Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Hendrica Anna van der Wijst

Jakten på en endimensjonal variabel

en studie av oppgaveinnholdet i temaet proporsjonal resonnering ved hjelp av Rasch-analyse

Masteroppgave i Matematikk didaktikk
Veileder: Trygve Solstad
Trondheim, mai 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Hendrica Anna van der Wijst

Jakten på en endimensjonal variabel

en studie av oppgaveinnholdet i temaet proporsjonal resonnering ved hjelp av Rasch-analyse

Masteroppgave i Matematikk didaktikk
Veileder: Trygve Solstad
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden


Mr. Jones lives 50 miles away from you. You both leave home at 5:00 and drive toward each other.
Mr. Jones travels at 35 mph, and you drive at 40 mph. At what time will you pass Mr. Jones on the road?
GIVEN THE TRAFFIC AROUND HERE AT 5:00, WHO KNOWS?
I ALWAYS CATCH THESE TRICK QUESTIONS.

Innhold

Figuroversikt

1. Innledning: proporsjonal resonnering, et navn, mange ansikt

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Allerede i det gamle Egypt og Babylonia, ca 3000 f.Kr., ble konseptet proporsjonal resonnering flittig brukt (Modestou & Gagatsis, 2010). Her til lands ble reguladetri på 1600-tallet sett på som så viktig, at den ofte ble omtalt som den femte regnearten (Botten, 2009, s. 63). Proporsjonal resonnering har med andre ord spilt en viktig rolle i samfunnet helt fra matematikkens begynnelse. I dag inngår proporsjonal resonnering som et viktig element i mange av matematikkens emner som algebra, geometri og måling. Samtidig har temaet praktiske og hverdagslige sider, og anvendes når vi skal bestemme beste kjøp, justere kokeoppskrifter, styre personlig økonomi m.m. (Karplus, Pulos & Stage, 1983; Stemn, 2008). Mange er enige om at temaet er viktig, men det er samtidig vanskelig å håndtere. Lamon estimerer at 90% av den voksne befolkingen ikke resonnerer proporsjonalt (2012, s. 3).

I dagens læreplan, LK06, blir ordet proporsjonalitet nevnt en gang i hele læreplanen fra 1.-10. trinn. Proporsjonal resonnering blir ikke nevnt eksplisitt. Som nevnt i forrige avsnitt, inngår proporsjonal resonnering i mange av matematikkens emner. Uten eksplisitte føringer, blir det tilfeldig hvem som lærer å resonnere proporsjonalt. En av grunnene til fraværet av benevnelsen proporsjonal resonnering kan skyldes det faktum at begrepet er vanskelig å forklare med en setning eller to (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2015, s. 456). Forskere har i mange år har brukt terminologien som et paraplybegrep for alt som har en forbindelse til rasjonale tallkonsepter, og har vært flinkere til å definere når det ikke resonneres proporsjonalt, enn til å tydeliggjøre hva som kjennetegner konseptet (Lamon, 2012, s. 2-3). Uten felles forståelse av begrepet, er det umulig å snakke sammen om resultater, forbedringer og relevansen av nye oppdagelser. Det er som om forskerne mangler det Bakhtin kaller en felles språksjanger. Bakhtin skiller mellom nasjonale språk som norsk og engelsk og ulike språksjangre. De nasjonale språkene er de tradisjonelle lingvistiske enheter som forklarer setningsoppbygningen, fonologien osv. De sier derimot ingen ting om den sosiale situasjonen ytringen oppstod i, og dermed ingenting om hvordan man skal forstå ytringen. I språksjangre legger Bakhtin de ulike måter forskjellige sosiale system eller grupper (eks arbeidskollegaer, aldersbestemte grupper, hobby venner osv.) snakker på, og dermed forstår verden på i et gitt tidsrom (Bakhtin, 1987, s. 80-81). En pottemaker og en kjemiker vil sannsynligvis snakke om den samme leiren på to helt forskjellige måter. Dette er ikke så rart da de kommer fra to forskjellige sosiale grupper som hver vektlegger ulike faktorer og deler av virkeligheten, og dermed ser verden på to forskjellige måter. Innenfor temaet proporsjonal resonnering, mangler det en felles forståelses plattform. Hva de ulike forskningsprosjektene legger i begrepet proporsjonal resonnering, kommer frem indirekte gjennom valg av oppgaver og matematiske problemstillinger. Resultatet er at alle påstår de skriver om samme fenomen, men i virkeligheten er det beslektede, men forskjellig temaer som blir diskutert under samme navn.

1.2 Forsknings spørsmål

Som det fremgår av forrige avsnitt, er proporsjonal resonnering både et svært viktig tema innenfor faget matematikk, men også et vanskelig emne å håndtere. I denne undersøkelsen vil jeg se nærmere på innholdet i temaet proporsjonal resonnering for å se om jeg finner noen fellestrekk som kan hjelpe til med en felles forståelse for hva som legges i begrepet. Målet er ikke enda en definisjon på proporsjonal resonnering, men derimot å se på innholdet i temaet proporsjonal resonnering. Hvilke matematikkoppgaver kan samles inn under fellesbegrepet og hvilke detter utenfor? Jeg vil jakte etter fellestrekk både i de matematikkoppgavene som passer inn, men også se på hva som kjennetegner de oppgavene som ikke passer inn. For å finne fellestrekkene, kommer jeg til å lage et endimensjonalt oppgavesett som jeg analyserer ved hjelp av Rasch-analyse. Sistnevnte analyse gir opplysninger om hva som måles i oppgaven og dermed skiller de oppgavene som måler proporsjonal resonnering fra de som måler noe annet.

Jeg har i min studie valgt å ha fokus på matematikkoppgaver, deres innhold og vanskelighet. Dette betyr ikke at studien er fjernet fra skolehverdagen. Matematikkoppgaver er gjerne laget til en bestemt målgruppe. Mine oppgaver er rettet mot tiende trinn i norsk skole, og testet på den relevante målgruppen. Likevel er det oppgavene, ikke elevprestasjonene, som har stått i fokus. Studier av oppgavene fremfor elevene er en mindre brukt, men dermed ikke mindre viktig side av undervisningsforskningen, (Bond & Fox, 2015, s. xvi).

Med bakgrunn i det som er nevnt ovenfor, har jeg utarbeidet en todelt problemstilling i form av to forskningsspørsmål:

1. Kan proporsjonal resonnering defineres ved hjelp av en endimensjonal variabel?

2. Hva kjennetegner de oppgavene som definerer proporsjonal resonnering?

For å finne svar på det første forskningsspørsmålet, kommer jeg til å lage et oppgavesett rettet mot tiendetrinn og analysere dette ved hjelp av Rasch-analyse. Rasch-modellen hører hjemme under psykometriske målinger. Målinger som har til hensikt å måle egenskaper i den psyko-sosiale verdenen i motsetning til de kjente standard måleenheter som måler egenskaper i den fysiske verden. Formålet med denne oppgaven er ikke bare å måle de involverte oppgavene, men også diagnostisere dem for å finne nøkkelfunksjonene i proporsjonal resonnering for å gi et klarere bilde av temaet. Oppgavene som i første forskningsspørsmålet blir regnet som medvirkende til å belyse temaet proporsjonal resonnering, danner grunnlaget for diagnostiseringen og dermed det andre forskningsspørsmålet.

1.3 Begrepsavklaring

Hovedformålet med denne avhandlingen er å kaste lys over begrepet proporsjonal resonnering som helhet. Mange skriver om temaet, men hva som legges i begrepet varierer mye. Kort oppsummert kan vi ut fra litteraturen si følgende;

Resonnering: Stammer fra latin, ble en del av det norske språket gjennom det franske ordet raison, som betyr fornuft. Ordet resonnering brukes når man følger en logisk tankegang, drøfter og begrunner ut fra fornufts-grunner (Berulfsen & Gundersen, 2000). Terminologien resonnering er blitt assosiert med flere ulike aspekter av emnet matematikk, de mest kjente er bevisføring, algebra og proporsjonalitet (Stylianides, 2009). I sitt forsøk på å samle ferdighetene de mener en trenger for å lære matematikk i et felles konsept, har Kilpatrick, Swafford og Findell definert 5 avgjørende, matematiske kompetanser. Disse kompetansene er både tett sammenvevet og uavhengig på samme tid, som ulike kordeler som tilsammen danner et tau (Kilpatrick mfl., 2001, s. 116). En av disse kompetansene er adaptiv (allsidig) resonnering. I begrepet adaptiv (allsidig) resonnering legger de evnen til å tenke logisk rundt, og reflektere over sammenhengene i de ulike konseptene og situasjonen innenfor matematikk. Å vurdere og argumentere for gyldigheten av resonnementet inngår som en del av ferdigheten (Kilpatrick mfl., 2001, s. 129-131). Grunnen til at de valgte termen adaptiv, allsidig, resonnering er at konseptet resonnering i matematikkfaget vanligvis blir forbundet med formelle bevis og deduktiv resonnering. Forfatterne har derimot en mye bredere forståelse for begrepet og inkluderer også intuitiv og induktiv resonnering (Kilpatrick mfl., 2001, s. 129). Forfatterne går så langt som å si at: «*In mathematics, adaptive reasoning is the glue that holds everything together, the lodestar that guides learning*». *(*Kilpatrick mfl., 2001, s. 129). Kilpatrick m.fl. ser på resonnering som selve kjernen i matematikk, det som holder deg på kurs og sørger for at faget gir mening.

Lamon (2012) gir en spesifikk beskrivelse av begrepet resonnering i forbindelse med proporsjonalitet som jeg mener treffer spikeren på hodet; «*The word reasoning further suggests that we use common sense, good judgment and a thoughtful approach to problem-solving, rather than plucking numbers from word problems and blindly applying rules and operations.*» (s. 4.). I likhet med Kilpatrick mfl, bruker også Lamon en bred forståelse for resonnering som inkluderer prøving og feiling, grubling og logikk En kan på mange måter si at Lamon knytter begrepet resonnering til relasjonell matematikkforståelse jamfør med Skemp (2006) sin definisjon av begrepet relasjonell forståelse.

Proporsjonalitet: Proporsjonale situasjoner inneholder to variable størrelser som står i et bestemt, konstant forhold til hverandre (Birkeland, Breiteig & Venheim, 2011, s. 311; Van de Walle mfl., 2015, s. 456). Den matematiske modellen for direkte proporsjonale forhold er en lineær funksjon på formen f(x)=kx, der k er proporsjonalitetskonstanten (Birkeland mfl., 2011, s. 311; Lamon, 2012, s. 3; Van de Walle mfl., 2015, s. 342). Proporsjonalitet er et viktig matematisk konsept som inngår i mange matematiske sammenhenger som for eksempel algebra, geometri, sannsynlighet og kalkulus (Langrall & Swafford, 2000; Stemn, 2008).

Proporsjonal resonnering: Når elever tenker proporsjonalt, forstår og bruker de den multiplikative relasjonen som finnes i situasjoner hvor det er et konstant forhold mellom to mengder (Stemn, 2008). Proporsjonal resonnering er å påvise, uttrykke, analysere, forklare og gi begrunnelser for påstander om proporsjonale forhold og situasjoner (Lamon, 2012, s. 4) og utvikles i forlengelsen av forståelsen av ratio (Van de Walle mfl., 2015, s. 456). Mens Stemn vektlegger bruken av det konstante forholdet mellom to størrelser, virker det som Lamon er mer opptatt av at tenkningen skal inneholde resonnering rundt en proporsjonal situasjon.

Termen proporsjonal resonnering kan brukes til å beskrive mer sofistikerte måter å tenke matematisk på, siden den viser til oppnåelse av en viss matematisk modenhet, der mange av de elementære ideene innfor matematikk er konsolidert, og en dør mot mer avansert matematisk og vitenskapelig tenkning er åpnet (Lamon, 2012, s. 10; Langrall & Swafford, 2000). Evnen til å resonnere proporsjonalt utvikles engang mellom slutten av barneskolen og ungdomsskoleforløpet, og er avgjørende kunnskap for å forstå mer avanserte former for matematikk, særlig innenfor algebra og geometri (Langrall & Swafford, 2000).

1.4 Oppbygging av oppgaven

Denne oppgaven er bygget opp av seks kapitler. I neste kapittel beskrives oppgavens teorigrunnlag. Da psykometriske målinger er en relativ ukjent metode, er hele kapittel tre viet til måleteori og en introduksjon av Rasch-analyse som utgjør selve fundamentet i oppgaven min. Selv om det er med et eget kapittel som beskriver teorien bak oppgavens metode, er fjede kapitel et eget metodekapittel i oppgaven. Metodekapitlet konsentrer seg om metodevalg, gangen i datainnsamlingen, erfaringer fra piloten og oppgavens validitet. I femte kapittel, analyse, ses det på dataens tilpasning til Rasch-modellen og presenterer funnene fra oppgaveinnholdet. Tilslutt samles trådene i sjette og siste kapitel, drøfting, hvor det på grunnlag av teorigrunnlaget og analysen blir presentert et svar på problemstillingen. I dette kapitlet blir det også rettet et kritisk blikk mot oppgaven, implikasjoner av funnene bli skissert og interessante videre forskningsspørsmål blir presentert.

2. Teori, oppgavens grunnmur

I denne oppgaven undersøker jeg proporsjonal resonnering ved å bygge opp et oppgavesett. For å sikre at oppgavene er delt inn i ulik vanskelighetsgrad og ulik grad av resonnering har jeg valgt å støtte meg til forskjellige teorier om oppgaveinndeling og oppgaveinnhold som jeg presenterer i dette kapitlet. Før jeg går nærmere inn på de spesifikke teoriene, vies det først noen avsnitt på matematisk kunnskap og forståelse. Det finnes mange tilnærminger og motsetninger innen matematikkundervisningen (Leung, 2001; Niss, Bruder, Planas, Turner & Villa-Ochoa, 2016; Sfard, 1991; Skemp, 2006). Derfor er det hensiktsmessig å få avklart mitt ståsted i det matematiske læringslandsskapet, slik at det ikke er noen tvil om hvilke matematiske mål mine oppgaver sikter mot.

2.1 Å posisjonere seg i det matematiske læringslandskapet.

Som kommende lærer er det viktig å ha en formening om hva elevene skal lære i matematikk timene, hvorfor de skal lære det og ikke minst hvordan. Læreplanen gir selvfølgelig en del føringer på timens innhold, men med dagens læreplan er mye opp til hver enkelt lærer. Derfor er det viktig å ha gjort seg opp en mening rundt hva det vil si å ha ferdigheter, kompetanse, kunnskap og forståelse for matematikk. Ved første blikk virker det ikke til at det er den store forskjellen mellom de forgående benevnelsene, men det er forskjell. Mens ferdigheter og kompetanser, dreier som om å gjøre matematikk, fokuserer kunnskap og forståelse på å vite noe om matematikk (Niss mfl., 2016). Det å vite noe om matematikk, og det å gjøre matematikk er helt klart to forskjellige ting. Samtidig er det åpenbart en eller annen form for tett sammenheng mellom de to. Hvilket standpunkt vi tar til matematikkens innhold, legger store føringer for tre avgjørende didaktiske spørsmål. For det første påvirket det fagets mål og mening, hva vi som lærere ønsker å oppnå med undervisningen. For det andre avgjør vårt syn på matematikk hva som kjennetegner suksess i undervisningen, hvordan og når vi når våre mål samt hva som er hensiktsmessig vurdering i faget. Tilslutt sier vår standpunkt til matematikkens innhold noe om hvordan vi bør strukturere og organisere undervisningen, hvilke aktiviteter som bør gjennomføres med hvilke materialer (Niss mfl., 2016).

Det som kanskje er det mest kjente bidraget til dualiteten i matematikkdidaktikken er Skemp sin artikkel om relasjonell og instrumentell forståelse som utkom for første gang i 1976. Relasjonell forståelse vektlegger sammenhengen i faget, forståelse for hva du gjør og utforskning av flere løsningsmetoder. Motparten, instrumentell forståelse, har fokus på effektive veier frem til svaret, gjerne gjennom pugging av algoritmer. Begge forståelsestyper har sine fordeler og ulemper. Problemene oppstår når ikke alle i klasserommet er enige i hva slags matematikk som skal undervises. Det blir som å forsøke å spille det samme brettspillet med to forskjellige sett med spilleregler (Skemp, 2006).

Figur 1: Forståelse består ikke av to usammenhengende leirer, men heller av en uavbrutt sammenhengende linje med to ytterpunkter. Mens relasjonell forståelse vektlegger sammenhenger innad i faget, består instrumentell forståelse i større grad av løsrevne kunnskapsbiter

Det er viktig å understreke at instrumentell og relasjonell forståelse er to ytterligpunkter langs en og samme forståelsesakse, som illustrert i figur 1. I det ene ytterpunktet finner vi enkeltstående prosedyrer som man utfører uten den minste anelse for hvorfor det gjøres på denne måten. På motsatt side finner vi et sammenhengende nettverk av ideer og kunnskaper, der ny viten (rød prikk) blir bundet sammen med det som er tidligere kjent (blå prikker). Disse sammenhengene gir innsikt i hvilken metode som bør anvendes og hvorfor.

Skemp sin inndeling er på mange måter veldig svart, hvit. Den er enkel å håndtere, men gir ikke det nyanserte og kompliserte helhetsbilde som matematikkfaget representerer. I den siste tid er det vokst frem en del rammeverk som prøver å inkludere hele den sammensatte matematiske virkeligheten. Kilpatrick mfl. sine fem kordeler som ble nevnt innledningsvis er et eksempel på et slikt rammeverk. Universitet i Chicago har laget fem kategorier i sitt rammeverk for matematisk forståelse; ferdigheter, egenskaper, bruksområder, representasjonsformer og den historisk-kulturelle dimensjonen (Usiskin, 2015). Ferdighetsdimensjonen handler om å kunne anvende lærte ferdigheter, eks bruke en algoritme for å finne svaret på et regnstykke. Denne dimensjonen inneholder valg av mest hensiktsmessig, modifisert algoritme, og tar høyde for at det finnes mange fler enn en per regneart. Ferdighetsdimensjonen er på mange måter en litt utvidet variant av Skemp sin instrumentelle forståelse. Den neste dimensjonen, egenskaper, beskriver kunnskapen om hvorfor algoritmene kan anvendes, altså den formelle bevis biten. Bruksområder er den kunnskapsdimensjonen som legger vekt på at en vet når en kan anvende for eksempel multiplikasjonsalgoritmen, og når det er mest hensiktsmessig å bruke en annen fremgangsmåte for å løse problemet. Representasjonsformer beskriver ferdigheter i å beskrive et og samme konsept ved hjelp av flere representasjonsformer. Den siste dimensjonen, den historisk-kulturelle, er ikke en som anvendes direkte i skolesammenheng. Til gjengjeld er den viktig bakgrunnskunnskap for en matematikklærer. Denne dimensjonen tar for seg hvordan, når og hvorfor en matematisk ferdighet/konsept oppstod.

Som fremgår av begge de presenterte konseptene, finnes det ikke et enkelt svar på hva som bør vektlegges i matematikkundervisningen. En kommer kanskje lengst med Ole Brum svaret ja takk begge deler. Det er da også begge deler jeg vektlegger i mitt oppgavesett. Jeg er ikke ute etter bare rett svar, men minst like interessert i hvorfor elevene mener dette blir rett, om svaret kan generaliseres og viktigst av alt, at matematikken ikke skal være et sett med uforståelige regler, men en meningsfylt og nyttig aktivitet. Dette synet på matematikk er i tråd med Freudenthal som mente at elevene i stedet for å få servert «ferdig laget matte» av prosedyrer og uforståelige regler, selv bør være medvirkende i sin læringsprosess og under veiledning utvikle sine egne matematiske redskaper og konklusjoner (Freudenthal, 1973).

Hittil har jeg sett på ulike syn på matematikk, hva faget kan inneholde og ulike syn på kunnskap i faget. En helt annen, men minst like viktig side av lærerjobben er å gjøre seg opp en mening hvordan elevene tilegner seg kunnskaper og ferdigheter i faget. Jeg støtter meg til et sosiokonstruktivistisk læringssyn som setter sammen Piaget sine tanker om konstruering av kunnskap med Vygotsky sine ideer om læring som sosial deltakelse. Sosiokonstruktivimse tar utgangspunkt i at elevene selv konstruerer sin kunnskap, men gjør dette i en setting med sosial interaksjon og påvirkning av både medelever og lærere (Cobb, 1994). I dette læringssynet vektlegges at hver enkelt elev danner sin egen virkelighetsoppfatning, men justerer den i forhold til og i samspill med menneskene rundt seg. Å kunne forklare og argumentere sin tankegang, mener jeg er en svært viktig del av dette kunnskapssynet, og blir dermed vektlagt sterkt i oppgaveutformingen og vurderingen.

Om vi ser tilbake på Niss mfl. sine tre avgjørende didaktiske spørsmål, matematikkens innhold/mål, når målet er nådd og organiseringen av undervisningen, kan mitt ståsted oppsummeres slik; Målet er å vise elevene størst mulig bredde i faget ved å gi de en relasjonell forståelse som lærer de både å velge gi dem et bredt spekter av hensiktsmessige fremgangsmåter (ferdigheter og bruksområder), samt lære de hvorfor fremgangsmetodene kan anvendes (egenskaper) og hvordan de kan representeres på ulike representasjonsformer. Undervisningen bør være variert, og ikke lærebokstyrt. Dette er mål som kan tilpasses de ulike elevenes behov. For noen kan det være nok å lære en ny representasjonsform, mens andre kan bli utfordret til å danne seg et mest mulig helhetlig bilde. Det viktige her er å tilpasse matematikken slik at den oppleves som meningsfylt og spennende for hver enkelt elev. Det første og siste punktet kommer indirekte til syne i denne oppgaven, mens deler av det midterste punktet, hensiktsmessig vurdering for å se om målet er nådd, er mye mer fremtredende. Selv om hensiktsmessig vurdering ikke er hovedfokus i denne oppgaven, blir de fleste oppgavesett brukt med formålet om å vurdere elevene og finne ut hva de kan og eventuelt ikke forstår. Jeg vil derfor strebe etter å inkludere mine matematiske mål og hensikter inn i de utvalgte oppgavene, samtidig som jeg ivaretar behovet for å ha med oppgaver i hele spekteret av forståelse og matematikksyn.

2.2 Forutsetninger for proporsjonal resonnering

Innledningsvis definerte jeg proporsjonalitet, resonnering og proporsjonal resonnering. Det som ikke ble nevnt i innledningen er hvilke matematiske kunnskaper som må ligge til grunn for å kunne resonnere proporsjonalt. Hvilke ideer som bør knyttes til konseptet for at det gir mening om man tenker tilbake på relasjonell forståelse i figur 1. Siden det ligger et relasjonelt kunnskapssyn til grunne i denne undersøkelsen, vektlegges elevenes forståelse for hva de holder på med og evne til å se sammenhenger i faget. Dermed blir det ikke nok å bare lære seg algoritmen for kryssmultiplikasjon. I litteraturen er det relativ bred enighet om hvilke ferdigheter som danner grunnlaget for å lære seg proporsjonal resonnering:

- Gjenkjennelse av likeverdige brøker
- Resonnering ved hjelp av multiplikative strukturer
- God kjennskap om valg av enhet og hvilke konsekvenser valg av ulike enheter får
- Gjenkjenne proporsjonale og omvendt proporsjonale situasjoner fra de som ikke er det

(Lamon, 2012; Langrall & Swafford, 2000; Van de Walle mfl., 2015)

2.3 Ulike teorier rundt hva som påvirker Oppgavevanskeligheten og grad av resonnering.

Målet med denne undersøkelsen er å se nærmere på innholdet i proporsjonal resonnering. Et viktig sted å starte, er derfor å se på hva andre har kommet frem til om temaet for å kunne sette sammen et mest mulig bredt og heldekkende oppgavesett. I avsnittene under presenteres de teoriene som har vært med på å definere innholdet i oppgavene til denne undersøkelsen. Noen av teoriene er knyttet til temaet proporsjonal resonering, andre er mer overordnet og kan knyttes til resonnering samt en relasjonell og helhetlig matematikk forståelse.

2.3.1 Problemtyper innenfor proporsjonal resonnering

Oppgaver som inneholder proporsjonal resonnering, blir ofte delt inn i to forskjellige problemtyper, manglende verdi og sammenligning (Lamon, 2012, s. 112; Tourniaire & Pulos, 1985). Problemtyper av manglende verdi inneholder tre enheter av et forhold mellom to rater, hvor eleven skal finne den manglende verdien. Typiske problem av denne typen er justering av oppskrifter, formlike figurer der en av sidelengdene mangler og forhold mellom gitte størrelser. Et eksempel på manglende verdi oppgave er hvis du trenger 4 kopper mel for en kakeoppskrift til 6 personer, hvor mange kopper mel trenger du hvis du ønsker å bake en kake til 8 personer?

Sammenlignings oppgaver har oppgitt alle fire enheter. Oppgavene består av å avgjøre om ratene er like eller hvilken som er større/mindre. Typiske oppgaver av denne typen er saftblandinger, pris sammenligning, sammenligning av rektangler og kvadrater samt sammenligning av avstand tilbakelagt av to biler som starter til forskjellige tider og kjører med ulike hastighet. Det er svært viktig at elevene resonnerer med oppgaver fra begge problemtyper (Lamon, 2012, s. 112).

I denne undersøkelsen er det lagt stor vekt på resonneringsbiten. Elevene blir derfor ofte bedd om å begrunne hvorfor de mener de har regnet rett i den forgående deloppgaven, begrunne påstander og forklare løsningsmetodene sine. Da disse oppgavene ikke passer inn i noen av de to forgående kategorier, har jeg valgt å legge til en tredje problemløsnings type for å beskrive oppgavene i denne undersøkelsen. Denne har jeg kalt redegjøring, og går nettopp ut på å redegjøre for sine valg og løsningsstrategier. Kategorien kunne blitt delt inn i to underkategorier, redegjøring av manglende verdi og redegjøring av sammenligning. Siden jeg ikke tror det er forskjell mellom å redegjøre for seg i den ene eller andre oppgavetypen, valgte jeg å beholde de i en kategori.

2.3.2 Additive og multiplikative løsningsstrategier

I løsningen av ulike oppgaver knyttet til proporsjonal resonnering, benyttes det ofte en av følgende to løsningsstrategier, enten tenkes det additiv ellers så tenkes det multiplikativt. Som nevnt tidligere i dette kapitlet, er multiplikativ tenkning en forutsetning for proporsjonal resonnering. Dette fordi proporsjonale problem har en multiplikativstruktur, noe som ikke lar seg forene med additiv tenkning. Når vi begynner å tilegne oss matematikk, er det som regel gjennom telling av objekter samt legge til, tekke fra og dele opp hele tall. Denne tankegangen kjennetegner additiv tenking. Multiplikativ tenking inneholder typiske prosesser som forminskning, forstørring, fordobling, dele likt osv. Overgangen fra additiv til multiplikativ tenkning er et stort tankesprang for elevene som det tar tid, trening og mye erfaring å tilegne seg (Lamon, 2012, s. 41-42; Langrall & Swafford, 2000). Koellner-Clar og Lesh har forsket på overgangen mellom additive og multiplikative løsningsstrategier og kommet frem til at denne tankemåten utvikles gradvis, gjerne i kjente kontekster. Denne utviklingen er ikke lineær, og elevene vil ha en lang overgangsfase hvor de hopper frem og tilbake mellom disse fremgangsmetodene (Koellner-Clark & Lesh, 2003). Selv om multiplikativ tenkning er en modningsprosess, har studien til Misailidou og Williams vist at er det noen proporsjonale oppgaver som i større grad enn andre trigger additive løsningsstrategier enn andre. Økning av oppgavens vanskelighetsgrad ser også ut til å medføre en økning i andelen elever som tenker additivt i stedet for multiplikativ (Misailidou & Williams, 2003).

2.3.3 Fire nivåer av kognitive krav

Så langt har teoriene vært fokusert på proporsjonal resonnering. Nå løftes blikket til mer overordnede strategier som er utviklet for alle emnene innenfor matematikk, men som også er nyttig å bruke i sammenheng med proporsjonal resonnering. Stein, Smith, Henningsen og Silver (2009) har laget et rammeverk som skal hjelpe læreren med å synliggjøre hva slags matematikk de presenterer for elevene sine gjennom valget av arbeidsoppgaver. For denne oppgaven er teorien særlig relevant til å hjelpe til å bestemme hva slags overordnet matematisk innhold oppgaven presenterer. De kognitive kravene er et godt verktøy for å skille puggeoppgaver, fra de oppgavene som krever at elevene ser sammenhengene og helheten i faget. Dermed er dette et godt hjelpemiddel for å sikre at det ønskede læringssynet, sosiokonstruktivisme, og matematikksynet er presentert i oppgavesettet.

Hva slags oppgaver vi presenterer for elevene, er avgjørende både for hvilke matematiske ferdigheter de utvikler, og hvilket syn de får på matematikk (Stein mfl., 2009, s. 1-2). Oppgaver kan deles inn i på mange ulike måter som graden av åpenhet, nivå, antall anvendte representasjoner mm. Stein mfl. har valgt inndelingen kognitive krav for å tydeliggjøre hva slags matematikk oppgavene representerer (2009, s. 1). Her nevner de ingen teorigrunnlag for å utdype ulike syn på matematikk. Men deres inndeling kan knyttes til Skemp sin relasjonell og instrumentelle matematikkforståelse, og til en viss grad universitetet i Chicago sitt rammeverk for matematisk forståelse. Dette kommer jeg tilbake til etter å ha presentert innholdet i de fire kognitive kravene.

Stein mfl. sine kognitive krav forteller noe om hva slags tankeaktivitet elevene må vise for suksessfullt å løse en gitt oppgave. Nedenfor følger en beskrivelse av de fire nivåene av kognitive krav, som igjen er delt inn i to hovedkategorier, lave og høye kognitive krav:

Lave kognitive krav:

Memorization tasks/Oppgaver som måler utenatlæring: Går ut på å huske resultater, tall og omforminger, helt uten forståelse eller noen form for resonnering rundt hvorfor.

Procedures witout connections task/ oppgaver uten forbindelser til andre matematiskekonsepter: Krever at elevene kan utføre prosedyrer uten forståelse for eller kunnskap om hvorfor disse kan brukes, eller hva de ulike inngående begreper betyr. Inneholder gjerne en kvalifisert gjetning rundt hvorfor man skal utføre denne prosedyren. Oppgavene er lukkede i den forstand at de er ute etter et bestemt svar og inneholder ofte sterke føringer på hvordan oppgaven skal løses.

Høye kognitive krav:

Procedures with connectionstask/ oppgaver med forbindelser til andre matematiskekonsepter: Denne kategorien krever at elevene klarer å forbinde prosedyrene med matematiske konsepter som ligger bak samt forklare relaterte begreper. Krever en del kognitivt, og evne til å resonnere. Oppgaver i denne kategorien kan alltid løses på flere måter, samt at oppgaven ikke legger sterke føringer på hvordan man skal gå frem for å finne svaret. Inneholder oppgaver som enten har flere svaralternativ eller et bredt spekter av løsningsstrategier.

Doing mathematics task/ Oppgaver som krever matematisk tenkning: Den høyeste graden av kognitive krav retter fokuset mot den underliggende matematiske strukturen og sammenhengene i faget. Oppgavene har ingen fastlagt fremgangsmåte og ofte flere svaralternativ. Denne kategorien stiller høye krav til selvstendig tenkning, argumentasjon og til en viss grad bevisføring.

De kognitive kravene til Stein mfl. legger seg tett på den klassiske inndelingen av relasjonell og instrumentell forståelse, der sistnevnte svarer til de lave kognitive krav og hvor relasjonell forståelse dekker de høye kognitive kravene. Rammeverket til universitet i Chicago har på mange måter ingen kategorier som dekker Stein mfl sine lave kognitive krav, da alle deres dimensjoner vektlegger sammenhengene i faget. Til gjengjeld er de fire første dimensjonene, ferdigheter, egenskaper, bruksområder og representasjonsformer, viktig innhold i Stein mfl sine høye kognitive krav. Dimensjonene er på mange måter også mer konkrete enn de høye kognitive kravene, og var derfor et viktig hjelpemiddel til å avgjøre hvilket kognitivt krav jeg skulle plassere mine ulike oppgaver i.

2.3.4 Åpne og lukkede oppgaver

En annen mye brukt måte å dele inn matematikkoppgaver på, er å skille mellom åpne og lukkede oppgaver. Oppgaver kan varieres og være åpne og lukkede på mange forskjellige måter (Gu, Hunag & Marton, 2004). Kort og konsist kan en si at en oppgave er åpen når den er stilt på en slik måte at den tilrettelegger for ulike svar eller løsningsmetoder (Small, 2012, s. 6). Cifarelli og Cai definerer åpne oppgaver som oppgaver som måler hva du gjør når du egentlig ikke helt hva du skal gjøre (2005, s. 303). Dette oppnås ved å gi oppgaver som mangler en klar formulering på hva som skal gjøres for å være garantert en løsning på problemet og mangler kriterier for å bestemme når en løsning er blitt funnet. Åpne oppgaver kan selvfølgelig forvirre elevene, særlig de som ikke er vant til å jobbe med slike oppgaver. Samtidig åpner denne oppgavetypen muligheter for elevene til å anvende tidligere lært kunnskap og knytte forbindelser til andre konsepter innenfor matematikken. Ved åpne oppgaver får elevene trening i å begrunne sine valg, og ved hjelp av valgene løse oppgavene ute fra egne forutsetninger (Cifarelli & Cai, 2005). Med utgangspunkt i beskrivelsene av åpne oppgaver som nevnt over, krever åpne oppgaver en stor grad av resonnering. Det kan samtidig være nyttig å påpeke at ikke all forskning fokuserer på åpne oppgaver sine store krav til resonnering, og forvirring av elevene. For eksempel så har Baroody i sin forskning av elever som sliter, kommet frem til at åpne oppgaver er en god måte å tilrettelegge undervisningen for alle. Fordelen med åpne oppgaver er at alle har muligheten til å velge den tilnærmingen som gir mening for dem (Baroody, 2011).

For å teste elevenes resonnerende egenskaper, inneholder undersøkelsen oppgaver med varierende grad av åpenhet. Jeg har valgt å dele inn oppgavene i tre ulike grader av åpenhet; veldig åpne oppgaver, åpne oppgaver og lukkede oppgaver. De veldig åpne oppgavene er de der elevene selv må ta valg og avgjørelser med hensyn til hvilke verdier som skal brukes. Disse oppgavene kan løses på mange forskjellige måter, og kan ha flere korrekte svar. De fleste oppgavene i kategorien hører til typen som måler hva elevene velger å gjøre når de ikke helt vet hva de skal gjøre. Kategorien åpne oppgaver kan angripes på flere måter, men har all informasjonen som skal til for å løse den presentert i oppgaveteksten. Lukkede oppgaver har ett rett svar, legger sterke føringer for hvordan man går frem for å finne svaret og gir lite rom for kreative løsninger.

3. Måleteori og introduksjon av Rasch-analyse

Første forskningsspørsmålet, å finne en endimensjonal variabel som beskriver proporsjonal resonnering, bygger på en antakelse om at den endimensjonale variabelen proporsjonal resonnering lar seg måle på en fornuftig måte. I dette kapitlet ses det først nærmere på krav og forutsetninger for gode målinger. Måleteorien blir etterfulgt av en introduksjon til Rasch-analyse og hvordan den kan hjelpe til med å finne svar på problemstilling. Helt til slutt plasseres Rasch-analysen i vurderingslandskapet.

3.1 Noen perspektiver på måling

3.1.1 Naturvitenskaplige målinger

Ulike former for målinger er blitt en uunnværlig og integrert del av tilværelsen vår. Fra vi er små sosialiseres vi inn i en hverdag som måler tid, høyde, lengde osv. Disse naturvitenskapelige mål består av et tall og en standardisert enhet. Ved hjelp av standardiserte målinger kan vi enkelt sammenligne forskjellige objekter og fenomener på forskjellige steder. Ved for eksempel å lese i en reiseguide der det står at det er 1 km fra hotellet til restauranten, klarer vi å danne oss et omtrentlig bilde på hvor lang tid vi kommer til å bruke på å nå destinasjonen. Om en bekjent sender over en kakeoppskrift fra andre siden av verden som inneholder 200 gram sukker vet en hvor mye sukker som skal til for å få samme resultat. Ved hjelp av nøyaktige og vel etablerte måleinstrumenter har naturvitenskapelige målinger og sammenligninger av verden rundt oss blitt en naturlig del av hverdagen. Dagens naturvitenskaplige enheter er så innarbeidet, at vi ofte glemmer at de er fiktive og menneskeskapt ut fra et behov for enkel sammenligning. Måleenhetene ble til ved mye prøving, feiling og kalibrering. Både vekt og temperaturmåling var en gang i tiden upresise med mange feilkilder (Bond & Fox, 2001, s. 4).

3.1.2 Psykometriske målinger

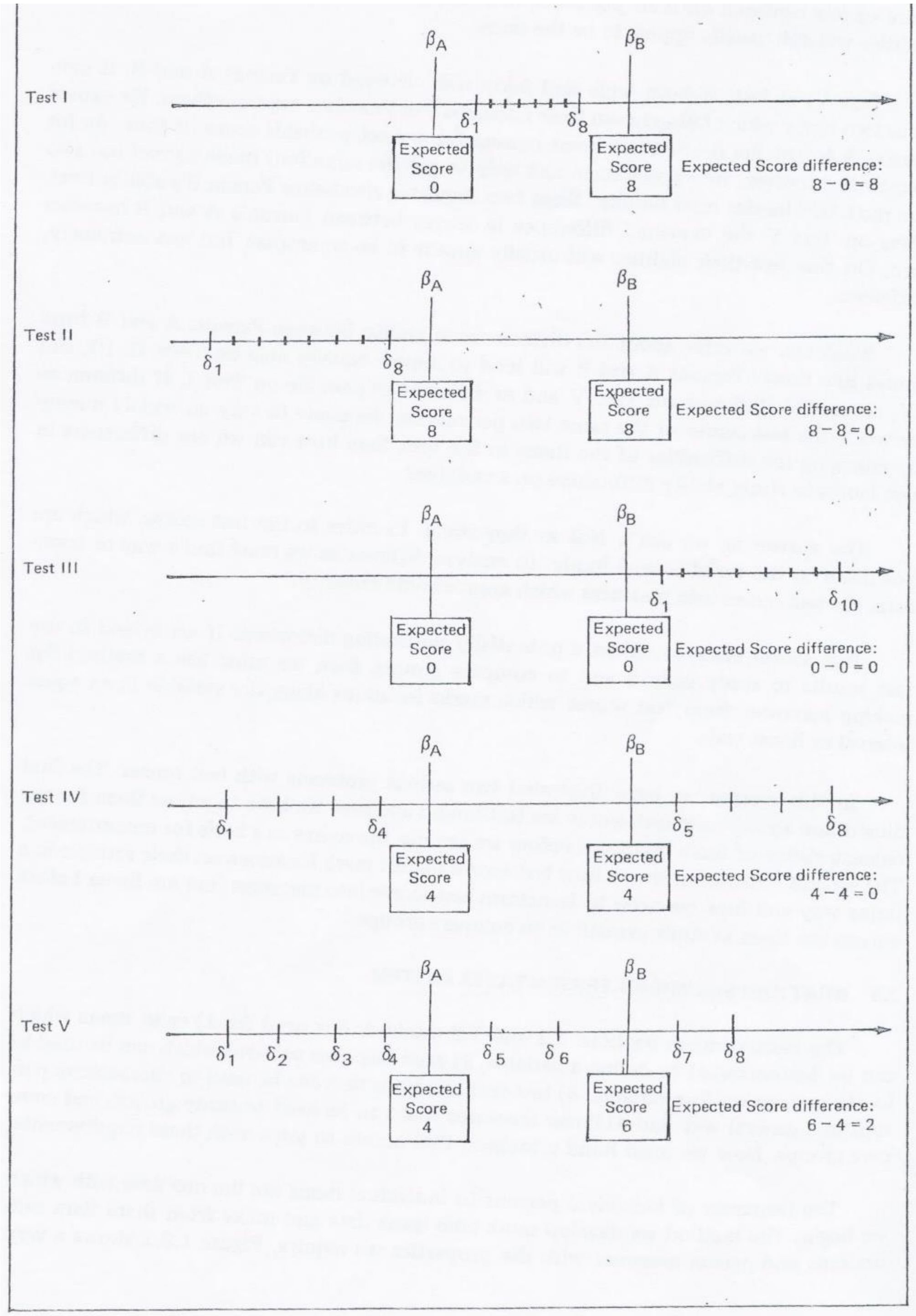
I dag måler vi ikke bare egenskaper i den fysiske verden, men også i den psyko-sosiale verdenen. En psykolog kan gi en score på hvor tilregnelig en pasient er, og en lærer måler elevens ferdigheter i ulike fag. Psykologens målinger vil gi pasienten noe informasjon om sin tilstand, men denne informasjonen gir ikke nødvendigvis mening for en som ikke er kjent med psykiske lidelser. Prøveresultatene til en elev vil gi eleven og dens foresatte informasjon om prestasjonsfremgang (eller mangel på den) i faget. Selve prøvescoren på for eksempel 26 av 40 rette gir ikke mening utenfor klasserommet. Utfordringen med psykometriske målinger er at det vi ønsker å måle ikke er fysisk. Vi kan ikke se det vi ønsker å måle, men må i stedet benytte oss av latentetrekk som prøveresultater eller muntlige forklaringer for å gi oss et mål på elevens akademiske måloppnåelser (Wu & Adams, 2007, s. 4). Foreløpig finnes det ingen standardisert måleenhet for læring, diagnostisering eller motivasjon. Utfordringen er mangfoldigheten til fenomener som læring og motivasjon (Cavanagh & Waugh, 2011, s. 3) samt mangel på klare definisjoner av konseptet vi ønsker å måle (Wu & Adams, 2007, s. 4).

De fleste prøvesituasjoner gir oss ingen uavhengig informasjon om elevenes ferdigheter. Slik som de fleste prøvene er konstruert og bearbeidet i dag, sier de noe om elevenes ferdigheter i forhold til de andre elevene i klassen, eller noe om ferdighetene i forhold til testens vanskelighetsgrad (Wright & Stone, 1979, s. xi). Hvis en ønsker å generalisere funn og resultater fra ulike prøver, må funnene være uavhengige av de som deltar i undersøkelsen. Undersøkelser i sosialvitenskapen, må dermed holde samme krav som målinger i naturvitenskapen. Utfordringen består av å gjøre om observerte prøveprestasjoner til målinger av mentale ferdigheter ved hjelp av en fornuftig enhet. Samtidig er det viktig å påpeke at dagens naturvitenskaplige enheter er så innarbeidet, at vi ofte glemmer at de er fiktive og menneskeskapt ut fra et behov for enkel sammenligning. Måleenhetene ble til ved mye prøving, feiling og kalibrering. Både vekt og temperaturmåling var en gang i tiden upresise med mange feilkilder (Bond & Fox, 2001, s. 4-7).

3.2 Målinger langs en variabel

Måling krever en ide om en variabel som vi kan lokalisere målingen på. Variabelen kan visualiseres som en rett linje, mens selve målingen kan visualiseres som et punkt på denne linjen. Linjen defineres ved å konstruere en test/prøve, der oppgavene blir definisjonen av det du ønsker å måle (Wright & Stone, 1979, s. 1). Ideen om variabelen, og dermed spørsmålene som stilles, skaffes gjerne ut fra tidligere studier og teorier om emnet. Med bakgrunn i tidligere forskning og viten, konstrueres det spørsmål i varierende vanskelighetsgrad som har til hensikt å registrere den adferden vi ønsker å måle. Det er viktig at den konstruerte undersøkelsen sjekkes på tiltenkt målgruppe for å forsikre at svarene elevene gir på oppgavene samsvarer med intensjonene. Hvis det i løpet av denne sjekken er en, eller flere, elever som svarer korrekt på de vanskelige oppgavene, men ikke på de du mente var lett, samsvarer ikke testen med intensjonene. Ingen fornuftig måling kan utledes av testen. Om dette er tilfellet, er det avgjørende for undersøkelsens videre arbeid å finne ut hvorfor teoriene ikke stemte overens med resultatene, og hvorfor elevene svarte rett på de vanskelige oppgavene, og ikke på de lette (Wright & Stone, 1979, s. 4).

Ved konstruksjon av tester og undersøkelser, er det to viktige aspekter som må klaffe, oppgavevanskeligheten og oppgavespredningen (Wright & Stone, 1979, s. 4-9). Oppgavevanskeligheten bør ligge rundt elevenes prestasjonsnivå, samtidig som det må være nok spredning på oppgavene til å kunne innhente data til alle ferdighetsnivåene i elevutvalget. Figuren under viser hva som skjer når to personer, med hvert sitt stabile prestasjonsnivå, tar 5 ulike tester som måler den samme variabelen, men som har forskjellig grad av vanskelighet og spredning. Figuren viser at de samme personene kan få en score fra mellom 0 til 8, og en differanse mellom prestasjonene fra 0 til 8, alt etter som hvordan testen er konstruert. Tester må derfor vurderes og evalueres grundig, innen de kan legges til grunn for å måle en persons ferdigheter eller evner. Når en ser hvor stor innvirkning konstrueringen av oppgavene har å si for resultatene, er det helt uforståelig hvorfor fortsatt så mange studenter, lærere og forskere er så lite opptatt av hvordan resultatene måles, når det blir puttet så mye energi og krefter i kvalitetssjekking og validering av resultatene på selve analysen (Bond & Fox, 2001, s. xvi).



Figur 2: Eksempler på hvordan testresultatene avhenger av oppgavevanskeligheten og spredningen. Hentet fra Wright & Stone 1979, s. 8

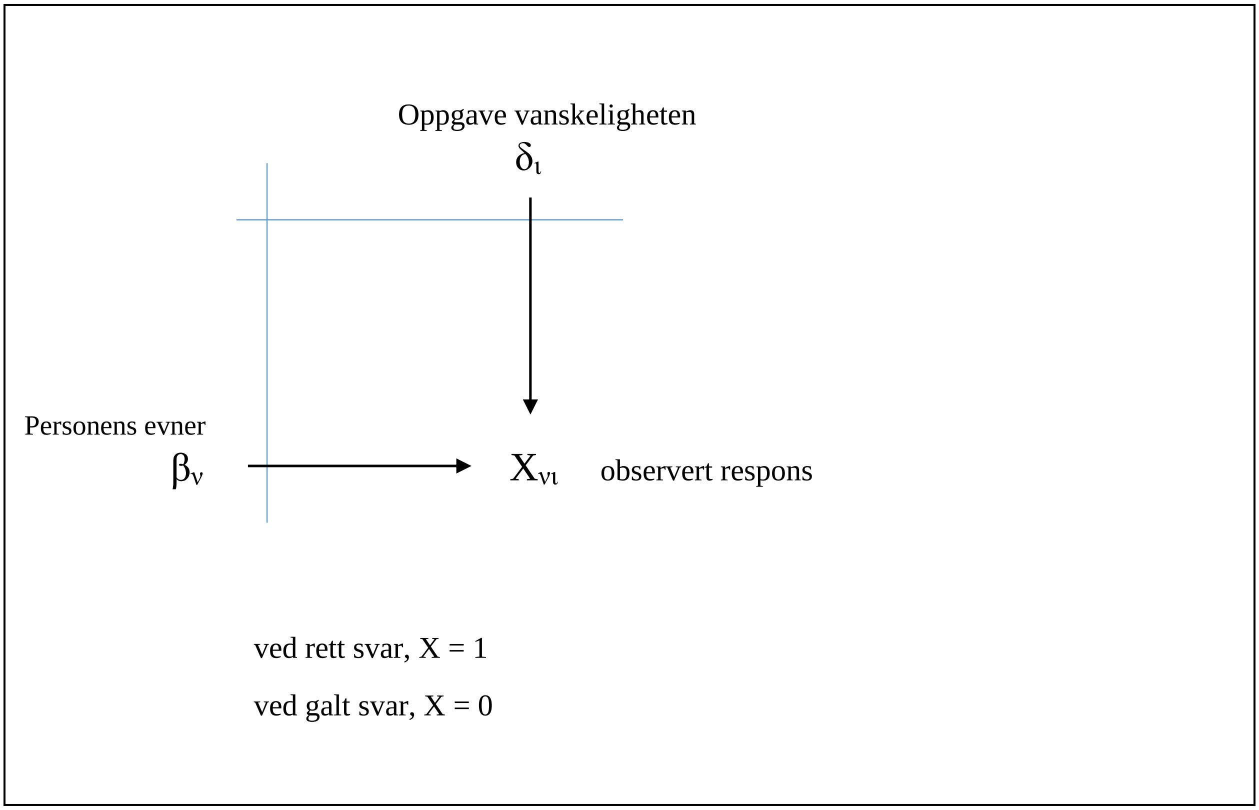
3.3 Rasch-analyse, en måte å kvalitetssjekke analyseverktøyet

Allerede på 1920-tallet argumenterte ulike forskere for at datidens målinger av intelligens og evner, bare målte fordelingen i testgruppen, ikke hvor individene befinner seg på uavhengig basis. Mange forsøkte opp gjennom årene å komme problemet til livs, men det var først på 1960-tallet at den danske matematikeren George Rasch publiserte sin Rasch-modell. Modellen måler oppgavevanskeligheten og personers kompetanse uavhengig av hverandre, men presenterer disse mål på en og samme skala (Wright & Stone, 1979, s. vii-x). Forskjellen på Rasch-analyse og klassisk testteori kan i forenklet versjon uttrykkes ved hjelp av et hverdagseksempel. Tenk deg at du skal prøve å uttrykke ulike skiløperes evner til å kjøre ned bratte bakker på ski. Variabelen vi ønsker å måle, skiløperes brattkjøringsevner, lar seg ikke måle direkte ved hjelp av et måleinstrument. Siden den ikke kan måles direkte, er evnen til å kjøre ned bratte bakker en latent variabel. Variabelen påvirkes blant annet av balanse, hurtighet og tyngdeoverføring og estimeres ut fra hvordan ulike skiløpere kjører ned bratte bakker på ski. Klassisk testteori vil i en slik situasjon uttrykke nedkjøringsevnen ut fra antall fall skiløperne har ned de ulike bakker, uten å ta hensyn til at det kan være stor forskjell på vanskelighetsgraden til de ulike bakkene. Rasch-analysen bruker de samme testresultatene som klassisk testteori. Men i stedet for å nøye seg med å telle totalscore, utfører Rasch-analysen en sannsynlighetsberegning av testresultatene og bruker disse beregningene til å måle skiløpernes ferdigheter og bakkens vanskelighet uavhengig av hverandre.

3.4 Rasch-modellen litt grundigere forklart

Alle beskrivelser og undersøkelser er en reduksjon av virkeligheten. (Bond & Fox, 2001, s. 9). Om vi fortsetter med skibakketankegangen, så kan vanskelighetsgrad på bakken både indikeres ved etablerte fargekoder, grønn, blå, rød, svart eller ved hjelp av en beskrivelse av helling, svinger, kuler osv. Begge beskrivelsesmåter, både den kvantitative og den kvalitative gjør deg i stand til å ta rett løypevalg på toppen av alpinanlegget.

Rasch-modellen bruker individuelle personers svar på testens ulike oppgaver, også kalt rådata, som grunnlag til å beskrive både oppgavens vanskelighetsgrad og personenes ferdigheter. Svarene i rådataen blir dannet på grunnlag av to hovedfaktorer, vanskeligheten på oppgaven og svarpersonens evner (Wright & Stone, 1979, s. 11-12).



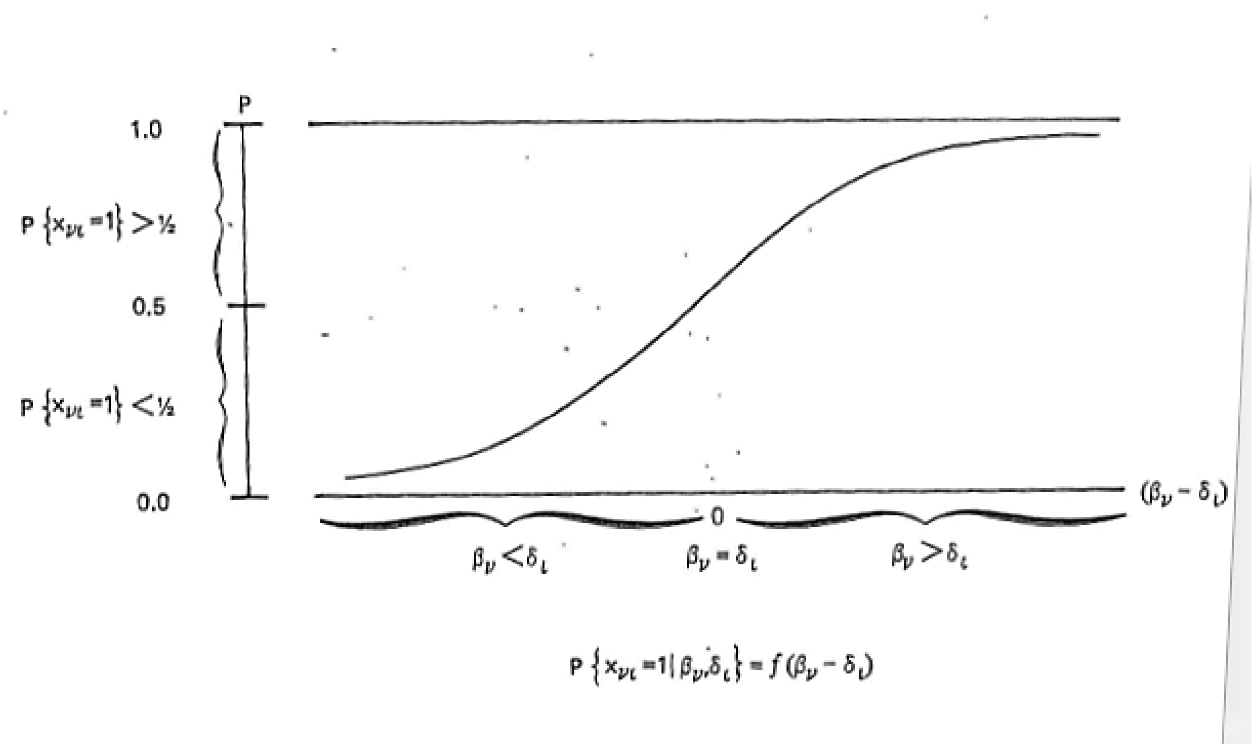
Figur 3: Svarets hovedfaktorer, hentet fra Wright & Stone 1979, s.11

Som vi ser av figur 3, interagerer personens evner med oppgavenes vanskelighetsgrad for å produsere svaralternativet. Denne interaksjonen skal munne ut som et mål på en felles variabel. Matematisk er det enklest å finne et uttrykk for denne sammenhengen gjennom differansen mellom personens evner og oppgavevanskeligheten, β_ν - δ_ι (Wright & Stone, 1979, s. 12). Ikke alle situasjoner vil kunne beskrives av denne sammenhengen. Noen ganger kan en person som har evnene til å klare oppgaven likevel komme til å svare feil, og motsatt kan en person som egentlig ikke forstår emnet, likevel klare å svare rett. Derfor blir differansen mellom β_ν og δ_ι, og dens innvirkning på svaret x beregnet ved hjelp av sannsynlighetsberegning (Wright & Stone, 1979, s. 12).

Det er tre ulike utfall av differansen β_ν - δ_ι.

1. $(\beta_\nu - \delta_\iota) > 0$, som gir P $\{x_{\nu\iota} = 1\} > 0{,}5$.
2. $(\beta_\nu - \delta_\iota) < 0$, som gir P $\{x_{\nu\iota} = 1\} < 0{,}5$
3. $(\beta_\nu - \delta_\iota) = 0$, som gir P $\{x_{\nu\iota} = 1\} = 0{,}5$

Kurven i figur 4, summerer utfallene som er beskrevet over. Kurven kan både uttrykkes som resultatet av ulike personers evner til å svare på et enkelt spørsmål i testen, og som en persons testresultater på alle spørsmålene i testen. Først nevnte alternativ har personens evne, β, som variabel og kalles ICC (item characteristic curve). Sist nevnte variant bruker oppgavevanskeligheten δ, som sin variabel og blir omtalt som PCC (person characteristic curve). Begge får formen som kurven i figur 4.



Figur 4: Utfallskurve hentet fra Wright & Stone 1979, s.14

Uttrykket (β_ν - δ_ι) er i utgangspunktet en uendelig lineær funksjon, men det er både uhåndterlig, og passer dårlig til situasjonen. Den eneste opplysningen vi har er om personen har klart oppgaven, ikke om vedkommende har klart den med uendelig stor margin. Samtidig beregner vi oddsen for at en person klarer, eller ikke klarer en gitt oppgave. Sannsynligheten for rett eller feil svar gis av $0 < P < 1$, ikke fra uendelig til uendelig. I stedet brukes det en logistisk modell for å tilpasse uttrykket til s-kurven i figur 4 og den binominale sannsynlighetsmodellen for å finne Px.

1. $\beta_\nu - \delta_\iota$ → en uendelig lineær funksjon
2. $e^{\beta\nu - \delta\iota}$ → uttrykk fra 0 til uendelig
3. $\frac{e^{\beta\nu - \delta\iota}}{1+e^{\beta\nu - \delta\iota}}$ →utrykk mellom 0 og 1
4. P $\{X_{\nu\iota} = 1|\beta_\nu, \delta_\iota\} = \frac{e^{\beta\nu - \delta\iota}}{1+e^{\beta\nu - \delta\iota}}$ → selve Rasch modellen
5. $\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta - \delta$ → ved å omskrive Rasch-modellen ser vi at avstanden mellom personens evne og oppgavevanskeligheten uttrykkes som logaritmen til sannsynligheten for at personen klarer oppgaven. Dette er også grunnen til at enheten på Rasch-skalaen blir gitt som logitenheter (Wu & Adams, 2007, s. 29).

Det er mange modeller som kunne blitt brukt til å beskrive s-kurven, men det er bare Rasch-modellen som tillater oss å estimere β_ν og δ_ι uavhengig av hverandre (Wright & Stone, 1979, s. 15). Rasch-modellen har en spesiell egenskap kalt spesifikk objektivitet, som går ut på at sammenligningen mellom to objekter er uavhengig av variablene som er brukt til å sammenligne. Dette kan vises ved å ta logg oddsene for to personer med evnene β_1 og β_2 gitt ved en oppgave med vanskelighet δ. Vi lar p_1 være sannsynligheten for at person 1 for rett svar på oppgaven, mens p_2 gir sannsynligheten for at person 2 svarer rett på oppgaven.

$$\log\left(\frac{p1}{1-p1}\right) = \beta1 - \delta$$
$$\log\left(\frac{p2}{1-p2}\right) = \beta2 - \delta$$

forskjellen mellom logg oddsene er gitt ved:

$$\log\left(\frac{p1}{1-p1}\right) - \log\left(\frac{p2}{1-p2}\right) = \beta1 - \delta - (\beta2 - \delta) = \beta_1 - \beta_2$$

Over har jeg vist at forskjellen mellom to personers evner kun er avhengig av evneparameterne, ikke av oppgaveparameterne.

Ulike Rasch-modeller

Den første modellen Rasch kom frem til på 1960-tallet, var basert på oppgaver som hadde enten rett eller galt svar. Senere er det vokst frem en hel «familie» av Rasch-modeller, til litt ulik bruk. Blant annet har Wright og Masters i senere tid videreutviklet modellen til det som i dag er mest kjent som the partial credit model (PCM), som er benyttet i denne undersøkelsen. Oppgaver som inneholder stor grad av resonnering, som mange av mine oppgaver i undersøkelsen, får gjerne mange ulike svar. Disse svarene er ofte umulig å klassifisere som enten rett eller galt, men vil være gradert i ulike grader av rett og feil. PCM åpner for muligheten til å score testresultater til flere svarkategorier som for eksempel feil, delvis korrekt og korrekt. Til forskjell fra rating scale modellen, krever PCM verken samme svarkategorier på oppgavene, eller lik avstand mellom kategoriene. Dette oppnås ved å gi hver eneste deloppgave en egen parameter. (Bond & Fox, 2015, s. 351-352).

3.5 Hvordan Rasch-modellen brukes til analyse av undersøkelsen

Rasch-modellen beregner sannsynligheten for hvert enkelt utfall på hver oppgave alle personene som deltar svarer på. Disse utfallene multipliseres for å finne et ca estimat for at hele oppgavesvar-matrisen skulle oppstå gitt at elevene er så flink, og oppgaven så vanskelig som matrisen tilsier. Ved hjelp av prøving, feiling og anvendelse av Newtons metode kommer man etter hvert frem til den mest sannsynlige modellen. Kort oppsummert, måler Rasch-analysen i hvor stor grad oppgavene passer til modellen. Disse beregningene gjøres vanligvis ved hjelp av softwareprogrammer som for eksempel QUEST, RUMM og WINSTEPS.

3.5.1 En forklaring på sammensattheten, fit-statistikker og ICCkurver.

Det er mange faktorer som påvirker tilpasningen til Rasch-modellen. For å gi et så detaljert bilde som mulig over dataenes tilpasning til Rasch-modellen, er det derfor blitt utviklet forskjellige fit-statistikker som måler ulike påvirkninger (Wu & Adams, 2007, s. 74). For å måle i hvor stor grad dataene passer til Rasch-modellen, er det benyttet infit og outfit mean-squared verdier samt Standardized fit statistics (Zstd).

Mean-square fit-verdier viser hvor mye støy eller unøyaktighet det er i målingene (Linacre, 2002). Infit dataene gir mer tyngde til personene hvis ferdighetene ligger tett på oppgave vanskeligheten, mens outfit ikke skalerer i det hele tatt. Derfor blir store misvisninger i infit dataene sett på som mer alvorlig enn ved outfit (Bond & Fox, 2015, s. 67). Mean square verdiene har en forventet verdi rundt 1. Det finnes motstridende svar i litteraturen på hvor langt unna 1 verdiene skal være for å regnes som kritiske og ikke egnet til å bruke sammen med Rasch-modellen. I denne undersøkelsen benyttes Linacre (2003) som mener verdier mellom 0,5-1,5 er produktive for bruk til Rasch-modellen.

Zstd, er en t-test som sier noe om hvor godt dataene passer til modellen. Verdier rundt 0 indikerer sannsynlige svar. Negative Zstd-verdier forteller oss at det er mindre variasjon enn forventet (for godt til å være sant). Positive Zstd-verdier forteller at det er for mange uventede svar til at modellen er sannsynlig. Zstd-verdier mellom -2 til +2 regnes som produktive for bruk i Rasch-modellen (Bond & Fox, 2015, s. 151; Linacre, 2003).

3.5.2 ICC kurver

Sammenligning mellom den forventede ICC kurven til oppgavene, og det faktiske utfallet, er en annen nyttig kilde som kan fortelle oss noe om hvor godt oppgavene passer inn i Rasch-modellen (Wu & Adams, 2007, s. 65). ICC kurven visualiserer testdeltakernes evne til å svare på et enkelt spørsmål samt den forventede ICC-kurven for oppgaven. Jo mer enhetlig kurvene er, jo bedre er oppgaven tilpasset Rasch-modellen. Winsteps har i tillegg lagt inn akseptabel variasjonsgrense i form av en svart/grå linje som ligger 1,96 standardavvik vertikalt unna den forventende ICC-kurven. Om det er elevgrupper som havner utenfor denne linjen, er det en indikator på dårlig tilpasning til modellen. For eksempler på gode og dårlige ICC-kuver, se appendiks 1.

3.5.3 Viktigheten av endimensjonalitet

Som nevnt tidligere i kapitlet, forutsetter Rasch-analysen at dataene påvirkes av en enkelt variabel. Viktigheten av endimensjonalitet kan illustreres ved hjelp av Galileos første forøk på å måle temperatur. I starten brukte han et termometer som var åpent til atmosfæren, og som derfor ble påvirket av både temperaturen og lufttrykket. Når måleinstrumentet indikerte en temperaturendring, visste man aldri om det var på grunn av temperaturendringer, på grunn av lufttrykkendringer, eller på grunn av en kombinasjon av de to. Resultatet ble svært varierende målinger, av forholdsvis like situasjoner (Bond & Fox, 2015, s. 40). Samtidig er det viktig å understreke at selv om variabelen visualiseres med en dimensjon som en rett linje, betyr det ikke at Rasch-analyse kun kan måle en konkret egenskap som for eksempel bruken av standardalgoritmen i divisjon. Men modellen forutsetter at vi måler samme egenskapen gjennom hele undersøkelsen. For eksempel så er det vanlig å se på IKTkunnskaper og matematikkunnskaper som to forskjellige latente variabler. En elev med gode IKTferdigheter, er ikke nødvendigvis flink i matematikk. Likevel kan man fint lage en undersøkelse som måler elevers geometriferdigheter i Geogebra endimensjonalt. Dette fordi undersøkelsen kombinerer de samme ferdigheter gjennom hele testen. Testens variabel trenger med andre ord ikke å korrespondere med gitte trekk eller evner, de kan konstrueres vilkårlig så lenge man er konsekvent gjennom hele undersøkelsen (Wu & Adams, 2007, s. 21-22).

3.5.4 Principal component analysis of residuales (PCA), endimensjonalitetens vokter.

Ut fra forrige delkapittel, er det slett ingen tvil om viktigheten av endimensjonalitet i analyseverktøyet. Winsteps har en egen analyse for indikasjon av flerdimensjonalitet kalt principal component analysis of residuales (PCA). Denne identifiserer om det finnes mønster i dataen som ikke stemmer overens med Rasch-modellen. Når dette er tilfellet, tyder det på at disse oppgavene har noe mer tilfelles enn den latente variabelen (Sjaastad, 2014). Dimensjonalitetsberegningen gjøres ved hjelp av faktoranalyse, en metode som ikke er umiddelbart forenelig med tankegangen i Rasch-analysen. Det er derfor viktig at de eventuelle avdekkede dimensjoner blir sjekket og vurdert, helst ved hjelp av teoretisk støtte før det avgjøres om betydningene av dimensjonene er så avgjørende at de bør tas ut av undersøkelsen, og få sin egen dedikerte undersøkelse (Bond & Fox, 2015, s. 284-286).

3.6 Rasch-analyse og ulike vurderingsformer

Tester og undersøkelser kan brukes til ulike formål. De vanligste formål er å diagnostisere, kartlegge måloppnåelse, måling av potensiale og evner samt identifisere ferdighetsnivå i forbindelse med fremtidig undervisning. I tillegg til noe annerledes innhold i testen, har testformålet stor betydning for når i forløpet den gis, før, mens eller etter gjennomgått pensum (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 481). Rasch-analyse kan brukes til alle de nevnte formålene, og gjerne i en kombinasjon. Det er for eksempel hensiktsmessig å diagnostisere hvor stor andel av elevene som hovedsakelig tenker additivt samtidig som man kartlegger elevenes evner i proporsjonal resonnering for å legge opp videre undervisning samt kunne gi målrettede tilbakemeldinger til eleven om de neste stegene i læringslandskapet. Den store fordelen med Rasch-analyse er at man får helt konkrete tall som sammenligner oppgavevanskeligheten, oppgavespredningen samt hvordan elevene ligger an i forhold til dette. Du får med andre ord mye mer informasjon og dermed konkrete tilbakemeldinger enn man får ved å benytte klassisk testteori. Å kunne gi presise målrettede tilbakemeldinger som eleven forstår, er en viktig forutsetning for å få til en tilbakemelding som er formativ for eleven (Wiliam, 2011, s. 120-122). Formativ vurdering er det grepet som har den største positive innvirkningen på elevenes læring (Wiliam, 2011, s. 27).

4. Metode

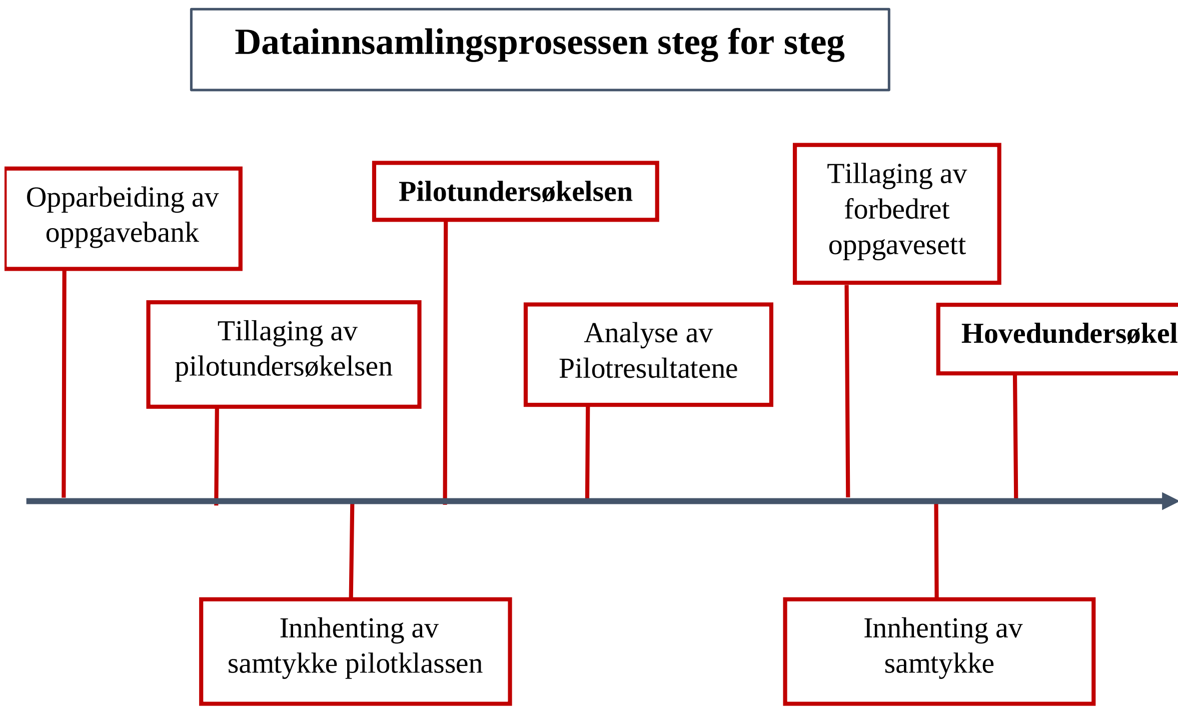
Det er allerede viet et eget kapitel til måleteori og Rasch-analyse, valg av metode er dermed både introdusert og forklart. Det blir likevel viet litt plass i starten av dette kapitlet til å begrunne hvorfor det var Rasch-analyse som ble valgt, før beskrivelsen av oppgavevalg, datainnsamlingen og tilslutt bearbeidingsprosessen. Oppgavesettet sin validitet og reliabilitet, gir et svar på om det lar seg gjøre å lage et endimensjonalt oppgavesett, og dermed svar på første problemstilling. Validiteten og reliabliteten vil derfor bli gjennomgått grundig i analyse kapitlet.

4.1 Valg av metode

I denne undersøkelsen brukes Rasch-analyse for å finne svar på problemstillingene. Rasch-analyse ble valgt da denne metoden fokuserer på å måle i hvor stor grad oppgavene passer til modellen. Den ikke så veldig ulike item respons theory (IRT) fokuserer omvendt, og manipulerer parameterne for å finne en modell som beskriver dataene best mulig (Bond & Fox, 2015, s. 301-306). Som nevnt finnes det en hel familie av ulike Rasch-modeller. Denne undersøkelsen består av mange ulike typer spørsmål. Noen er lukket med entydige svar som enten er rett eller galt. Andre er åpne, med mange ulike nyanser av svaralternativer og dermed ulike score kategorier. Å redusere alle spørsmålene til noe en kan tolke som enten rett eller galt, fjerner resonneringen og åpenheten fra oppgaven. Tilpasning til at alle oppgavene passer inn i en gitt scorestige, tar på den andre siden bort muligheten til å teste hele oppgavespekteret, og de fleste enkleste oppgavene. Begge de sist nevnte alternativene fører til et smalt oppgavesett som mest sannsynlig ikke ville vært til hjelp med å finne fellesnevneren til proporsjonal resonnering sin mangfoldighet. Det var derfor aldri noen tvil om at det var the partial credit model (PCM) som burde bli benyttet i denne analysen. PCM gir muligheten til å dele inn svarene i ulike score kategorier, alt etter hva som er hensiktsmessig til hver enkelt oppgave.

4.2 Det store krukset, valg av oppgaver

Når man klatrer et fjell, kalles det vanskeligste punktet på ruten, og dermed det avgjørende punktet for om man kommer seg opp, for krukset. Denne masteroppgaven har også et kruks, valg av oppgaver som belyser proporsjonal resonnering på et endimensjonalt vis. Ut fra teoridelen kommer det tydelig frem at det er mange hensyn å ta. For det første er teorien ikke entydig på hva som omfatter proporsjonal resonnering. Den andre store utfordringen lå i hvordan mangfoldet i emnet proporsjonalitet, som ulike matematiske emner og ulike oppgavetyper, kunne inkluderes samtidig som Rasch-analysens behov for endimensjonalitet blir ivaretatt. For å sikre et best mulig resultat, er det som nevnt brukt ulike teorier om oppgaveoppbygning og oppgavestruktur som er beskrevet i teorikapitlet. Det ble i tillegg gjennomført en pilotundersøkelse for å sjekke hvordan det første oppgave valget svarte til forventingene.



Figur 5: Visualisering av datainnsamlingsprosessen

4.3 Erfaringer fra piloten

Oppgavene som ble valgt ut til piloten, bestod av en jevn fordeling av de tre oppgavetypene manglende verdi, sammenligning og redegjøring. Denne utvelgelsen ble kombinert med at oppgavene skulle fordele seg mest mulig likt på de tre høyeste kognitive krav, matematisk tenkning, oppgaver med forbindelser og oppgaver uten forbindelser. Det ble også tatt med noen få oppgaver i kategorien utenatlæring. Oppgavesettet hadde i tillegg med både forkunnskaper som likeverdige bøker og evnen til å tenke multiplikativt, oppgaver om forholdstall samt en oppgave som ikke var proporsjonal for å teste om elevene kunne skille proporsjonale situasjoner fra de som ikke er proporsjonale. Piloten bestod av 18 oppgaver som totalt telte 35 delspørsmål og ble gjennomført i en tiende klasse på en 1.-10. skole i en mellomstor by. Det var 16 elever som samtykket til at jeg kunne bruke deres besvarelser i min masterundersøkelse.

Rasch-analysen av de 16 pilotbesvarelsene viste at det ble favnet for bredt i oppgaveutvalget. Den ikke proporsjonale oppgaven fikk en outfit MnSq på 9,9(!) og datt derfor klart utenfor målestokken. Saftblandingsoppgaven, og oppgaven om forholdstall, hadde svært dårlige ICC kurver. I tillegg hadde forholdstall oppgaven dårlige fit-tall, infit MnSq på 2,18, outfit MnSq på 2,3. Saftblandingsoppgaven hadde en uheldig tallkombinasjon der additiv tenkning også førte frem til rett svar, og ble derfor endret til nye tallverdier som ikke hadde denne sammenstillingen. Under rettingen var det tydelig at flere av oppgavene om forholdstall var misforstått. Grunnet både dårlige fit-statistikker og at oppgavene er litt ved siden av hovedtemaet proporsjonal resonnering, ble det besluttet å ta hele oppgavekategorien forholdstall ut av oppgavesettet. Dette medførte at utenatlæringsoppgaven ble fjernet, noe som var like greit da det ikke var en eneste elev som klarte å svare rett på den. Oppgaven med likeverdige brøker passet derimot inn i modellen. Selv om disse var de eneste forkunnskapsoppgavene som «overlevde», ble de tatt med videre til hovedundersøkelsen. Hovedgrunnen for dette valget var at disse oppgavene virket som kjente og trygge oppgaver for elevene, som ellers hadde mye nytt og ukjent å forholde seg til.

Pilotbesvarelsene var ikke særlig informative med hensyn til tankegang og fremgangsmetode. I hovedundersøkelsen ble det derfor laget egne deloppgaver der elevene skulle gjøre rede for og begrunne sine fremgangsmetoder. Under pilotundersøkelsen, la jeg merke til at en del elever hadde lange øyne til sidemannen, samt at en del ikke klarte å bli ferdig eller gikk lei. For å både hindre titting til sidemann og forsikre meg om at alle oppgavene skulle få mest mulig lik sjanse til å bli besvart, ble det laget to oppgavesett. Settene innehold nøyaktig de samme oppgavene, men rekkefølgen var endret slik at de oppgavene som var fremst i det ene settet havnet bakerst i det andre. Den endelige oppgavesammensetningen bestod av 15 oppgaver med totalt 33 delspørsmål. Hele det endelige oppgaveheftet finnes i appendiks 2. Tabell med oversikten over hvor oppgavene er hentet fra, er å finne i appendiks 3.

4.4 Datainnsamlingsprosessen

Selve undersøkelsen ble utført på tiende trinn ved en 8.-10. skole i en storby i Norge. I følge min kontakt på trinnet scoret skolen under gjennomsnittet på nasjonale prøver, men hadde et kjempe godt skolemiljø. Etter samtale med skolen om hvordan selve undersøkelsen skulle gjennomføres, ble vi enige om at det skulle være et krav fra skolen at alle elevene tok undersøkelsen. Til gjengjeld var det frivillig om resultatet fra undersøkelsen kunne brukes til min masteroppgave. Dette gjorde vi for å sikre at ingen elever nektet å være med for å slippe arbeid. Siden undersøkelsen foregikk på tiende trinn, var de aller fleste elevene blitt 15 år, og dermed gamle nok til å kunne samtykke selv om deres svar kunne brukes av meg eller ikke. For meg som forsker, var det likevel viktig å opplyse foresatte om undersøkelsen og få deres samtykke til at barnas bidrag kunne brukes i min undersøkelse. Muligheten til at elevene kunne samtykke selv, førte likevel til mye større deltakelse enn hvis jeg bare skulle ha basert meg på samtykkeskjema fra hjemmet. Samtykkeskjemaet ligger vedlagt i appendiks 4. Selve datainnsamlingen ble gjort dagen etter mattetentamen, og elevenes motivasjon var merkbart på virket av dette. Det var 93 elever som tok undersøkelsen, hvor av 68 elever samtykket til at jeg kunne bruke besvarelsene deres i min undersøkelse.

4.4.1 Bearbeiding av materialet

Alle besvarelsene ble samlet inn etter gjennomførelsen av undersøkelsen for deretter å bli sortert i to bunker, de besvarelsene som kunne brukes til undersøkelsen, og de som skulle makuleres. Før rettingen ble påbegynt, ble det laget en rette mal med forskjellige krav til besvarelsene for å oppnå de ulike poengsummene. Rettemalen er å finne i appendiks 5. Alle besvarelsene ble rangert i stigende rekkefølge med kode 0 for feilsvar/fremgangsmetode, og 1-3 for delvis og rett svar. Noen oppgaver hadde 1 som maksscore, andre 3, mens de fleste hadde 2 som maksimal måloppnåelse. Jo flere kategorier oppgavene ble delt inn i, jo mer informasjon får Rasch-analysen. Samtidig har de fleste oppgavene en naturlig begrensning på antall meningsfulle inndelingskategorier som viser en markant forskjell i elevenes måloppnåelse (Bond & Fox, 2015, s. 141). Antall score kategorier er med på å avgjøre hvor mye oppgaven teller i totalbildet Rasch-analysen presenterer. Antall klassifiseringer bør derfor henge sammen med diskrimineringsegenskapene til oppgaven, og ikke bare mulige inndelinger (Wu & Adams, 2007, s. 68-69). I tillegg til de nevnte kodene, 0-3, brukte jeg kodene 9 og i. Førstnevnte markerer de oppgavene som elevene ikke svarte på, og som jeg dermed ikke har data på. Sistnevnte, koden i, ble puttet på de oppgavene der mange ikke viste utregning, eller brukte feil utregning og likevel fikk rett svar. Oppgavene som er kodet med i, ble rettet en ekstra gang, men på i-scoringen er det bare elevene som viser utregningen sin, og som resonnerer og tenker rett matematisk som får uttelling.

Rettemalen ble noe justert under rettingen hvis det dukket opp uventede svar som ikke kunne plasseres i en opprinnelig kategori. Et godt eksempel på dette er oppgave 5, der elevene skulle forklare hva som skjedde med omkretsen til et kvadrat om man doblet sidelengdene. I utgangspunktet hadde jeg satt 2p som maks score. Et poeng ble gitt til de elevene som svarte ved å teste noen få tilfeldig valgte eksempel og konkludere ut fra dette, bevis av typen naiv empirisme (Balacheff, 1988). Klarte elevene derimot å argumentere ved hjelp av et generisk eksempel, jamfør Balacheff (1988), var det tanken at de skulle få 2p. Så dukket det plutselig opp mange besvarelser som sa at omkretsen ble større. Svaret er ikke direkte feil, men svært upresist. Likevel er bitte litt rett en form for rett det også. Dermed ble den opprinnelige skalaen flyttet et hakk opp, mens påstanden om at omkretsen blir større ga 1p.

En viktig del av undersøkelsen er å finne en endimensjonal variabel som beskriver proporsjonal resonnering. Jo mer data som blir behandlet per oppgave, jo bedre grunnlag har Rasch-modellen til å vurdere oppgavenes evne til å måle proporsjonal resonnering. Derfor ble pilotbesvarelsene til oppgavene som ble overført til hovedundersøkelsen tatt med i oppgave analyseringen og evalueringen. Kode 8 ble opprettet for å markere de oppgavene pilotelevene ikke fikk utdelt.

Alle scorene, rådataen, ble samlet i et Excel ark som dannet grunnlaget for innputtet til Rasch-analysen. I tillegg ble Excel arket brukt til å indikere antall rette svar per oppgave, antall elever som oppnådde maksscore, samt bemerke besvarelser med additiv tankegang.

4.5 Validitet

Validitet er en av forskningens grunnpilarer, da ugyldige forskningsresultater er verdiløse. Hvordan validitet håndteres og diskuteres, varier ut fra valg av forskningsmetode og vitenskapssyn (Cohen mfl., 2011, s. 179). Jeg har hovedsakelig brukt en kvantitativ metode, Rasch-analyse, som har tilhørende statistikker og analysemetoder som sier noe om validiteten til datamaterialet. Verdier som kom ut av disse målingene, blir presentert i neste kapittel. Før jeg går løs på sistnevnte, bør det understrekes at det også er gjort et kvalitativt arbeid i denne undersøkelsen i form av mine vurderinger av elevbesvarelsene. Under rettingen ble elevbesvarelsene rangert etter graden av forståelse jeg oppfattet ut fra det elevene uttrykket gjennom sine svar. Denne prosessen blir derfor påvirket av mine og elevene sine holdninger til oppgavene og hva som kjennetegner rett svar. Derfor vil denne prosessen aldri bli hundre prosent objektiv (Cohen mfl., 2011, s. 180-181). Til grunne for rettingen ligger det et sosiokonstruktivistisk læringssyn med vekt på å forklare og begrunne valg og fremgangsmetoder, samt den tidligere nevnte rettemalen som kan finnes i appendiks 5.

5. Analyse

Formålet med denne oppgaven er to delt. Første problemstilling konsentrerer seg om å finne oppgaver som passer inn i den endimensjonale variabelen proporsjonal resonnering. I starten av dette avsnittet vil jeg se på i hvor stor grad de ulike fit-statistikker mener undersøkelsen har lyktes med å finne en endimensjonal variabel. Den andre problemstillingen, å finne felles trekk for oppgavene jeg fant i første del, utgjør siste del av analysen. Her sees det nærmere på hvilken oppgavebredde de valgte oppgaven dekker, hva oppgavene måler samt hva som kjennetegner forskjellen på vanskelighetsgraden til oppgavene som beskriver den latente variabelen proporsjonal resonnering.

5.1 Tilpasningen av innsamlet data til Rasch-modellen

Som nevnt i kapittelet om måleteori og Rasch-analyse, fines det mange ulike former for fit-statistikker som til sammen prøver å belyse hvor godt datamaterialet passer til modellen. I de påfølgende avsnitt vil det bli foretatt en grundig gjennomgang av de ulike fit-statistikker for å se hvilke oppgaver som egner seg til å bruke for å definere den endimensjonale variabelen proporsjonal resonnering. Det legges frem en samlet vurdering på hvilke oppgaver som tas med videre, og hvilke som ikke ser ut til å passe inn. Her er det viktig å ha i bakhodet at ingen empirisk data noen sinne vil kunne nå Rasch-modellens teoretiske ideal (Bond & Fox, 2015, s. 266). Fit-statistikkene forteller oss i hvor stor grad dataen følger den matematiske formuleringen av Rasch-modellen. Spørsmålet er om fit-statistikkene kommer tett nok på til å understøtte kravet til at målingene følger Rasch-modellen i tilstrekkelig grad.

Allerede under rettingen av besvarelsene, begynte det å danne seg noen tegn på hva tilpasningsgraden til Rasch-analysen kom til å avdekke. Oppgave 14 ble ikke løst som tenkt, og noen deloppgaver var rett og slett for vanskelige. Rådataene viste at ingen av de totalt 84 elevene klarte å få fullscore på oppgave 6b og 14i. Maksscoren til disse oppgavene har derfor ikke noen informasjon å gi analysesoftwaren, og blir dermed ikke tatt med i beregningene gjort av analyseprogrammet. Software programmet Winsteps ble brukt til selve analysen av dataene.

5.1.1 Ulike Fit-statestikker

Tabellen nedenfor oppsummerer de ulike fit-statistikkene som ble gjennomgått i kapitlet om måleteori og Rasch-analyse.

oppgave nr	oppgave type	Kognitive krav	Logit	infit MNSQ	outfit MNSQ	infit Zstd
6b	resonnering	matematisk tenkning	3,18	0,61	0,33	-1,3
4b	sammenligning	matematisk tenkning	2,64	1,5	2,08	1,3
11b	resonnering	med forbindelser	2,25	1,42	1,45	1,6
10k	resonnering	matematisk tenkning	2,17	1,38	1,52	1,3
6a	manglende verdi	med forbindelser	2,06	0,55	0,3	-2,2
5	sammenligning	matematisk tenkning	1,89	1,4	1,5	1,9
15b	resonnering	med forbindelser	1,84	0,67	0,53	-2,1
11ai	resonnering	med forbindelser	1,6	0,86	0,78	-0,9
10j	resonnering	med forbindelser	1,36	0,91	0,91	-0,4
15a	manglende verdi	uten forbindelser	1,2	0,78	0,65	-1,6
9	sammenligning	med forbindelser	1	1,4	1,58	2,1
13a	manglende verdi	med forbindelser	0,88	0,69	0,51	-1,9
13c	manglende verdi	med forbindelser	0,87	0,74	0,69	-1,3
13b	manglende verdi	med forbindelser	0,77	0,64	0,51	-2,1
11c	sammenligning	med forbindelser	0,76	0,96	1,01	-0,3
3	sammenligning	med forbindelser	0,69	1	0,96	0,1
11a	sammenligning	med forbindelser	0,53	1,11	1,07	0,9
12	manglende verdi	uten forbindelser	0,36	0,99	0,9	-0,1
7i	resonnering	med forbindelser	0,24	0,81	0,71	-1,6
8	sammenligning	med forbindelser	0,13	1,05	0,97	0,4
14	sammenligning	med forbindelser	-0,15	1,65	2,15	3,6
7	manglende verdi	uten forbindelser	-0,76	0,91	0,93	-0,5
4a	sammenligning	uten forbindelser	-1,19	0,97	0,78	-0,1
10f	manglende verdi	uten forbindelser	-1,27	0,99	1,47	0,1
10e	manglende verdi	uten forbindelser	-2,04	0,99	1,32	0,1
10b	manglende verdi	uten forbindelser	-2,11	1,01	1,39	0,1
10c	manglende verdi	uten forbindelser	-2,33	0,82	0,44	-0,5
10d	manglende verdi	uten forbindelser	-2,9	1,23	1,32	0,7
10g	manglende verdi	uten forbindelser	-3,11	1,14	3,39	0,5
10h	manglende verdi	uten forbindelser	-3,11	0,9	0,95	-0,1
10i	manglende verdi	uten forbindelser	-3,42	1,01	2,38	0,2
10a	manglende verdi	uten forbindelser	-4,06	0,54	0,06	-0,7

<-2,0= for gode tilå være realistisk
>+2,0 =for uregelmessig
<0,5=for gode til å være realistiske
>1,5= for uregelmessig

Figur 6:Oversikt over de ulike fit-verdiene til oppgavene med kritiske verdier uthevet i ulike fargekoder

En observant leser vil kanskje merke seg at tabellen oven verken har med oppgave 1 eller 2. De to første spørsmålene spurte om definisjonen av ordene proporsjonalitet og forholdstall. Selv om dette ikke ga utslag som en annen kunnskap enn den etterspurte latente variabelen, passet ikke disse spørsmålene inn i noen av underkategoriene. De var mer tiltenkt som bakgrunnsinformasjon, ikke som en del av måleinstrumentet, og er derfor ikke tatt med i analysen.

Som fremgår av figur 6, er det 6 oppgaver som har for høye mean square verdier, oppgave 4b, 9 10g, 10i, 10k og 14. Utslag på disse verdiene indikerer at det er for mye unøyaktighet i målingene til at de er helt til å stole på, de er undertilpasset modellen. Oppgave 14 slår ut på både infit, outfit og får utslag på for store Zstd verdier, den passer rett og slett ikke særlig godt til modellen. Oppgave 10g og 10i får kraftige utslag på outfit verdiene sine. Tabellen viser også at oppgave 4b, 9 og 10k får for høy outfit Mean Square verdi. De passer ikke godt til modellen sett alle svarobservasjoner under ett, uten skalering. Det er i tillegg tre oppgaver som har for gode Zstd verdier til å kunne regnes som realistiske målinger, oppgave 6a, 13a, og 15b. Jeg har også tre oppgaver med for lave outfit mean square verdier, 10a, 10c, 6a og 6b. Disse oppgavene er overtilpasset modellen. Over- og undertilpasning til modellen har to forskjellige betydninger for målingene (Bond & Fox, 2015, s. 271). Oppgavene som er overtilpasset kan føre til den tro at dataene passet bedre til modellen enn de i virkeligheten gjorde, de kan gi falsk overbevisning om at dataene er mer valide enn de i virkeligheten er. Undertilpassining av oppgaver kan være en indikator på at oppgavene ikke måler den tiltenkte latente variabelen, og bør gås etter i sømmene for å sjekke hva som blir målt og ikke. For å hjelpe til i den endelige avgjørelsen, samt bekrefte eller avkrefte oppgavenes dårlige tilpasning, ble det tatt en gjennomgang av ICC kurvene til alle oppgavene.

Oppgave 14 sin ICC kurve er formet som en positiv parabel. Dette betyr at det er mange elever som ikke presterte særlig godt fikk til denne oppgaven. Elevene midt på treet sleit med den, mens de flinkeste elevene fikk den til. Dette tyder på at oppgaven ikke klare å skille elevene fra hverandre, og dermed er dårlig egnet til å definere proporsjonal resonnering. ICC kurven til oppgave 7 var heller ikke som ventet. Her fordelte de fleste svarobservasjonene seg langs s-kurven, men det var flere av de lavest presterende som fikk full score på denne oppgaven. Noe med denne oppgaven gjør den altså ikke i stand til å skille mellom ytterendene av skalaen.

5.1.2 Seleksjonsprosessen

Som nevnt, bør ikke de ulike fit-statistikker og grenseverdier være det som avgjør hvilke oppgaver som skal ut av undersøkelsen. De gir en pekepinn på hvilke oppgaver det bør sees nærmere på, før den endelige avgjørelsen tas. Oppgave 14 kom med i oppgavesettet i siste liten, og ble ikke testet i piloten. Bakgrunnen for at oppgaven kom med, var å ha en sammenligningsoppgave i emnet geometri. Tanken bak oppgaven var god, men tallene var dessverre dårlig valgt. En additiv tankegang der elevene fant ut at differansen mellom sidene var minst i rektangel B, førte dessverre frem til rett svar. Denne problemstillingen dukket opp i forbindelse med flere av sammenligningsoppgavene. Hvordan gjøre tallene så vanskelig at elevene må vise en utregning (eliminere de som gjetter), uten at tallene blir for vanskelige og uten at additive fremgangsmåter også fører frem til rett svar. Oppgave 14 var også den eneste som havnet langt bak i begge oppgavesettene, og ble derfor alltid løst av slitne og leie elever. Mange kom heller aldri så langt at de så på oppgaven. Varsellampene lyste på alle statistikker og undersøkelser knyttet til denne oppgaven. Kort oppsummert er det mye som ikke stemmer med den. Det som kan være spennende å merke seg, er at så og si alle elever som prøvde seg på oppgaven, tenkte additivt. Ingen viste rett fremgangsmåte på oppgaven, selv om det var mange som resonnerte multiplikativt på saftoppgavene som er svært like, men i en annen type omverdensproblemsetning. Oppgaven burde blitt rangert som vanskelig, men grunnet manglende informasjon kom den langt ned på skalaen. Den måler med andre ord absolutt ikke det den skal, og blir tatt ut av analysen.

Outfit verdiene til oppgave 4b, 10k og 9 var bare så vidt utenfor maksgrensene. Derfor ble den eller de to minst sannsynlige svarobservasjonen fjernet fra disse oppgavene. Da det ble kjørt en ny fit-måling, havnet alle disse oppgavene godt innenfor grenseverdiene. Oppgavene beholdes derfor i analysen.

Oppgave 7 hadde noen få elever som fikk til denne oppgaven, som egentlig ikke burde ha fått den til. Oppgave 7i er samme oppgaven, men her har elevene fått score for rett utregning. De som gjettet eller så til sidemannen på dette svaret, ble derfor eliminert. Siden oppgavene viser nesten lik kompetanse, ble oppgave 7 fjernet fra analysen slik at all informasjon om denne ferdigheten ble basert på svarene til oppgave 7i.

Responsanalysen til Winsteps viste at det var mange svært usannsynlige svarobservasjoner rundt tier oppgavene. Disse oppgavene er i tillegg svært tallrike og like. Siden noen av tier oppgavene gjerne kunne fjernes, og 10g og 10i hadde dårlige fit-statistikker, ble de nevnte oppgavene tatt ut av analysen.

5.1.3 Endimensjonalitet

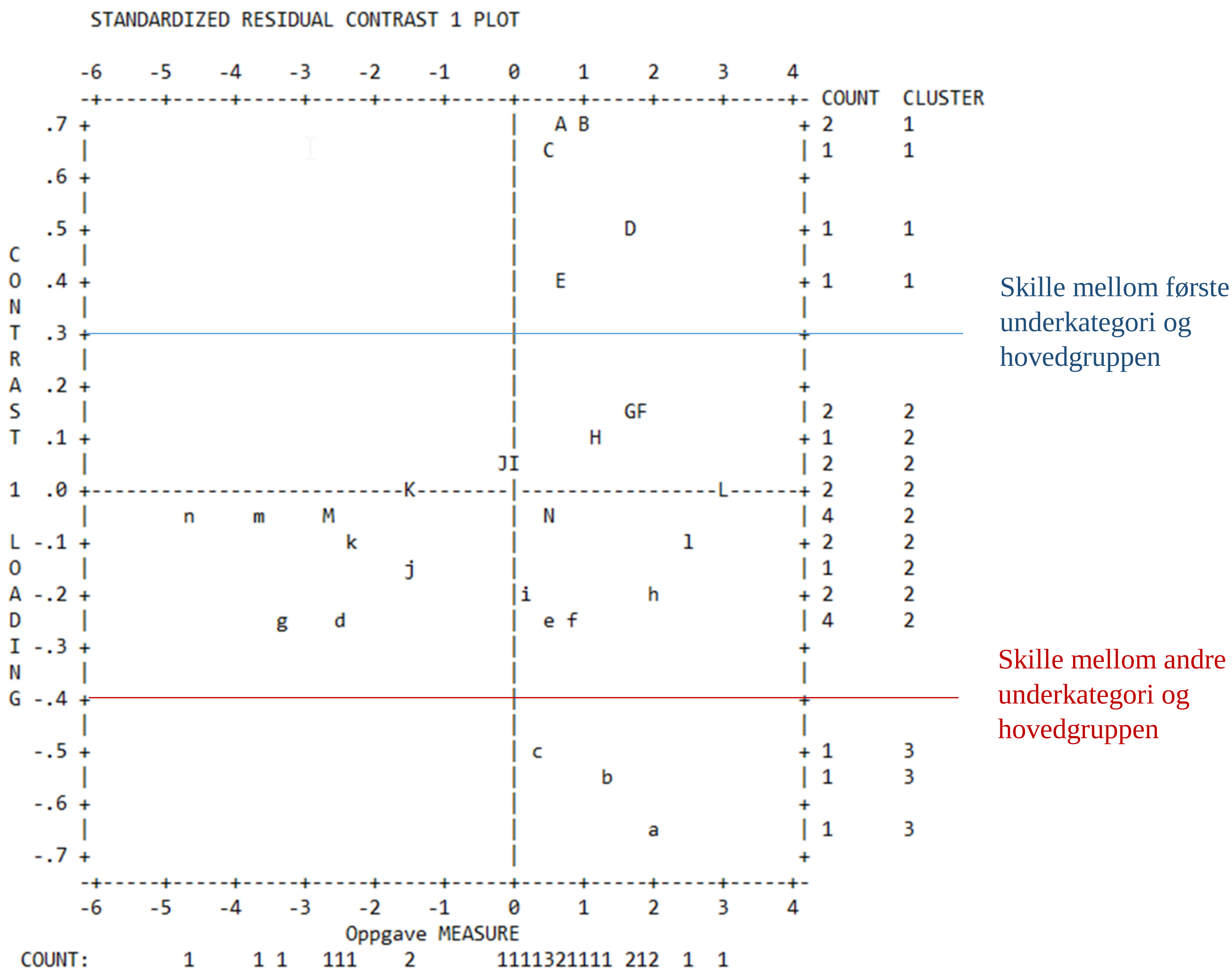
Hittil har vi sett på ulike fit-statistikker for å avgjøre hvor godt dataene passer til modellen. Men det gjenstår å se på selve hovedkravet for Rasch-modellen, endimensjonalitet. Skal Rasch-modellen kunne brukes til å analysere dataen, krever den at det er en endimensjonal, latent variabel som måles (Bond & Fox, 2015, s. 284). Selv om fit-statistikkene nå er gode, er ikke dataen valid om de ikke måler en latent variabel, i dette tilfellet proporsjonal resonnering. Gode fit-statistikker kan oppnås på en undersøkelse som avhenger av mange ulike ferdigheter som for eksempel leseferdigheter, konsentrasjon, ulike matematiske ferdigheter og lignende.

Table of STANDARDIZED RESIDUAL variance in Eigenvalue units = Oppgave information units

		Eigenvalue	Observed		Expected
Total raw variance in observations	=	63.6669	100.0%		100.0%
Raw variance explained by measures	=	35.6669	56.0%		55.9%
Raw variance explained by persons	=	16.5295	26.0%		25.9%
Raw Variance explained by items	=	19.1373	30.1%		30.0%
Raw unexplained variance (total)	=	28.0000	44.0%	100.0%	44.1%
Unexplned variance in 1st contrast	=	3.2189	5.1%	11.5%	
Unexplned variance in 2nd contrast	=	2.3271	3.7%	8.3%	
Unexplned variance in 3rd contrast	=	2.0964	3.3%	7.5%	
Unexplned variance in 4th contrast	=	1.8684	2.9%	6.7%	
Unexplned variance in 5th contrast	=	1.7493	2.7%	6.2%	

Figur 7: dimensjonsoversikt, første del av tabell 23.0 i Winsteps.

Tabellen forteller at 56% av avviket som finnes i datasettet kan forklares ut fra Rasch-målinger. 44% er avvik som ikke kan forklares av målinger. Av disse kan 5,1% forklares av den første underdimensjonen. Eigenvalue verdier over 2 indikerer en ny dimensjon (Linacre, 2017). Dette datasettet har en eigenvalue i første kontrast på 3.22, altså er det en stor sannsynlighet for at de oppgavene som tilhører den først kontrasten kan ha en felles sammenheng som skaper en ny dimensjon.



Figur 8: Fordeling av oppgavene på de ulike undergruppene, hentet fra tabell 23.1 i Winsteps. Den blå streken indikerer skille mellom første underkategori og hovedoppgavebolken. Skillet mellom den andre underkategorien og hovedgruppen av oppgavene, vises ved hjelp av den røde streken.

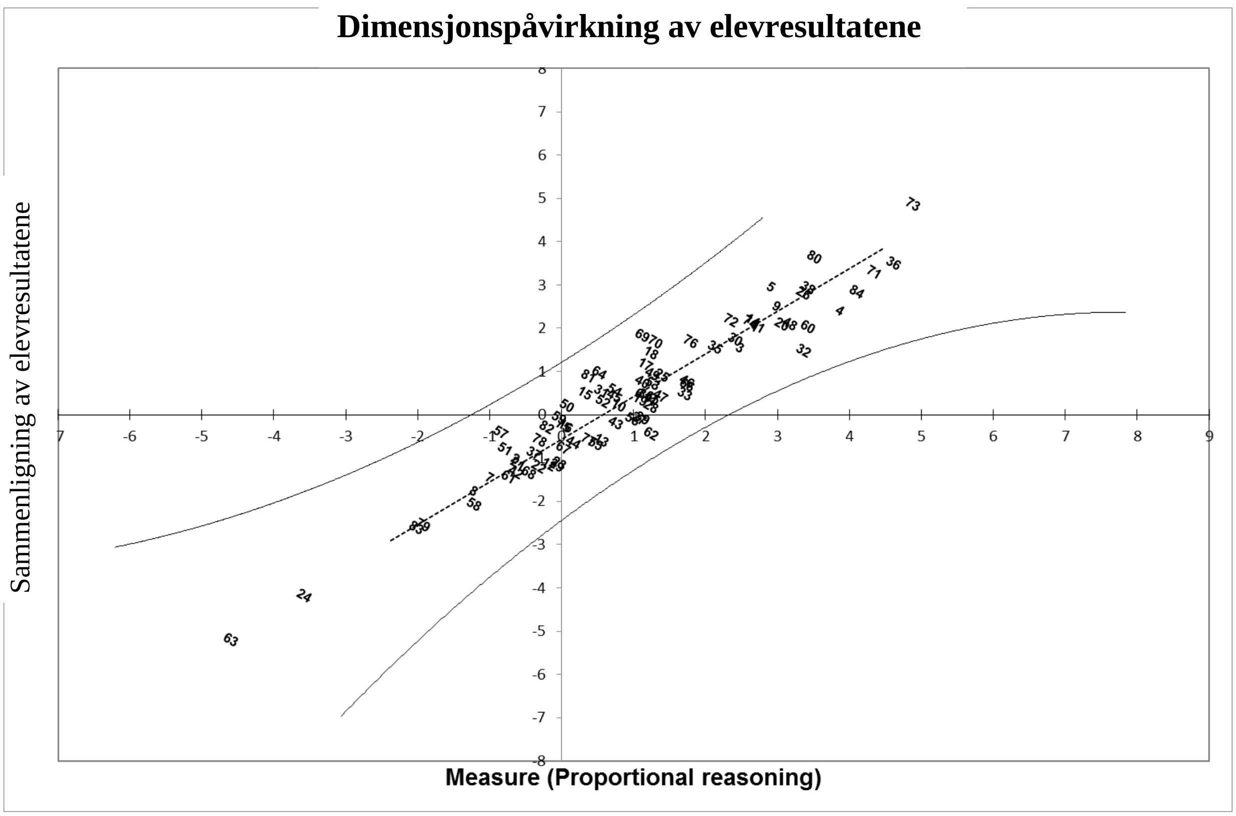
logit score	Oppgavenr. Rangert etter scoret vanskelighetsgrad av rasch analyse	Type Oppgave bassert på Lamon 2012 sin inndeling + kaegorien redegjøring	Hvilken av Smith m.fl. (2009) sine kognitive krav	Antall ord som må leses	Matematisk emne
2,98	**6b**	redegjøring	matematisk tenkning	29	brøk
2,45	**4b**	sammenligning	matematisk tenkning	32	heltall
2,07	**11b**	sammenligning	med forbindelser	24	heltall
2,01	**10k**	redegjøring	matematisk tenkning	21	brøk
1,9	**6a**	manglende verdi	med forbindelser	101	brøk
1,67	**5**	sammenligning	matematisk tenkning	17	geometri
1,64	**15b**	redegjøring (av manglende verdi)	med forbindelser	17	geometri
1,38	**11ai**	redegjøring (av sammenligning)	med forbindelser		heltall
1,15	**10j**	manglende verdi	med forbindelser	14	brøk
0,97	**15a**	manglende verdi	uten forbindelser	27	geometri
0,85	**9**	sammenligning	med forbindelser	39	heltall
0,67	**13c**	manglende verdi	med forbindelser	23	heltall
0,66	**13a**	manglende verdi	med forbindelser	67	heltall
0,56	**13b**	manglende verdi	med forbindelser	29	heltall
0,53	**11c**	sammenligning	med forbindelser	37	heltall
0,43	**3**	sammenligning	med forbindelser	61	heltall
0,29	**11a**	sammenligning	med forbindelser	48	heltall
0,14	**12**	manglende verdi	uten forbindelser	26	geometri
-0,01	**7i**	redegjøring (av manglende verdi)	uten forbindelser		heltall
-0,12	**8**	sammenligning	med forbindelser	56	brøk
-1,5	**4a**	sammenligning	uten forbindelser	40	heltall
-1,58	**10f**	manglende verdi	uten forbindelser	0	brøk
-2,37	**10e**	manglende verdi	uten forbindelser	0	brøk
-2,46	**10b**	manglende verdi	uten forbindelser	0	brøk
-2,7	**10c**	manglende verdi	uten forbindelser	0	brøk
-3,33	**10d**	manglende verdi	uten forbindelser	0	brøk
-3,59	**10 h**	manglende verdi	uten forbindelser	0	brøk
-4,69	**10a**	manglende verdi	uten forbindelser	27	brøk

cluster 1
Hovedsamling av Oppgaver
cluster 3

Figur 9: Oversikt over hvilke oppgaver som havner i de to undergruppene (clusters), indikert ved hjelp av fargekoder.

Som figur 9 viser, havner oppgave 13a, 15a, 13b, 15b og 13c i en egen cluster (undergruppe). Begge oppgavene hører til oppgavetypen manglende verdi, men denne oppgavetypen inneholder mange flere oppgaver som ikke havnet i denne grupperingen. Oppgave 15 tilhører emnet geometri, mens oppgave 13 stammer fra heltallsbolken. Både oppgave 13 og 15 ligger litt over middels på skalaen når det gjelder vanskelighetsgrad. Det som skiller disse oppgavene fra de som tilsynelatende er likesinnede, er at begge har mange elever som løste oppgaven additivt. Som nevnt i teorikapitlet, er evnen til å kunne tenke multiplikativt en viktig forutsetning for proporsjonal resonnering. Oppgave 11, 13 og 15 pekte seg ut som oppgaver der mange elever valgte en additiv løsningsstrategi i stedet for en multiplikativ.

Oppgave 11a, 11ai og 11c havnet i en egen underkategori. Dette er sammenligningsoppgaver, som også har en stor andel additive svar. Oppgave 11b havnet ikke i denne undergruppen. Sistnevnte oppgave gikk ut på å forklare fremgangsmetoden i oppgave 11a for en fjerdeklassing, noe mange gjorde instrumentelt uten additiv tenkning. Det at oppgave 11b ikke havnet i undergruppen, samt at oppgavene i begge enden av skalaen utpeker seg som oppgaver som trigger additiv tenkning, styrker teorien om additivitet som avgjørende faktor for underdimensjonen.



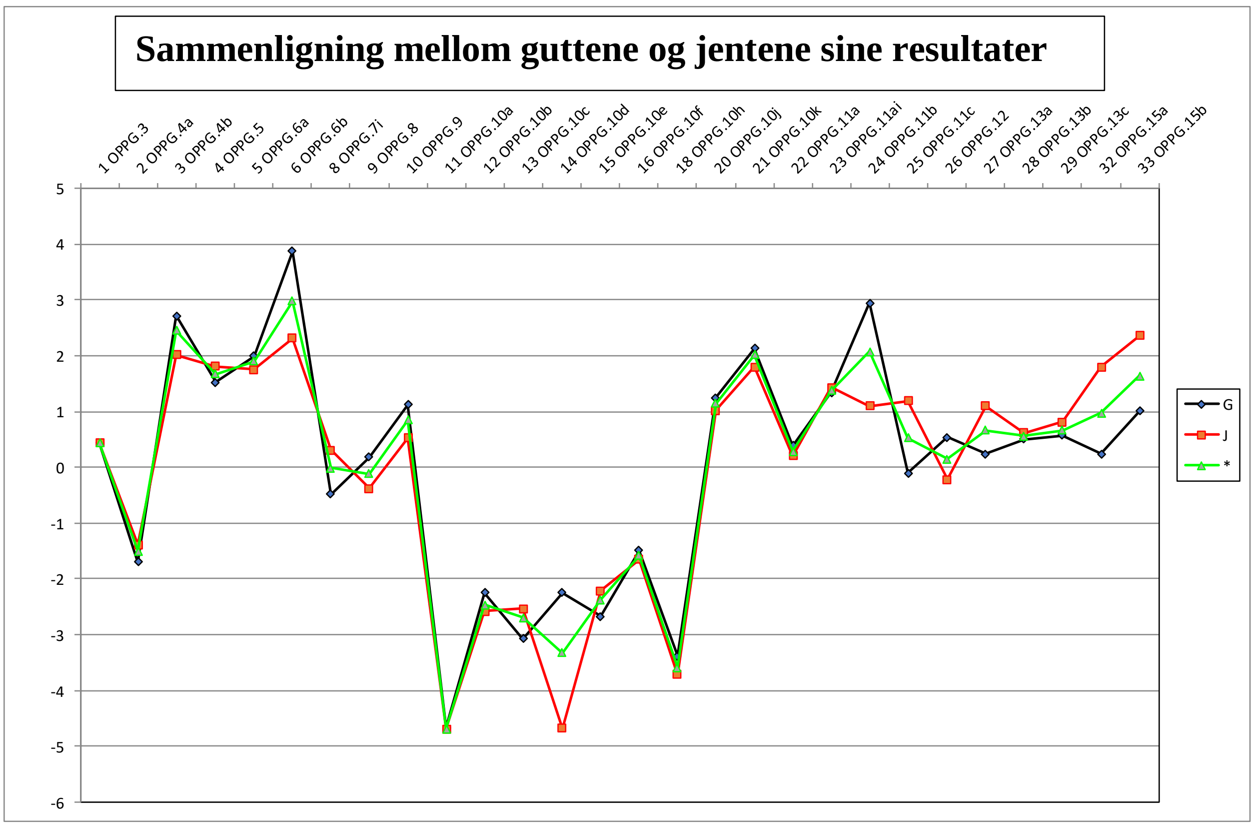
Figur 10: Dimensjonens påvirkning på elevresultatene

For å sjekke hvor mye underdimensjonen har å si for elevenes oppnådde resultater i undersøkelsen, ble en og en deloppgave fjernet inntil egeinvalue i første kontrast var under 2. I tillegg til de nevnte deloppgavene fra underdimensjonen, måtte også oppgave10k og 9 fjernes fra datasettet for å få egeinvaulen ned under 2. Figur 10 viser sammenligningen av elevresultatene mellom datasettet med en eigenvalue under 2 og den opprinnelige. Som det fremgår av figuren er alle elevene er godt innenfor grensen på 95%. Det har derfor ingenting å si for de ulike elevene sitt resultat om oppgavene i undergruppen er med eller ikke. Ingen påvirkning på resultatet samt det faktum at topp og bunn kontrasten tilsynelatende måler samme mål, er et tegn på at oppgaven ikke trenger et eget måleinstrument (Linacre, 2017). Alle tre oppgaver blir derfor behold i undersøkelsen.

5.1.4 Invarians i datasettet

For å være sikker på at mine data er generaliserbare, og ikke avhengig av kjønn, skolekrets ol. er undersøkelsen sjekket for differensial oppgave funksjonalitet ved å kjøre analysen i flere undergrupper. Hvis det blir store utslag i oppgaverangering, eller differanse ved sammenligning av kurvene, tyder dette på at den aktuelle oppgaven ikke er entydig for alle elever på de målte tiende trinn (Wu & Adams, 2007, s. 69-71).

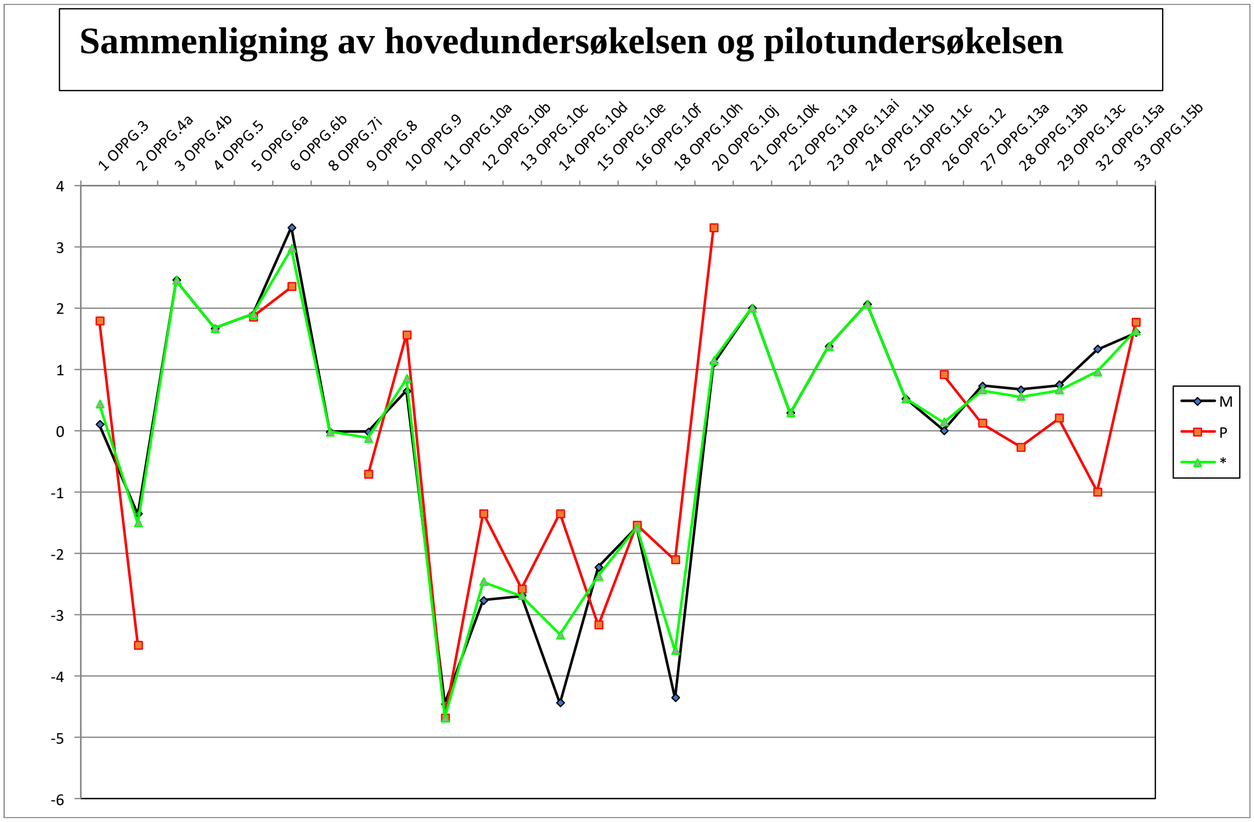
Gutter vs jenter



Figur 11: Invarians mellom guttene (blå) og jentene (rød) sine besvarelser, sammenlignet med totalresultatet (grønn).

Den først undergruppen som ble sjekket var inndeling av kjønn. Den grønne streken viser gjennomsnittet, blå indikerer guttebesvarelsene, mens rød viser jentene sine svar. Med unntak av oppgave 10d, 11b og hele oppgave 15, er det ingen forskjell å snakke om på kjønnene. I de oppgavene der det er litt forskjell, er den så marginal at det er vanskelig å si om den skyldes kjønn eller andre ukjente parametere.

Pilotundersøkelsen vs hovedundersøkelsen



Figur 12: Invarians mellom pilotundersøkelsen (rød) og hovedundersøkelsen (blå) sammenlignet med det sammenslåtte resultatet (grønn).

Ikke alle oppgavene i denne undersøkelsen ble besvart av pilotelevene, derfor er det en del oppgaver som mangler data. I tillegg er det få besvarelser fra pilotskolen, noen som gjør det mye mer sannsynlig at det avdekkes invarians (Wu & Adams, 2007, s. 71). I tabellen over er pilotbesvarelsene indikert med rød og hovedundersøkelsen med blå. Den grønne streken viser fortsatt gjennomsnittet. Forskjellen på disse to kategoriene er større enn da jeg delte opp i kjønn, noe som er logisk da det alltid vil være noe forskjell mellom hvilken kunnskap skolene vektlegger i faget.

Justerte innputt.

Flere kilder understreker viktigheten av minimum 10 observasjoner per svaralternativ (Bond & Fox, 2015, s. 153; Linacre, 2002). Da særlig elevene i hovedundersøkelsen presterte under forventing, er det en del svaralternativ med 1-5 observasjoner. For å sjekke om manglende observasjoner påvirket resultatet, ble disse svaralternativene slått sammen med nærmeste svaralternativ. På denne måten fikk alle svarkategoriene minimum 10 observasjoner. Dette medførte færre svarkategorier, og dermed mindre informasjon om oppgavene, men flere observasjoner per oppgave. Denne vrien førte ikke til noen nevneverdige endringer i oppgaverangeringen, hvilke oppgaver som måtte tas ut av settet, eller hvilke oppgaver som havnet i underdimensjoner. Det er derfor holdt fast ved den opprinnelige inndeling, selv om den har for få observasjoner i noen svaralternativ.

5.2 Oppgavebredden

Nå som de oppgavene som ikke passet inn i Rasch-modellen er silt ut, kan de resterende dataene brukes til å se på oppgavefordelingen. Første steg blir å se på oppgavebredden i forhold til elevprestasjonene, for å være sikker på at det er nok bredde og spredning på oppgavesettet.

```
MEASURE Elev - MAP - Oppgave
          <more>|<rare>
    5        X  +
                |
                |
                |
                |
    4           +T
                |
            XX T|
             X  |
                |
    3       XX  +  OPPG.6b
            XX  |
             X  |
             X  |  OPPG.4b
         XXXXX  |
    2      XXX S+S OPPG.10k   OPPG.11b   OPPG.6a
           XXX  |
           XXX  |  OPPG.15b   OPPG.5
            XX  |  OPPG.11ai
             X  |  OPPG.10j
    1      XXX  +  OPPG.15a
          XXXX  |  OPPG.9
         XXXXX  |  OPPG.11c   OPPG.13a   OPPG.13b   OPPG.13c
      XXXXXXXX M|  OPPG.3
           XXX  |  OPPG.11a   OPPG.12
    0     XXXX  +M OPPG.7i
          XXXX  |  OPPG.8
            XX  |
         XXXXX  |
           XXX  |
   -1        X  +
         XXXXX S|
          XXXX  |
                |  OPPG.10f   OPPG.4a
             X  |
   -2        X  +S
                |
                |  OPPG.10b   OPPG.10e
            XX  |  OPPG.10c
               T|
   -3           +
                |
                |  OPPG.10d
                |  OPPG.10h
                |
   -4           +T
             X  |
                |
                |  OPPG.10a
                |
   -5           +
             X  |
                |
                |
                |
   -6           +
          <less>|<freq>
```

Figur 13: Variable map som viser fordelingen av oppgaver og elever langs logitskalaen. Variable mappen er hentet fra tabell 1.2 i Winsteps.

Som nevnt i kapitlet om Rasch, måles oppgave vanskeligheten og person evnene uavhengig av hverandre, men langs en og samme målestokk (Wright & Stone, 1979, s. 11-15). Variable mappen til Winsteps gir en visuell fremstilling av hvordan oppgavene og elevenes ferdigheter fordeler seg langs målestokken. I figur 13 over vises den originale variable mappen der elevene er representert med et kryss på venstre siden av skalaen, og oppgavene vises med oppgavenavn på høyre side. Oppgavene er plassert ut fra total gjennomsnittet til de ulike delscorene oppgavene har.

Variable mappen viser det er en relativ god spredning på oppgavene og elevene. Oppgave 6b er den vanskeligste, mens 10a er den enkleste. Det er fire elever som er estimert til en høyere logitverdi enn den vanskeligste oppgaven. Det Winsteps ikke vet er at det er to deloppgaver der ingen elever oppnådde maks score, oppgavesettet har derfor mer å gå på. I denne variable mappen er det et relativt stort gap mellom oppgave 8 og 4a. Elevene som havner mellom disse to, er det derfor vanskelig å si noe konkret om hvor de bør plasseres langs logitskalaen. Her burde oppgavesettet ha hatt minst en oppgave som ligger mellom oppgave 8 og 4a i vanskelighetsgrad. Hele oppgave 13 samt 11c er estimert til ca samme vanskelighetsgrad. Siden det er unødvendig å stille så å si samme spørsmålet fire ganger på rad, kunne to av disse oppgavene med fordelt ha blitt tatt ut av undersøkelsen. Oppgave 13 var også en del av pilotundersøkelsen. I piloten havnet de tre delspørsmålene til oppgave 13 på tre forskjellige plasseringer langs logitskalaen. Det kom derfor som en overraskelse at de klumpet seg sammen slik de gjorde etter å ha blitt presentert for et større elevutvalg.

Hittil har vi sett på variable mappen som legger gjennomsnitts logiten til grunn for oppgaveplasseringen. Variable mappen under tar derimot høyde for de ulike delscorene til oppgavene. Hvordan dette gjøres kan løses på ulike måter. I denne undersøkelsen er det benyttet Thurnstone Thresholds, som egner seg godt til å bruke ved undersøkelser av typen partial credit model (Masters, 1992). I variable mappen med Thurnstone thresholds er elevenes logit den samme som i den originale variable mappen. Hvor deloppgavene plasseres gir derimot et mye mer nyansert bilde enn ved den originale variable mappen. Oppgave og elev fordelingen er mye jevnere langs logitskalaen ved anvendelsen av Thurstone thresholds. Det er kun en elev som er rangert med en høyere logitscore enn den høyest oppnådde poengsummen på den vanskeligste oppgaven. Hvilke oppgaver som er vanskeligst, og dermed ligger øverst på skalaen, har også endret seg nå som delscorene vises hver for seg. Her er det verdt å merke seg at de enkleste oppgavene sin rangering er ganske så uendret. Dette skyldes i all hovedsak at de enkle oppgavene har en maksscore på 1, og dermed ingen gjennomsnitt å ta hensyn til. Når man tar høyde for de ulike delscorene, er oppgavesettet godt tilpasset den utvalgte elevgruppen og har en jevn og god oppgavespredning.

```
    Elev -  Oppgave - 50% Cumulative probabilities(Rasch-Thurstone Thresholds)
       <more>|<rare>
 5        X  +
             |
             |                               OPPG.5    .3
             |
             |
 4           +T
             |
         XX T|
          X  |
             |                               OPPG.10k  .3
 3       XX  +  OPPG.6b   .1
         XX  |                OPPG.11b  .2
                              OPPG.3    .2
                              OPPG.4b   .2
          X  |
          X  |                OPPG.9    .2
      XXXXX  |  OPPG.4b   .1  OPPG.10k  .2
 2      XXX S+S               OPPG.10j  .2
                              OPPG.6a   .2
        XXX  |  OPPG.6a   .1
        XXX  |  OPPG.15b  .1
         XX  |  OPPG.11ai .1
                OPPG.11b  .1
          X  |
 1      XXX  +  OPPG.15a  .1  OPPG.13b  .2
                              OPPG.13c  .2
       XXXX  |                OPPG.13a  .2
                              OPPG.5    .2
      XXXXX  |  OPPG.10k  .1
                OPPG.11c  .1
                OPPG.13a  .1
   XXXXXXXX M|  OPPG.13c  .1
        XXX  |  OPPG.10j  .1
                OPPG.11a  .1
                OPPG.12   .1
                OPPG.13b  .1
 0     XXXX  +M OPPG.7i   .1
       XXXX  |  OPPG.8    .1
         XX  |  OPPG.5    .1
      XXXXX  |  OPPG.9    .1
        XXX  |                OPPG.4a   .2
-1        X  +
      XXXXX S|
       XXXX  |
             |  OPPG.10f  .1
          X  |
-2        X  +S OPPG.3    .1
             |  OPPG.4a   .1
             |  OPPG.10b  .1
                OPPG.10e  .1
         XX  |  OPPG.10c  .1
            T|
-3           +
             |
             |  OPPG.10d  .1
             |  OPPG.10h  .1
             |
-4           +T
          X  |
             |
             |  OPPG.10a  .1
             |
-5           +
          X  |
             |
             |
             |
-6           +
       <less>|<freq>
```

Figur 14: Variable map med Thurstone Thresholds, tabell 1.6 i Winsteps

5.3 Hva påvirker Oppgave rangeringen?

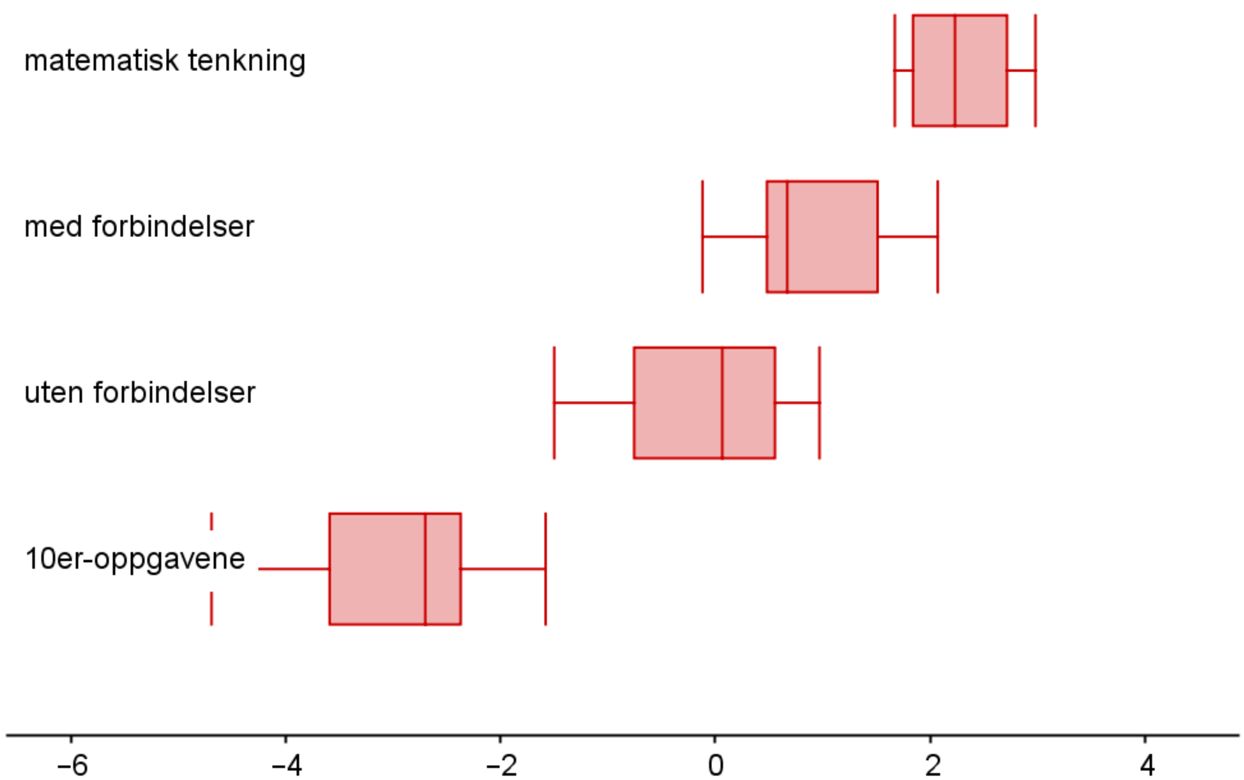
Det ble benyttet ulike teorier under utvelgelsen av oppgavene til undersøkelsen. Nå som vi har fått ut sammenlignbare tall, er det derfor spennende å se på hvor mye de ulike teoriene har å si. I avsnittene nedover vil det sees på hvor stor påvirkningen kognitive krav, graden av åpenhet, matematisk emne, spørsmålstype samt antall ord som må leses, har på oppgavevanskeligheten.

I de fleste av oppgavesammenligningene er det benyttet boksplots. Valget falt på denne fremstillingen fordi det med et blikk, gir deg mye informasjon om dataen. «Boksen» indikerer de to midt kvartilene i dataen. Streken i boksen indikerer medianen. «Halene» til begge sider viser de ytterste kvartene av dataene. Boksplots gir derfor informasjon om både de mest ekstreme verdiene, graden av konsentrasjon eller spredning på midtdataen samt medianen. Alle disse verdiene er nyttige å ha med seg, når man skal slå fast noe om de aktuelle teoriene sin påvirkning på oppgavevanskeligheten.

Oppgave 10a-i blir presentert i et eget plott. Dette er gjort av flere grunner. For det første måler disse oppgavene en forkunnskap til proporsjonal resonnering, nemlig likeverdigebrøker, ikke selve den latente variabelen som undersøkelsen er ute etter å kartlegge. For det andre er det snakk om mange oppgaver som drar snittet i de ulike undergruppene mye ned. Der hvor det er hensiktsmessig er det i stedet kommentert i hvilken kategori disse oppgavene skulle ha vært.

5.3.1 Kognitive krav

For å sette ord og teori på begrepet resonnering, ble bland annet Sein og Smith sine tre høyeste kognitive krav til oppgaver benyttet. I boksplotten under vises sammenhengen mellom de ulike kognitive kravene og logitverdiene.

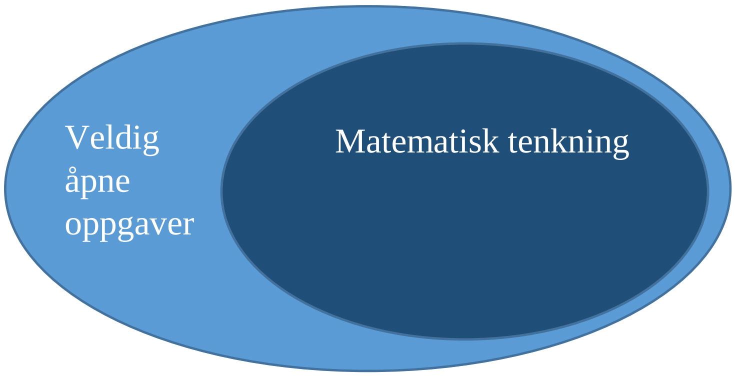


Figur 15: Boksplott som viser sammenhengen mellom kognitive krav og logitverdier.

Boksplotten til de kognitive kravene viser at det er en svært tydelig sammenheng mellom en oppgave sine kognitive krav, og oppnådd logitscore i undersøkelsen. Det er noe overlapp mellom ytterste verdiene til de ulike kognitive kravene, men majoriteten, «boksene», deler seg tydelig opp. Dataen føyer seg med ande ord eksemplarisk etter Stein og Smith sin inndeling.

5.3.2 Åpne/lukkede oppgaver

Det finnes som nevnt mange grader av åpenhet i oppgavene. Det ble derfor benyttet inndelingen av oppgavene i kategoriene veldig åpne, åpne og lukkede oppgaver. Den nevnte inndelingen oppnår ca samme inndelingen av oppgavene som den til kategorien kognitive krav. Videre sees det på kategorien med høyets logitscore, og dermed på mange måter også den viktigst for undersøkelsen da den understreker innholdet i proporsjonal resonnering. Det er fire oppgaver i kategorien matematisk tenkning, den høyeste kategorien blant kognitive krav. I kategorien veldig åpne oppgaver finner vi de samme fire oppgaver samt to til som illustrert i figur 16 nedunder. Her må det understrekes at det er bare i den høyeste kategorien oppgavene fordeler seg som i figuren nedenfor.

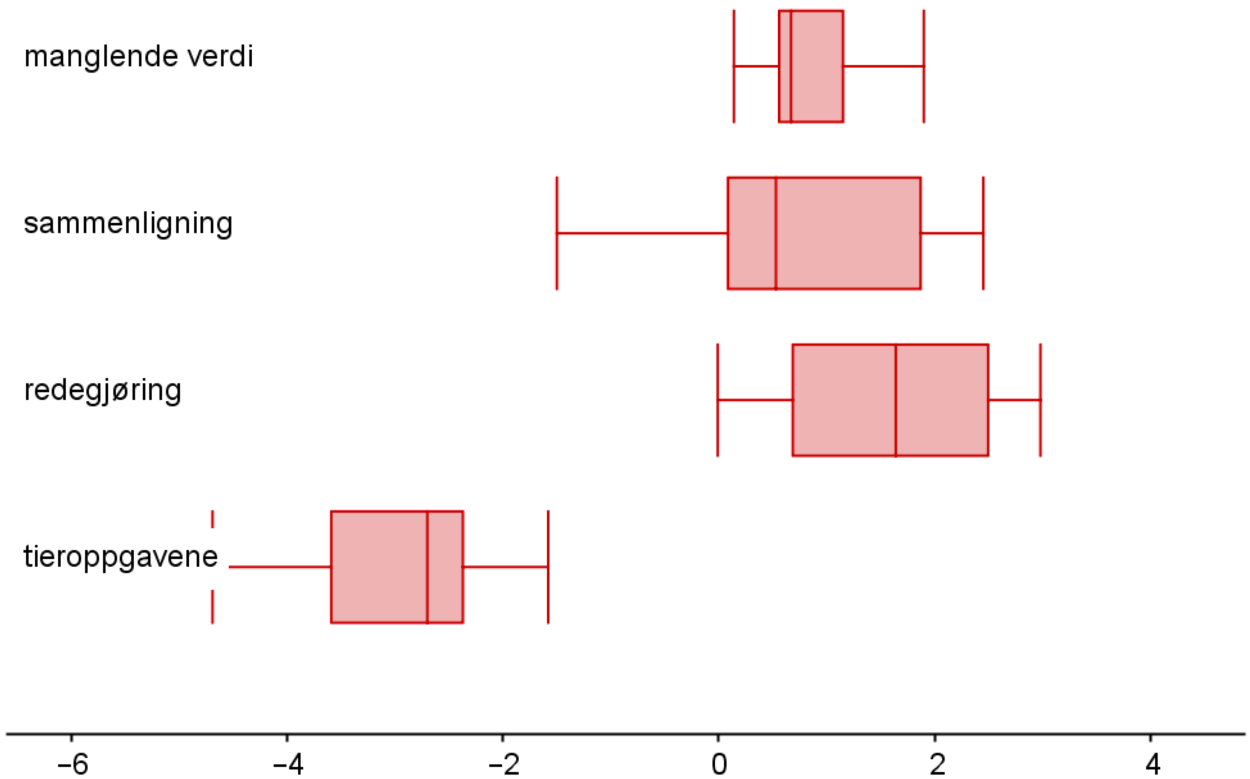


Figur 16: Venndiagram som illustrer sammenhengen mellom kognitive krav og veldig åpne oppgaver i den øverste kategorien

Grunnet likt innhold, ble boksplottene nok så like. Derfor er kun å boksplotten for kognitive krav tatt med i analysen. Valget falt på sistnevnte da dens kategorier er mer klart definert, noe som igjen fører til tydeligere skiller mellom kravene. Underkategoriene til graden av åpenhet er mer svevende og åpen, og fører dermed til en mer diffus boksplott. Det kan likevel slås fast at det er en klar tendens til at de veldig åpne oppgaver er de vanskeligste, etterfulgt av de åpne, og på sisteplass de lukkede tier oppgavene. For den som er interessert finnes boksplotten til graden av åpenhet vedlagt i appendiks

5.3.3 Oppgavetype

De aller fleste tidligere studier som omhandler proporsjonal resonnering, har enten konsentrert seg om oppgavetypen sammenligning eller manglende verdi. Særlig sistnevnte kategori er det mange som har studert. I denne undersøkelsen brukes begge to, samt en ny kategori, redegjøring. Redegjøringskategorien er som nevnt tidligere med for å styrke og synliggjøre resonnering i forbindelse med proporsjonalitet.

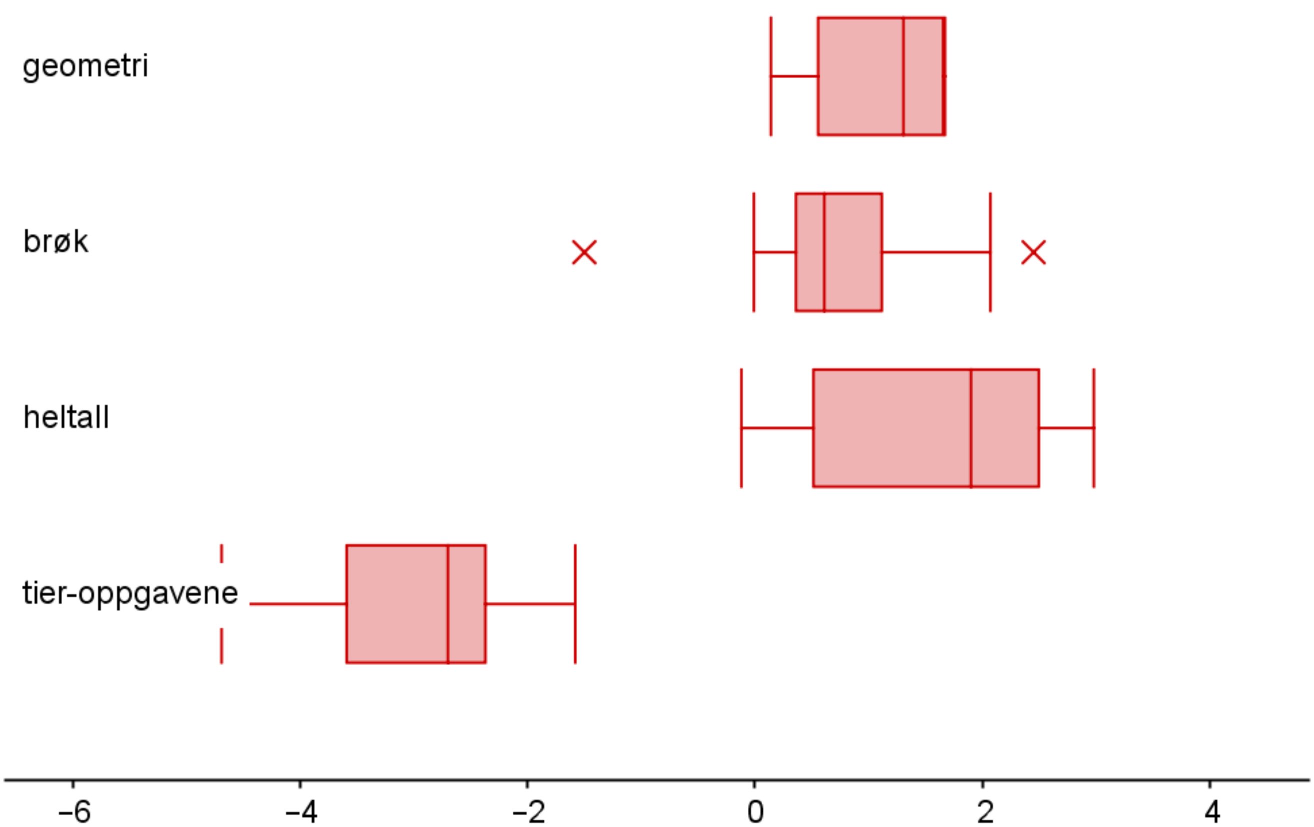


Figur 17: sammenhengen mellom oppgavetype og logitverdier illustrert ved hjelp av boksplott

Det boksplotten først og fremst viser, er at det er stor forskjell på oppnådd spredningen i kategoriene sammenligning og manglende verdi. Trass en ulikhet i oppgave spredningen, ser det ikke ut til at det er nevneverdig forskjell i vanskelighetsgraden til oppgavekategoriene sammenligning og manglende verdi. Kategorien redegjøring ligger lite grann høyere opp på skalaen. Det synligste tegnet på at denne kategorien kan være vanskeligere enn de andre to, er at medianen til redegjøring befinner seg en del hakk lengre opp på logitskalaen.

5.3.4 Matematisk emne

Det er ikke uvanlig å ha noen emner innenfor matematikk som en liker bedre enn andre. Proporsjonal resonnering finnes innenfor mange emner. Jeg var derfor spent på om det kom til å være noen forskjell på vanskelighetsgraden emnene seg imellom. Det må nevnes at det ikke er tatt med oppgaver i kategorien sannsynlighet, selv om det er en del proporsjonal forståelse der også. Det er heller ikke laget en egen kategori for temaet algebra, selv om flere av oppgavene inneholder både pre- og vanlig algebra. Dette fordi algebra på linje med proporsjonal resonnering kan brukes i mange av matematikkens emner. Oppgaven ble derfor delt inn i de entydige emnene heltall, brøk og geometri.



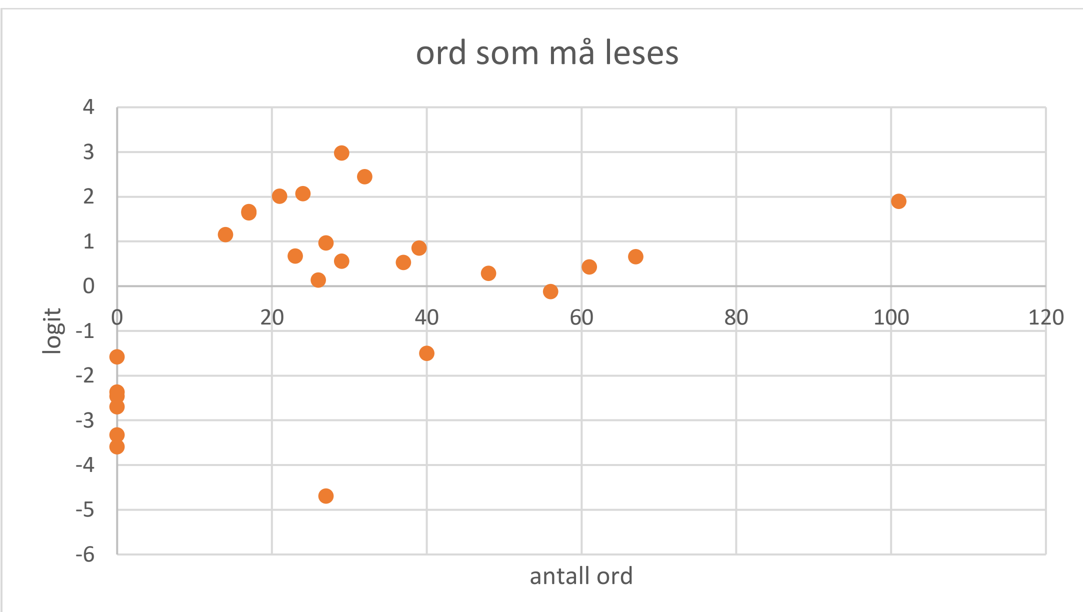
Figur 18: Sammenhengen mellom matematisk emne og logitverdiene illustrert ved hjelp av boksplott

I emne kategoriene er det også en nevneverdig forskjell i oppgavespredningen. Brøkoppgavene har den mest ekstreme utstrekningen, så ekstrem at ytterpunktene ble markert som kryss i

Geogebra i stedet for en sammenhengende hale fra boksen og ut. Geometri boksen er svært komprimert med den største konsentrasjonen av oppgaver i den vanskeligste enden av skalaen. Oppgave 14 som ble tatt ut av analysen, stammer fra emnet geometri, og hadde sannsynligvis fått denne kategorien dratt endra lengre opp på vanskelighetsgraden. Ser en bort i fra oppgavene 10a-i, samt en litt ujevn spredning, ligger boksene på så å si samme sted langs logit-aksen. Hvilket emne den proporsjonale resonneringen presenteres i, ser derfor ikke ut til å ha noen som helst innvirkning på oppgavevanskeligheten i min undersøkelse.

5.3.5 Antall ord som må leses

I utvelgelsesfasen ble det aldri gjort noen bevisste valg rundt antall ord elevene måtte lese for å løse oppgaven. Dimensjonstesten ga ingen utslag på mengden tekst som måtte leses. Men i løpet av analysen, ble jeg oppmerksom på at det var en voldsom forskjell.



Figur 19: punktplott som viser sammenhengen mellom antall ord som må leses og logitverdiene

Punkt diagrammet over viser sammenhengen mellom logitverdiene langs y-aksen, og antall ord som må leses langs x-aksen. Diagrammet viser at det er så og si like mange ord som må leses på den enkleste og vanskeligste oppgaven. Med unntak av oppgaven med flest ord, er det like før oppgavene blir enklere jo flere ord som må leses. Dette tyder på at det trygt kan slåes fast at antall ord som må leses, ikke har noen innvirkning på hvor vanskelig oppgavene var å løse for elevene.

5.4 Elevfordelingen, hvilken informasjon ligger det i elevenes testresultater?

For å få mest mulig data om oppgavene, som var hovedfokus for denne studien, ble pilotresultatene tatt med i analysen i tillegg til resultatene fra hovedundersøkelsen. Av totalt 28 analyserte oppgaver, inneholder dataen svarobservasjoner fra 19 oppgaver som ble gitt i pilotundersøkelsen. Selv om disse observasjonene hjelper mye i oppgaverangeringen, er det svært vanskelig å sammenligne elevene fra de to undersøkelsene. Om det virkelig var et poeng å sammenligne de, burde de 9 oppgavene som pilotelevene ikke svarte på blitt tatt ut. Siden det er kjennetegn ved de høyt presterende elver som undersøkelsen er opptatt av, og ikke rangering etter evne, brukes bare besvarelsene fra hovedundersøkelsen for å kartlegge hvilken informasjon det ligger i elevenes testresultater.

5.4.1 De høyt presterende elever

Det som kjennetegner elevene i den øvrige delen av skalaen er flere ting. For det første er det svært få oppgaver de har svart feil på. De oppnår stort sett maks score på oppgavene i matematiske tenkning og de svært åpne oppgavene. Elevene i denne gruppen som ikke oppnår maks score har ikke svart på oppgavene. Et interessant funn er at de fleste av de høyst presterende elevene ikke har svart på alle oppgavene. Mange har rett og slett ikke kommet seg gjennom hele oppgavesettet, og ikke besvart de siste oppgavene. Hvilke oppgaver dette er, avhenger av hvilket oppgavesett de fikk. Mange av elevene litt lengre ned på skalaen har svart på alle oppgavene, men ofte hoppet over en oppgavene her og der, kombinert med at de har en større andel av ukorrekte besvarelser.

5.4.2 De lavt presterende elever

Hovedkjennetegnet til de lavt presterende elevene er at de nesten ikke svarer på en eneste oppgave. De oppgavene som de stort sett våger å prøve seg på er 4a, 7 og 10a-i. Disse oppgavene svarer de en del rett på, noe som henger godt sammen med oppgave rangeringen på logitskalaen. Et overraskende funn blant disse elevene, var at det er en del av de som også fikk noe uttelling på oppgave 5 og 9. Begge disse oppgavene er kategorisert som svært åpne, og krever dermed endel resonnering. Selve matematikken i disse oppgavene er ikke den vanskeligste for å oppnå en lavere poengsum. Det er likevel en spennende observasjon at evnen til å resonnere ikke bare er noe vi finner blant de flinkeste elevene.

5.4.3 Oppgaver med store krav til proporsjonal resonnering

Blant de høyt presterende elevene, var det ganske mange som ikke har svart på alle oppgavene. For å danne et bilde av hvilke elever som scorer på de vanskeligste oppgavene, ble det derfor gjort en nøyere gjennomgang av oppgavene i de to kategoriene som ut fra den forgående analysen hadde mest å si for oppgave vanskeligheten, kognitive krav og graden av åpenhet. Siden det stort sett dreier seg om de samme oppgavene som havnet i kategorien matematisk tenkning og svært åpne oppgaver, ble det sett på de to kategoriene samtidig. Oppgavene i kategorien matematisk tenkning er oppgave 4b, 5, 6b og 10k. Disse oppgavene finner vi også i kategorien svært åpne oppgaver, men her får de selskap av oppgave 9 og 10j i tillegg.

Ingen elever har prøvd å svare på alle de seks aktuelle oppgavene, og det er stor forskjell på besvarelsene til disse oppgavene. I variablemappen under er elevene derfor delt inn i tre ulike kategorier ut fra antall oppgaver de har fått høy uttelling for. Grønn kategori indikerer de flinkeste elevene. Disse elevene fikk uttelling på 4-5 av 6 oppgaver. Gul kategori indikerer de elevene som fikk uttelling for 3 av 6 oppgaver, men mange av disse oppnådde ikke maksscore på noen av deloppgavene. Røde elever fikk poeng på 2 av seks oppgaver, men denne kategorien inneholder mange elever som fikk maks score på enten en eller begge oppgavene.

```
MEASURE Oppgave - MAP - Elev
         <rare>|<more>
    4          +
               |
               |T MG51
            X  |
               |
    3          +  MG09  MG53
               |  MG36
            X  |  MJ14
               |  MG08
            X S|  MG04  MG21  MG30  MG83  MJ59  MJ67
    2      XX  +S
            X  |  MG42
            X  |  MG27  MG50  MJ07  MJ46
           XX  |
            X  |  MG26  MG87
    1          +  MG70  MJ35  MJ65
         XXXX  |  MG58  MG75  MG89
            X  |  MG43  MG66  MG76  MJ10  MJ23  MJ47  MJ48  MJ63
            X  |M MG17  MG28  MG39  MG74  MG88  MJ16  MJ71
            X  |
    0     XXX M+  MG54  MG61  MJ37  MJ78  MJ82
               |  MJ25
               |  MG85  MJ79
               |  MG20  MJ62  MJ77
               |  MJ52  MJ72  MJ90
   -1          +  MG06  MJ19  MJ31  MJ33
               |S MJ32  MJ41
            X  |  MG11  MG84  MJ60  MJ91
            X  |  MJ12
               |
   -2          +
            X S|  MJ81
               |
            X  |
            X  |T
   -3          +
               |
               |
               |
               |
   -4          +
               |
              T|
          XXX  |  MJ34
               |
   -5          +
               |
               |
               |  MG86
               |
   -6          +
         <freq>|<less>
```

Figur 20:Plassering av de elever som scorer på de vanskeligste oppgavene i variable mappen

Majoriteten av elevene som får uttelling for sine svar i de kategoriene som har mest å si for oppgavevanskeligheten, ligger helt i toppen av logitskalaen. Dermed ser det ut til å være en sammenheng mellom evnen til å resonnere proporsjonalt, og høy score på undersøkelsen. Det er noen unntak i begge retninger. MG06, resonnerer godt, og fikk uttelling for sine svar på oppgave 5 og 9, men har samtidig en klar tendens til å tenke additivt på alle oppgaver som trigger denne tankegangen. I motsatt ende finnes det en del elever i toppen av skalaen som ikke har prøvd seg på de oppgavene som definerer høyeste grad av proporsjonal resonnering, men som til gjengjeld har svart korrekt på de fleste andre oppgaver i undersøkelsen.

5.4.4 De additive tenkere

Ved undersøkelsen av flerdimensjonalitet, dukket additiv tankegang opp som noe som kunne ha vært en egen dimensjon. Det kan derfor være interessant å se hvor i proporsjonal resonerings-landskapet disse elevene befinner seg.

```
MEASURE Oppgave - MAP - Elev
        <rare>|<more>
    4         +
              |
              |T MG51
           X  |
              |
    3         +  MG09  MG53
              |  MG36
           X  |  MJ14
              |  MG08
           X S|  MG04  MG21  MG30  MG83  MJ59  MJ67
    2     XX  +S
           X  |  MG42
           X  |  MG27  MG50  MJ07  MJ46
          XX  |
           X  |  MG26  MG87
    1         +  MG70  MJ35  MJ65
        XXXX  |  MG58  MG75  MG89
           X  |  MG43  MG66  MG76  MJ10  MJ23  MJ47  MJ48  MJ63
           X  |M MG17  MG28  MG39  MG74  MG88  MJ16  MJ71
           X  |
    0    XXX M+  MG54  MG61  MJ37  MJ78  MJ82
              |  MJ25
              |  MG85  MJ79
              |  MG20  MJ62  MJ77
              |  MJ52  MJ72  MJ90
   -1         +  MG06  MJ19  MJ31  MJ33
              |S MJ32  MJ41
           X  |  MG11  MG84  MJ60  MJ91
           X  |  MJ12
              |
   -2         +
           X S|  MJ81
              |
           X  |
           X  |T
   -3         +
              |
              |
              |
              |
   -4         +
              |
             T|
         XXX  |  MJ34
              |
   -5         +
              |
              |
              |  MG86
              |
   -6         +
        <freq>|<less>
```

Halvt multiplikativ halv additiv løsningsstrategi

mest additivt, men med innslag av multiplikativ løsningsstrategi

bare additive løsninger eller andre misoppfatninger

Figur 21: Variable map med de additive tenkerne markert i fargekoder

Det er stor variasjon blant de additive tenkere. Dette er forsøkt synliggjort i figur 21 ovenfor ved å dele de additive tenkerne inn i tre underkategorier. For å bli medregnet i elevmassen som tenker additivt, må eleven ha svart additivt på minst 3 oppgaver. Kun de besvarelser der det vises en tydelig additiv strategi er medregnet. Hvis det var tvil, ble ikke besvarelsen telt med. Lilla elever er de som bare tenkte additivt eller brukte andre ukorrekte løsningsmetoder. Elevene som er markert med gul farge tenker additivt i de fleste tilfeller, men har minst et innslag av multiplikativ fremgangsmåte. De grønne elevene har en jevn fordeling av additive og multiplikative strategier. Som variable mappen viser, befinner de aller fleste elever som tenker additivt seg i den nederste enden av logitskalaen. De elever som havner lengst oppe, tenker additivt i noen oppgaver og multiplikativt i andre. Sist nevnte tyder på at det er en gradvis overgang mellom en additiv og multiplikativ tankegang.

6. Drøfting

Gjennom denne oppgaven er det jobbet med to problemstillinger. I første delen av oppgaven har jeg sett på om temaet proporsjonal resonnering kan defineres ved hjelp av en endimensjonal variabel. Siste delen av oppgaven er viet til nær studie av de oppgavene som passet inn i den endimensjonale variabelen. Her har jeg både sett på innholdet i oppgavene, hva som kjennetegner dem og hva som påvirker vanskelighetsgraden. Det har vært mye nøsting rundt begrepet resonnering og proporsjonal resonnering, samt en grundig gjennomgang av de ulike oppgavene. I dette kapitlet vil jeg diskutere funnene jeg har presentert i analysen ved hjelp av teori samt belyse og drøfte valgene som er tatt underveis. Tilslutt gis det en pekepinn på hvilke implikasjoner funnene kan ha, samt forslag til videre forskning.

6.1 Lar proporsjonal resonnering seg måle, og hva er målt?

I måleteori og Rasch kapittelet ble det påpekt hvordan vi ennå er i startgropen når det gjelder utviklingen av gode psykometriske målinger. Innholdet i temaet proporsjonal resonnering er heller ikke entydig definert. For å favne bredest mulig, er det i denne undersøkelsen blitt lagt stor vekt på å velge oppgaver fra et bredt spekter når det gjelder ulike oppgavetyper, forskjellige kognitive krav og ulike matematiske emner. De valgte oppgavene er blitt analysert ved hjelp av Rasch-modellen, og er dermed blitt målt i graden av endimensjonalitet (Bond & Fox, 2015, s. 303). Som belyst grundig i metodekapitlet, er alle de gjenværende oppgaver innenfor fit-grensene til modellen, og dermed omtrent endimensjonalt. Undersøkelsen oppnådde en god oppgavebredde som kunne måle hele elevspektret på de utvalgte tiendetrinn. Oppgavesettet måler derfor en endimensjonal variabel, tilpasset tiltenkt alderstrinn. De neste delkapittel brukes til å belyse innholdet i variabelen, altså <u>hva</u> som er målt.

6.1.1 Hvilke av proporsjonal resonneringens mange sider er blitt inkludert i undersøkelsen?

Under begrepsavklaringsavsnittet beskrives det to ulike vinklinger på proporsjonal resonnering, Stemn (2008) sin fokusering på det konstante forholdet mellom to størrelser og Lamon (2012) sin vektlegging av resonnering rundt en proporsjonal situasjon. Under hele prosessen til denne undersøkelsen er det blitt lagt stort fokus på resonneringsbiten, og på å få med resoneringsoppgaver i oppgavesettet. Resonnering er med i så stor grad at det måtte opprettes en egen oppgavetype, kalt redegjøring, for å kunne plassere alle de utvalgte oppgavene. Oppgavesettet er derfor i stor grad laget etter Lamon sin definisjon som sier proporsjonal resonnering er å påvise, uttrykke, analysere, forklare og gi begrunnelser for påstander om proporsjonale forhold og situasjoner (Lamon, 2012, s. 4). Likevel er det en del av resonneringsoppgavene som også vektlegger det konstante forholdet mellom to størrelser.

Oppgavesettet inneholder oppgaver som kan plasseres under mange forskjellige emner, uten at det påvirker tilpasningen til modellen og dermed graden av endimensjonalitet. Emnene geometri, brøk, heltall og algebra er blitt inkludert i oppgavesettet. Indirekte er også forholdstall tatt med. Sistnevnte er med indirekte fordi det ikke stilles eksplisitte spørsmål om hva forholdstallet er. Til gjengjeld har oppgavesettet med mange oppgaver der det er hensiktsmessig å benytte seg av forholdstallet mellom ratioene. Eksempler på slike oppgaver er oppgave 13, far og sønn Anderssen, oppgave 15, hva er lengden og oppgave 3, hvilken plante vokser mest. Oppgavesettet inneholder oppgaver med ulike kognitive krav, og dermed vanskelighetsgrad. Det er med et bredt spekter av åpenhet som igjen påvirker resonneringsgraden. Undersøkelsen favner dermed bredt både innenfor ulke emner, definisjoner og innhold, men er hele spekteret blitt dekt?

6.1.2 Hva er det oppgavesettet ikke måler?

Mens det forrige delkapitlet ble viet til de ulike bitene av proporsjonal resonnering som er inkludert i oppgavesettet, blir dette delkapitlet brukt til motstykket, nemlig aspekter ved temaet som ikke ble inkludert.

I tilpasningsfasen til en endimensjonal variabel ble alle oppgaver som ikke krevde proporsjonal resonnering tatt ut. Dette er en klar svakhet med undersøkelsen. Forskning til blant annet van Dooren m.fl., Lamon og Modestou & Gagatis har vist at mange elever sliter med å skille proporsjonale situasjoner fra de som ikke er det, og at dette er en viktig forutsetning for å kunne resonnere proporsjonalt (Van Dooren, De Bock, Vleugels & Verschaffel, 2010). Flere forskere har i tillegg funnet ut at manglende verdi algoritmen blir anvendt mye oftere enn nødvendig (Lamon, 2012, s. 260; Modestou & Gagatsis, 2010; Van Dooren mfl., 2010). Dessverre lot dette seg ikke forene med kravet til endimensjonalitet å putte denne kunnskapen inn i oppgaveheftet.

En annen mangel ved oppgaveheftet er fraværet av sannsynlighetsoppgaver. Det er ikke bare i denne undersøkelsen at emnet sannsynlighet er fraværende i forbindelse med undersøkelser av proporsjonal resonnering. Noen undersøkelser nevner emnet i forbindelse med proporsjonal resonnering, og kommer gjerne med et oppgaveeksempel som for eksempel Stemn (2008) og Berk, Gorowara, Poetzl og Taber (2009). Andre undersøkelser nevner ikke sannsynlighetsoppgaver i det hele tatt, f.eks. Misailidou og Williams (2003) og Tourniaire og Pulos (1985). Ofte velges det en liten del av kompleksiteten i temaet proporsjonal resonnering til selve undersøkelsen, og jeg har ennå ikke lest om et eneste tilfelle der valget falt på sannsynlighetsoppgaver. I dette tilfellet har denne studien noe til felles med de fleste andre studier. Det nevnes et større bruksområde til proporsjonal resonnering, enn det som studeres. Men det hadde vært meget interessant å se på i hvor stor grad sannsynlighetsoppgaver passer inn i den endimensjonale variabelen proporsjonal resonnering.

6.1.3 Hva er målt, kort oppsummert

Kort oppsummert, har oppgavesettet fått med mange aspekter av temaet proporsjonal resonnering samtidig som det har bevart kravet til endimensjonalitet. De største manglene i oppgavesett er fraværet av sannsynlighetsoppgaver og oppgaver som utfordrer elevene til å skille mellom proporsjonale situasjoner og situasjoner som ikke er det. Det at det er så mange ulike emner og oppgavetyper som ble innlemmet i variabelen som beskriver proporsjonal resonnering, tydeliggjør at konseptet proporsjonal resonnering har et større spekter enn det de fleste velger å undersøke.

6.2 Hva kjennetegner oppgavene som er med på å definere den endimensjonale variabelen proporsjonal resonnering.

I forrige delkapittel argumentertes det for at oppgavesettet dekker en stor del av mangfoldigheten til temaet proporsjonal resonnering. Dette delkapitlet brukes til å se nærmere på de oppgavene som er med i oppgavesettet for å se på fellestrekk, samt hva som påvirker vanskelighetsgraden. Hvert underkapittel oppsummerer hovedfunnene i de 4 analysebolkene matematiske emner, kognitive krav, åpne oppgaver og oppgavetyper.

6.2.1 Proporsjonal resonnering og ulike matematiske emner

Resultatene fra undersøkelsen viser at proporsjonal resonnering ikke er forskjellige tema i de ulike matematiske emnene, men en del av samme helhet. Det at proporsjonal resonnering i de ulike emnene ikke havnet i underdimensjoner, tyder på at evnen til å resonnere proporsjonalt er en viktig egenskap i mange matematiske sammenhenger som ikke kan begrenses til et emne. En ferdighet på linje med addisjon, multiplikasjon og algebra som er en viktig og integrert del av den anvendte matematikken. Denne tanken underbygges av Lamon og Langrall & Swafford som begge ser på proporsjonal resonnering som en matematisk modenhet, en mer sofistikert måte å tenke matematisk på som åpner døren mot mer avansert matematisk og vitenskapelig tenkning (Lamon, 2012, s. 10; Langrall & Swafford, 2000).

En viktig del av undersøkelsen har vært å aktivt inkludere resonnering i termen proporsjonal resonnering. Dette ble gjort ved å ikke bare fokusere besvarelsene på rett svar, men i tillegg vektlegge elevenes forklaringer rundt hvorfor de tenkte rett, samt hvordan de kunne argumentere og bevise sine svar. Andre delspørsmål gikk ut på å generalisere funn og oppdage mønster. Heller ikke disse deloppgavene ga utslag som en egen dimensjon. Sistnevnte er i tråd med forskning til blant annet Mason og Kilpatrick mfl. som viser at generalisering, argumentasjon og bevisføring er avgjørende kjerneegenskaper innenfor alle former for matematikk (Kilpatrick mfl., 2001; Mason, 1996).

6.2.2 Proporsjonal resonnering og kognitive krav

Et av verktøyene som ble benyttet til å velge hvilke oppgaver som skulle med i undersøkelsen var Stein mfl. sine kognitive krav. Kravene ble brukt som forsikring om at det var nok variasjon og spredning på oppgavene slik at hele elevspekteret ble målt. Med hele spekteret menes både de flinke og mindre flinke elever sine ferdigheter, og ikke minst de ulike syn på matematikk som finnes i skolen og samfunnet forøvrig. Tanken var at oppgaveheftet skulle inneholde både «tradisjonelle» produktbaserte, lukkede oppgaver og de mer åpne, prosessbaserte som fokuserte på resonnering. Smith mfl. sine kognitive krav var en fin måte å sikre dette på. I tillegg viser analysen at oppgavevanskeligheten henger tett sammen med dens kognitive krav. Av de fem teoriene som ble brukt til å dele inn oppgavene, var det Smith mfl. sine kognitive krav som hadde mest å si for oppgavevanskeligheten. Om dette skyldes likhet i oppbygningen til emnet proporsjonal resonnering og de fire kognitive krav, eller oppgavetypen elevene vanligvis løser og dermed er vant til, har den undersøkelsen ingen data til å kunne svare på. Det må likevel påpekes at kognitive krav er en generell inndeling på tvers av matematiske emner. Dette oppgavesettet måler kun proporsjonal resonnering. Men hvis de kognitive kravene var noe som overskygget proporsjonal resonnering, skulle det ha komme frem som underkategorier og underdimensjoner, særlig når det ble sett på de andre analysepunktene. Da dette ikke er tilfellet, tyder det på at det er evnen til proporsjonal resonnering som er målt, og ikke elevenes evner til å takle kognitive krav.

6.2.3 Proporsjonal resonnering og åpne/lukkede oppgaver

Åpne og lukkede oppgaver er en mer sammensatt og diffus teori, enn Stein mfl. sine kognitive krav. Likevel fikk disse to inndelingene nesten de samme trinnene på logitskalaen. Trass likheten i logitverdiene, er disse inndelingene to svært forskjellige hjelpemiddel. De kognitive kravene til Stein mfl. er tydelig definert, og laget for å bevisstgjøre lærere og andre som jobber i skolen hva slags matematikk oppgavene representerer (Stein mfl., 2009, s. 1). Som nevnt ble de kognitive kravene brukt for å sikre oppgavebredden. Åpne og lukkede oppgaver er et hjelpemiddel som er knyttet opp mot å måle grad av resonnering. Dette fordi åpne oppgaver krever at elevene må ta aktive valg i form av hvilke fremgangsmetoder de velger og kjennetegnes at det er flere mulige veier frem til et godt svar (Cifarelli & Cai, 2005; Small, 2012). Denne definisjonen henger tett sammen med Kilpatrick mfl. sin definisjon av (allsidig) resonnering som evnen til å tenke logisk rundt, og reflektere over sammenhengene i de ulike konseptene og situasjonen innenfor matematikk (Kilpatrick mfl., 2001, s. 129-131). I denne definisjonen er det lagt vekt på å kunne se sammenhenger i faget, noe som også inngår i de høyeste kognitive krav, og er trolig det springende punktet for høy logitscore på disse oppgaver.

Tidligere forskning har ikke vist noen sammenheng mellom åpne oppgaver, og oppgavevanskeligheten, heller tvert imot. Baroody mener åpne oppgaver, og undersøkelsesbasert læring er nøkkelen til å inkludere elevene som sliter med den tradisjonelle matematikken i skolen (Baroody, 2011). Boaler har i hennes studie kommet frem til at elevene som lærer matematikk gjennom åpne, undersøkende oppgaver, ikke kan mer matematikk enn elever som lærer en mer tradisjonell, prosedyrekunnskap. Til gjengjeld fører undervisning med åpne oppgaver til en konseptuell forståelse for matematikken som gjør at elevene i mye større grad kunne anvende den lærte matematikken sammenlignet med de som lærte tradisjonell, prosedyrekunnskap (Boaler, 1998). I Boaler sin forskning kan det ligge noe av forklaringen til at de åpne oppgavene ble rangert som vanskeligere enn de mer lukkede. Om de elevene som ble undersøkt er vant til de mer tradisjonelle, lukkede oppgaver, stiller de dårlig i møtet av åpne oppgaver som krever en annen form for kunnskapsanvendelse enn de lukkede.

6.2.4 Proporsjonal resonnering og oppgavetyper

I inndelingen av oppgavetyper, var det liten forskjell i logitverdiene, og dermed vanskelighetsgraden til oppgavene. Dette er i seg selv et viktig funn. Selv om det er stor forskjell i oppgavestrukturen mellom manglende verdi og sammenligning, ser det ikke ut til at den ene er vanskeligere for elevene enn den andre. Helle ikke redegjøringsoppgave var nevneverdig mye vanskeligere. Funnet kan forklares med det faktum at de vanskeligste oppgavene, og de oppgavene som definerer høyeste grad av proporsjonal resonnering, er å finne i alle disse tre kategoriene. Ved å unnlate en av oppgavetypene, tar en ikke bort noe av oppgavebredden, men faktisk noe av innholdet i selve konseptet proporsjonal resonnering. I dette funnet ligger det et sterkt argument for å endre praksisen med å kalle alle studier som belyser en del av temaet proporsjonal resonnering for nettopp dette. En mer presis benevnelse som samtidig gir mye mer nyttig informasjon til leseren er å eksplisitt uttrykk at man ser på for eksempel manglende verdi oppgaver med emnene geometri og heltall innenfor temaet proporsjonal resonnering. Dette vil redusere temaets stempel som diffus paraplybenevnelse til et mer nyansert emne som påvirker store deler av faget matematikk.

6.3 elevresultatene

I denne undersøkelsen er både oppgavevanskeligheten og elvenes evne til å resonnere proporsjonalt rangert langs en skala målt i logit. Gjennom analysekapitlet ble det påvist at jo høyere logitscore, jo større evne hadde elevene til å løse oppgaver med høye kognitive krav og evne til å resonnere proporsjonalt. Selv om oppgavesettet ble laget med formålet å definere en endimensjonal variabel, kan det absolutt også brukes til å rangere elevenes evne til å resonnere proporsjonalt. Om oppgavene skal benyttes til dette formålet, bør oppgaveheftet kortes ned noe, da de aller fleste elever ikke kom seg gjennom det hele. Samtidig er det viktig å huske at Rasch-modellen er en modell, og vil derfor medføre litt støy (Bond & Fox, 2015, s. 266). I denne undersøkelsen var det i analyse noen eksempler der elever havnet høyt opp på logitskalaen uten å ha scoret på så mange av de mest krevende oppgavene. Andre elever havnet langt nede på skalaen, men resonerte relativt bra på enkelt oppgaver. Rasch-modellen legger til grunn for sine beregninger at en person som klarer å svare på de vanskeligste spørsmålene, også klarer de enkleste (Wright & Stone, 1979, s. 2-4). Dette medfører at modellen vil favorisere de elever som bruker gode tid på de vanskeligste oppgavene, og scorer så høyt som mulig på disse fremfor de elever som haster seg gjennom hele settet og sanker delpoeng her og der. Det er svært usannsynlig at noen av elevene som deltok i undersøkelsen hadde kunnskap om dette, og dermed er dette ikke noe som har påvirket resultatet. Om denne problemstillingen skulle bli aktuell, er det mulig å administrere oppgavene annerledes ved for eksempel å gi oppgavene elektronisk. Ved elektroniske undersøkelser kan man tvinge elevene til å avlegge endelig svar før de går videre til neste oppgave, samt at man kan gå inn å styre hvilke oppgaver elevene skal svare på ut fra om de svarer rett eller galt på det forgående spørsmålet.

6.3.1 De additive tenkere og tidligere forskning

Under gjennomgangen av dataen, skilte oppgaver som trigger additiv tenkning seg markant fra resten. Det er tidligere forsket mye på feilstrategien additiv tenkning innenfor proporsjonal resonnering (se for eksempel Bright, Joyner & Wallis, 2003; Karplus mfl., 1983; Koellner-Clark & Lesh, 2003; Misailidou & Williams, 2003; Tourniaire & Pulos, 1985). Misailidou og Willians (2003), fant i sin studie av manglende verdi oppgaver ut at noen oppgaver i større grad trigger additivt tenkning enn andre. Deres tilsvarende oppgave som min oppgave 13, far og sønn Andersen, samt oppgave 15, forstørring av et rektangel, ga størst utslag på additive feil i deres studie. Dette stemmer godt overens med mine resultater der disse to oppgavene havnet i en egen dimensjon. Dette forsterker indikasjonen på at noen oppgaver trigger additive løsningsstrategier i større grad enn andre. Misailidou og Williams hadde ingen oppgaver av typen sammenligning, og gir derfor intet grunnlag for å si sammenligne oppgave 11, som havnet i den andre enden av dimensjonsskalaen.

Koellner-Clarl og Lesh konkluderte i sin studie at evnen til å resonnere proporsjonalt utvikles gradvis gjennom en ikke lineær prosess der elevene går fra additive til multiplikative resonnerings strukturer (2003). I analysen av additive tenkere, dukket det opp tydelige inndelinger av de additive tenkere. De som tenkte additivt i noen oppgaver og multiplikativt på andre, havnet øverst på logitskalaen. Additivt tenkende elever som hovedsakelig løste oppgavene additivt, men som hadde innslag av multiplikativitet befant seg stort sett på midten av skalaen. Elevene som enten tenkte additivt eller hadde andre feilstrateger havnet lengst nede på logitskalaen sammenlignet med de andre additive tenkerne. Dermed underbygger den studien tanken om at additive løsninger er et springbrett til multiplikativ tenkning, og en gradvis prosess elevene må igjennom.

6.4 Videre forskning og didaktiske implikasjoner

Oppgavesettet til denne undersøkelsen er blitt utviklet fra grunn av, og kan med fordel jobbes videre på i flere forskjellige retninger. For det første hadde det vært utrolig spennende å få det matematiske emnet sannsynlighet inn i oppgavesettet for å se hvordan dette påvirker endimensjonaliteten. Er proporsjonal resonnering fortsatt enerådende da, eller er det plutselig flere faktorer som spiller inn? For det andre så er dette oppgavesettet utviklet med tanke på oppgave innholdet og vanskeligheten. Som påpekt flere steder i oppgaven, kan settet brukes til å måle elevenes ferdigheter i temaet. I så tilfelle bør oppgavesettet videreutvikles og bearbeides slik at det er bedre tilpasset til å bli brukt i skolen. Det at Rasch-analyse gir deg mye mer kvalitativ info en klassisk testteori, gjør den svært egnet til bruk av formativ vurdering. Resultatene kan gi klare pekepinn på hva de ulike elevene sliter med, og dermed hva læreren skal fokuserer på i oppgavevalg felles gjennomgang.

Studien er blitt gjort på et utvalg av 86 elever. Selv om dette er nok til å sikre valide tall ut fra Rasch-modellen, hadde det vært interessant å teste oppgavene i revidert form på et større utvalg med større geografisk spredning. Mitt utvalg stammer fra to skoler i samme fylket. En amerikansk undersøkelse viser at 74% av variasjonen til PISA prestasjonene til 15 åringene finnes innad i skolen, mens bare 24% er å finne skolene seg imellom (Wiliam, 2011, s. 16). Selv om William sine resultater antyder at det ikke vil være all verdens forskjell skolen seg imellom, hadde det likevel vært spennende å teste dette i Norge med det snevre temaet proporsjonal resonnering. Siden temaet ikke er nevnt eksplisitt i læreplanen, gir det større rom for individuelle forskjeller skolene seg imellom som det kunne vært spennende å avdekke om finnes.

Gjennom studien er det blitt vist at proporsjonal resonnering er en del av de fleste matematiske emner. Som påpekt innledningsvis, er emnet også en viktig del av hverdagsmatematikken. Selv om emnet ikke kommer tydelig frem i læreplanen, er det fortsatt et viktig emne å ha kunnskap om, samt bruke tid på i skolen. Undersøkelsen min bidrar forhåpentligvis med å tydeliggjøre innholdet og mangfoldigheten i konseptet og dermed anvendelsen av det. Her i landet er det heller ikke gjort mange studier på den didaktiske biten av temaet proporsjonal resonnering. Didaktikken er på mange måter en enda viktigere bit av lærerkunnskapen enn selve innholdet i faget og er derfor absolutt verd å undersøke nærmere. En spennende undersøkelse hadde vært å bruke dette oppgavesettet som kartlegging på hva elevene kan, og hva de sliter med, for ut i fra disse resultatene laget et undervisningsopplegg i proporsjonal resonnering.

6.5 Avsluttende betraktninger

Teorikapitlet startet med å se på de mange motsetninger og tilnærminger i matematikken. Det meste er hverken så enkelt, eller så svart hvit som man gjerne skulle ha hatt det til å være. Slik er det også innenfor temaet proporsjonal resonnering. Gjennom denne oppgaven er det ikke funnet en svart hvit grense for hva som definerer temaet. Til gjengjeld er horisonten utvidet for hva som kan inkluderes i den endimensjonale variabelen proporsjonal resonnering, og hva som burde ha vært med i den. Jeg har gitt mitt bidrag til mangfoldigheten, og håper noen andre tar opp stafettpinnen og nøster videre for å både avklare og utvide det evige spennende temaet proporsjonal resonnering.

7. Litteratur

Bakhtin, M. M. (1987). The problem of speech genres. I: M. M. Bakhtin & M. M. V. W. Holquist (red.), *Speech Genres and Other Late Essays* (s. 60-102). Austin: Austin, TX, USA: University of Texas Press.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I: D. Pimm (red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). Londres: Hoddor & Stoughton.

Baroody, A. J. (2011). Learning: A framework. I: F. Fennel (red.), *Achieving fluency : special education and mathematics* (s. 15-57). Reston Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Berk, D., Gorowara, C. C., Poetzl, C., & Taber, S. B. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(3), 113-135. doi: 10.1080/10986060903022714

Berulfsen, B., & Gundersen, D. (2000). *Fremmedord blå ordbok* (16. utg. utg.). Oslo: Kunnskapsforl.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2011). *Matematikk for lærere : 1* (5. utg. utg. Vol. 1). Oslo: Universitetsforl.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41-62.

Bond, T. G., & Fox, C. M. (2001). *Applying the Rasch model : fundamental measurement in the human sciences*. Mahwah, N.J: L. Erlbaum.

Bond, T. G., & Fox, C. M. (2015). *Applying the Rasch model : fundamental measurement in the human sciences* (3. utg.). New York: Routledge.

Botten, G. (2009). *Min lidle norske regnebog : noen dypdykk i ei lærebok i matematikk fra 1645*. Oslo: Universitetsforl.

Bright, G., Joyner, J., & Wallis, C. (2003). Assessing proportional thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(3), 166-172.

Cavanagh, R. F., & Waugh, R. F. (2011). The Utility of Rasch Measurement for Learning Environments Research I: R. F. Cavanagh & R. F. Waugh (red.), *Applications of Rasch Measurement in Learning Environments Research* (s. 3-18). Rotterdam: Sense Publishers

Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The Evolution of Mathematical Explorations in Open-Ended Problem-Solving Situations. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 302-324. doi: 10.1016/j.jmathb.2005.09.007

Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher, 23*(7), 13-20.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7th ed. utg.). London: Routledge.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gu, L., Hunag, R., & Marton, F. (2004). Teaching with Variation: A Chinese Way of Promoting Effective Mathematics Learning. I: L. Fan, N. Wong, J. Cai & S. Li (red.), *How Chinese Learn Mathematics : Perspectives from Insiders* (s. 309-347): World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' prportional reasoning on rate problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233. doi: 10.1007/BF00410539

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., Mathematics Learning Study, C., National Research Council Center for Education, D. o. b., & social sciences, e. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring Proportional Reasoning through the Footprint Problem. *School Science and Mathematics, 103*(2), 92-98. doi: 10.1111/j.1949-8594.2003.tb18224.x

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding : essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (third ed. utg.). New York: Routledge.

Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three Balloons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 254-261.

Leung, F. (2001). In search of an East Asian identity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(35), 35-51. doi: 10.1023/A:1017936429620

Linacre, J. M. (2002). Optimizing Rating Scale Category Effectiveness. *Journal of applied measurement*, *3*(1), 85-106.

Linacre, J. M. (2003). Rasch Power Analysis: Size vs. Significance: Infit and Outfit Mean-Square and Standardized Chi-Square Fit Statistic.   Hentet, fra https://www.rasch.org/rmt/rmt171n.htm

Linacre, J. M. (2017). Dimensionality: contrasts & variances.   Hentet 03.03.2017, fra http://www.winsteps.com/winman/principalcomponents.htm

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I: L. Lee (red.), *Approaches to algebra* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Masters, G. N. (1992). Rasch-Andrich Thresholds and Rasch-Thurstone Thresholds. *Rasch Measurement Transaction*, *5*(4), 191.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 335-368. doi: 10.1016/S0732-3123(03)00025-7

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(1), 36-53. doi: 10.1080/10986060903465822

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *Mathematics Education, 48*(5), 611-632. doi: 10.1007/s11858-016-0799-3

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Sjaastad, J. (2014). Enhancing measurement in science and mathematics education through Rasch analysis: Rationale and properties. *Nordina (elektronisk ressurs), 10*(2), 212-230.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Small, M. (2012). *Good questions: great ways to differentiate mathematics instruction* (2. utg.). New York: Teachers college press National Council of Teachers of Mathematics Nelson Education.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards Based Mathematics Instruction: A Casebook for Professional Development*. New York: Teachers college press.

Stemn, B. S. (2008). Building Middle School Students' Understanding of Proportional Reasoning through Mathematical Investigation. *Education 3-13, 36*(4), 383-392. doi: 10.1080/03004270801959734

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258-288. doi: 10.1080/10986060903253954

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204. doi: 10.1007/PL00020739

Usiskin, Z. (2015). What Does It Mean to Understand Some Mathematics? In S. J. Cho (red.), Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (s. 821-841): Springer International. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (9th ed. utg.). Essex: Pearson.

Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., & Verschaffel, L. (2010). Just Answering... or Thinking? Contrasting Pupils' Solutions and Classifications of Missing-Value Word Problems. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 12*(1), 20-35. doi: 10.1080/10986060903465806

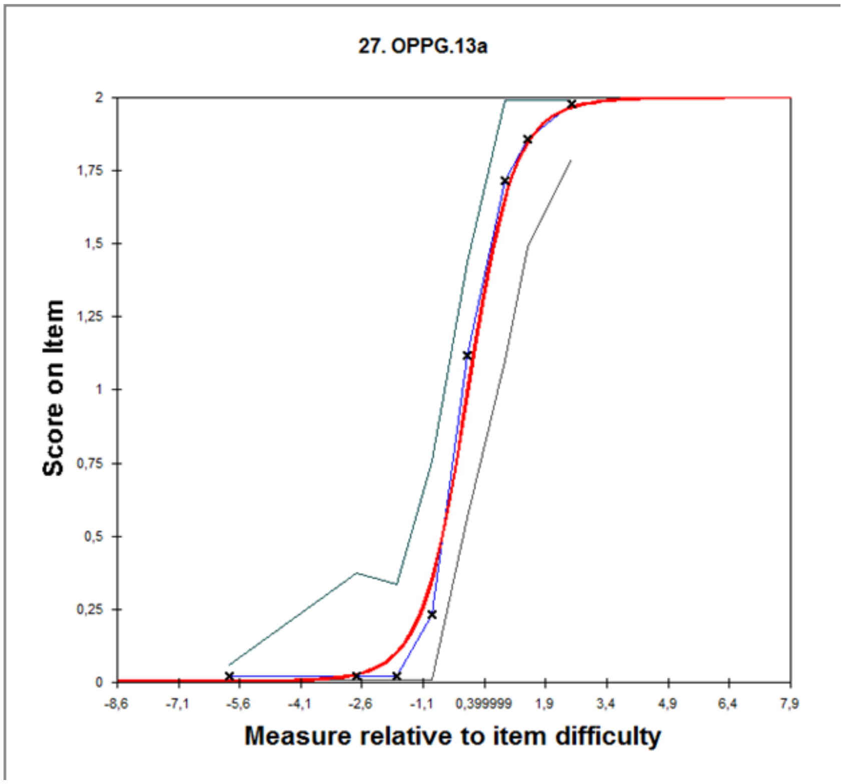
Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment*. Bloomington, Ind: Solution Tree Press.

Wright, B. D., & Stone, M. H. (1979). *Best test design*. Chicago: Mesa Press.

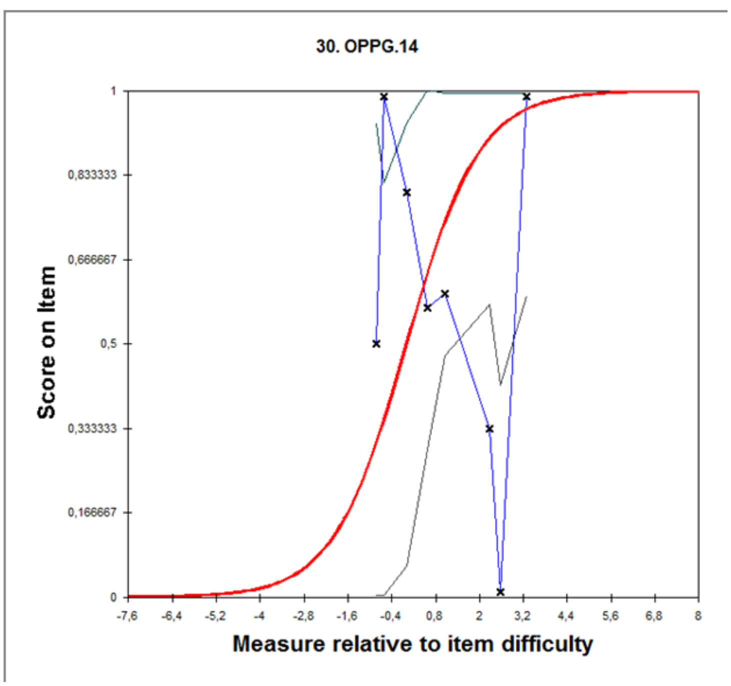
Wu, M., & Adams, R. (2007). *Applying the Rasch model to psycho-social measurement: A practical approach.* Melbourne: Educational Measurement Solutions.

8. Apppendiks 1, eksempel på en god og en dårlig ICC-kurve

Eksempel på en pen ICC-kurve, som føyer seg etter modellen, her illustrert ved oppgave 13a



Eksempel på en dårlig tilpasset ICC-kurve, her illustrert ved oppgave 14



9. Appendiks 2, Oppgaveheftet

Undersøkelse proporsjonal resonnering

Takk for at du tar deg tid til å delta i denne undersøkelsen, tar den alvorlig og gjør så godt du kan! Husk at ingenting av det du gjør i denne undersøkelsen har en direkte innvirkning på dine karakterer.

Tillatte hjelpemidler: Linjal

Elev nummer: _________

Hvilket kjønn er du:

- ☐ Gutt
- ☐ Jente

1. **Har du hørt ordet forholdstall før?** Hvis ja, beskriv når vi bruker det, og hva det står for

2. **Har du hørt uttrykket proporsjonalitet før?** Hvis ja, beskriv når vi bruker det, og hva det står for

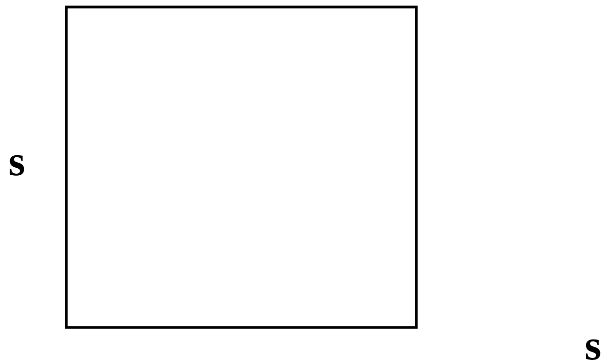
3. **Hvilken plante vokser mest?** For to uker siden ble to planter målt til å være 8 cm og 12 cm høy. I dag er de 11cm og 15 cm. Knut mener den minste planten har vokst mest, mens Nina mener de har vokst like mye. Hvordan tror du Knut og Nina har tenkt? Kan begge ha rett? Begrunn dine forslag.

4. **Hvilken kino er billigst?** Fam. Hansen dro på Olav Tryggvasons kino og fikk 6 billetter for 120kr. Fam. Olsen drog på Frøya kino og fikk 4 billetter for 84kr.

a) Alle familiemedlemmer betalte lik inngangspris. Hvilken kino er billigst?

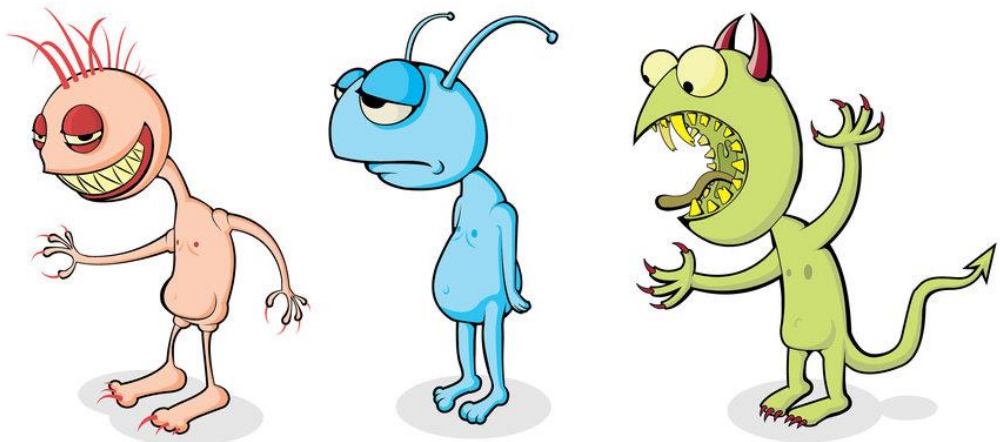
b) Voksenbillettene koster det dobbelte av barne- og ungdomsbillettene. Familiene fikk fortsatt 6 billetter for 120kr og 4 billetter for 84 kr. Endrer dette på hvilken kino som er billigst? Hvorfor/Hvorfor ikke?

5. Beskriv sammenhengen



Hvis du dobler sidelengden s, hva skjer så med omkretsen til kvadratet?

6. TRE SULTNE MONSTRE



Tre slitne og sultne monstre gikk for å sove. Med seg hadde de en pose med kjeks. Ett monster våknet opp og spiste $\frac{1}{3}$ av kjeksene og la seg så til å sove videre. Senere våknet et annet monster og spiste $\frac{1}{3}$ av de gjenværende kjeksene før det gikk og la seg til å sove igjen. Til slutt våknet det tredje monsteret opp og spiste $\frac{1}{3}$ av de gjenværende kjeksene.

a) Da siste monster var ferdig med å spise, var det 8 kjeks igjen. Hvor mange kjeks var i posen til å begynne med? Begrunn dit svar.

b) Kunne det ha vært igjen et annet antall kjeks enn 8 uten å måtte dele opp kjeks? Kom med eksempler og begrunn svaret ditt. Ser du et mønster?

7. Mating av Åler

I en beholder i dyrehagen svømmer det 3 åler, Alan, Birk, og Connie.

Alan er 25 cm lang

Birk er 15 cm lang

Connie er 5 cm lang

Ålene blir matet med sardiner. Hvor mange sardiner en ål får, står i forhold til hvor lang den er.

Hvis Connie får 2 sardiner, hvor mange burde da Birk og Alan få?

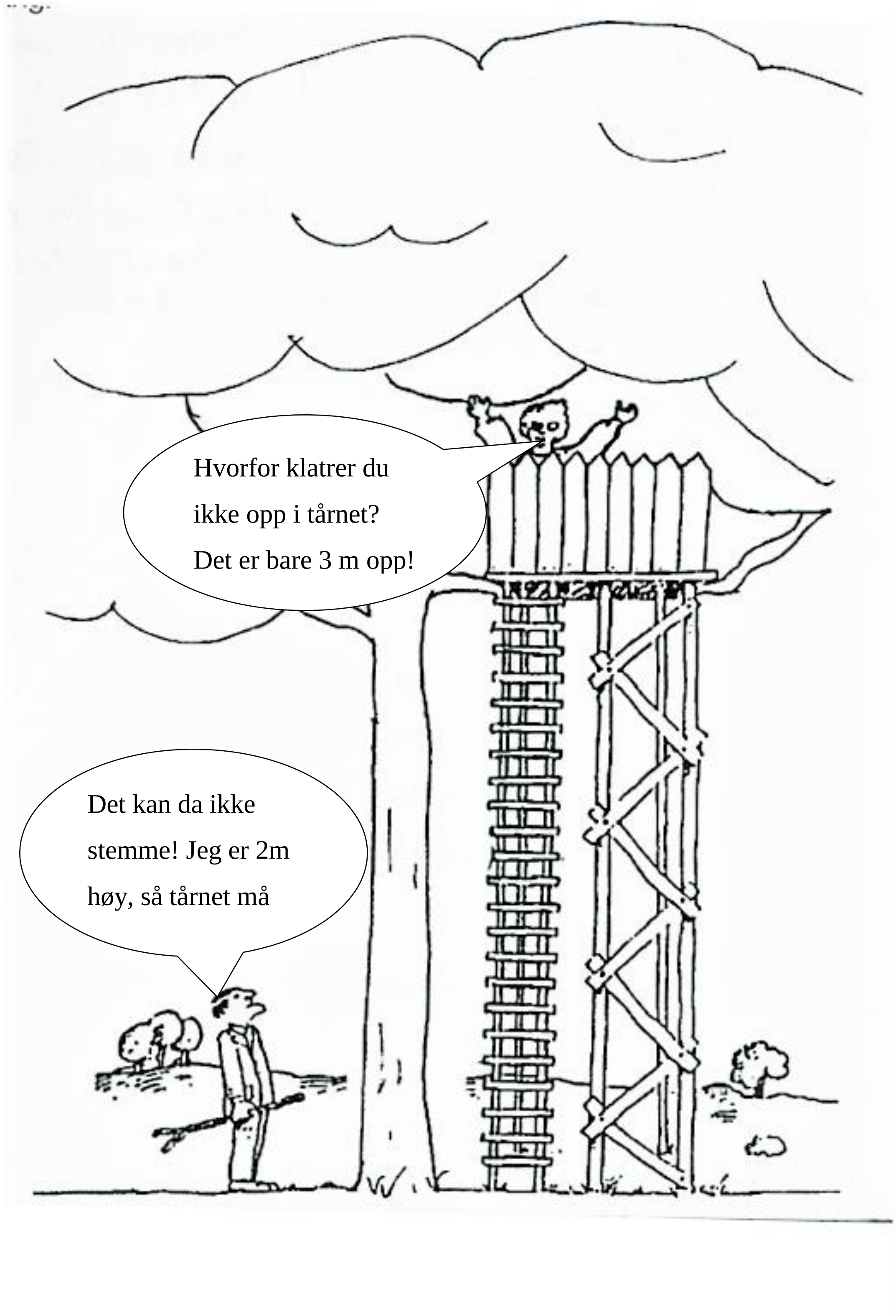
8. Hvem spiste mest?

Fredrik spiste $\frac{1}{2}$ pizza. Lise spiste $\frac{1}{2}$ av en annen pizza. Fredrik påstår han spiste mer en Lise, mens Lise er overbevist om at de spiste like mye.

a) Kan du tegne og forklare en situasjon der Lise har rett?

b) Kan du tegne og forklare en situasjon der Fredrik har rett?

9. Hva mener du?



Hva mener du om utsagnene i tegningen?

10. Fyll inn

Finn et tall som kan stå over og/eller under brøkstrekene som mangler tall slik at det blir lik tallverdi på begge sider av likhetstegnet.

a) $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}$

b) $\frac{3}{6} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\frac{1}{3} = \frac{\quad}{9}$

d) $\frac{4}{8} = \frac{1}{\quad}$

e) $\frac{\quad}{3} = \frac{\quad}{6}$

f) $\frac{2}{\quad} = \frac{1}{12}$

g) $\frac{\quad}{2} = \frac{4}{\quad}$

h) $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

i) $\frac{2}{\quad} = \frac{\quad}{6}$

j) Flere av deloppgavene over kan ha flere svar. Hvilke deloppgaver har flere svaralternativer?

k) Beskriv hvilke tall som passer inn i deloppgavene med flere svaralternativer. Finnes det et mønster? (bruk ord og/eller matematiske symboler).

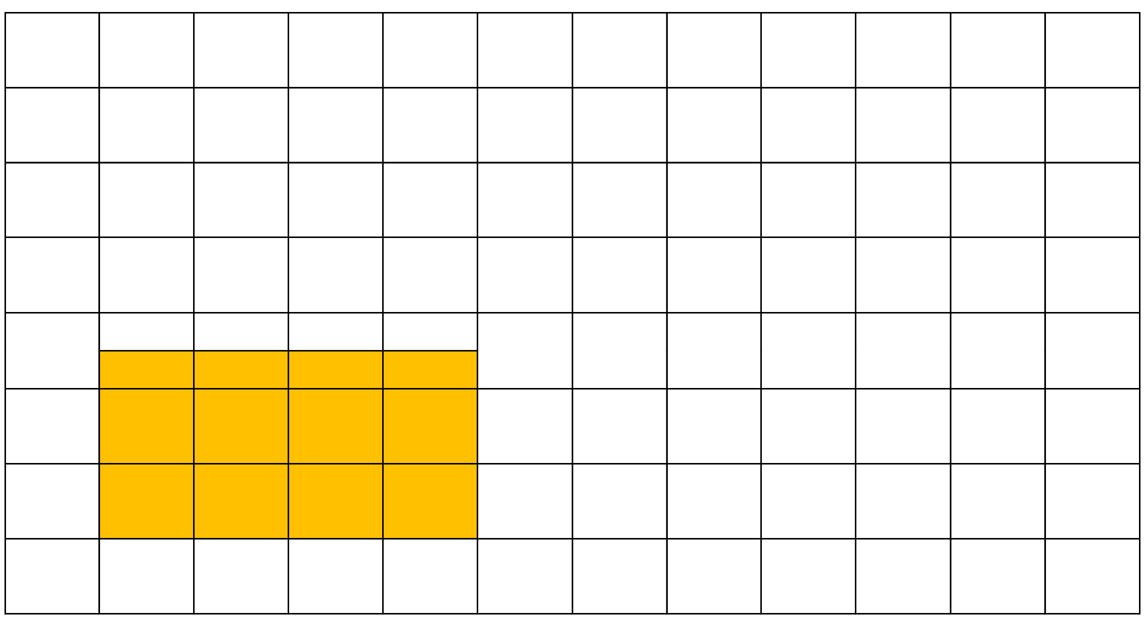
11. Hvilken saft smaker mest bringebær?

a) Jeg har 2 oppskrifter på bringebærsaft. Oppskrift 1 bruker 2 kopper bringebær-konsentrat og 3 kopper vann. Oppskrift 2 bruker 5 kopper bringebær-konsentrat og 7 kopper vann. Hvilken oppskrift skal jeg bruke om jeg ønsker å lage den saften med mest bringebærsmak?

b) Prøv så godt du kan å forklare for Per, som går i 4. klasse, hvilken oppskrift fra deloppgave a) som smaker mest bringebær.

c) Linda har to nye bringebærsaftoppskrifter. I oppskrift A brukes det 1 kopp konsentrat og 3 kopper vann. I oppskrift B brukes det 2 kopper konsentrat og 7 kopper vann. Begrunn hvorfor oppskrift A har mest bringebærsmak.

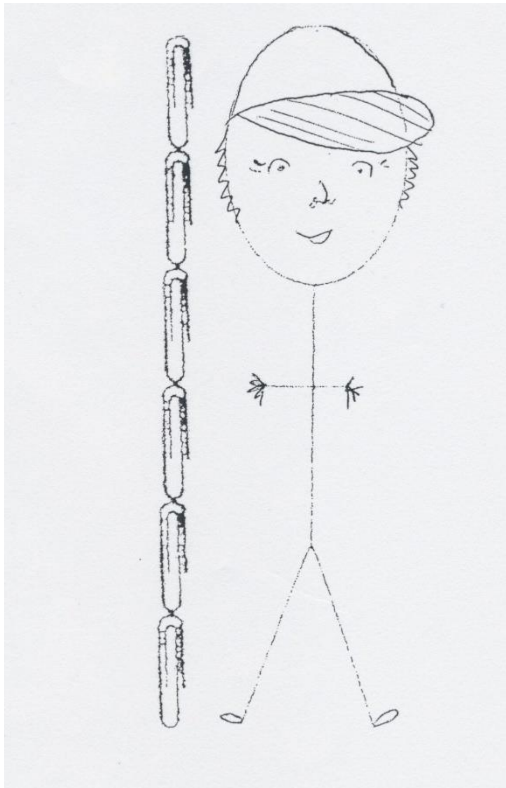
12. Tegn et nytt rektangel



Tegn et nytt rektangel i rutenettet som har samme areal som det som allerede er tegnet, men som har andre sidelengder.

13. Far og sønn Anderssen.

Her er et bilde av sønnen til herr Anderssen. Når vi måler høyden hans i binders, er han 6 binders høy. Måler vi høyden til Anderssens sønn i knapper, er han 4 knapper høy.



a) Herr Andersen er selv 6 knapper høy. Hvor høy ville Herr Anderssen ha vært om vi målte han i binders? Vis hvordan du kommer frem til svaret.

b) Herr Anderssen har en bil som er 15 binders lang. Hvor lang er hans bil om vi målte i den knapper? Vis hvordan du kommer frem til svaret.

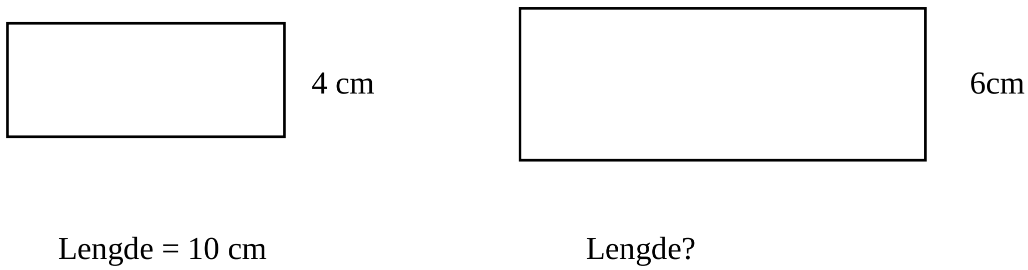
c) Bilen til herr Anderssen er 7 1/2 binders bred. Hvor bred er den i knapper? Vis hvordan du kommer frem til svaret.

14. Hvilket rektangel er mest kvadratisk?

Hvilken av to rektangler er mest kvadratisk, A: 35cm x 39 cm, eller B: 22cm x 25 cm? Tegn, vis og forklar hvordan du kom frem til svaret

15. Hva er lengden?

a) Disse to rektanglene har nøyaktig same form, men det ene er større enn det andre. Hva er lengden på det største rektangelet?



b) Vis og forklar hvorfor du mener du har kommet frem til rett svar i oppgave a)

Har du kommentarer eller synspunkter på oppgavene, introduksjonen eller noe annet på hjertet? Gi gjerne en tilbakemelding her.

Takk for ditt bidrag!

10. Appendiks 3, Oppgavekildene

Oppgavenavn	Kilde
Hvilken plante vokser mest?	Tilpasset fra van de Walle m.fl. (2015)
Hvilken kino er billigst?	Tilpasset fra Lamon (2012)
Beskriv sammenhengen	Tilpasset fra Lamon (2012), opprinnelig en sirkel
Tre sultne monstre	Watson (1988)
Mating av åler	Tilpasset fra Misailidou og Williams (2003)
Hven spiste mest?	Tilsendte oppgaver per mail som danner utgangspunktet for Wong (2006)
Hva mener du	Lamon (2012)
Fyll inn	Tilpasset fra Charalambous og Pitta-Pantazi (2007) og Osana m.fl (2006).
Hvilken saft smaker mest bringebær?	Tilpasset fra Stein m.fl. 2009 og Lamon (2012)
Tegn et nytt rektangel	Watson m.fl. (2013)
Far og sønn Anderssen	Tilpasset fra Lamon (2012)
Hvilket rektangel er mest kvadratisk?	Tilpasset fra van de Walle m.fl. (2015) og Lamon (2012)
Hva er lengden?	Misailidou og Williams (2003)

Refferanseliste oppgavekildene

Charalambous, C.Y, & Pitta-Pantazi, D. (2007). *Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions*. Educational Studies in Mathematics, 64, s. 293- 316.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* New York: Taylor & Francis.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 335-368. doi: 10.1016/S0732-3123(03)00025-7.

Osana, H. P., Lacroix, G. L., Tucker, B. J. og Desrosiers, C (2006). *The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics task.* Journal of Mathematics Teacher Education 9. s. 347–380.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver E. A. (2009) *Implementing standard-based mathematics Instruction: A Casebook for Professional development.* 2. Utgave. New York: Teacher College Press.

van de Walle, J. A., Karp, K.S., Bay-Williams, J.M. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally.* Harlow: Pearson Education Limited

Watson, J. M. (1988). *Three Hungry Men and Strategies for Problem Solving.* For the Learning of Mathematics , 8(3) s. 20-26.

Watson, A., Jones, K. og Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: research-based guidance for ages 9-19.* Oxford: Oxford university press.

Wong, M. (2006). *Developing a Diagnostic Assessment Instrument for Identifying Students' Understanding of Fraction Equivalence.* Hentet 15.09.2016 fra: https://old.acspri.org.au/conference2006/proceedings/streams/Paper%2019%20wong_monica_submitted.pdf

11. Appendiks 4, samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

En kvantitativ analyse av proporsjonal resonnering

Bakgrunn og formål
Forskningsprosjektet er en masterstudie ved NTNU, avdeling for lærer og tolk. Min masteroppgave går hovedsakelig ut på å utarbeide et vurderingsverktøy for å analysere ungdomsskoleelevers proporsjonale resonnering. Gjennom prosjektet ønsker jeg å drøfte den skriftlige prøveformen. Hva måles? og hva kan prøveresultatene brukes til? Hvordan kan jeg som fremtidig lærer bruke prøveresultatene på en konstruktiv måte som kommer elevene til gode?

[…] skole har takket ja til å være med på prosjektet. Det blir satt av tid i undervisningen til å gjennomføre oppgavesettet. De som velger å ikke delta i undersøkelsen vil løse oppgavesettet sammen med resten av klassen, men resultatene blir ikke med i studien.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Fokuset til prosjektet er å utvikle et godt oppgavesett. Dersom det er tvil rundt noen av oppgavene, kan det være behov for å intervjue enkeltelever for å finne ut hvordan de løste de aktuelle oppgavene. Det vil bli foretatt lydopptak av intervjuene.
Spørreskjema og intervjuguide er tilgjengelig på forespørsel.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det samles ikke inn personopplysninger utover alder og kjønn. Tilgang til datamaterialet som samles inn vil være tilgjengelig for masterstudent og veilederen. Data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lyd-opptak vil slettes.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 01.08.2017. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med studenten Anne van der Wijst,
mail: […] mob. […], eller veileder førsteamanuensis Trygve Solstad, mail, […], tlf. […]

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i Masterstudien om proporsjonal resonnering

Forelders/ foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i forskningsprosjektet.

Barns navn/klasse:____

Jeg samtykker i at: (Kryss av der det passer)

- ☐ Resultater fra mitt barn sin besvarelse kan benyttes i masteroppgaven.

- ☐ Mitt barn deltar i intervjuer og at det gjøres lydopptak av intervjuene til transkribering og analyse.

Sted og dato:____

Forelders/ foresattes underskrift: ____

Tusen takk!

12. Appendiks 5, retteveiledning

Rette veiledning Partallshefter

Undersøkelse proporsjonal resonnering

1. **Har du hørt ordet forholdstall før?** Hvis ja, beskriv når vi bruker det, og hva det står for.

0p: Har ikke hørt ordet forholdstall før, eller skriver bare ja det har jeg hørt om, uten å gi noen form for forklaring eller beskrivelse på når vi bruker det og hva det står for.

-Gir feil beskrivelse av forholdstall

1p: Har hørt ordet forholdstall før og klarer å redegjøre for noe av konseptet forholdstall, eks at det brukes i målestokk regning, forhold mellom to størrelser (uten å legge vekt på at forholdet skal være konstant).

2p: Har hørt ordet forholdstall før og klarer å redegjøre godt for dette. Kriterier som må være med i forklaringen:

-et bestemt forhold mellom to størrelser som er konstant

-Minimum at det brukes når vi forstørrer/forminsker, gjerne at det nevnes at forholdstall brukes som brøkdel av en hel, som prosent, i formlike trekanter, når noe er oppgitt med kilopris eller enhetspris, når vi kjører med konstant fart, når vi skal regne med valutakurser, når vi skal beregne gjennomsnitt, når vi skal regne med kroneverdi og prisindeks ol.

2. **Har du hørt uttrykket proporsjonalitet før?** Hvis ja, beskriv når vi bruker det, og hva det står for

0p: Har ikke hørt ordet proporsjonalitet før, eller skriver bare ja det har jeg hørt om, uten å gi noen form for forklaring eller beskrivelse på når vi bruker det og hva det står for.

1p: Har hørt ordet før, men gir en svært mangelfull forklaring på når vi bruker det, og hva det står for. Eks, er noe som har med grafer og gjøre, brukes sammen med en proporsjonalitets konstant (uten å forklare mer rundt saken),

2p: Har hørt ordet proporsjonalitet før og klarer å redegjøre godt for dette. Kriterier som må være med i forklaringen:

-f(x)=kx

Eller -Proporsjonale situasjoner inneholder to variable størrelser som står i et bestemt, konstant forhold til hverandre

3. **Hvilken plante vokser mest?**

0p: -ikke svart på oppgaven (kodes 9)

-kommer med en påstand at enten Knut eller Nina har rett, uten å forklare/begrunne hvorfor

1p: -Forklarer og argumenterer for at kun Nina har rett, additiv tankegang

2p: -Kan forklare hvorfor Knut har rett og dermed følge en multiplikativ tankegang.

4. **Hvilken kino er billigst?**

A)

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei)

-feil svar uten vist utregning

1p: -Kun rett svar uten forklaring eller utregning

-rett tankegang med slurvefeil i utregningen

2p: -viser tydelig utregningen sin/sin tankegang, og kommer frem til rett svar

B)

0p: -ikke besvart oppgaven (kodes 9).

-viser noen utregninger uten å gi en konklusjon/forklaring

-påstår/viser/begrunner for at det ikke endrer på hvilken kino som er billigst

1p: -svarer at det endrer på hvilken kino som er billigst uten å begrunne hvorfor eller vise en utregning som viser at prisen endrer seg.

2p: -Eleven redegjør for valg av antall voksne per familie, og viser ved hjelp av eksempler/graf/utregning at antall voksne påvirker hvilken kino som er billigst.

5. **Beskriv sammenhengen**

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9).

-gir en uriktig forklaring på hva som skjer med omkretsen

-sier kvadratet blir større

1p: - sier omkretsen blir større

2p: **-**påstår at omkretsen dobles, gjerne med forklaring og/eller beregning

3p: **-** Forklarer at sidelengden og omkretsen er proporsjonale.

-forklarer sammen hengen generelt, ikke ut fra enkelt eksempler

6. **Tre sultne monster**

A)

0p: -eleven har ikke svart på oppgaven (kodes 9)

-eleven gjetter på et tall, eller skriver et tall, uten forklaring på hvorfor de mener dette er antall kjeks til å begynne med

1p: -elevene er inne på tankegangen at 8 kjeks er $\frac{2}{3}$ av det som var igjen etter monster 2, men klarer ikke å følge denne utregningen til mål/regner feil

2p: -eleven bruker rett resonnering til å komme frem til rett svar. (8=$\frac{2}{3}$ av det som var igjen etter monster 2. 12 = $\frac{2}{3}$ av det som var igjen etter monster 1 osv).

B)

0p: -svarer ikke på oppgaven (kodes 9)

-svarer at det er flere muligheter, uten å komme med konkrete eksempler

1p: -Kommer med et rett eksempel helst med en begrunnelse

2p: -Eleven ser et mønster i hvilke andre tall enn kunne starter med, og klarer å formulere en uformell regel ut fra en begrunnelse (8. gangen)

7. **Mating av Åler**

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei)

-feil svar uten vist utregning

1p: -Kun rett svar uten krav til forklaring eller utregning

7i. Forklart fremgangsmåten?

0p: nei

1p: ja, får også poeng for rett fremgangsmåte med slurvefeil

8. Hvem spiste mest?

NB! Besvaerlsene til del oppgaven a og b slåes sammen til en samlet evaluering.

0p: -har ikke svart på oppgaven (kodes 9)

-Gir kun Lise rett, og viser dermed ingen forståelse for valg av enhet.

1p: **-**Eleven tegner og/eller forklarer at hvem som har rett avhenger av om pizzaen de spiser er like stor eller ikke

9. Hva mener du?

0p: -ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-svar som vet ikke, aner ikke ol

-svar som, jeg tror personen på bakken har rett, uten noe form for forklaring

1p: **-**argumenterer uten å bruke matematikk, men redegjør saklig for sitt synspunkt. Eks: personen på bakken har høydeskrekk, så later derfor at tårnet er lavere enn det er. Eks2: Barn tror det er kortere ned til bakken enn det er osv.

-elevene argumenterer matematisk for høyden på tårnet men regner feil

-eleven resonnerer matematisk rundt høyden, uten å komme med et konkret forslag om høyden på tårnet.

2p: - Eleven argumenterer for høyden på tårnet ut fra realistiske mål og anvender matematikk i sitt resonnement

-Eks: bruker høyden på personen på bakken som utgangspunkt for å estimere en høyde uavhengig av de to forslagene personene kommer med.

10. Fyll inn

a) feil svar **0p, r**ett svar **1p,** ingen svar kodes 9
b) feil svar **0p,** rett svar **1p,** ingen svar kodes 9
c) feil svar **0p, r**ett svar **1p,** ingen svar kodes 9
d) feil svar **0p, r**ett svar **1p,** ingen svar kodes 9
e) feil svar **0p,** rett svar **1p,** ingen svar kodes 9
f) feil svar **0p,** rett svar **1p,** ingen svar kodes 9
g) feil svar **0p, r**ett svar **1p,** ingen svar kodes 9
h) feil svar **0p,** rett svar **1p,** ingen svar kodes 9
i) feil svar **0p,** rett svar **1p,** ingen svar kodes 9

j) feil svar **0p,** minst 3 rette svar **1p,** oppgir alle korrekte deloppgaverog ingen for mange **2p,** ingen svar kodes 9

k) **0p:** **-** feil svar

-ingen svar kodes 9

-gir 1 ekstra eksempel, men ingen beskrivelse/forklaring

1p: **-** klarer å skille mellom uendelig mange løsninger og eksakt antall løsninger

2p: - forklarer og argumenterer for de ulike mønstrene NB! Er ingen krav om korrekt bruk av matematiske benevnelser og symboler, men krever rett tankegang.

11. Hvilken saft smaker mest bringebær?

A)

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-feil svar uten vist utregning

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei), eks oppskrift 1 fordi den bruker færrest kopper vann

1p: **-** bare rett svar, uten forklaring eller utregning, eller med mangelfull forklaring.

11Ai. Forklart fremgangsmåten?

0p: **-**nei

-ja, men bruker en ukorrekt fremgangsmetode

1p: ja, får også poeng for rett fremgangsmåte med slurvefeil

B)

0p: **-**ingen forklaring (kodes 9)

-feil forklaring

-svada forklaring

-forklaringen er godt tilpasset aldersgruppen, men feil matematisk

1p: -prøver å tilpasse svaret til aldersgruppen, men forklarer instrumentelt/dårlig på grunn av det. NB! Tankegangen må være matematisk korrekt for å få uttelling

-gir en god forklaring, dårlig tilpasset aldersgruppen

2p: **-**gir en god og tydelig forklaring på hvordan de selv kom frem til svaret rettet mot aldersgruppen. NB! Får også 1p ved rett tankegang, men feil sluttsvar.

C)

0p: **-**ingen forklaring (kodes 9)

-feil forklaring

1p: **-**gir en god og tydelig forklaring på hvordan de selv kom frem til svaret.

12. Tegn et nytt rektangel

0p: -tenger et rektangel med ulikt areal

-tegner et formlikt rektangel

-tegner en annen figur enn et rektangel

-svarer ikke på oppgaven (kodes 9)

1p: -Tegner et rektangel med samme areal, men med andre sidemål enn de som allerede er tegnet.

13. Far og sønn Anderssen.

A)

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei)

-feil svar uten vist utregning

1p: -Rett svar uten krav til forklaring eller utregning

-rett tankegang med slurvefeil i utregningen

2p: -viser tydelig utregningen sin/sin tankegang, og kommer frem til rett svar. NB! Her er det godkjent å vise utregning i form av tegnede knapper vedsiden av figuren i oppgavesettet.

B)

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes9)

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei)

-feil svar uten vist utregning

1p: -Kun rett svar uten forklaring eller utregning

-rett tankegang med slurvefeil i utregningen

2p: -viser tydelig utregningen sin/sin tankegang, og kommer frem til rett svar. NB! Her er det godkjent å vise utregning i form av tegnede knapper vedsiden av figuren i oppgavesettet

C)

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei)

-feil svar uten vist utregning

1p: -Kun rett svar uten forklaring eller utregning

-rett tankegang med slurvefeil i utregningen

2p: -viser tydelig utregningen sin/sin tankegang, og kommer frem til rett svar. NB! Her er det godkjent å vise utregning i form av tegnede knapper vedsiden av figuren i oppgavesettet

14. Hvilket rektangel er mest kvadratisk?

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei)

-feil svar uten vist utregning

1p: -Kun rett svar uten krav til forklaring eller utregning

14i. Forklart fremgangsmåten?

0p: **-**nei

-bruker feil fremgangsmetode

1p: ja, får også poeng for rett fremgangsmåte med slurvefeil

15. Hva er lengden?

A)

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-Feil fremgangsmetode (uansett om svaret blir rett eller ei)

-feil svar uten vist utregning

1p: -rett svar, ingen krav om vist utregning

B)

0p: - ikke besvart oppgaven (kodes 9)

-oppgir feil/mangelfull forklaring, eks brukte regelen, fordi læreren sier at det er slik vi løser denne typen oppgaver.

1p: - gir en matematisk begrunnelse for hvorfor deres svar i a er rett.

13. Appendiks 6, Boksplott åpne oppgaver