sin undersøkelse og som vist i teori. Elevene benyttet seg heller ikke av alle estimeringsstrategiene som ble identifisert i R. E. Reys et al. (1982) sin undersøkelse. En årsak kan være at Lemaire og R. E. Reys tok i bruk estimeringsoppgaver bestående av heltall, og ikke brøk, og derfor er det ikke alle strategiene som egner seg like godt i dette studiet.

Studiens første forskningsspørsmål retter fokus mot hvilke estimeringsstrategier enkelte elever bruker i arbeid med brøk. I analysekapittelet kommer det frem at elevene bruker flere ulike strategier og disse blir beskrevet i tabell 2 og 3 ovenfor. Det første forskningsspørsmålet vil derfor ikke bli kommentert ytterligere i analysekapittelet. Videre i kapittelet ønsker jeg å vende blikket mot forskningsspørsmål to i studien. Her vil jeg kort oppsummere hvordan elevene valgte å bruke estimeringsstrategiene, og hvilke strategier som ga hensiktsmessige estimat og ikke.

4.6 FUNN: BRUK AV STRATEGIER

De tre kognitive prosessene: omformulering, oversettelse og kompensering ble observert i varierende grad under samtalen mellom informantene på 6.trinn. De vanligste prosessene som ble brukt av elevene i arbeid med å estimere var omformulering og kompensering. Oversetting ble minst bruk av elevene. Som oftest startet elevene med å løse estimeringsoppgaven ved å se om brøken kunne forandres til en omtrent likeverdig brøk, eller å sammenligne brøken med et referansepunkt. Disse fremgangsmåtene ble tatt i bruk flere ganger under observasjonen.

Strategiene som ble plassert under en av de tre kognitive prosessene til R.E. Reys et. al., resulterte i mange hensiktsmessige estimater. Blant annet ble strategiene Brøk til desimaltall og Øke likt i teller og nevner brukt for å omgjøre nevner og teller, eller bare nevneren. Felles for disse strategiene var at de omformulerte slik at de fikk 10 som nevner eller brøken til et desimaltall. Det kan tenkes at omformuleringen hadde en sammenheng med at en helhet delt opp i ti deler, i stedet for ni deler, er mer kjent for elevene, fordi de har arbeidet mye med heltall og desimaltall.

En annen strategi som ga et hensiktsmessig estimat, var elevenes bruk av Øke likt i teller og nevner. Fremgangsmåten elevene tok i bruk, førte til at de kom nær svaret, og så lite som $\frac{2}{70}$ skilte estimatet og det eksakte svaret. Strategien fungerte fordi brøken ($\frac{7}{9}$) bestod av en helhet som var delt opp i relativt mange deler. Selv om strategien fungerte i dette tilfellet, vil ikke denne fremgangsmåten alltid være like hensiktsmessig. Blant annet fungerer ikke strategien med brøk bestående av lav teller og nevner, som for eksempel $\frac{1}{2}$. Dersom brøken legges til 2 i teller og nevner, på samme måte som det Tor og Gro gjorde, vil det resultere i $\frac{3}{4}$, fordi $\frac{1 \bullet 4}{2 \bullet 4} = \frac{4}{8}$

og $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$. Det er dermed $\frac{2}{8}$ som skiller brøkene, og er i motsetning til Tor og Gro sitt svar, ikke like nære.

Ikke alle strategiene ga et hensiktsmessig estimat. Strategiene som ble plassert under kategorien annet, indikerer et gjennomgående bruk av uhensiktsmessige strategier. De tre strategiene som ble plassert i denne kategorien, bar preg av strategier der elevene overgeneraliserte i form av å overføre tidligere kunnskap om heltall og tallinje. Blant annet indikerer en av strategiene bruk av forlengelse av tallinjen, slik at $\frac{5}{15}$ kunne plasseres. Her var ikke eleven i stand til å angi mengden som ble beskrevet i brøken, og sammenligne mengden med et av referansepunktene på tallinjen. Sammenligningen ble derfor basert på bakgrunn av ukorrekt informasjon.

Funnene indikerer at bruk av enkelte ferdigheter ga best resultat i arbeid med å avgi hensiktsmessig estimat. En av disse ferdighetene gikk ut på å sammenligne med et eller flere referansepunkter. Ferdighetene som ble tatt i bruk i Kompensering underveis, Brøk til desimaltall og Øke likt i teller og nevner, var å avgjøre om brøken var mer eller mindre enn et referansepunkt. En annen ferdighet som så ut til å gi positivt utslag for estimeringsprosessen, var å kunne avgjøre den relative størrelsen. I Kompensering underveis avgjør Nora hvilke to brøker som er størst ved å først gå veien om et referansepunkt, men hun måtte endre fokus fordi begge brøkene manglet like mye fra en hel. Eleven fokuserer derfor, ved bruk av relativ tenking, på nevnerne for å kunne si hvilken av brøkene som var størst. Hun benytter seg også av denne ferdigheten i Endre til et vennligere problem, hvor hun endrer strukturen i regnestykket ved å omformulere den ene brøken i regnestykket slik at utregningen blir lettere. Den siste ferdigheten som ga positivt utslag, var at elevene var i stand til å omformulere brøken til en mer hensiktsmessig form. Denne ferdigheten ble hovedsakelig brukt i omformulering og oversetting. Analysen indikerer at enkelte elever er i stand til å plassere brøk som en mengde på tallinjen (brøk som måling), omgjøring av brøk til desimaltall og omgjøre brøk ved at av forhold fortsatt opprettholdes omtrentlig. På bakgrunn av observasjonene er brøk som operator og kvotient nærmest fraværende. Dette kan ha en sammenheng med oppgavene som ble gitt, som ikke la opp til disse tolkningene av brøk.

5.0 DISKUSJON- Å UTVIKLE FORSTÅELSE FOR BRØK VED Å ESTIMERE

I begynnelsen av denne studien ble det stilt to forskningsspørsmål:

Hvilke estimeringsstrategier bruker en gruppe elever i 6.trinn i arbeid med addisjon og multiplikasjon av brøk?

På hvilken måte tar elevene i bruk estimeringsstrategiene, og hvilke muligheter skaper arbeidet for å utvikle forståelse for brøk?

Resultatene fra analysedelen belyser hvilke estimeringsstrategier enkelte elever velger på 6.trinn, og hvordan de tar de i bruk. Det kommer til uttrykk i tabell 2 og 3. Det innsamlede datamaterialet og analysen kan ikke avdekke hva elevene faktisk har lært eller forstått. Funnene kan likevel gi indikasjoner på hvordan arbeid med estimering kan bidra for å utvikle forståelse for brøk, som er siste del av de to forskningsspørsmålene. På bakgrunn av funnene deles diskusjonen opp i tre deler: å plassere en strategi under en prosess, elevenes bruk av strategier og arbeid med estimering for å utvikle forståelse for brøk.

Det er flere forbehold og punkter som må diskuteres i arbeid med dette studiet. Det gjelder for eksempel utfordringene med å plassere en strategi under en prosess, og om det som fremkommer i analysedelen faktisk er den måten elevene tar i bruk strategiene. Funnene viser hvilke estimeringsstrategier og hvordan de tas i bruk, men dette sier lite om hvilke muligheter det gir. Med bakgrunn i funnene fra analysen, vil jeg i siste del av diskusjonskapittelet drøfte på hvilke muligheter arbeid med estimering kan gi for å utvikle forståelse for brøk.

5.1 Å PLASSERE EN STRATEGI UNDER EN PROSESS

I arbeidet med å kategorisere og plassere elevenes arbeid i en prosess, møtte jeg flere utfordringer. For det første opplevdes prosessene omformulering og oversetting i noen tilfeller vanskelige å skille. I analysen er det derfor noen strategier som kunne virke identiske, men som ble plassert i ulike prosesser. For eksempel benyttet Nora i Endre til et vennligere problem og Trude i Kompensering underveis like fremgangsmåter, fordi begge endret brøken til en hensiktsmessig form. Likevel ble strategiene plassert i to ulike prosesser, fordi Nora i Endre til et vennligere problem ikke reflekterte like mye over brøkene som Trude gjorde. Trude sin strategi skiller seg derfor ut, fordi eleven i større grad brukte en relativ tenking om brøk. Eleven kompenserte underveis ved å omtale $\frac{1}{7}$ og $\frac{2}{9}$ som omtrent likeverdige brøker, og brukte denne informasjonen for å reflektere muntlig over hvordan regnestykket kan gi et svar som er nærmest mulig en hel. Slik sett hadde elevene omtrent like fremgangsmåter, men ble plassert under ulike prosesser fordi enkelte elementer skilte dem.

For det andre var det ikke enkelt å plassere elevenes strategier under *en* prosess. Utfordringen med å plassere strategiene under en prosess kan ha resultert i at mine kategoriseringer av strategiene ikke er i henhold til R. E. Reys et al. sitt rammeverk. En årsak til at strategiene var vanskelig å plassere var at jeg opplevde at prosessene ikke var tydelig nok definert. R. E. Reys et al. (1982) har selv uttalt at det er nødvendig med mer forskning for å kunne validere eller avvise det foreslåtte rammeverket. I denne studien har jeg bidratt til at deler av rammeverket har blitt utvidet, ved å legge til en ekstra kategori. Denne kategoriseringen anså jeg som nødvendig for å kunne plassere *alle* strategiene jeg identifiserte i undersøkelsen. Det er ikke overraskende siden de kognitive prosessene til R. E. Reys et al. hovedsakelig er basert på elever som er *gode* til å estimere, mens de informantene som jeg hadde plukket ut hadde *lite* erfaring med estimering, ifølge læreren. Rammeverket er derfor et steg nærmere til å kunne valideres, og tas i bruk for elever med ulike erfaringer med estimering generelt. Det er likevel fortsatt nødvendig med mer forskning på dette området. Blant annet bør prosessene defineres tydeligere, slik at det vil være lettere å plassere hver enkelt estimeringsstrategi elever benytter seg av.

En tredje utfordring jeg støtte på underveis, var å anslå om elevene faktisk *estimerte*. Jeg hadde ikke satt krav til hvor lang tid elevene kunne bruke på hver oppgave på forhånd, men hver enkelt ble bedt om å både løse regnestykkene og begrunne hvert steg de hadde gjort. Noen elever arbeidet raskere enn andre, og det gjorde at de fikk bedre tid til å reflektere og muligens regne ut. Det kan derfor være at eleven forandret estimatet sitt, og heller regnet ut et eksakt svar, siden de måtte vente på resten av gruppa. Selv om jeg opplevde samme problem under pilotundersøkelsen, var det likevel en utfordring å fastslå om eleven estimerte eller ikke. R. E. Reys et al. (1982) har selv uttalt at undersøkelser om estimering er sjeldent, fordi denne ferdigheten er vanskelig å teste. Min erfaring er at det var vanskelig å undersøke om elevene faktisk estimerte, men siden jeg hadde valgt en deltakende observasjon som metode, fikk jeg undersøkt om elevene gjorde de de sa ved å stille de spørsmål om den strategien de tok i bruk. På bakgrunn av dette kan estimeringsstrategier undersøkes på lik linje med andre matematiske ferdigheter, men bør muligens avgrenses til en mindre elevgruppe slik at forskeren får et innblikk i elevens fremgangsmåte.

5.2 ELEVENES BRUK AV STRATEGIENE

Funnene viser at estimeringsstrategiene som elevene tok i bruk i arbeid med de fire forskjellige oppgavene, hovedsakelig var basert på deres bruk av muntlig språk. Enten var de i dialog med seg selv, hverandre eller forskeren (omtalt som læreren). Elevene arbeidet godt sammen og utfylte i noen tilfeller hverandres resonneringer. Slik sett la de sosiale normene i miljøet muligheter for at elevene kunne delta i matematiske samtaler ved å dele løsninger og fremgangsmåter. Ifølge Hope (1989) skjer øvelse i å anslå mengder og estimering naturlig i samtaler om mengder som involverer aspekter av hverdagslige problemløsninger. Aktiviteter som legger til rette for diskusjoner om tall kan derfor ha en positiv innvirkning på elevenes læring (Greeno, 1991). Slik sett kan estimering i sosiale interaksjoner gi mulighet til å utforske mønstre og sammenhenger i matematikk.

Den sosiale interaksjonen blant elevene og gruppas sammensetning kan ha vært en faktor som påvirket deres valg og bruk av strategier. For eksempel kan det ha påvirket hvordan en elev har valgt å begrunne en fremgangsmåte. Det kan ha oppstått situasjoner underveis hvor de har tilpasset strategien for de andre i gruppen, eller hindret elevens begrunnelse ut i fra hva andre medelever og læreren har sagt. Dette kommer for eksempel til syne i enkelte utdrag, hvor eleven innleder med en ide og læreren følger opp ved å kommentere og stille spørsmål knyttet til informasjon som eleven ikke har uttalt seg om. Siden læreren deltok under observasjonen, kan det ha ført til at det ble stilt veiledende spørsmål og at det har blitt lagt til rette for undervisningsaktiviteter som påvirket elevene til å justere, og eventuelt at de som følge av dette endret sine strategier.

Det viste seg også at elevene i noen tilfeller ikke ønsket å estimere, dersom det var mulig å avgi et eksakt svar. Under Brøk til desimaltall ønsket Tommy å fylle ut de opplysningene som manglet i regnestykket[15] slik at han endte opp med $\frac{2,5}{10} + \frac{2,5}{10} \approx \frac{1}{2}$. Han ønsket dermed et eksakt svar, i stedet for et estimat, eksempelvis som $\frac{4}{9} + \frac{1}{10} \approx \frac{1}{2}$. Ifølge Liu (2009) vil elever som oftest ikke estimere, dersom et eksakt svar er innenfor deres mentale beregningsevne. Siden store

[15] Oppgaven hvor opplysninger om teller og nevner i regnestykket var utelatt. Kun svar og addisjonstegn var opplyst. Se oppgave 4b.

deler av matematikken legger vekt på eksakte svar, kan elevene anta at det er det eksakte svaret som er det riktige, og som de skal ende opp med til slutt (Liu, 2009). I lys av elevens fokus på eksakt svar i denne undersøkelsen, kan det være at oppgaven jeg ga til eleven i stor grad ble for åpen. Det kan ha ført til at eleven ikke fikk muligheten til å reflektere like mye over brøken, som jeg hadde ønsket. Dersom oppgaven ble for åpen, burde flere opplysninger om brøkene i regnestykket vært tilgjengelig. I ettertid ser jeg også at regnestykket også åpnet for flere eksakte svar, blant annet $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Selv om disse svarene er matematisk korrekte, kan hensikten med å estimere ha falt bort. I Rubenstein (1985) sin undersøkelse fant hun ut at åpne oppgaver var vanskeligere enn oppgaver som la opp til sammenligning med referansepunkter, hvor eleven måtte avgjøre om en brøk er mer eller mindre et annen brøk. Resultatet kan tyde på at det hadde vært mer hensiktsmessig å la elevene begynne med oppgaver som involverte referansepunkt i arbeid med å estimere, siden det var denne ferdigheten som ga best resultat i arbeid med estimering. For å kunne gi elever mulighet til å utvikle forståelse for brøk ved å estimere, er det derfor viktig at oppgaven ikke blir for åpen og at fokuset på å estimere er tydelig tilstede.

5.3 ARBEID MED ESTIMERING FOR Å UTVIKLE FORSTÅELSE FOR BRØK

Funnene belyser hvilke estimeringsstrategier elevene tar i bruk, og hvordan de blir benyttet. I de forrige delkapitlene tas det forbehold om enkelte utfordringer knyttet til å plassere en strategi under en prosess, rollen som forsker og elevenes fremgangsmåter. Funnene viser at enkelte elever kan ta i bruk estimeringsstrategier, selv om de har hatt lite erfaring med estimering tidligere. Det er hovedsakelig de strategiene som har blitt plassert under en av de kognitive prosessene til R. E. Reys et al. (1982), som har gitt hensiktsmessige estimater. De elevene som tok i bruk strategier basert på overgeneraliseringer, ble plassert under kategorien annet. Korrelasjonen mellom hvilke gode estimeringsstrategier som blir benyttet, og fornuftige estimater, er også påpekt av R. E. Reys et al. (1982), og fremstår isolert sett som gode strategier. Det er naturlig at de strategiene som har blitt benyttet av elever som er gode til å estimere også fører til logiske estimater.

Korrelasjonen mellom valg av strategier og hensiktsmessige estimater gir ikke klare svar på om eller hvordan disse estimeringsstrategiene kan hjelpe elevene i arbeidet med å forstå brøk. Det er ikke et spørsmål der svaret gir seg selv bare på bakgrunn av at studien har identifisert kognitive prosesser. Evnen til å estimere blir fremholdt som et verktøy som kan utvikle en intuitiv forståelse for tall, som kan gi bedre grunnlag for å forstå mengder og størrelser i brøk

(Sowder, 1992; Sowder & Schappelle, 1989). Johanning (2011) omtaler det som et verktøy for å tenke i brøk, og som blir, ifølge NCTM brukt «for estimating the results of computations and […] judge the reasonableness of results» (referert i Johanning, 2011, s. 97). Det vil si at estimering kan gi mulighet til å utvikle en grunnleggende bevissthet rundt utregning. Funnene fra min studie viser at elevene er i stand til å bruke estimering for å resonnere og skape mening til regnestykker i brøk. I flere tilfeller ble det brukt som et hjelpemiddel for å forstå om svaret ga mening eller ikke. Slik sett kan estimering gi mulighet for å undersøke om svar i andre oppgaver er hensiktsmessig eller ikke.

Regneoppgavene og observasjonene i denne studien, finner indikasjoner på at elevene kunne ta i bruk fleksible strategier, basert på deres kunnskap om brøk. Dersom estimering og forståelse i brøk henger sammen, kan det forklare hvorfor enkelte elever ikke var i stand til å utføre en vellykket estimeringsprosess. Blant annet viste Lucas lite intuitiv forståelse for brøk, under bruken av strategien Omrokkering. Funnene indikerer at eleven ikke viste forståelse for hva brøkene i addisjonsstykket representerte. På bakgrunn av dette endte Lucas til slutt med å avgi et svar som representerte mindre enn en av brøkene i regnestykket, selv om oppgaven var at han skulle addere de to brøkene. Fremgangsmåten han tok i bruk, kan tyde på at han var ute etter en konkret instrumentell prosedyre, fordi han forsøkte omgjøre brøkene slik at de fikk en felles nevner ved å omrokkere, men viste lite tegn til forståelse for *hvordan* fremgangsmåten fungerte. Sett i lys av det siste forskningsspørsmålet, kan det tenkes at Lucas hadde hatt andre forutsetninger for å tilnærme seg regnestykket ved å sammenligne og utføre mentale beregninger, om han i større grad hadde vært vant til å estimere, slik Johanning (2011) ser ut til å anta er en viktig ferdighet for å utvikle tallforståelse i brøk.

Undersøkelsen fra denne studien gir muligens ikke et godt grunnlag for å konkludere om den kognitive sammenhengen mellom estimering og tallforståelse henger sammen, selv om en slik konklusjon ville vært av akademisk interesse. Forskningsdesignet er ikke laget for å kunne måle en slik sammenheng. Denne tilnærmingen hadde krevd oppfølging av elevene over lang tid med å kartlegge estimeringsevner, kognitive prosesser og hvordan disse påvirker elevenes tallforståelse. Studien kan derfor ikke konkludere på et generelt grunnlag om hvordan læring eller bevissthet rundt estimeringsstrategier faktisk hjelper elevene for å utvikle forståelse for brøk.

Det empiriske materialet kan ikke konkludere om bruken av estimeringsstrategier faktisk bidrar til bedre forståelse for brøk. Det er likevel mulig å belyse noen observerte styrker ved estimeringsarbeidet. Ved hjelp av deltakende observasjon kan en forsker trekke ut og gå i dybden av informantenes resonnement og fremgangsmåter (Tjora, 2012). Bruk av denne metoden har gjort det tydelig at elevene for det meste evner å i ta i bruk hensiktsmessige strategier for brøkregning, selv uten at denne ferdigheten har blitt eksplisitt undervist i tidligere. Ved å kategorisere elevenes resonnementer i R. E. Reys et al. (1982) sitt rammeverk, kommer det også fram hvilke strategier som kan anses som gode estimeringsstrategier og ferdigheter, og at enkelte elever er i stand til å nyttiggjøre seg disse. Blant annet ga sammenligningsstrategier, der referansepunkter ble benyttet for å organisere brøk etter størrelse, mulighet til å reflektere over sammenhengen mellom del-hel i brøk. Selv om dette arbeidet introduserte nye utfordringer for eleven, ved at de måtte avgjøre hvilken del som var størst av to brøker ved å se på nevnerne og deretter gå tilbake til det originale problemet for å se på hvilken brøk som var størst ved å se på tellerne, var de likevel i stand til å avgjøre hvilken av brøkene som var størst.

Det kan altså virke som om elvene er i stand til å konstruere estimeringsstrategier selv, på bakgrunn av eksisterende forståelse for tall, og at de i mange tilfeller er hensiktsmessige. Samtalen rundt strategiene viser at elevene resonnerer om bruken av estimering og knytter det til kunnskap om brøk. Selv om det ikke nødvendigvis gir en klar kausal sammenheng mellom estimering og forståelse for brøk, så indikerer det likevel at estimering kan fungere som et godt verktøy for å tenke og utvikle forståelse for brøk.

6.0 AVSLUTNING OG VEIEN VIDERE

I denne studien har jeg undersøkt elevenes valg og bruk av estimeringsstrategier i arbeid med addisjon og multiplikasjon av brøk. Resultatene viser at elever velger seg et bredt utvalg av strategier, som blant annet gikk ut på å omformulere brøk til desimaltall, øke likt i teller og nevner for å omformulere til en mer hensiktsmessig brøk, sammenligninger av brøk til et referansepunkt eller strategier basert på overgeneralisering av tallinje og heltall. De strategiene som ble plassert under kategorien annet, viser gjennomgående bruk av uhensiktsmessige strategier som resulterer i ukorrekte estimat.

Elevene sine konstruksjoner og strategier er et produkt av aktivitetene som ble tatt i bruk, og konteksten som ble satt. Derfor kan elevenes valg av estimeringsstrategier skille seg ut fra andre lignende undersøkelser. Studien gir likevel en pekepinn på at elever er i stand til å arbeide med estimering i arbeid med brøk, selv om de ikke har hatt undervisning i dette tidligere. I tillegg viser analysen at det kan finnes et potensial for at elevene kan utvikle forståelse for brøk gjennom å estimere. Selv om de hadde arbeidet lite med estimering i tidligere undervisning, er de likevel i stand til å ta i bruk fleksible strategier for å løse oppgaver som omhandler brøk. Om fokuset er på at elevene skal begrunne hvorfor deres strategi fungerer og hvordan den kan tas i bruk, kan det oppstå en kommunikasjon og refleksjon blant elevene. En slik reflekterende kommunikasjon kan bidra til å øke de kognitive kravene til elevene, og muligens skape en økt forståelse for brøk.

6.1 METODEKRITIKK

Ettersom jeg gjennomførte masterprosjektet som en kvalitativ undersøkelse med kun tre små elevgrupper, er ikke oppgavens hensikt å trekke generelle konklusjoner ut i fra de funnene som er gjort. Som en følge av omgivelsene og miljøskiftet, der kun få elever var til stede, kan det være at elevene ikke fikk vist sin egentlige forståelse. Det er derfor ikke sikkert at utdragene i analysen viser hvordan elevene forstår brøk til vanlig, og at de kan ta i bruk andre strategier i undervisningen enn de som ble identifisert i undersøkelsen. Likevel var hensikten med studien å avklare valg og bruk av strategier i en gitt kontekst med et begrenset antall elever.

I etterkant av gjennomføringen ser jeg at oppgave 2 (figur 3) kunne ha vært endret. Oppgaven bestod av en «string» med regnestykker, der samme oppstilling av heltall og brøk var gjennomgående (heltall multiplisert med brøk). Denne «stringen» kunne ha blitt formulert på en annen måte, fordi sammenhengen mellom hver enkelt regnestykke ikke kom til syne. Derfor ble selve «stringen», som ble presentert for elevene, i noen grad uoversiktlig og mistet deler av sammenhengen. Dette kan ha vært en utslagsgivende faktor for hvordan elevenes strategier kom til. Likevel vil jeg bemerke at oppgavene, til tross for at de kunne ha vært forbedret, kan ha bidratt til at jeg fikk en rikere samling av ulike estimeringstrategier, fordi «stringen» ikke bare hadde fokus på *en* ide.

I kvalitativ forskning bidrar forskeren til å påvirke utfallene. Det kan derfor diskuteres om det har vært hensiktsmessig å benytte deltakende observasjon som metode, og om jeg som forsker burde hatt en mer passiv rolle og holdt meg mer i bakgrunnen. Likevel opplevde jeg behov for å delta i samtalen med oppfølgingsspørsmål, for å få elevene til å begrunne strategiene de hadde valgt, og for å få tak i deres forståelse for brøk. Slik kunne jeg si noe om hvordan de tok i bruk strategiene de valgte seg. Resultatene i denne masteroppgaven blir i tillegg sett opp mot tidligere forskningsresultater, og validert gjennom dette.

6.2 STUDIENS BIDRAG

Studien setter teoretiske perspektiver om estimering i arbeid med addisjon og multiplikasjon i brøk inn i en norsk kontekst. Den gir informasjon om hvilke estimeringsstrategier tre elevgrupper på 6.trinn i Norge kan ta i bruk, og hvordan de velger å resonnere og ta i bruk strategiene. Studien bekrefter at elevene tar i bruk tre kognitive prosesser i arbeidet med å estimere, noe som også støtter tidligere forskning. Videre kan studien gi en utvidet innsikt og bevissthet i hvordan enkelte elever bruke strategier i en estimeringsprosess og gir et større bilde av elevers forståelse, men også hvilke utfordringer de kan få i arbeid med brøk. Studiens resultater støtter også opp om tidligere internasjonal forskning om at tallforståelse har en sammenheng med hvordan de gjennomfører estimeringsprosessen.

Studien kan være et bidrag til lærerstudenter og lærere. Å ha kunnskap om strategier som blir benyttet av elever, er viktig for å kunne utvide deres matematiske tenking. Ifølge Mink (2010) vil det å la elevene utvikle sine egne strategier, fremfor å bare memorere gitte prosedyrer og strategier, gi en bedre tallforståelse for matematikk. Samtidig kan det hjelpe lærere i arbeid med å vurdere elevenes forståelse og danne et sterkere bilde av elevenes ferdigheter. Informasjonen kan derfor gi en innsikt i hva det er nødvendig å undervise i, slik at hver enkelt elev får mulighet til å utvikle seg videre (Mink, 2010). Denne innsikten vil være vesentlig for lærere i praksis.

6.3 VIDERE FORSKNING

Studien undersøker tre elevgrupper i arbeid med estimering i brøk. Det er en kvalitativ studie som belyser hvordan elevene gikk frem i hver enkelt strategi, uten at det kan generaliseres noe ut i fra funnene. Undersøkelse i større skala, og med et større utvalg av deltakere, kan gi mulighet til å undersøke om elever bruker andre strategier, og om det er en sammenheng mellom deres forståelse i brøk og valg av strategier. I denne studien ble elevene bedt om å avgi *ett* estimat per oppgave, og funnene har identifisert åtte ulike strategier, der enkelte gir mer hensiktsmessige resultat enn andre. En videre forskning av denne studien kan eventuelt gå ut på å undersøke om antall strategier hadde økt dersom de ble bedt om å bruke flest mulige strategier på en oppgave. Dersom det er tilfellet, er det interessant å undersøke om en undersøkelse i større skala og et større utvalg av strategier hadde ført til at andre prosesser er de som har blitt identifisert i denne undersøkelsen.

Elevene fikk ingen begrensninger i tid som de måtte forholde seg til, annet enn den tiden som ble satt av til observasjonen. Den tiden de tok i bruk varierte fra oppgave til oppgave og blant hver enkelt elev. Å regne ut et estimat skal gå kjapt, og det skal gjerne skje før den eksakte utregningen. Det hadde derfor vært interessant å undersøke om elevene tok i bruk andre strategier, dersom de var bedt om å arbeide etter gitte tidsrammer i hver oppgave. Slik sett leder studien til andre områder som åpner opp for videre forskning i estimering av brøk.

Studien antyder at matematikk er mye mer enn å bare utføre beregninger. Det handler om å oppdage mønstre, resonnere og avdekke sammenhenger. Antonsen (2013) sier at matematikk handler om å gjøre antagelser og resonnere seg frem til konsekvensen av disse antagelsene. I innledningen ble det nevnt at estimering kan være et verktøy for å resonnere og kan brukes for å tenke og forstå matematikk. Funnene viser at elevene er i stand til å ta i bruk en rekke strategier for å skape mening om addisjon og multiplikasjon av brøk ved å estimere. Det betyr ikke nødvendigvis at evnen til å estimere er med på å utvikle elevers brøkforståelse, men understreker at det kan benyttes som et læringsverktøy. Slik sett er ikke estimering bare et verktøy for at resonnere, men kan også gi mulighet til å beherske kunsten å tenke i matematikk.

REFERANSER

Antonsen, R. (2013, 20.12.). Matematikk og forståelse. *Aftenposten*. Hentet fra http://www.aftenposten.no/viten/Matematikk-og-forstaelse-100622b.html

Bergem, O.K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O.K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (red.), Vi kan lykkes i realfag: resultater og analyser fra TIMSS 2015 (s. 22-43). Oslo: Universitetsforlaget. Hentet fra https://www.idunn.no/file/pdf/66911876/vi-kan-lykkes-i-realfag.pdf.

Booth, J.L. & Siegler, R.S. (2006). Developmental and Individual Differences in Pure Numerical Estimation. *Developmental Psychology, 42*(1), 189-201. doi:10.1037/0012-1649.41.6.189

Burns, M. (2007). *About teaching matematics: A K-8 Resource* Hentet fra http://ebookcentral.proquest.com/lib/ntnu/reader.action?docID=3330489

Carpenter, T.P., Copurn, T.G., Reys, R.E. & Wilson, J.W. (1976). Notes from National Assessment: Estimation. *The Arithmetic Teacher, 23*(4), 296-302.

Charalambous, C.Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in mathematics, 64*(3), 293-316. doi:10.1007/s10649-006-9036-2

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7 utg.). London: Routledge.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 45-55. doi:10.2307/749163

Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harriss, L. & Hook, L. (1996). Estimation Strategies of Four Groups. *Mathematical Cognition, 2*(2), 113-135. doi:10.1080/135467996387499

Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2 utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Fosnot, C.T. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work : constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, N.H: Heinemann.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education, 22*(3), 170-218. doi:10.2307/749074

Hanson, S.A. & Hogan, T.P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 483-499. doi:10.2307/749654

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., . . . Human, P. (1997). *Making sense : teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, N.H: Heinemann.

Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *The Arithmetic Teacher, 36*(6), 12-16.

Illeris, K. (2006). *Læring* (2 utg.). Frederiksberg: Roskilde Universitetsforlag.

Johanning, D.I. (2011). Estimation's role in calculations with fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(2), 96. doi:10.5951/mathteacmiddscho.17.2.0096

Kjærnsli, M. & Olsen, R.V. (2013). *Fortsatt en vei å gå : norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforlaget.

Lamon, S.J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding : essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York: Routledge.

Lefevre, J.-A., Greenham, S.L. & Waheed, N. (1993). The Development of Procedural and Conceptual Knowledge in Computational Estimation. *Cognition and Instruction, 11*(2), 95-132. doi:10.1207/s1532690xci1102_1

Lemaire, P., Lecacheur, M. & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54*(2), 141-148. doi:10.1037/h0087336

Levine, D.R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 350-359. doi:10.2307/749010
Liu, F. (2009). Computational Estimation Performance on Whole-Number Multiplication by Third-and Fifth-Grade Chinese Students. *School Science and Mathematics, 109*(6), 325-337. doi:10.1111/j.1949-8594.2009.tb18102.x
Ma, L. (2010). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics : Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States* (2 utg.). Hoboken: Taylor and Francis.
Mack, N.K. (1998). Building a foundation for understanding the multiplication of fractions. *Teaching Children Mathematics, 5*(1), 34-38.
Magoon, A.J. (1977). Constructivist approaches in educational research. *Review of Educational Research*, *47*(4), 651-693.
McIntosh, A., Reys, R.E. & Reys, B.J. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics teaching in the Middle school, 2*(5), 322-327.
McNamara, J. & Shaughnessy, M.M. (2015). *Beyond pizzas and pies : 10 essential strategies for supporting fraction sense, grades 3-5* (2 utg.). Sausalito, California: Math Solutions.
Mink, D.V. (2010). *Strategies for teaching in mathematics* Hentet fra https://books.google.no/books?hl=no&lr=&id=OJvzCwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=strategies+in+teaching+mathematics&ots=Pyl06uog1K&sig=us1m6JKVDHszQqbtG_8MzCkcjew&redir_esc=y#v=onepage&q=strategies%20in%20teaching%20mathematics&f=false
Nilssen, V.L. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.
Noddings, N. (1990). Chapter 1: Constructivism in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4*, 7-18+195-210.
Postholm, M.B. & Jacobsen, D.I. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.
Reys, B., Kim, O.-K. & Bay, J. (1999). Establishing fraction benchmarks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(8), 530-532.
Reys, B.J. (1994). Promoting Number Sense in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 1*(2), 114-120.
Reys, B.J., Reys, R.E. & Penafiel, A.F. (1991). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics, 22*(4), 353-375. doi:10.1007/BF00369295
Reys, R.E., Reys, B.J., Nohda, N. & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for research in mathematics education, 26*(4), 304-326. doi:10.2307/749477
Reys, R.E., Reys, B.J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. & Shimizu, K. (1991). Computational Estimation Performance and Strategies Used by Fifth- and Eighth-Grade Japanese Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(1), 39-58. doi:10.2307/749553
Reys, R.E., Rybolt, J.F., Bestgen, B.J. & Wyatt, J.W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 183-201. doi:10.2307/748555
Reys, R.E. & Yang, D.-C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237. doi:10.2307/749900

Rubenstein, R.N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics education, 16*(2), 106-119. doi:10.2307/748368

Siegler, R.S. & Booth, J.L. (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development, 75*(2), 428-444. doi:10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Son, J.-W. & Senk, S.L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 117-142. doi:10.1007/s10649-010-9229-6

Sowder, J.T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. I J. Hiebert & M. Behr (red.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (s. 182-197). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J.T. (1992). Estimation and number sense. I D.A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371-389). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J.T. & Schappelle, B.P. (1989). Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education. Hentet fra http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED317413.pdf.

Sowder, J.T. & Wheeler, M.M. (1989). The Development of Concepts and Strategies Used in Computational Estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 130-146. doi:10.2307/749278

Tjora, A. (2012). *Kvalitativ forskningsmetoder i praksis* (2 utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Hentet fra https://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguage=no.

Utdanningsdirektoratet. (2013a). *Kompetansemål etter 7.årssteget*. (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-7.-arssteget.

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *Læreplan i matematikk fellesfag: Hovudområde*. (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader.

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). *Det første innføring av brøkbegrepet*. Hentet fra https://www.udir.no/pagefiles/veiledninger/matematikk/undervisningsopplegg/2/broek_uo.pdf.

Van de Walle, J.A., Karp, K.S. & Bay-Williams, J.M. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (8 utg.). Essex: Pearson Education Limited.

Von Glasersfeld, E. (2001). Radical constructivism and teaching. *Prospects, 31*(2), 161-173. doi:10.1007/BF03220058

VEDLEGG A: SAMTYKKESKJEMA

Samtykke til deltakelse

Foreldres/foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteten knyttet til forskningsprosjektet til Elisabeth Skrondal.

Barns navn/klasse:____

Jeg samtykker i at: (Kryss av der det passer)

☐ Mitt barn deltar i intervjuer og at det gjøres **<u>lydopptak</u>** av intervjuene til transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke skal nevnes eller identifiseres, brukes i publikasjoner og begivenheter.

☐ Det tas **<u>videoopptak</u>** av barnet, som en del av matematikkundervisning. Videoen kan brukes av forskerteamet og skolen for forskningsarbeidet. Videoen skal ikke offentliggjøres.

☐ Det **<u>tas bilder av barnets elevarbeid</u>** i matematikkfaget. Bildene kan brukes av forskeren i forskningsarbeidet og vil anonymiseres.

Sted og dato: ____

Foreldres/foresatte underskrift: ____

Vennligst lever svarslippen til kontaktlærer så snart som mulig, senest 07.10.16.

Tusen takk!

VEDLEGG B: INFORMASJON TIL LÆRERE OG FORESATTE

Elisabeth Skrondal
NTNU
Avd. for lærer- og tolkeutdanning
7053 Trondheim

Tlf: [redacted]
Mail: [redacted]

Trondheim 21.09.16

Til foreldre/foresatte for elever på 6. trinn ved [redacted]

Anmodning om tillatelse til video- og/eller lydopptak av gruppeintervju.

Som masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU, Avdeling for lærer- og tolkeutdannning, skal jeg i løpet av studieåret 2016-2017 gjennomføre et masterprosjekt i matematikk. Formålet med prosjektet er å utforske elever sitt arbeid med brøk på barnetrinnet. I prosjektet studerer jeg hvordan ulike elever arbeider med ulike områder innen brøk, spesielt estimering og addisjon i brøk, og hvordan man kan få bukt med eventuelle misoppfatninger.

For å samle inn hensiktsmessig data har jeg i samråd med veileder kommet frem til at video- og/eller lydopptak av gruppeintervju med elever vil være mest egnet i mitt masterprosjekt. I tillegg er det ønskelig å samle inn elevarbeid. Jeg ber derfor om tillatelse fra deg/dere om å ta video- og/eller lydopptak av elever på 6. trinn ved Steindal skole. Forutsetningen for en slik tillatelse er at innsamlet materiale blir behandlet med respekt og anonymisert, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for personvern. Deltakelse av prosjektet er frivillig og man til enhver tid trekke sin deltakelse uten å oppgi noen grunn.

Opptakene vil kun bli sett/hørt av meg, Elisabeth Skrondal, og min veileder, Ole Enge. Det vil ikke være mulig å spore tilbake til enkeltpersoner når materialet som skal presenteres for andre. Etter at prosjektet er gjennomført vil innsamlet data bli slettet senest 01.07.17.

Elevens forhold til skolen eller undervisningen vil ikke få noen innvirkning dersom eleven velger å ikke delta på prosjektet. Læreren sin undervisning vil derfor fungere som planlagt. Likevel er det ønskelig at flest mulig kan delta i prosjektet, og at deres barn kan bidra til økt forståelse for interesserte innen temaet. Foreldre/foresatte bes derfor om å fylle ut svarslippen på neste side om det gis tillatelse eller ikke til video- og/eller lydopptak. Ta gjerne kontakt med meg (se øverst) eller min veileder Ole Enge (tlf: [redacted]) dersom du/dere vil vite mer om prosjektet eller hva det innsamlede materialet skal brukes til.

På forhånd takk.

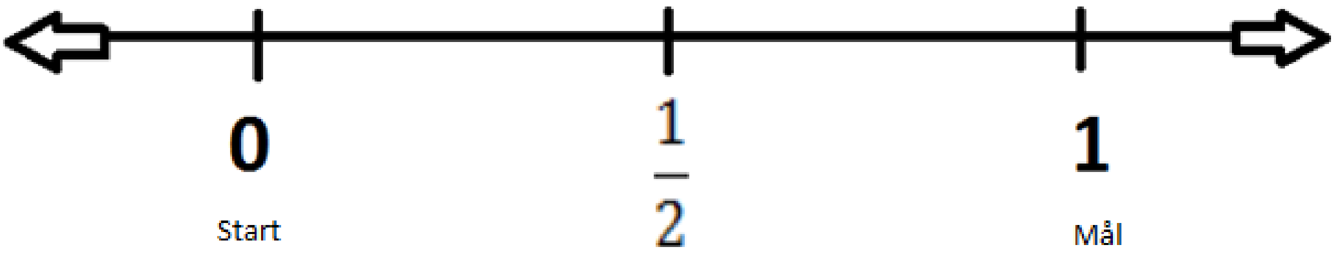
Vennlig hilsen
Elisabeth Skrondal

VEDLEGG C: OPPGAVESETT

Oppgave 1

Bjørn, Arne, Siri, Amanda og Torleif leker rødt lys. Brøkene under forteller hvor langt de allerede har beveget seg fra start. Kan du estimere hvor vennene skal plasseres på tallinjen for å vise omtrent hvor langt hver enkelt er fra start til mål?

Bjørn $\frac{3}{7}$ Arne $\frac{6}{10}$ Siri $\frac{5}{15}$ Amanda $\frac{7}{9}$ Torleif $\frac{1}{3}$



Oppgave 2

$4 \bullet 1$

$4 \bullet \frac{1}{2}$

$4 \bullet \frac{8}{10}$

$4 \bullet \frac{6}{8}$

$2 \bullet \frac{6}{8}$

$\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$

Oppgave 3

d) Er $\frac{1}{7} + \frac{4}{9}$ mer eller mindre enn $\frac{1}{2}$? Begrunn svaret.

e) Er $\frac{7}{8} + \frac{1}{10}$ mer eller mindre enn 1? Begrunn svaret.

f) Er $3 \bullet \frac{2}{5}$ mer eller mindre enn 1? Begrunn svaret.

Oppgave 4

Hvilket tall kan du skrive i boksene for at det skal bli sant?

a) $\frac{\blacksquare}{7} + \frac{\blacksquare}{9}$ **= Omtrent 1**

b) $\frac{\blacksquare}{\blacksquare} + \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ **= Omtrent** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

c) 2 • $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ **= Omtrent 1**

VEDLEGG D: GODKJENNING FRA NSD

NSD

Ole Enge
Institutt for grunnskolelærerutd, 1-7 og bachelor i arkiv og samlingsforvaltning NTNU

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 18.10.2016 Vår ref: 50098 / 3 / AGL Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 21.09.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

50098	*På hvilken måte kan bruk av estimering bidra til utvikling i addisjon i brøk for elever på 6.trinn?*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ole Enge*
Student	*Elisabeth Skrondal*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 20.06.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.