Hilde Hoel Stenmark

# Figurmønster og semiotiske modeller

## En studie av hvordan semiotiske modeller påvirker elevenes resonnement og generalisering

Hovedoppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Odd Tore Kaufmann
Trondheim, mai 2017

Hovedoppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Hilde Hoel Stenmark

# Figurmønster og semiotiske modeller

## En studie av hvordan semiotiske modeller påvirker elevenes resonnement og generalisering

Hovedoppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Odd Tore Kaufmann
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

# Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min masterutdanning ved institutt for lærerutdanning ved NTNU. I løpet av studietiden har jeg utviklet en særlig interesse for matematikkundervisning og elevers læring og forståelse for matematikk. Det ble derfor naturlig at jeg valgte å fortsette med studiet i form av masterprogrammet for matematikkdidaktikk etter tredje studieår ved grunnskolelærerutdanningen.

Å skrive masteroppgave har vært en krevende prosess. Det er tidkrevende og utfordrende å gjøre et dypdykk i elementer ved matematikk og matematikkundervisning, og utføre et forskningsprosjekt på egenhånd. Samtidig har prosessen gitt meg gode kunnskaper om elever, samtaler og bruk av figurmønster i undervisningen på barneskolen. Jeg gleder meg til å starte for fullt som lærer i grunnskolen!

I den spennende og utfordrende prosessen det har vært å skrive denne masteroppgaven har det vært godt å ha noen støttespillere på laget. En særlig takk til gode studievenner ved NTNU. Det har vært godt å dele frustrasjon og glede med dere. Dere har beriket studietiden min. Takk til familien min for korrekturlesing og for at dere har oppmuntret meg hele veien. Det er godt å komme hjem til dere. En stor takk også til læreren og elevene ved skolen jeg utførte studien. Dere har vært samarbeidsvillige, og det har vært spennende å jobbe med dere.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til min veileder, Odd Tore Kaufmann, som har vært tilgjengelig med konkrete og konstruktive innspill gjennom hele prosessen.

Oppegård, mai 2017

Hilde Hoel Stenmark

# Sammendrag

I denne masteroppgaven presenteres min studie knyttet til bruk av ulike semiotiske modeller i arbeid med figurmønsteroppgaver. Figurmønsteroppgaver er med bakgrunn i forskning anbefalt som oppgaver innen området tidlig algebra, men det er også vist at elever har utfordringer med å uttrykke den generelle utviklingen i et figurmønster på en korrekt matematisk måte. Tidlig algebra har fokus på å undersøke og utforske sammenhenger i matematikk, og elevenes evne til å resonnere, argumentere og generalisere. Figurmønsteroppgaver gir en visuell geometrisk kontekst for å undersøke en generell utvikling. Den visuelle konteksten trekkes frem som en viktig grunn til at figurmønsteroppgaver anbefales innen tidlig algebra, da den visuelle konteksten gir et godt utgangspunkt for å etablere forståelse for sammenhengen mellom en generell utvikling i figurmønsteret og en generell matematisk beskrivelse av denne utviklingen. I denne studien undersøker jeg hvordan ulike visuelle modeller av et figurmønster påvirker elevenes evne til å resonnere og generalisere.

Studien baserer seg på kvalitativ forskning og er en casestudie av elever på 6.trinn ved en mellomstor skole i Oslo. Jeg har undersøkt hvordan to grupper på 3 elever arbeider med tre ulike visuelle fremstillinger av et figurmønster som har samme matematiske utvikling. Selv har jeg vært delaktig i elevenes arbeidsprosess ved å lede elevene i en felles samtale og diskusjon, og stilt konkrete spørsmål knyttet til sammenhengen mellom elevenes resonnement og generaliseringer, og den visuelle semiotiske modellen av figurmønsteret. Datamaterialet som presenteres og analyseres er hentet fra lydopptak av elevenes arbeid og den felles diskusjonen, innsamling av elevenes skriftlige arbeider, samt feltobservasjon og feltnotater.

Resultatene fra denne undersøkelsen viser at de visuelle semiotiske presentasjonene av figurmønsteret bidro positivt til at elevene evner å produsere flere gode generaliseringsstrategier. En konkret kontekst og en rik visuell presentasjon av figurmønsteret ga et godt utgangspunkt for arbeid med oppgavene. Det hemmet likevel ytterligere manipulasjon av den visuelle modellen, og dermed også ytterligere generaliseringsstrategier. Elevenes manipulasjon av de visuelle modellene var en viktig faktor for elevenes utvikling av ulike generaliseringsstrategier. Der elementene i den visuelle semiotiske presentasjonen av figurmønsteret dannet formen til en geometrisk figur var elevenes manipulasjon av den visuelle presentasjonen størst, og dette ga også opphav til flest ulike generaliseringsstrategier.

# Innholdsfortegnelse

1 Innledning ... 1
1.1 Bakgrunn og motivasjon ... 1
1.2 Figurmønster – hva og hvorfor ... 2
1.4 Hensikt og forskningsspørsmål ... 2
1.5 Oppbygging av oppgaven ... 3
2 Teori ... 5
2.1 Sosiokulturell læringsteori ... 5
2.1.1. Vygotsky og den sosiokulturelle læringsteorien ... 5
2.1.2 Språk og samhandling ... 6
2.2 Semiotikk og algebra ... 7
2.3 Betraktninger for bruk av figurmønster som en tilnærming til algebra ... 8
2.3.1 Hva er algebra og algebraisk tenkning? ... 8
2.3.2 Ulike tilnærminger til algebra i skolen – figurmønster eller problemløsning ... 9
2.3.3 Figurmønster som en introduksjon til algebra ... 11
2.4 Generalisering og resonnering ... 12
2.4.1 Generalisering og resonnering – hva er det? ... 12
2.4.2 Generaliseringsstrategier ... 13
2.5 Argumentasjon og bevis ... 14
2.5.1 Naiv empirisme ... 15
2.5.2 Et avgjørende eksperiment ... 15
2.5.3. Generisk eksempel ... 15
2.5.4 Tankeeksperiment ... 15
2.5.5 Bruk av, og overgang mellom de ulike bevistypene til Balacheff ... 16
2.6 Det visuelle som bakgrunn for argumentasjon og generalisering ... 17
2.6.1 Visuell persepsjon ... 17
2.6.2 Visuell persepsjon som bakgrunn for generalisering ... 18
2.7 Sosial interaksjon og lærers rolle ... 19
3 Metode ... 21
3.1 Forskningsdesign – en casestudie ... 21
3.2 Forarbeid og valg av informanter ... 22
3.3 Gjennomføring og kontekst ... 23
3.4 Observasjon, forskerrolle og forskerposisjon ... 24
3.5 Datainnsamling og bearbeiding av data ... 25

3.6 Etiske hensyn ........ 25
3.7 Generaliserbarhet, gyldighet og pålitelighet ........ 26
3.7.1 Generaliserbarhet ........ 26
3.7.2 Gyldighet og pålitelighet ........ 27
3.8 Presentasjon av oppgavene som brukes i datainnsamlingen ........ 29
3.8.1 Oppgave 1 ........ 29
3.8.2 Oppgave 2 ........ 30
3.8.3 Oppgave 3 ........ 32
4 Analyse ........ 35
4.1 Oppgave 1 ........ 35
4.1.1 Ikke-eksplisitt generalisering ........ 35
4.1.2 Eksplisitt generalisering og resonnering ........ 37
4.2 Oppgave 2 ........ 43
4.2.1 Ikke-eksplisitt generalisering ........ 44
4.2.2 Eksplisitt generalisering og resonnering ........ 45
4.3 Oppgave 3 ........ 54
4.3.1 Ikke-eksplisitt generalisering ........ 54
4.3.2 Eksplisitt generalisering og resonnering ........ 55
5 Drøfting ........ 61
5.1 Semiotiske modeller og visuell oppfattelse ........ 61
5.2 Erfaringsgrunnlag og manipulasjon av modellene ........ 62
5.3 Visuelle semiotiske modeller og gestalteffekten ........ 63
5.4 Oppsummering av hvordan de semiotiske modellene påvirker elevenes resonnement og generalisering ........ 68
6 Avslutning ........ 71
6.1 Didaktiske implikasjoner ........ 71
6.1.1 Sosial samhandling og interaksjon ........ 71
6.1.2 Bruk av ulike semiotiske modeller ........ 73
6.2 Avsluttende kommentarer ........ 74
Referanseliste ........ 77
Vedlegg ........ 81
Vedlegg 1 – Oppgavene elevene arbeidet med ........ 81
Vedlegg 2 – informasjonsskriv og samtykkeerklæring ........ 83

# 1 Innledning

Denne masteroppgaven er en studie av hvordan ulike semiotiske modeller av et figurmønster påvirker elevenes evne til å resonnere og generalisere. Studien er gjennomført med et utvalg elever på 6. trinn. I dette kapittelet presenteres bakgrunn og motivasjon for gjennomføring av undersøkelsen, samt en redegjørelse for valg av tema. Deretter presenteres studiens forskningsspørsmål og oppgavens oppbygging beskrives.

## 1.1 Bakgrunn og motivasjon

I løpet av lærerutdanningen ved NTNU har mitt syn på hva matematikk er og hvordan undervisningen i matematikk kan utarte seg forandret seg. Egen oppfatning av matematikk har utviklet seg fra et tradisjonelt syn på matematikk som studiet av aritmetiske operasjoner og prosedyrer med standardalgoritmer og «fordi det bare er sånn», til et syn på matematikk som relasjoner og sammenhenger mellom tall, operasjoner og prosedyrer, samt argumentasjon og resonnering rundt «hvorfor er det slik» og «hvordan kan vi vite det med sikkerhet?». Et slikt skifte i tenkning rundt hvilke elementer som er grunnleggende og viktige i matematikkundervisning står i sammenheng med et økt fokus på tidlig algebra i skolen. Hensikten med et økt fokus på tidlig algebra er å styrke elevenes kompetanse i matematikk generelt, og algebra spesielt.

I møte med den «nye» matematikken der tidlig algebra står i fokus har jeg selv utviklet min egen matematiske kompetanse, så vel som min undervisningskompetanse. Jeg ser verdien av å benytte meg av matematiske samtaler, argumentasjon og generalisering på alle trinn i grunnskolen. Egen erfaring fra arbeid med elever viser også at elevene trives med slike oppgaver, og at det kan generere nyttige diskusjoner rundt ulike matematiske tema. Egen erfaring fra lærerstudier og arbeid med elever har slik vært en vesentlig faktor for temavalget i denne masteroppgaven.

Tidlig algebra omhandler elevenes evne til å se sammenhenger i matematikk, å kunne resonnere, argumentere og generalisere. Regning og tallforståelse er fremdeles viktige komponenter, men det er også viktig å kunne begrunne og argumentere for hvorfor prosedyrer fungerer, og utforske relasjoner, slik at matematikken ikke bare blir pugging av regler og prosedyrer uten videre forståelse. Den grunnleggende forståelse for hvorfor ulike prosedyrer fungerer og hvilke egenskaper som kreves for at noe skal fungere er en viktig faktor i god matematikkopplæring.

## 1.2 Figurmønster – hva og hvorfor

Et område innen tidlig algebra er oppgaver som omhandler figurmønster. Oppgaver innen figurmønster er med bakgrunn i forskning anbefalt som en introduksjon til tidlig algebra (Kaput, 2008; Lannin, 2005). En typisk figurmønsteroppgave gir en visuell, geometrisk kontekst for en figur som utvikler seg på en bestemt måte, og man skal finne en regel som kan brukes for å avgjøre andre tilfeller i figurmønsteret. Det visuelle elementet i figurmønsteret trekkes frem som en særlig styrke ved figurmønsteroppgaver (Lannin, 2005) og ved hjelp av den visuelle oppfatningen kan elevene beskrive og forklare en regelmessighet som er lik for alle figurer som inngår i figurmønsteret.

Da jeg ble introdusert for oppgaver med figurmønster ble jeg raskt interessert i denne oppgavetypen. Oppgavene kan varieres og endres på utallige måter, og kan tilpasses den enkeltes utviklingsnivå med få grep. Egen erfaring med gjennomføring av oppgaver med figurmønster på ulike klassetrinn i barneskolen viser også at elevene motiveres av slike oppgaver, og at de ofte frembringer fruktbare diskusjoner der elevene argumenterer, resonnerer og generaliserer for egen oppfatning og forståelse av figurmønsteret. Oppgaven kan også være en god introduksjon til arbeidet med ukjente, og symbolske algebraiske uttrykk. Det visuelle geometriske elementet kan gjøre det lettere for elevene å se hva de ulike elementene i et algebraisk uttrykk representerer i figurmønsteret. På denne måten kan algebraiske uttrykk tillegges mening på et ytterligere nivå enn det rent symbolske.

I gjennomføringen av denne studien er det lagt opp til at elevene skal samarbeide og dele sine oppfatninger og resonnement knyttet til utviklingen i figurmønsteret. Den muntlige kommunikasjonen mellom elevene er særlig vektlagt, og er sammen med elevenes skriftlige arbeider hovedkilden til datamaterialet. Den visuelle oppfatningen av et figurmønster varierer ofte fra elev til elev, og kan frembringe gode og fruktbare matematiske diskusjoner og samtaler. Det er lagt opp til at elevene skal benytte seg av flere semiotiske presentasjoner i arbeid med figurmønsteret, slik som visuelle, geometriske, verbale, og symbolske presentasjoner. Den muntlige kommunikasjonen mellom elevene kan gi et større innblikk i elevenes forståelse for sammenhengen mellom de ulike semiotiske presentasjonene av det aktuelle figurmønsteret.

## 1.4 Hensikt og forskningsspørsmål

Hensikten med denne studien er å undersøke hvordan ulike semiotiske presentasjoner av ett og samme figurmønster påvirker elevenes evne til å resonnere og generalisere. Studien er gjennomført på 6.trinn, med den begrunnelsen at elever som ikke er vant til å jobbe med argumentasjon, resonnering og generalisering i matematikk ofte har vanskeligheter med å sette ord på egen tenkning og begrunnelser. Jeg anså det derfor nødvendig å velge eldre elever ved barneskolen, for å øke sannsynligheten for at elevene som deltar i studien evner å sette ord på egen resonnering og generalisering. Elevene har ikke fått noen gjennomgang av figurmønsteroppgaver på forhånd, men skal etter kompetansemålene i kunnskapsløftet kunne utforske og beskrive strukturer og forandringer i geometriske mønster med figurer, ord og formler (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Utgangspunktet for denne studien er forskningsspørsmålet:

*Hvordan påvirker ulike semiotiske modeller av et figurmønster elevenes evne til å resonnere og generalisere?*

## 1.5 Oppbygging av oppgaven

Masteroppgaven er inndelt i 6 kapitler. Kapittel 1 omhandler som beskrevet bakgrunn og motivasjon for oppgavens tema, begrunnet i egen erfaring og teoretiske betraktinger. Hensikten med studien og forskningsspørsmål er presentert i slutten av dette kapittelet, sammen med en beskrivelse av oppgavens oppbygging.

Videre følger kapittel 2 som er et teoretisk kapittel der relevant teori beskrives og presenteres. Dette kapittelet tar for seg sosiokulturell læringsteori med særlig fokus på språklige prosesser som et viktig element i læringen. Deretter gjøres det rede for tidlig algebra, og hvordan figurmønster kan benyttes som en inngang til arbeid med tidlig algebra. Videre følger en redegjørelse for hvordan figurmønsteroppgaver kan være et utgangspunkt for generalisering, resonnering, argumentasjon og bevis, og teoretiske betraktninger rundt bruk av figurmønster som en introduksjon til algebra. Avslutningsvis i kapittelet drøftes teoretiske betraktninger angående det visuelle aspektet ved figurmønsteroppgaver som utgangspunkt for generaliseringsprosessen.

Kapittel 3 er metodekapittelet og tar for seg en detaljert beskrivelse og begrunnelse av metoden som er benyttet i denne oppgaven. Innledningsvis i dette kapittelet redegjør jeg for valg av det aktuelle forskningsdesignet – en casestudie. Videre redegjøres det for relevante valg og aspekt ved valg av informanter, samt en detaljert beskrivelse av gjennomføring og kontekst for elevenes arbeid med figurmønsteroppgaver. Deretter presenteres og drøftes viktige aspekt ved observasjon som metode og egen forskerrolle, samt faktorer som omhandler datainnsamling og bearbeiding av data. Ulike aspekt knyttet til etiske hensyn, generaliserbarhet, gyldighet og pålitelighet drøftes i lys av valg som er tatt i forbindelse med metoden som er benyttet i denne studien. Avslutningsvis i metodekapittelet presenteres de tre oppgavene elevene arbeidet med i denne studien, og det gis en analyse av resonnement og generaliseringsstrategier det kan tenkes elevene kan benytte seg av i arbeidet med de ulike oppgavene.

I kapittel 4 presenteres og analyseres de data som er samlet inn gjennom lydopptak, elevenes skriftlige notater og egne feltnotater. Dette kapittelet er strukturert etter de ulike oppgavene, og data for hver av oppgavene elevene arbeidet med presenteres og analyseres for seg. Analysen tar for seg elevenes bruk av semiotiske modeller og fokuserer på elevenes ikke-eksplisitte og eksplisitte generalisering for hver av de tre oppgavene.

Videre følger kapittel 5, som drøfter sentrale funn ved analysen og tar for seg ulike faktorer som ser ut til å påvirke elevenes resonnement og generaliseringsstrategier i arbeidet med de ulike figurmønsteroppgavene. Avslutningsvis i dette kapittelet trekkes det fram faktorer som kan gi et svar på forskningsspørsmålet for oppgaven; *hvordan påvirker ulike semiotiske modeller av et figurmønster elevenes evne til å resonnere og generalisere?*

Kapittel 6 presenterer noen didaktiske implikasjoner med bakgrunn i resultatene av denne studien. Sentrale resultater og funn oppsummeres, og det gis noen avsluttende kommentarer.

# 2 Teori

I dette kapittelet presenteres relevant teori for den studien som er utført. Innledningsvis gis det en innføring i sosiokulturell læringsteori og bruken av figurmønster som en tilnærming til algebra. Deretter følger en redegjørelse for ulike teoretiske betraktninger og modeller som kan belyse resonnering, generalisering og argumentasjon i arbeid med figurmønsteroppgaver. Avslutningsvis presenteres relevant teori for visuelle faktorers påvirkning på resonnement og generalisering, og hvordan den sosiale interaksjonen og lærerens rolle kan påvirke elevenes arbeid med figurmønsteroppgaver.

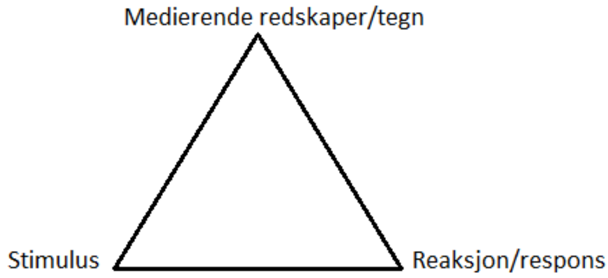
## 2.1 Sosiokulturell læringsteori

I pedagogisk forskning skiller man mellom ulike læringsteorier, og hvordan læring og undervisning tolkes, samt hvilke faktorer som er ansett som viktige for å fremme læring er ulikt i de forskjellige læringsteoriene. Jeg vil i det følgende redegjøre for relevant teori knyttet til den sosiokulturelle læringsteorien og hvordan språk og samhandling er ansett som viktige komponenter for læring i sosiokulturell teori.

### 2.1.1. Vygotsky og den sosiokulturelle læringsteorien

Historisk sett er det særlig to tradisjoner for synet på læring som har vært vektlagt innen pedagogisk forskning; rasjonalisme og empirisme. Mens rasjonalismen ser på utvikling og læring som noe som kommer innenfra mennesket selv, anses læring innen empirismen som noe som man erverver seg (Säljö, 2006). Säljö (2006) peker imidlertid på at hverken rasjonalismen eller empirismen tar i betraktning mennesket som et historisk og sosialt vesen som samspiller med sine omgivelser. Han fremhever videre at dersom vi skal forstå menneskelig læring og utvikling må man se individets kunnskaper og ferdigheter i sammenheng og relasjon med de ressurser og utfordringer som finnes i omgivelsene. Det Säljö her omtaler er det sosiokulturelle læringsperspektivet som har sitt utspring i Vygotsky.

Vygotsky (1978) var kritisk til den oppfatning at menneskelige handlinger og ferdigheter kom som en ren respons på ulike stimuli. Han mente derimot at for å forstå og forklare høyere mentale ferdigheter som problemløsning, resonnering og kreativitet må, vi ta i betraktning hvilken rolle ulike tegn og redskaper har i våre menneskelige handlinger (Säljö, 2006; Vygotsky, 1978). Vygotsky (1978) brukte begrepene «redskaper» eller «verktøy» og «mediering» for å beskrive prosessen der vi interagerer med vår sosiale omverden. Samspillet mellom stimulus, mediering og respons ble illustrert med en trekant (se figur 1). Det sentrale i Vygotskys teori er at ulike redskaper fungerer som et hjelpemiddel i samspillet med omverdenen. De ulike redskapene medierer omverdenen for oss i ulike aktiviteter, og dette er helt sentralt i den sosiokulturelle teorien (Säljö, 2006; Vygotsky 1978).




*Figur 1 Vygotskys idè om mediering. Hentet fra Säljö (2006)*

Både tegn (språklige redskaper) og fysiske artefakter anses av Vygotsky som menneskeskapte ressurser med hensikt for handling og problemløsning. Det er ved bruk av de medierende redskapene vi skaper mening og betydning av vår omverden, og de medierende redskapene tilegnes gjennom kulturelle erfaringer (Säljö, 2006).

### 2.1.2 Språk og samhandling

I et sosiokulturelt læringsperspektiv er språk en spesielt viktig kilde til å utvikle forståelse (Steele, 2001; Säljö, 2006). Språket anses som en særlig viktig form for redskap, og samtalen trekkes frem som et viktig element i læringsprosessen (Säljö, 2006). Samtalen er et uttrykk for mediering, der deltakerne i samtalen fungerer som medierende ressurser for hverandre. Ofte kan det være lettere å forstå resonnement og prinsipper når medieringen skjer muntlig sammenlignet med skriftlig. I den muntlige samtalen kan deltagerne tilpasse seg hverandre og samordne sin forståelse, samtidig som måter å tenke og resonnere på som kommer fram i samtalen kan overtas av de andre deltakerne (Säljö, 2006). Det er derfor naturlig å studere samhandling mellom mennesker når de er aktive med en oppgave som en metode for å oppnå kunnskap om individenes arbeid med de enkelte oppgaver. Det muntlige språket og den sosiale samhandlingen kan gi informasjon som er vanskelig å få tilgang til på andre måter.

I tillegg til at individet har mulighet til å tilegne seg kunnskap som deles i den aktive samtalen konstruerer den enkelte egen kunnskap ved å dele egen resonnering i en kulturell praksis (Battista, 1999; Cobb & Yackel, 1995). Vygotsky (1978) omtaler denne prosessen der individet konstruerer kunnskap ut fra deltagelse i sosiale praksiser som en internaliseringsprosess. Internaliseringsprosessen er styrt av semiotiske prosesser, der bruk av naturlig språk, tegn og matematiske symboler inngår. Læring forstås som et spørsmål knyttet til hvordan individet approprierer (nyttiggjør seg) kunnskaper og ferdigheter de eksponeres for (Säljö, 2006). Et viktig moment i tillegg til samtalen i et sosiokulturelt læringssyn er situasjonen læringen foregår i. Kunnskap og læring er situert, hvilket betyr at det er i sosiale praksiser læringen finner sted. Skal man studere læring i et sosiokulturelt perspektiv må man også ta hensyn til læringens situerte karakter (Säljö, 2006). Den situasjonen der læringen foregår må beskrives og undersøkes, og hvordan individet samspiller med og benytter seg av medierende redskap må inngå som en del av fokuset.

Ved studier av læring i et sosiokulturelt perspektiv er det hensiktsmessig å se på relasjonene mellom menneskers tenkning, inskripsjoner og artefakter som en dynamisk prosess (Säljö, 2006). Et sentralt aspekt er hvordan individet benytter seg av inskripsjoner og andre redskaper, og hvordan de tillegger ulike inskripsjoner mening ut fra egen tolkning og resonnering (Säljö, 2006). Dette understrekes også av Wertsch, del Río, og Alvarez (1995) som viser til at de medierende verktøy er koblingen mellom individets konkrete handlinger (inkludert mentale handlinger) og kulturelle og historiske settinger. Sosialt samspill og bruk av medierende redskaper er slik et sentralt aspekt ved internaliseringsprosessen, og vil også være sentralt i denne oppgaven.

## 2.2 Semiotikk og algebra

Internaliseringsprosessen der individidet konstruerer sin kunnskap har to hovedaspekt; den er sosial, og den styres av semiotiske prosesser (Bussi & Mariotti, 2008). Det faktum at internaliseringsprosessen er sosial medfører at bruken av tegn er en sentral del av den enkeltes læring. I hovedsak gjelder dette bruken av det naturlige språket, men inkluderer også andre former for tegn og matematiske symboler. Bruken av tegn for å løse en oppgave er relatert både til det å finne en løsning på oppgaven, men også til det å kommunisere med andre deltakere i den sosiale settingen der den aktuelle oppgaveløsningen finner sted (Bussi & Mariotti, 2008). Elevene konstruerer sin matematiske forståelse gjennom en interaksjon mellom lærer og elev, eller elevene i mellom (Morgan, 2006). Dermed blir kommunikasjon og bruken av semiotiske tegn en sentral del av læringsprosessen.

Matematiske tegn, symboler og formler er ansett som sentrale aspekter i matematikk, men er også store utfordringer for å forstå matematikk korrekt (Steinbring, 1998). Et viktig aspekt i matematikken er å undersøke og forstå sammenhenger mellom tall, operasjoner og prosedyrer. Steinbring (1998) påpeker at det særlig er sentralt å se på hvordan matematiske tegn og symboler tillegges mening gjennom interaktive sosiale prosesser av læring og undervisning.

Hvis ulike tegn utgjør et matematisk konsept, må det være en produktiv mediering mellom symbolet (tegnet) og objektet (det matematiske konsept) (Steinbring, 1998). Radford og Peirce (2006) påpeker at selv om algebraisk tenkning ofte er forbundet med bruk av bokstaver er det ikke bokstavbruken som avgjør hvorvidt man arbeider algebraisk eller ikke. Algebraisk tenkning eller arbeid kan like gjerne involvere andre semiotiske systemer slik som verbalspråk, tegninger og andre symboler. Det vesentlige er hvordan individet bruker tegn for å konstruere mening i arbeid med algebraiske oppgaver. I denne studien undersøker jeg hvordan elevene tillegger ulike semiotiske modeller mening, og hvordan de benytter de semiotiske modellene i arbeidet med figurmønster. Jeg undersøker nærmere hvorvidt ulike semiotiske modeller gir opphav til ulik generalisering og resonnering, og ønsker å finne ut hvordan elevene bruker de ulike semiotiske modellene og hvordan de tillegges mening i sitt arbeid med figurmønster.

## 2.3 Betraktninger for bruk av figurmønster som en tilnærming til algebra

Bruken av figurmønster er anbefalt som en introduksjon til arbeidet med algebra i skolen (Kaput, 2008; Lannin, 2005). I det følgende vil jeg presentere noen teoretiske og forskningsbaserte betraktninger for hvorfor bruken av figurmønster kan være nyttig som en tilnærming til algebra i de tidlige skoleår.

### 2.3.1 Hva er algebra og algebraisk tenkning?

Det kan være vanskelig å definere algebra og algebraisk tekning, og det finnes flere ulike tilnærminger og definisjoner på begrepene. Bruk av matematiske symboler og spesielt bokstaver har vært, og er, nært knyttet til algebra. Algebra er tradisjonelt blitt sett på som syntaktisk styrt symbolsk manipulasjon, men Kaput (2008) fremhever at dette kun er én side ved algebra, og at det er viktig å anerkjenne andre sider ved algebra også i skolematematikken. Kaput (2008) argumenterer for at det er viktig å ha et videre syn på algebra dersom man skal støtte og utvikle elevenes algebraiske tenkning på tvers av klassetrinn og tema i skolematematikken. Kaput og Blanton (2001) ser på algebra og algebraisk tenkning som et komplekst og sammensatt system av fem kategorier som er alle er knyttet til hverandre.

Kaput og Blanton (2001) sine fem kategorier er:

1. Algebra som generalisering og formalisering av relasjoner, egenskaper og betingelser
2. Algebra som symbolstyrt manipulasjon
3. Algebra som studiet av strukturer og systemer, abstrahert fra beregning og relasjoner
4. Algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og samvariasjon
5. Algebra som et språk for håndtering av modeller og situasjoner/fenomen

Kaput og Blanton (2001) fremhever at de fem kategoriene viser at algebra har en dyp og variert tilknytning til all matematikk, og ikke må ses som et eget avgrenset område av matematikken. Arbeid med figurmønster går under kategorien «algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og samvariasjon» og beskrives som generalisering fra numeriske og geometriske mønster der en typisk oppgave er å finne en funksjonell beskrivelse av den avhengige variasjonen. I tillegg innebærer det å beskrive rekursive relasjoner, ved å finne hvordan den neste figuren i figurmønsteret kan beskrives på bakgrunn av den nåværende figuren (Kaput & Blanton, 2001).

Evne til å kunne generalisere er kjernen i matematisk aktivitet, og spesielt viktig i algebraisk resonnering (Becker & Rivera, 2006; Mason 1996). Det er likevel ulike definisjoner på hva som inngår i algebraisk generalisering og tenkning. Skillet går mellom hvorvidt bruk av algebraiske symboler er ansett som en nødvendig komponent i algebraisk tenkning eller ikke (Zazkis & Liljedahl, 2002). Sfard (gjengitt etter Måsøval, 2011) definerer algebra på bakgrunn av generalisering når hun uttrykker at hun benytter begrepet algebra om enhver matematisk aktivitet som inneholder en generalisert beregningsprosess, uavhengig av verktøyene som brukes for å uttrykke generalitet. Sfard ser på denne måten ikke bruken av algebraiske symboler som nødvendig for å benytte betegnelsen algebra, men har genrealiseringsprosessen i fokus (Sfard, gjengitt etter Måsøval, 2011). Dörfler (1991) kan ses i sammenheng med Sfard da han hevder at teoretisk generalisering trenger en form for symbolsk beskrivelse, men at denne beskrivelsen kan være verbal, ikonisk, geometrisk eller algebraisk av natur. Kieran skiller imidlertid mellom det å tenke algebraisk og evne til å generalisere når hun argumenterer for at algebraisk tenkning er en egen kategori av generalisering som inneholder bruk av algebraiske symboler og notasjon (Kieran, 1989). Elevene i denne undersøkelsen er ikke vant til å bruke algebraiske symboler, og jeg forventer heller ikke at elevene skal komme frem til et symbolsk algebraisk uttrykk. Jeg vil anerkjenne elevenes tenkning og generalisering som algebraisk uavhengig av bruken av algebraiske symboler, og forholde meg til Sfard (gjengitt etter Måsøval, 2011) og Dörfler (1991) sin kategorisering av algebraisk tenkning og generalisering. Det vil være elevenes argumentasjon og resonnering som vil avgjøre hvorvidt jeg anser deres generalisering som algebraisk eller ikke.

### 2.3.2 Ulike tilnærminger til algebra i skolen – figurmønster eller problemløsning

I skolen har det vært et økende fokus på tidlig algebra, noe som har til hensikt å styrke elevenes kompetanse i matematikk generelt, og algebra spesielt. Hovedområdet tidlig algebra omhandler elevenes evne til å se sammenhenger i matematikk, å kunne resonnere, argumentere og generalisere. Dette området skiller seg fra aritmetikken som i stor grad er svarorientert, og retter oppmerksomheten mot prosesser, relasjoner og representasjoner. For mange elever er overgangen fra aritmetikk til algebra utfordrende (se f.eks.: Grønmo et al., 2012; Kaput, 2008; Mason, 1996) og det argumenteres for at dette skylles det fokus-skiftet som foregår fra aritmetikk til algebra (Mason, 1996; Kieran, 2004).

Radford (1996) skiller mellom to tilnærminger til algebra i skolen; generalisering av mønster og problemløsning som innebærer å løse likninger som er utledet av tekstoppgaver. De to kategoriene generalisering av mønster og problemløsning kan ses i sammenheng med Balacheff (2001) som skiller mellom algebra som studiet av mønster og algebra som generalisert aritmetikk. Et viktig skille mellom de to kategoriene er hvorvidt bokstaver blir ansett som variabler eller spesifikke ukjente (et bestemt tall). Stacey og MacGregor (2001) fremhever at ved algebra som studiet av mønster er gjenkjennelse, og det å finne generelle regler for å beskrive et mønster sentralt, mens ved algebra som generalisert aritmetikk er egenskaper ved tall og operasjoner sentralt. Bloedy-Vinner (2001) påpeker at hvordan bokstaver benyttes i disse to kategoriene for algebra er ulikt. Ved algebra som studiet av mønster anses bokstaver som variabler og studiet av struktur og relasjoner er viktig, mens ved algebra som generalisert aritmetikk er bokstaver ansett som spesifikke ukjente, altså som plassholdere for spesifikke tall (Bloedy-Vinner, 2001).

Skillet mellom de to tilnærmingene til algebra viser både viktige faktorer ved bruken av bokstaver i algebra, og at situasjonen der bokstaver brukes er fundamentalt ulike. Ved algebraisk problemløsning er målet å finne et tall ut fra en likning. Bokstavene i likningen står for spesifikke tall, og kan erstattes kun av disse for at likningen skal være matematisk gyldig (Radford, 1996). Målet med generalisering av et figurmønster er derimot å finne et uttrykk som representerer den generelle utviklingen i figurmønsteret, basert på observerte og konkrete faktorer i figurmønsteret (Radford, 1996). Generelle tall er her sentralt, og Radford (1996) viser til at det generaliserte uttrykket ikke er utledet fra konkrete tall, men fra generelle egenskaper og ideen om et generelt tall. Å finne et generelt uttrykk som beskriver utviklingen av et figurmønster er i stor grad avhengig av evnen til å resonnere, generalisere og uttrykke matematiske bevis. Den logikken som ligger til grunn for generaliseringen vil variere og avhenge av elevenes matematiske tenkning (Måsøval, 2011). Dette vil presenteres og diskuteres ytterligere under analysen og drøftingen.

### 2.3.3 Figurmønster som en introduksjon til algebra

Forskning anbefaler arbeid med figurmønster som en introduksjon til algebra (Kaput, 2008; Lannin, 2005). Et figurmønster er ofte fremstilt ved geometriske elementer, og gir elevene en mulighet til å foreta en visuell analyse i arbeidet med å finne en generell beskrivelse av utviklingen i det aktuelle figurmønsteret. Basert på den visuelle oppfatningen av figurmønsteret kan elevene beskrive og forklare en regelmessighet som er lik for alle figurer som inngår i figurmønsteret. Lannin (2005) fremhever at det visuelle aspektet er viktig for elevenes forståelse for et algebraisk uttrykk av den generelle utviklingen i et figurmønster. Den visuelle fremstillingen gjør det lettere å forstå hvordan ulike elementer i et algebraisk uttrykk representerer de ulike elementene i figurmønsteret.

Becker og Rivera (2005) har gjort undersøkelser som viser at elever ofte støtter seg til to ulike måter å generalisere på; figurativ og numerisk generalisering. I numerisk generalisering er det algebraiske konsept og operasjoner som er i fokus, mens figurativ generalisering tar utgangspunkt i relasjoner som kan ses visuelt ut fra et sett med spesifikke figurer som er oppgitt i figurmønsteret (Becker & Rivera, 2005). I hovedsak benytter elever som generaliserer numerisk en prøve-og-feile strategi der de forsøker å finne en beskrivelse eller formel som passer til den kvantitative informasjonen som er gitt av figurfølgen. Ofte er det kun et fåtall av elevene som benytter numerisk generalisering som kan forklare hvordan deres representasjon av figurmønsteret står i sammenheng med elementene i figurmønsteret. Dersom elevene produserer et algebraisk uttrykk med symboler kan de ofte ikke forklare hva koeffisienten og konstanten i deres algebraiske uttrykk representerer i den geometriske presentasjonen av figurmønsteret. Til motsetning bruker elevene som generaliserer figurativt visuelle strategier og fokuserer på å finne konstante relasjoner ved hjelp av visuelle og figurative hint som er gitt i situasjonen. Elever som generaliserer figurativt kan ofte forklare hvordan deres beskrivelse av figurmønsteret står i sammenheng med den geometriske presentasjonen i figurmønsteret, og forklare hva koeffisienten og konstanten i deres algebraiske uttrykk representerer gjennom aktiv bruk av det visuelle i figurmønsteret (Lannin, 2005; Rivera & Becker, 2005). Det er derfor et poeng at elevene fokuserer på den visuelle geometriske presentasjonen av et figurmønster, og ikke bare på den numeriske sammenhengen mellom de ulike figurene i figurmønsteret for å lykkes med bruk av figurmønster som en introduksjon til algebra.

Becker og Rivera (2005) sine kategorier for numerisk og figurativ generalisering kan ses i sammenheng med annen forskning, som også viser at det er ønskelig at elevene fokuserer på det figurative aspektet ved figurmønster når de skal komme fram til en generell beskrivelse av utviklingen i figurmønsteret. Radford og Peirce (2006) påpeker at algebraisk generalisering av et mønster er avhengig av å finne og forstå at likheten i de presenterte figurene i et figurmønster også er gjeldende for alle figurene i figurmønsteret. Videre må man være i stand til å bruke denne likheten til å finne en direkte beskrivelse, eller et uttrykk, for en vilkårlig figur i figurmønsteret. En slik prosess vil samsvare med det Becker og Rivera (2005) omtaler som figurativ generalisering. Lannin, Barker og Townsend (2006) fremhever også det figurative aspektet når de anbefaler at oppgaver med figurmønster brukes for å fremme elevenes evne til å se sammenhengen mellom den ikoniske representasjonen og generaliseringen, og ikke benytte prøve-og-feile strategier. Warren (2000) viser at det er signifikant korrelasjon mellom elevenes evne til å resonnere visuelt, og korrekt bruk av algebraisk notasjon for generalisering. Å resonnere visuelt innebærer i denne sammenheng å identifisere, analysere og beskrive figurmønster (Warren, 2000). Den visuelle geometriske fremstillingen i et figurmønster er slik sett en viktig faktor for å finne et generelt uttrykk for utviklingen av figurmønsteret.

I tillegg til det figurative aspektet som viktig for generalisering av figurmønster viser forskning at også andre faktorer er viktige for å lykkes med oppgaver med figurmønsteroppgaver. En studie gjort av Redden (1996) viser at det er en signifikant korrelasjon mellom elevers beskrivelser i naturlig språk og symbolsk notasjon. Reddens resultater viser at bruk av naturlig språk som korrekt og funksjonelt beskriver relasjoner virker til å lede elevene til suksessfull bruk av algebraisk notasjon. Forskning viser slik at språket sammen med måten man ser figurmønsteret er viktige faktorer for generalisering og bruk av algebraisk notasjon i arbeid med figurmønster.

## 2.4 Generalisering og resonnering

Generalisering er ansett som et viktig aspekt i matematikk, og inngår under hovedområdet algebra eller tidlig algebra. Jeg vil i det følgende gi en beskrivelse av hva som inngår under området generalisering, samt redegjøre for Lannin (2005) sine generaliseringsstrategier som kan være nyttige for å kategorisere og analysere elevers generalisering i arbeid med figurmønsteroppgaver.

### 2.4.1 Generalisering og resonnering – hva er det?

Generaliseringsaktiviteter kan ses som en hovedkomponent i algebra og innebærer å forme uttrykk og likninger, noe som inngår som algebraiske objekter (Kieran, 2004). I arbeid med generalisering er representasjoner og tolkning av situasjoner, egenskaper, mønster og relasjoner i fokus. Generaliseringsaktivteter kan deles inn i tre kategorier, og det å uttrykke generalitet ut fra geometriske mønster og numeriske sekvenser utgjør en egen kategori (Kieran, 2004). Mason (1996) anser generalitet og generalisering som selve kjernen i matematikk. Han argumenterer for at en viktig komponent i matematikkundervisning er hvordan læreren klarer å lede elevenes oppmerksomhet mot generalisering, og hjelpe elevene med å utvikle sin forståelse for generalitet i matematikk. Dette krever også at læreren støtter elevene i skifte av fokus fra det spesifikke til det generelle. Videre fremhever Mason at det å utrykke seg verbalt er en viktig del av utviklingen av forståelsen for et mønster. Han anser utviklingen som en sirkulær prosess der det å manipulere symboler eller objekter danner grunnlaget for forståelsen for mønsterets utvikling og generalitet. Utfordringen er å sette ord på sin forståelse av generaliteten ved mønsteret, og når man gjør dette endres også den enkeltes forståelse av mønsteret. Det skjer et skifte i måten man ser mønsteret, og dette skiftet er vesentlig og er det som muliggjør forståelsen for generalitet (Mason, 1989; Mason, 1996).

Radford (1996) fremhever de logiske slutningene som fører til en konklusjon som avgjørende for generalisering. På denne måten henger generalisering tett sammen med argumentasjon, begrunnelser og bevis. Argumentasjon og bevis er viktige komponenter i matematikk, men elevene har ofte vanskelig for å begrunne sine resonnement og konklusjoner på en måte som er matematisk gyldig (Becker & Rivera, 2005; Becker & Rivera, 2006). For argumentasjon som gjelder generelle slutninger knyttet til et figurmønster er det avgjørende at argumentet kobler den generelle beskrivelsen til en generell relasjon i problemkonteksten (figurmønsteret) (Lannin, 2005).  En slik generalisering er ofte knyttet til et geometrisk skjema som baserer seg på en visuell oppfattelse av situasjonen (Becker & Rivera, 2005; Lannin, 2005). Denne måten å argumentere på verdsettes fordi den beskriver en relasjon som gjelder for alle tilfeller som inngår i figurmønsteret. Det geometriske skjemaet kan støtte elevenes utvikling av generalisering og bruk av algebraiske uttrykk, fordi det generelle elementet får en mening som kan beskrives og forklares ut fra figurmønsterets geometriske og visuelle karakter.

### 2.4.2 Generaliseringsstrategier

Lannin (2005) har utviklet et rammeverk for å analysere elevers generalisering i arbeid med figurmønster (se figur 2). Hans rammeverk inneholder to hovedkategorier; eksplisitt og ikke-eksplisitt generalisering, og bygger på resultater fra en større undersøkelse av elevers generaliseringsstrategier i arbeid med figurmønster. De to kategoriene er forskjellige når det gjelder beregning av antall objekter i en figur i figurmønsteret. De eksplisitte strategiene muliggjør en direkte beregning av antall objekter i en bestemt figur i figurmønsteret. De ikke-eksplisitte strategiene muliggjør ikke en slik direkte beregning, og benytter heller ikke generalisering i like stor grad. Til tross for at Lannin (2005) sitt rammeverk inneholder fem generaliseringsstrategier, er det ikke alle som er matematisk gyldige. Om en gitt generaliseringsstrategi er matematisk gyldig eller ikke avhenger av om den bygger på generelle matematiske relasjoner og prinsipper for figurmønsteret, eller ikke.

| Strategi | Beskrivelse |
|---|---|
| **Ikke – eksplisitt** | |
| Telling | Tegne et bilde eller konstruere en modell for å representere situasjonen for å telle den ønskede egenskapen |
| Rekursiv | Bygge på forrige figur eller figurer for å avgjøre etterfølgende figur. |
| **Eksplisitt** | |
| Helhet – objekt | Bruke en del som enhet for å konstruere en større enhet ved å multiplisere. Dette kan eller kan ikke være en passende metode. |
| Prøve og feile | Prøve seg fram til en regel uten å ta hensyn til hvorfor denne regelen kan fungere. Som regel involverer dette å eksperimenter med ulike operasjoner og tall som er gitt i problemsituasjonen. |
| Kontekstuell | Konstruere en regel basert på informasjon som er gitt i situasjonen; relatere regelen til en telle-teknikk |

*Figur 1 Generliseringsstrategier. Hentet fra Lannin (2005), min oversettelse.*

Lannin (2005) fremhever at elevenes generaliseringsstrategier er nært knyttet til elevenes begrunnelser, argumentasjon og bevis. Elevenes generalisering bør derfor ses i sammenheng med elevens argumentasjon og bevis når det skal avgjøres om elevens generaliseringsstrategi er gyldig for det aktuelle figurmønsteret.

## 2.5 Argumentasjon og bevis

Det er ulike måter å argumentere på, men for at et argument skal være gyldig rent matematisk må det oppfylle visse krav. Balacheff (1988) presenterer fire hovedtyper av bevis som benyttes i matematikken; naiv empirisme, et avgjørende eksperiment, generisk eksempel og tankeeksperiment. Av disse fire er det kun generisk eksempel og tankeeksperiment som oppfyller kravene til et gyldig matematisk bevis. Bevis av typen naiv empirisme og avgjørende eksperiment omtales likevel som bevis da de oppfattes som bevis av de som produserer dem (Balacheff, 1988). De fire bevistypene til Balacheff (1988) presenteres i de nesteavsnitt.

### 2.5.1 Naiv empirisme

Bevis av typen naiv empirisme innebærer å avgjøre sannheten til et resultat eller utsagn ved å teste et begrenset antall eksempler. Dersom et empirisk bevis skal være matematisk gyldig må man sjekke alle muligheter. Ved naiv empirisme sjekkes kun et begrenset antall muligheter og det er derfor ikke et gyldig argument for generelle slutninger. I arbeid med figurmønsteroppgaver vil et bevis av typen naiv empirisme avgjøre sannhetsverdien ved et generelt utsagn ved å teste hvorvidt det generelle utsagnet stemmer for et begrenset antall figurer som inngår i figurmønsteret.

### 2.5.2 Et avgjørende eksperiment

Ved bruk av avgjørende eksperiment bygger konklusjonen på at dersom det fungerer på ett eksempel vil det alltid fungere. Man forsøker altså å avgjøre sannheten til et utsagn ved å vise at det fungerer på ett eksempel, og deretter trekke den generelle slutningen om at det alltid vil fungere. Denne typen bevis skiller seg fra naiv empirisme ved at eleven kun undersøker ett tilfelle, som eleven anser å være ikke for spesiell, og dermed representerer hele settet med mulige utfall. I arbeid med figurmønsteroppgaver velger elever ofte et rundt tall, altså figur 10 eller figur 100, som sitt avgjørende eksperiment for den valgte generaliseringsstrategien.

### 2.5.3. Generisk eksempel

Et generisk eksempel innebærer å eksplisitt uttrykke de generelle egenskapene ved et eksempel som gjør at slutningene vil gjelde for alle elementer i en gruppe. Eksempelet som benyttes er ikke valgt på bakgrunn av noen spesifikke egenskaper, men er et karakteristisk eksempel for hele gruppen. Egenskaper og strukturer ved det spesifikke eksempel påpekes, og det argumenteres for at disse egenskaper og strukturer finnes i alle elementer som inngår i en gruppe. De generelle slutningene baserer seg altså på generelle egenskaper ved det valgte eksempelet, som også vil gjelde for alle andre elementer i gruppen. I figurmønsteroppgaver innebærer dette ofte å ta utgangspunkt i den visuelle presentasjonen av figurmønsteret og identifisere elementer ved figurmønsteret som vil gjelde for alle figurer i figurmønsteret.

### 2.5.4 Tankeeksperiment

Bevis som tankeeksperiment involverer internalisering og dekontekstualisering ved at man går bort fra den aktuelle og spesifikke representasjonen av elementet. Denne bevisføringen bygger i større grad på matematisk teori og er ikke avhengig av en gitt representasjon, men bryter den opprinnelige formodningen ned i flere deler. Dette er en avansert form for matematisk bevis, og jeg anser det ikke aktuelt at elevene i denne studien vil benytte seg av denne bevisformen.

### 2.5.5 Bruk av, og overgang mellom de ulike bevistypene til Balacheff

Balacheff (1988) fremhever at det er en fundamental forskjell på de to førstnevnte og de to sistnevnte kategoriene for bevis. Mens de to førstnevnte kategoriene viser hvorfor noe fungerer med bakgrunn i at det fungerer for valgte eksempler, brukes det i de to sistnevnte kategoriene argumenter som viser hvorfor det fungerer, og dermed vil fungere for alle figurer i figurmønsteret. De to sistnevnte kategoriene forholder seg til de egenskaper og strukturer som gjør at man kan trekke generelle slutninger, mens det i de to førstnevnte kategoriene kun viser til at det fungerer på et spesifikt utvalg av eksempler. Videre hevder Balacheff (1988) at de ulike typene bevis danner et hierarki som er representert i presentasjonen av bevistypene over. Fra en bevistype til en annen skjer det en utvikling i grad av generalitet som presenteres. Videre fremheves det at det skjer en utvikling fra aktiv handling til internalisering. En slik utvikling er ansett som avgjørende for læring og kan ses i sammenheng med Vygotsky sin sosiokulturelle teori som vektlegger at kunnskapen utvikles fra aktiv handling i et sosialt samspill, til en internalisert kunnskap (Vygotsky, 1978).

Jeg anser det som lite sannsynlig at elevene i denne studien vil være i stand til å utføre et tankeeksperiment, da dette er ansett som den mest avanserte og matematisk abstrakte formen for bevis av Balacheff (1988) sine kategorier. Det er også viktig å påpeke at elevene i undersøkelsen går i 6. klasse, og det er derfor ikke forventet at de skal operere med argumentasjon som kan kategoriseres til det høyeste nivået i Balacheff (1988) sin kategori. Det vil derimot være ønskelig at elevene er i stand til å forme bevis basert på et generisk eksempel, ved å bygge på den visuelle representasjonen av figurmønsteret. Fokuset i denne studien er jo nettopp de ulike semiotiske modellene og hvordan de påvirker elevenes generalisering og resonnering. Det er derfor interessant å se på hvordan elevene benytter de visuelle geometriske figurmønstrene aktivt i sitt arbeid. Samtidig er et generisk eksempel i likhet med et tankeeksperiment en gyldig måte å argumentere og bevise matematiske påstander og sammenhenger. Et generisk eksempel er derfor et viktig verktøy i arbeid med argumentasjon og bevis i alle deler av matematikken. Dersom elevene behersker et generisk bevis baserer de seg på sammenhenger og relasjoner mellom ulike elementer i matematikken, og er aktive i algebraisk tenkning. Dette står også i sammenheng med Sfard (gjengitt i Måsøval, 2011) og Dörfler (1991) sin kategorisering av algebraisk tenkning og generalisering, som beskrevet i kapittel 2.3.1. I et generisk eksempel er også verbalspråket en større del av informasjonsbæreren i beviset, i motsetning til et tankeeksperiment som i større grad baserer seg på matematisk symbolbruk. Jeg vil derfor anse generisk bevis som den høyeste bevisformen det er naturlig at elevene i denne studien er i stand til å gjennomføre for de oppgavene de blir gitt i denne studien.

## 2.6 Det visuelle som bakgrunn for argumentasjon og generalisering

Figurmønsteroppgaver skiller seg fra andre oppgaver innen matematikk ved at de oftest har en visuell og geometrisk karakter. Vanligvis presenteres en visuell geometrisk modell av et utvalg figurer som inngår i figurmønsteret. Det visuelle aspektet ved figurmønsteroppgaver kan ha stor påvirkning på elevenes resonnement og generalisering. Jeg vil i det følgende redegjøre for teoretiske og forskningsbaserte betraktninger som omhandler visuell persepsjon og oppfattelsen av figurmønster.

### 2.6.1 Visuell persepsjon

Forskning innen figurmønster og generalisering viser at ulike individer ofte ser det samme figurmønsteret ulikt, noe som også innebærer at de vil generalisere ulikt (Rivera & Becker, 2008). Som tidligere nevnt innebærer generalisering av et figurmønster å gjenkjenne en likhet eller regelmessighet som utgangspunkt for generaliseringen (Becker & Rivera, 2006). I et figurmønster vil det likevel være ulikt hva den enkelte oppfatter som en regelmessighet, avhengig av hvordan man dekomponerer presentasjonen av det aktuelle figurmønsteret. Lee (1996) fremhever at det kreves at elvene er fleksible i måten de ser figurmønsteret, da de må kunne se figurmønsteret på ulike måter, og forkaste de måtene å se figurmønsteret på som ikke fører til generalisering. Rivera og Becker (2008) påpeker at en av de viktigste faktorene i hvordan man oppfatter et figurmønster er visuell persepsjon. De deler visuell persepsjon inn i to kategorier; sensorisk persepsjon og kognitiv persepsjon. Sensorisk persepsjon innebærer at individet ser objektet som et rent objekt i seg selv. Dette omtales også som objektspersepsjon. Kognitiv persepsjon innebærer at individet ser eller gjenkjenner egenskaper i relasjon til objektet. Kognitiv persepsjon krever bruk av andre kognitivt relaterte prosesser som muliggjør at elevene kan uttrykke hva de anser som et faktum eller en egenskap ved det aktuelle objektet (Rivera & Becker, 2008). Det vil være ønskelig at elevene bruker kognitiv persepsjon i arbeid med figurmønster, da dette gir større mulighet for å trekke generelle slutninger. Aspektet med å kunne uttrykke hva som er fast og hva som er variabelt ved et objekt i et figurmønster kan knyttes opp mot den sosiokulturelle teorien og språket som en viktig faktor for læring. I sammenheng med dette vil det også være ønskelig at elevene evner å kommunisere til hverandre hvordan de oppfatter de ulike figurmønstrene, og hva de anser som fast og variabelt. Det vil dermed være en fordel for elevene å benytte kognitiv persepsjon, som muliggjør at elevene kan dekomponere den visuelle fremstillingen av figurmønsteret.

### 2.6.2 Visuell persepsjon som bakgrunn for generalisering

Hvordan man ser den visuelle figuren i et figurmønster vil være avgjørende for elevenes generalisering av figurmønsteret. Rivera og Becker (2008) fremmer to kategorier for generalisering avhengig av hvordan man oppfatter figurmønsteret; constructive (heretter kalt konstruktiv) og deconstructive (heretter kalt dekonstruktiv) generalisering. I konstruktiv generalisering anser individet delene av figurmønsteret som en helhet som ikke overlapper hverandre. Ved dekonstruktiv generalisering anser individet derimot delene i figurmønsteret som overlappende, og benytter dette aktivt i sin generalisering av figurmønsteret (Rivera & Becker, 2008). Både konstruktiv og dekonstruktiv generalisering kan være matematisk korrekt, men de gir opphav til ulike beskrivelser av hvordan figurmønsteret utvikler seg. I dekonstruktiv generalisering anses ofte figur 1 som byggesteinen i figurmønsterets utvikling, men er ofte ikke en ren repetisjon av figur 1. Typisk for en dekonstruktiv generalisering er at man må ta høyde for at elementer i figurmønsteret overlapper hverandre, og dermed må trekke fra de overlappende elementene i beregningen av totalantall elementer i en figur.

Lannin, et al. (2006) viser i sin undersøkelse at visuell oppfattelse av figurmønsteret og sosial interaksjon med lærer eller medelever er blant faktorene som påvirker elevenes generaliseringsstrategier i møte med figurmønsteroppgaver. Deres resultater viser blant annet at elevene i større grad lykkes med å produsere eksplisitt generalisering når de har en tydelig visuell oppfattelse av et figurmønster, og de evner å se egen generalisering i sammenheng med den visuelle oppfatningen av figurmønsteret. Når elevene hadde en svak visuell oppfattelse av figurmønsteret var de mer tilbøyelige for å benytte uegnede strategier for generalisering, slik som prøve-og-feile metoden, eller helhet-objekt metoden uten å ta høyde for at enkelte elementer overlapper og at regelen derfor må justeres. Når elevene derimot hadde en tydelig visuell oppfattelse av figurmønsteret, var elevene i større grad i stand til å knytte sine generaliseringer til figurmønsteret, og deretter komme fram til en gyldig generalisering (Lannin et al., 2006).

Rivera (2009) henviser til Metzger (2006) og hans teori «Law of Good Gestalt». Denne teorien, også omtalt som gestalteffekten, omhandler rekkefølgen vi oppfatter, skiller og organiserer en figur, et bilde eller et ikon. Vi er predisponert til å organisere på bakgrunn av hva vi oppfatter som naturlig at henger sammen. Dette inkluderer også det vi anser som enkelt og gjenkjennelig, og assosierer med geometriske eller algebraiske formler. Hvordan vi oppfatter et figurmønster er som nevnt avgjørende for generaliseringen knyttet til mønsteret. Rivera (2009) forklarer videre at ulike figurmønster har ulik gestalteffekt og at figurmønster som har god gestalteffekt er lettere å gjenkjenne som sammensatt av geometriske elementer, og dermed lettere å dekomponere og generalisere på bakgrunn av. I figurmønster som har lav gestalteffekt oppleves det vanskeligere å finne gjenkjennelige elementer, og dermed også vanskeligere å komme frem til en rett generaliseringsstrategi. Felles for alle figurmønster er at det som oppfattes eller velges som fast og variabelt av figurmønsterets elementer er avgjørende og vesentlig for generaliseringen (Rivera, 2009).

## 2.7 Sosial interaksjon og lærers rolle

Hvorvidt elevene klarer å se sammenhengen mellom en visuell oppfattelse av figurmønsteret og egen generalisering var ofte et resultat av lærerens eksplisitte spørsmål knytte til hvordan elevenes generalisering kunne knyttes til figuren (Lannin et al., 2006). Lannin et al. (2006) viser med dette at læreren spiller en viktig roll i elevenes generalisering knyttet til figurmønsteroppgaver. Det er imidlertid viktig å påpeke at det er lærerens spørsmålsstilling som her er relevant, og at det er elevene selv som produserer sine generaliseringer. Læreren tilbyr ikke annen støtte enn å stille konkrete spørsmål som kan lede elevene til å beskrive egen visuelle oppfattelse av figurmønsteret, og utforske sammenhengen mellom visuell oppfattelse og generalisering. Lærerens spørsmål ber elevene forklare egen tenkning og overveie og begrunne hvorfor elevene mener egen tenkning og generalisering er rett for den gjeldende oppgaven. Å oppmuntre elevene til å rette oppmerksomheten mot den visuelle oppfattelsen av et figurmønster er også av Healy og Hoyles (1999) ansett som viktig for elevenes generalisering i arbeid med figurmønster. Deres resultater viser at den visuelle sammenhengen mellom problemkonteksten og tilhørende symbolske representasjoner oppmuntret elevene til å skape mening og forståelse av eksplisitte regler.

# 3 Metode

Forskning er ansett som en sikker kilde til kunnskap, og skal følge de grunnleggende prinsippene systematikk, empiri og selvkorrigering (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Metodevalget er en viktig faktor i forskning, og valg av metode og forskningsdesign må være gjennomtenkt for at forskningsresultatet kan anses som generaliserbart, troverdig og pålitelig. Valg av metode står i sammenheng med de teorier og antagelser som ligger til grunn for forskningsprosjektet (Cohen et al., 2011). Valg av metode bør være et gjennomtenkt valg, og har til hensikt å fremskaffe de data som er nødvendige for å besvare forskningsspørsmålet.

I dette kapittelet vil jeg gjøre rede for casestudie som forskningsdesign. Jeg vil presentere forarbeid, gjennomføring og bearbeiding av datamaterialet. Faktorer som omhandler observasjon, egen forskerrolle og etiske hensyn vil bli diskutert og gjort rede for. Faktorer som påvirker studiens generaliserbarhet, gyldighet og pålitelighet vil også diskuteres. Avslutningsvis i kapittelet presenteres en analyse av de ulike oppgavene elevene arbeidet med i denne studien.

## 3.1 Forskningsdesign – en casestudie

Hensikten med denne studien var å finne ut av hvordan ulike presentasjoner av et figurmønster påvirker elevenes evne til å resonnere og generalisere. Elevenes resonnement og generaliseringer kan ikke isoleres fra situasjonen eller settingen elevene er i, og det var derfor naturlig å velge en kvalitativ metode der jeg som forsker er tilstede i situasjonen sammen med elevene, og har mulighet til å beskrive den sosiale settingen, de ulike presentasjonene av figurmønsteret og elevenes resonnering og generalisering. Innenfor kvalitativ forskningsmetode er det mulig å bruke flere ulike tilnærminger. På bakgrunn av forskningsspørsmålet og mine teoretiske antagelser har jeg valgt å benytte meg av et casedesign.

Casestudier kjennetegnes av at forskeren studerer noen få enheter eller caser gjennom en tidsperiode, og dataene som hentes ut er detaljerte og omfattende. Ofte benyttes flere ulike datakilder, som alle er sted- og tidsavhengige (Cohen et al.,2011; Yin, 2009). Målet med casestudier er at leseren skal få en forståelse for tematikken som beskrives gjennom analyse, tolkning og rapport (Christoffersen & Johannessen, 2012). Casestudier kan være nyttige for å påvise kausalitet og svare på spørsmål om «hvordan» og «hvorfor», nettopp fordi de anerkjenner konteksten som en viktig faktor (Cohen et al., 2011). Vanligvis styres caseforskeren av spørsmål knyttet til prosess (hvorfor eller hvordan noe skjer) og spørsmål som handler om forståelse (hva, hvorfor, hvordan) (Christoffersen & Johannessen, 2012). Valg av casestudie som forskningsdesign står i sammenheng med forskningsspørsmålet som har til hensikt å besvare *hvordan* ulike presentasjoner av et figurmønster påvirker elevenes resonnement og generalisering. Her er jeg interessert i elevenes forståelse knyttet til de ulike presentasjonene av figurmønsteret, og prosessen knyttet til utvikling av resonnement og generalisering. Casedesign er med bakgrunn i disse faktorene et metodevalg som kan være med på å besvare forskningsspørsmålet mitt.

## 3.2 Forarbeid og valg av informanter

Jeg startet arbeidet med å ta kontakt med aktuelle skoler i nærmiljøet i november, og fikk raskt tilslag på min forespørsel om å få låne elever ved 6.trinn til å gjennomføre studien. Det ble sendt ut et informasjonsskriv til elever og foresatte, sammen med et svarskjema der foresatte som ønsket at eleven kunne delta i undersøkelsen ga sitt skriftlige samtykke. Studien er meldepliktig, og det ble søkt om, og innvilget, godkjennelse fra NSD. Dette var også noe foreldrene ble informert om. Da samtykkeskjemaet til foresatte ble returnert valgte jeg i samsvar med lærer seks av elevene til deltagelse i studien. Fordi et av aspektene jeg ønsket å undersøke var elevenes kommunikasjon med hverandre var det naturlig å sette elevene sammen i grupper. Det er hensiktsmessig at gruppene er av en størrelse som gjør det mulig for meg å observere og hente inn data om alt som blir sagt underveis i elevenes arbeid, samtidig ønsket jeg at elevene skulle benytte hverandre i diskusjonen, og ha noen å diskutere og samtale med. Jeg valgte derfor å dele de seks elevene inn i to grupper, slik at det ble to grupper med tre elever i hver gruppe. Med tre elever i hver gruppe kan elevene samarbeide og diskutere med hverandre. Jeg ser det som en fordel at det er tre elever i hver gruppe, i stedet for at de jobber i par, da grupper på tre elever det gir større sannsynlighet for at det kan skapes en diskusjon sammenlignet med hvis de jobbet i par.

Hensikten med kvalitative studier er å få mye data om et begrenset antall informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012). Valg av informanter er derfor en viktig faktor i kvalitativ forskning, og krever nøye vurdering fra forskerens side (Cohen et al., 2011). Da kommunikasjon, resonnering og generalisering er fokusområder for studien var det ønskelig at elevene som ble valgt ut var i stand til å kommunisere med sine medelever gjennom å sette ord på hva de tenker og hvordan. Ved å velge de seks informantene i samarbeid med læreren, økte sannsynligheten for at jeg ville få observere dette, da læreren kjente elevene godt og hadde kunnskap og erfaring med hvordan elevene normalt arbeidet når det var fokus på muntlig aktivitet. Det var også ønskelig at elevene var på litt ulikt nivå, for å forsøke å fremprovosere uenigheter rundt resonnering og generalisering. Min erfaring fra andre småstudier gjennomført i studietiden er at slike uenigheter skaper diskusjoner som kan bringe frem mye interessant matematisk resonnering, og gi innblikk i flere ulike aspekt både ved oppgaven.

## 3.3 Gjennomføring og kontekst

En og en gruppe ble tatt ut av ordinær undervisning og satt sammen med meg på et eget rom. Her hadde elevene tilgang på ark og skrivesaker, og alle fikk utdelt et ark med den samme representasjonen av figurmønsterets figur 1, 2 og 3 (oppgavene i sin helhet finnes under vedlegg 1). For å avdramatisere at det ble tatt lydopptak og som et forsøk på å gjøre situasjonen så normal som mulig, forklarte jeg elevene at jeg skulle skrive en oppgave om det etterpå og hadde behov for å huske nøyaktig hva elevene hadde sagt. Jeg presiserte også at alle elevene ville bli anonymisert, og at det jeg var mest interessert i var hvordan elevene tenkte, og at det var like spennende å høre på elevenes forklaringer uavhengig av om det var rett eller galt rent matematisk.

Elevene fikk først jobbe med figurmønsteret på egenhånd og fant figur nummer 4, 5, og 10. Deretter sammenlignet elevene sine løsningsforslag og diskuterte ulike løsningsstrategier. Elevene fikk så i oppgave å beskrive hvordan figur nummer 100 ville se ut, og hvordan de kunne vite det. Her sto elevene fritt til å benytte seg av tegning, verbalt språk eller matematiske symboler. Elevene startet dette arbeidet individuelt, men det ble raskt en felles diskusjon i gruppa rundt ulike løsningsstrategier, resonnering og generalisering. Til slutt stilte jeg spørsmålet om de kunne beskrive hvordan en hvilken som helst figur i figurmønsteret ville se ut, og hvordan de kunne vite dette med sikkerhet.

Hver gruppe fikk presentert figurmønsteret i følgende rekkefølge: Oppgave 1, der det var en situasjonskontekst og en visuell representasjon av bord og stoler. Oppgave 2, der det var benyttet streker i den visuelle representasjonen, og til slutt oppgave 3 som benyttet sirkler i den visuelle representasjonen. De to gruppene ble tatt ut av undervisningen umiddelbart etter hverandre, slik at elevene som allerede hatt arbeidet med figurmønsteret ikke hadde mulighet til å snakke med elevene på den neste gruppen. Jeg samlet data for en oppgave om gangen, og datainnsamlingen foregikk over en periode på to uker.

Elevene i hver gruppe kjente hverandre godt, og var vant til å jobbe sammen i grupper. Selve situasjonskonteksten med gruppearbeid var derfor ikke ny for elevene. Elevene hadde imidlertid ikke jobbet med figurmønsteroppgaver av tidligere, og hadde ikke fått undervisning i emnet før de fikk presentert de ulike oppgavene i denne studien. Elevene var heller ikke vant med at det ble tatt lydopptak, eller at de ble observert av en ekstern forsker. Elever er likevel vant til at deres arbeid blir observert av læreren eller andre voksenpersoner i skolen. Slik sett var ikke min tilstedeværelse i gruppen helt uvant for elevene. Tidligere erfaring fra lignende undersøkelsen i praksisfeltet viser også at elevene raskt venner seg til den nye settingen, og henvender seg til forskeren som en kompetent voksen de enten overser helt, eller henvender seg til for å stille spørsmål eller få tilbakemelding på egen oppgaveløsning.

## 3.4 Observasjon, forskerrolle og forskerposisjon

Observasjon som metode er et viktig verktøy for å samle innsikt om ulike situasjoner, og kan med sin fleksible form frembringe mer autentisk informasjon om sosialt samspill i en gitt kontekst (Cohen et al., 2011; Simpson og Tuson, 2003). Simpson og Tuson (2003) påpeker at observasjon ikke bare er å se, men å systematisk se og notere hendelser, atferd, settinger, rutiner og artefakter. Ulike typer observasjon vil være hensiktsmessig for ulike studier. Observasjon som metode beveger seg på et kontinuum fra ustrukturert til strukturert observasjon (Cohen et al., 2011) der forskeren har en rolle som beveger seg på et kontinuum fra fullstendig deltaker til fullstendig observatør (Gold, 1958). Observasjonsmetoden i denne studien ligger et sted mellom kategoriene semi-strukturert og ustrukturert observasjon. I semi-strukturert observasjon har man en agenda for hva man ser etter og samler data for å belyse denne agendaen. Ved ustrukturert observasjon er det mindre tydelig hva man ser etter, og man må derfor gå inn i situasjonen og observere hva som finner sted før man avgjør hvilken påvirkning det vil ha for forskningen (Cohen et al., 2011). I forkant av datainnsamlingen hadde jeg ikke valgt kategoriene, og jeg hadde heller ikke en klar hypotese. Jeg kjente til Lannin (2005) sitt rammeverk for generaliseringsstrategier og Balacheff (1988) sine kategorier for bevis. Jeg hadde også en hypotese om at de ulike semiotiske modellene av figurmønsteret ville frembringe ulike generaliseringsstrategier hos elevene, og min analyse av aktuelle generaliseringsstrategier elevene kunne tenkes å benytte seg av er gjengitt i kapittel 3.8. Jeg hadde altså noen tanker på forhånd, men hadde ikke fullstendige kategorier jeg observerte ut fra.

Når det gjelder min grad av deltagelse i observasjonssettingen fant jeg det naturlig og hensiktsmessig å være deltagende observatør. Som deltagende observatør er forskeren en del av gruppen som studeres, og alle informanter er klar over at de blir observert av forskeren (Gold, 1958). Deltakende observasjon er særlig hensiktsmessig ved studier av små grupper og hendelser og prosesser som varer over kort tid (Christoffersen & Johannessen, 2012) noe som samsvarer godt med denne studien. Elevenes resonnement og generalisering er knyttet til en situasjonskontekst der det aktuelle figurmønsteret inngår, og gruppene som er fokus for observasjonen er små. I tillegg er min tidligere erfaring at elevene ofte ikke begrunner, argumenterer og generaliserer tydelig uoppfordret. Ofte er det hensiktsmessig å stille oppfølgerspørsmål som «hvordan kan du vite at det gjelder for alle tilfeller» eller «hvordan kan du være sikker på at du har rett» for å hjelpe elevene med å sette ord på sine argumenter, resonnement og generalisering. Som deltagende observatør har jeg muligheten til dette, samtidig som jeg får observert elevene i en den naturlige settingen.

## 3.5 Datainnsamling og bearbeiding av data

Et typisk kjennetegn for casestudier er at de ofte benytter ulike datakilder (Cohen et al., 2011; Yin, 2009). I denne studien er det lydopptak av elevenes muntlige aktivitet, observasjoner av elevenes atferd og arbeid, og innsamling av elevenes skriftlige arbeid som er hovedkildene til data. Mens elevene arbeidet med oppgavene noterte jeg elevenes atferd og eventuelle hendelser, når elevene skrev eller tegnet, og bruk av kroppsspråk eller mimikk. Alt dette ble notert med tidspunkt, slik at jeg skulle kunne koble mine observasjonsnotater opp mot transkripsjonen av lydopptaket i ettertid. I løpet av dagen etter at observasjon og lydopptak ble gjennomført transkriberte jeg lydopptaket ferdig. Jeg sammenlignet også transkripsjonen, mine observasjonsnotater og elevenes skriftlige arbeid, og noterte linjenummer i elevenes skriftlige arbeid slik at de enkelt skulle kunne ses i sammenheng med transkripsjonen. I transkripsjonen har jeg valgt å gjengi den muntlige, verbale kommunikasjonen mellom elevene, og har ikke notert meg lengden på stille tenkepauser, eller tenkepauser ved bruk av ord som «ehm» «hm» osv. Jeg har hatt fokus på verbale ytringer og sammenheng mellom de verbale ytringer og gester som peking, tegning og henvisning til eget eller andres skriftlige arbeid. Datamaterialet er analysert etter Lannin (2005) sine kategorier for generalisering og Balacheff (1988) sine kategorier for bevis i matematikk.

## 3.6 Etiske hensyn

Det er flere etiske problemstillinger knyttet til forskning innen samfunnsvitenskap og humaniora, og det er særlig tre hovedområder forskeren må være oppmerksom på: informantenes rett til selvbestemmelse og autonomi, forskerens plikt til å respektere informantenes privatliv og forskerens ansvar for å unngå skade (Nerdrum, 1998). De to førstnevnte punktene er aktuelle for min studie og vil bli diskutert i de kommende avsnitt.

Når det gjelder informantenes rett til selvbestemmelse og autonomi innebærer dette at alle eventuelle og aktuelle deltagere i et forskningsprosjekt selv skal få bestemme over sin deltagelse. Når informantene gir samtykke til å delta i et forskningsprosjekt skal det gå klart fram at den registrerte informanten gir sitt samtykke til å delta, at informanten er informert om hva deltagelsen innebærer, og hvem samtykket er gitt til (Christoffersen & Johannessen, 2012). Fordi deltagerne i dette prosjektet er under myndighetsalderen ble samtykkeerklæringen underskrevet av elevenes foreldre/foresatte. Sammen med samtykkeerklæringen ble det sendt ut et informasjonsskriv med opplysninger for studiens tema og hensikt, organisatorisk gjennomføring, og informasjon om at det var frivillig å delta, og at alle deltakere når som helst og uten grunn kunne trekke seg fra forskningsprosjektet (se vedlegg 2). Elevenes lærer gjennomgikk også skjemaet for elevene før det ble sendt hjem.

For å respektere informantens privatliv skal det ikke brukes opplysninger slik at personer som er med i undersøkelsen kan identifiseres (Christoffersen & Johannessen, 2012). I min masteroppgave oppgir jeg ikke navn på skolen eller læreren, og alle informanter har fått et pseudonym.

## 3.7 Generaliserbarhet, gyldighet og pålitelighet

Viktige faktorer ved kvalitativ forskning er forskningens generaliserbarhet, gyldighet og pålitelighet. I de følgende avsnitt presenterer og diskuterer jeg tiltak som er tatt i bruk for å sikre studiens generaliserbarhet, gyldighet og pålitelighet.

### 3.7.1 Generaliserbarhet

Fordi kvalitativ forskning ofte har få informanter stilles det spørsmål ved forskningens generaliserbarhet. Kritikken dreier seg i hovedsak om at det ikke vil være mulig å gjøre gyldige generaliseringer basert på så få informanter. Onwuegbuzie og Leech (2007) argumenterer for at det i kvalitative studier kan være hensiktsmessig å snakke om intern generaliserbarhet. På bakgrunn av data fra undergrupper av et utvalg kan man gjøre generaliseringer som vil gjelde for hele gruppen. Videre understreker Onwuegbuzie og Leech (2007) at hensikten med kvalitativ forskning ofte er å presentere unike tilfeller som har en egenverdi. Yin (2009) argumenterer for at det i casestudier er snakk om en analytisk heller enn en statistisk generalisering. I statistisk generalisering forsøker forskeren å bevege seg fra et utvalg til en populasjon basert på faktorer som utvalgsstrategier, frekvens, statistisk signifikans og lignende. I analytisk generalisering er ikke fokuset på et representativt utvalg, og styrken ved casestudier er at casen kun representerer seg selv. Casestudier kan imidlertid bidra til utvidelse og generalisering av en teori (Yin, 2009), og en casestudie kan bidra til å forstå andre lignende caser, fenomener eller situasjoner (Cohen et al., 2011).

Resultatene av min undersøkelse kan gi et innblikk i noen faktorer som kan påvirke elevenes generalisering og resonnering i møte med et figurmønster. Disse resultatene kan brukes til å utvikle hypoteser, og gi opphav til videre forskning. På denne måten kan data fra et lite utvalg ha en egenverdi, og gi viktig dybdeinformasjon som kan bidra til videreutvikling av kunnskap og forskning innen feltet. Verschuren (2003) argumenterer for at styrken med casestudier er at de i stedet for å skille ut og studere en og en variabel inkluderer og studerer flere variabler under ett. Kompliserte fenomen kjennetegnes av homogenitet heller enn heterogenitet. Fordi en casestudie ser på hele situasjonen og settingen under ett vil det være mulig å generalisere resultatene fra en casestudie til andre lignende caser (Verschuren, 2003). I min studie har jeg valgt ut elever med ulike evner i matematikk i en 6. klasse. Elevene er valgt fra en vanlig, mellomstor skole, og det er ikke noe ekstraordinært med hverken klassen eller elevene som er valgt ut. I casestudien studeres elevene i en sosial setting under arbeid med oppgaveløsning. Man kan derfor anta at de data som samles inn fra gruppene vil være generaliserbare for resten av klassen, og også andre lignende klasser ved andre skoler.

### 3.7.2 Gyldighet og pålitelighet

Trusler mot gyldighet og pålitelighet kan aldri elimineres fullstendig. Det handler mer om at effekten av truslene kan svekkes gjennom å være oppmerksom på problematikken rundt gyldighet og pålitelighet gjennom hele forskningsprosessen. Begge faktorer henger sammen, og hver faktor er en forutsetning for å oppnå den andre, men er ikke tilstrekkelig i seg selv (Cohen et al., 2011).

Pålitelighet omhandler forskningens nøyaktighet; hvilke data som brukes, måten data er samlet inn på og hvordan data bearbeides (Christoffersen & Johannessen, 2012). Dersom forskning skal ha høy grad av pålitelighet må det demonstreres at hvis den aktuelle undersøkelsen hadde blitt gjennomført med en lignende gruppe respondenter i en lignende kontekst ville resultatene vært like (Cohen et al., 2011). I kvalitativ forskning kan pålitelighet anses som en sammenheng mellom hva forskeren benytter som data, og hva som faktisk skjedde i den naturlige settingen det forskes på (Bogdan og Biklen, 1992). Dette inkluderer gjengivelse av virkeligheten, kontekst- og situasjonsspesifitet, autentisitet, ærlighet, helhet og dybden av informasjon fra informantene (Cohen et al., 2011). I løpet av kapittel 3 har jeg grundig forklart og gjennomgått metodebruk, datainnsamling og kategorisering og analyse av data slik at det skal være mulig for andre å forstå og gjennomføre lignende undersøkelser. Oppgavene elvene arbeidet med er vedlagt (se vedlegg 1) og jeg har gjort rede for hvilken rekkefølge og under hvilke omstendigheter elevene fikk presentert oppgavene. Dette er med på å sikre studiens pålitelighet, da det gir leseren en mulighet til å etterprøve mine resultater.

Data er ikke selve virkeligheten, men en representasjon av den, og et viktig spørsmål i forskning er hvorvidt dataene tilfredsstiller kravene for gyldighet (av engelsk validitet) (Christoffersen & Johannessen, 2011). Gyldighet i forskning dreier seg om hvorvidt dataene representerer fenomenet det er forsket på. I kvalitativ forskning er fokuset ofte på indre validitet, da målet er å representere det fenomen som undersøkes på en god og grundig måte, og dermed er intern validitet ofte ansett som det viktigste i kvalitativ forskning (Cohen et al., 2011). Maxwell (1992) beskriver intern validitet som muligheten til å generalisere innad i spesifikke grupper eller miljøer, situasjoner eller omstendigheter. Dette stemmer overens med hensikten for undersøkelsen og står i sammenheng med den formen for generalisering som kjennetegner casestudier. Auerbach og Silverstein (2003) fremmer transparens som en viktig kilde til validitet, og beskriver dette som at leseren skal kunne forstå og være informert om den prosessen der fortolkningen inntreffer. I masteroppgaven har jeg forsøkt å opprettholde studiens gyldighet ved en grundig gjengivelse av alle elementer i studien. Teorien studien baserer seg på er gjennomgått i kapittel 2, og metodevalg, forskningsdesign og valg av informanter er grundig beskrevet for å gi leseren en god forståelse av de faktiske forhold. I analysedelen vil aktuelle funn bli presentert og drøftet i lys av teorien, og det vil tydeliggjøres hvordan mine funn passer inn i forskningsfeltet som omhandler studiens tematikk.

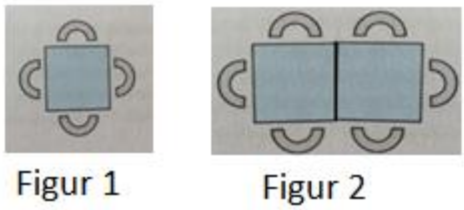
Avslutningsvis ønsker jeg å fremheve Cohen sin kommentar om at trusler mot gyldighet og pålitelighet aldri kan elimineres fullstendig (Cohen et al., 2011). Det er grunnlag for å tro at andre forskere kan finne andre resultater hvis de gjennomfører en lignende undersøkelse. De faktiske forholdene kan ikke gjenskapes, og det sosiale samspillet vil være ulikt fra gruppe til gruppe. Likevel mener jeg at mine resultater har en verdi, da de gir et innblikk i elevers resonnering og generalisering i forbindelse med ulike representasjoner av et figurmønster. Det er nærliggende å tro at lignende resultater kan forekomme, og at min studie i sammenheng med andre studier i forskningsfeltet gir innblikk i en viktig tematikk for å sikre elevenes læring og utvikling.

## 3.8 Presentasjon av oppgavene som brukes i datainnsamlingen

Elevene fikk i denne studien presentert tre ulike oppgaver til tre ulike økter. Elevene arbeidet med en oppgave i hver økt. Oppgavene har ulike semiotiske og kontekstuelle kvaliteter, men de har til felles at utviklingen i figurmønsteret kan beskrives med den samme matematiske formelen. Jeg vil i det følgende presentere og analysere de tre oppgavene i den rekkefølgen de ble presentert for elevene. Likheter og ulikheter mellom oppgavene påpekes, og det det drøftes noen generaliseringsstrategier det kan være tenkelig at elevene benytter seg av i arbeidet med de aktuelle oppgavene. Ordlyden og strukturen i de tre oppgavene er tilnærmet lik. De første figurene i et figurmønster presenteres visuelt, og elevene bes om å finne figur 4, figur 10 og presentere en generell regel som gjør at de kan regne ut antall elementer i en vilkårlig valgt figur. Oppgavene i sin helhet ligger som vedlegg 1.

### 3.8.1 Oppgave 1

På en restaurant er det kvadratiske bord, og det er plass til en person ved hver side av bordet. Ved ett bord kan det sitte maks 4 personer. Når det kommer mange som skal spise sammen setter servitørene sammen bordene til langbord. Når 2 bord er slått sammen er det plass til 6 personer. Den visuelle fremstillingen av figurmønsteret slik den vist i oppgaven er vist i figur 3.




*Figur 2 Den visuelle fremstillingen av figur 1 og 2 i oppgave 1.*

Dette er den første oppgaven elevene ble introdusert for, og da elevene ikke hadde arbeidet med figurmønster tidligere er det også den første oppgaven innen figurmønster de arbeider med på generelt grunnlag. Oppgavens konkrete kontekst anser jeg som en styrke for det innledende arbeidet med figurmønsteroppgaver. Den gjenkjennelige konteksten kan gjøre det lettere for elevene å «gripe an» oppgaven, og det kan være en styrke i overgangen fra det konkrete arbeidet med å finne neste figur, til å finne en generell regel for utregningen av antall elementer i en vilkårlig figur.

Ulike generaliseringsstrategier det vil være naturlig for elevene å benytte seg av kan være:

1. Det er plass til fire personer på hvert bord, men for hvert bord som settes sammen forsvinner det to plasser. Rent matematisk kan dette uttrykkes ved formelen $F(n) = 4n - 2(n-1)$.

2. Det er alltid plass til to personer ved hvert bord, samt en person ved hver ende. Rent matematisk kan dette uttrykkes ved formelen $F(n) = 2n+2$.
3. Ved de midterste bordene er det plass til to personer, mens det ved de ytterste bordene er plass til tre personer på hvert bord. Rent matematisk kan dette uttrykkes ved formelen $F(n) = 2(n-2) + 6$.

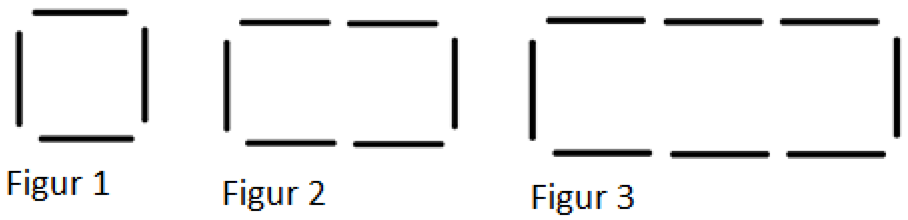
Generaliseringsstrategi 1 baserer seg på det Rivera og Becker (2008) omtaler som dekonstruktiv generalisering, der det identifiseres et element i figurmønsteret som gjentas, men som overlapper. Det repeterende elementet vil i dette tilfellet være ett bord med fire tilhørende stoler. Rent matematisk er denne måten å tenke på ganske avansert, og jeg forventer ikke at elevene skal komme frem til en generalisering basert på denne metoden. Det er mer sannsynlig at elevene benytter seg av denne vinklingen i det innledende arbeidet, men går over til en annen strategi når de skal formulere en generell regel.

I alternativ 2 benyttes konteksten aktivt, og de sammensatte bordene betraktes mer som et langbord med langsider og kortsider. Enheten er her langbordet, der det er plass til like mange personer på hver langside som det antallet bord langbordet er satt sammen av (identisk med figurnummeret) samt en person på hver ende. Jeg forventer ikke at elevene skal uttrykke denne generaliseringsstrategien ved bruk av matematiske symboler, men at enkelte klarer å beskrive den generelle strukturen i figurmønsteret, og dermed produsere en verbal generalisering anser jeg som sannsynlig.

Det siste alternativet deler figurmønsteret i to deler – de bordene der det er plass til to personer, og de bordene der det er plass til tre personer. Også her antar jeg at elevene vil benytte konteksten aktivt i sin resonnering og generalisering. Rent matematisk anser jeg denne metoden for noe tungvint, da man må gjøre flere operasjoner for å komme frem til rett svar. Dette kan være med på å gjøre det vanskelig for elevene å uttrykke strategien rent generelt, til tross for at de kan være i stand til å benytte strategien på konkrete eksempler.

### 3.8.2 Oppgave 2

Til denne oppgaven er det ikke knyttet en konkret situasjonskontekst. Elevene får presentert de tre første figurene i et figurmønster, og skal finne figur 4, figur 10, og en generell regel for å beregne antall elementer som trengs for å lage en vilkårlig figur i figurmønsteret. Den visuelle fremstillingen som er gitt i oppgaven vises i figur 4.




*Figur 3 Den visuelle fremstillingen av figurmønsteret slik det er vist i oppgave 2*

Rent visuelt kan man anse denne presentasjonen av figurmønsteret som en forenklet versjon av fremstillingen i oppgave 1. Figurene er her sammensatt av streker, og antallet streker i denne oppgaven er identisk med antall stoler for tilsvarende figurnummer i oppgave 1. Noen generaliseringsstrategier elevene kan ta i bruk er:

1. Det er like mange streker som figurnummeret oppe og nede, og så to streker på endene. Uttrykt matematisk ved formelen F(n) = 2n + 2.
2. Hvis man deler figuren i to får man to deler med en strek mer enn figurnummeret i hver del. Uttrykt matematisk ved formelen F(n) = (n+1) x 2.
3. Det er partall antall streker, og det er alltid et par med streker mer enn figurnummeret. Uttrykt matematisk ved formelen F(n) = 2(n+1).

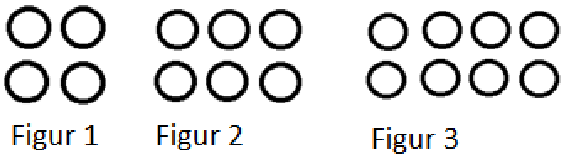
Den første generaliseringsstrategien er rent matematisk den samme som generaliseringsstrategi 2 for oppgave 1. Det er mulig at elevene gjenkjenner strukturen i figurmønsteret fra oppgave 1, og tillegger den semiotiske modellen i oppgave 2 samme meningsinnhold som for oppgave 1. Uavhengig av om elevene ser sammenhengen mellom oppgave 1 og oppgave 2, går denne generaliseringsstrategien ut på at man ser figuren som bestående av to hovedkomponenter; strekene som ligger horisontalt og strekene som ligger vertikalt. Disse to komponentene behandles separat, og beregningen av totalantall streker deles inn i beregningen for antall horisontale og antall vertikale streker, som til slutt adderes sammen. Det vesentlige her er at det er like mange horisontale streker på en rekke som figurnummeret, og at det alltid legges til to vertikale streker, en på hver ende. Igjen forventer jeg ikke at elevene skal uttrykke dette med matematiske symboler, men at de evner å gi en verbal beskrivelse av struktur og egenskaper ved figurmønsteret, som deretter leder til en generell regel for beregningen av antall streker i en vilkårlig figur i figurmønsteret.

I den andre generaliseringsstrategien deles figuren igjen inn i to deler, men til forskjell fra generaliseringsstrategi 1 er disse delene identiske. Ved å trekke en diagonal linje gjennom figuren deles figuren inn i to identiske deler, som begge består av en strek mer enn figurnummeret. For figur 1 vil altså hver del bestå av to streker, og beregningen av totalantall streker krever at elevene først identifiserer antall streker i hver del, og deretter dobler dette. Rent matematisk kan man si at de to uttrykkene $F(n) = 2n + 2$ og $F(n) = (n+1) \times 2$ inneholder det samme meningsinnholdet, og at det ene uttrykket er en forenkling av det andre. For elevene, som ikke er vant til å bruke algebraiske formler og uttrykk, anser jeg det som sannsynlig at elevene opplever generaliseringsstrategiene som ulike. Når man kobler generaliseringsstrategien til den visuelle semiotiske modellen representerer de algebraiske uttrykkene ulike elementer i figuren. Den verbale generaliseringen vil dermed også være ulik i de to strategiene, da de trolig vil basere seg på den visuelle semiotiske modellen, og en inndeling av denne som vil være ulik for de to generaliseringsstrategiene.

Generaliseringsstrategi 3 deler figuren inn i par, og det er antallet par som er sentralt for å beregne totalantallet streker i en vilkårlig figur. For å argumentere for og begrunne hvorfor figuren alltid består av par kan man bruke den visuelle semiotiske modellen og påpeke at de horisontale strekene i øvre rekke alltid vil danne par med de horisontale strekene i nedre rekke, og at de to vertikale strekene alltid vil danne ett par. Videre vil det alltid være ett par mer enn figurnummeret. Antall horisontale parene vil alltid være identisk med figurnummeret, mens det vertikale paret alltid må legges til. Denne generaliseringsstrategien tar utgangspunkt i en ny inndeling av den visuelle semiotiske modellen, og antallet deler figuren deles inn i avhenger av figurnummeret. Dette skiller seg fra de to foregående generaliseringsstrategiene, der samtlige figurer i figurmønsteret anses som sammensatt av to deler, der antall elementer i hver del er variabelt. I denne generaliseringsstrategien er det derimot antall deler i hver figur som er variabelt, mens antall elementer i hver del er fast. Som tidligere er den verbale generelle beskrivelsen jeg forventer at elevene vil benytte seg av her, og ikke en symbolsk matematisk formel.

### 3.8.3 Oppgave 3

Denne oppgaven likner i stor grad på oppgave 2 både når det gjelder mangelen på en situasjonskontekst og spørsmålsformulering. Den visuelle fremstillingen av figurmønsteret er gjengitt i figur 5.




*Figur 4. Den visuelle fremstillingen av figurmønsteret slik det er vist i oppgave 3*

Rent visuelt skiller denne oppgaven seg i større grad fra de to foregående ved at den har endret semiotisk modell fra det som kan oppleves som kvadrater og rektangler, til nå å være sammensatt av sirkler. Noen generaliseringsstrategier elevene kan benytte seg av er:

1. Det legges alltid til to kuler fra en figur til den neste. Uttrykt matematisk ved $F(n) = f_{n-1} + 2$
2. Det er to rader med like mange kuler i hver, og det er alltid en kule mer i hver rad enn figurnummeret. Uttrykt matematisk ved $F(n) = (n+1) \times 2$
3. Det er alltid to rader med like mange kuler som figurnummeret, også er det to kuler ekstra. Uttrykt matematisk ved $F(n) = 2n+2$.

Generaliseringsstrategi 1 er en rekursiv strategi, og dermed ikke en gyldig generaliseringsstrategi. Til tross for at denne generaliseringsstrategien ikke muliggjør en direkte beregning av antall elementer i en vilkårlig figur kan det tenkes at dette er den første og umiddelbare strategien elevene kommer frem til. Det kan tenkes at det er lettere for elevene å se denne strategien sammenlignet med de tidligere oppgavene, da det ikke kreves en omstrukturering av figuren for å legge til de to sirklene. Det er likevel ønskelig at elevene går over til en eksplisitt generaliseringsstrategi i det videre arbeidet med figurmønsteret.

I alternativ 2 deles figuren i to langs en horisontal midtlinje, og man får da to like rader med sirkler. Det kan tenkes at denne inndelingen er lettere for elevene å oppdage en den inndelingen som gjøres i oppgave 2, da det i forhold til gestalteffekten (Rivera, 2009) er lettere å anse hver sirkel som en selvstendig del av figuren. I oppgave 2 veksler elementene mellom horisontal og vertikal representasjon, og danner en helhet vi gjenkjenner som en geometrisk figur. I oppgave 3 danner ikke sirklene denne gjenkjennelige figuren i like stor grad, noe som kan gjøre det lettere å dele sirklene i to identiske rekker, der hver rekke inneholder en sirkel mer enn figurnummeret.

Generaliseringsstrategi 3 er den samme som også er blitt presentert for oppgave 1 og oppgave 2. Fordi den visuelle semiotiske modellen av figurmønsteret i oppgave 3 i større grad skiller seg fra de visuelle semiotiske modellene i oppgave 1 og oppgave 2 vil oppdelingen av figuren, og dermed også elevenes resonnement og verbale generalising bli noe ulik fra det som er presentert for oppgave 1 og oppgave 2. Sirklene må her igjen deles inn i to deler; en del vil være to rader med likt antall kuler som figurnummeret, og den del med to kuler. Det kan tenkes at elevene har større vanskeligheter med å komme frem til denne generaliseringsstrategien sammenlignet med tidligere, da kulene ikke danner noen egen geometrisk figur, og dermed blir sett mer som en helhet. Det kan altså være utfordrende å skille ut de kulene som skal legges til i beregningen av totalantallet kuler som er brukt i en gitt figur.

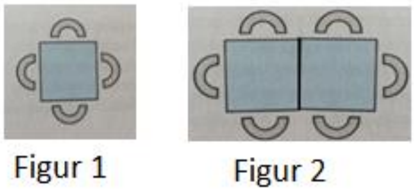
# 4 Analyse

I dette kapittelet presenteres og analyseres de data som er samlet inn ved hjelp av lydopptak og elevenes skriftlige arbeider, samt mine feltnotater. Sentrale funn drøftes i lys av teoriene som er beskrevet og gjengitt i kapittel 2, med fokus på bruk av semiotiske modeller og strategier for resonnering og generalisering. Kapittelet er strukturert slik at de to elevgruppene analyseres under ett for hver enkelt oppgave. Data knyttet til den enkelte oppgave presenteres og analyseres i den rekkefølgen elevene ble presentert for oppgavene. For hver oppgave vil datamaterialet bli analysert etter kategoriene ikke-eksplisitt og eksplisitt generalisering. Der det gjengis utdrag fra samtalene vil utsagn som er merket med «læreren» vise det jeg som forsker sa til elevene for å lede diskusjonen og rette elevenes oppmerksomhet mot sammenhengen mellom elevenes generalisering og den visuelle modellen.

## 4.1 Oppgave 1

Dette var den første oppgaven elevene arbeidet med i denne studien, og det var også elevenes første møte med figurmønsteroppgaver. Oppgaven har en konkret situasjonskontekst og den semiotiske modellen som presenteres i oppgaveteksten er en illustrasjon av antall stoler det er plass til rundt et gitt antall bord (se figur 6). Elevene skal finne ut hvor mange som kan sitte ved 4, 5, og 10 bord, samt en generell regel for å beregne antall personer det er plass til rundt et vilkårlig antall bord.

### 4.1.1 Ikke-eksplisitt generalisering



*Figur 5 Den visuelle fremstillingen av figurmønsteret i oppgave 1*

I det innledende arbeidet med figurmønsteret var elevene svært knyttet til den visuelle modellen, og de fleste brukte tegning og telling for å finne svaret på oppgaven. De fleste elevene kopierte den visuelle modellen som var presentert i oppgaveteksten, men Selma og Jens gjorde noen små justeringer i sin modellbruk. Da Selma skulle tegne stolene til figur 10 endret hun representasjon av stolene fra halvsirkler til prikker. Denne endringen forklarer hun med at det var lettere å tegne prikker, og at prikkene er «tilsvarende stolene». Jens tegnet firkanter som sto tett og delte en sideflate på figur 3, 4 og 10. Han forklarer at han teller antall sider som ikke står inntil hverandre for å finne antall personer det er plass til rundt de sammensatte bordene. Jens forenkler på denne måten den visuelle modellen og bruker informasjonen om at det er plass til en person på hver side av ett bord for å finne svaret på oppgaven. I tegningen som representerer figurnummer 4 og 10 har han imidlertid tegnet prikker ved hver av sidene som ikke deler sidekanter, men disse prikkene tegnet han mens han telte lavt for seg selv, og oppleves mer som tellehjelp enn som en selvstendig del av den visuelle modellen.

Selma og Jens viser med sine endringer av den visuelle modellen at de håndterer det matematiske i oppgaven, og at det sentrale er å få oversikt over hvor mange personer det er plass til rundt det aktuelle antallet av bord. Slik Steinbring (1998) påpeker er det sentrale i studiet av bruken av semiotikk i matematikk hvordan ulike tegn og symboler tillegges mening. For Selma og Jens er meningsinnholdet i den visuelle modellen som er presentert i oppgaven og den egenproduserte modellen lik, til tross for at det visuelle uttrykket i de to modellene er noe ulikt. Prikkene og sidekantene som ikke er inntil hverandre tillegges samme meningsinnhold som halvsirklene i den opprinnelige modellen, og representerer antall stoler det er plass til rundt de sammensatte bordene.

For å finne antall personer det var plass til rundt tre bord brukte elevene i stor grad ikke-eksplisitte generaliseringsstrategier, og benyttet i stor grad telling ved hjelp av den semiotiske modellen. Sitatene under er plukket fra begge gruppene og er elevenes svar på lærerens spørsmål «Hvordan gjorde dere når dere skulle finne ut hvor mange som kunne sitte ved 3 bord?»

> Selma: Da tegnet jeg bordene og stolene sånn som de var satt opp der (Peker på figur 2 på oppgavearket) bare med ett ekstra bord og to ekstra stoler, også telte jeg de.
>
> Elin: ja, jeg tegnet opp bordene sånn også en stol på hver side, sidekant.
>
> Peder: jeg tegnet bordene og tegnet stolene, også telte jeg.
>
> Jens: jeg tok og laget tre firkanter også telte jeg hvor mange sider det var som ikke var inntil hverandre.

Felles for de generaliseringene som er vist her er at de kan plasseres inn under Lannins (2005) kategori «ikke-eksplisitt» generalisering. Selma henviser til og bygger på figur 2, og bruker dermed en rekursiv strategi. Elin, Jens og Petter henviser ikke til andre foregående figurer, men baserer seg på sine tegninger og telling for å komme fram til et svar. Dette faller inn under kategorien «telling». At generaliseringene faller inn under kategorien «ikke-eksplisitt» innebærer at det ikke er mulig å foreta en direkte beregning for antall objekter i et gitt element av figurmønsteret. Ved denne formen for generalisering vil elevene være helt avhengige av tegning, eller å vite antall elementer i foregående figur for å finne antall elementer i den aktuelle figuren. Elevenes oppgaveløsning tar utgangspunkt i tegning og telling. Dette er strategier som går inn under Lannin (2005) sine kategorier ikke-eksplisitt generalisering. I det innledende arbeidet med figurmønsteroppgaver kan det være hensiktsmessig å benytte seg av ikke-eksplisitte generaliseringsstrategier, og ofte er dette elevenes intuitive strategi. Skal elevene lykkes i å uttrykke den generelle utviklingen i figurmønsteret må de imidlertid benytte seg av eksplisitte generaliseringsstrategier. En overgang fra bruk av ikke-eksplisitte til eksplisitte generaliseringsstrategier kan fremprovoseres av at elevene arbeider med å finne antall elementer i figurer med et høyt figurtall (eksempelvis figur 100).

### 4.1.2 Eksplisitt generalisering og resonnering

I det videre arbeidet med oppgave 1 kom elevene fram til to ulike former for eksplisitt generalisering. Rent matematisk kan disse generaliseringsstrategiene uttrykkes slik:

A. $F(n) = 2n + 2$
B. $F(n) = 2(n-2) + 6$

Jeg vil i det følgende presentere og analysere hver av de to generaliseringsstrategiene, og elevenes resonnement i forbindelse med disse. Strategiene vil omtales som generaliseringsstrategi A og generaliseringsstrategi B og presenteres i alfabetisk rekkefølge.

#### *4.1.2.1 Generaliseringsstrategi A – Du ganger med to og plusser på to. F(n) = 2n + 2*

En forutsetning for at elevene skal kunne utvikle eksplisitte generaliseringsstrategier er at de ikke lenger har behov for å tegne opp hver figur for å finne svaret på antall elementer i figuren. Guro benyttet ikke tegning og telling da hun skulle finne antall personer det var plass til ved ti sammensatte bord.

> Guro: Eller jeg tenkte på en måte at det var ti bord som var satt sammen sånn (tegner et tomt rektangel), også tenkte jeg bare at jeg ganget det.
>
> Lærer: Hva ganget du det med?
>
> Guro: ti ganger to, eller jeg ganget ti ganger to som ble 20 også satte jeg på de endestolene som ble 22 (peker på det tomme rektangelet mens hun forklarer).
>
> Lærer: hvorfor ganget du ti med to?
>
> Guro: fordi det sitter to stykker på hver side av bordet.

I eget arbeid har ikke Guro tegnet opp en modell for å finne svaret på oppgaven, men kun skrevet «22 personer» som svar på oppgaven. På spørsmål om hun kan begrunne og redegjøre for egen tenkning er det mye som tyder på at hun likevel har basert seg på en visuell modell for å finne en løsning på oppgaven. Hun strever med å ordlegge seg tydelig, og tegner et tomt rektangel for å støtte egen forklaring og resonnering. Guro peker aktivt på rektangelet når hun forklarer, og viser at hun bruker den visuelle modellen aktivt i tenkningen, men at hun ikke er avhengig av å tegne den opp for å finne en løsning på oppgaven. Slik Bussi og Mariotti (2008) påpeker er bruken av semiotiske tegn og modeller i matematikk knyttet både til det å finne en løsning på den aktuelle oppgaven, men også til det det å kunne kommunisere med andre deltakere i den sosiale settingen der den aktuelle oppgaveløsningen finner sted. Utdraget over kan tolkes i lys av dette. Det er først når Guro blir spurt om å forklare egen tenkning at hun tydelig bruker og støtter seg til en visuell modell. Det er derfor nærliggende å anta at produksjonen av den visuelle modellen har til hensikt å tydeliggjøre eget resonnement for andre deltagere i den sosiale settingen.

Den visuelle modellen Guro tegner for å støtte egen resonnering er på flere måter ulik den modellen som er presentert i oppgaveteksten. Det tomme rektangelet markerer hverken hvert enkelt bord eller totalantallet bord som skal representeres. Modellen kan slik ses på som en åpen modell som har til hensikt å fremheve generelle egenskaper ved figurmønsteret. De sentrale egenskapene er her at det er plass til like mange på hver langside, og en på hver kortside (ende). Det er et viktig poeng i arbeidet med figurmønster at elevene skal uttrykke generalitet. For å mestre dette er det hensiktsmessig at elevene kan benytte den visuelle semiotiske modellen som støtte når de beveger seg mot generelle verbale utsagn og etter hvert bruk av matematiske symboler. Guro viser her at hun evner å bruke en visuell semiotisk modell for å støtte egen resonnering, og at hun har identifisert noen viktige generelle egenskaper ved figurmønsteret.

Som et tiltak for å støtte elevene i deres utvikling av egne resonnement og generalisering fikk elevene spørsmål om hvor mange personer det ville være plass til ved 50, 100 og 150 sammensatte bord. Felles for de to gruppene er at de benytter seg av konteksten i sine resonnement, både for å underbygge og støtte eget resonnement, og for å begrunne endring av resonnement. Noen utdrag presenteres og analyseres i det følgende.

> Stine: hvis det er 50 bord så er det 50 som kan sitte på den ene siden av bordet […] så da er det 50 pluss 50 også er det to som sitter på endene. Så 102 personer.

I dette utdraget resonnerer Stine seg frem til hvor mange som kan sitte ved 50 bord. Hun bruker her konteksten og de generelle egenskapene i sitt resonnement. Med utsagnet «hvis det er 50 bord så er det 50 som kan sitte på den ene siden av bordet» viser hun til den generelle egenskapen at det på hver side av bordet er plass til like mange personer som antall bord. Dette er en viktig generell egenskap for dette figurmønsteret, og leder Stine videre i sitt resonnement. Hun adderer så 50+50, og påpeker videre at det er «to som sitter på endene» og som derfor må legges til. Nok en gang bruker hun den konkrete, dagligdagse konteksten, og håndterer antallet personer ut fra deres plassering rundt bordene. Det vil til sammen være plass til to på endene, og disse to håndteres separat i utregningen. Rent matematisk kan vi omtale de to som sitter på enden som konstantleddet i den generelle formelen, og for mange elever kan det være utfordrende å håndtere konstantleddet riktig i utregningen og bruken av en generell formel. I dette tilfellet kan det imidlertid se ut som at Stine ved hjelp av konteksten klarer å håndtere konstantleddet korrekt i utregningen sin.

Hvordan konteksten støtter elevenes forståelse for, og bruk av, konstantleddet kan også underbygges i det følgende utdraget, der elevene jobber med å komme å avgjøre antall personer det er plass til rundt 100 bord:

> Guro: 220. […] 100 gange 2, også det ble 200 også satte jeg på to endestoler, og da…
>
> Selma: Nei, det blir 202!
>
> Guro: ja!
>
> Lærer: okei, først så sa du 220?
>
> Guro: Ja, men så tenkte jeg at du satt jo ikke på 20 endestoler.

I dette utdraget bruker Guro konteksten til å endre og underbygge sitt resonnement. Guros umiddelbare respons til antall personer som kan sitte ved 100 bord er «220». Etter hvert som Guro redegjør for egen tenkning kommer Selma umiddelbart med responsen «nei, det blir 202». Guro endrer så sitt svar til 202 hun også, og begrunner dette med at hun «ikke satte på 20 endestoler». Det kan tyde på at det er ved å knytte egen tenkning og matematisk utregning til konteksten Guro kommer fram til at den umiddelbare responsen «220» må være feil. Hun viser til strukturen og generelle egenskaper ved figurmønsteret når hun påpeker at «du satt jo ikke på 20 endestoler». Igjen kan det se ut som at konteksten er avgjørende for elevenes resonnement, og at de ved aktiv henvisning til, og bruk av konteksten klarer å redegjøre for, begrunne, og endre egen tenkning slik at resonnementet blir matematisk gyldig.

Etter hvert som elevene resonnerte seg frem til hvor mange det var plass til rundt 50, 100 og 150 bord var de i større grad i stand til å svare på spørsmålet angående hvor mange personer det ville være plass til rundt et vilkårlig antall bord. Sitatene under viser et noen av elevenes generaliseringer:

> Lærer: Klarer dere å beskrive det, sånn at uansett hvilket tall jeg sier så klarer dere å finne ut hvor mange personer som kan sitte rundt bordene?
>
> Jens: Ja, man tar det tallet du sier, så ganger man det med to, også legger man på to også har man svaret.
>
> Selma: Det sitter jo alltid to personer ved endene av bordet, og en på hver side av bordet (peker). Også […] man kan alltid bare gange det med to, også legger man på to til.
>
> Stine: Hvis det er 40 bord… Så er det liksom 40 som sitter på den siden og 40 som sitter på den andre, også er det to på den ytterste, en på hver side. Så 40+40 er 80 også pluss to, 82.

Jens og Selma sine generaliseringer er eksplisitte, og dersom de tolkes i lys av situasjonskonteksten og den foregående samtalen er de også matematisk gyldige. I denne sammenhengen skal Jens sitt «det tallet du sier» og Selma sitt «det» i «gange det med to» forstås som figurnummeret. Begge disse generaliseringene anser jeg som passende under Lannin (2005) sin kategori «kontekstuelle generaliseringer». Regelen elevene presenterer relaterer seg til en telle-teknikk basert på informasjon som er gitt i situasjonen. Selma er i stand til å påpeke relasjonen mellom den generelle regelen og konteksten gjennom utsagnet «det sitter jo alltid to personer ved endene av bordet, og en på hver side av bordet». Det hun påpeker her (dog noe ufullstendig) omhandler strukturen og generelle egenskaper i figurmønsteret. Det er bestandig til sammen to personer som sitter ved endene av bordet. Dette er det som i den generelle slutningen omtales som «å legge til to». Det sitter også alltid en person på hver side av bordet, og det er like mange bord som figurnummeret. Dette er representert i den generelle slutningen ved «å gange med to». Selma bruker også her konteksten for å begrunne hvordan og hvorfor den generelle slutningen er gyldig.

For å begrunne generaliseringen «du ganger det med to, og plusser på to» henviser Stine til et eksempel; figurnummer 40. Videre forklarer hun hvordan man skal forstå og anvende den generelle slutningen på dette eksempelet. Hun relaterer også eksempelet til konteksten ved å fremheve at «det er 40 som sitter på den ene siden, og 40 som sitter på den andre» og «to på den ytterste». I forhold til Balacheff (1988) sine kategorier for argumentasjon og bevis anser jeg Stine sitt utsagn til å ligge mellom kategoriene «et avgjørende eksperiment» og «generisk eksempel». Karakteristisk for et generisk eksempel er at de generelle egenskapene ved et eksempel eksplisitt skal uttrykkes, og at det det argumenteres for at disse egenskaper og strukturer inngår i alle elementer som inngår i en gruppe (Balacheff, 1988). Selma uttrykker ikke eksplisitt at det ikke er noe spesielt med eksempelet hun har valgt (figurnummer 40), men hun henviser likevel til noen generelle trekk som gjelder for alle elementer i figurmønsteret. Jeg anser det også slik at hun bruker eksempelet mer for å understøtte regelen, enn som å sjekke at regelen fungerer. Det sistnevnte er forbundet med Balacheff (1988) sin kategori «avgjørende eksperiment» der man avgjør sannheten ved et utsagn ved å vise til at det fungerer på et konkret eksempel. I samtalen har det ikke vært oppe til diskusjon hvor mange personer som kan sitte rundt 40 bord, og jeg mener dette er en av grunnene til at Selma sitt utsagn ligger mellom kategoriene «et avgjørende eksperiment» og «generisk eksempel». Heller enn å vise tilbake til et eksempel der det er avgjort at resultatet stemmer bruker hun et nytt eksempel som et utgangspunkt for å forklare gyldigheten av den generelle slutningen, men mangelen på eksplisitt påpeking av de generelle egenskapene og at struktur og egenskaper gjelder for alle elementer i figurmønsteret gjør at det ikke fullstendig kan karakteriseres som et generisk eksempel.

Elevene benyttet seg i stor grad av den semiotiske modellen som var presentert i oppgaven, og de visuelle modellene elevene selv produserte for å støtte egne resonnement og generaliseringer. Særlig ble de visuelle modellene brukt som støtte i den felles kommunikasjonen i gruppa ved at elevene pekte og illustrerte på modellene mens de redegjorde for egne resonnement og generaliseringer. Meningsinnholdet i modellene endret seg underveis i elevenes arbeid ettersom de arbeidet mer med de generelle egenskapene ved figurmønsteret. Fra å være en illustrasjon av et gitt figurnummer som kunne fungere både som tellestøtte og en illustrasjon av hvor mange personer det var plass til rundt et gitt antall bord, ble de visuelle modellene mer en generell og åpen modell. Elevene benyttet seg av den visuelle modellen de hadde laget for figurnummer 10 for å vise og forklare hvordan de hadde resonnert seg frem til svaret på antallet personer som kan sitte ved 50, 100 og 150 sammensatte bord. Her brukte elevene den visuelle modellen mer for å underbygge egne slutninger enn som et selvstendig svar på en oppgave. Den visuelle modellen endrer meningsinnhold fra å være knyttet til ett bestemt figurnummer, til å kunne vise generelle egenskaper som gjelder for alle figurer som inngår i figurmønsteret.

#### *4.1.2.2 Generaliseringsstrategi B – først tar du de med to på, også tar du de med tre på. F(n) = 2(n-2) + 6*

Det var Jens som presenterte denne generaliseringsstrategien, og det var kun hans gruppe som diskuterte strategien. Til tross for at gruppen ikke kom helt i mål med å uttrykke strategien rent generelt vil jeg likevel anerkjenne deres forsøk og resonnering. Et utdrag av samtalen viser hvordan Jens resonnerer og forsøker å forklare de andre på gruppen hvordan han har tenkt for å finne svaret på antall personer som får plass rundt 50 bord:

> Lærer: Du sier 102, Jens. Hvordan tenkte du nå?
>
> Jens: Nå tok jeg først de bordene som det bare var to stoler på sånn bortover, også 48 ganger, siden det er to bord som det er tre på. Ja, og da tok jeg 48 sånne bortover også doblet jeg 48, og det ble 96. og så tok jeg pluss liksom, det var tre på den andre siden for å slutte eller tre på den ene siden og tre på den andre siden for å slutte det, også la jeg de på de to siste som det da var tre på også fikk jeg 102.

Rent matematisk kan strategien Jens her presenterer formuleres som $F(n) = 2(n-2) + 6$. Elevene kommer likevel ikke så langt i sin generalisering at de uttrykker denne strategien rent generelt. Strategien blir heller ikke diskutert i særlig grad, da Jens endrer strategi til strategi A når de andre på gruppa presenterer denne strategien for ham. Jens sin generaliseringsstrategi er imidlertid interessant å se på, da måten å se figurmønsteret på skiller seg fra generaliseringsstrategi B. Dette vises også i hvordan han resonnerer og begrunner, samt hvordan han bruker konteksten og den visuelle semiotiske modellen til å underbygge eget resonnement.

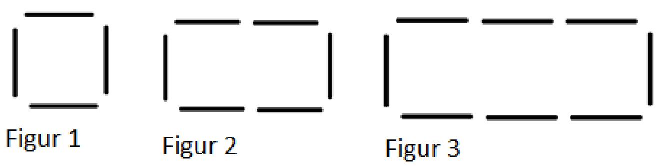
Jens deler figuren i to hovedkomponenter – de bordene der det kun sitter to personer, og de bordene der det sitter tre personer. I forhold til Rivera og Becker (2008) sine kategorier for generalisering av et figurmønster kan dette kategoriseres som konstruktiv generalisering. Han viser til at det ved de to ytterste bordene er plass til tre personer. Ved hvert av de resterende 48 bordene er det plass til to personer. For å komme fram til rett antall personer som kan sitte ved 50 bord dobler han altså 48, og legger til seks (tre personer fra hvert av de ytterste bordene). Jens relaterer seg her i stor grad til konteksten, og bruker den aktivt i sitt resonnement. Ved å se på det Jens uttrykker i forkant av presentasjonen av strategien er det nærliggende å tro at han kommer fram til strategien ved å undersøke antall sideflater ved bordene det kan sitte personer. Hans resonnement bygger på at de to ytterste bordene har plass til én person mer enn de bordene som er plassert mellom de to ytterste bordene. I forhold til generaliseringsstrategi A er dette en annen måte å se figurmønsteret på. Mens det i generaliseringsstrategi A kun er de to endeplassene som isoleres fra resten av figurmønsteret er det i denne strategien alle de tre sideflatene ved de to ytterste bordene.

I forhold til Lannin (2005) sine kategorier vil jeg kategorisere Jens sin sitt resonnement som kontekstuell generalisering. Han evner å bruke konteksten aktivt i eget resonnement, og kan ved hjelp av konteksten redegjøre, forklare og underbygge for eget resonnement. Jens produserer imidlertid ikke en fullstendig generalisering. Han benytter strategien kun på ett eksempel, og gir ikke utrykk for hvordan strategien kan benyttes rent generelt. Han forholder seg kun til figur 50, og selv om han viser til generelle egenskaper ved figurmønsteret i sitt resonnement påpeker han ikke eksplisitt at dette er generelle egenskaper som vil gjelde for alle figurer som inngår i figurmønsteret.

Det faktum at Jens umiddelbart forlater generaliseringsstrategi B til fordel for generaliseringsstrategi A når han blir presentert for den viser at han evner å se figurmønsteret på ulike måter. Han viser i det videre arbeidet god forståelse for hvordan generaliseringsstrategi A skal benyttes, og identifiserer også raskt at denne måten å se og beregne totalantallet personer det er plass til rundt et gitt antall bord er lettere og mer effektivt enn generaliseringsstrategi B. At man evner å se et figurmønster på ulike måter er en styrke, slik også (Lee, 1996) beskriver i sin studie.

## 4.2 Oppgave 2

I denne oppgaven fikk elevene presentert en ny fremstilling av figurmønsteret (vist i figur 7). Oppgavelyden er tilnærmet lik som for oppgave 1; elevene skal finne figur 4 og figur 10, samt en generell regel for beregningen av antall streker som kreves for å lage en vilkårlig figur i figurmønsteret.




*Figur 6 Den visuelle fremstillingen av figurmønsteret i oppgave 2*

### 4.2.1 Ikke-eksplisitt generalisering

For å finne figur 4 og 10 i figurmønsteret brukte samtlige elever en visuell semiotisk modell. Elevene kopierte den visuelle semiotiske modellen som ble presentert i oppgaven og utvidet denne for å presentere de aktuelle figurnumrene. Til tross for at elevene benytter den samme visuelle semiotiske modellen kommer det i samtalen frem at elevene hadde ulike måter å oppfatte og inndele denne modellen. I utdraget under forklarer elevene hvordan de har tenkt for å finne figur 4.

> Guro: da har jeg tenkt at. Jeg har tatt figur 1, du ser den har man tatt flere ganger her (peker på figur 2 og 3) hvis man setter en strek imellom her, to ganger, tre ganger. Så da gjorde jeg det samme fire ganger, bare de strekene i midten det er liksom, den er blitt forskjøvet bortover sånn (peker på enden).
>
> Peder: jeg har tatt figur 1 pluss figur 3 liksom. Bare at jeg har tatt bort den ene endestreken på figur 3, og den lengst til høyre på figur 1 har jeg tatt bort, og den på figur 3 har jeg tatt bort den lengst til venstre, og så har jeg på en måte satt dem sammen.
>
> Selma: Figur 1, der er det en kloss, så jeg har brukt den klossen fire ganger sånn at den skal forme figur 4.

Elevene har delt den semiotiske presentasjonen av figurmønsteret i ulike deler. Alle elevene henviser til figur 1, og hvordan de har brukt denne for å finne figur 4. På hvilken måte de har benyttet figur 1 er imidlertid noe ulikt. Guro og Selma viser til at de har brukt figur 1 flere ganger for å lage figur 4. Guro gir også en forklaring på at figur 4 ikke er direkte utledet fra figur 1, men at man må ta hensyn til at figuren overlapper, og dermed må fjerne noen streker. Guro benytter seg her av det Rivera og Becker (2008) omtaler som dekonstruktiv generalisering, og et viktig poeng er at hun evner å se at man må ta hensyn til at enkelte elementer i figurmønsteret overlapper hverandre. Peder viser også til en dekonstruktiv generalisering, men han benytter seg av både figur 1 og figur 3 for å lage figur 4. Denne metoden kan ses som en effektivisering av den metoden Guro og Selma bruker. Peder benytter seg av at han har fått oppgitt både figur 1 og figur 3 i oppgaven, og dermed kan sette disse to sammen for å finne figur 4. Implisitt viser han med dette at også han ser figur 1 som et repeterende element i figurmønsterets utvikling. Hans dekonstruktive generalisering kommer til uttrykk når han forklarer at han må «ta bort endestreken lengst til venstre på figur 3, og endestreken lengst til høyre på figur 1» for å lage figur 4. Han ser altså at endestrekene for de to figurene vil overlappe hverandre, og at man må ta høyde for dette i beregningen av figur 4.

De tre elevene viser ingen matematisk utregning for hvordan de har kommet fram til antall streker som kreves for å lage figur 4. Til tross for at både Peder og Guro viser at de baserer seg på en dekonstruktiv generalisering når de lager den visuelle semiotiske modellen for figur 4, kan det se ut til at de i den matematiske beregningen baserer seg på en ren telleteknikk, der det er den visuelle semiotiske modellen som er utgangspunkt for tellingen. Elevene benytter her en ikke-eksplisitt generaliseringsstrategi, og baserer seg på en konkret visuell representasjon for det aktuelle figurnummeret. For å kunne uttrykke den generelle utviklingen i figurmønsteret må elevene benytte seg av en eksplisitt generaliseringsstrategi. I det videre arbeidet kom elevene frem til fire eksplisitte generaliseringsstrategier som ble diskutert og benyttet til oppgaveløsningen. Rent matematisk er det ikke så store skiller mellom de ulike strategiene, men elevenes opplevelse av dem, og måten de benytter den visuelle representasjonen av figurmønsteret gjør at jeg i det følgende vil behandle elevenes strategier som fire ulike generaliseringsstrategier. De fire strategiene og elevenes resonnering i tilknytning til dem presenteres i de følgende avsnitt.

### 4.2.2 Eksplisitt generalisering og resonnering

I det videre arbeidet med oppgave 2 kom elevene frem til fire generaliseringsstrategier. De fire generaliseringsstrategiene elevene benyttet seg av presenteres i det følgende med alfabetisk nummerering, og vil i det videre bli analysert i samme rekkefølge som de presenteres.

A. $F(n) = 2n + 2$
B. $F(n) = (n+1) + (n+1)$
C. $F(n) = (n+1) \times 2$
D. $F(n) = 2(n+1)$

#### *4.2.2.1 Generaliseringsstrategi A – Du ganger med to og plusser på to. F(n) = 2n + 2*

Dette er den samme strategien som ble diskutert i oppgave 1, og elevenes resonnement knyttet til denne generaliseringsstrategien er også tilnærmet lik den for oppgave 1. Elevene kom frem til en generell regel for å beregne antall elementer i et figurnummer; man ganger figurnummeret med to og legger til to. Elevenes største utfordring var å gjøre rede for hvorfor denne regelen alltid vil gi en korrekt beregning av antall elementer for et figurnummer. Et utdrag av samtalen følger:

> Guro: man må jo egentlig ikke tegne, for man kan jo bare tenke i hodet at man for eksempel, hvis det er figur 20 så tenker man at det er 20 streker over og 20 streker under, som da blir 40. Også er det to endestreker, så da blir det 42

> Jens: man tar figurnummeret og ganger med to, også plusser man på to […] Det må være to ender, en på hver side. Og like mange oppe og nede. […] Ja, hvis det er sånn figur nummer 100 da, og den går sånn opp, den blir en lenger strek der sånn (peker på øvre og nedre rekke) for hver gang. Da tar man jo bare 100 streker bortover oppe, og 100 streker bortover nede også setter man på to ender.

De to utsagnene som er presentert over må ses i sammenheng med elevenes arbeid og den samtalen som kommer før de aktuelle utsagnene. Elevene benytter seg her av informasjon som er gitt i situasjonen, og som omhandler figurmønsteret struktur og generelle egenskaper. Jeg vil derfor kategorisere de to elevutsagnene som kontekstuell generalisering etter Lannin (2005) sine kategorier. Jens støtter seg til den visuelle semiotiske modellen. Han fremhever at utviklingen i figurmønsteret kan ses som at det legges til en horisontal strek i øvre og nedre rekke for hver økning i figuren. Han identifiserer også at antall streker i øvre og nedre rekke er identisk med figurnummeret, og at man i tillegg må huske å sette på de vertikale strekene, «endestrekene», en i hver ende.

Både Jens og Guro viser til et eksempel for å støtte egen argumentasjon for gyldigheten av generaliseringsstrategien. Deres valg av eksempler er fritt valgt, og ingen av de aktuelle eksemplene var blitt diskutert i gruppene før elevene trakk frem nettopp disse eksemplene. Bruken av et eksempel for å underbygge argumentasjon, og bevise en påstand er karakteristisk for Balacheff (1988) sine kategorier «avgjørende eksperiment» og «generisk eksempel». Jeg mener at det er viktig å se på elevenes resonnement og bevis under ett, slik også Lannin (2005) fremhever. Jeg vil derfor anse Guro og Jens sine argumenter som et generisk bevis. De evner begge å henvise til generelle egenskapene ved figurmønsteret, ved at de fremhever at det for hver horisontal strek i en rekke finnes en tilsvarende horisontal strek i den andre rekken. Samtidig vil det alltid være to endestreker som må adderes til slutt. Elevene velger så hvert sitt konkrete eksempel, og de anser ikke eksemplene i seg selv som spesielle. Eksemplene er valgt for å fremheve generaliseringsstrategien, og vise hvordan man benytter strategien på konkrete eksempler. De to elevene kunne med fordel ha fremhevet det faktum at det er like mange horisontale streker i hver rekke som figurnummeret, da hadde det også blitt tydeligere at elevenes argumentasjon og bevis er et generisk eksempel. Elevene har imidlertid satt ord på dette tidligere i samtalen, og jeg opplever at forståelsen om sammenhengen mellom antall streker i hver rekke og figurnummeret ligger implisitt i elevenes argumentasjon. På bakgrunn av dette kategoriserer jeg derfor elevenes utsagn som et generisk eksempel.

I tillegg til å uttrykke seg verbalt har Jens også notert på arket sitt «figurnummeret x 2 + 2» for å uttrykke en generell regel for beregningen av antall elementer i en vilkårlig figur i figurmønsteret. Han bruker her en representasjon av den generelle regelen som består av ord og matematiske symboler, og langt på vei kan betegnes som en algebraisk notasjon. Redden (1996) viser til at det er en signifikant korrelasjon mellom elevers beskrivelser i naturlig språk og suksessfull bruk av algebraisk notasjon. Det faktum av Jens evner å gjengi den generelle regelen på med algebraisk notasjon kan vise hvordan han på bakgrunn av sin beskrivelse av figurmønsterets utvikling gjennom verbalspråket evner å videreutvikle dette til å gjengi utviklingen ved bruk av matematiske symboler og algebraisk notasjon.

#### *4.2.2.2 Generaliseringsstrategi B - Du forskyver endestrekene, en opp og en ned, også plusser du det sammen. F(n) = (n+1) + (n+1)*

Denne generaliseringsstrategien ble kun diskutert av den ene gruppen, og må ses i sammenheng med generaliseringsstrategi C. Det var Guro som først presenterte strategien. Et utdrag av samtalen følger.

> Guro: Man kan jo også bare ta gange da, da kan man bare flytte disse to strekene opp dit (peker på endestrekene) eller en dit og en dit, så får man tre ganger tre, nei tre ganger to. Det blir jo det samme. […] Hvis man har (tegner figur 3) den, så er det egentlig endestykke her, men så putter vi endestykkene opp sånn, også blir det fire gang to.
>
> Selma: Eller så kan endestrekene flyttes opp da, så da blir det sånn at istedenfor at de er på siden, så er de sånn her (tegner en strek ekstra i hver rad).

Både Guro og Selma er her svært knyttet til den visuelle semiotiske modellen, og de tegner og visere samtidig som de forklarer. De manipulerer her den visuelle semiotiske modellen som er gjengitt i oppgaven, og de har særlig fokus på endestrekene. I likhet med generaliseringsstrategi A er det endestrekene som identifiseres som noe som må behandles for å komme frem til en korrekt generell regel. Der elevene i generaliseringsstrategi A legger til de to endestrekene etter at de har beregnet antall horisontale streker, flytter elevene her endestrekene, og endrer dem fra vertikale til horisontale. Elevene manipulerer altså den visuelle modellen slik at de får to rader med like mange streker i hver rad. En endestrek flyttes til den øverste raden, mens den andre endestreken flyttes til den nederste raden. I samtalen bruker Guro figur 3 som et eksempel, og viser til at hun ved å forskyve endestrekene får to rader med 4 streker i hver rad. Hun benytter så multiplikasjon for å beregne totalantallet streker i figuren. I den videre samtalen benytter likevel både Guro og Selma addisjon når de skal beregne antall elementer i en figur ved denne metoden. Deres utregning blir da (figurnummer + 1) + (figurnummer + 1). Elevene går i det videre arbeidet bort fra denne generaliseringsstrategien, og den brukes ikke ytterligere.

I oppsummeringen av samtalen oppsummeres og diskuteres alle generaliseringsstrategiene elevene har arbeidet med. I diskusjon rundt generaliseringsstrategi B og hvorfor den ikke ble benyttet ytterligere uttrykker Guro:

> Guro: […] men det er mye lettere å gjøre det med lave tall. Med høye tall er det jo mye lettere å bare ta 100 + 100 +2.Når man forskyver er det mye lettere med lave tall.

Når Guro her viser til å forskyve er dette det samme som å benytte generaliseringsstrategi B. Elevene omtalte denne strategien som å forskyve, i sammenheng med at man forskyver de to endestrekene for å danne to like rader. Det ser ut til at elevene selv ikke oppfatter denne strategien som like effektiv som generaliseringsstrategi A. Det kan tenkes at dette er fordi utregningen oppleves som lenger og mer tungvint. Elevene må først legge til en strek på hver rad, da har de figurnummeret + 1 streker i hver rad. Deretter må disse to radene adderes. Det blir dermed et ekstra ledd i utregningen sammenlignet med generaliseringsstrategi A.

Fordi generaliseringsstrategi B ikke ble benyttet i noen særlig grad ble den heller ikke diskutert ytterligere. Av det elevene her kommer med vil jeg kategorisere det som kontekstuell generalisering etter Lannin (2005) sine kategorier. Elevene benytter seg i stor grad av den visuelle semiotiske modellen av figurmønsteret. De manipulerer denne for å komme frem til den nye generaliseringsstrategien, men opplever at manipulasjonen og den etterfølgende regningen var mer tungvint enn generaliseringsstrategi A. Å utforske ulike generaliseringsstrategier og skille mellom mer og mindre effektive strategier er viktig i matematikk generelt. Til tross for at strategien ikke ble brukt i det videre arbeidet, ble den opphav til generaliseringsstrategi C. Skillet mellom generaliseringsstrategi B og C er noen steder uklart, og det kan oppleves som at strategiene er tilnærmet like. Jeg har likevel valgt å skille mellom de to strategiene da elevene benytter den visuelle semiotiske modellen ulikt og har noe ulik utregningsmetode for å komme frem til antall elementer i en vilkårlig figur i figurmønsteret for hver av de to metodene.

#### *4.2.2.3 Generaliseringsstrategi C – man tar figurnummeret og plusser på en, også ganger man det med to. F(n) = (n+1) x 2.*

Den ene gruppa kom frem til denne generaliseringsstrategien på egenhånd. Den andre gruppen stoppet opp etter at de hadde funnet generaliseringsstrategi A, og ble derfor utfordret på om det var andre måter å se figurmønsteret på. Her fikk de et konkret spørsmål om det var mulig å dele figurene i to like deler. For gruppen som kom fram til strategien på egenhånd ble den også opphav til generaliseringsstrategi D. Jeg vil derfor først presentere og analysere et utdrag fra den gruppen som ble oppfordret til å undersøke om det var mulig å dele figuren i to like store deler, før jeg presenterer og analyserer et utdrag fra den gruppen som uoppfordret kom fram til strategien.

Elevene brukte i den innledende samtalen tid på å se på figur nummer 1, 2 og 3, og forsøke å finne en løsning på hvordan man kan dele figurene i to like deler. Et utdrag av samtalen følger:

> Stine: Jeg har en metode for å finne halvparten av en figur. Du legger på en. Så i figur ti for eksempel, så legger du på en, det blir elleve. Elleve er halvparten. Også ganger du med to.
>
> Jens: Man tar figurnummeret og plusser på en, så ganger man det man får da med 2. Da får man hvor mange streker det er i figuren.
>
> Lærer: Hvorfor plusser vi på en?
> Elin: For å finne halvparten
> Stine: Man plusser på en ende
> Jens: Når man skal finne halvparten, så må man plusse på en, siden det er halvparten av to. Man skal jo doble det, og det skal jo bli to ekstra. Så da må man sette på en.

Det er Stine som først finner en løsning på problemstillingen ved at man legger på en til hvert figurnummer for å finne halvparten av strekene i den enkelte figuren. Jens generaliserer dette ytterligere og presenterer en generell regel «figurnummeret pluss en, og gange det med to». Selv om Stine ikke her presenterer generaliseringsstrategien tyder hennes utsagn på at hun likevel har forstått både strategien og evner å koble den til struktur og egenskaper ved figurmønsteret. På spørsmål om hvorfor man må plusse på en svarer hun at «man plusser på en ende». Dette er et viktig poeng, og sier noe om hvordan Stine ser figurmønsteret. Det tyder på at hun har forståelse for at det er like mange horisontale streker i hver rad, oppe og nede. Videre er det to vertikale endestreker, og dersom man skal finne halvparten av strekene i figuren må man addere en endestrek til en rad av horisontale streker. Dette er et viktig resonnement, og viser en god forståelse for struktur og generelle egenskaper ved figurmønsteret. Det sier også noe om hvordan Stine evner å manipulere den semiotiske modellen som er presentert i oppgaven. Jens uttrykker en del av det samme. Hans resonnement viser tydelig at han har identifisert endestrekene som konstantledd, og at han behandler disse separat i utregningen for å finne totalantallet streker i en vilkårlig figur. I hans resonnement ligger det implisitt at det er like mange horisontale streker i hver rad og at «man må plusse på en, siden det er halvparten av to». De to han referer til her er endestrekene, og skal man finne halvparten må man legge til en endestrek til radene med horisontale streker. Jens sier også at «man skal jo doble det, og det skal bli to ekstra». Med dette viser han at de to endestrekene må behandles separat i utregningen, og han nå må fordele dem slik at de ikke telles med mer enn én gang.

Elevene benytter her det Lannin (2005) betegner som kontekstuell, eksplisitt generalisering. Den generelle regelen de lager er basert på generelle strukturelle egenskaper ved figurmønsteret, og elevenes telleteknikk for å finne antall element i en vilkårlig figur er basert på dette. Elevene tar hensyn til at konstantleddet ikke må telles for mange ganger, og kan beskrive hvordan regelen de kommer fram til står i sammenheng med den konkrete visuelle semiotiske modellen av figurmønsteret. Når det gjelder bevisføringen blir den liggende et sted mellom Balacheff (1988) sine kategorier «avgjørende eksperiment» og «generisk eksempel». Elevene benytter ett konkret eksempel i sitt resonnement, men det er et viktig skille mellom Balacheff (1988) sine to kategorier, da det bare er et generisk eksempel som er matematisk gyldig bevisføring.

Det er hvorvidt elvene evner å påpeke at eksempelet kun er valgt for å vise og påpeke de generelle egenskaper og struktur som gjelder for alle elementer som inngår i gruppen som blir avgjørende for hvordan elevenes argumentasjon klassifiseres. I utdraget over mener jeg Stines argumentasjon kan klassifiseres som et generisk eksempel. Hun kommer først med den generelle slutningen at «for å finne halvparten av en figur må du legge på en». Deretter kommer eksempelet, men som hun selv påpeker er figuren hun har valgt et eksempel «så i figur ti *for eksempel*, så legger du på en. Det blir elleve.». Det er med andre ord de generelle og strukturelle egenskapene som står i fokus, og ikke eksempelet i seg selv. På bakgrunn av dette vil jeg klassifisere hennes bevisføring som et generisk eksempel etter Balacheff (1988) sine kategorier.

I den andre gruppen kommer strategien uoppfordret, og i nær tilknytning til generaliseringsstrategi B. Det er Guro som først presenterer en deling av figuren i to like deler.

> Guro: De kommer på en måte fra halve figuren her. Hvis vi deler opp figuren sånn (på skrå, tegner) så er det halve der og der, og da kan vi dele figuren. Eller så kan vi dele på midten (tegner) tre og tre. […]
>
> Peder: Å! Men for hver boks så kan vi bare ta en ekstra på gangingen liksom […]. Siden figur 1, der ganger vi med to ganger to, men hvis vi går over til figur 2, da ganger vi to ganger tre, som er en mer, også legger vi på en mer for hver figur, så får vi svaret.

Det er Guro som først presenterer ideen om at figurene kan deles for å danne to deler med like mange elementer i hver, og at man på bakgrunn av dette kan beregne antall elementer i en vilkårlig figur. I den videre samtalen presenterer hun to ulike måter å dele figuren; ved å trekke en diagonal linje gjennom figuren, eller ved å trekke en horisontal linje gjennom figuren og flytte en endestrek opp og en endestrek ned. Den sistnevnte benytter elevene til generaliseringsstrategi B, mens den diagonale delingen er den som blir diskutert ytterligere og benyttet for generaliseringsstrategi C.

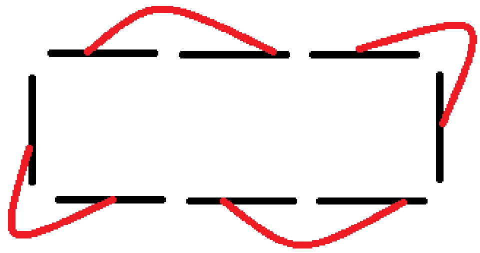
Peder uttrykker videre hvordan den diagonale delingen av figuren vil påvirke det generelle uttrykket elevene kommer frem til. Han sammenligner her strategi C med strategi A når han uttrykker «for hver boks så kan vi bare ta en ekstra på gangen». Med «boks» referer han her til den enkelte figuren. Han mener altså at der man i generaliseringsstrategi A multipliserte figurnummeret med to, må man her multiplisere figurnummeret pluss en med to. Det er dette han mener med «å ta en ekstra på gangen». Peder viser til figur 1 og figur 2 i sitt resonnement for å begrunne egen generalisering, og baserer seg her på det Balacheff (1988) betegner som naiv empirisme for å bevise og argumentere for at generaliseringsstrategien stemmer. Naiv empirisme innebærer å avgjøre sannhetsverdien til et utsagn ved å teste et begrenset antall eksempler (Balacheff, 1988). Peder viser her til to eksempler, og ser mønsteret ut fra disse to eksemplene. Til tross for at det mønsteret han ser ved å se på disse to eksemplene gjelder generelt er både resonnementet og bevisføringen han viser i utdraget over mangelfull, og i seg selv er de ikke matematisk gyldige for å underbygge den generelle utviklingen i figurmønsteret.

For Peder ga imidlertid denne utforskingen av figurmønsteret opphav til generaliseringsstrategi D som vil bli beskrevet i neste avsnitt. Til tross for at han ikke resonnerer og generaliserer fullstendig i arbeid med generaliseringsstrategi C er han aktiv i utforskingen av figurmønsteret, og han viser at han evner å se dette på ulike måter, og manipulerer den visuelle semiotiske modellen aktivt i sitt arbeid.

#### *4.2.2.4 Generaliseringsstrategi D – Alle strekene kan deles inn i par, også ganger man det med to. F(n) = 2(n+1)*

Som en direkte etterfølger fra generaliseringsstrategi C kommer Peder frem til generaliseringsstrategi D. Jeg opplever her at det er et skille i Peder sin motivasjon og hans mål for arbeidet. Der han i det tidligere arbeidet var opptatt av å komme frem til en løsning, og viste usikkerhet rundt hvorvidt løsningen var rett eller ikke, er han her i større grad aktiv i egen utforskning av figurmønsteret. Elevgruppen har allerede diskutert tre generaliseringsstrategier, og kunne sagt seg fornøyd med det. Jeg opplever at Peder nå engasjerer seg i utforskningen av figurmønsteret for sin egen skyld, og han viser tro på at han selv kan produsere strategier, resonnement og argumentasjon som vil føre frem til en generaliseringsstrategi. Et utdrag av samtalen følger:

> Peder: Jeg vet! De to er liksom par, de to der og de to her er par, og de to er par. Her er det fire par, da ganger jeg det med to (tegner, se figur 8).



*Figur 7 En illustrasjon av Peders inndeling av figuren i par. Peder tegnet en slik tegning på arket sitt.*

Peder presenterer her at man kan dele strekene i figuren inn i par, og at man ved å gange antall par med to vil finne totalantallet streker i figuren. Samtalene dreier seg videre rundt hvorvidt det alltid vil være mulig, og elevene tester metoden for figur 3, 4 og 10. Elevene mestrer dette, men de mister den generelle sammenhengen mellom figurnummeret og antall par i det de utfordres på å finne antall par i figur nummer 70. Her har elevene tre forslag; 71, 36 og 35 par. Elevene diskuterer lenge, og det er særlig diskusjon rundt hvorvidt antallet par er identisk med halvparten av totalantallet elementer for en figur. Det er Guro som til slutt kommer med løsningen:

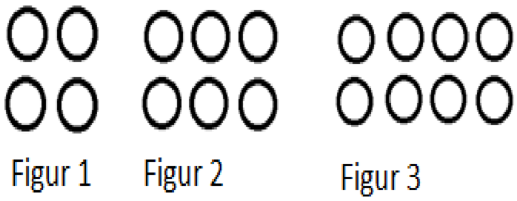
> Guro: nei, det gjør de ikke. Du plusser jo alltid på en. Det halveres aldri! Fordi uansett hvilket tall eller hvor stort det er, så plusses det alltid på en. […] Vi bare tar så mange par det ble, og ganger med to.

Det hun referer til her er at det alltid er ett par mer enn tallet som er angitt av figurnummeret, det er det hun mener med «det plusses alltid på en». Elevenes hovedutfordring med denne metoden var å etablere en generell sammenheng mellom antall par og figurnummeret. Selve utregningen virket for elevene åpenbar – antall par multipliseres med to for å gi totalantallet elementer i figuren. Hvordan man skulle beregne antall par var imidlertid mindre klar, og elevene diskuterte lenge hvorvidt antall par var identisk med halvparten av figurnummeret, halvparten av figurnummeret pluss en, eller figurnummeret pluss en.

I likhet med tidligere generaliseringsstrategier er også den generaliseringsstrategien elevene fremmer her ufullstendig når det gjelder resonnement og bevis. Elevene benytter som før den visuelle semiotiske modellen i stor grad, og evner å manipulere denne for å komme frem til en løsning. Peder sin tegning (figur 8) er et tydelig eksempel på dette. Til å begynne med vil jeg kategorisere elevenes generaliseringsstrategi som en tellestrategi etter Lannin (2005) sine kategorier. Elevene bruker her konkrete eksempler, tegner opp parene og teller deretter antallet par for å komme frem til totalantallet elementer i en figur. Etter hvert går elevene over til å prøve og feile. Slik Lannin (2005) beskriver denne kategorien kjennetegnes den av at elevene prøver seg fram til en regel uten å ta hensyn til hvorvidt den er passende eller ikke. Dette samsvarer med elevenes tre forslag for antall par i figur 70. Guro utvikler imidlertid dette videre, og beveger seg mot en kontekstuell generalisering der hun baserer seg på informasjon som er gitt i situasjonen. Hennes resonnement og argumentasjon er imidlertid mangelfullt, og må tolkes ut fra konteksten og den tidligere samtalen for å tillegges mening. Det blir heller aldri diskutert hvorfor det alltid er et par mer enn tallet som er angitt av figurnummeret, eller om alle figurene i figurmønsteret kan deles inn i par. Det hadde vært en styrke for samtalen om dette hadde blitt diskutert.

## 4.3 Oppgave 3

Nok en gang presenteres elevene for en ny fremstilling av figurmønsteret de har arbeidet med i oppgave 1 og 2. Denne gangen består den visuelle fremstillingen i oppgaven av sirkler (se figur 9). Oppgavelyden er tilnærmet lik den for oppgave 1 og oppgave 2; elevene skal finne figur 4 og 10, samt en generell regel for beregningen av antall sirkler som kreves for å lage en vilkårlig figur i figurmønsteret.




*Figur 8 Den visuelle fremstillingen av figurmønsteret i oppgave3*

### 4.3.1 Ikke-eksplisitt generalisering

I likhet med de tidligere oppgavene støtter elevene seg også her til den visuelle semiotiske modellen som er vist i oppgavens presentasjon. Elevene kopierer den semiotiske modellen som er presentert i oppgaven når de selv skal finne figur 4 og figur 10. Her foretas det ingen forenklinger eller endringer, og elevenes visuelle modell og den visuelle modellen som presenteres i oppgaveteksten er lik. I det følgende utdraget presenterer Stine sin løsning på hvordan man skal finne antall elementer i en vilkårlig figur, mens Elin er aktivt deltagende i samtalen. Et utdrag fra samtalen følger:

> Stine: […] Du må bare sette på ekstra en, eller nei to ekstra. […] hvis figur 5 for eksempel, figur 4 har ti sirkler, så må du bare sette på to til, må du ikke?
>
> Elin: Jeg har skrevet ja, for hvis man starter med fire da. For eksempel figur 3 så starter man med fire (sirkler) også plusser man på to ja. Så hvis man har for eksempel figur 50 da, så… eller litt lettere, det er bare å ta 50+50 og det er 100 også legger man på to da.

For å besvare spørsmålet om hvorvidt man kan beregne antall elementer i en vilkårlig figur støtter Stine seg til en rekursiv strategi. I en rekursiv strategi er man avhengig av å vite antall elementer i en foregående figur å kunne beregne antall elementer i den aktuelle figuren. På grunn av disse begrensningene ved den rekursive generaliseringsstrategien er den ikke regnet som en gyldig matematisk generaliseringsstrategi. Stine uttrykker litt usikkerhet knyttet til hvorvidt den rekursive strategien hun presenterer er gyldig. Dette viser hun ved å stille et spørsmål i slutten av eget resonnement. Elin tar opp tråden, og støtter Stine i at hennes resonnement er rett. Elin sitt resonnement for å vise at den rekursive strategien med å legge to kuler til forrige figur er imidlertid ikke riktig. Når hun sier «hvis man starter med fire da» henviser hun til figur 1 som har fire elementer. For å finne antall elementer i figur 3 presenterer hun så «da starter man med fire, også plusser man på to». Den figuren hun da kommer til er imidlertid figur 2, og ikke figur 3. Det er vanskelig å si noe om årsaken til at Elin gjør denne feilen. Det som imidlertid er interessant er at hun når hun skal benytte strategien for å finne figur 50 selv finner ut at det vil være enklere å benytte en eksplisitt generaliseringsstrategi. Dette er en viktig oppdagelse, og den kommer uten innvirkning fra andre. Det er Elin selv som uoppfordret midt i eget resonnement bytter strategi. Et slikt bytte fra en ikke-eksplisitt til en eksplisitt generaliseringsstrategi viser at Elin har god forståelse for begrensningene ved den ikke-eksplisitte generaliseringsstrategien. Det viser også at hun ikke er bundet til én generaliseringsstrategi, men at hun fleksibelt kan bytte mellom ulike strategier der det er hensiktsmessig. I den videre diskusjonen går elevene bort fra den rekursive generaliseringsstrategien og bruker heller eksplisitte generaliseringsstrategier.

### 4.3.2 Eksplisitt generalisering og resonnering

Elevene benyttet i det videre arbeidet med denne oppgaven to generaliseringsstrategier. Rent matematisk kan de uttrykkes slik:

A. $F(n) = 2n+2$
B. $F(n) = (n+1) \times 2$

De to generaliseringsstrategiene vil bli presentert og analysert i alfabetisk rekkefølge.

#### *4.3.2.1 Generaliseringsstrategi A – du ganger med to og plusser på to. F(n) = 2n + 2.*

Denne generaliseringsstrategien ble også diskutert av begge gruppene for oppgave 1 og 2. I likhet med oppgave 1 og oppgave 2 var dette denne første eksplisitte generaliseringsstrategien elevene kom frem til. I utdraget fra samtalen som presenteres nedenfor presenterer elevene sine svar på hvordan man kan beregne totalantallet av elementer i en vilkårlig figur.

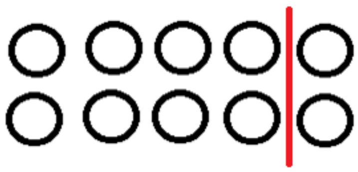
> Lærer: Så du tar figurnummeret, også?
>
> Peder: Også ganger jeg det med to. så hvis den heter figur 3, da ganger jeg det med to ja, så får jeg seks, også plusser jeg på to.

Guro: (tegner) sånn her. Da blir dette oppe, da blir dette her fire, for det figurnummer 4. Da må man ta fire klumper oppe og nede, der og der, også plusser man på to.

Elin: Du ganger det med to også legger du på to.

Jens: Jeg har skrevet figur også figurnummeret der sånn, også ganger man figurnummeret med to, også plusser man på to, også får man hvor mange baller det er. […] Fordi… hvis det er for eksempel figur ti, nei figur 15. Så, da vil man. Da tar man først 15 gange to fordi 15 er figurnummeret, men siden det er to ekstra må man… siden det er to ekstra baller over tallet må man sette på to baller når man har ganget.

Basert på det som kommer frem i samtalen både før og etter elevene presenterer sine generaliseringsstrategier vil jeg kategorisere samtlige elevers strategier som det Lannin (2005) omtaler som kontekstuell generaliseringsstrategi. Dette fordi elevene baserer seg på informasjon som er gitt i situasjonen, ved å analysere og omstrukturere den visuelle semiotiske modellen. Elevene henviser til den visuelle semiotiske modellen i større eller mindre grad når de diskuterer sannhetsverdien av de enkelte påstander elevene kommer med. Når det gjelder resonnement og argumentasjon benytter elevene ulike former for å støtte opp under egne påstander. Peder tar utgangspunkt i et konkret eksempel (figur 3) for å støtte opp under sin generelle regel. Da han ikke henviser til generelle egenskaper ved mønsteret vil jeg kategorisere hans resonnement og argumentasjon som det Balacheff (1988) omtaler som et avgjørende eksperiment. Elin presenterer kun en generell regel, uten å vise til resonnering eller argumentasjon. Det er nærliggende å tro at hun opplever at det blant gruppens medlemmer er underforstått hva hun mener, og at hun anser resonnement og argumentasjon som overflødig i denne sammenhengen.



*Figur 9 Guro sin inndeling av figurmønsteret for figurnummer 4*

Guro og Jens er i større grad i stand til å produsere det Balacheff (1988) omtaler som et generisk bevis. De henviser begge til et eksempel, men evner i større grad å benytte eksempelet for å påpeke de generelle strukturelle egenskapene ved figuren som vil gjelde for alle figurer som inngår i figurmønsteret. Guro viser til den generelle sammenhengen mellom figurnummeret og antall elementer i en figur når hun sier «[…] for det er figur nummer 4. Da må man ta fire klumper oppe og nede, der og der, også plusser man på to». Guro har med dette delt inn figuren som figur 10 viser. Hun har dermed manipulert den visuelle semiotiske modellen som er presentert i oppgaven, og delt den i to ulike deler. Hun viser så eksplisitt til at det er like mange kuler i hver rekke som figurnummeret, uttrykt matematisk som to multiplisert med figurnummeret, samt en ekstra i hver rekke, som representeres matematisk ved å addere to. Det at hun evner å påpeke sammenhengen mellom figurnummeret og den generelle regelen er avgjørende for at hennes resonnement og argumentasjon kan klassifiseres som et generisk eksempel. Dette er også en viktig matematisk strategi, og Guro viser her god forståelse og kunnskap om utviklingen i figurmønsteret og hvordan og hvorfor det kan uttrykkes som en generell matematisk regel.

Jens viser også i sitt resonnement til et konkret eksempel. Han har en litt annen tilnærming til eksempelet og den generelle regelen sammenlignet med Guro. Jens uttrykker ikke like eksplisitt som Guro hvorfor det er nettopp figurnummeret som skal multipliseres med to. Der Guro henviser til den visuelle modellen når hun forklarer at «for figur nummer 4 må man ta fire klumper oppe og nede» påpeker Jens kun at det er figurnummeret som skal multipliseres med to. Rent matematisk er Jens sin påstand riktig, men han gir ikke noe resonnement eller argumentasjon for sannhetsverdien av påstanden. Videre uttrykker jens at «siden det er to ekstra baller over tallet må man sette på to baller når man har ganget». Jens baserer seg her mer på ren matematikk i sitt resonnement, og hans forklaring henviser ikke til den visuelle semiotiske modellen av figurmønsteret. Han ser likevel viktigheten av å behandle den variable og konstantleddet i den generelle regelen atskilt, og han viser god matematisk forståelse for utviklingen av det aktuelle figurmønsteret.

#### *4.3.2.2 Generaliseringsstrategi B – man tar figurnummeret og plusser på en, også ganger man det med to. F(n) = (n+1) x 2.*

Denne generaliseringsstrategien ble også diskutert i forbindelse med oppgave 2. Utdraget som presenteres under er hentet fra begge gruppene. I hver gruppe var det en elev som først presenterte strategien, uten påvirkning fra meg i forkant.

> Selma: Hvis du vet nummeret, som for eksempel 1, må den øverste linjen som består av sirkler være en mer enn det tallet sier, altså det nummeret viser der, (peker på figurnummeret). […] det skal være en oppe og en nede, og hvis du skal legge til en, hvis det alltid skal være en mer uansett hvilken figur, eller hva nummeret viser da, så legger du bare på en til på hver sin side, eller hver sin ende.

> Jens: Vent litt! På de kubene som vi hadde sist gang, kan man ikke gjøre det samme her sånn, sånn dele de i to? Man tar figurnummeret, også plusser man på en, også ganger man med to? […] Fordi hvis, for eksempel, figurnummeret er elleve så tegner man bare sånn (tegner) elleve baller sånn bortover. Men så er det jo egentlig to ekstra. Men siden man skal gange det med to, så kan man bare legge på en. Så hvis man da legger på en, også ganger man det på to. Da blir det hvor mange baller det er.

Både Selma og Jens støtter seg til den visuelle semiotiske modellen i sine resonnement og generaliseringer. De henviser til den generelle strukturen ved figurmønsteret, og hvordan man kan dele inn figuren for å finne en generell regel for beregningen av antall elementer i en vilkårlig figur. Deres resonnement og generaliseringsstrategi bygger på en inndeling av den visuelle semiotiske modellen som to rader av like mange kuler i hver rad, og at det i hver rad er en kule mer enn figurnummeret. Den visuelle modellen er identisk med den som er presentert i oppgaven. Selma sin ytring vil jeg karakterisere som et generisk bevis etter Balacheff (1988) sine kategorier for bevisføring i matematikk. Hun henviser til de strukturelle og generelle egenskaper ved figurmønsteret, og viser dette ved å bruke begrepene «alltid» og «uansett» samt å henvise tydelig til den visuelle semiotiske modellen. Selma viser også at hun i stor grad evner å sette ord på sammenhengen mellom det generelle uttrykket og den visuelle modellen, og at hun ved å benytte den visuelle modellen kan fremheve sitt resonnement og sin argumentasjon. Dette er viktige egenskaper i arbeid med figurmønster, og Selma viser her en tydelig utvikling i resonnement og generalisering sammenlignet med det hun viser for oppgave 1 og 2.

Jens sitt resonnement og argumentasjon tilfredsstiller også kravene til et generisk bevis slik Balacheff (1988) beskriver det. Han bruker figur nummer elleve som et eksempel for å vise og fremme de generelle strukturelle egenskapene som gjelder for alle figurer som inngår i figurmønsteret. Samtidig sammenlikner han også den aktuelle generaliseringsstrategien med generaliseringsstrategi A for oppgave 2, og ser en sammenheng mellom figurmønsteret slik det er presentert i oppgave 2 og slik det er presentert i oppgave 3. Den generelle regelen han uttrykker er å addere en til figurnummeret og multiplisere med to. Han argumenterer for gyldigheten av denne påstanden ved å henvise til figur 11, og fremme at det da vil være elleve baller bortover. Deretter henviser han til generaliseringsstrategi A ved å fremheve «men så er det jo egentlig to ekstra»; de to som er konstantleddet for generaliseringsstrategi A. Han viser fleksibilitet når han evner å se sammenhengen mellom de to generaliseringsstrategiene, og at han kan ta utgangspunkt i generaliseringsstrategi A og gjøre om denne slik at den blir generaliseringsstrategi B. I denne omgjøringen støtter han seg til den visuelle semiotiske modellen for å utvikle sitt resonnement. De to ekstra som adderes i generaliseringsstrategi A er nå delt opp, og tatt med i hver enkelt rad. Dette gjøres for å dele figuren inn i to like store deler, og deretter multiplisere den ene delen med to for å finne totalantallet elementer i figuren.

Slik det er vist i hele kapittel 4 benytter elevene seg av flere ulike generaliseringsstrategier, både ikke-eksplisitte og eksplisitte. Jeg vil i det neste kapittel ta for meg de ulike strategiene og se på faktorer som kan bidra til at elevene benytter seg av de ulike strategiene i arbeid med de ulike oppgavene.

# 5 Drøfting

I dette kapittelet vil jeg diskutere og drøfte de data og resultater som er lagt frem i analysen, og gi et svar på problemstillingen *hvordan påvirker ulike semiotiske modeller av et figurmønster elevenes evne til å resonnere og generalisere?* Jeg vil først drøfte ulike faktorer som ser ut til å påvirke elevenes resonnement og generalisering, før det gis et svar på problemstillingen. De ulike faktorene som drøftes i dette kapittelet er visuell oppfattelse, erfaringsgrunnlag, manipulasjon av semiotiske modeller, og gestalteffekten.

## 5.1 Semiotiske modeller og visuell oppfattelse

Tidligere forskning støtter opp under påstanden om at semiotiske presentasjoner av et figurmønster påvirker elevenes evne til å resonnere og generalisere (se f.eks. Lannin et al., 2006; Rivera & Becker, 2008; Rivera, 2009). Becker og Rivera (2005) sin undersøkelse viser at elevers visuelle oppfattelse av et figurmønster står i sammenheng med elevenes argumentasjon og generalisering. Dersom elevene har en sterk visuell oppfattelse av figurmønsteret øker sannsynligheten for at eleven klarer å produsere eksplisitte generaliseringsstrategier og gode argumenter for strategiens gyldighet (Becker & Rivera, 2005).

Resultatene fra min undersøkelse viser at elevene i stor grad hadde en god visuell oppfattelse av de ulike figurmønstrene. Dette vises blant annet ved at samtlige elever brukte figurativ generalisering i arbeidet med å finne en generell regel for beregningen av antall elementer i en vilkårlig figur i figurmønsteret. Figurativ generalisering krever visuelle strategier ved at man benytter seg av visuelle og figurative hint som er gitt i situasjonen (Rivera & Becker, 2005). Elevene brukte aktivt de visuelle modellene som ble presentert i oppgavene, og manipulerte disse i varierende grad. Det var kun i oppstarten av arbeidet rekursive strategier ble presentert og diskutert i elevgruppen, og elevene la raskt fra seg de rekursive strategiene til fordel for eksplisitte generaliseringsstrategier. Det var elevene selv som uoppfordret byttet fra rekursive til eksplisitte generaliseringsstrategier, noe som kan tyde på at de så begrensningene ved de rekursive strategiene. Resultatene fra min undersøkelse føyer seg dermed inn i rekken av undersøkelser som viser at den visuelle oppfattelsen av et figurmønster har påvirkning på generaliseringsstrategier, resonnement og argumentasjon.

Elevenes visuelle oppfattelse av figurmønsteret hadde innvirkning på elevenes resonnement og generalisering. Særlig fruktbart var det når elevene hadde det Rivera og Becker (2008) omtaler som en konstruktiv oppfattelse av figurmønsteret. Ved en konstruktiv oppfattelse av figurmønsteret ses figurmønsteret som bygget opp av ulike deler som ikke overlapper hverandre, og dermed kan være opphav til en direkte utledning av en generaliseringsstrategi og beregning av totalantallet elementer i en vilkårlig figur. Ved en konstruktiv generaliseringsstrategi er det vesentlig at man definerer elementer i figuren som er fast og elementer i figuren som er varierende.

Flere av elevene hadde en konstruktiv oppfattelse av figurmønsteret slik det var presentert i de ulike oppgavene, men det var særlig oppgave 2 som utmerket seg. I arbeid med oppgave 2 kom elevene fram til fire eksplisitte generaliseringsstrategier, som alle krever at man deler figurmønsteret inn i ulike deler av faste og varierende elementer. Jeg vil i de neste avsnittene se nærmere på faktorer ved de semiotiske modellene som påvirket elevenes resonnement og generalisering, og drøfte mulige årsaker til at figurmønsteret slik det var presentert i oppgave 2 ga opphav til flest generaliseringsstrategier. Faktorer som erfaringsgrunnlag, manipulasjon av modellene og gestalteffekten drøftes før det gis en samlet vurdering av faktorenes innvirkning på elevenes resonnement og generalisering.

## 5.2 Erfaringsgrunnlag og manipulasjon av modellene

Elevene hadde som tidligere nevnt ingen erfaring med oppgaver innen figurmønster. Oppgave 1 ble dermed elevenes første møte med figurmønsteroppgaver. Denne oppgaven har i tillegg til den visuelle modellen en situasjonskontekst. Den visuelle modellen er også mer detaljrik, og representerer ikke bare det matematiske figurmønsteret, men er også en representasjon av elementer knyttet til situasjonskonteksten; stoler og bord. Det faktum at den visuelle modellen i oppgave 1 ikke bare representerer en matematisk figurfølge, men også fysiske objekter gjør at oppgaven på denne måten skiller seg fra de andre to oppgavene elevene ble presentert for.

Lannin (2005) fremhever at den visuelle fremstillingen av et figurmønster er en fordel for elevenes utvikling av generaliseringsstrategier. Det kan likevel tenkes at den visuelle modellens doble representasjon i oppgave 1 virker hemmende for elevenes utvikling av flere generaliseringsstrategier. I representasjonen er det to elementer som er representert – antall bord og antall stoler rundt bordene. Men det matematiske spørsmålet dreier seg kun om hvor mange stoler det er plass til.  For å finne svaret på dette må elevene identifisere sammenhengen mellom figurmønsteret, antall bord og antall stoler. Det er altså et ekstra element å forholde seg til sammenlignet med oppgave 2 og oppgave 3. Konteksten og den doble representasjonen kan gjøre at det oppleves unaturlig å manipulere modellen i form av omorganisering og flytting av elementer. Det kan tenkes at elevene opplever at konteksten gir et fast oppsett av stolene rundt bordene, og at det oppleves unaturlig å omorganisere modellen for å komme frem til en løsning. Dette kan kobles til gestalteffekten og at elevene opplever at den visuelle modellen som er presentert i oppgave 1 har lav gestalteffekt og dermed er vanskeligere og dekomponere (Rivera, 2009).

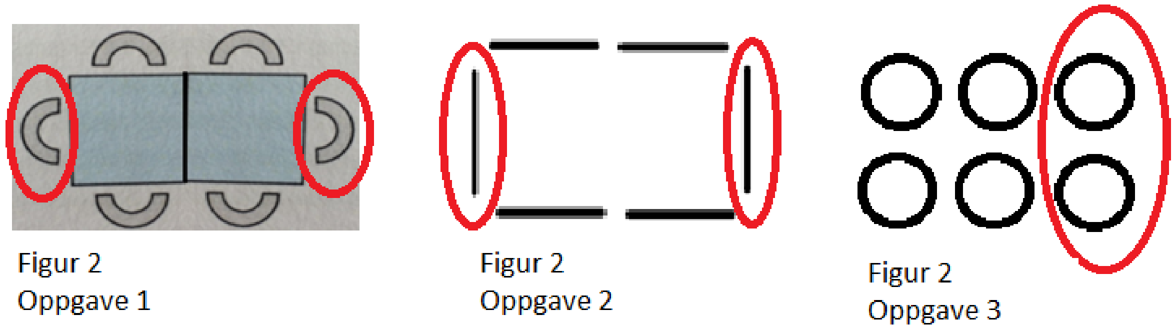
Gestalteffekten og den doble representasjonen i den visuelle modellen kan synes å være faktorer som påvirker elevenes resonnement og generalisering negativt ved at de ikke oppmuntrer elevene til å manipulere og utforske figuren ytterligere. Samtidig kan det tenkes at situasjonskonteksten bidrar til at elevene har en meningsfull visuell oppfattelse av figurmønsteret, noe som igjen bidrar positivt til at elevene baserer seg på figurativ generalisering, og evner å koble sine resonnement og generaliseringsstrategier mot generelle og strukturelle egenskaper ved figurmønsteret gjennom aktiv bruk av den visuelle semiotiske modellen.

## 5.3 Visuelle semiotiske modeller og gestalteffekten

Slik Rivera (2009) beskriver har ulike figurmønster ulik gestalteffekt, og figurmønster med god gestalteffekt er lettere å gjenkjenne som sammensatt av geometriske elementer, og dermed også lettere å dekomponere og slik finne gode generaliseringsstrategier. I denne studien er figurmønsteret matematisk sett identisk, men det er presentert på tre ulike måter. De tre ulike modellene av figurmønsteret har ulike visuelle uttrykk, og ulik gestalteffekt. Mye tyder på at det er den visuelle semiotiske modellen av figurmønsteret som presenteres i oppgave 2 som har den beste gestalteffekten, og inviterer til dekomponering og utforsking av ulike generaliseringsstrategier. Gestalteffekten omhandler hvordan vi oppfatter, skiller og organiserer en figur. Vi er predisponert til å organisere på bakgrunn av hva vi oppfatter som naturlig at henger sammen (Metzger, 2006).

De tre visuelle modellene som er presentert i de ulike oppgavene er i varierende grad ulike. Den visuelle modellen i oppgave 1 er en dobbel representasjon, og skiller seg slik fra de visuelle modellene som er presentert i oppgave 2 og oppgave 3. Men de ulike modellene er også ulike med tanke på gestalteffekten og bruken av geometriske elementer. For de visuelle modellene i oppgave 1 og oppgave 3 er elementene i seg selv en geometrisk form. Halvmånene som representerer stolene og de sammensatte kvadratene som representerer bordene i oppgave 1 kan begge ses som selvstendige geometriske former. Det samme gjelder for sirklene i oppgave 3. De horisontale og vertikale strekene i oppgave 2 skiller seg ut ved at de i seg selv ikke har en selvstendig geometrisk form. Når de er satt sammen for å representere figurmønsteret får danner de formen av et rektangel. Det kan se ut til at dette bidrar til at figurmønsteret har bedre gestalteffekt, og dermed bidrar til at elevene finner det lettere å dekomponere figurmønsteret. I arbeidet med oppgave 2 kommer elevene frem til fire ulike generaliseringsstrategier som alle krever ulik dekomponering av figurmønsteret. I arbeid med oppgave 1 og oppgave 3 kommer elevene kun frem til to ulike generaliseringsstrategier. I de kommende avsnitt vil jeg drøfte de ulike generaliseringsstrategiene elevene bruker i de ulike oppgavene, og hvordan den semiotiske modellen påvirker disse generaliseringsstrategiene.

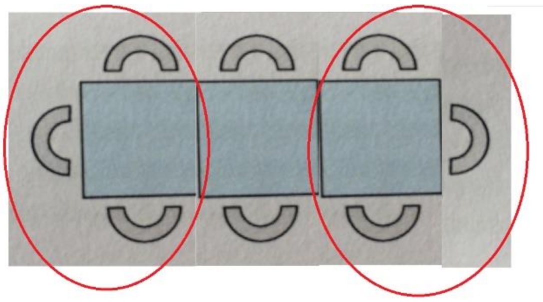
Generaliseringsstrategien f(n) = 2n + 2 benyttes i arbeid med alle tre oppgavene. I denne strategien isoleres konstantleddet, for deretter å legges til utregningen til slutt. Denne dekomponeringen av figurmønsteret kan enkelt gjøres for alle tre representasjonene og er vist ved figur 11.




*Figur 10 Konstantleddet for hver semiotiske representasjon er markert med rødt.*

Dette var den generaliseringsstrategien elevene ga uttrykk for at var den enkleste å uttrykke og begrunne, og etter at elevene hadde identifisert strategien i oppgave 1 var det den første strategien de kom fram til for oppgave 2 og oppgave 3. Til tross for at de tre visuelle modellene som blir presentert i de tre oppgavene er ulike kan konstantleddet enkelt isoleres i alle tre modellene, noe som kan være med på å forklare hvorfor strategien opplevdes som naturlig å benytte i alle tre oppgavene.

Generaliseringsstrategien f(n) = 2(n-2) + 6, blir kun benyttet i arbeid med oppgave 1. I denne strategien deles figurmønsteret inn i de bordene det er plass til tre stoler ved, og de bordene der det er plass til to stoler (vist ved figur 12). Denne inndelingen kunne også vært brukt ved oppgave 2, men ville vært unaturlig i oppgave 3 da den visuelle modellen her ikke har noen ender som skiller seg fra de resterende delene av figuren. Elevene oppfattet imidlertid metoden tungvint da den krever et ekstra ledd i utregningen sammenlignet med de andre strategiene elevene diskuterte. Det kan derfor være at det er begrensninger ved generaliseringsstrategien i seg selv, og ikke faktorer ved den visuelle semiotiske modellen som gjør at elevene ikke benytter seg av denne generaliseringsstrategien i oppgave 2.

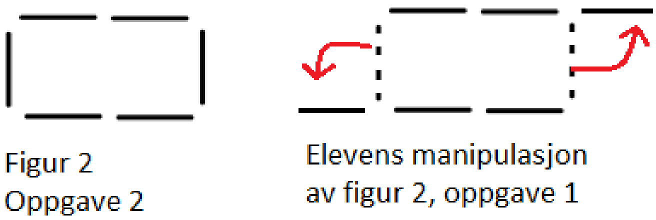


*Figur 11 viser figur 3 for oppgave 1. På de to endebordene er det plass til tre stoler, ved bordene som står i midten er det plass til to stoler.*

Strategien f(n) = (n+1) x 2, benyttes for oppgave 2 og oppgave 3. I denne strategien deles den visuelle modellen inn i to like store deler, der hver del inneholder ett element mer enn tallet vist av figurnummeret. I den visuelle modellen for oppgave 2 kreves det en diagonal inndeling, mens det i den visuelle modellen for oppgave 3 kreves en horisontal inndeling (se figur 13). Den visuelle modellen i oppgave 1 krever en tilsvarende diagonal inndeling som brukt i figur 2 for denne strategien, men elevene kommer ikke frem til denne strategien før i oppgave 2. Det kan derfor tyde på at det er elementer ved den visuelle semiotiske modellen ved oppgave 2 som påvirker elevene slik at de kommer frem til denne generaliseringsstrategien. Det faktum at modellen visuelt sett er enklere i oppgave 2 sammenlignet med oppgave 1, samt at modellen i oppgave 2 sammen danner formen av et rektangel kan være faktorer som bidrar til at elevene kommer med strategien for oppgave 2, og ikke oppgave 1. Dette stemmer også overens med den beskrivelsen Metzger (2006) og Rivera (2009) gir for gestalteffekten og dens påvirkning på elevers resonnement og generalisering av figurmønster. I oppgave 3 viderefører elevene strategien de har kommet fram til for oppgave 2, men den visuelle semiotiske modellen gjør at man må dele figuren horisontalt for å finne halvparten. Til tross for at begge strategiene innebærer å dele den visuelle modellen

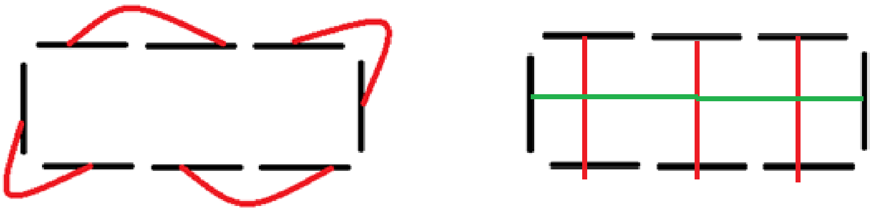

*Figur 12 viser hvordan figur 3 kan halvere i den visuelle representasjonen som benyttes for oppgave 2 og oppgave 3* i to like deler opplever elevene de to strategiene som ulike, og de behandles som to ulike generaliseringsstrategier.

De to siste generaliseringsstrategiene elevene kommer frem til blir kun benyttet i arbeidet med oppgave 2. Strategien f(n) = (n+1) + (n+1) har fellestrekk med strategien f(n) = (n+1) x 2, men den visuelle inndelingen og manipulasjonen av modellen er likevel annerledes. Når elevene resonnerer og argumenterer for strategien f(n) = (n+1) + (n+1) benytter elevene seg av en manipulasjon av den visuelle modellen som krever at de flytter om på elementene i figuren. De to vertikale endestrekene roteres 90 grader og forskyves slik at det dannes to rader med like mange horisontale streker i hver rad (se figur 14). Den rike visuelle modellen i oppgave 1 bidrar nok en gang til at denne manipulasjonen av den visuelle modellen ikke blir naturlig for oppgave 1. Den visuelle modellen i oppgave 3 er allerede inndelt i to like rader, og krever ingen manipulasjon for å benytte strategien. At elevene ikke benytter strategien i arbeid med oppgave 3 kan skyldes at elevene ikke ser den direkte sammenhengen mellom strategien f(n) = (n+1) + (n+1) og f(n) = (n+1) x 2. Det virker som at elevene opplever at det er manipulasjonen av den visuelle modellen med å forskyve strekene som er en vesentlig del av denne generaliseringsstrategien, og at mangelen på manipulasjon av modellen for oppgave 3 gjør at elevene ikke benytter seg av strategien for den oppgaven. En viktig faktor ved den semiotiske modellen er altså at den innbyr til manipulasjon og dekomponering for å fremme ulike generaliseringsstrategier. For elevene beskriver generaliseringsstrategiene også en handling og manipulasjon av den visuelle modellen av figurmønsteret, noe som gjør at generelle uttrykk som matematisk sett er tilnærmet like oppleves som ulike av elevene.




*Figur 13 Viser elevenes manipulasjon av den visuelle modellen for generaliseringsstrategien f(n) = (n+1) + (n+1)*

Generaliseringsstrategien f(n) = 2(n+1) benyttes også kun i arbeid med oppgave 2. Denne strategien går ut på å dele elementene i figurmønsteret inn i par, finne antall par for det enkelte figurnummer, og doble antall par for å finne antall elementer i den enkelte figuren. Den inndelingen av par elevene benytter seg av er ikke den enkleste, og hadde elevene benyttet seg av en annen inndeling (se figur 15) kan det være mer sannsynlig at elevene hadde benyttet denne strategien også for oppgave 3.

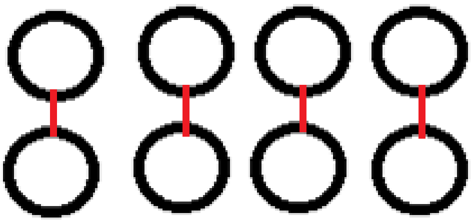


Elevenes inndeling av par for figurnummer 3, oppgave 2

Alternativ inndeling av par for figurnummer 3, oppgave 2.

*Figur 14 viser elevenes inndeling av par og en alternativ inndeling av par. I den alternative inndelingen blir de vertikale strekene et eget par, mens de horisontale strekene danner par med hverandre.*

Elevenes resonnement og generalisering i tilknytning til denne generaliseringsstrategien er ufullstendig, og elevene benytter seg mer av en telle-teknikk og prøve-og-feile enn en kontekstuell strategi som gir mulighet for å redegjøre for en eksplisitt generaliseringsstrategi. Som nevnt i analysen representerer denne strategien et skifte hos Peder ved at han i større grad utforsker figurmønsteret på eget initiativ heller enn å gi svar på et spørsmål som er stilt av læreren. Det å utforske et figurmønster er viktig i arbeid med resonnement og generaliseringsstrategier, og det kan virke som om den visuelle modellen i oppgave 2 legger ekstra til rette for en slik utforsking. Peder benytter seg av en manipulasjon av modellen, der han deler figurens elementer inn i en ny enhet; par. Den måten Peder inndeler figuren i par krever en aktiv handling, og dette kan være en grunn til at elevene ikke benytter strategien i arbeid med oppgave 1 og 3. For oppgave 1 spiller nok den doble representasjonen og koblingen til konteksten også en rolle, ved at elevene ikke opplever det som naturlig å dele stolene inn i par. Mens for oppgave 3 kunne man enkelt ha delt kulene i par (se figur 16), men dette krever ikke like mye handling som den inndelingen elevene gjorde i arbeid med oppgave 2. Det kan dermed se ut til at handlingen og dekomponeringen av den visuelle modellen er en viktig faktor for generaliseringsstrategien, og at generaliseringsstrategien representerer en handling i tillegg til de matematiske forholdene.



*Figur 15 viser hvordan figur 3 i oppgave 3 kan deles inn i par.*

## 5.4 Oppsummering av hvordan de semiotiske modellene påvirker elevenes resonnement og generalisering

Resultatene fra denne undersøkelsen viser at de visuelle semiotiske modellene av figurmønsteret har en positiv påvirkning til elevenes bruk av figurativ generalisering. Den første oppgaven elevene møter har en situasjonskontekst og en rik visuell representasjon, og det ser ut til at dette er faktorer som bidrar positivt til at elevene generaliserer figurativt. Til tross for at de to neste oppgavene elevene jobbet med ikke hadde en situasjonskontekst, og en enklere visuell representasjon tok elevene fremdeles i bruk figurativ generalisering. Elevene uttalte selv at de så en sammenheng mellom oppgave 1 og de to senere oppgavene, og det er derfor naturlig å anta at dette var med på å hjelpe elevene til å videreutvikle figurative generaliseringsstrategier, istedenfor å anvende numeriske generaliseringsstrategier.

Til tross for at situasjonskonteksten og den rike visuelle representasjonen i oppgave 1 ga elevene en god start på arbeidet med figurmønster ser det ut til at det var hemmende for utviklingen av flere ulike generaliseringsstrategier. Elevene stoppet opp etter to strategier, og det var bare den ene strategien elevene opplevde som effektiv og funksjonell. Når det gjelder utviklingen av flere ulike generaliseringsstrategier viser det seg at det var andre faktorer ved figurmønsterets visuelle semiotiske modell som hadde positiv påvirkning på elevenes resonnement og generalisering. Det var den visuelle semiotiske modellen i oppgave 2 som ga opphav til flest eksplisitte generaliseringsstrategier. Den visuelle semiotiske modellen i oppgave 2 skiller seg fra de to andre visuelle semiotiske modellene ved at elementene i modellen sammen danner en geometrisk figur. I de to andre modellene er elementene i modellen i seg selv geometriske figurer. Det faktum at modellens elementer ikke i seg selv var geometriske figurer, men sammen dannet en geometrisk figur ga altså opphav til flest generaliseringsstrategier. Det var i arbeid med den visuelle semiotiske modellen i oppgave 2 at elevene i størst grad manipulerte og dekomponerte den visuelle modellen, og benyttet dette som grunnlag for resonnement og generaliseringsstrategier. Selve manipulasjonen av modellen ser ut til å være en viktig faktor i elevenes generaliseringsstrategier. Strategier som ble benyttet i arbeid med oppgave 2 kunne fint ha blitt brukt i arbeid med oppgave 3, men det ser ut til at generaliseringsstrategien for elevene også representerer en aktiv manipulasjon eller handling på den visuelle modellen. I oppgave 3 kreves ikke den samme handlingen på figurmønsteret for å benytte seg av strategiene, og det ser ut til at det er mangelen på manipulasjon ved den visuelle modellen som gjør at elevene ikke benytter strategiene også for oppgave 3.

Resultatene fra denne undersøkelsen viser dermed at den visuelle semiotiske modellen av et figurmønster er avgjørende for elevenes resonnement og generalisering. En situasjonskontekst og rik visuell modell gir en god start på arbeidet med figurmønster ved at den bidrar til at elevene benytter seg av figurativ generalisering. Videre er gestalteffekten ved den semiotiske modellen avgjørende for elevenes resonnement og generalisering. Der elementene i modellen sammen formet en geometrisk figur var elevenes manipulasjon og dekomponering størst, og dette bidro også til at elevene fant flest generaliseringsstrategier.

# 6 Avslutning

Denne studien er utført som en del av min masterutdanning i matematikkdidaktikk og et overordnet mål har vært å utføre en studie som kan belyse elevers arbeid med figurmønsteroppgaver og hvordan dette kan benyttes i det videre arbeidet med tidlig algebra i grunnskolen. I dette kapittelet vil jeg ta tak i resultater fra min undersøkelse, og diskutere noen didaktiske implikasjoner de medfører. Til slutt presenteres noen avsluttende kommentarer.

## 6.1 Didaktiske implikasjoner

I de følgende avsnitt vil jeg trekke frem to faktorer som jeg mener bør belyses i forhold til videre bruk av figurmønsteroppgaver i skolen. Av resultatene fra denne studien kommer det frem at den sosiale samhandlingen og bruken av ulike semiotiske modeller hadde avgjørende betydning for elevenes arbeid og utvikling. Jeg vil i de neste avsnittene diskutere disse faktorene ytterligere.

### 6.1.1 Sosial samhandling og interaksjon

Slik Säljö (2006) påpeker er sosial interaksjon og språk en vesentlig del av læringsprosessen. Gjennom den faglige samtalen kan elevene både uttrykke og utvikle egen kunnskap, og gruppen kan utvikle en felles forståelse og dra nytte av ulike perspektiver og måter å håndtere oppgaven på. Vygotsky (1978) viser til at internaliseringsprosessen der individet konstruerer egen kunnskap ut fra deltagelse i sosiale praksiser er styrt av semiotiske prosesser der språk, tegn og matematiske symboler inngår. Bruken av semiotiske tegn og modeller i matematikk er knyttet både til det å finne en løsning på den aktuelle oppgaven, men også til det det å kunne kommunisere med andre deltakere i den sosiale settingen der den aktuelle oppgaveløsningen finner sted (Bussi & Mariotti, 2008). I denne studien har elevene arbeidet tett sammen i grupper. Elevene har først fått tid til å tenke selvstendig og utarbeide et løsningsforslag før elevene delte sine løsningsforslag med hverandre etterfulgt av en felles diskusjon. Den sosiale settingen og den felles diskusjonen ser ut til å ha positiv virkning på elevenes læring og utvikling. Et viktig aspekt i samhandlingen mellom elevene var felles begrepsforståelse og det å ha et felles språk for å diskutere ulike generaliseringsstrategier knyttet til de ulike oppgavene.

I denne studien var oppgave 1 med sin konkrete kontekst et godt utgangspunkt for å etablere en felles språklig forståelse. Elevene engasjerte seg raskt i ordlyden for oppgaven, og brukte begrepene «stol» «bord» «på hver side av bordet» og «endestoler» aktivt i oppgaveløsningen. Den felles forståelsen for disse begrepene var med på å gjøre den sosiale interaksjonen og internaliseringsprosessen mer effektiv for elevene. At bruken av semiotiske tegn og modeller er viktig når det gjelder kommunikasjon i den sosiale settingen vises tydelig i datamaterialet. Elevene benyttet ofte de visuelle modellene aktivt ved tegning, peking, og aktiv dekonstruksjon i utviklingen og forklaringen av eget resonnement og generaliseringsstrategi. Ved bruk av språket og den visuelle semiotiske modellen som var presentert i oppgaven ble det lettere for elevene å kommunisere, forstå og utdype eget og andres resonnement og generaliseringsstrategier. I transkripsjonen vises det flere steder at elevene henviser til og benytter seg av samme strategier som medelevene. Dette gjelder både innad i en oppgave, og mellom de ulike oppgavene. Særlig ble det utviklet en felles forståelse for begrepet «endestolene». «Endestolene» ble omtalt i alle de tre oppgavene, til tross for at det kun var i oppgave 1 det var naturlig å benytte dette begrepet. Det ser ut til at det ble etablert en felles forståelse for at begrepet «endestolene» beskrev konstantleddet ved figurmønsteret. «Endestolene» ble et medierende redskap for å uttrykke hvordan elevene behandlet konstantleddet i $f(n) = 2n + 2$ også i de andre generaliseringsstrategiene.

Resultatene fra min undersøkelse viser med dette at den sosiale samhandling kan være positiv for elevenes utvikling og forståelse. Elevene benytter hverandres resonnement og strategier til å videreutvikle egne strategier, og den felles diskusjonen mellom elevene førte ofte til at elevene utviklet sine resonnement og sammen kom fram til nye strategier. På bakgrunn av dette og i samhold med sosiokulturell læringsteori (Vygotsky, 1978; Saljö, 2006) vil jeg derfor anbefale at den matematiske samtalen og det sosiale og samhandlende aspektet får en sentral plass i arbeidet med matematikk og figurmønster. Lærerens rolle er også viktig her, både for å drive den matematiske samtalen fremover og for å støtte elevenes utvikling av ulike resonnement og generaliseringsstrategier. Slik Lannin et al., (2006) påpeker er det vesentlig at læreren stiller konkrete spørsmål som omhandler hvordan elevenes generalisering kan knyttes til den aktuelle figuren og den visuelle fremstillingen av figurmønsteret. Min undersøkelse bekrefter dette, da mine spørsmål til elevene var med på å drive samtalen fremover og bidra til at elevene mer eksplisitt utrykte sine strategier, samtidig som de aktivt benyttet seg av de visuelle modellene i sine resonnement og generaliseringsstrategier. At læreren er bevisst egen rolle og utfordrer elevene på å se sammenhengen mellom egne strategier og den visuelle modellen av figurmønsteret er dermed også en faktor jeg vil trekke frem som viktig for å lykkes med bruken av figurmønster i matematikkundervisningen på barneskolen.

### 6.1.2 Bruk av ulike semiotiske modeller

I tillegg til det sosiale aspektet var også bruken av ulike semiotiske modeller av avgjørende faktor for elevenes utvikling av resonnement og generaliseringsstrategier. Slik Steinbring (1998) fremhever er matematiske tegn, symboler og formler sentrale aspekt i matematikk, men innebærer også store utfordringer for å forstå matematikk korrekt. Det er viktig å undersøke og forstå sammenhenger mellom tall, operasjoner og prosedyrer i matematikken, og undersøke hvordan matematiske tegn og symboler tillegges mening gjennom interaktive sosiale prosesser av læring og undervisning (Steinbring, 1998). Slik Radford og Peirce (2006) påpeker kan også tegning og verbalspråk inngå som viktige komponenter i algebra. Resultatene fra min studie viser at særlig de ulike visuelle modellene har vært viktige for elevenes oppgaveløsning. Dette gjelder ikke bare som en del av kommunikasjon og samhandling elevene imellom, men også for elevenes egen utvikling av resonnement og generaliseringsstrategier. Matematikk kan for mange oppleves som abstrakt, og matematikken har en abstrakt natur. Samtidig gir de visuelle modellene i arbeid med figurmønsteroppgavene i denne studien et mer konkret og visuelt bilde på et figurmønsters utvikling. De visuelle modellene muliggjør en manipulasjon av figurmønsteret, og denne manipulasjonen viste seg å være viktig for elevenes utvikling av ulike generaliseringsstrategier. Særlig var det av betydning hvordan den semiotiske modellen av figurmønsteret var utformet. Mens oppgave 1 med sin situasjonskontekst og rike visuelle modell ga en god oppstart på arbeidet med figurmønsteroppgaver var det oppgave 2, der elementene i figurmønsteret sammen dannet en geometrisk figur som ga opphav til mest manipulasjon og flest generaliseringsstrategier. Til tross for at oppgave 2 med sin visuelle modell ga opphav til flest generaliseringsstrategier viste elevene også at de så sammenhengen mellom de ulike visuelle modellene i de ulike oppgavene. Å arbeide med et figurmønster som matematisk sett er identisk, men som er uttrykt gjennom ulike visuelle modeller kan altså bidra til å skape økt refleksjon, manipulasjon og sammenheng mellom ulike visuelle modeller, men også mellom ulike matematiske uttrykk. Som en forlengelse av opplegget med å arbeide med tre ulike visuelle modeller knyttet til et figurmønster kan man se på sammenhenger mellom de ulike visuelle modellene og de ulike matematiske uttrykkene. Her kan man også diskutere hvordan et matematisk uttrykk har ulik kobling til de ulike modellene. En slik samtale kan bidra til at elevene utvikler et mer fleksibelt syn på de ulike visuelle modellene av figurmønsteret, som igjen kan føre til at elevene utvikler flere ulike generaliseringsstrategier. Min anbefaling er derfor at det i tillegg til å arbeides med figurmønsteroppgaver i skolen også jobbes med ulike visuelle fremstillinger av ett figurmønster, og at man ser på sammenhengen mellom ulike visuelle fremstillinger og matematiske uttrykk.

## 6.2 Avsluttende kommentarer

Resultatene fra denne undersøkelsen viser at ulike semiotiske presentasjoner av et figurmønster påvirker elevenes evne til å resonnere og generalisere. Det viser seg at en situasjonskontekst og rik visuell presentasjon av figurmønsteret gir en god inngang og start på oppgaveløsningen, men hemmer videre utvikling av flere ulike generaliseringsstrategier. Videre viser mine resultater at elevenes manipulasjon av de visuelle modellene var avgjørende for elevenes generaliseringsstrategier. Det var også en avgjørende faktor hvordan de ulike elementene i den visuelle modellen var fremstilt. Der elementene i den visuelle modellen av figurmønsteret sammen dannet en geometrisk figur fantes også den beste gestalteffekten, og dette ga opphav til flest ulike generaliseringsstrategier.

Det visuelle aspektet i arbeidet med figurmønsteroppgaver har blitt trukket frem som en av årsakene til at figurmønsteroppgaver egner seg godt også i de lavere årstrinn på grunnskolen (Becker & Rivera, 2005; Lannin, 2005). Dette er noe også min studie viser. Elevene i denne undersøkelsen var ikke vant til å jobbe med figurmønsteroppgaver, eller på andre måter redegjøre for egen tankegang, resonnement eller generalisering i matematikk. Elevene lykkes likevel med å produsere gode resonnement og flere ulike eksplisitte generaliseringsstrategier i arbeidet med de ulike figurmønsteroppgavene. Samtalen rundt elevenes arbeid og oppgaveløsning var en viktig del av elevenes læring og utvikling, og den matematiske samtalen og det sosiale samspillet elevene imellom og mellom lærer og elev bør inngå som en viktig og naturlig del av arbeidet med figurmønsteroppgaver.

Det er interessant at elevene ikke benytter seg av numerisk generalisering i denne studien. Til tross for at numerisk generalisering kan være matematisk korrekt og effektiv i arbeid med figurmønsteroppgaver viser det seg ofte at elever som tar i bruk numerisk generalisering gjør flere feil, og ikke evner å se sammenhengen mellom det generelle uttrykket og figurmønsterets visuelle utvikling (Becker & Rivera, 2005). Samtlige elever i denne undersøkelsen baserer seg på figurativ generalisering, og ser sammenhengen mellom de ulike generelle uttrykkene og de visuelle modellene. Situasjonskonteksten og den rike visuelle modellen i oppgave 1 ser ut til å ha en positiv effekt på elevenes bruk av figurativ generalisering, som elevene viderefører også til de andre oppgavene.

Bruk av figurmønsteroppgaver omhandler flere viktige aspekt i matematikken, og gir et godt utgangspunkt for arbeid med tidlig algebra. De visuelle modellene gir et godt utgangspunkt for resonnement og generalisering, og bruken av ulike visuelle modeller knyttet til det samme figurmønsteret kan være med på å skape diskusjoner rundt relasjonen mellom ulike matematiske uttrykk, og de ulike visuelle modellene. Figurmønsteroppgaver er også nyttige fordi de med sine visuelle geometriske modeller gir et godt utgangspunkt for å utforske den generelle utviklingen av figurmønsteret. Også elever som ikke er vant til å arbeide med generelle sammenhenger og begrunne egne resonnement har gode muligheter for å lykkes med dette i arbeid med figurmønsteroppgaver.

Videre forskning og undersøkelser knyttet til ytterligere bruk av ulike semiotiske modeller i arbeid med figurmønsteroppgaver er ønskelig for å underbygge påstandene fra denne undersøkelsen. Særlig hadde det vært interessant å se på om ulike visuelle semiotiske modeller har påvirkning på overgangen mellom å uttrykke generaliseringsstrategier som verbale ytringer til algebraiske matematiske formler. Det vil også være interessant å undersøke om undersøkelser som ligner denne studien finner lignende resultater. Figurmønsteroppgaver kan varieres på utallige måter, og det figurmønsteret jeg har presentert her er kun ett av utallige muligheter. De tre ulike visuelle fremstillingene av figurmønsteret jeg har gjengitt i denne studien også bare et begrenset utvalg av ulike fremstillinger som er mulig for figurmønsteret. Det hadde vært interessant å undersøke om andre semiotiske fremstillinger av figurmønsteret gir opphav til andre generaliseringsstrategier, og om det finnes flere generelle faktorer som gjør at den visuelle fremstillingen av et figurmønster gir opphav til flere ulike generaliseringsstrategier.

## Referanseliste


Auerbach, C. F. og Silverstein, L. B. (2003). *Qualitative Data: An Introduction to Coding andanalysis.* New York: New York University Press.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, *216*, 235.

Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs. Algebra: The core of a didactical dilemma. In R. Sutherland. *Perspectives on school algebra* (Vol. Vol 22, Mathematics education library). Dordrecht: Kluwer.

Becker J. R., & Rivera, F. D. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(4).

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp.95-101).

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. In *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Springer Netherlands.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education, New York*, 746-783.

Christoffersen, L. og Johannessen, A. (2012). Forskningsmetode for lærerutdanningene. Oslo: Abstrakt forlag

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. London: Routledge.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61-85). Springer Netherlands.

Gold, R. L. (1958). *Roles in sociological field observations. Social Forces*, 36 (3), 217-23.

Grønmo, L.S., Onstad, T, Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., Borge, I.C. (2012) Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011. Oslo: Akademika forlag

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: making connections with computers?. *Mathematical Thinking and learning*, *1*(1), 59-84.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 5-17.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.*), The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol I, ss. 344-351). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Kieran, C. (1989). A Perspecitve og algebraic thinking. In Vergnaud, G., Rogalski, J., & Artique, M.(Eds.) *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (13th, Paris, France, July 9-13, 1989), Volume 2.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In *The future of the teaching and learning of algebra the 12 th ICMI study* (pp. 21-33). Springer Netherlands.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231-258.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 299-317.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In *Approaches to algebra* (pp. 87-106). Springer Netherlands.

Mason, J. (1989). Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention. *For the Learning of Mathematics,9*(2), 2-8.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In *Approaches to algebra* (pp.65-86). Springer Netherlands.

Maxwell, J. A. (1992) *Understanding and validity in qualitative research*. Harward Educational Review, 62 (3), 279-300.

Måsøval, H., & Universitetet i Agder. (2011). *Factors Constraining Students' Establishment of Algebraic Generality in Shape Patterns : A Case Study of Didactical Situations in Mathematicsat a University College, 38*, 316.

Nerdrum, P. (1998). *Mellom sannhet og velferd: etiske dilemmaer i forskning belyst ved et eksempel.* Notat. Oslo: Høgskolen i Oslo.

Onwuegbuzie, A. J. og Leech, N. L. (2007). *Sampling designs in qualitative research: making the sampling process more public*. Qualitative report, 12 (2), 238-54.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In *Approaches to algebra* (pp. 107-111). Springer Netherlands.

Radford, L., & Peirce, C. S. (2006, November). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21).

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, *40*(1), 65-82.

Simpson, M. og Tuson, J. (2003). *Using Observations in Small-Scale Research: A Beginners Guide* (revised edition). Glasgow: University of Glasgow, the SCRE Centre.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Springer Netherlands.

Verschuren, P. (2003). Case study as a research strategy: Some ambiguities and opportunities. *International Journal of Social Research Methodology, 6*(2), 121-139.

Warren, E. (2000). Visualisation and the development of early understanding in algebra. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-273).

Wertsch, J. V., & Del Río, P. (1995). Sociocultural studies: history, action, and mediation. I Wertsch, JV, P. del Rio & A. Alvarez.(red.): Sociocultural Studies of Mind.

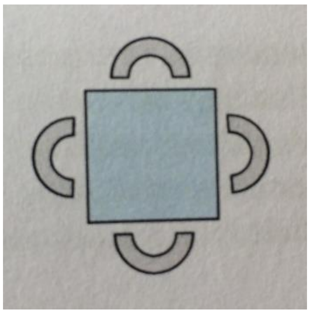
Yin, R. (2009). *Case study research : Design and methods* (4th ed., Vol. Vol. 5, Applied social research methods series). Thousand Oaks, Calif: Sage.

# Vedlegg

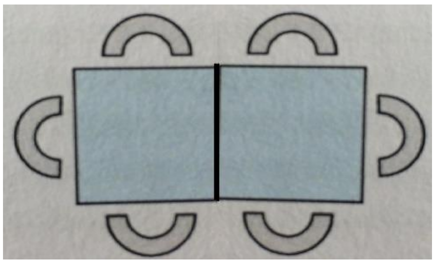
## Vedlegg 1 – Oppgavene elevene arbeidet med

# Oppgave 1

På en restaurant er det kvadratiske bord, og det er plass til en person ved hver side av bordet. Ved ett bord kan det sitte maks 4 personer.



Når det kommer mange som skal spise sammen setter servitørene sammen bordene til langbord. Når 2 bord er slått sammen er det plass til 6 personer.



Hvor mange personer kan sitte ved 3 sammensatte bord?

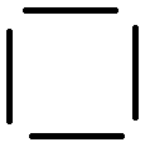
Hvor mange personer kan sitte ved 4 sammensatte bord?

Hvor mange personer kan sitte ved 10 sammensatte bord?

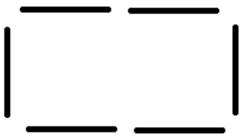
Hvis du vet hvor mange bord som er satt sammen, kan du finne ut hvor mange personer som kan sitte sammen?

# Oppgave 2

Her ser du de tre første figurene i et figurmønster. Hvordan vil figur 4 se ut hvis du fortsetter mønsteret?



*Figur 1*



*Figur 2*

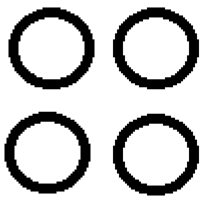
*Figur 3*

Hvordan vil figur 10 se ut? Hvor mange streker trenger du for å lage figur 10?

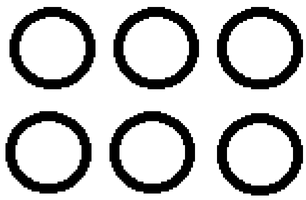
Hvis du vet figurnummeret, kan du finne en måte slik at du kan finne ut hvor mange streker som trengs for å lage figuren?

# Oppgave 3

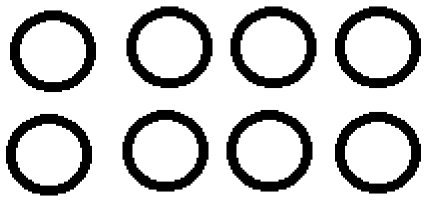
Her ser du de tre første figurene i et figurmønster.



*Figur 1*



*Figur 2*



*Figur 3*

Hvis du fortsetter mønsteret, hvordan vil figur 4 se ut? Hva med figur 10?

Hvis du vet figurnummeret, kan du finne ut hvor mange sirkler man trenger for å lage figuren?

## Vedlegg 2 – informasjonsskriv og samtykkeerklæring

# Informasjonsskriv og samtykkeerklæring til foreldre/foresatte

**Til foreldre/foresatte for elever på (trinn) ved (skole).**

*Anmodning om tillatelse til lydopptak og innsamling av skriftlige elevarbeider i undervisningssituasjoner.*

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved NTNU, og har i min masteroppgave fokus på arbeid med tidlig algebra og figurmønster. I prosessen vil jeg være opptatt av hvordan elever oppfatter ulike figurmønster, og hvordan de arbeider med disse. Jeg ønsker å ta en gruppe på 3 elever ut av klasseromsundervisningen, over 3 økter. Elevene vil få presentert et figurmønster og oppgaver knyttet til disse. For å dokumentere data så godt som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet frem til at det er ønskelig å gjøre lydopptak av disse sekvensene. Derfor ber jeg med dette om tillatelse til å kunne gjøre lydopptak og samle inn skriftlige arbeider av elever i 6.klasse ved Nordstrand skole.

Lydopptak og skriftlige arbeider vil bli samlet inn fra gjennomføringen i løpet av januar. Det vil dreie seg om lydopptak av elevenes samarbeid og diskusjon av faglig arbeid i matematikk, og elevenes skriftlige arbeider vil være knyttet til faglig gitte oppgaver. Oppgavene er tilgjengelig på forespørsel.

Det samles ikke inn personopplysninger utover alder og kjønn. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt, og elevenes navn, klasse eller skole oppgis ikke i den ferdig masteroppgaven. Tilgang til datamaterialet som samles inn vil kun være tilgjengelig for meg og min veileder, samt eventuelt andre medstudenter ved NTNU. Alle data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltelever.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 1. august 2017. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lydopptak vil slettes. Det er frivillig å delta i studien, og eleven kan når som helst trekke sitt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom eleven trekker seg vil alle opplysninger om eleven bli anonymisert.

Jeg håper dere synes dette er spennende og viktig, og vil la deres barn delta i undersøkelsen. Jeg ber om at foreldre/foresatte i samarbeid med eleven fyller ut svarslippen og returnerer til skolen.

Har du spørsmål ta kontakt med meg på (mail) eller (mobil).

*På forhånd takk!*
Med vennlig hilsen
Hilde Hoel Stenmark

# Samtykkeerklæring

Som en del av prosjektet ber jeg om tillatelse til å gjøre lydopptak der eleven din/deres er med, og samle inn skriftlige arbeidereleven har utarbeidet. Sett kryss:

○ Jeg / vi har snakket med eleven og **gir vårt samtykke** til at han/hun kan delta i undersøkelsen. Jeg/vi er klar over at deltagelsen er frivillig, og at vi og eleven når som helst og uten grunn kan trekke oss fra prosjektet.

Dato:________________________

Elevens navn (fornavn og etternavn): ______________________________________________

Klasse: ____________________

Foresattes underskrift: ____________________________________________________________