Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

Christine Vang

Elevers strategier i prosentregning, og læreverks framstilling av temaet.

En studie om forholdet mellom elevers intuitive modeller og forståelse, og læreverks presentasjon av temaet prosent.

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk
Veileder: Heidi Dahl
Trondheim, juni 2017

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Christine Vang

Elevers strategier i prosentregning, og læreverks framstilling av temaet.

En studie om forholdet mellom elevers intuitive modeller og forståelse, og læreverks presentasjon av temaet prosent.

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk
Veileder: Heidi Dahl
Trondheim, juni 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Med denne oppgaven avslutter jeg min seks år lange utdanning på lærerskolen, først på Høgskolen i Nord-Trøndelag, og deretter på NTNU. Til tross for at prosessen med å skrive en masteroppgave tidvis har virket som helt umulig, og som det mest frustrerende i hele verden, angrer jeg ikke et sekund nå som prosessen endelig er ved veis ende. Å få dette dypdykket inn i den matematikkdidaktiske verden har gitt meg verktøy som gjør meg bedre rustet til å møte de utfordringer skolematematikken har å by på.

Jeg vil først sende en stor takk til min veileder Heidi Dahl. Takk for alle innspill, god veiledning og støtte i skriveprosessen. Takk for at du alltid er positiv, og har hjulpet meg videre i oppgaven de ganger jeg har sittet fast og sett svart på alt.

Takk til mine foreldre, søsken og venner som alltid stiller opp. Både når jeg har trengt hjelp til oppgaven, men også når jeg har trengt et avbrekk. En spesiell takk til mamma for god hjelp med korrekturlesning.

Og sist men ikke minst vil jeg takke verdens beste Fredrik, som gjennom hele skriveprosessen har vært god støtte, drahjelp, diskusjonspartner og studiepartner. Tiden som masterstudent ville vært mye vanskeligere om jeg ikke hadde hatt deg å jobbe sammen med, og lette mine frustrasjoner til.

Christine Vang

Levanger, mai 2017

Innhold

1. Innledning: Hvilket læringsutbytte har elevene?

1.1. Bakgrunn for studien

Før jeg startet på lærerskolen arbeidet jeg som lærer i to år ved en ungdomsskole. På disse to årene fikk jeg blant annet mulighet til å undervise flere mindre grupper med elever i matematikk. I mange av tilfellene var dette elever som slet med motivasjon i faget, og flere av dem hadde det vi kan betegne som lav måloppnåelse i faget. Elevene trakk ofte fram at faget var vanskelig, og at de ikke skjønte matematikken, eller hva de skulle med den. Jeg tenkte den gang ofte på at matematikken skulle vært presentert på en annen måte, men i mangel på de nødvendige redskaper til å gjøre dette ble det som oftest til at vi gikk rett på formalmatematikken, med formler, algoritmer og oppskrifter.

Det har vært rettet mye kritikk mot matematikkundervisningen i norsk skole. Mye av kritikken går på at elevene ikke har et tilfredsstillende læringsutbytte. I rapporten Nordtveit og Pettersen (2016) har skrevet i forbindelse med resultatene av PISA-undersøkelsen gjennomført i 2015, presiserer de at både høyt presenterende elever, og lavt presterende elever i for liten grad opplever å møte oppgaver som gir mulighet til å utvikle sin matematiske kompetanse. Dette til tross for at kunnskapsdepartementet (2015a; 2015b i Nordtveit og Pettersen 2016) påpeker at matematikkundervisningen i norsk skole skal gi elevene mulighet til å utvikle sin kompetanse både i dybden og bredden (Nordtvedt & Pettersen, 2016).

Wæge og Nosrati (2015) som begge er tilknyttet Matematikksenteret, trekker i sin rapport fram at undervisningen i mange norske klasserom er svært tradisjonell. Det som kjennetegner denne typen undervisning er at det er et stort resultatrettet fokus. Dette betyr at fokuset i stor grad er på å produsere korrekte svar ut fra algoritmer, regler og framgangsmåter. Å kjenne til disse oppskriftene blir det viktige, mens det å se på de matematiske sammenhengene som inngår i et matematisk konsept får mindre oppmerksomhet (Wæge & Nosrati, 2015). Grønmo, m fl. (2010 i Botten-Verboven et al, 2010) peker på at dette støttes av undersøkelser som TIMMS og TIMMS Advanced. I disse undersøkelsene dokumenteres det at norske elever arbeider mer med oppgaveregning enn elever i de landene som skårer høyere på disse testene.

Undervisningstradisjonen har fra flere hold vært kritisert for at dette i lengden ikke er en tilstrekkelig arbeidsform dersom målet er å gi elevene en dyp og god forståelse for matematikken. Et slikt fokus på oppgaveløsning gir ikke en helhetlig matematisk kompetanse

(Botten-Verboven, et al., 2010). Ønsker man at elevene skal ha en god forståelse for et matematisk konsept, må man kreve at de kan mer enn bare å løse oppgavene (Hiebert & Lefevre, 1986).

På bakgrunn av denne kritikken har det gradvis vokst fram en endring i synet på hvordan matematikkfaget skal undervises, og på hva elevene skal sitte igjen med etter undervisningen. Blant dette finner vi teorien *Realistic mathematics education,* som videre i oppgaven vil bli omtalt som RME. Denne undervisningsteorien er spesifikk for matematikk, og legger vekt på at matematikken skal knyttes tett opp mot elevenes hverdag og kjente fenomener i hverdagen, som så kan transformeres til mer generell matematikk. På denne måten vil matematikken ha en større mening for elevene enn den de får når fokuset i undervisningen er på å lære seg algoritmer. Gjennom å arbeide med kontekstoppgaver, og gjennom å utvikle modeller som representerer både situasjonen som er beskrevet i konteksten, og som kan benyttes mer generelt om det matematiske konseptet, skal elevene få innblikk i den formelle matematikken (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; 2002). Teorien er blitt benyttet av mange forskere innenfor mange ulike matematiske temaer til å vise hvordan man kan gi elever en dypere og bedre forståelse for et matematisk konsept (Fosnot & Dolk, 2002; Gravemeijer, 2004).

Selve prosentbegrepet er universelt, og det danner en bro mellom hverdagslige konsepter og problemer, og det matematiske konseptet *multiplikative strukturer* (Parker & Leinhardt, 1995). Gjennom sin forskning på temaet *Prosent* framheves det av Parker og Leinhardt (1995) at dette er et vanskelig tema å lære for mange elever. Konseptet oppleves av mange som tvetydig og subtilt. Dette til tross for at det er et matematisk konsept som er ligger tett opp til hverdagen for mange. Parker og Leinhardt (1995) beskriver også at temaet i mange tilfeller har fått sin instruksjon forenklet i for stor grad. Med dette mener de at temaet er rikt på relasjoner, sammenlikninger, og handlinger, men innad i klasserommet har trenden blitt at konseptet ikke blir utforsket, og at man heller har hovedfokus på instruksjonen og prosedyren i utregningen. Mange lærere fokuserer på at alle prosentproblemer i bunn og grunn er de sammen, og at alle problemer kan løses hvis man kjenner til en bestemt prosedyre og algoritme som involverer multiplikasjon og/eller divisjon.

Mye av grunnen til nettopp denne forenklingen av temaet kan handle om hvordan temaet er presentert i lærebøkene. Li et al. (2009) har forsket mye på hvordan læreverk framstiller ulike matematiske temaer, og har sammenliknet ulike læreverk fra flere forskjellige land. Li er al. (2009) viser gjennom sin forskning at læreboka har stor innflytelse på den undervisningen som gis, og at mye av undervisningen legges opp nettopp etter hvordan læreboka presenterer et matematisk tema. Dette indikerer at læreboka også har en stor innflytelse på den læringen som skjer i matematikkundervisningen. Til tross for dette har ordningen hvor kunnskapsdepartementet godkjente lærebøker falt bort, og dermed kvalitetssikres ikke lærebøker i Norge (Botten-Verboven, et al., 2010). For lærere og for elever er læreboka et av de viktigste verktøyene når man skal få innblikk i et nytt matematisk konsept. Læreboka har flere formål. Den skal for eksempel fungere som en spesifikasjon av en del av et spesielt temas forventninger, den skal presentere fagstoff og den skal organisere. Læreboka blir brukt som en resurs for ulike matematiske tema som det er forventet at elevene skal lære seg, og som det er forventet at elever skal kunne/beherske ved utgangen av grunnskolen. Den blir ikke bare brukt som en ressurs for elevene, men også for lærere. Spesielt har den en rolle i organiseringen av undervisningen. Dette har den i form av at den fungerer som en veileder for strukturering av det matematiske innholdet, og at den gir tips til undervisnings- og læringsaktiviteter (Li, Chen, & An, 2009).

1.2. Oppgavens formål, problemstilling og avgrensing

Et spørsmål som har vært mye diskutert er hvordan elever lærer matematikk. Da har det i stor grad også vært fokus på hvordan de burde bli undervist, og hvilken type kunnskap man ønsker at elevene skal sitte igjen med (Hiebert & Lefevre, 1986). Wæge og Nosrati (2015) peker på at gjennom LK 06 antydes det at elevene må lære å tenke, resonnere, og løse problemer på en selvstendig måte med innsikt.

Gjennom denne oppgaven ønsker jeg å identifisere strategiene, intuitive modellene og den forståelsen elevene viser når de arbeider med en kontekstoppgave der oppgaven har en innebygd *bar-modell* som omhandler det matematiske temaet *prosent.* Disse strategiene ønsker jeg å drøfte opp mot de strategier, og den presentasjon som læreverk gir av det aktuelle temaet. Bar-modellen trekkes fram av flere forskere på temaet (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Van der Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015; Van Galen, et al., 2008; Parker & Leinhardt, 1995). Den sees på som en styrke i innøvingen av prosent. Denne modellen lar blant annet elevene behandle prosenter som proporsjonale størrelser ved at den presenterer to størrelser som to parallelle tallinjer (se kapittel 2.5). Slik lar den elevene bevege seg mellom ulike notasjonssystemer, så som prosent, brøk og desimaltall. Clarke et. al (2008) påpeker at det å benytte seg av tallinjer kan være en effektiv måte å se sammenhengen mellom prosent, brøker og desimaltall (Clarke, Roche, & Mitchell, 2008).

Jeg har valgt å gjennomføre undersøkelsen på 8.tinn. Undersøkelsen ble gjort før elevene hadde fått en formell innføring i temaet prosent. På denne måten kunne jeg studere hvilke intuitiv kunnskap elevene tar i bruk for å løse oppgaver i prosentregning. Hvilken intuitiv kunnskap elever sitter inne med kan ofte være en utfordring for lærere å ha et innblikk i. Samtidig vil dette ha stor betydning for elevenes møte med nye matematiske tema. Derfor er det også viktig å se på hvordan lærebøker presenterer et matematisk tema opp mot de strategier og den forståelse som elevene intuitivt sitter inne med. På bakgrunn av dette har jeg formulert følgende problemstilling:

> *Hvordan er forholdet mellom den intuitive kunnskap og den forståelsen elever naturlig viser gjennom arbeidet med en RME-inspirert kontekstoppgave i prosent som har en innebygd bar-modell, og læreverks framstilling av temaet?*

For å svare på problemstillingen har det vært nødvendig å se på 3 hovedmomenter. Det første er å identifisere elevenes intuitive kunnskap. For å gjøre dette har det vært nødvendig å analysere og identifisere elevers strategier i arbeid med en kontekstoppgave. I denne oppgaven brukes begrepet kontekstoppgave om en oppgave som inneholder et tekstproblem som elevene på forhånd ikke har fått noen form for løsningsmåter, eller innføringer i hvordan oppgaven kan løses. Dermed vil det være opp til hver enkelt elev og deres intuitive kunnskaper og løsningsstrategier hvordan de løser oppgaven (jfr. Van der Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015 i kap. 2.2).

I den neste delen av problemstillingen refereres det til elevenes forståelse, og dette er det andre hovedmomentet. Begrepet forståelse er svært vidt, og er et sammensatt område. I denne oppgaven vil begrepet forståelse referere til det Skemp (1976) beskriver som en *instrumentell,* eller en *relasjonell forståelse* for det matematiske temaet. Disse forståelsesbegrepene settes opp mot det Hiebert og Lefevre (1985) beskriver som *begrepsmessig kunnskap* og *prosedyrekunnskap.* Dette vil bli tolket gjennom elevenes arbeid med kontekstoppgaven, og deres utvikling gjennom arbeidet med oppgavene.

Det tredje momentet det har vært nødvendig å gå inn på er læreverkenes presentasjon av det aktuelle temaet, og hvilke strategier det legges opp til. Etter at det er blitt sett på alle disse tre hovedmomentene vil jeg til slutt koble dem sammen.

I forbindelse med denne undersøkelsen har det blitt sett på tidligere forskning om temaene *prosent, elevers forståelse* og om *matematikkundervisning*. Det finnes mye forskning som omhandler alle disse temaene. Innenfor *forståelse og undervisning* viser resultatene av forskningen at det som det i hovedsak bør fokuseres på er å la elevene arbeide med oppgaver som er *kognitivt krevende* (jfr. Stein og Smith, 2011; Hiebert & Grouws, 2007 i kap 2.1). Det pekes på at gjennom å la elevene arbeide med oppgaver som er kognitivt krevende får elevene et bedre innblikk i matematikken. Denne typen oppgaver kan være med på å fremme prestasjoner for alle elever (jfr. Boaler og Staples, 2008 i Nordtvedt og Pettersen, 2016). Undervisningen bør da legges opp på en måte der elevene får utforske og streve med matematikken. Når det kommer til forskning som omhandler prosentregning og elevers intuitive modeller, er det derimot lite, men noe å finne. Dole (2000) sier at litteraturen beskriver mange og varierte forslag for hvordan man kan fremme begrepsmessig kunnskap for prosent, og utregning av innenfor prosent (jfr. Fosnot & Dolk, 2002; Van den Heuvel-Panheuizen, 2003; Leinhardt & Parker, 1995; Van Galen, 2008; Van de Walle et. al, 2015). Den forskningen som er gjort om temaet beskriver i større grad hvordan temaet prosent kan undervises på en logisk måte for å gi elevene en god innføring, men ikke nødvendigvis gir et godt blikk i temaets natur (Dole, 2000). Hovedvekten av forskningen fokuserer også på hvordan man kan lære elever å konvertere mellom brøk, prosent og desimaltall.

2. Teoretisk bakgrunn: Forståelse og temaet prosent i lys av matematikkundervisning.

For å svare på oppgavens problemstilling har jeg valgt å sette meg inn i og redegjøre for ulike teorier og tidligere forskning om *elevers forståelse, undervisning som fremmer forståelse,* og generell teori om *prosent* og om *undervisning av prosent* spesielt. Kapittelet er delt inn i tre hoveddeler. I den første delen tar jeg for meg forståelsesbegrepet i forbindelse med matematikkundervisning. I denne delen tar jeg utgangspunkt i Skemps (1976) begreper *relasjonell forståelse* og *instrumentell forståelse.* Disse begrepene har jeg valgt å se opp mot det Hiebert og Lefevre (1986) beskriver som *begrepsmessig kunnskap* og *prosedyrekunnskap.* I tillegg til dette vil jeg i denne delen redegjøre for hva forskning sier om hvordan vi gjennom undervisning kan fremme forståelse blant elever. I den andre delen vil jeg ta for meg den matematikkspesifikke undervisningsteorien *Realistic mathematic education,* og gi en presentasjon av denne samt de hovedmomenter som inngår i teorien. Gjennom undervisning som bygger på denne teorien skal elevene få utforske matematiske fenomener, og slik få en dypere forståelse for matematikken (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Derfor kan det argumenteres for at hovedfokuset i teorien er at elevene skal danne seg en relasjonell forståelse og begrepsmessig kunnskap. I den tredje delen av teorikapittelet vil jeg ta for meg temaet *prosent.* Jeg vil først gi en presentasjon av det matematiske temaet. Videre vil jeg gi en beskrivelse av den didaktiske modellen *bar-modellen,* og hvilken rolle denne kan ha i å fremme elevers forståelse. Til dette har jeg støttet meg på blant annet de strategier innen prosentregning som Van Galen et al. (2008) og Van den Heuvel-Panhuizen (2003) beskriver gjennom sin forskning.

2.1. Elevers forståelse i matematikk og undervisningens påvirkning på elevers forståelse.

> Our wiew of mathematical learning influences how we think about teaching, if we belive that education is mainly learning facts and procedures quickly and efficiently, if we belive that only certain students need or can learn mathematics, or if we belive that people are born with the ability to do, or not to do mathematics, then our view will conflict with the develpoment of understanding . (Lindquist, 1997 i: Hiebert et al., 1997 s. xiv)

Et av hovedmålene for matematikkundervisning er at elevene skal opparbeide seg en forståelse for det fagstoffet som lærerne legger fram. Lærerens utfordring er da å legge fram matematikken på en måte som er gir elevene forståelse om det aktuelle temaet. Men hva betyr det egentlig å forstå?

Forståelse er et sammensatt begrep som det kan være vanskelig å gi en klar definisjon på. En definisjon gitt av Brownell (1935; Hiebert and Carpender 1992 i Hiebert et al., 1997 s.4) sier at ¨vi forstår noe dersom vi ser hvordan det er relatert til, eller henger sammen med andre ting vi kjenner til¨.

Når elevers forståelse diskuteres tas det ofte utgangspunkt i ytterpunktene *relasjonell forståelse* og *instrumentell forståelse.* Disse to begrepene er beskrevet av Skemp (1976), og kan sees i klar sammenheng med det Hiebert og Lefevre (1986) beskriver som *prosedyrekunnskap og begrepsmessig kunnskap*. Man kan ha ulik forståelse for matematiske fenomener. Hvilken forståelse man sitter inn med har ofte sammenheng med den undervisningen som er gitt i det aktuelle temaet. (Hiebert & Lefevre, 1986)

En *Instrumentell forståelse* beskrives av Skemp (1976) som *regler uten mening*. At man har evne til å bruke en regel, eller prosedyre blir sett på som en form for forståelse. Innenfor sin egen kontekst er *instrumentell matematikk lettere å forstå*. Hvis målet med undervisningen er at elevene skal kunne produsere rette svar, er instrumentell matematikk både lettere og raskere. I følge Skemp (1976) er det også slik at for mange matematiske konsepter er det lettere å huske reglene enn å arbeide seg fram til en relasjonell forståelse for hvorfor det er slik:

> Some topics, such as multiplying two negative numbers together, or dividing by a fractional number, are difficult to understand relationally. “Minus times minus equals plus” and “todivide by a fraction you turn it upside down and multiply’are easily remembered rules. If what is wanted is a page of right answers, instrumental mathematics can provide this more quickly and easily (Skemp, 1976, s. 8).

Videre påpekes det av Skemp (1976) at gjennom en undervisning som tar sikte på en instrumentell forståelse får *elevene raskere tilbakemelding og matematikken er mer tydelig.* Belønningen for arbeidet skjer umiddelbart ved at elevene med en gang ser om de har fått til oppgavene eller ikke. På den ene siden fører dette til at elevene føler en viss suksessfaktor med en gang. Elever som trenger selvtillit i faget kan lettere oppnå dette ved å bruke en regel og se at svarene blir rette, enn å arbeide seg inn i et konsept. En elev som har lært seg formelen for å finne prosent vil ha mulighet til å løse mange oppgaver i løpet av et kort tidsrom. Dermed opplever han at han forstår gjennom at han evner å produsere det rette svaret. På den andre siden vil elever gjennom en instrumentell læring kun lære seg hvordan han skal handle ved ulike punkter i utregningen. Hvis en elev gjør feil i et steg av utregningen vil det ha konsekvens for hele resten av utregningen, men for eleven vil det ikke være mulig å forklare hvorfor det ble feil på annet grunnlag enn at det er skjedd feil i selve utregningen, eller at formelen er blitt brukt feil (Skemp, 1976).

Det Skemp (1976) beskriver som en *instumentell forståelse*, vil av Hiebert ikke bli karakterisert som forståelse. Hiebert beskriver en slik type kunnskap som *prosedyrekunnskap* (Hiebert, et al., 1997; Hiebert & Lefevre, 1986; Hiebert & Grouws, 2007). Hiebert et al. (1997) sier at når vi lærer algoritmer og prosedyrer, og lærer hvordan vi kan flytte symboler rundt på et papir, lærer vi noe, men vi lærer ikke matematikk. Dermed kan det trekkes fram at denne typen kunnskap ikke kan sees på som kunnskap som gir forståelse for matematiske fenomener (Hiebert, et al., 1997). Det Hiebert og Lefevre (1986) betrakter som forståelse i matematikk, betegner de som *begrepsmessig kunnskap*.

En *relasjonell forståelse* beskrives som kunnskap hvor man både vet hva man skal gjøre, og hvorfor (Skemp, 1976). *Begrepsmessig kunnskap* er karakterisert som kunnskap som er rik på relasjoner. Denne typen kunnskap kan tenkes på i form av et nettverk der de relaterte relasjonene er like viktige som de mer diskre delene som består av fakta og informasjon. I denne typen kunnskap vil det ikke finnes isolerte enheter, men alle enhetene vil være koblet til hverandre på en eller annen måte gjennom et nettverk (Hiebert & Lefevre, 1986). For eksempel at vi i regning med prosent ikke kun vil betrakte prosentbegrepet, men at det sees i sammenheng med brøk og desimaltall. I matematikkfaget vil en begrepsmessig forståelse innebærer at man har mentale koblinger mellom matematiske fakta, prosedyrer og ideer (Hiebert & Grouws, 2007).

Videre i oppgaven vil den forståelse jeg referer til være det som i det foregående er blitt beskrevet som begrepsmessig kunnskap og relasjonell forståelse. Hiebert et al. (1997) peker på at forståelse er en avgjørende faktor i undervisning. Hvis vi har en god forståelse for det vi har lært, kan vi benytte kunnskapen mer fleksibelt, den kan overføres til nye situasjoner, og bli benyttet til å tilegne seg ny kunnskap.

Det å forstå henger også tett sammen med det å *virkelig kunne* matematikk. Å virkelig kunne matematikk betyr nemlig å forstå det. Forståelse er viktig av flere grunner; Det er en tilfredsstillende erfaring å forstå noe, og i motsatt ende er det å ikke forstå noe av det mest frustrerende man opplever. Elever som gjennom undervisningen blir gitt mulighet til å forstå og til å videreutvikle sin forståelse, blir også gitt mulighet til å oppleve en indre motivasjon som hjelper dem til å holde seg engasjerte og motiverte. Det å forstå er med på å fostre engasjement, selvfølelse og selvtillit. Av denne grunn bør forståelse være et av fundamentene i all matematikkundervisning (Hiebert, et al., 1997).

2.2. Faktorer som fremmer forståelse

Hiebert og Grouws (2007) viser til forskningen som viser at noen former for undervisning støtter en læringsprosess som resulterer i *prosedyrekunnskap*, mens andre typer undervisning er mer effektive dersom man legger vekt på at elevene skal tilegne seg en *begrepsmessig kunnskap*. Det trekkes fram at ulik undervisning gir elevene ulike muligheter til å lære, og til ulik læring. For at elever skal oppleve å få begrepsmessig kunnskap, er det særlig tre faktorer det legges vekt på fra forskning; Den første faktoren er at *både elever og lærer må fokusere fult og helt på det matematiske konseptet* (Hiebert & Grouws, 2007). Det betyr at hovedfokuset må være på sammenhengen mellom matematiske ideer, fakta og prosedyrer. Dette kan blant annet innebære å diskutere den matematiske meningen bak en prosedyre, stille spørsmål om ulike prosedyrer, som for eksempel vurdere hva som er likheter eller hva som skiller to prosedyrer, eller å se på relasjoner mellom matematiske ideer.

Den andre faktoren er at *elever må få slite med vanskelig matematikk.* I denne sammenhengen betyr *å slite* at elevene må bruke innsats for å skape meningsinnhold i matematikken. Dette kan sees i motsetning til å få matematikken presentert med mål om å bli memorert eller å kun benytte matematikken til å øve på det som er blitt demonstrert. Hiebert og Grouws (2007) støtter seg her på Dewey (1910; 1926; 1929 i Hiebert & Grouws, 2007) som ofte presiserte at det å slite litt med fagstoffet er essensielt for å danne seg en dyp forståelse (Hiebert & Grouws, 2007).

Den tredje faktoren er at *matematikkundervisningen bør bygge på elevenes forkunnskaper*. Elevers intuitive kunnskap har blitt diskutert av mange, og har mange ulike navn; children's informal mathe- matics" (Ginsburg, 1982 i Mack, 1993), "intuitive" knowledge (Leinhardt, 1988 i Mack 1993), "situated" knowledge (Brown et al., 1989 i Mack, 1993). Med intuitiv kunnskap, eller intuitive modeller mener man de modeller som implisitt kommer fram i møte med et fenomen (Fishbein, Deri, Nello, & Marino, 1985). Fishbein et al (1985) påpeker at vi ønsker at elever skal forstå matematikken som en menneskelig aktivitet som var oppfunnet av mennesker, og ikke kun lære det formelle med matematikken eller de deduktive sekvenser som leder fram til et teorem. Ønsket er at elever skal bli i stand til å produsere og bygge matematiske beviser, og også evaluere matematiske utsagn både formelt og intuitivt (Fishbein, Deri, Nello, & Marino, 1985). Ser man på matematikk som en menneskelig aktivitet er en av faktorene som må trekkes fram elevers intuisjon, og da elevers intuitive kunnskap. Det som kjennetegner denne typen kunnskap er at den er anvendelig, tett knyttet til hverdagen, og at den er konstruert av hver enkelt elev. Kunnskapen kan enten være rett eller gal, men kunnskapen trekkes fram som svar og løsningsmetoder når elever skal løse problemer som er basert på hverdagslige kontekstproblemer som er kjente for dem (Leinhardt 1988 i Mack, 1990). Forskning på feltet viser at både barn og voksne sitter inne med en slik type kunnskap innenfor et vidt spekter av matematiske temaer som kan benyttes til å løse hverdagslige problemer utenfor skolesammenheng. Beklageligvis påpekes det videre at denne typen kunnskap i liten grad er relatert til kunnskapen man har om matematiske symboler og matematiske prosedyrer (Mack, Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge, 1990). Til tross for dette hevder Hiebert (1988 i Mack, 1990) at elevers intuitive kunnskap kan, og bør benyttes i skolesammenheng til å danne et grunnlag for å utvikle forståelse for matematiske symboler og prosedyrer.

Hiebert et al. (1997) presiserer at elever lærer fra den type arbeid de gjør under matematikk-undervisningen. Hiebert refererer til Doyle (1983;1988, i Hiebert et al. 1997 s.17) som sier ¨Students learn from the kind of work they do during class, and the tasks they are asked to complete determines the kind of work they do¨.

I undervisningssituasjonen spiller blant annet matematikkoppgavene en stor rolle. Oppgavene som elevene arbeider med er med på å bestemme hvilken type arbeid de gjør, og hvilken type læring de får mulighet til (Smith & Stein, 2011). Legger læreren vekt på at elevene skal drilles i en bestemt type oppgave vil det nettopp være denne ferdigheten elevene blir flinkere til. Hvis de på den andre siden bruker mye tid på å reflektere over hvordan ting fungerer, på forskjellige fremgangsmåter, på hvordan det de allerede kan relateres til nye situasjoner, er det sannsynlig at den kunnskapen de tilegner seg handler om relasjoner, og om nye relasjoner, som igjen er med på å gi ny forståelse for et tema (Hiebert, et al., 1997). Videre presiserer Hiebert et. al. (1997) at oppgavene elever arbeider med i matematikkundervisningen burde oppfordre til refleksjon og kommunikasjon. Gjennom refleksjon og kommunikasjon kan også forståelse utvikles. Å reflektere betyr å vende på noe inne i hodet ditt, og tenke på det om og om igjen, for deretter å prøve å relatere det og koble det til noe annet som du kjenner til. I prosessen haster du ikke gjennom så fort som mulig, men tar deg god til. Å kommunisere betyr å snakke og lytte. Det betyr å dele metodene dine, og å respondere på spørsmål rundt dine metoder. Det betyr å lytte til andres ideer, og å stille spørsmål som gjør at du med sikkerhet forstår (Hiebert, et al., 1997). For at oppgaver skal være av slik karakter at de skal være verd å diskutere og kommunisere om, er det to faktorer som spiller inn. De må inneholde en vanskelighet som det for elevene er interessant å løse og diskutere. For at dette skal være tilfellet må oppgaven være slik at elevene må få mulighet til å gjøre oppgaven til sin egen. Gjennom oppgaven må elevene sette seg et mål for hvorfor de skal problemet. Den andre faktoren er at den delen som er spennende, eller forvirrende i situasjonen bør være matematikken. Elevene kan selvfølgelig se på oppgaven som spennende på flere forskjellige måter, men skal den fostre matematisk forståelse må den være interessant på en matematisk måte (Hiebert, et al., 1997). Ulike oppgaver gir ulike muligheter for elevens læring (Smith & Stein, 2011). Oppgaver som ber elever å bruke en memorert prosedyre leder til en type mulighet, mens en oppgave som krever at elevene engasjerer seg om et matematisk konsept, og som stimulerer elever til å se sammenhenger innenfor det matematiske konseptet, gir en annen type mulighet for læring. Dette handler om hvilke kognitive krav oppgavene stiller til elevene (Smith & Stein, 2011).

Blant oppgavene som stiller høye kognitive krav til elevene trekkes kontekstuelle problemer fram. Å benytte seg av kontekstuelle problemer i matematikkundervisningen er ikke et nytt fenomen. Tenker man tilbake på egen skolegang kan som regel de fleste komme på at de i en eller annen sammenheng har arbeidet med kontekst, eller tekstoppgaver i matematikken. Det som har forandret seg er tanken om hvordan man skal løse disse problemene. Tradisjonelt har læreren også presentert tekstoppgaver sammen med en metode for å komme fram til løsningen. Problemene har blitt forklart ved hjelp av algoritmer, operasjoner, og regler som elevene skulle benytte seg av når de selv skulle prøve seg på problemet. Tekstoppgavene har ofte hatt lite innhold, og har derfor blitt beskrevet som overfladiske, kamuflerte forsøk på å få elevene til å produsere det lærerne ønsker at elevene skal produsere. Fokuset i tekstoppgaven har vært matematikken heller enn det å modellere og matematisere en reel situasjon (Fosnot & Dolk, 2002). Oppgaver som er av denne typen beskrives også av Stein og Smith (2011) som oppgaver som stiller lave kognitive krav til elevene. Gjennom oppgavene trenger elevene kun å reprodusere de reglene, formlene og eller definisjonene som de allerede har lært. Slike oppgaver trenger heller ikke gi noen form for kobling til det matematiske konseptet som underbygger de relasjoner, regler, eller definisjoner som inngår. Slik blir algoritmene ikke annet enn prosedyrer uten kobling, og oppgaver som stiller lave kognitive krav til elevene kan derfor kobles opp mot det å gi elevene en *instrumentell forståelse* (jfr. Skemp, 1976 i kap 2.1). Fokuset er da å produsere korrekte svar istedenfor å utvikle matematisk forståelse.

Tekstproblemene har etter hvert fått en annen rolle, og de har utviklet seg til å bli rikere, og sikte på å hjelpe elever med å få en dypere og bedre matematisk forståelse. Konteksten har fått en rolle som starten på en konstruksjon av ny matematisk kunnskap. De er designet og utviklet for å forutse og utvikle elevers matematiske modeller av den ekte verden. Denne utviklingen skal gjerne skje på bakgrunn av elevenes intuitive kunnskap. Kontekstoppgavene har derfor tett sammenheng med elevenes liv, heller enn med den matematiske verden (Fosnot & Dolk, 2002). Van der Walle et. al (2015) beskriver kontekstuelle problemer som et av de beste undervisningsredskapene du kan benytte deg av dersom du ønsker å hjelpe elevene med å konstruere seg en rik forståelse for en operasjon. Slike kontekster er med på å aktivere problemløsningsstrategier. En problemløsningsstrategi kan for eksempel være å *visualisere.* Man lager en representasjon som er til hjelp for å forstå et matematisk konsept, eller at man *forutser en strategi* som man videre i arbeidet tester og tilpasser og dermed oppdager ulike relasjoner. Elevene får mulighet ikke bare til å løse en oppgave, men også til å bruke sine egne ord, bilder og nummer til å forklare hvordan de har kommet fram til løsningen. Det blir dermed en effektiv måte å innarbeide nytt fagstoff på. Elevene får bruke akkurat den teknikken som passer til deres tanker. Dette sees på som en styrke (Van der Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015). Ifølge Stein og Smith (2011) får elevene en dypere forståelse gjennom at de utvikler prosedyrene selv. De generelle prosedyrene vokser fram som et resultat av et underliggende konsept der elevene opplever å se sammenhenger gjennom at de i mange tilfeller får mange ulike representasjoner av et konsept. Slik får elevene mulighet til å lage koblinger mellom for eksempel en visuell modell, manipulativer, symboler, og en problemsituasjon. Oppgaver som får til dette, beskrives som oppgaver som stiller høye kognitive krav. De krever en kompleks og ikke-algoritmisk tenking, og en gjennomtenkt framgangsmåte for å løse problemet som ikke på forhånd er foreslått eller gitt i oppgaveinstruksen. Slike typer oppgaver krever i tillegg at elevene må utforske og forstå naturen til et matematisk konsept i form av prosesser og relasjoner. Elevene må også være klare over deres egne kognitive prosesser, og gjennom arbeidet reflektere og justere disse. Stein og Smith (2011) trekker også fram at oppgaver som stiller høye kognitive krav til elevene krever at elevene tar i bruk sine forkunnskaper og erfaringer på en hensiktsmessig måte, og ser koblinger mellom ulike matematiske konsepter. Den samme oppgaven trenger ikke stille like krav til elevene. Hvilke kognitive krav en oppgave stiller avhenger i stor grad av utformingen av oppgaveteksten, eller den innføringen elevene har fått i temaet. Vi kan for eksempel ta for oss divisjon. Hvis elevene har lært standardalgoritmen for divisjon vil de være i stand til å regne ut og finne svar på ulike oppgaver som omhandler divisjon, mens hvis elevene bes løse oppgaver som omhandler divisjon uten at de har fått en innføring i temaet vil elevene måtte ta i bruk den forkunnskapen de sitter inne med om temaet. Dette kan for eksempel være fordeling, å se sammenhenger til gjentatt subtraksjon/addisjon og visualisering gjennom å lage seg skisser og modeller som gir et dypere innblikk i de relasjoner som inngår.

2.3. Realistisk mathematics education

En fagspesifikk undervisningsteori for matematikkundervisning som har vokst fram de siste 50 årene er den nederlandske teorien *Realistic Mathematics Education*, forkortet til RME. Denne teorien bygger på ideer av den nederlandske didaktikeren Hans Freudenthal (1905-1990), og er utviklet videre ved Freudenthalinstituttet. Teorien vokste fram som et resultat av ¨new math¨ bevegelsen som lå over USA og sentrale deler av Europa i 1960 årene. Under ¨new math¨ bevegelsen bar undervisningen preg av at de skulle tilegne seg en instrumentell forståelse/prosedyrekunnskap i de ulike temaene (jfr kap 2.1). Elevene lærte matematikken steg for steg, noe som førte til at de satt igjen med en lite fleksibel kunnskap, og kunnskap som baserte seg på å reprodusere noe de hadde fått presentert av en lærer. Freudenthal mente at den nederlandske matematikkundervisningen, som var preget av denne formale fremgangsmetoden, ikke hadde ønsket effekt. Han mente at det derfor var rom for, og nødvendig med en alternativ teori. Slik startet arbeidet med å utvikle *RME* (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014)

Det som kjennetegner RME er bruken av realistiske kontekstoppgaver. Det som skiller kontekstoppgaver brukt i tradisjonell undervisning fra kontekstoppgaver i RME er hvordan man velger å bruke dem i undervisningssammenheng. I den tradisjonelle undervisningen er det vanlige at kontekst oppgaver, og/eller tekstoppgaver blir brukt på slutten av en læringssekvens. Elevene skal løse slike oppgaver etter at de har fått en metode og strategi for å løse mer formelle numeriske oppgaver innenfor det samme temaet. I RME legges det opp til at undervisningen skal skje i en motsatt rekkefølge. Der er fokuset på at et matematisk konsept skal læres ved at læringssekvensen starter med en kontekst (Gravmeijer & Doorman, 1999). Oppgavene som benyttes skal stille høye kognitive krav til elevene, og dermed gi elevene mulighet til en dypere forståelse for det matematiske konseptet (jfr. Stein og Smith, 2011 i kap 2.2). Innenfor RME legger en vekt på at elevene skal arbeide med kontekster med røtter i virkeligheten, *derav realistic*, som omhandler matematiske konsepter (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, Realistic mathematics education, 2014). Konteksten skal ha røtter i virkeligheten. Det skal være mulig for elevene å se for seg det som beskrives, men det kan gjerne være basert på en fantasiverden eller eventyr. Konteksten kan godt baseres på ren matematikk, men da en matematisk verden som er kjent for elevene. Det viktige blir at kontekstene legger til rette for at elevene kan benytte seg av sin intuitive kunnskap (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

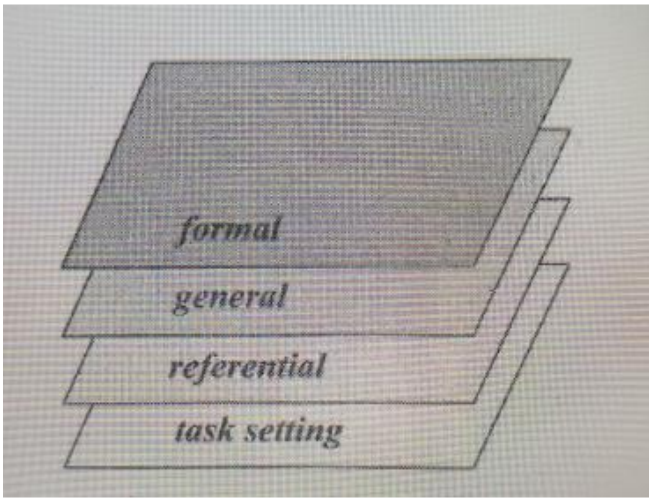
Freudenthals (1905-1990) mente at matematiske strukturer ikke er fiks ferdige, men at de vokser fram fra virkeligheten og utvikler seg kontinuerlig gjennom individuelle og kollektive læringsprosesser.

Gjennom arbeidet med kontekstene skal elevene få en forståelse for det matematiske konseptet gjennom at de får innblikk i, og får gjenoppdage matematiske fenomen og relasjoner innenfor matematikken, og dermed gir elevene en relasjonell forståelse/begrepsmessig kunnskap om temaet (jfr. Skemp, 1976; Hiebert og Lefevre, 1986 i kap 2.1). Kontekstene får dermed en framtredende rolle i utviklingen av at det matematiske konseptet, verktøy og prosedyrer. For at dette skal skje må elevene være aktive deltakere i læringsprosessen. Freudenthal (1991 i Van den Heuvel-Panhuizen, 2003) understreket at denne prosessen, som han kalte *re-invention,* skulle være guidet av læreren. Elevene skal være aktive deltakere i selve utdanningsprosessen. På denne måten skal elevene selv utvikle matematiske verktøy, og skape seg en egen innsikt i ulike matematiske temaer (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Gjennom en slik tilnærming til fagstoffet vil elevene kunne oppleve å få en bedre forståelse for matematikken fordi de må bruke egen innsats for å gi matematikken meningsinnhold (jfr. Hiebert og Grouws, 2007 i kap. 2.2).

Freudenthal beskriver matematikk som en menneskelig aktivitet; matematikken er ikke noe som kan bli lært gjennom kunnskapsoverføring i form av presentasjoner av formler, algoritmer og prosedyrer, men det essensielle i læring av matematikk er at det skjer gjennom aktivitet der man får mulighet til å utforske de matematiske systemene. (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Det kan derfor sies at Freudenthal gjennom sin forskning vektlegger at elevene skal sitte igjen med en relasjonell forståelse heller enn en instrumentell. Prosessen hvor elever utforsker og oppdager matematikken kalte han *matematisering.* Selve matematiseringsprosessen kan beskrives i to nivåer, eller deler. Det var Treffers (1978; 1987 i Van den Heuvel-Panheuizen, 2003) som først beskrev de to delene innenfor matematisering. Treffers beskriver *horisontal-* og *vertikal matematisering* som to ulike måter å se på matematikken på. Den *horisontale* matematiseringen skjer når elever tar for eksempel en kontekst, og transformere denne inn i den matematiske verden. Man tar altså noe fra den virkelige verden og transformerer det om til symboler. Den *vertikale* matematiseringen omhandler all aktivitet man foretar seg inne i den matematiske verden, altså den reorganiseringen og de operasjoner som blir gjort med de matematiske symbolene. Dette kan for eksempel være å oppdage snarveier, eller å se sammenhenger mellom ulike strategier for så å benytte seg av disse oppdagelsene (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Innenfor prosentregning finnes det flere eksempler på den vertikale matematiseringen. Et eksempel kan være der man ønsker å gjøre om mellom brøk og prosent, og har oppgitt brøken 4/5. For mange kan det være naturlig å utvide brøken slik at man får hundre i nevner, og at da vil teller vise prosenttallet. En raskere metode da vil være å heller gå via desimaltall, og dividere 4 på 5. Svaret da bli 0,8, noe som tilsvarer 80 %. Dette trenger ikke nødvendigvis å bli sett på som å oppdage en snarvei, men det kan trekkes fram som det å se sammenheng mellom ulike strategier.

Et viktig fokusområde innenfor RME er modeller. Modellene i RME skal fungere som representasjoner av en problemsituasjon. Modellen som benyttes bør reflektere det som er det essensielle i det matematiske konseptet man ønsker at elever skal lære. Modellen kan ha mange former. Visuelle skisser, materialer, skjemaer, mønstre eller bilder, diagrammer og symboler kan alle opptre som modeller for en gitt situasjon. Så lengen representasjonen gir tilgang og støtter prosesser som gir muligheter til å oppdage den mer formelle matematiske siden av et konsept, vil representasjonen opptre som en modell av et konsept. At representasjoner er viktige i innlæringen av nye matematiske konsepter støttes av Duval (2006). Han poengterer at ulike representasjoner gir oss mulighet til å forstå ulike aspekter ved et matematisk objekt (Duval, 2006). Modellens rolle blir da å støtte læringsprosessen. I følge Van den Heuvel-Panheuizen, (2003) må modeller som støtter læringsprosessen ha to karaktertrekk. Det første trekket er at de må ha røtter i realistiske kontekster som det er mulig for elever å se for seg. Det andre trekket er at de må være slik at det er mulig å bruke den samme modellen på et mer generelt nivå. Modellen må med andre ord både gi støtte til den horisontale, og til den vertikale matematiseringen (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Gravemeijer (1999) viser til Freudenthal (1991) som sier at formell matematikk ikke oppleves annerledes på elever enn det uformell matematikk gjør. Gjennom arbeid med kontekster som tar utgangspunkt i noe elevene kan kjenne igjen fra hverdagslivet kan elevene arbeide seg mot forståelse av en mer formell matematikk.

Treffers (1987 i Gravemeijer, 1999) trekker fram viktigheten av at elever får arbeide med modeller. Han sier at det er gjennom arbeidet med sterke modeller at elever får mulighet til å se sammenhengen mellom uformelt kontekstbasert arbeid, og det formelle, standardiserte arbeidet. Dette arbeidet må gjerne bygge på det elevene finner ut gjennom aktiviteter som omhandler det bestemte emnet. Modellene må være ¨modeller av¨ et kontekstproblem som vil fungere som ¨modeller for¨ den formelle matematikken. Arbeidet med modellene kan separeres inn i forskjellige aktivitetsnivå. Nivåene kan brukes til å tolke om en modell blir benyttet som en ¨modell av¨ eller en ¨modell for¨. Aktivitetsnivåene kan deles inn i 4 ulike nivåer. Det første nivået er *aktivitet i tolkning av oppgaven.* Dette nivået involverer tolkninger og løsninger som avhenger av at man forstår hva man skal gjøre med problemet. Det neste nivået er *referensiell aktivitet*. Dette nivået involverer modeller som refererer til aktiviteten som blir beskrevet i den gitte konteksten. Selve aktiviteten vil da gå ut på å finne løsningen på det aktuelle problemet, og det vil for eksempel ikke bli tatt hensyn eller reflektert over det matematiske temaet som inngår i oppgaven. Nivå 3 er *generell aktivitet*. Det involverer modeller som retter fokuset på tolkninger og løsninger uavhengig av kontekst eller situasjon. På dette nivået brukes modellene som ¨modeller for¨. Fokuset i aktiviteten er ikke lengre tilknyttet den aktuelle konteksten, men til de relasjonene som inngår i det matematiske konseptet. Det siste nivået er *aktivitet med formell matematisk resonnering.* På dette nivået er det ikke lengre nødvendig å støtte seg til modeller for å oppnå matematisk aktivitet (Gravmeijer, 1999). Gjennom matematiseringen er meningen at elevene skal arbeide seg opp gjennom disse fire nivåene. Denne utviklingen skjer ikke umiddelbart, men er en utvikling man kan se over tid. Når modellen endrer rolle er det ofte når elevene beveger seg fra det generelle nivået og over til det formelle nivået.



Figur 1 Levels of activity (Gravemeijer, 1999 s.163)

Hensikten med nivåene er å vise at modeller er direkte knyttet til forskjellige aktiviteter, og at de involverer bestemte situasjoner. På referensielt nivå er modellene forankret i elevenes forståelse og erfaringer fra virkeligheten. Det er på dette nivået elever ofte forklarer hvordan de gikk fram når de løste oppgaven. Det generelle aktivitetsnivået oppstår gjerne der elevenes resonnement ikke lengre avhenger av en spesifikk situasjon. Dermed løsriver modellen seg fra å være en ¨modell av¨ en spesifikk situasjon (Gravmeijer, 1999)
Gjennom en arbeidsprosess er tanken at elevene på sikt skal skape seg en generell og formell kompetanse om et matematisk konsept, og at konseptet skal kunne relateres til den konteksten

elevene arbeidet i utgangspunktet. Fokuset i undervisningen glir da bort fra at elevene får presentert fiks ferdige prosedyrer.

2.4. Prosent og elevers møte med prosentregning

¨Percentanges offer a standardized way of desceibing proportions. Their kindship with fractions, propotions and decimals provides many possibilities to do aritmetic in a flexible fashion¨ (Van Galen, et al., 2008, s. 89)

Prosent er en måleskala som i mange tilfeller blir bruk til fordel for for eksempel brøker. Dette handler i stor grad om skalaens tilgjengelighet. Det er enkelt å sammenlikne prosenter, og den kan relativt enkelt transformeres og plasseres over til det desimale tallsystemet.

Prosent vokste fram som et resultat av kalkulering med penger. Interesser og skatter ble ofte uttrykket gjennom proporsjonalitet. Proporsjonalitet beskrives som to størrelser som øker eller minker i samme forhold. Hvis vi har en størrelse A som er/øker/minker proporsjonalt med en størrelse B, og det finnes en proporsjonalitetsfaktor *k* slik at A=kB. I prosent betyr dette at hvor stor delen av prosenten er, vokser eller minker med en proporsjonal størrelse. Disse to størrelsene kan sees på som å ha et lineært forhold. For eksempel hvis en datafil laster med hastigheten 1% per 1,2 sekund, vil den etter 2,4 sekunder ha økt til 2 %, etter 3,6 sekunder ha økt til 3 %, og etter 7,2 sekunder ha økt til 6 %. Hvis vi i dette tilfellet kaller prosenten for størrelse A, betyr dette at for hver prosent øker størrelse B like mye, eller med en konstant *k*.

Proporsjonalitetskonstanten *k* viser forholdet mellom en satt total, *det hele*, og hundre. Til å begynne med var ikke proporsjonen satt til et bestemt forhold, men kunne for eksempel være at man måtte betale 5 ducates for hver 300 tjente ducates. Slike proporsjonaliteter har med seg flere vanskeligheter når det for eksempel kommer til å sammenlikne ulike proporsjoner. Som et resultat av dette starter man derfor heller å operere med standardiserte proporsjoner ved å regne med ¨ut av 100¨, og da benytte seg av brøker med 100 i never. (Van Galen, et al., 2008, ss. 89,31).

Når elever i grunnskolen blir introdusert for prosentbegrepet er det stor sannsynlighet for at de aller fleste har et forhold til begrepet på forhånd. Grunnen til det er at det er et begrep som er såpass godt etablert i vår dagligtale, og at det brukes på mange forskjellige områder i samfunnet. Også i skolesammenheng møter man begrepet i en rekke av de andre fagene. I samfunnsfag ser man mye på statistikker over for eksempel klima, eller i forbindelse med valg. Studerer man etikettene på matemballasje oppdager man at mye av det er oppgitt i prosent. I naturfag opererer man ofte med blandinger som inneholder så og så mange prosenter av noe. I tillegg til å treffe begrepet i skolesammenheng møter elever det også utenfor skolesammenheng gjennom kjøp og salg. Det er kanskje nettopp i denne sammenhengen at elevene selv får et møte med prosenten. I tillegg er det en god måte å introdusere temaet på, med tanke på at man i første omgang omhandler runde prosenter som 10%, 20%, osv. Når elevene i første omgang blir introdusert til denne typen prosenter, åpner det også for at man enkelt kan se sammenhengen til brøker (Gravmeijer & Doorman, 1999).

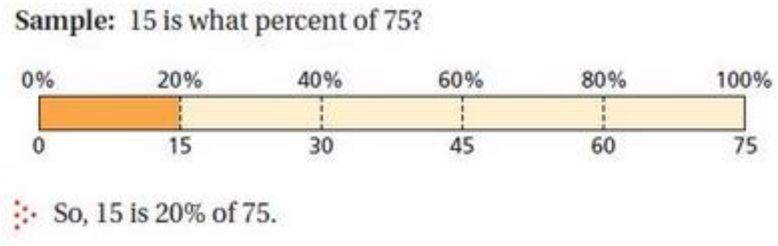
I Norge introduseres elever for temaet for første gang når de går på mellomtrinnet. Et av målene her er at: ¨eleven skal kunne regne med blant annet prosent, og plassere ulike verdier av prosent på tallinjen¨ (Kunnskapsdepartementet, 2013b). Elevene møter temaet igjen når de kommer på ungdomsskolen. Nå skal de ikke bare regne med prosenter, og plassere dem på en tallinje, men i tillegg skal de kunne gjøre om mellom flere ulike notasjoner, så som brøk, prosent og desimaltall (Kunnskapsdepartementet, 2013a)

I skolesammenheng møter ofte elevene et såkalt ¨*tre prosenters problem*¨. Dette er oppgaver som går ut på at elevene får oppgitt to ulike tall som inngår i prosentregning, og ut fra forholdet mellom disse skal finne et siste. Dette kan for eksempel være å finne *delen*, når man får oppgitt *det hele* og *prosenten*: En bukse koster 300 kr (det hele). Ola får 20 % (prosenten) avslag, hvor mye må han betale (delen)? Når elevene møter slike oppgaver er det ofte vanlig at de forsøker å sette opp en proporsjonalitet, men at de ikke er helt sikre på hvor de skal plassere de ulike delene. Ut fra dette kan man altså konkludere at elevene kobler prosentbegrepet opp mot en prosedyre, men at de ikke har en forståelse for selve prosedyren (Van der Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015).

For at elever skal skape seg en forståelse for prosentkonseptet er det essensielt at de får gjøre seg erfaringer med relasjonene i prosenter gjennom arbeid med kontekstoppgaver. I kontekstoppgaver bør innholdet ha røtter i noe fra virkeligheten, som er gjenkjennbart for elevene. Her kan man hente inspirasjon både fra TV, aviser og andre media som ofte presenterer statistikker i form av prosenter (Van der Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015).

2.5. Bar-modellen som didaktisk modell i prosentregning

Innenfor forskning på undervisning av prosent i en realistisk matematikkundervisning blir det ofte presentert og benyttet modeller som bygger på doble tallinjer der det er mulig å arbeide fleksibelt på tvers av ulike notasjoner (Fosnot & Dolk, 2002; Parker & Leinhardt, 1995; Van Galen, et al., 2008; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Dole, 2000). En modell som bygger på doble tallinjer er Bar-modellen. Denne modellen trekkes fram av van Galen (2008) som den viktigste modellen for prosent. Modellen fungerer som en dobbel tallinje, der man opererer med prosentene på den ene siden, og med de korresponderende numrene på den andre siden av modellen (se figur 2).



Figur 2 Eksempel på bar-modellen (Scimathmn.org)

For elever vil en slik framstilling av prosent ha mange fordeler. Modellen støtter en fleksibel mental aritmetikk i arbeid med ulike prosenter. Dette er fordi modellen lar seg dele inn på ulike måter ettersom hvilke tall man arbeider med. Dette gir mulighet til å oppdage sammenhenger og ulike strategier. Den gir også et tydelig bilde av de proporsjonale størrelsene som inngår. For eksempel ved at man kan oppdage at det multiplikative forholdet mellom *det hele* og *100 %* vil være en proporsjonalitetskonstant, *k*, og at den samme *proporsjonalitetskonstanten* vil beskrive det multiplikative forholdet mellom *delen* og den tilsvarende prosentverdien, *p*. Dermed gir det mulighet til å finne ulike verdier ut fra et bestemt forholdstall. Den gir elever mulighet til å benytte seg av flere ulike strategier i arbeid med å finne ulike prosenter. Dette vil jeg komme nærmere inn på i kapittel 2.5.1. At modellen gir mulighet til mental aritmetisk fleksibilitet trekkes fram som en av dens styrker, og nettopp dette bør vektlegges i innlæringen av temaet. Skjer innlæringen på denne måten vil også elever få mulighet til å oppdage flere ulike strategier, og hvilke strategier som egner seg best i ulike tilfeller (Van Galen, et al., 2008, s. 93).

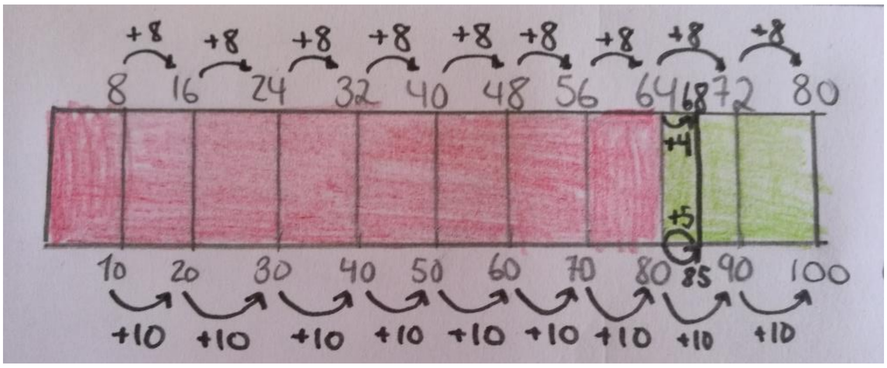
En av de viktigste ferdighetene elevene må ha når de regner med prosent er evnen til å gjøre om mellom ulike notasjoner. Denne evnen bør komme som et resultat av resonnering. I denne prosessen kan bar-modellen spille en viktig rolle. Gjennom tegning får elevene visualisert at for eksempel halvparten er 50 %, at 3/5 er 60 %, eller at det hele er 100 %. Dette gjør at elevene også får et godt innblikk i sammenhengen mellom ulike brøker og prosenter. På samme tid er det viktig å ikke gjøre temaet for enkelt. Elevene på de større trinnene, som har vært introdusert for temaet tidligere er ofte modne for mer kompliserte oppgaver, som for eksempel å finne hvor mange 23% av 674 er. For elever med en høyere måloppnåelse vil det også være disse oppgavene som trigger fram gode strategier, og det å oppdage relasjoner i form av sammenhenger mellom prosent og brøk, eller de proporsjonale størrelsene som inngår i regning med prosenter.

2.5.1. Strategier i arbeidet med bar-modellen

En måte å introdusere elver for bar-modellen på er gjennom kontekstbaserte problemløsningsoppgaver som har en innbygd bar-modell. I slike oppgaver vil modellen i første omgang fungere som en representasjon av problemet i konteksten. Målet for elevenes arbeid er at modellen skal fungere som en støtte på veien fra den uformelle, kontekstbaserte matematikken, og over til mer generelle og formelle delen av matematikken. På denne måten blir modellen en del av elevenes matematiske utvikling ved at den utvikler seg fra å være en modell av et matematisk kontekstproblem, til å bli en modell for et matematisk konsept (jfr. Gravemeijer 1999 i kap 2.3). Dette støttes av Streefland (1985 i Van den Heuvel-Panheuizen, 2003). Han sier at modeller kan være med på å støtte matematisk vekst. Modellen og modelleringen legger til rette for refleksjon. Noen vil lett se sammenhenger til den generelle og mer formelle matematikken, mens andre oppdager den formelle og mer generelle matematikken mer trinnvis, sammenheng for sammenheng. Målet bør uansett være at elevene oppdager en strategi som de kan benytte for flere sider av et matematisk fenomen. Dette betyr at strategien må være slik at den er overførbar til flere situasjoner som omhandler det samme matematiske temaet.

Bar-modellen kan gi en god indikator når elever skal anslå hvor stor prosentandel noe er av noe annet, eller omvendt. Men det er også viktig at elever lærer seg å løse prosentproblemer på en mer nøyaktig måte. Gjennom arbeid med modellen kan elever komme fram til flere ulike strategier eller tankemåter for å finne en bestemt prosentverdi. Enkelte strategier er mer abstrakt, og krever derfor en annen form for tenking enn de enklere strategiene. Tenkemåtene man benytter seg av i arbeid med bar-modellen har tett sammenheng med proporsjonalitetstenking. Så lenge enhetene som representeres på de to sidene i bar-modellen er proporsjonale kan man forholde seg til tenkemåter innenfor den proporsjonale tankegangen (Tvete, 2016; 2006)

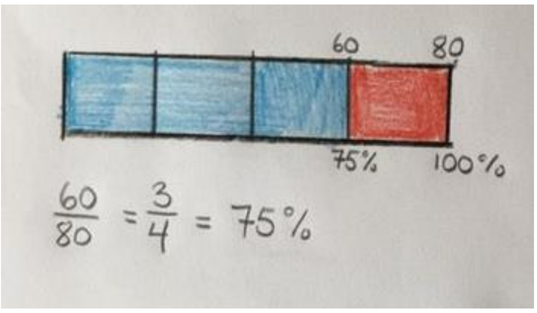
Tvete (2016) presenterer fire ulike tankemåter man kan benytte seg av i arbeid med å løse oppgaver som omhandler prosent og bar-modellen. Den enkleste strategien er *bygge opp/ bygge ned – tankegangen*. Denne tankegangen bygger på at man gjennom å dele baren opp i like stor blokker tilnærmer seg den rette prosenten (se figur 3). Innad i denne tankemåten finnes flere strategier. En måte er å tenke på metoden som gjentatt addisjon, der man adderer sammen like store deler. Man vil dele tallinjene på hver side av baren i like store deler, og på samme tid beskrive hvor stor mengde som inngår i hver av delene. Videre kan man dele delene opp i mindre og mindre deler som er logiske i forhold til de proporsjonale størrelsene man arbeider med. Det kan tenkes at elevene som kun benytter seg av denne tankestrategien sitter inne med en additiv tankegang, hvor de benytter seg av gjentatt addisjon eller gjentatt subtraksjon. Hvis elevene for eksempel får en oppgave der de får oppgitt at 80 kroner tilsvarer 100 %, vil elevene ved å dele baren inn i ti like store deler hvor hver del tilsvarer 10 % og 8 kroner, kunne addere seg opp til å finne ut at 80% tilsvarer 64 kroner. Hvis man videre skal finne ut hvor mange kroner 85 % tilsvarer, vil man kunne gjøre dette ved å videre dele en av delen inn i 2, slik at man kan se at 5 % tilsvarer 4 kroner.



Figur 3: Bar-modellen benyttet til bygge opp-tenkemåten

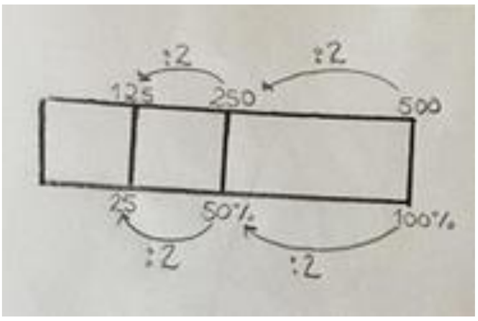
Bygge opp/bygge ned strategien kan også gjenkjennes i to av strategiene Van den Heuvel-Panheuzen(2003) beskriver. Den første strategien er *å benytte seg av en kjent prosent.* Oppgir for eksempel en parkeringsmåler at en parkeringsplass har 36 av 40 plasser opptatt vil det være en strategi som framkalles hos mange elever. En mulighet da er å se sammenhengen til 10%. 10% av 40 er 4, og dette er noe som for mange elever er lett å se dersom de deler baren opp i 10 like store blokker og plasserer like mange parkeringsplasser inn i hver av dem (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Den andre strategien Van Den Heuvel-Panheuzen (2003) beskriver som kan gjenkjennes i *bygge opp tankemåten* er *å ta i bruk enkel brøk.* Er for eksempel 60 av 80 plasser opptatt ved en parkeringsplass kan elevene benytte seg av enkle brøker til å finne ut hvor mange prosent av parkeringsplassen som er opptatt. Dette handler om at den brøken som man i utgangspunktet får oppgitt forenkles, og deretter lettere kan plasseres inn i modellen. I dette tilfellet vil 60/80 forkortes til 3/4 , og det vil kunne oppleves lettere å plassere brøken inn i modellen, og gjøre om fra brøken og over til prosenttallet.



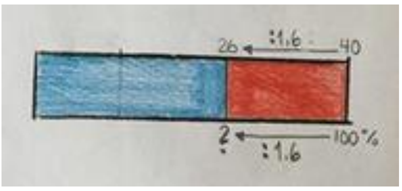
Figur 4: Barmodellen benyttet til ¨enkel brøk¨

Den andre strategien som Tvedte (2016) beskriver *dobling og halvering.* I denne strategien tar elevene utgangspunkt i en kjent del, men istedenfor å gjenta addisjonen går man mer direkte på dobling eller halvering. Hvis man vet at 100% er 500, kan man gjennom å halvere se at 50 % er 250, og videre at 25 % er 125. Denne metoden beskrives også av Van Galen (2008). Han beskriver metoden som en mer estimator metode hvor man for eksempel ønsker å finne 17 % av 360 kan først finne 33,3% gjennom å dividere på 3, for deretter å halvere dette.



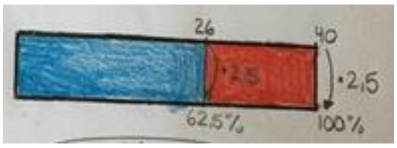
Figur 5: Bar-modellen benyttet til dobling og halvering

Det tredje strategien Tvedte (2016) beskriver er at man *benytter seg av enkle, og direkte forholdstall*. I bar-modellen kan dette skje på to måter. Vi kan se for oss at vi har en parkeringsplass med 40 plasser, og at 25 av plassene er opptatte. Vi ønsker å finne ut hvor mange prosent av parkeringsplassen som er opptatt. I *innenfor-tenkemåten* ser man da på forholdet mellom delen og det hele. I dette tilfellet vil det være 26 og 40. Ved å gå langs tallinjen kan vi finne ut at 40 er 1.6 ganger så stor som 26 er. Dermed vil den tilsvarende prosenten til 26 være 1.6 ganger mindre enn 100 %: Dividerer vi 40 på 1.6 blir svaret 25. Dividerer vi 100 på 1.6 blir svaret 62,5 %.



Figur 6: Bar-modellen benyttet til innenfor-tenkemåten

Den andre tenkemåten som går direkte på forholdstall er *mellomtenkemåten.* Her har man fokus på forholdet mellom de to proporsjonale størrelsene. Vi vet at 40 parkeringsplasser tilsvarer 100 %, altså at prosent verdien er 2.5 ganger så stor som tallverdien. Dermed kan vi komme fram til at 25 multiplisert med 2.5 tilsvarer 62,5 %

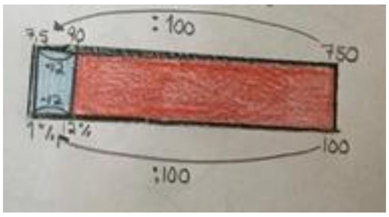


Figur 7: Bar-modellen benyttet til mellomtenkemåten

En fjerde strategi er ¨*the 1% rule*¨, også oversatt til veien om 1. Denne strategien kan i mange tilfeller være vanskelig å benytte seg av uten kalkulator, men med kalkulator kan den sies å være en av de mest fullkomne strategier innen prosentregning (Van Galen, et al., 2008). Også denne strategien finner vi i Tvedte (2006; 2016) og i Van Heuvel-Panheuizen (2003).

Strategien går ut på at hvis man finner ut hvor stor verdi 1% av noe har, kan man finne hvilken som helst prosentverdi. Det første steget på veien til å finne en prosentverdi er da å dividere det hele på 100. På denne måten finner du en verdi for 1%. i det neste steget multipliserer vi med den prosenten vi ønsker å finne verdien for. Hvis vi for eksempel ønsker å finne 12% av 750 kr ville det skjedd på følgende måte:

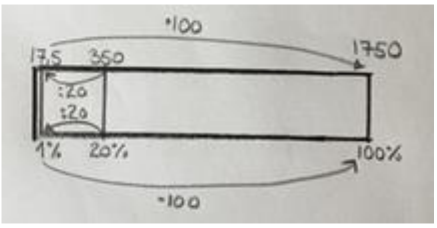
1) Vi finner ut hvor mye 1% er: 750 kr / 100= 7,5 kr
2) Vi finner ut hvor stor verdi 12% har: 7,5 kr * 12% = 90 kr



Figur 8: Barmodellen benyttet til veien om 1

Der problemet endrer seg og man skal finne for eksempel hvor mye det hele er, fungerer også tanken om at man kan gå ¨veien om 1¨. Kjøper du for eksempel en par sko, og får 350 kr i avslag, noe som tilsier 20% rabatt, og ønsker å finne ut hvor mye skoene kostet uten rabatten kan det gjøres på liknende måte, men med litt annen rekkefølge. Også her er det første steget å finne ut hvor mye 1% av det hele er. Det gjøres ved at man dividerer den den oppgitte prosentverdien med prosenten. Deretter må man multiplisere prosentverdien for 1 % med 100 % for å finne ut hvor mye det hele er:

1) Finner ut hvor mye 1% er: 350kr / 20% = 17,5 kr
2) Finner ut hvor stor ¨det hele¨ er: 17,5 kr * 100% = 1750 kr



Figur 9: Bar-modellen benyttet til veien om 1

Begge disse tankemåtene tillater elevene å tenke på prosenter som en ¨så mange av hundre¨ situasjoner. Situasjonene kan gjenkjennes som *gjentatt addisjon.* Men man kan også tenke på prosenter på andre måter. En måte er å tenke på prosenten som en multipliserende faktor. I dette tilfellet konverterer man prosenten om til et desimaltall. Man kan se for seg følgende matematisk problem: under et salg får du 15% rabatt på en TV som opprinnelig kostet 8200 kr. Hvor mye må du betale?

Tenker man på prosenter som hundredeler kan èn først finne ut hvor mye 1% er, og deretter multiplisere prosentverdien for 1% med 15%:

1) 8200 kr / 100 % = 82 %
2) 82 kr * 15 kr = 1230 kr

Dermed vil du betale 8200 kr – 1230 kr = 6970 kr

Tenker man på prosent som en multipliserende faktor vil dette bli gjort litt annerledes. En mulighet er for eksempel å gå direkte, og tenke at 15 % avslag gir at du må betale 85 % av summen, noe som tilsvarer 0.85 av det hele:

0,85 * 8200 kr = 6970 kr

Sammenlikner man de to framgangsmåtene kan man forstå at de gir det samme resultatet, men det er en veldig stor forskjell på de to tenkestrategiene. Den andre tankestrategien, der prosenten blir sett på som en multipliserende faktor representerer en relativt abstrakt og formell måte å se på prosent på. Denne måten kan for mange elever være vanskelig å forstå (Van Galen, et al., 2008).

Fordelen med å arbeid med bar-modellen er et den gir mulighet til veldig fleksible tanke- og fremgangsmetoder. Dette er også en klar didaktisk fordel. Det gjør det mulig for elever på ulike nivåer å arbeide med de sammen oppgavene. Når elevene arbeider med bar-modellen som en måler av hvor full for eksempel en parkeringsplass er, finnes det ikke noen fiks ferdige strategier som kan benyttes, men mange ulike strategier. Dermed er bar-modellen med på å gi elevene stor fleksibilitet i deres framgangsmåter. Hvilken framgangsmåte eller strategi eleven velger å benytte seg av avhenger mye av hvilke proporsjonale størrelser eleven arbeider med (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)

3. Utforming og presentasjon av kontekstoppgaven

I min studie ønsket jeg å studere hvilken intuitiv kunnskap elever på 8.trinn viste når de fikk arbeide med en RME-inspirert kontekstoppgave som omhandlet prosent, for så å se dette opp mot læreverks fremstilling av temaet. Jeg ønsket å benytte meg av en kontekstoppgave med en innebygd bar-modellen.

Kontekstoppgavene jeg valgte for min datainnsamling er skissert i det følgende. Disse oppgavene er i stor grad inspirert av Marja Van den Heuvel-Panheuizen (2003) og hennes arbeid innenfor RME og prosentregning. Hennes forskning er i hovedsak gjort i forhold til elever på mellomtrinn. I de følgende oppgavene er det derfor gjort en del justeringer slik at de skal passe for elever på ungdomstrinnet, og da fortrinnsvis 8. trinn.

I tillegg til disse oppgavene ble det utformet 4 oppgaver hvor bar-modellen ikke var direkte involvert. Av disse oppgavene ble to utformet av meg selv, og to hentet direkte fra læreverket Grunntall 8. Disse oppgavene er tekstoppgaver i en mer tradisjonell forstand. De er tatt med på for å gi et bilde av hvorvidt elevene så arbeidet med modellen overførbart til andre oppgaver som omhandlet prosentregning.

Oppgavene som elevene skulle arbeide med i datainnsamlingen hadde som mål å framkalle strategier som elevene kunne benytte seg av i arbeid med prosentregning. Konteksten som ble utformet ble også vurdert opp mot de læreplanmål som foreligger. Etter 10. årstrinn sier læreplanen LK06 at elevene blant annet skal:

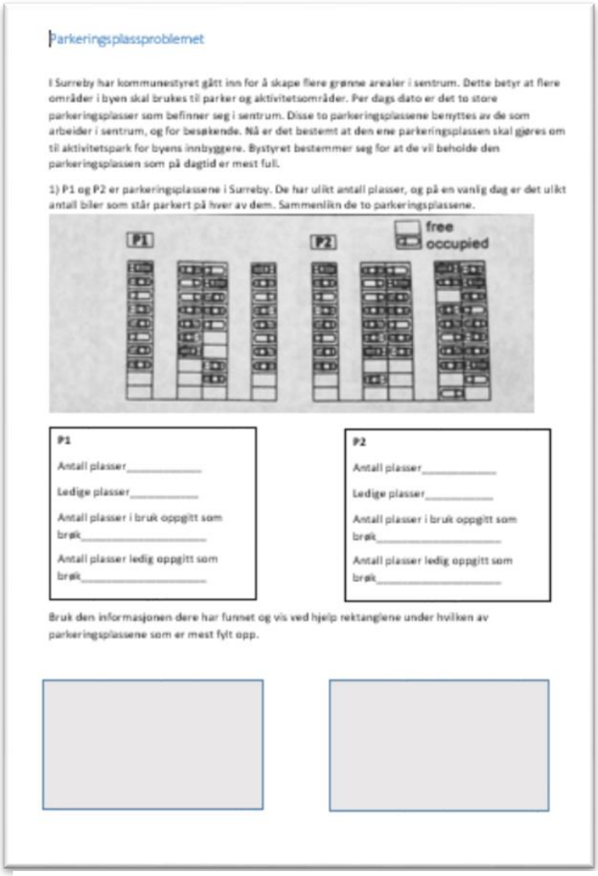
> Sammenlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøker, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjoner ulike representasjoner er formålstenlege (Kunnskapsdepartementet, 2013a).

I tillegg til dette ble utformingen sett opp mot de tema/kategorier/undertema som læreverket elevene benytter seg av legger vekt på.

I utformingen av oppgaven er det tatt sikte på å utforme en oppgave som gir rom for kreativ tenking der det skal være mulig å benytte seg av flere framgangsmåter for å komme fram til det rette svaret. På denne måten skal oppgaven møte elever på ulike nivåer, og med ulike tankestrategier. Oppgaven ble gitt i 3 deler. Parkeringsplassproblemet dag 1 ble gitt som et forarbeid, parkeringsplassproblemet dag 2 er konteksten elevene arbeidet med i selve datainnsamlingsøktene (økt 1 og 2 ved skole 1, og datainnsamlingsøkten ved skole 2), og parkeringsplassproblemet dag 3 ble gitt som et etterarbeid i den siste delen av datainnsamlingen (økt 3 ved skole 1, og på slutten av datainnsamlingsøkten ved skole 2).

3.1. Parkeringsplassproblemet dag 1, 2 og 3

Tanken bak den første delen av oppgaven (se figur 10/vedlegg 3) er at elevene skal få satt seg inn i kontekst, og få et innblikk i betydningen til ¨fullhetsbegrepet¨ i denne konteksten. I oppgaven skal elevene svare på ulike spørsmål som omhandlet de skisserte parkeringsplassene. Dette inkluderte blant annet å svare på: hvor mange plasser hver av parkeringsplassene har, hvor mange plasser som er opptatt, og hvor mange plasser som er ledige. Denne oppgaven går i liten grad på prosentbegrepet, helt til i den siste delen av oppgaven.


Parkeringsplassproblemet

I Surreby har kommunestyret gått inn for å skape flere grønne arealer i sentrum. Dette betyr at flere områder i byen skal brukes til parker og aktivitetsområder. Per dags dato er det to store parkeringsplasser som befinner seg i sentrum. Disse to parkeringsplassene benyttes av de som arbeider i sentrum, og for besøkende. Nå er det bestemt at den ene parkeringsplassen skal gjøres om til aktivitetspark for byens innbyggere. Bystyret bestemmer seg for at de vil beholde den parkeringsplassen som på dagtid er mest full.

1) P1 og P2 er parkeringsplassene i Surreby. De har ulikt antall plasser, og på en vanlig dag er det ulikt antall biler som står parkert på hver av dem. Sammenlikn de to parkeringsplassene.

P1

Antall plasser____________

Ledige plasser____________

Antall plasser i bruk oppgitt som brøk____________________

Antall plasser ledig oppgitt som brøk____________________

P2

Antall plasser____________

Ledige plasser____________

Antall plasser i bruk oppgitt som brøk____________________

Antall plasser ledig oppgitt som brøk____________________

Bruk den informasjonen dere har funnet og vis ved hjelp rektanglene under hvilken av parkeringsplassene som er mest fylt opp.

Figur 10: Parkeringsplassproblemet dag 1

I de to blå rutene helt til sist på oppgavearket skal elevene visuelt tegne, eller gi en modell på hvor full hver av parkeringsplassene er. Brøkene som skal tegnes inn er ¾ og $^{4}/_{5}$. Oppgaven ber også elevene skrive inn hvor mange prosent av figuren de har markert. Dette gjør at det for mange vil være naturlig å benytte seg av denne som en bar, der de kan bruke den ene vertikale linjen til å markere prosenter på, mens den andre vertikale linjen kan benyttes til å markere brøkdeler på. Dette gir elevene en innfallsvinkel på hvordan baren i de følgende kontekstoppgavene kan benyttes.

Oppgaven kan også for en del elever være med på å vekke tanker om sammenhengen mellom brøk og prosent. Gjennom oppgaven opererer de mye med brøker, og likeverdige brøker, for deretter å gå over til prosent. Dette kan være med på å få inn tanker om sammenhengen mellom 100 %, og at i for eksempel 4/5 vil 5/5 tilsvare det hele.

Den andre delen av oppgaven har fått navnet *parkeringsplassproblemet dag 2* (se figur 11/vedlegg 4). Hensikten med denne oppgaven er å få et innblikk i hvilke ulike strategier elever på 8. trinn benyttet seg av for å løse en kontekstoppgave som omhandler prosent. En viktig del av utformingen av oppgaven er da å lage en oppgave som legger opp til, og gjør flere ulike tankestrategier sannsynlig. I tillegg til oppgavearket får elevene utdelt hver sine ¨målere¨ som de står fritt til å bruke i sine løsninger. Målerne som elevene får utdelt er inspirert av *bar-modellen.* Denne modellen støtter en fleksibel mental aritmetikk, som gir elevene mulighet til å benytte seg av flere ulike strategier i arbeidet med å finne ulike prosenter, slik det ble beskrevet i kapittel 2.5 (Van Galen, et al., 2008).

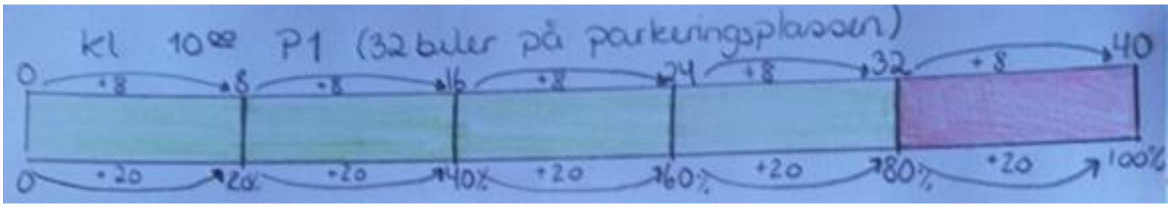
Det blir satt opp en måler på hver av parkeringsplassene. Målerne forteller hvor stor prosentandel av parkeringsplassen som er i bruk. Hvis måleren er helt rødt betyr det at hele parkeringsplassen er i bruk, mens hvis måleren er halvveis rødt betyr det at parkeringsplassen er halvfull. Bystyret vil finne ut hvilken av de to parkeringsplassene som i løpet av en arbeidsdag mest full. De sjekker begge parkeringsplassene 2 ganger.

Første gang parkometeret sjekkes er klokken 10.00. På parkeringsplass P1 er det da 32 biler, mens på P2 er det 42 biler. Neste sjekk er klokken 14.00. Da er det 24 biler på P1, og på P2 er det 30 biler. Ut fra opplysningene, hvilken av de to parkeringsplassene bør Surreby beholde som parkeringsplass?

Figur 11: Parkeringsplassproblemet dag 2

Gjennom arbeidet med oppgaven kan elevene finne en eller flere måter å komme fram til *hvor mange prosent av måleren som er full, når et visst antall parkeringsplasser er opptatte*. Det vil derfor ikke bli lagt noen føringer på hvordan de kan løse problemet. Ved at tallene man skal operere med endrer seg, får en mulighet til å komme fram til flere strategier, og på den måten en mulighet til å vurdere ulike strategier opp mot hverandre, eller å videreutvikle en strategi fra den ene delen av oppgaven til den neste.

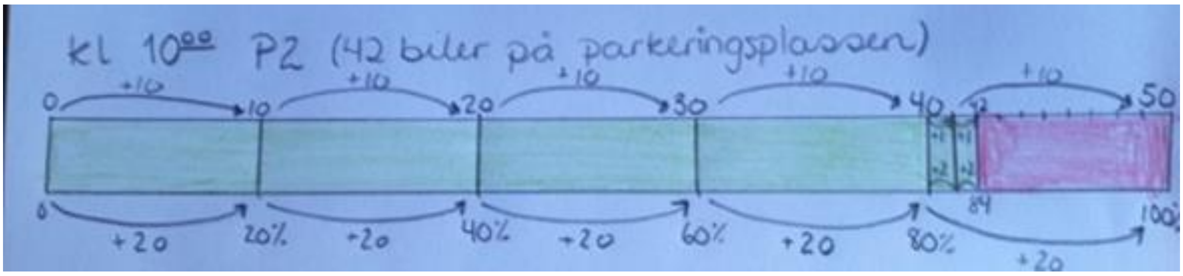
Oppgaven kan løses på mange ulike måter. For elevene handler dette om hvilke tankestrategier, og om hvilken forståelse de har for det matematiske temaet *prosent og prosentregning.* For mange vil det være naturlig å benytte seg av en *bygge opp tenkemåte* i den første oppgaven (se figur 12). Dette kan mye skyldes de tallene som elevene skal arbeide med i oppgaven, da spesielt med tanke på «parkeringsplass 1 klokken 10.00». I det første spørsmålet skal elevene svare på hvor mange prosent av parkeringsplassen som er full når det er 32 av 40 plasser som er opptatte. Det kan da hende at flere ser sammenhengen med at de kan dele måleren opp i 5 like store deler. Da vil hver del inneholde 8 parkeringsplasser, noe som tilsvarer at hvis vi har 4 deler fylt opp, vil dette tilsvare 32 parkeringsplasser, som også tilsvarer 80% av hele parkeringsplassen. Denne oppgaven kan derfor være med på vise om elever har en forståelse for likeverdige brøker, eller så kan den være med på at de kan utvikle en forståelse for likeverdige brøker gjennom å oppdage at både 4/5 og 32/40 tilsvarer 80%.



Figur 12: Løsningsforslag parkeringsplassproblemet dag 2, P1 klokken 10.00

Oppgavene vil også gi et innblikk i proporsjonaliteten mellom størrelsene *antall parkeringsplasser* og prosent. De vil måtte behandle de to størrelsene proporsjonalt ved at antall biler og antall prosent avhenger av hverandre, og av at veksten i de to størrelsene ikke er lik, men skjer proporsjonalt.

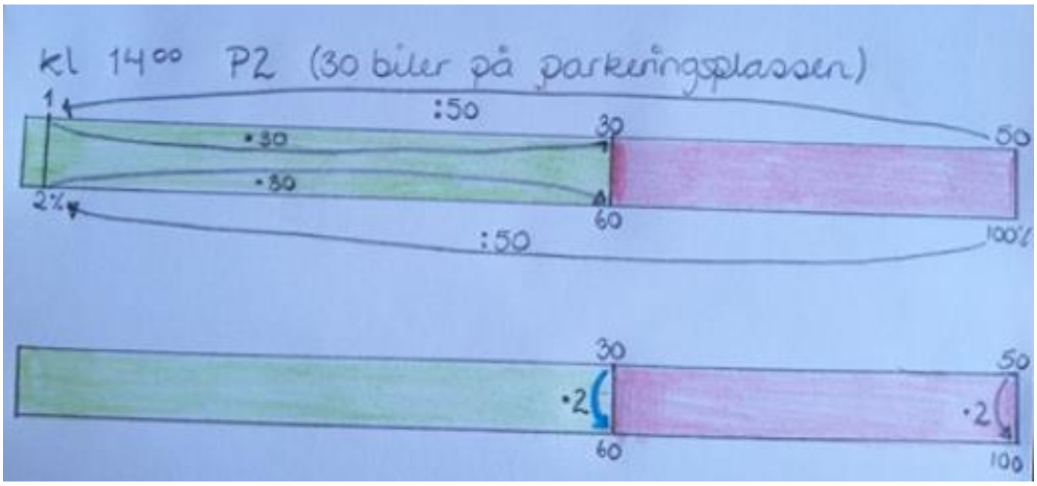
Det er mulig å videreføre denne strategien også til «parkeringsplass 2 klokken 10.00» (se figur 13). På dette tidspunktet skal elevene svare på hvor full parkeringsplassen er når det er 42 biler som står parkert på den 50 plass store parkeringsplassen.



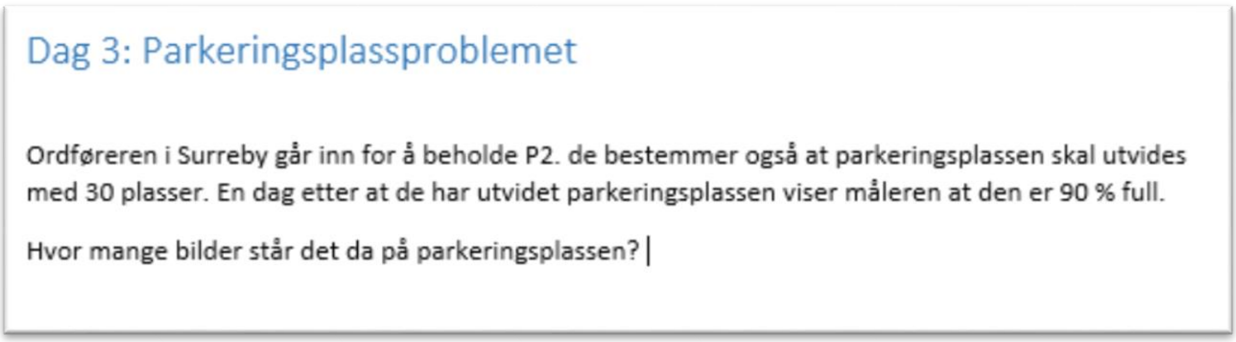
Figur 13: Løsningsforslag parkeringsplassproblemet dag 2, p2 klokken 10.00

Deles det opp i like store deler her vil det være naturlig å dele hele parkeringsplassen opp i 5 like store deler som hver inneholder 10 parkeringsplasser. Da vil man komme fram til at 40 plasser, eller 4 ruter tilsvarer 80 %. En vil da se at de fortsatt mangler 2 plasser for å vite hvor mange prosent 42 plasser utgjør. Da er en mulighet å dele 1 av rutene som inneholder 10 parkeringsplasser opp i 10 like store deler. Det som gjelder da er å vurdere prosentsiden av barmodellen. Inne i hver av de 5 oppdelte rutene er det til sammen 20 % av hele baren. Ved å på nytt dele denne inn i 10 like store deler vil hver av de 10 delene inneholde 2%. Gjennom å legge til 2 slike ruter vil man komme fram til at 42 parkeringsplasser tilsvarer 84 %. Dette kan også gjenkjennes i tankestrategien *bygge opp*-tenkemåten.

På grunn av parkeringsplass 2s størrelse kan det også for mange være enkelt, og naturlig å se at 1 parkeringsplass inneholder 2 %. Dette er mye på grunn av forholdet mellom 100 % og 50 parkeringsplasser. Dette forholdet kan være med på å gi en naturlig inngang til tankemåtene *veien om 1* og *mellom-tenkemåten* (se figur 14). Løser man oppgaven ved bruk av *veien om 1* vil det være naturlig å se på og finne ut hvor mange prosent som befinner seg i hver parkeringsplass, mens ved å benytte seg av *mellom-tenkemåten* vil man se på forholdet mellom antallet plasser og prosent. I dette tilfellet vil hele tiden prosenten være dobbelt så stor som antallet parkeringsplasser.



Figur 14: Løsningsforslag parkeringsplassproblemet dag 2, p2 kl. 14.00



Dag 3: Parkeringsplassproblemet

Ordføreren i Surreby går inn for å beholde P2. de bestemmer også at parkeringsplassen skal utvides med 30 plasser. En dag etter at de har utvidet parkeringsplassen viser måleren at den er 90 % full.

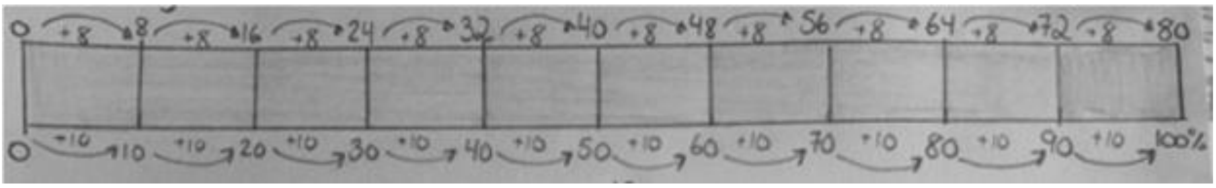
Hvor mange bilder står det da på parkeringsplassen?

Figur 15: oppgavetekst Parkeringsplassproblemet dag 3.

I den siste delen av oppgaven som omhandlet parkeringsplassproblemet (se figur 15/Vedlegg 5) er målet å se om elevene har funnet en strategi som de kan videreføre til oppgaver der målet ikke er å finne ut hvor mange prosent et visst antall biler er, men hvor mange biler en gitt prosent står for. I forhold til den første oppgaven har det hele endret seg, og i tillegg har oppgaven gått over til at elevene skal finne prosenten.

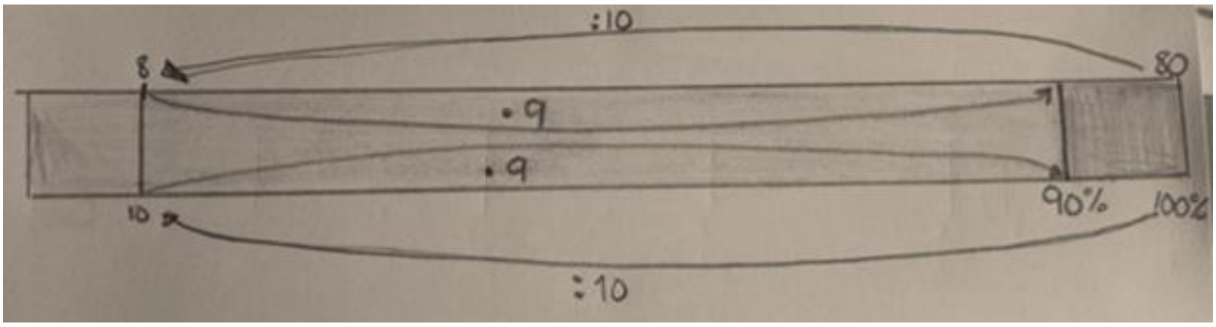
Ved å endre fokuset i oppgaven ønsker jeg å se om elevene ser sammenheng fra det arbeidet de har gjort gjennom arbeidet med parkeringsplassproblemet dag 2 til når oppgaven endrer seg. For å endre fokuset ser jeg det også som nødvendig å endre størrelsen på parkeringsplassen. Derfor ble oppgaven utformet slik at parkeringsplass 2 ble utvidet med 30 plasser slik at den inneholder 80 plasser totalt. Gjennom oppgaven skal elevene svare på hvor mange plasser som var i bruk dersom den oppsatte måleren viste at parkeringsplassen til sammen var 90 % full.

En måte elevene kan angripe denne oppgaven på er å dele parkeringsplassmåleren inn i 10 like store deler som hver tilsvarer 10% (se figur 16). På den tilsvarende siden, der måleren viser antallet biler vil det da være 8 biler i hver rute, slik at elevene gjennom å *bygge opp* vil komme fram til at parkeringsplassen på dette tidspunktet har 72 biler parkert.



Figur 16: Løsningsforslag Parkeringsplassproblemet dag 3

Dette kan også gjøres enklere for elevene ved at de benytter seg av *en kjent prosent*, i dette eksemplet 10% (se figur 17).



Figur 17: Løsningsforslag 2, Parkeringsplassproblemet dag 3

Oppgaven kan også løses ved å finne ut hvor mange plasser som er i hver prosent. I dette tilfellet ville 1% tilsvare 0.8 plasser. Tenker man på denne måten vil man ved å multiplisere 0.8 med 90% komme fram til at parkeringsplassen totalt har 72 biler parkert på dette tidspunktet.

I tillegg er det blitt utformet ekstraoppgaver. Til sammen utgjør dette fire oppgaver der det er gått bort fra hele konteksten med parkeringsplass, og over til andre oppgaver som omhandler prosent. De tre første oppgavene er lik dag 2 og 3 med tanke på det matematisk innhold, men annerledes med tanke på oppgavens ordlyd (se vedlegg 6).

Den siste oppgaven elevene får har et litt annet matematisk mål enn de foregående. I denne oppgaven skal elevene finne *det hele*, altså hvor mye 100 % av noe er når man har fått oppgitt hvor mye 40 % av noe er.

Målet med ekstraoppgavene er å avdekke hvorvidt elevenes strategier og tanker er så fleksible at de i møte med andre problemer og mer utfordrende tall får til å løse dem ved å reflektere over de metoder de har jobbet seg fram til i de foregående oppgavene. Dermed vil også disse oppgavene kunne løses med de samme strategier som de foregående. Hvis elevene gjennom ekstraoppgavene benytter modellen og de samme strategiene som de benyttet seg av under arbeidet med parkeringsplassproblemet dag 2, kan dette være en indikator på at modellen har utviklet seg til å bli en modell for et matematisk konsept, heller enn å være knyttet til konteksten. (jfr. Gravemeijer, 1999 i kap 2.3).

4. Metode:

I dette kapittelet vil jeg gjøre rede for denne oppgavens forskningsmetode. Videre vil jeg presentere studiens utvalg og datainnsamlingsprosessen, datamaterialets omfang og karakter, og gi en beskrivelse av hvordan datamaterialet er bearbeidet og analysert. Den første delen her omhandler analysen av elevenes arbeider, og den andre tar for seg analysen og bearbeidelsen av læreverkene. Avslutningsvis i kapittelet vil jeg se på utfordringer i forhold til etiske betraktninger gjort i forbindelse med dette forskningsprosjektet. Jeg vil her også trekke inn spørsmål om validitet og reliabilitet i forhold til prosjektet.

4.1. Forskningsmetode og mål for studien

Formålet med denne studien er å identifisere forholdet mellom elevers intuitive kunnskap og strategier i arbeid med en RME-inspirert kontekstoppgave som omhandler prosent, og den presentasjonen læreverk gir av det matematiske temaet prosent. Det har derfor vært hensiktsmessig å observere et utvalg elever i deres arbeid med en kontekstoppgave, og identifisere hvilke strategier og hvilken forståelse elevene viste gjennom sitt arbeide. I tillegg til dette valgte jeg å studere ulike læreverk og deres presentasjon av det matematiske temaet.

Denne forskningsstudien betegnes som en kvalitativ småskala studie. Begrunnelsen for å velge en kvalitativ studie handler i dette tilfellet først og fremst om oppgavens problemstilling. Gjennom kvalitativ forskning sikter forskeren ofte på å utforske og finne svar på menneskelige prosesser, eller problemer i en virkelig setting (Postholm, 2005). Kvalitativ forskning kan gi en dyp og detaljert forståelse av et innhold, handlinger, ikke-verbale og observerbare fenomen, holdninger, intensjoner og oppførsel (Cohen, Manion, & Morrison, 2011). Denne forskningsoppgavens problemstilling tar blant annet sikte på å identifisere ulike strategier som kan forekomme når elever på 8.trinn arbeider med en kontekstoppgave, og den forståelse elevene viser for det aktuelle matematiske temaet. Dermed er det også mer interessant å danne seg et dypere og mer detaljert bilde av enkeltinformanter, heller enn et mer generelt bilde av en større gruppe informanter, noe som taler for et kvalitativt forskningsdesign.

Datainnsamlingen ble gjennomført i to 8.klasser med til sammen 20 deltakere. Elevene arbeidet i små grupper med to eller tre elever i hver gruppe. Elevenes skriftlige arbeider ble samlet inn ved datainnsamlingens slutt. Det ble også gjort lydopptak av til sammen 4 grupper i deres arbeid med kontekstoppgave, og i gitte etteroppgaver. I tillegg til dette ble det valgt ut to læreverk, Grunntall 8 og Sirkel 8, som gjennom studien er blitt analysert og drøftet.

Gjennom datainnsamlingen deltok jeg som *observatør.* Når man velger observasjon som metode for datainnsamlingen er det flere ting man må ta stilling til. Som forsker bør man ha et ønske om å benytte seg av den metoden som på best mulig måte hjelper deg til å belyse din problemstilling. En av de tingene man må tenke gjennom er hvilken rolle man ønsker å innta, og hvilken påvirkning denne rollen vil ha for deltakerne i datainnsamlingen, og for resultatet av den innsamlede dataen. Som forsker kan man ha flere ulike roller. Cohen m.fl. (2011) beskriver tre ulike roller; *fullstendig deltakende, deltakende observatør* og *fullstendig observatør.* Alle rollene har ulike fordeler og ulemper. I dette forskningsprosjektet inntok jeg rollen som *deltakende observatør.* Gjennom deltakende observasjon får forskeren en god mulighet til å observere det som hender *live*, og dermed får forskeren et godt innblikk i hva som skjer i ulike situasjoner i datainnsamlingsprosessen (Cohen, Manion, & Morrison, 2011). I denne rollen er de andre deltakerne klare over forskerens rolle. Forskeren deltar noe i deltakernes arbeid. Utfordringen her kan være at forskeren mangler den nødvendige objektivitet til å observere på en reliabel måte. Når deltakerne kjenner til forskerens rolle kan de også i noen tilfeller velge å ikke dele tanker fordi de er usikre på om det de har gjort er det som forskeren er ute etter (Cohen, Manion, & Morrison, 2011).

Dette var flere faktorer som lå til grunne når jeg valgte å innta denne rollen i mitt prosjekt. Gjennom rollen som deltakende observatør fikk jeg mulighet til å observere elevene mens de arbeidet, og jeg fikk mulighet til å be dem redegjøre for sine strategier underveis i arbeidet. Dette var med på å gjøre blant annet bearbeidingen av materialet lettere fordi jeg på forhånd hadde snakket med elevene, og gjennom feltnotatene som jeg gjorde meg var det lettere å kategorisere ulike arbeider. I tillegg ga den deltakende observatør-rollen meg mulighet til å snakke med elevene underveis om hvordan de opplevde å arbeide med oppgaven. Et av hovedprinsippene innenfor RME er *guided re-invention*. Dette betyr at elevene også skal kunne få veiledning hvis de står faste, eller til andre ting underveis i arbeidet (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Fordi jeg i prosjektet inntok rollen som deltakende observatør, må jeg ta dette med i betraktning når jeg analyserer elevenes arbeider. Jeg må for eksempel tenke over om min deltakelse har vært med på å påvirke utfallet at elevenes besvarelser, og i så tilfelle hvordan. I studien var jeg opptatt av å observere og identifisere de strategier elevene benyttet seg av i sine løsninger. For meg var det i mange tilfeller da nødvendig å gå inn og be elevene redegjøre for det de gjorde underveis. Slik hadde jeg i etterkant hadde mulighet til å skape meg en bedre forståelse, og bedre identifisere elevenes tankestrategier.

For å oppnå best mulige utgangspunkt for datainnsamlingen avtalte jeg også i det ene tilfellet møte med klassen i forkant. På denne måten fikk jeg gitt elevene en grundig informasjon om prosjektet, og det åpnet for at de fikk stille spørsmål direkte til meg. Dette var også med på å skape en relasjon mellom meg som forsker, og elevene som deltakere, noe som ifølge Fangen (2004) sees på som en styrke når man skal gjennomføre datainnsamling hvor forskeren har rollen som deltakende observatør. Dessverre fikk jeg ikke gjort dette med begge klassene, noe som ikke ga et helt likt utgangspunkt. Informasjonen ble gitt den andre klassen i forkant av selve datainnsamlingen.

4.2. Presentasjon av utvalg og datainnsamlingsprosessen

Innsamlingen av data i forbindelse med dette forskningsprosjektet ble gjennomført med elever fra tre ulike 8. klasser ved to ulike skoler. En relativt stor ungdomsskole (som jeg videre betegner som skole 1) og en mellomstor barne- og ungdomsskole (som jeg videre betegner som skole 2). Ved begge skolene ble elevene i klassene karakterisert som faglig sterke av lærerne. Temaet prosent er oftest introdusert første gang på ungdomstrinnet på 8. tinn. Derfor valgte jeg nettopp 8. trinn som mine informanter. En forutsetning for datainnsamlingen var at elevene som deltok ikke hadde arbeidet med temaet prosent dette skoleåret. Jeg hadde en hypotese om at hvis elevene allerede hadde hatt undervisning i temaet ville dette kunne være et hinder for elevenes mer intuitive løsningsstrategier. Det må tas med i betraktningen at dette ikke var det første møtet elevene hadde med prosent i skolesammenheng, og at samtlige hadde fått undervisning i temaet på mellomtrinnet.

På begge skolene tok lærerne ansvar for å samle inn samtykkeskjema, og for å informere og sende forespørsel til lederne ved skolen. Lærerne fikk også ansvaret for å sette sammen grupper til datainnsamlingen. Jeg satte ingen kriterier til dette, annet enn at jeg ønsket grupper som samarbeidet godt. Både elevarbeidene og lydopptakene gir grunnlag for analysen som kommer senere i avhandlingen.

I følge Cohen et.al (2011) er deltakende observasjon mest anvendbar dersom man observerer mindre grupper. Da får man mulighet til å studere det som skjer på et mer detaljert nivå. Gjennomføringen av datainnsamlingen på skole 1 var med en relativt stor gruppe, derfor var det vanskeligere å observere detaljert. Ved skole 2 hadde jeg en mye mindre elevgruppe å observere, dermed fikk jeg mulighet til å komme tettere på elevene mens de arbeidet, og fikk bedre mulighet til å stille spørsmål og snakke med dem underveis i deres arbeid med oppgavene.

Innsamlingene på de to skolene ble gjennomført litt ulikt. Dette handlet om antallet deltakere, og om hva som ble avtalt med lærerne. Siden innsamlingen på skole 2 kom noe etter innsamlingen på skole 1, kom denne datainnsamlingen på et tidspunkt hvor jeg var lengre inn i arbeidet med prosjektet, og jeg hadde derfor et tydeligere fokusområde. Ved skole 1 var hovedfokuset å avdekke mange ulike strategier blant elevene, mens ved skole 2 var fokuset i mye større grad på enkeltgruppenes arbeid, og på hvilke prosesser som skjedde underveis i elevenes arbeid.

4.2.1. Utvalg og datainnsamling ved skole 1

Ved skole 1 kom jeg i kontakt med matematikklæreren gjennom eget nettverk. Denne læreren underviste i to 8. klasser ved en ungdomsskole. Under datainnsamlingen hadde jeg selv ansvaret for elevene som deltok i datainnsamlingen, mens den ordinære læreren holdt undervisning for elevene som ikke deltok. Fra begge klassene læreren underviste i var det tilsammen 16 elever som fikk samtykke, og som ønsket å delta i prosjektet.

Datainnsamlingen ble gjennomført i 3 økter som hver besto av 45 minutter. I tillegg hadde læreren på forhånd delt ut parkeringsplassproblemet dag 1 som forarbeid til elevene. Dette hadde elevene gjort hjemme før starten på den første økten. I de to første øktene arbeidet elevene med parkeringsplassproblemet dag 2, mens jeg gikk rundt og observerte, og noterte. De første to øktene ble gjennomført sammen med alle de 16 elevene som deltok i datainnsamlingen. I disse to øktene arbeidet de 16 elevene i mindre grupper på 2-3 elever. Elevene samarbeidet, men alle fikk oppgaveark, og noterte sine løsninger. Fra den første og den andre økten ble det totalt samlet inn 16 elevarbeider, ett arbeid fra hver elev. Det ble også tatt lydopptak av to grupper under disse to øktene.

I den 3. økten var det kun de to gruppene det ble tatt lydopptak i de første to øktene som deltok. I denne økten hadde vi først en samtale hvor de redegjorde for sitt arbeide og for de løsningsstrategier de benyttet seg av i arbeidet med Parkeringsplassproblemet dag 1 og 2. Deretter fikk elevene to etteroppgaver som de arbeidet med.

Totalt fra skole 1 ble det samlet inn:

- *16 skriftlige elevarbeider fra parkeringsplassproblemet dag 2*
- *Lydopptak av 2 grupper i arbeidet med parkeringsplassproblemet dag 2 (økt 1 og 2)*
- *5 skriftlige elevarbeider der elevene arbeidet med etteroppgave 1 og 2 (økt 3)*
- *Lydopptak av samtale med 2 grupper, og deres arbeid fra økt 3.*

4.2.2. Utvalg og gjennomføring av datainnsamling ved skole 2

Datainnsamlingen ved skole 2 ble gjennomført 2-3 uker etter datainnsamlingen ved skole 1. Siden det på denne skolen kun var 4 elever som meldte sin interesse, og som fikk samtykke fra foresatte til å delta, valgte jeg å dele elevene opp i to grupper med to elever i hver gruppe. De to gruppene ble tatt med på et eget klasserom og plassert med størst mulig avstand fra hverandre. Dette gjorde at elevene kunne arbeide relativt isolerte, og at de ikke i noen særlig grad ble forstyrret av de andre elevenes arbeid. At det kun var 4 elever i klasserommet kan også ha vært en faktor som hjalp elevene til å konsentrere seg om selve arbeidet med oppgaven, heller enn omstendighetene rundt.

Vi hadde to sammenhengende økter på 45 minutter per økt til rådighet. Under disse to øktene hadde jeg selv ansvaret for å introdusere og gjennomføre opplegget. Elevenes ordinære lærer var på et annet klasserom sammen med de elevene i klassen som ikke ønsket å delta i prosjektet. Gjennom hele økten ble det tatt lydopptak av begge gruppene. Før den første økten hadde elevene arbeidet med parkeringsplassproblemet dag 1 som forarbeid til selve datainnsamlingen. Elevene startet å arbeide med *parkeringsplassproblemet dag 2.* Etter å ha redegjort for sine strategier i dette arbeidet gikk elevene umiddelbart over på *parkeringsplassproblemet dag 3,* for deretter å fortsette direkte med etteroppgavene. Gruppene ved denne skolen fikk i tillegg noen oppgaver ekstra. Disse oppgavene var utformet på bakgrunn av de resultater som kom fram etter den første datainnsamlingen.

Etteroppgavene hadde som mål å avdekke hvorvidt elevene ser sammenheng i de strategier de har kommet fram til, og at strategiene er overførbare til flere typer problemstillinger, og flere ulike aspekter ved prosentregning. For å avdekke flest mulig ulike aspekter ved om strategiene elevene benyttet var overførbare, valgte jeg derfor å utforme noen ekstra oppgaver som skulle inngå i denne datainnsamlingen.

På slutten av økten hadde jeg en kort samtale med hver av gruppene hvor de redegjorde for sitt arbeid og svarte på noen spørsmål fra meg.

Fra skole 2 ble det totalt samlet inn:

- 2 sett skriftlige elevarbeider (ett fra hver gruppe) med arbeid fra:
    - Parkeringsplassproblemet dag 2
    - Parkeringsplassproblemet dag 3
    - Etteroppgave 1, 2, 3 og 4
- Lydopptak av 2 grupper under hele datainnsamlingsøkten.

4.3. Transkripsjon, koding og etterarbeid

I den første delen av analysearbeidet fokuserte jeg på elevenes tankestrategier i deres løsning av oppgaven. For å plassere elevenes strategier og tankemåter har det vært nødvendig for meg i mitt arbeid å gå tilbake til den teorien som er beskrevet om det aktuelle temaet. Datamaterialet ble i flere runder kodet og analysert. Jeg har tatt stilling til hvordan strategiene kan tolkes opp mot bar-modellen, og analysert hvilke andre matematiske temaer som kan kobles opp mot det arbeidet elevene har gjort med kontekstoppgaven. Gjennom denne prosessen har jeg plassert elevenes arbeider i ulike koder som omhandler de tankestrategier de har benyttet seg av og hvilken forståelse de viser for det aktuelle temaet, *prosent*, gjennom deres arbeider. En kode beskrives av Cohen et.al (2011) som en merkelapp eller et navn som forskeren gir til et datamateriale som inneholder en bestemt type informasjon eller ide.

De kodene som jeg har benyttet meg av i arbeidet med å identifisere elevenes strategier er inspirert av Van Galen (2008), Van Heuvel-Panheuizen (2003) og Tvedte (2016; 2006). Kodene som er blitt benyttet er tankestrategier, eller framgangsmåter som allerede er etablerte hos de nevnte. Jeg har ut fra det disse har beskrevet gjennom sine forskningsarbeider valgt å sette dem sammen, og trekke sammenhenger mellom de ulike strategiene som er blitt beskrevet av de overnevnte. Dette har resultert i følgende rammeverk:

Tabell 1: Kategorier for identifisering av elevenes strategier i arbeid med kontekstoppgaven

Strategi	Beskrivelse
Bygge opp/ bygge ned tankemåter Bruke en kjent prosent/ enkle brøker	- Gjennom å dele bar-modellen i like store blokker tilnærmer man seg den rette prosenten. - Gjentatt addisjon/subtraksjon Se sammenheng mellom de oppgitte tall og for eksempel 10 %, og ut fra dette finne løsningen
Gjentatt halvering/dobling	
Finne enkle direkte forholdstall - Mellom-tenkemåte - Innenfor-tenkemåte	Bruker forholdstallet mellom for eksempel 100 og ¨det hele¨ Bruker forholdstallet mellom delen og det hele, eller prosentverdien og 100.
Gå veien om 1	Finne ut hvor mye 1 prosent tilsvarer, og deretter multiplisere med den prosenten man ønsker å finne den tilsvarende prosentverdi til. Finne ut hvor mange prosenter 1 del av det hele inneholder, og deretter multiplisere med antall deler man ønsker å finne den tilsvarende prosenten til

I den andre delen av analysearbeidet hadde jeg hovedfokus på dialogene mellom elevene. Her hadde jeg også fokus på å analysere hvilke strategier elevene benyttet seg av, men i tillegg til dette var fokuset på hvordan disse strategiene utviklet seg gjennom elevenes arbeider. Jeg har da i hovedsak analysert elevenes utsagn i forbindelse med å komme fram til løsninger på problemet. I dette arbeidet startet jeg med en åpen koding hvor jeg beskrev de tankestrategiene som elevene benyttet seg av til å løse kontekstoppgaven. Deretter ble det analysert hvilket aktivitetsnivå elevene befant seg på i de ulike delene av arbeidet. Til dette analysearbeidet benyttet jeg allerede etablerte koder som er beskrevet i rammeverket *levels of activity* som vi blant annet finner i Gravmeijer (1999) og Gravmeijer og Doorman (2009). Denne forskningen har fokusert på hvordan framvoksende modeller kan være med på å fremme forståelsen for formell matematikk. Aktivitetsnivåene er brukt til å beskrive utviklingsprosessen i flere ulike matematiske temaer. I Gravmeijer (1999) fokuseres det på tallinjer, og addering og subtrahering langs tallinjen, mens i Gravmeijer og Doorman (2009) fokuseres det på diskre grafer og endring og hastighet. Disse aktivitetsnivåene er en sentral del av RME, og gjennom matematiseringen som skjer når elevene arbeider med modellen skal modellen bidra som en bro mellom den uformelle og formelle matematikken (jfr kap 2.3).

Tabell 2: Levels of activity (Gravmeijer, 1999 s 162)

Aktivitetsnivå	Forklaring
Aktivitet i tolkning av oppgaven	Nivået involverer tolkninger og løsninger som avhenger av at man forstår hva man skal gjøre med problemet.
Referensiell aktivitet	Nivået involverer modeller som refererer til aktiviteten som blir beskrevet i den gitte konteksten.
Generell aktivitet	Modeller som retter fokuset på tolkninger og løsninger uavhengig av kontekst eller situasjon.
Aktivitet med formell matematisk resonnering	På dette nivået er det ikke lengre nødvendig å støtte seg til modeller for å oppnå matematisk aktivitet.

Alle elevarbeidene og alle lydopptakene ble analysert. Men for å gå skikkelig i dybden har jeg valgt å kun presentere resultater fra 2 av lydopptakene. I disse to lydopptakene var alle elever aktive muntlig, og deres tankestrategier kommer tydelig fram. Dialogene ble transkribert, kodet og fargemarkert med bestemte farger for hvilke strategier vi ser ulike plasser i arbeidet, hvilke aktivitetsnivå elevene arbeidet på ved ulike tidspunkt i dialogene, og hvilke problemløsningsstrategier (jfr. kap. 2.2) elevene har benyttet seg av gjennom dialogene.

Av de skriftlige elevarbeidene ble alle analysert og kategorisert. I dette arbeidet er det kodet og analysert hvilke strategier som identifiseres, og hvilke strategier som er typiske eller uvanlige. I Analysedelen blir det trukket fram enkelte eksempler innenfor hver strategi, og de resterende funnene blir kommentert. I presentasjonen av analysen er det trukket fram 1-3 eksempler under hvert utdrag/delkapittel. Disse utdragene tar sikte på å gi et bilde av det fokusområdet som er i hvert utdrag.

4.4. Koding og analyse av læreverk

Den tredje delen av analysen gikk ut på å analysere to læreverk, *Grunntall 8 og Sirkel 8.* Gjennom dette analysearbeidet ønsket jeg å finne ut hvilke strategier og hvilken forståelse de to læreverkene la opp til at elevene skulle sitte igjen med etter å ha arbeidet med temaet *prosent.*

I analyse av lærebøker er det flere faktorer man kan ta hensyn til, og tidligere forskning på lærebøker har i stor grad hatt fokus på 3 hovedområder. *1) Det innholdet som er inkludert i temaet. 2) Hvordan tema er presentert og organisert. 3) Elevers forventede prestasjoner* (Li, Chen, & An, 2009). Alle disse fokusområdene gjenspeiler i stor grad innholdet i læreplanen, men på samme tid gjenspeiler de innholdet svært ulikt. Det første fokusområdet som tar for seg innholdet i læreboka kan sees på som analyse på *makronivå.* På dette nivået gir analysen i hovedsak et bilde av bokas oppbygning i form av innhold og struktur. Ser man på det andre fokusområdet kan det ses på som analyse på *mikronivå.* Dette nivået tar for seg analyse av et spesielt tema innad i en lærebok. På dette nivået går man mere i dybden i analysen og ser på den matematiske naturen til et gitt tema (Li, Chen, & An, 2009). Ved å trekke slutninger fra det første og det andre fokusområdet danner man seg et bilde av det tredje fokusområdet. I min oppgave er dette interessant fordi jeg gjennom analysen av elevenes skriftlige arbeider har hatt fokus på hvilken intuitiv kunnskap de har i regning med prosent, og hvilken forståelse de viser for det matematiske temaet.

De to nivåene av analyse tar for seg ulike aspekter av matematikken i tekstbøker. Derfor trekkes det fram som en fordel å ta for seg begge nivåene når man sammenlikner og vurderer lærebøker. Gjennom å benytte seg av analyse både på mikro og makronivå får man mulighet til å vurdere både læreverkets behandling av fagstoffet opp mot læreplanen, men også behandlingen av et valgt tema (Li, Chen, & An, 2009).

Mitt fokus var på to norske læreverk. For å analysere bøkene var det nødvendig for meg å ha koder å benytte meg av. Kodene som ble benyttet er inspirert, og derfor mye like med analyseverktøyet til Li et. al (2009). Til tross for mange likheter mellom analyseverktøyene måtte alle kodene tilpasses da deres analyse tok for seg brøker og divisjon, mens min analyse ser på framstillingen av prosent i lærebøker. Jeg var også ute etter å analysere hvilke strategier de to læreverkene presenterte. Derfor ble også rammeverket fra analysen av elevenes strategier benyttet til analysen av læreverkene (se tabell 1). Disse kodene har blitt benyttet både når jeg har sett på hvilke strategier eksemplene viser, og hvilke strategier presentasjonen av fagstoffet viser.

Innholdsanalysen er blitt gjort både på det som Li. et al. (2009) beskriver som makro- og mikronivå. På makronivået gir analysen en oversikt over temaets plassering i læreverket, hvordan det er organisert, og om det kan trekkes sammenheng til andre matematiske tema. Jeg har også sett på antall sider som er satt av til temaet i læreboka, bokas organisering og presentasjon av temaet.

For å analysere presentasjonen av emnet, og hva man forventer at elevene skal prestere i ulike deler av emnet ble lærebøkene også undersøkt på mikronivå. Gjennom denne undersøkelsen var fokuset på 1) bruk av eksempler, 2) presentasjon av fagstoff og bruk av representasjoner, 3) inkludering og organisering av øvingsoppgaver. Hvilke strategier læreverket presenterer gjennom eksemplene og presentasjonen av fagstoff blir også vurdert. For hvert fokusområde utviklet jeg egne koder. Kodene som er utviklet for de første tre fokusområdene er utviklet for å gi et helhetlig bilde av bokas framstilling av det matematiske temaet. Til å vurdere hvilke strategier som forekommer har jeg benyttet samme rammeverk som i kodingen av de skriftlige elevarbeidene (se tabell 1).

I analyseringen av *bruken av eksempler* ble det fokusert på *typen eksempler, og antallet eksempler som ble brukt, eksemplenes stil og hensikt, og eksemplenes matematiske kompleksitet.* I kodingen av eksemplenes *type* så jeg på om eksemplene var *kontekstbaserte eksempler,* eller om de var *ikke-kontekstbaserte eksempler.* For å analysere eksemplenes matematiske kompleksitet har jeg sett på om eksemplene viser et steg, eller om de viser flere steg. Dette valgte jeg å kode på 3 nivåer: 1*) komplekse, 2) halv-komplekse og 3) ikke-komplekse*. Et eksempels kompleksitet handler om hvor detaljerte eksempelet er. Dette baserer seg på hvor mange ledd de viser i utregningen, og om de blir gitt forklaringer til de numeriske relasjonene som inngår i eksemplet. Et komplekst eksempel vil være et eksempel som både viser alle ledd i utregningen, og i tillegg har forklaringer i form av tekst til de ulike overgangene, mens et ikke-komplekst eksempel vil være et eksempel der det kun er satt opp et numerisk uttrykk og et svar, uten noen videre utgreiing om hva som er gjort mellom. I tillegg til disse motsetningene kan et eksempel vise seg som halv-komplekse. Halv-komplekse eksempler er eksempler hvor vi for eksempel får noen ledd i utregningen, eller hvor vi får en fullstendig utregning, men ikke noen form for forklaring til hva som skjer i de ulike leddene og numeriske relasjonene som inngår i utregningen.

Denne kodingen kan sees på som en videreutvikling av de kodene Li. et al (2009) beskriver som hvor gjennomførte eksemplene er, og hvor komplekse eksemplene er. Gjennom å kode hvor gjennomført et eksempel er får man kun et bilde på om de gir en komplett utregning, eller om elevene må gjøre noe av arbeidet med å fullføre eksemplet selv. Denne koden så jeg det ikke nødvendig å ta med i mitt arbeid fordi jeg ikke skal vurdere hvilke krav læreverkene setter til elevene, men hvilken forståelse de legger opp til at elevene sitter igjen med. Når det kom til eksemplenes kompleksitet hadde Li et. Al (2009) beskrevet denne koden kun til å omhandle hvor mange ledd utregningen viste. Jeg valgte i tillegg til dette å ta med hvorvidt selve utregningen blir beskrevet eller ikke for å avgjøre om et eksempel er komplekst eller ikke.

Ut fra de beskrevne kodene trakk jeg slutninger om eksemplenes rolle og hensikt. Jeg tok da stilling til om eksemplene siktet på å gi elevene innblikk i de numeriske relasjonene som inngår i prosentregning, eller om de tok sikte på å gi elevene et innblikk i en bestemt framgangsmåte for å løse en regneoppgave i prosent.

I tillegg til dette har presentasjonen som hver av tekstbøkene har benyttet blitt undersøkt. Da har jeg sett på hvilke typer representasjoner som er blitt benyttet, og hvilken rolle representasjonen har hatt i presentasjonen av emnet. Presentasjonen av fagstoffet ble kodet til *1) billedlig representasjon, 2) skriftlig representasjon og 3) numeriske representasjoner.* I tillegg ble hver representasjons rolle kodet. Disse kodene ble satt til: 1) gi innblikk i numeriske sammenhenger og 2) gi innblikk i en regneferdighet.

For å analysere øvingsoppgavene har fokuset vært på lærebokas forventninger til elevene kunnskapstilegnelse og ytelse. Til dette ble det kodet antall oppgaver basert på tre kategorier: *1) regneoppgaver for å mestre regneferdigheter, 2) forstå relasjonen mellom tallene som inngår i prosentregning, 3) tekstoppgaver som inneholder regning med prosent.*

I neste kapittel er analysen av læreverkene presentert. Jeg valgte å analysere de to bøkene hver for seg, og hver bok er delt inn i 3 delkapitler. Det første delkapittelet tar for seg læreverkets presentasjoner og representasjoner, det andre tar for seg bruken av eksempler, og det tredje tar for seg oppgaver og oppgavetypen.

4.5. Validitet, reliabilitet og Etiske betraktninger ved prosjektet.

I et forskningsprosjekt vil alltid et av temaene være hvor valid, og hvor reliabelt resultatene man legger fram er. Det finnes mange ulike typer validitet, og man ser på ulike typer av validitet i kvalitative og kvantitative undersøkelser (jfr. Cohen et al., s 179-).
I denne kvalitative småskalastudien har temaet validitet og reliabilitet blitt betraktet. Dette handler i stor grad om ønsket å presentere forskningsresultatet på en best mulig måte, og da må man ta i betraktning blant annet hvordan man samler inn data, og hvordan man analyserer disse. Fangen (2004) beskriver deltakende observasjon som en metode som sikrer høy grad av validitet. Hvor valid noe er handler om hvorvidt forskningen måler det den virkelig skal måle. Når man går inn og observerer deltakere i deres naturlige omgivelser vil de i mange tilfeller ikke bli spesielt påvirket av at man er til stedet. Ut fra de data man samler inn får man mulighet til å sammenlikne og vurdere deltakernes utsagn, gyldigheten av dine observasjoner og gyldigheten av dine tolkinger.
Cohen m.fl. (2011) beskriver en *ekstern validitet* i deltagende observasjoner. Han trekker fram flere (Lincoln and Guba, 1985; Eisenhart og Howe, 1992 i Cohen m.fl. 2011) som mener det er mulig å gjenskape de typiske trekkene i en situasjon, de typiske trekkene blant deltakerne, og å identifisere sammenligningsgrupper, og dermed indikere hvordan dataen kunne transformeres til andre settinger og kulturer. På denne måten skapes validitet i kvantitative forskningsprosjekter. Skal det være mulig for andre forskere å gå inn å få et tilnærmet likt resultat, eller at en annen forsker kan se de samme tendensene som det du har oppdaget i din forskning, er det avgjørende at man har vært nøyaktig i beskrivelsene av hva som er gjort i prosjektet. Gjennom dette kapittelet har jeg gitt en så nøyaktig som mulig beskrivelse av prosessen fra å samle inn data til å legge fram et forskningsresultat.

Når man skal vurdere om den innsamlede dataen er reliabel til å svare på ditt forskningsspørsmål må man se på hvilke data men velger å benytte seg av, på måten den er samlet inn på, og på hvordan datamaterialet er blitt bearbeidet (Johannessen, Tufte, & Kristoffersen, 2006). Når man snakker om reliabilitet snakker man ofte om at resultatene i datainnsamlingen kan reproduseres og gjentas. I mange kvalitative metoder kan dette være en utfordring. Dette er fordi deltakere, omgivelser og settinger forandrer seg (Postholm, 2005).

Etikk handler om å vurdere om handlinger er riktige eller gale. Disse vurderingene foretas gjerne gjennom prinsipper, regler og retningslinjer. Etikk handler også om hvordan vi som mennesker kan påvirke andre mennesker gjennom våre handlinger, og hvordan handlinger påvirker. I forhold til forskning er dette et tema som må tas i betraktning. Spesielt gjelder dette for samfunnsforskning fordi denne direkte eller indirekte berører utvalgte mennesker. Når man skal ut å gjennomføre en kvalitativ studie er det flere etiske betraktninger man må ta hensyn til. Å ta hensyn innebærer at man tenker grundig gjennom hvordan man eventuelt kan belyse et tema uten at det får konsekvenser for noen av deltakerne, eller et helt samfunn (Johannessen, Tufte, & Kristoffersen, 2006).

Frivillighet er også et stikkord i forskningsetiske hensyn. Det legges vekt på at deltakelse skal være frivillig. Før en datainnsamling er det viktig at de som skal delta får mye informasjon om hva det er de skal være med på slik at de ikke er usikre på om de egentlig vil eller ikke. Denne informasjonen må omhandle hva som er målet med forskningen, og hvordan datamateriale blir samlet inn. Til unge deltakere er det også spesielt viktig å legge vekt på å informere om at den data som blir samlet inn ikke kan spores tilbake til dem (Johannessen, Tufte, & Kristoffersen, 2006). For å sikre informantenes anonymitet ble derfor skolenes navn erstattet med Skole 1 og Skole 2. Alle navn er blitt sensurert fra de skriftlige elevarbeidene, og erstattet med Elev 1, Elev 2 … osv. I dialogene som er blitt benyttet i oppgaven har også informantene fått fiktive navn. Johannesen et al (2006) påpeker at hvis en datainnsamling involverer lydopptak er det viktig at informantene får beskjed om hva som skjer med disse lydopptakene, og at de blir forsikret om at disse ikke skal misbrukes (Johannessen, Tufte, & Kristoffersen, 2006).

Det er viktig at deltakerne ikke føler usikkerhet rundt det som skal gjøres. I min datainnsamling var det naturlig å sende ut informasjonsskriv på forhånd som kunne leses av foresatte og elever. I og med at informantene i prosjektet var under 18 år, trengte de samtykke fra foresatte på at de fikk lov til å delta i prosjektet. I informasjonsskrivet var det naturlig å fortelle om hvordan den innsamlede dataen ble behandlet og oppbevart. Noen av elevene sa seg villige til å delta på elevarbeidet, men ønsket ikke å bli tatt lydopptak av. Mens for andre var det helt i orden å bli tatt både lyd og notater rundt. Gjennom å gjøre det på denne måten er også med på å skape trygget for deltakerne. De får være med å sett premisser for hva de synes er greit, og blir dermed mere trygg i sin egen situasjon. I tillegg må NSDs retningslinjer følges under gjennomføring av prosjektet, og ved prosjektets slutt.

5. Analyse av læreverk: Et innblikk i læreverkene *Grunntall 8 og Sirkel 8s* presentasjon av temaet prosent

I dette kapittelet vil jeg presentere funn fra analyseprosessen av de to læreverkene Grunntall 8 og Sirkel 8. I analysen av læreverkene har det vært fokus på å få fram det innholdet som er inkludert i temaet *prosent*, det har vært å presentere hvordan temaet er presentert og organisert, og å få fram elevenes forventede prestasjoner.

Analysen gir en overordnet oversikt over hvordan boka har lagt fram det bestemte temaet. Denne oversikten viser hvilket årstrinn temaet er plassert på, antall sider som er benyttet til å presentere temaet, og organiseringen av de ulike delene. Dette kan gjenkjennes i analyse på makronivå, men i og med at jeg ikke går inn og analyserer forfatternes valg av organisering trekker jeg dette fram som en oversikt heller enn en analyse.

I andre del av lærebokanalysen går jeg grundigere inn i materialet. Denne analysen vil skje på mikronivå, og ta sikte på å analysere eksempler, og bruken av eksempler. Den vil også ta for seg representasjoner og jeg vil gjøre greie for naturen og hensikten til representasjonene. I tillegg til dette vil jeg gi et bilde av de øvingsoppgavene som læreverkene legger vekt på. Gjennom analysen tar jeg sikte på å få et innblikk i hvilke strategier læreverkene legger opp til at elevene skal benytte seg av i løsningen av oppgaver som omhandler prosent. Jeg vil også analysere hvorvidt læreverkene legger opp til at elevene skal se koblinger til andre matematiske temaer, som for eksempel brøk. Gjennom å analysere hvordan lærebøkene presenterer temaet, er målet å få et innblikk i hvilken forståelse det legges opp til at elevene skal ha etter at de har arbeidet med læreverket.

5.1.1. Grunntall 8

Overblikk over læreboka

Grunntall presenterer seg selv som et læreverk med fokus på læringsstiler. Hva som legges i læringsstiler kommer ikke videre fram i selve læreverket, men ser man til teoretikere som Dunn og Griggs (2004) handler læringsstiler om egenskaper som er biologisk basert og medfødt (Dunn & Griggs, 2004). Videre presenterer boken en oversikt eller framgangsmåte for hvordan du skal bruke boka, og det presiseres at hvert kapittel innledes med *målene for det du skal lære.* Innad i boken er oppgavene merket med fargekoder. Disse fargekodene representerer oppgavens vanskelighetsgrad. Det presiseres at du i alle emner bør starte på det letteste nivået, for deretter gå videre til de vanskeligere nivåene etterhvert.

Hele læreverket har en fast struktur som har en vekselvis inndeling av presentasjon av matematisk tema, og oppgaver til det foregående presenterte temaet. I kapittelet om prosent er anslagsvis 5 ½ sider brukt til presentasjon av temaet og eksempler, og 5 sider brukt til ulike øvingsoppgaver. I tillegg til disse øvingsoppgavene er det helt på slutten av kapittelet under ¨vi øver mer¨, cirka 1 side med oppgaver som også omhandler prosent. Til læreverket hører det en ekstra oppgavebok, nettsider/nettressurser og lærerveiledning til hver av bøkene for hvert årstrinn. I analysen har jeg ikke gått inn og analysert disse, men kun tatt for meg den aktuelle læreboken.

I læreverket *Grunntall* er temaet om prosent plassert i boken for 8.trinn, og i boken for 10. trinn i de bøkene som tilhører ungdomstrinnet. I boka for 10. trinn er temaet plassert inn i kapittelet om økonomi, mens det i boka for 8.trinn er plassert inn som et eget kapitel sammen med promille. Dette kapittelet har fått navnet *Prosent og promille.* Siden det i denne undersøkelsen er undersøkt elever på 8.trinns arbeid med prosent er ikke læreverkets presentasjon av temaet på 10.trinn videre analysert, men fokuset har vært på 8.trinn boka.

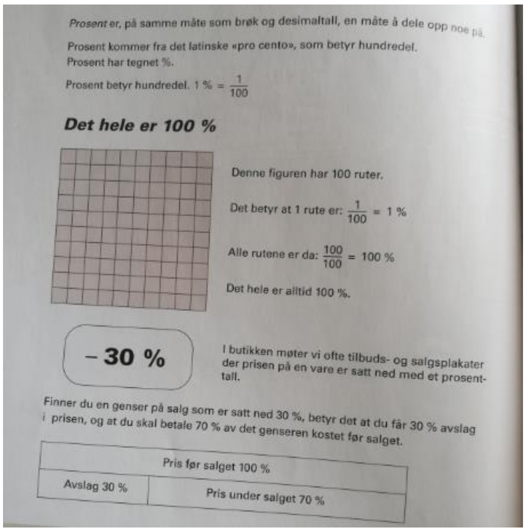
Vi finner kapittelet om *Prosent og Promille* som det tredje kapittelet i boka. Det er plassert etter kapittelet om Brøk, og etterfølges av et kapittel som omhandler Tegning og konstruksjoner. Kapittelet har et spenn på 16 sider der 1 side er satt av til forside og presentasjon av mål for det elevene skal lære, 10 ½ side er brukt til *prosent*, 2 sider er brukt til temaet *promille,* i tillegg er 1 side brukt til oppgaver læreverket har valgt å kalle *vi øver mer oppgaver,* og 1 side til sammendrag av kapittelet.

Den delen av kapittelet som omhandler prosent er delt opp i 5 ulike underkapitler, *Det hele er 100 %, Omgjøring mellom prosent, brøk og desimaltall, Vi finner delen, Vi finner prosenten og Hoderegning med prosent.* I tillegg til disse omhandler det første delkapittelet innenfor promille hvordan man kan omgjøre mellom prosent og promille. I analysedelen på mikronivå har jeg valgt å ikke inkludere dette fordi det i hovedsak fokuserer på promille, og ikke på de numeriske relasjoner som inngår innenfor prosent.

Alle delkapitlene som omhandler prosent er bygd opp på en relativt lik måte. De starter med en presentasjon av det matematiske fagstoffet, deretter viser de et eksempel som omhandler det presenterte fagstoffet, og deretter kommer det oppgaver som bygger på det fagstoffet som er blitt presentert i det foregående.

Læreverkets presentasjon av fagstoff og bruk av representasjoner

Gjennom de 5 delkapitlene finner vi til sammen 5 presentasjoner av fagstoffet. Alle disse presentasjonene inneholder 2 eller flere representasjoner. Det som i hovedsak går igjen i alle delkapitlene er at representasjonen inneholder både en billedlig framstilling og et numerisk uttrykk, og i tillegg er de fleste av representasjonen også forklart gjennom tekst. Ser man helhetlig på de presentasjonene som blir gitt, og de representasjoner som er inkludert i presentasjonene, sitter man igjen med et bilde av at læreverket er opptatt av å trekke sammenhenger opp mot andre matematiske tema, og da spesielt opp mot brøk. Dette ser vi allerede i det første delkapittelet der det i stor grad fokuseres på sammenhengen mellom brøk og prosent. Dette kan sees som en naturlig overgang ettersom det foregående kapittelet som elevene arbeidet med omhandlet temaet brøk, og dermed får elevene en innføring i kapittelet som bygger på det elevene allerede har kjennskap til. Modellen som blir benyttet her møter vi både i dette delkapittelet, og i det neste der elevene skal lære om omgjøring mellom prosent, brøk og desimaltall. Representasjonen er billedlig ved at den viser en figur som er delt inn i 100 like store deler. Dette er for å presisere at når vi snakker om prosent snakker vi om hundredeler. Videre trekkes det sammenheng til brøk: 1 rute er 1/100 = 1%. Dette gir et bilde mellom antall ruter, og hva 1 % av det hele er. Representasjonen gir derfor ikke bare en billedlig representasjon, men den viser også hvordan den billedlige representasjonen kan kobles til numeriske uttrykk.


Prosent er, på samme måte som brøk og desimaltall, en måte å dele opp noe på.

Prosent kommer fra det latinske «pro cento», som betyr hundredel.
Prosent har tegnet %.

Prosent betyr hundredel. 1 % = $\frac{1}{100}$

Det hele er 100 %

Denne figuren har 100 ruter.

Det betyr at 1 rute er: $\frac{1}{100}$ = 1 %

Alle rutene er da: $\frac{100}{100}$ = 100 %

Det hele er alltid 100 %.

– 30 %

I butikken møter vi ofte tilbuds- og salgsplakater der prisen på en vare er satt ned med et prosent-tall.

Finner du en genser på salg som er satt ned 30 %, betyr det at du får 30 % avslag i prisen, og at du skal betale 70 % av det genseren kostet før salget.

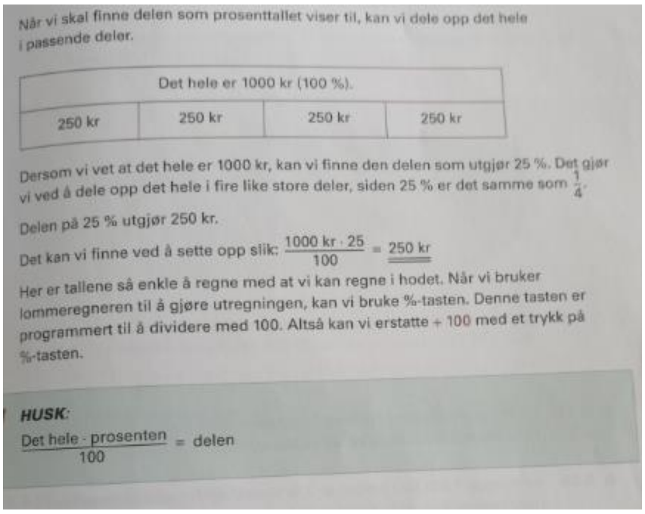
Pris før salget 100 %	
Avslag 30 %	Pris under salget 70 %

Figur 18: Grunntall 8 s.88. Presentasjon av prosent

I og med at de billedlige representasjonene er utformet forskjellig har de en litt ulik rolle i forhold til elevenes læring og forståelse. Den første representasjonen som ble trukket fram fra det første kapittelet kan sies å i første omgang være med på å gi en sammenheng til brøk, i tillegg til at den skal gi en forståelse for selve prosentbegrepet. Dette fungerer fordi representasjonen er komplett, med både en billedlig, en numerisk og et verbalt uttrykk. Når denne representasjonen tas videre til det neste delkapittelet endrer den rolle.

Det presiseres i dette delkapittelet at både prosent, brøk og desimaltall er tre måter å utrykke *en del av det hele på.* Delkapittelet trekker videre den billedlige representasjonen fra det første delkapittelet (se figur 18). I denne omgang skal ikke representasjonen kun vise sammenhengen mellom brøk og prosent, men også sammenhengen til desimaltall. Det representasjonen ikke viser er hva sammenhengen egentlig er. Det kan dermed tolkes at det forventes at elevene for eksempel kjenner til at når det trekkes fram at 20/100 = 0,2 betyr dette 0,2 hvis det hele får verdien 1.

Et element som kan sees som typisk for Grunntall 8 er nettopp det at de samme representasjonene ofte går igjen gjennom flere delkapitler. En annen representasjon som vi ser går igjen gjennom fire av fem delkapitler er en modell som kan sammenliknes med en bar (som i bar-modellen). Modellen er delt opp i to rader. Den øvre raden i modellen er benyttet til å representere *det hele*, mens den andre raden i modellen skal representere deler av *det hele* når det er delt opp i mindre deler som representerer ulike prosenter. Det varierer i hvor stor grad denne modellen kan tolkes som en kobling opp mot det matematiske temaet brøk eller ikke. I delkapittelet *vi finner delen (*se figur 19) kan den trekkes direkte opp til temaet ved at modellen tydelig er delt inn i 4 like store deler, der hver av delene representerer ¼ av det totale innholdet. I dette tilfellet trekkes det fram skriftlig både at de fire like store delene hver utgjør 25%, og at dette tilsvarer ¼. Dette kommer også veldig tydelig fram i delkapittelet som omhandler *Hoderegning med prosent.* Ser man både på utformingen av modellen, og på deler av den skriftlige presentasjonen kan dette tolkes opp mot en *bygge opp strategi,* og da å benytte seg av *en kjent brøk.* I eksemplet vises det at det er mulig å dele den nedre raden inn i fire like store deler. Hvis for eksempel en elev skulle funnet ut hvor mye 75% av det hele utgjorde ville en mulighet vært å gå inn i modellen å legge sammen tre deler. En slik presentasjon kan derfor være med på å gi et innblikk og forståelse for de relasjoner mellom brøk og prosent som inngår i prosentregning.



Når vi skal finne delen som prosenttallet viser til, kan vi dele opp det hele i passende deler.

Det hele er 1000 kr (100 %).			
250 kr	250 kr	250 kr	250 kr

Dersom vi vet at det hele er 1000 kr, kan vi finne den delen som utgjør 25 %. Det gjør vi ved å dele opp det hele i fire like store deler, siden 25 % er det samme som $\frac{1}{4}$.

Delen på 25 % utgjør 250 kr.

Det kan vi finne ved å sette opp slik: $\frac{1000 \text{ kr} \cdot 25}{100} = \underline{\underline{250 \text{ kr}}}$

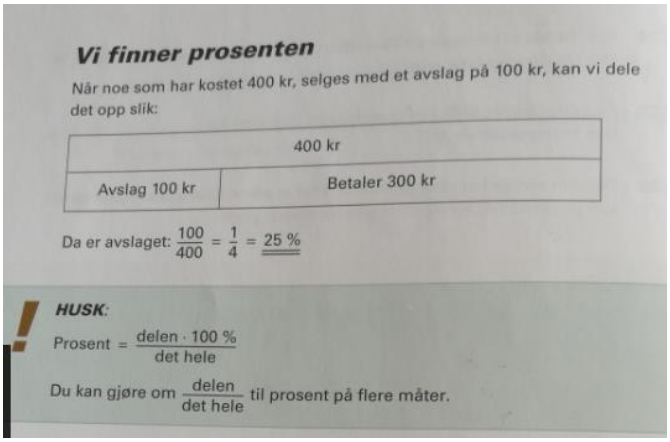
Her er tallene så enkle å regne med at vi kan regne i hodet. Når vi bruker lommeregneren til å gjøre utregningen, kan vi bruke %-tasten. Denne tasten er programmert til å dividere med 100. Altså kan vi erstatte ÷ 100 med et trykk på %-tasten.

HUSK:

$\frac{\text{Det hele} \cdot \text{prosenten}}{100} = \text{delen}$

Figur 19: Grunntall s 91, presentasjon av ¨vi finner delen

I de andre delkapitlene er det vanskeligere å se sammenhengen til brøk. Ser vi for eksempel på bruken av representasjonen i delkapittelet *Vi finner prosenten* er baren i større grad anvendt som en visualisering. Betrakter vi figur 20 ser vi at i dette tilfellet ikke er blitt delt inn i 4 like store deler kan det for mange elever være vanskelig å se at området som er markert med 100 kr også representerer ¼ og 25 % av modellen.



Figur 20: Grunntall 8, s. 94. Presentasjon av vi finner prosenten

Eksemplets art og utforming kan også sees på som veldig likt med det foregående eksemplet presentert i figur 19. Den eneste endringen er at *det hele* har endret seg fra 1000kr til 400 kr. Eksemplet kan derfor sies å kunne være med på å vekke de samme tankestrategier som det foregående, men dette eksemplet vil kreve mer fra elevene for å oppdage og reflektere over de relasjoner og sammenhenger som kan sees mellom prosent og brøk.

Representasjonens rolle kan sies å variere. Grunntall 8 har på en god måte latt de ulike representasjonen gå igjen gjennom flere delkapitler, men det varierer hvor godt egnet de ulike representasjonene er i de ulike delkapitlene. Der den barlignende modellen er delt opp i 4 like store deler, og vi i tillegg får et verbalt, og et numerisk uttrykk kan modellen være med på å bygge en mer relasjonell forståelse blant elevene. Dette er fordi de gjennom å studere modellen både kan se relasjonen mellom det hele, 25 % og ¼. Modellen i seg selv kan dermed være med på å trigge tankestrategier i forhold til prosentregning, som for eksempel å *benytte seg av en kjent prosent,* og dermed gi en bedre forståelse for det matematiske temaet. Der modellen derimot kun er representert med det billedlige uttrykket kombinert med et numerisk uttrykk kan representasjonen oppleves som mer ufullstendig. Dette handler om hvordan presentasjonen er utformet. Hvis vi ser på figur 20 ser vi for eksempel at den nedre delen av figuren er delt opp i to deler, der den ene delen representerer 100 kroner, som tilsvarer ¼ og 25 %, mens den andre delen representerer 300 kr, som tilsvarer 75% og ¾. På grunn av inndelingen kan det være vanskelig å se sammenhengen mellom den presenterte modellen, og den utregningen vi får presentert under. Derfor vil en slik modell kreve at elevene har innsikt i sammenhengen mellom brøk og prosent for at modellen skal fungere.

Bruken av eksempler

Gjennom den delen av kapittelet som omhandler prosent trekkes det fram til sammen 8 eksempler. Av disse eksemplene er det 2 som er for å vise framgangsmåter i arbeid med digitale regneark, de resterende 6 er eksempler som viser regning innenfor de ulike delkapitlene. I analysen er kun eksemplene som ikke var ment for digitale regneark analysert.

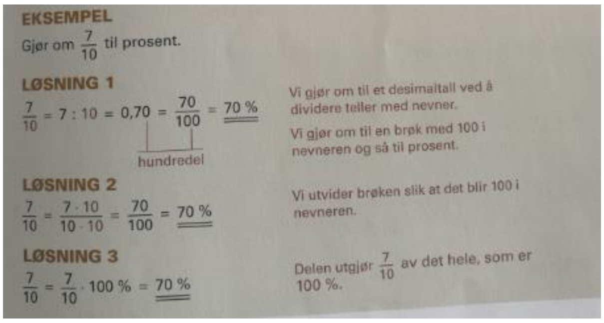
Eksemplene er som regel plassert direkte etter presentasjonen i hvert delkapittel. Av de seks eksemplene er det ingen som inneholder noen form for billedlige representasjoner, men hvorvidt det benyttes kontekster i forbindelse med eksemplene, eller om eksemplene er rene numeriske regneeksempler varierer. I tillegg til å bli kodet etter om eksemplene var kontekstbaserte eller ikke, ble det sett på eksemplenes kompleksitet og der eksemplene presenterer strategier for å regne med prosent er dette også tatt i betraktning.

Hvor komplekse de ulike eksemplene kan ansees å variere. Et komplekst eksempel handler om hvor detaljert eksempelet er. Dette baserer seg på hvor mange ledd de viser i utregningen, og om det blir gitt forklaringer til de numeriske relasjonene som inngår i eksemplet. Et komplekst eksempel vil være et eksempel som både viser alle ledd i utregningen, og i tillegg har forklaringer i form av tekst til de ulike overgangene, mens et ikke-komplekst eksempel vil være et eksempel der det kun er satt opp et numerisk uttrykk og et svar, uten noen videre utgreing om hva som er gjort mellom. I tillegg til disse motsetningene kan et eksempel vise seg som halv-komplekse. Halv-komplekse eksempler er eksempler hvor vi for eksempel får noen ledd i utregningen, eller hvor vi får en fullstendig utregning, men ikke noen form for forklaring til hva som skjer i de ulike leddene og numeriske relasjonene som inngår i utregningen.

Tabell 3: Oversikt presenterte eksempler i Grunntall 8

Eksemplenes kompleksitet	Antall eksempler
Komplekse	1
Halv-komplekse	2
Ikke-komplekse	3
Kontekstbasert	3
Ikke-kontekstbasert	3

I hvor stor grad de eksemplene som var numeriske, og dermed rene regneeksempler var komplekse eller ikke hadde stor grad av variasjon. Et eksempel som kan trekkes fram som et komplekst eksempel er eksemplet vi får presentert i det andre delkapittelet, *omgjøring mellom prosent, brøk og desimaltall* (se figur 21). Dette eksemplet er et ikke kontekstbasert eksempel i den forstand at det ikke inneholder noen form for kontekst, men går direkte på det numeriske, å gjøre om en brøk til den tilsvarende prosenten. I eksemplet får vi først presentert selve oppgaven, hva det er som skal gjøres, og deretter blir det presentert tre ulike løsninger. Eksemplet er komplekst i den forstand at det viser flere ledd i utregningen, i tillegg til flere ulike løsningsforslag. Dette gir elvene mulighet til å reflektere over flere ulike løsninger og tankestrategier. Det beskrives også hva det er som skjer i de ulike regneoperasjonene/leddene. Tar vi en nærmere titt på løsning 3 i eksemplet i figur 21 ser vi at eksemplet gir en beskrivelse av hvorfor vi i utregningen har 7/10 og 100% som multiplikator og multiplikand. Det som kunne forsterket eksemplet ytterligere er hvis vi i tillegg til dette også hadde fått en billedlig representasjon, som i dette tilfellet for eksempel kunne vist en mer direkte sammenheng mellom den involverte brøken, desimaltallet og prosenten.


EKSEMPEL

Gjør om $\frac{7}{10}$ til prosent.

LØSNING 1

$\frac{7}{10} = 7 : 10 = 0,70 = \frac{70}{100} = \underline{\underline{70\ \%}}$

hundredel

Vi gjør om til et desimaltall ved å dividere teller med nevner.

Vi gjør om til en brøk med 100 i nevneren og så til prosent.

LØSNING 2

$\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{70}{100} = \underline{\underline{70\ \%}}$

Vi utvider brøken slik at det blir 100 i nevneren.

LØSNING 3

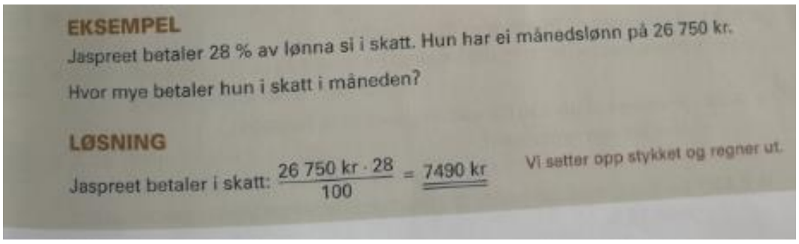
$\frac{7}{10} = \frac{7}{10} \cdot 100\ \% = \underline{\underline{70\ \%}}$

Delen utgjør $\frac{7}{10}$ av det hele, som er 100 %.

Figur 21: Grunntall s. 89. eksempel på omgjøring mellom brøk, prosent og desimaltall

På grunn av eksemplets oppbygning kan det sees som å ha som formål å gi elevene et bedre innblikk i de matematiske relasjonene som inngår i prosentregning. Gjennom å gi en skriftlig beskrivelse får man et innblikk i hvorfor selve regneoperasjonen er gjennomført akkurat slik den er gjort, og dette kan være med på å styrke forståelsen for de numeriske relasjonene mellom prosent, brøk og desimaltall.

Ikke alle eksempler var like komplekse som eksemplet det ble referert til over, og det var kun i dette eksempelet læreboka presenterte flere ulike løsninger. Det kan trekkes fram som et pluss at alle bortsett fra ett av eksemplene som blir presentert inneholder både et numerisk uttrykk så vel som et skriftlig/verbalt uttrykk, men ikke alle eksemplene er ute etter å gi elevene en økt matematisk forståelse for det matematiske konseptet. Ser vi på eksemplet som er presentert i delkapittelet *Vi finner delen* har dette eksemplet en veldig ulik rolle i forhold til det eksemplet som ble presentert i det foregående (se figur 22). Eksemplet er kontekstbasert, men det kan ikke sees som et komplekst eksempel i og med at det ikke gir noen forklaring på de numeriske relasjonene i utregningen, og heller ikke viser flere ledd i utregningen. I


EKSEMPEL
Jaspreet betaler 28 % av lønna si i skatt. Hun har ei månedslønn på 26 750 kr.
Hvor mye betaler hun i skatt i måneden?
LØSNING
Jaspreet betaler i skatt: $\frac{26\,750 \text{ kr} \cdot 28}{100} = \underline{\underline{7490 \text{ kr}}}$ Vi setter opp stykket og regner ut.

Figur 22: Grunntall 8 s.91, eksempel på hvordan finne delen

eksemplet får vi oppgitt en prosentandel, en prosent og en total, i form av månedslønn. Oppgaven er å ut fra disse opplysningene svare på hvor stor andel som skal betales i skatt. Det må trekkes fram at formelen er forklart i den foregående presentasjonen av fagstoff, men at det ikke der heller gis noen form for utdypning av hvordan eller hvorfor formelen fungerer slik den gjør. Dermed viser eksemplet egentlig bare hvordan man bruker den gitte formelen når man opererer med en tekstoppgave. Gjennom eksemplet gis det ikke noen forklaring for hvorfor vi dividerer med 100, og heller ikke hvorfor vi multipliserer 26750 med 28. På grunn av oppsettet til formelen er det vanskelig å få grep på hvilke relasjoner innenfor prosentregning som inngår, og dermed har ikke eksemplet noen annen rolle enn å vise hvordan man bruker den gitte formelen, og hvilke av de oppgitte tallene som skal plasseres hvor.

Oppgaver og oppgavetypen

I alle de ulike delkapitlene blir det presentert oppgaver som hører til det presenterte temaet. Innenfor hvert delkapittel presenteres en rekke oppgaver som befinner seg på det blå nivået. Dette er oppgaver som er ment å gi en innøvning av de grunnleggende ferdighetene. Oppgavene ble i analysen analysert inn i kodene: oppgaver som øver en bestemt regneferdighet, oppgaver som tar sikte på å gi forståelse for de numeriske relasjoner som inngår i prosentregning, og problemløsningsoppgaver. I tillegg til dette ble det satt opp en kategori hvor andre typer oppgaver kunne plasseres. Dette kunne for eksempel være digitale oppgaver, eller oppgaver der elevene skulle lage egne oppgaver.

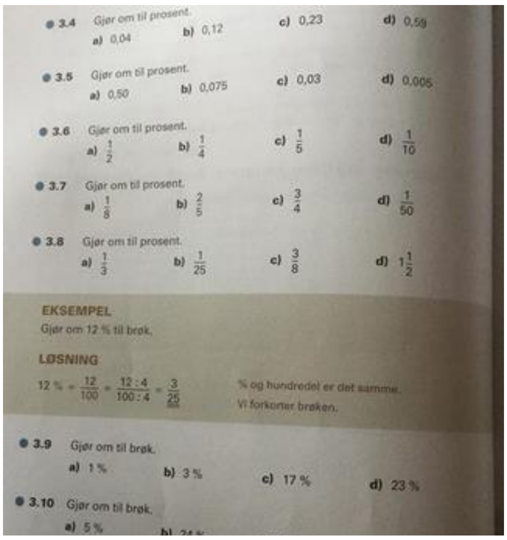
Til sammen inneholder delkapitlene som omhandler prosent, og vi øver mer oppgavene i slutten av kapittelet i alt 59 oppgaver. Da er ikke oppgavene som inneholder promille tatt med i betraktningen. Av disse er det 9 oppgaver som er markert med bilde av en PC, noe som indikerer at de skal løses ved hjelp av digitale regneark eller annen digital programvare. De fleste av oppgavene befinner seg på det blå nivået, totalt 41 av de 59 oppgavene. Dette indikerer at det er stort fokus på de grunnleggende ferdighetene. På det oransje nivået er det plassert 13 oppgaver, mens på det grønne nivået er det i alt 3 oppgaver. I tillegg til dette er det 2 oppgaver som ikke er plassert innenfor noen av nivåene.

Gjennom oppgavene i boka skal elevene få god trening i å regne. De fleste oppgaver kan vi se som en videreføring av det fagstoffet som er blitt gjennomgått i det forestående. Oppgavetypen varierer mellom å være tekstoppgaver, og å være rene numeriske oppgaver. Dette varierer mye ved hvilket delkapittel oppgavene tilhører, og hvilket tema innenfor prosent som er presentert i delkapittelet. Oppgavene kan kategoriseres på denne måten:

Tabell 4: Oversikt over oppgavetypen i Grunntall 8

Oppgavetype	Antall
Regneferdighet	47
Numeriske relasjoner	1
Problemløsning	0
Andre	11
Tekstoppgaver	31
Ikke tekstoppgaver	28

I delkapittelet om *omgjøring mellom prosent, brøk og desimaltall* kan oppgavene trekkes fram som noe ensformig. Etter presentasjonen av fagstoffet presenteres 11 oppgaver som alle befinner seg på blått nivå. Av disse er alle oppgavene numeriske oppgaver som er ment for å gi elevene øving i beregning. Målet med oppgavene kan dermed sies å være at elevene skal bli *bedre i regneferdighet*. Oppgavene veksler mellom å skulle gjøre ulike brøker om til prosent, og å gjøre desimaltall om til prosent. Blant oppgavene er det også oppgaver der elvene skal gjøre gitte prosenter om til desimaltall, og gitte prosenter om til brøk (se figur 23).


3.4 Gjør om til prosent.
a) 0,04 b) 0,12 c) 0,23 d) 0,59

3.5 Gjør om til prosent.
a) 0,50 b) 0,075 c) 0,03 d) 0,005

3.6 Gjør om til prosent.
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{10}$

3.7 Gjør om til prosent.
a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{50}$

3.8 Gjør om til prosent.
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $1\frac{1}{2}$

EKSEMPEL
Gjør om 12 % til brøk.

LØSNING
$12\,\% = \frac{12}{100} = \frac{12:4}{100:4} = \frac{3}{25}$ % og hundredel er det samme. Vi forkorter brøken.

3.9 Gjør om til brøk.
a) 1 % b) 3 % c) 17 % d) 23 %

3.10 Gjør om til brøk.
a) 5 %

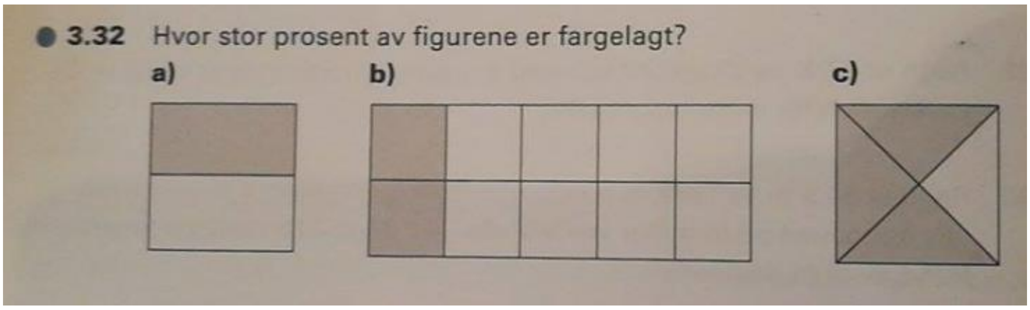
Figur 23: Grunntall s.90. Oppgavetyper

Gjennom arbeid med oppgavene kan det derfor også tenkes at elevene får en bedre kjennskap til de numeriske relasjonene i prosentregning. Til tross for dette presenterer læreboka underveis framgangsmåter som gjør det mulig for elevene å ikke reflektere over relasjonene til de nummer som inngår i deres regneoperasjoner, men heller å ha fokus på selve operasjonen og hvert ledd i utregningen. Slike typer oppgaver går igjen gjennom hele kapittelet om prosent. I de aller fleste tilfeller har elevene fått presentert en formel eller en framgangsmåte for hvordan de skal løse oppgavene, dermed blir det som kreves av elevene for å få til denne typen oppgaver kun å vise at de kan følge en oppskrift slik at de kommer fram til det rette svaret, og boka kan dermed gjennom disse oppgavene sees som litt resultatorientert og som stiller lave kognitive krav til elevene, heller enn at fokuset er på hva elevene skal inneha av matematisk forståelse for temaet.

I tillegg til rent numeriske oppgaver blir det og også presentert mange tekstoppgaver i dette kapittelet. Tekstoppgavene er bygget opp med en innledende informasjonstekst i starten der det er oppgitt ulike tall og nummer, og dette blir fulgt opp med et spørsmål. Elevene må ut fra den gitte teksten trekke ut den informasjonen som er relevant for å svare på det spørsmålet som oppgaveteksten oppgir. Mange av oppgavene ville fungert fint som problemløsningsoppgaver, men på grunn av at elevene allerede kjenner til en framgangsmåte vil selve konteksten være irrelevant, og fokuset vil gå over til å trekke ut de opplysninger som de behøver for å svare på det gitte problemet. Dermed plasseres også tekstoppgavene i kapittelet i kategorien *øvingsoppgaver som gir elevene trening i en bestemt regneferdighet.*

Gjennom arbeid med oppgavene er det ikke nødvendig for elevene å tenke gjennom de numeriske relasjonene som er involvert, men det er nok for elevene å plassere de korrekte tallene på de korrekte plassene i formelen, dermed kan man også si at den ferdigheten det fokuseres på at elevene skal sitte igjen med i større grad er regneferdighet, enn relasjoner som inngår i det aktuelle temaet.

I kapittelet er det en oppgave som skiller seg ut. Denne oppgaven finner vi under delkapittelet *Vi finner prosenten.* Denne oppgaven bygger på at elevene skal tilegne seg kunnskap om de numeriske relasjoner innenfor prosentregning. I denne oppgaven får elevene oppgitt ulike firkantede figurer, med ulike antall inndelinger og skraverte områder. Oppgaven er å svare på hvor stor prosentandel av figuren som er fargelagt.



Figur 24: Grunntall 8 s 94. Oppgave som gir innblikk i numeriske relasjoner

Gjennom en slik type oppgave vil elevene sannsynligvis være innom både brøk og desimaltall i arbeidet med å finne prosenten. Dette kan føre til at elevene opplever en større relasjonell forståelse mellom en bestemt brøk, prosent og desimaltall. Oppgaven vil også gi elevene mulighet til å se sammenhenger mellom ulike inndelinger, og en prosent. For eksempel at når vi har ¼ av en figur, eller av det hele, vil dette tilsvare 25 %.

5.1.2. Sirkel 8

Sirkel 8 er en del av læreverket Sirkel 8-10. Læreverket er delt opp i 6 bøker, to for hvert årstrinn. Læreverket presenterer seg selv som et læreverk med fokus på *å utfordre elevene på hvordan de tenker*. Gjennom boka er kreative opplegg og grunnleggende ferdigheter knyttet sammen, og på denne måten skal elevene oppleve sammenhenger som øker deres matematiske forståelse og matematiske kompetanse (Lokus, u.d.).

Alle kapitlene presenterer i starten de læringsmålene som er ment man skal oppnå gjennom arbeidet med kapittelet. Også Sirkel er et læreverk som er nivådelt. Nivådelingen i dette læreverket skjer i form av at elevene skal arbeide med ulike startpunkt ettersom hvilket nivå de ligger på. De ulike startpunktene har ulike mål. Startpunkt 1 (rød) er ment for å bygge opp de grunnleggende kunnskapene. *Startpunkt 2* er en videreføring av stoffet, og *Startpunkt 3* er ment for å gi en mer fordypning og for å gi utfordringer. Elevene velger startpunkt etter hvert som alle har arbeidet seg gjennom grunnsidene som er presentert i den første delen av hvert kapittel. I tillegg til oppgavene i grunnboka har Sirkel oppgavebøker som hører til hver av bøkene.

Overblikk over læreboka

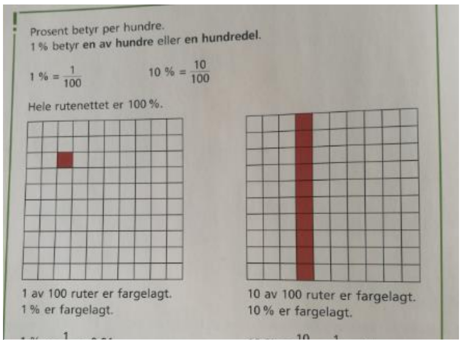
Kapittelet som omhandler prosent finner vi i boka Sirkel 8b. Dette læreverket har altså også valgt å presentere temaet på 8.trinn. Temaet er presentert som et eget kapittel der målene for arbeidet med kapittelet er at elevene skal: lære hva prosent betyr, lære sammenhengen mellom prosent, desimaltall og brøk, lære å regne ut en gitt prosent av en størrelse, finne prosenttallet og lære å regne med prosent i praktiske situasjoner. I grunnboka er det satt av 54 sider til kapittelet som omhandler prosent. I tillegg til dette inneholder oppgaveboka 28 sider med oppgaver som omhandler temaet. Med dette har både elever og lærere mange oppgaver å ta utgangspunkt i når elevene skal arbeide med temaet, men det er viktig å trekke fram at gjennom måten læreverket er lagt opp, er det ikke meningen at alle elever skal arbeide med alle oppgaver, men at man velger ut fra vanskelighetsgrad, og egne mål.

Innad i kapittelet finner vi i alt 31 ulike overskrifter som deler inn kapittelet. Av disse overskriftene kan det sies at det er flere temaer som går igjen. Den første delen av kapittelet er den delen som alle elevene skal gjennom, og som jeg har valgt å kalle for *grunnsidene.* Denne delen strekker seg over 8 sider. På disse sidene finner vi 6 ulike underoverskrifter. Disse delkapitlene er inndelt i; *Varer på tilbud, Rabatt, Hva betyr prosent, Prosent i hverdagen, Prosent, brøk og desimaltall* og *Hvordan kan vi regne ut prosenten av et tall.* Etter disse sidene følger oppgavesidene *Litt av hvert*, som er ekstraoppgaver som bygger på de foregående sidene, og dernest kommer oppgavesidene ¨*Hvor går du nå?*¨. Tanken bak disse sidene er å avgjøre hvilket av de tre startpunktene elevene nå skal arbeide med. *Startpunkt 1* består av 10 sider som bygger videre på de grunnleggende ferdighetene som elevene skal mestre gjennom arbeidet med kapittelet, *Startpunkt 2* består av 16 sider der hovedmålet er at elevene skal få en videreføring av de grunnleggende ferdighetene og fagstoffet, og tilslutt kommer *Startpunkt 3* som går over 12 sider og er ment å gi videre fordypning og utfordring til elevene. Helt til sist i kapittelet er det satt av to sider til ekstraoppgaver.

Læreverkets presentasjon av fagstoff og bruk av representasjoner

Under de fleste delkapitlene kommer det en form for presentasjon av det fagstoffet som delkapittelet omhandler. I tillegg til disse er det også ofte gitt litt informasjon om innholdet i hvert delkapittel under hver overskrift. Denne informasjonen kommer i form av tekst som sier noe om den overskriften som delkapittelet har. I rutene er det presentert mer konkret fagstoff. Ikke alle delkapitler har disse rutene. Av de 6 delkapitlene som er i grunnsidene, er det for eksempel bare 3 som inneholder en presentasjon av fagstoff. Det varierer hvordan presentasjonene av fagstoffet er gitt. I noen tilfeller presenteres fagstoffet gjennom representasjoner som både er billedlige, numeriske og skriftlige, mens i andre tilfeller er representasjonene kun verbale.

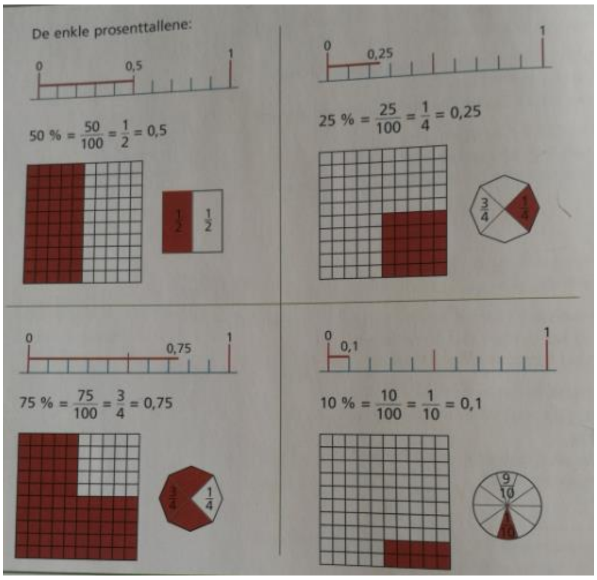
Der presentasjonen er ment for å gi innblikk i et matematisk konsept er presentasjonene gjennomførte, og godt beskrevne. Delkapittelet *Hva betyr prosent?* er et av delkapitlene som starter ved å gi en presentasjon av det aktuelle fagstoffet. Dette delkapittelet starter med å gi en representasjon av hva prosentbegrepet betyr. Representasjonen kan sees som både billedlig, verbal og numerisk. Det presenteres en kvadratisk figur som er delt inn i 100 like store ruter. Og det presiseres at prosent betyr per hundre, og at 1 % betyr en av hundre.



Figur 25: Sirkel 8 s.66, Presentasjon av temaet prosent.

Dette uttrykkes både billedlig, numerisk og verbalt. I representasjonen trekkes altså fram sammenhengen prosent har til brøk, og i tillegg til dette trekkes det fram at prosent i tillegg til å skrives som brøk, også kan skrives som et desimaltall. Dermed kobles representasjonen opp mot andre matematiske temaer som har relasjon til prosent.

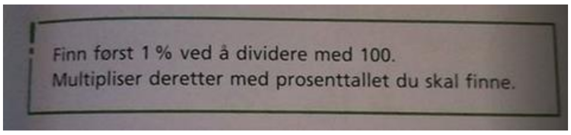
Også i det neste delkapittelet *prosent, brøk og desimaltall,* blir det i starten gitt en presentasjon av det aktuelle fagstoffet. Denne presentasjoen inneholder i mindre grad forklaringer i form av tekst enn det den foregående gjorde, men den inneholdre alikevell flere representasjoner. Denne presentasjonen skal vise sammenhengen mellom prosent, brøk og desimaltall. Presentasjonen viderefører rutenettet fra delkapittelet som omhandlet hva prosent betyr. Representasjonen vi får presentert er i hovedsak billedlig ved at de viser ulike modeller for ulike prosentverdier. I tillegg til dette er de også numeriske i at de viser den numeriske verdien til det avgrensa området i modellen, både som prosent, som brøk og som desimaltall. Presentasjonen legger opp til at elevene skal se sammenhenger mellom flere ulike representasjoner, og da trekke koblinger til ulike matematiske konsepter. I og med at hver av representasjonene kun viser enten desimaltall, brøk eller prosent må elevene selv koble hva som er den tilsvarende verdien innenfor de andre notasjonssystemene. I tillegg viser representasjonen hvordan elevene kan gjøre om mellom de ulike representasjonene hvis man gjør det rent matematisk.



Figur 26: Sirkel 8 s. 68. Sammenheng mellom brøk, prosent og desimaltall

De ulike presentasjonene ovenfor har ulik rolle i forhold til deres hensikt ovenfor elevene. De to første presentasjonene (se figur 25 og figur 26) har en relativt lik hensikt. Hensikten til representasjonene er både å gi elevene en forståelse for de matematiske relasjonene og sammenhenger som inngår når man skal gjøre om mellom posent, brøk og desimaltall. Ser vi representasjonen i figur 26, ser vi at presentasjonen av fagstoffet inneholder en numerisk representasjon som viser ledd for ledd i hvordan vi går fra prosent til brøk, og videre til desimaltall. Representasjonen gir ingen skriftlig forklaring. Den må dermed sees som at det er forventet at elevene skal ha forståelse for hva som skjer i hvert ledd, og for at de ulike notasjonen har en lik mengdeverdi.

Den siste presentasjonen har en litt annen rolle enn den de andre beskrevne presentasjonene har. I og med at presentasjonen kun inneholder tekst, kan vi ikke si at den sikter på å gi en spesiell form for forståelse annet enn å redegjøre, eller gi ekstra informasjon om det temaet som er presentert. Denne presentasjonen kan gjenkjennes i den tankestrategien som blir beskrevet som *veien om 1*. I tilfellet som ble trukket fram i figur 27 gir presentasjonen en form for framgangsmåte, eller oppskrift i det å finne en bestemt prosentverdi, men vi finner også tilfeller der presentasjonen kun er ment for å redegjøre for eksempel for ord som kan være ukjente for elevene.



Figur 27: Sirkel 8 s. 83, Huskeregel veien om 1

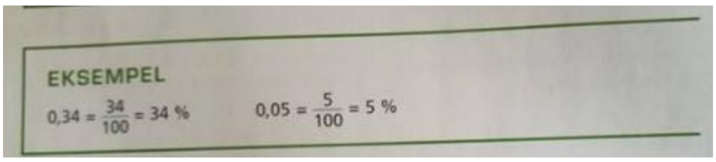
Bruken av eksempler

Sirkel 8b gir oss gjennom hele kapittelet om prosent mange ulike eksempler. Gjennom de 66 sidene som er disponert til kapittelet om prosent er det i alt gitt 29 ulike eksempler. Typen av eksempler, og deres stil varierer gjennom kapittelet, og vi finner alt fra ikke komplekse eksempler som kun viser en utregning, til mer komplekse og ferdigstilte eksempler som både inneholder en billedlig, en skriftlig og en numerisk representasjon.

Tabell 5: Oversikt over eksempler i Sirkel 8

	Antall eksempler
Komplekse	17
Halv-komplekse	7
Ikke-komplekse	5
Kontekstbasert	16
Ikke-kontekstbasert	14

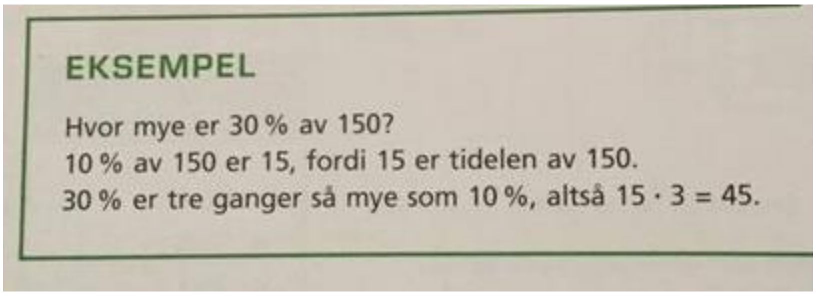
I kapittelet finner vi 3 eksempler som kun inneholder en numerisk framstilling. Dette er eksempler som inneholder numeriske uttrykk, men



Figur 28: Sirkel 8 s. 68., Rent numerisk eksempel.

ikke gir noen andre former for forklaringer til det som gjøres. Disse eksemplene er i mer eller mindre grad ikke-komplekse. Denne typen eksempler kan ikke sies å være komplekst i og med at de ikke gir en fullstendig forklaring av hva som skjer i de ulike leddene. Dette er til tross for at de i enkelte tilfeller viser flere ledd i utregningen, men det kommer ikke fram hva som er sammenhengen mellom tallene, for eksempel hvorfor 0,375 også kan skrives som 37,5%. Dermed kan det sies at det er forventet at elevene skal vite sammenhengen.

Det må trekkes fram at av de 29 presenterte eksemplene er dette den typen eksempler vi ser minst av. Disse eksemplene står også ofte i sammenheng med en presentasjon av fagstoffet, dermed blir rollen til eksemplet en videreføring av dette.

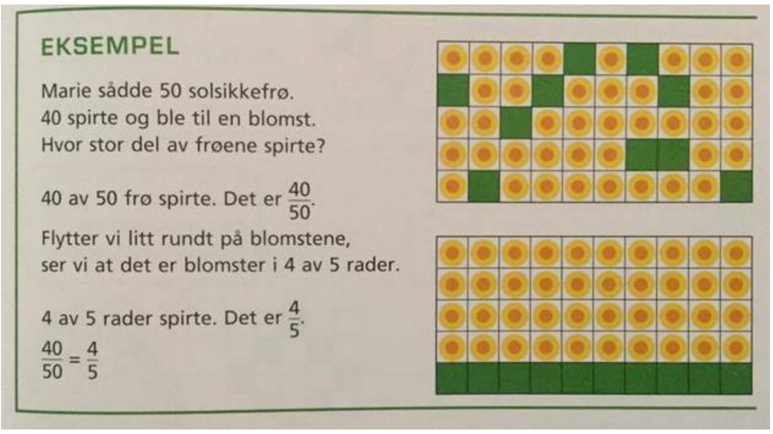

EKSEMPEL

Hvor mye er 30 % av 150?
10 % av 150 er 15, fordi 15 er tidelen av 150.
30 % er tre ganger så mye som 10 %, altså $15 \cdot 3 = 45$.

Figur 29: Sirkel 8 s79. Eksempel som viser bruken av en kjent brøk

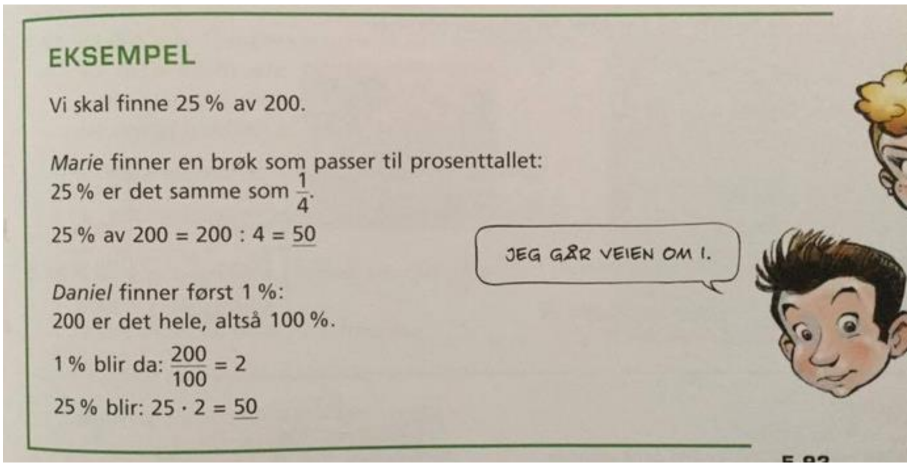
Det presenteres også eksempler som er mer komplekse enn det som ble beskrevet ovenfor. Også disse eksemplene er heller ikke kontekstbaserte. I alt er det 8 slike eksempler i kapittelet. Disse eksemplene inneholder en matematisk oppgave, og en løsning på denne. I tillegg inneholder alle eksemplene tekst som forklarer hvordan det er kommet fram til løsningen, dermed er eksemplene gjennomførte. Teksten som inngår i eksemplet går ofte ikke direkte på hvordan tallene er manipulert, men er heller en beskrivelse enn en forklaring av de numeriske relasjonene som inngår. For eksemplene i dette kapittelet, er det da spesielt å trekke sammenhengen mellom brøk, desimaltall og brøk. Framgangsmåten i eksemplet som er vist i figur 29 kan gjenkjennes i strategien *å benytte seg av en kjent brøk.* Her ser vi at det trekkes fram sammenhengen mellom 10 % og *det hele*. Det presiseres at 15 er en tidel av 150 som tilsvarer 10 %, og når man vet hvor mye ti prosent er kan man gjennom multiplikasjon finne ut hvor mye for eksempel 30 % er. Eksemplenes rolle blir ikke bare å gi en metode for løsning av et matematisk problem, men de tar også sikte på å gi et innblikk i de numeriske relasjonene som inngår. Eksemplene ønsker at elevene skal få et dypere innblikk i det matematiske temaet gjennom å studere dem, men ikke lære en løsningsstrategi. Eksemplene inneholder en setning som beskriver hvilke matematiske operasjoner som gjøres fra et ledd til det neste i løsningen, eller en forklaring som beskriver noen om de numeriske relasjonene i det presenterte eksemplet.

Sirkel 8 presenterer også 16 eksempler som er kontekstbaserte. Disse eksemplene tar for seg ulike temaer, og vi finner dem under ulike delkapitler. Det som kjennetegner denne typen eksempler er at de først presenterer et matematisk problem i form av tekst, og deretter presenterer en eller flere mulige løsningsstrategier på problemet. Av eksemplene er det 14 av eksemplene som inneholder en kontekst, og deretter presenterer en løsning på problemet. I disse tilfellene er rollen til eksemplet å gi et eksempel på hvordan en tekstuell oppgave som omhandler dette delkapittelet kan løses (se figur 30). 2 av de kontekstuelle eksemplene trekker også fram representasjoner i form av bilder og modeller for problemet. På denne måten er problemet godt visualisert for elevene, og gir dermed en mulighet til å se sammenhenger mellom det numeriske og den presenterte modellen. Dette kan gi et bedre innblikk i det matematiske konseptet, og dermed blir disse eksemplene gjennomførte fordi de inneholder en numerisk notasjon, en skriftlig forklaring i tillegg til en billedlig representasjon som er med på å visualisere. Eksemplet gir elevene en framgangsmåte for å løse problemet, men også mulighet til å se sammenhenger mellom de numeriske relasjonene som er presentert i problemet.



Figur 30: Sirkel 8 s. 81. Kontekstbasert eksempel

En del av eksemplene som presenteres kan også sies å forsøke å skape refleksjon blant elevene. 9 av eksemplene presenterer flere løsningsstrategier. Disse eksemplene varierer mellom å være kontekstbaserte eller ikke, men det som er likt er at alle viser til to eller flere elever som har løst oppgaven på ulike måter (se figur 31). Dette gjør at



Figur 31: Sirkel 8 s.83. Eksempel på bruk av enkel brøk og veien om 1

elevene gjennom å studere eksemplet vil kunne få innblikk i flere framgangsmåter, i tillegg til at de også får mulighet til å vurdere forskjellige framgangsmåter opp mot hverandre. Det gir også et bredere innblikk i ulike sammenhenger innenfor det matematiske temaet. Ser vi på eksemplet som er presentert her (figur 31) kan vi se at Maries metode trekker en klar sammenheng til brøk, og kan gjenkjennes i tankestrategien *bruk av enkel brøk*. Presentasjonen av hennes løsning kan sees på som delvis gjennomført og delvis kompleks. Det blir for eksempel ikke utdypet noe videre sammenhengen mellom brøken 1/4, og 25%. Det er dermed forventet at elevene skal ha en forståelse eller et innblikk i sammenhengen mellom brøker, og prosent. I dette tilfellet betyr det at elevene må kjenne til at ¼ tilsvarer 25/100, som altså er 25 %. Elevene må derfor kjenne til både likeverdige brøker, og til sammenhengen mellom brøk og prosent for å forstå Maries framgangsmåte. For å gi et bedre innblikk i flere framgangsmåter for å løse prosentproblemet, trekker eksemplet også fram Daniel, som først finner 1%. Denne strategien gjenkjennes i *veien om 1*. Presentasjonen av hans framgangsmåte kan tolkes til å være kompleks i og med at den viser alle leddene i utregningen, og i tillegg har en forklaring til hva som gjøres i hvert ledd. I dette tilfellet er det ikke fokus på relasjonene som inngår i framgangsmåten, men på hvordan man regner seg fram til løsningen.

Rollen til eksemplene er ulik i betydning av hvilke krav de setter til elevene, og til hva som forventes av elevene. Det kan også virke som at Sirkel 8 i flere tilfeller har valgt å heller presentere et eksempel under nye delkapittel til fordel for å ha en presentasjon av fagstoffet, på denne måten får eksemplene som benyttes også rollen å presentere fagstoff. Eksemplene som er benyttet er svært varierte både i utforming, og i innhold.

Oppgaver og oppgavetyper

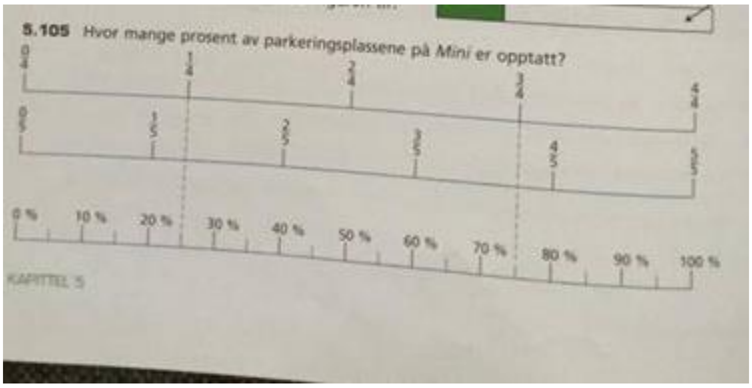
I alle de ulike delkapitlene blir det presentert flere oppgaver som omhandler den aktuelle delen av kapittelet. Et av kjennetegnene med oppgavene som blir presentert i Sirkel 8, er at de er mangfoldige og varierte i innhold. I alt presenterer kapittelet 203 ulike oppgaver som omhandler prosent eller prosentbegrepet. Oppgavetypen varierer mellom oppgaver som trener regneferdighet, oppgaver som tar sikte på å skape forståelse for numeriske relasjoner innenfor prosentregning, og problemløsningsoppgaver. Det er ikke meningen at alle elever skal løse alle oppgaver, men at man starter å arbeide ut fra det startpunktet som passer til sitt nivå, og ut fra dette arbeider seg lengere og dypere ut i det matematiske temaet.

Gjennom oppgavene i boka skal elevene få god trening i å regne. De fleste oppgaver kan vi se som en videreføring av det fagstoffet som er blitt gjennomgått i det forestående. Oppgavetypen varierer mellom å være tekstoppgaver, og å være rene numeriske oppgaver.

Dette varierer mye ved hvilket delkapittel oppgavene tilhører, og hvilket tema innenfor prosent som er presentert i delkapittelet. Oppgavene kan kategoriseres på denne måten:

34 av de 203 oppgavene er rent numeriske oppgaver. Disse oppgavene er oppgaver som kun øver elevene i regneferdigheter. Oppgavene tar ikke sikte på å gi elevene en dypere eller mer relasjonell forståelse for det matematiske innholdet, men å la elevene øve på de metodene som de benytter til å løse oppgaver som omhandler det aktuelle temaet.

Innenfor hvert delkapittel finner vi oppgaver som er ment å gi elevene en bedre innsikt i de numeriske relasjonene i prosentregning. Dette kan for eksempel være oppgaver der elevene får oppgitt en figur, og blir bedt om å fargelegge en viss prosentandel av figuren. Denne typen oppgaver trekker klare linjer mellom prosent, og det matematiske konseptet brøk. Under startpunkt 1 starter denne typen oppgaver med at elevene skal fargelegge 20 % av figurer som inneholder en total på 100 ruter. Når dette er gjort skal de også skrive ned den fargelagte brøkdelen. Videre i startpunkt 1 går oppgavene over til at figurene inneholder mindre antall ruter, altså er det forventet at elevene skal ha forståelse for at hver av rutene ikke inneholder 1%, men at hver rute presenterer en større prosentverdi. Dette kan gjenkjennes i tankestrategien *bygge opp.*



Figur 32: Sirkel 8 s86. Oppgave ulike tallinjer

Kapittelet presenterer også oppgaver der elevene må vurdere to ulike brøkstørrelser opp mot hverandre der det hele er ulikt, og dermed har prosentverdiene ulike betydninger (se figur 32). Denne type oppgaver kan også sees på som oppgaver som vil gi elevene innblikk i numeriske relasjoner. Oppgaven som presenteres her kan gjenkjennes direkte i kontekstoppgaven som elevene i datainnsamlingen har arbeidet med. Gjennom oppgaven blir elevene introdusert for ulike tallinjer som presenterer brøker og prosenter. Dermed gir ikke oppgavene kun innblikk i sammenhengen mellom en brøk og dens tilsvarende prosenter, men også i at like brøker kan ha ulik betydning, og i at like prosenter kan ha ulik betydning.

Hovedvekten av oppgavene som presenteres er oppgaver som er tekstbaserte. Rollen til disse oppgavene varierer noe. I starten av kapitelet skal elevene vurdere ulike salgsplakater, og vurdere ulike prosenter ut fra deres forkunnskaper om prosent. I tillegg til oppgaver der elevene må reflektere over ulike begreper innenfor prosent. Denne typen oppgaver finner vi igjen flere plasser gjennom kapittelet. I tillegg til denne typen tekstoppgaver finner vi en rekke oppgaver som gir elevene mer trening i regning innenfor det aktuelle temaet.

Oppgaven som blir presentert i Sirkel 8 er varierte og mangfoldige. Det veksles i alle delkapitlene mellom å gi elevene oppgaver hvor de arbeider direkte med de numeriske relasjonene som inngår i konseptet, og oppgaver som støtter opp og gir elevene øving i gitte regneferdigheter.

6. Analyse og drøfting av elevers strategier og forståelse

I det følgende presenteres resultater av det analysearbeidet som foreligger etter analysen av elevenes arbeid med parkeringsplassproblemet dag 2, og etterarbeidsoppgaver.

Kapittelet er delt inn i to hoveddeler. Den første delen tar for seg analyse og drøfting av elevenes skriftlige arbeider. I denne delen er hovedfokuset på å de strategier som kan identifiseres, og på hvilken intuitiv kunnskap og forståelse elevene viser for det matematiske temaet gjennom sitt arbeid med kontekstoppgaven og bar-modellen. Jeg har her analysert alle de 16 skriftlige elevarbeidene fra skole 1, samt de to gruppearbeidene jeg samlet inn ved skole 2, og resultatene fra dette er drøftet opp mot teorien.

I den andre delen av denne analysen og drøftingen vil jeg gi et bilde på hvordan elevenes arbeid utviklet seg. Jeg har her benyttet meg av *aktivitetsnivåene* som er beskrevet i *Gravemeijer (1999)*. Disse nivåene beskrives innenfor RME som ulike nivåer elevene går gjennom i matematiseringsprosessen; fra å planlegge uformelle kontekstbaserte løsninger, til å skjematisere på et referensielt nivå, til å få innsikt i de generelle prinsippene bak et problem, og koble dette opp mot det matematiske temaet (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)I denne delen av analysen og drøftingen har jeg valgt å presentere utdrag av lydopptakene og det skriftlige arbeidet til to ulike grupper.

6.1. Analyse av elevenes arbeid: Ulike strategier og forståelse i regning med prosent:

Alle de skriftlige elevarbeidene som er beskrevet i det følgende er hentet fra etter at elevene hadde arbeidet med forarbeidsoppgaven, parkeringsplassproblemet dag 1. Dermed var elevene ved de beskrevne tidspunktene allerede godt inne i konteksten, og i den oppgaven som skulle løses. Presentasjonen er organisert etter hva elevene gjør i form av hvilke strategier som identifiseres, og hvilken forståelse elevene viser gjennom sine arbeider. I analysearbeidet ble alle de 18 skriftlige elevarbeidene analysert. I det følgende vil et utvalg av disse bli presentert. Disse blir presentert fortløpende som elev 1, elev 2 …, elev 6 osv.   Det legges også fram en del utdrag fra samtalene som foregikk mellom elevene. I disse utdragene er det i tillegg til å identifisere strategier også tatt sikte på å se om det er noen form for utvikling i elevenes arbeid. Med utvikling i denne sammenhengen menes hvorvidt elevenes arbeid er svært nærliggende konteksten, eller om arbeidet kan tolkes til noen form for å gjelde mer generelt for det matematiske konseptet *prosent.* I presentasjonen blir det presentert utdrag fra to grupper. Den ene gruppen besto av Jens og Ola fra skole 2, mens den andre gruppen besto av Elin, Maria og Kaja fra skole 1.

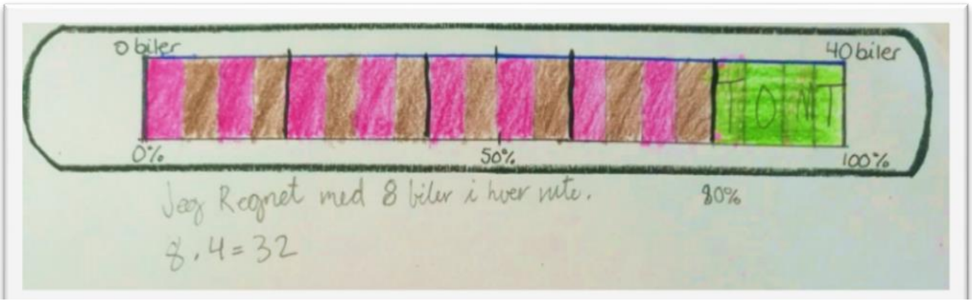
Tabell 6: Oversikt over total innsamlet datamateriale

	Antall skriftlige elevarbeider	Lydopptak fra antall grupper
Skole 1	16	2
Skole 2	2 (i fra hver gruppe)	2

6.1.1. Å finne svaret ved å bygge opp ved hjelp av måleren (bar-modellen).

Flere av elevene valgte å benytte seg aktivt av måleren i deres arbeid med å drøfte hvilken av parkeringsplassene som var fulest, og som Surreby dermed burde beholde.

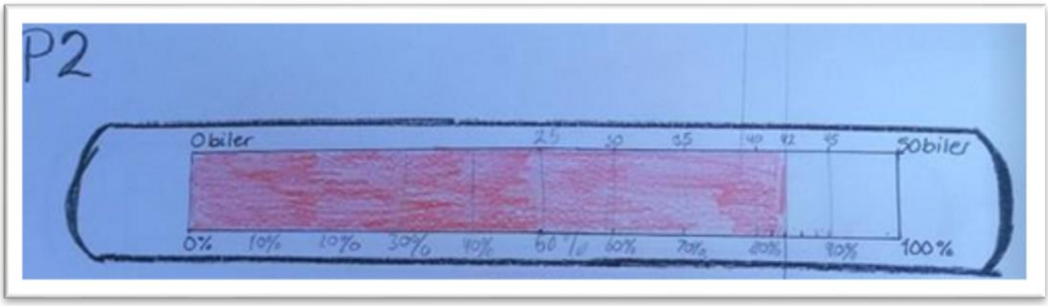
Det følgende eksemplet er hentet fra elev 1 under arbeidet med å finne ut hvor mange prosent av parkeringsplassen som er full, når 32 av 40 plasser er opptatt (se figur 33):



Figur 33:Elev 1- bruk av måleren til å finne prosentverdi

Elev 1 har valgt å dele opp måleren for å finne den rette prosentverdien. I dette tilfellet kan det tenkes at elev 1 først har valgt å benytte seg av en linjal til å dele inn baren. Måleren som elevene fikk utlevert hadde en lengde på 20 cm. Det kan derfor antas at det første elev 1 har gjort er å dele måleren opp i 20 like store deler, og sett sammenhengen at hver del inneholder 2 parkeringsplasser. Deretter kan det antas at elev 1 har startet ved 40 biler, og subtrahert ned til der måleren viser 32 biler. Videre har han sett at for å komme til 32 trenger vi 4 ruter som tilsvarer 8 parkeringsplasser. Videre kan det antas at eleven har delt opp måleren på nytt, denne gang slik at måleren rommer 8 plasser i hver rute. Eleven har da sett sammenhengen mellom antall ruter og multiplikasjon, og kommet fram til at ved å multiplisere sammen 4 ruter ender man opp på 32 parkeringsplasser. Vi kan i tillegg se på måleren at eleven har markert 80 % under merket for 32 parkeringsplasser.

Elev 2 har også valgt å benytte seg aktivt av måleren i sin løsning. I utdraget arbeider eleven med å finne ut hvor mange prosent måleren viste ved parkeringsplass 2 klokken 10.00. på dette tidspunktet oppgav oppgaven at 42 biler sto parkert på den 50 plasser store parkeringsplassen (se figur 34).



Figur 34: Elev 2- Bruk av måleren til å finne en prosentverdi

Også elev 2 har delt opp måleren i like store deler for å finne prosentverdien. Denne eleven har i tillegg til å markere antall biler, også markert den tilsvarende prosentverdien. Det kan antas at elev 2 først har delt opp måleren i 10 like store deler, hvor hver del inneholder 10%. Videre kan det tenkes at elev 2 additivt har lagt sammen antallet ruter til han kom fram til 40 plasser. I oppgaven ble eleven bedt om å finn prosentverdien til 32 parkeringsplasser, dermed har elev 2 på nytt valgt å dele opp. Denne gangen skjer inndelingen inne i en 10% rute. Denne ruten deles inn i 5 like store ruter, som hver tilsvarer 1 parkeringsplass, og slik at hver rute har prosentverdien 2 %. På nytt adderer eleven sammen to ruter slik at vi kommer til 42, og den tilsvarende prosentverdien blir 84 %.

Gjennom dette arbeidet har både elev 1 og elev 2 fått laget seg en god visualisering av problemet, og av løsningen. En slik visualisering kan gi mange fordeler. Det kan hjelpe til for å se sammenhenger, og til å bedre forstå sammenhenger innad i et matematisk konsept (jfr. Van der Walle, 2015 kap. 2.2). Bar-modellen fungerer i dette tilfellet som et hjelpemiddel for å komme fram til det rette svaret, og har derfor en stor rolle i elevens tanke- og framgangsmåte. Ser vi på elev 1 er det ikke markert hvor stor prosentandel som befinner seg i hver rute, men i og med at eleven har notert seg at 32 biler tilsvarer 80 prosent kan vi tolke det til at eleven også ser at hver av rutene må inneholde 20 %. Elev 2 har valgt å markere de tilsvarende prosentverdiene i sitt arbeid. Fra 50 % har elevene markert at for hver 10% øker antallet parkeringsplasser med 5. Dermed viser eleven at den har forståelse for at de to proporsjonale størrelsene ikke vokser likt, men proporsjonalt.

For å gjennomføre en slik strategi på en vellykket måter er det flere krav som stilles til eleven. Et krav er at eleven må beherske addisjon/subtraksjon og/eller multiplikasjon divisjon. Dette er for at eleven skal klare å dele opp tallinjen på en fornuftig måte i forhold til de gitte tallene. Det kan dermed tolkes at elevene ser sammenhengen mellom hvordan det totale kan deles inn på en måte som også gir en fornuftig inndeling av prosentandelene. I denne oppgaven blir elevene presentert for relativt «snille tall», dette er også en faktor som kan ha innvirkning på strategien elevene velger.

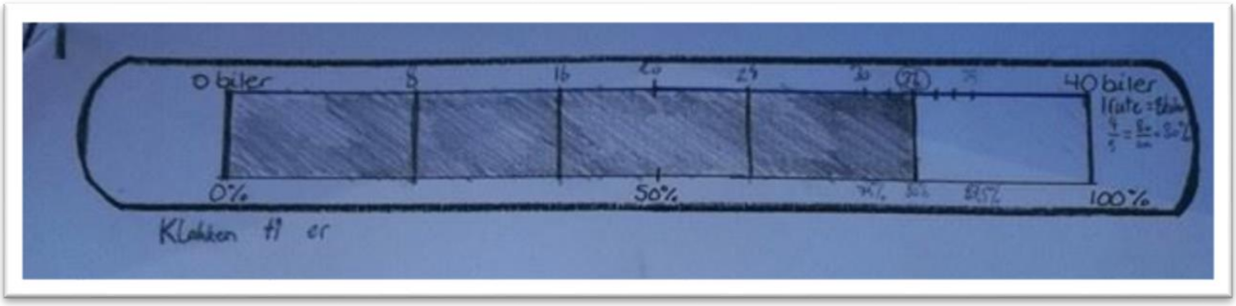
I tillegg til dette kreves det at elevene er i stand til å se og vurdere hvilke faktorer som er felles for tallinjen som viser prosent, altså 100, og for det gitte totalantallet som skal representeres på den andre tallinjen i baren. En slik strategi vil også kreve at elevene sitter inne med en forståelse for proporsjonalitetsbegrepet. For at man skal få til å komme fram til det rette svaret krever det at man er i stand til å skille mellom de to vannrette linjene i bar-modellen.

6.1.2. Å se sammenhengen mellom brøk og prosent

For mange av elevene var det naturlig å trekke en sammenheng opp mot brøk når de arbeidet med oppgaven, og av de totalt 18 skriftlige arbeidene som ble analysert kunne det kodes at det var gjort en kobling opp mot brøk i totalt 11 av arbeidene. Gjennom analysen av elevenes skriftlige arbeider kom det fram at dette kunne gjøres på flere ulike måter. I noen av tilfellene ble koblingen opp mot brøk gjort ved at elevene valgte å bygge opp, mens i andre tilfeller har elevene kommet fram til svaret gjennom at de har satt opp en brøk som viser forholdet mellom delen og det hele, (for eksempel 30/50) for deretter å ha utvidet nevneren til 100 slik at teller da har viser den tilsvarende prosentverdien.

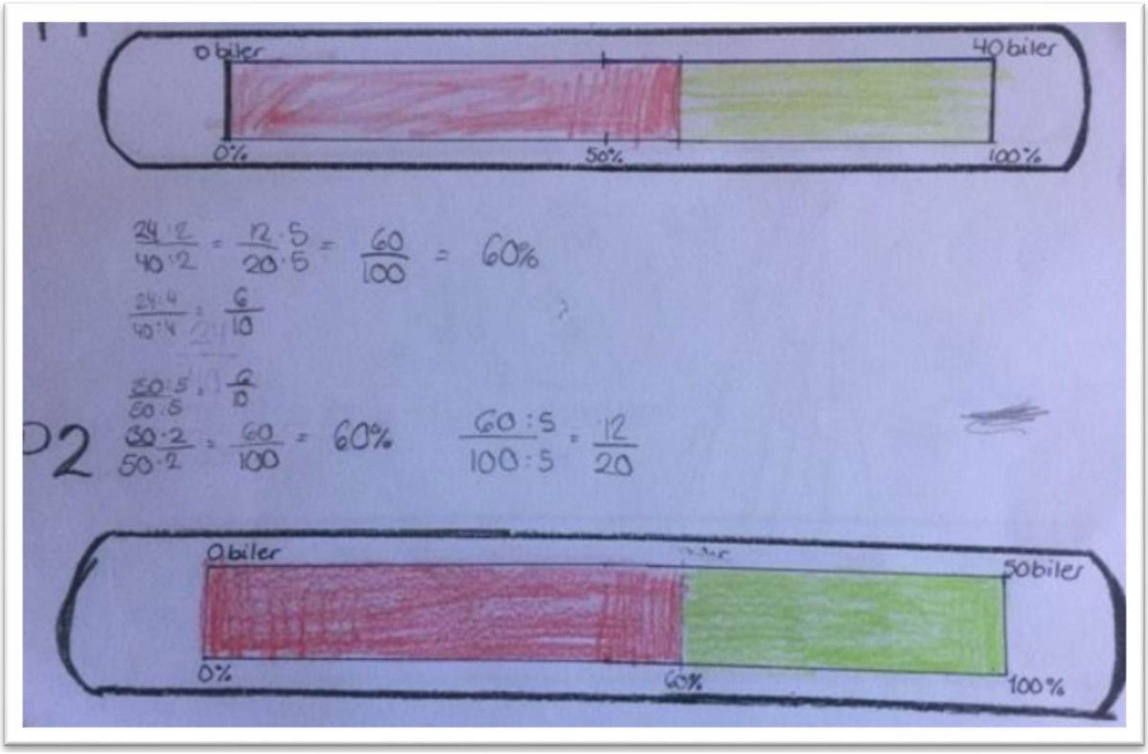
Å koble prosentbegrepet opp mot brøk kan gjøres med flere ulike strategier. Ser vi på alle elevarbeidene er det få som ikke inneholder noen form for kobling opp mot brøkbegrepet, men det varierer hvorvidt selve brøktemaet har hatt en rolle i løsningen av oppgaven eller ikke.

I det følgende presenteres tre ulike skriftlige elevarbeider, disse elevarbeidene er blitt nummererte til: elev 3, elev 4 og elev 5. I alle disse tre skriftlige arbeidene har elevene valgt å koble oppgaven opp mot det matematiske temaet brøk, men har gjort dette på ulike måter.



Figur 35. Elev 3 p1 klokken 10.00

Elev 3 er en av elevene som har brukt en tankestrategi som baserer seg på brøk, og likeverdige brøker (se figur 35). Vi ser elevens løsning av oppgaven på p1 klokken 10.00. I denne delen av oppgaven var 32 plasser opptatte på parkeringsplassen med 40 biler. Denne eleven har valgt å ha fokus på måleren i sin løsning, og har startet med å dele inn i 5 like store deler. Eleven presiserer at det i hver rute er 8 parkeringsplasser. Dermed kan også det første steget i løsningen sees i sammenheng med det *å bygge opp* strategien, og det *å benytte seg av en enkel brøk*. Videre i sin løsning trekker eleven sammenheng opp mot brøker, og trekker fram at 32 biler på parkeringsplassen tilsvarer 4 av 5 av rutene. Dette kan vi se hvis vi studerer helt til høyre i elevens besvarelse (se figur 35). Vi ser på måleren som eleven har arbeidet med at dette også er markert på selve måleren, og at der er hver rute markert med nummer som øker fra 8, til 16, til 24 og videre til 32. Ser vi på den tilsvarende prosentsiden av måleren ser vi at måleren ikke er markert på tilsvarende måte der. Dermed kan det tolkes at eleven på dette tidspunktet har gått over til å fokusere på brøkene, og på likeverdige brøker. Eleven trekker videre fram at 4/5 kan skrives som 80/100, og at dette tilsvarer 80 %, og dermed er parkeringsplassen 80 prosent full på dette tidspunktet.



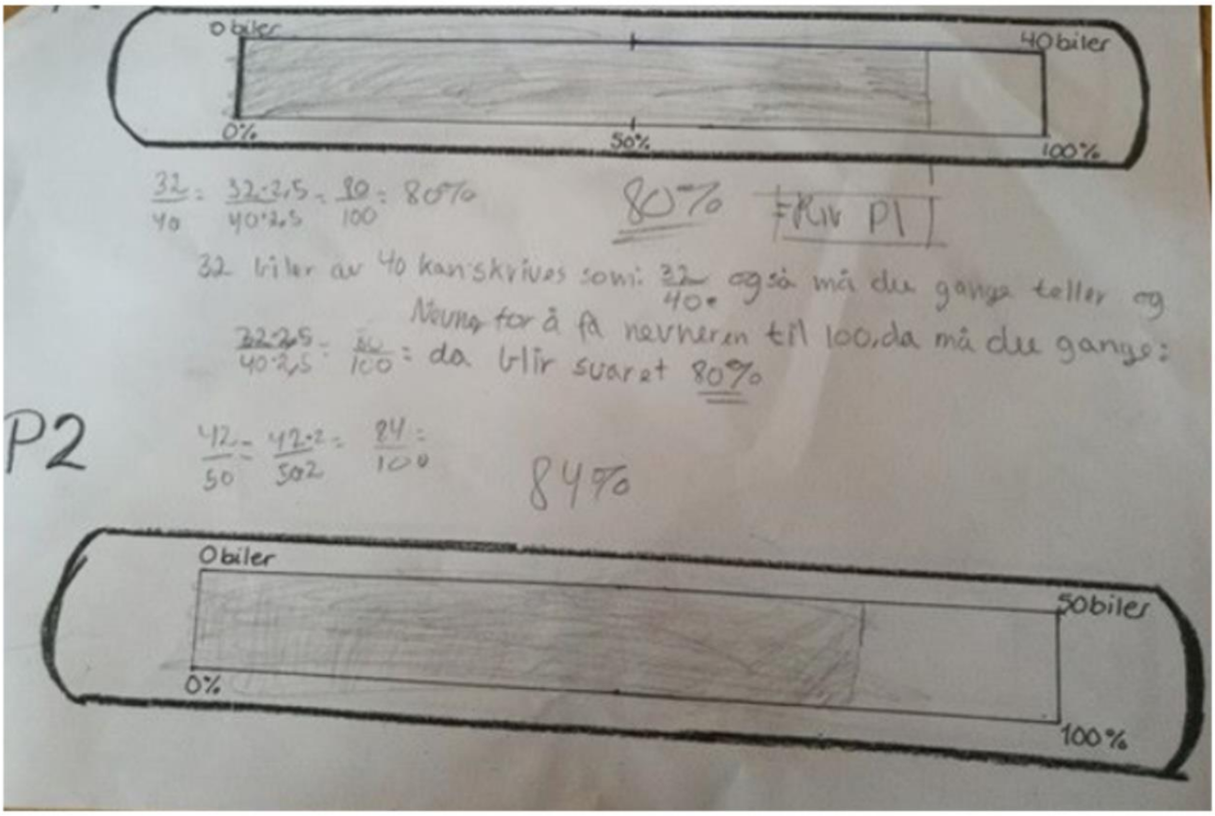
Figur 36: Elev 4s arbeid ***med*** *P1 og p2 klokken 10.00*

En av elevene som tydelig har koblet sin tanke opp mot brøk er Elev 4. For å løse oppgaven har også elev 4 valgt å benytte seg av symboler i form av nummer og notasjoner (se figur 36). Det som kjennetegner elev 4s tankemåte i disse løsningene er å linke prosentbegrepet tett opp mot brøker. Elev 3 har valgt å benytte seg av det van Heuvel-Panzhuizen (2003) beskriver som *bruk av en kjent prosent*. I første omgang har elev 3 valgt å forkorte, og forenkle brøken slik at den er lettere å sammenlikne opp mot hundredeler: $\frac{32:4}{40:4} = \frac{8}{10}$, dermed kan vi tolke det til at elevene ser sammenheng til likeverdige brøker. Når dette steget er gjennomført utvider også elev 3 nevner og teller slik at nevner får verdien 100: $\frac{32:4}{40:4} = \frac{8*10}{10*10} = \frac{80}{100} = 80\%$.

Den samme strategien har elev 4 benyttet seg av til å vurdere målerne klokken 14.00. I første omgang har eleven valgt å finne kjente brøker. På P1 klokken 14.00 var antall opptatte plasser på parkeringen 24/40. Eleven har trukket fram at $\frac{24:4}{40:4} = \frac{6}{10}$, men valgt å heller ta utgangspunkt i 20 deler. Også denne gangen går eleven over til å behandle tallene i brøker:

$$\frac{24:2}{40:2} = \frac{12*5}{20*5} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Måleren er i dette tilfellet bruk kun for å visualisere hvordan den vil se ut ved det gitte tidspunktet, og har ikke vært en del av det å finne løsningen. Men som en del av løsningen har eleven valgt å måle hvor langt måleren er i alt, 20 cm, om deretter finne ut hvor stor del av måleren som er fylt. Eleven har da også benyttet seg av likeverdige brøker ved at 8/10 er blitt utvidet til 16/20.



Figur 37: Elev 5- Arbeid med p1 og p2 klokken 10.00

Sammenhengen til brøk kan også sees når man benytter seg av andre strategier enn de to beskrevet i de foregående episodene. Et siste eksempel som kan trekkes fram er Elev 5s arbeid. Denne eleven har også valgt å se sammenheng til brøk, men i tillegg til dette ser eleven på forholdstallet mellom det totale antallet biler og 100 (se figur 37).

Eleven beskriver at 32 biler av 40 plasser kan skrives som brøken 32/40, og at hvis vi ønsker å gjøre dette om til prosent må vi gjøre om brøken til å omhandle hundredeler. Han forklarer også at for å få til dette må vi multiplisere telleren og nevneren med 2.5, men hvordan eleven har kommet fram til dette nummeret er litt usikkert. Videre viser eleven at når vi har utvidet brøken 2,5 ganger, og dermed fått 100 i nevner, har vi også utvidet teller 2,5 ganger, og fått 80 i teller. Dermed vil parkeringsplassen p1 være 80 % full klokken 10, når det er oppgitt at det står 32 biler på parkeringsplassen. Den samme strategien kan vi her se gjennom hele arbeidet. Ser vi på arbeidet eleven har gjort med p2 klokken 14, er det utvidet på samme måte ved at nevner og teller er utvidet slik at nevner er blitt 100, og dermed vil telleren tilsvare den aktuelle prosentverdien. Dette kan tolkes inn som en *mellomtenkemåte* der eleven fokuserer på forholdet mellom det totale antallet plasser på parkeringsplassen, og den totale prosentverdien, 100%.

Gjennom analysen av de skriftlige arbeidene til elev 3, elev 4 og elev 5 kan det trekkes fram at kun elev 3 har benyttet seg av måleren aktivt i sin løsning. Elev 3 har benyttet seg av flere strategier. I første omgang har eleven *bygget opp*, og i tillegg til dette viser elev 3 en utregning hvor eleven benytter seg av utvidelse av brøk. Elev 5 har ikke valgt å bruke måleren aktivt i sin løsning av oppgaven. Som redskap gir måleren en god indikator på hvor stor prosentandelen er, og i dette tilfellet kan det tolkes at måleren i større grad har hatt dette formålet. For å løse oppgaven har elev 5 valgt å benytte seg av notasjoner. Dette er en komplett måte å modellere en situasjon på (Van der Walle, Karp, & Bay-Williams, 2015). Strategien gir også mulighet for eleven til å få innsikt i problemets struktur. I dette tilfellet kan det trekkes inn flere matematiske aspekter. For eksempel kan metoden som elev 5 benytter seg av gir innsikt i likeverdige brøker, og/eller forholdet mellom en brøk og prosent, eller kan tolkes til at eleven sitter inne med forståelse for dette. Gjennom framgangsmåten viser eleven derfor en relasjonell forståelse i forhold til å regne med prosent. Utregningen og løsningsstrategien bærer ikke preg av å bygge på en bestemt formel eller algoritme, men på numeriske relasjoner mellom de tallene som inngår i oppgaven. Også elev 3 og elev 4 viser forståelse for sammenhengen mellom brøk og prosent. Gjennom å arbeide slik som elev 3 og elev 4 viser elevene at de har en relasjonell forståelse for sammenhengen mellom prosent og brøk, og at de i tillegg har en forståelse for de numeriske sammenhengene. For eksempel viser elev 4 at hun kan ta et utgangspunkt, som i dette tilfellet var 24/40, og ved å utvide nevner til 100 får en beskrivelse av hundredeler, som tilsvarer prosent.

6.1.3. Hvis vi deler det på 100 finner vi ut hvor mye 1 prosent er

Å gå veien om 1 er beskrevet av Van Galen (2008) som en av de mest fullkomne strategier når man skal regne med prosent. Gjennom arbeidet med kontekstoppgaven var det så mange som 13 av 18 som på et eller annet tidspunkt i løpet av oppgaveløsningen hadde valgt å benytte seg av denne strategien. For noen var strategien ganske tydelig, og de hadde fra starten en forståelse for hvordan og hvorfor strategien fungerte, mens for andre krevde strategien litt mer tilpassing, og elevene oppdaget numeriske relasjoner innenfor det matematiske temaet etterhvert som arbeidet som arbeidet utviklet seg, og i tillegg til dette utviklet aktivitetsnivået seg fra å være veldig knyttet til kontekst til å gå over til mer generelt nivå.

Det følgende eksemplet er hentet fra den ene gruppen ved skole 2. Elevene Jens og Ola kom tidlig i arbeidet opp med denne strategien, og strategien går igjen gjennom så å si hele arbeidet deres. I det følgende presenteres dialoger som foregikk mellom de to elevene mens de arbeidet, i tillegg til bilder av deres arbeider. Gjennom dialogene vil jeg gi et bilde på hvordan deres strategi utvikler seg gjennom arbeidet.

8. Ole: Ok, hvis vi deler det på 100 så finner vi hvor mye 1 prosent er.
9. Jens: Ja, men hvor mange biler var det som var der?
10. Ole: Parkeringsplass to har 32 biler
11. Jens: Da skriver vi her da, 32 biler, nei her ja. 32/40 biler.
12. Jens: Så halve måleren vil være 20 biler da, kan det være 40 på første da ?
13. Ole: Ja det er sånn ca her det da, er det ikke det? (markerer på måleren). For her er 20 (halve måleren), og her er da 30 (3/4 av måleren).
14. Jens: Mhm, 32 biler. Okey
15. Ole: Da tar vi 100 delt på 40, og får 2.5
16. Jens: Ja
17. Ole: Og da kan vi ta 32 ganger 2.5, enig?
18. Jens: 64, og hvis vi deler, hvis vi tar bare halve.. (arbeider med klokken 14 p1)
19. Ole: Går ikke det?
20. Jens: Vet ikke…. Tror det
21. Ole: Da blir det 9o, tror det blir 90%

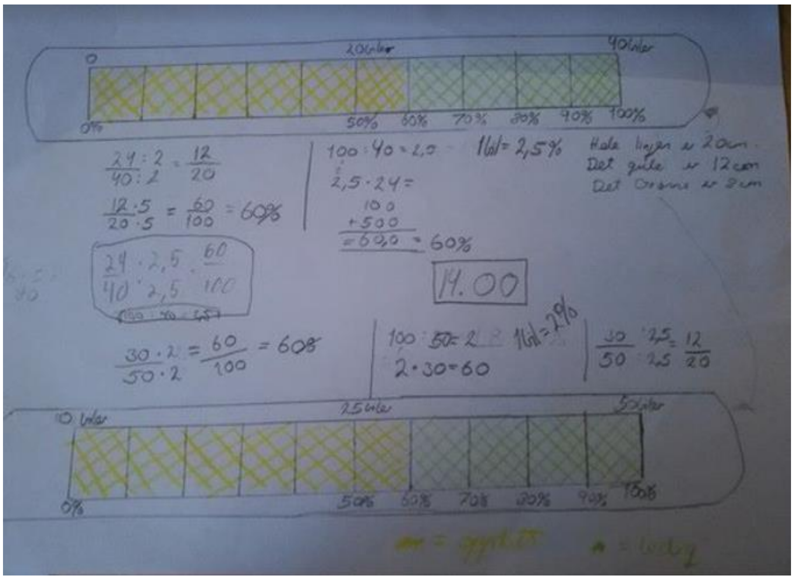
Ole starter med å foreslå en strategi. I starten overser Jens strategien litt, og ønsker heller å visualisere ved hjelp av måleren. Elevene markerer på måleren hvor de tror at 32 biler skal plasseres. Videre går de tilbake til strategien om å gå veien om 1, men denne gangen vil de dividere på antall plasser istedenfor på 100, dermed finner ikke elevene ut hvor mye 1% tilsvarer, men hvor mange prosent som inngår i hver parkeringsplass. Ole foreslår deretter at de nå må multiplisere med 32. Jens er ikke helt med på strategien, men ber ikke om noe videre utdypning annet enn at han går med på at det muligens stemmer. Ole konkluderer med at da vil parkeringsplassen være 90 % full, men stusser over svaret og velger å multiplisere 2.5 med 32 på nytt for å sjekke. Denne gangen kommer han fram til at 80 % av parkeringsplassen er i bruk når det er 32 biler på den.

Ser vi på dialogen mellom guttene starter de med en visualisering av problemet ved at Jens ønsker å tegne opp på måleren. En slik visualisering vil være med på å gi elevene en god indikator på hvor svaret bør ligge. Måleren blir altså ikke et redskap som benyttes direkte til å gi den eksakte løsningen, men heller som et hjelpemiddel/verktøy i vurdering av sine løsninger. Dette kommer godt med da elevene i sitt arbeid helt klart benytter seg av problemløsningsstrategien *forutse og sjekke etter fornuft*, også kalt *gjett og sjekk.* Ola presenterer en strategi, i denne presentasjonen har han på forhånd sett seg ut en fiks ferdig strategi, som testes ut og tilpasses gjennom utprøvninger. I dette tilfellet trenger ikke strategien noen tilpasninger, men vi ser at den endrer seg litt likevel. I starten (linje 8) Sier Ole at han vil dividere på 100, mens han senere (på linje15) går over til at han vil dividere på det totale antallet plasser, altså 40. Også i en slik strategi kan vi trekke paralleller opp mot proporsjonalitetstanken.

6.1.4. Fra en modell av en matematisk situasjon til en modell for et matematisk konsept

Gjennom arbeidet kan det tolkes at for en del elever gikk modellen over fra å være en modell av, til en modell for et matematisk konsept. Studerer vi utdrag fra samtalene mellom elevene, og mellom elevene og student kan vi trekke fram situasjoner der det kommer fram at elevene både ser at de framgangsmåtene de har kommet fram til kan benyttes til å løse andre typer oppgaver, og vi kan se at elevene blir mer sikre på de strategiene og tankemåtene de sitter inn med ved at de i deres løsninger arbeider på et mer generelt nivå.

Den første episoden jeg trekker fram her er fra samtalen jeg hadde med Elin, Maria og Kaja i etterkant av deres arbeid med kontekstoppgaven. Gjennom arbeidet med konteksten hadde jentene benyttet seg av mange ulike strategier, og de har besvart oppgaven på en meget god måte der de viser stor variasjon og fleksibilitet i valg av strategi (se figur 38). I samtale med elevene i etterkant av arbeidet med kontekstoppgavene får elevene presentert en oppgave som er uavhengig av konteksten. De blir bedt om å løse den, og jeg forteller at oppgaven er hentet fra det læreverket som de bruker i faget.



Figur 38: Elevarbeidet til Elin, Maria og Kaja

S: Ok, men nå vil jeg at dere skal prøve å løse en oppgave for meg, dere kan jo forsøke hvis dere vil å bruke en av måtene vi i klassen har kommet fram til, eller en annen. Eeh, ja, oppgave 3.19(leverposteiboks på 150 gram, 29% lever. Hvor mange gram lever?)

1: Maria: 150g. Okey, da er det 71% som ikke er lever. Men vi skal finne ut hvor mange gram som inneholder lever. Hmm
2: S: Ja, prøv på denne. Gjerne skriv den ned i boka deres. Så skal jeg hente kalkulator
3: Elin Da tar vi 150, del på
4: Maria 150 delt på 29, blir det rett?
5: Kaja Ja jeg tenkte også det.
6: Maria 150 gram det er 100%
7: Elin Ja også er 29 % lever da av den (peker på 150 g). Kan vi bruke kalkulatoren?
8: S: Ja, derfor jeg tok den med vet du.
9: Elin: Er det det vi skal gjøre? 150/29 (prøver på å sette opp et regnestykke etter en formel.

For alle de tre jentene er det vanskelig å ta fatt på oppgaven. De er usikre på hvordan oppgaven skal løses. Jeg gir dem da tips om at de kan prøve å tegne en modell av situasjonen. Elevene tar da automatisk i bruk bar-modellen, som de har brukt i de foregående oppgavene som de har arbeidet med.

10: S: Ja, oppgaven sier: 150g er hele boksen.
11: Maria: Ja, også kan vi sette inn 29 ca her, på prosent siden, å da vet vi ikke denne verdien. Vi kan sette spørsmålstegnet her da. (på gram linja under 29)
12: S: Ja
13: Maria: Nå må vi finne hvor mye 1 prosent er
14: Elin: Ja, og da tar vi bare 100 og deler på 150, eller det blir kanskje bedre å ta 150 og dele på 100
15: S: Ja det stemmer, hva finner dere da?
16: Maria: Ja da tar vi 1,5 ganger 29 ikke sant.
17: S: Ja det er sant.
18: Maria: Hva fikk du?
19: Elin Jeg? 43.5
20: S: Så hva er svaret på oppgaven da? Hvor mange gram lever er det i boksen?
21 Elin og Maria i kor: 43.5g

I løsningen av denne oppgaven tar elevene først og setter opp en bar-modell. På denne måten får de en visualisering av de relasjonene som inngår. Denne aktiviteten kan sees på nivået beskrevet som *aktivitet i tolkning av oppgaven.* Den er en viktig del av løsningen, men de finner ikke løsningen ved den aktiviteten de holder på med. Videre velger jentene å benytte seg av strategien der de går veien om 1. Denne strategien er en av de strategiene elevene benyttet seg av i arbeidet med kontekstoppgaven.

Gjennom dette arbeidet har modellen utviklet seg for elevene. Gjennom å sette opp modellen ser elevene at de også kan benytte den til å løse andre oppgaver enn kun i den konteksten som de arbeidet med Det må understrekes at de ikke tenkte på den som en naturlig løsningsstrategi for oppgaver som ikke handlet om.

Også gjennom arbeidet til guttegruppen ved skole 2 kunne man tolke at de gjorde framgang gjennom arbeidet sitt. Denne framgangen baserte seg på at de gjennom arbeidet ble mer og mer sikre på sine strategier, og på hva det var de fant ut når de benyttet seg av strategien. I starten går deres arbeid i stor grad ut på å *gjette og sjekke:*

8. Ole: Da tar vi 100 delt på 40, og får 2.5
9. Jens: Ja
10. Ole: Og da kan vi ta 32 ganger 2.5, enig?
11. Jens: 64, og hvis vi deler, hvis vi tar bare halve.. (arbeider med klokken 14 p1)
12. Ole: Går ikke det?
13. Jens: Vet ikke…. Tror det

I dette utdraget har guttene kommet fram til en strategi de de ønsker å sjekke. Van der Walle (2015) trekker fram det å finne en strategi man ønsker å teste ut ikke er en enkel måte å arbeide på. Styrken med dette er at eleven gjennom utprøvningene kommer fram til tilpasninger som de er nødt til å gjøre, og dermed også vil oppdage numeriske relasjoner som inngår i de strategiene elevene tester ut. Videre i arbeidet med parkeringsplasskonteksten fortsetter Jens og Ola å arbeide med strategien fra det foregående utdraget, men fordi de ikke har reflektert over hva de gjør møter de på vanskeligheter med å videreføre strategien. Det følgende utdraget er fra Ole og Jens arbeid med p2 klokken 10.00

26. Ole: Ok, den andre da. Var det mange biler der?
27. Jens: 42
28. Ole: 42 biler, det er 25, 37.. nei jeg vet ikke jeg. Hvor er det? (ser på måleren)
29. Jens: Nei, her en plass da?
30. Ole: Hva var det? 42
31. Ole: Ja, og da må vi ta 100 delt på 42. og det blir 2, eller det blir ikke et helt tall eller?
32. Jens: Nei
33. Ole: 84%, 16 ja.. 60%, 4,8,12.. ok, 3. 2,3. Går det? 4 – 8 – 12, 24 – 26, fir og tjue – seks. (regner ut for hånd 100/42)
34. Jens: Hva blir det+ hvor mye har vi igjen?

Tenke pause.. skriver

35. Ole: 4 – 8 – 12, hmmm 2,33. 2,33. Jeg tror det blir 2.33 ganger 42
36. Jens: Hmmm..
37. Ole: 2,33 ganger 42
38. Jens: Hva blir det, 2.33 ganger 24.
39. Ole: (Regner ut for hånd) 97%, hæ?? Kan det være rett? Kan det være at 97% av parkeringsplassen er full

I dette arbeidet starter også Ole og Jens med å tenke at de skal finne ut noe ved å dividere på 100 (se linje 31). I dette tilfellet tar de ikke hensyn til relasjonene mellom tallene. For eksempel tenker de ikke over hva de får dersom man dividerer 100 på 42, og dette er det vanskelig å sette ord på. I arbeidet er guttene på et referensielt nivå. De ser på løsningen som en metode for å løse det aktuelle problemet, og ikke for noe som er en løsningsstrategi for det matematiske konseptet. Videre i arbeidet ser elevene at det trengs en justering i strategien for at de skal få den til å stemme.

62. Ole: 24 biler, og 24 delt på 100 det er litt over 4.
63. S: Dere får bruke kalkulator altså om dere vil.
64. Ole: Blir ikke det 0,24 da? Vi deler på 100, da er det jo bare å ta bort to nuller.
65. Jens: Så 0,24 da ?
66. Ole: Mhm, det er riktig det ja. 100/24 = 4,16 da
67. Jens: Ganger hvor mye?
68. Ole: 24
69. Jens: Nei
70. Ole: Jo
71. Jens: Da får jeg 29.9999998 hæ?
72. Ole: Nei, er det ikke 40 delt på 100 da fordi det er 40 plasser?

Etter at strategien er blitt justert refererer Jens og Ola til de numeriske relasjonene som inngår i oppgaven (se linje 62-65). Dette viser at de gjennom arbeidet og utprøvingen av strategien har blitt mer bevist på egen strategi, og at de reflekterer over de numeriske relasjonene som inngår i deres utregning. Guttene befinner seg fortsatt på et referensielt nivå i forhold til deres arbeid. I arbeidet referer de til oppgaven, og det kan dermed ikke tolkes at den løsningsstrategien som de har kommet fram til sees på som en strategi som gjelder for det matematiske konseptet, og dermed er på det generelle nivået.

I oppgavene som elevene får etter at de er ferdige med arbeidet med kontekstoppgaven kan det trekkes fram at Jens og Ola klart ser sammenhengene mellom den strategien de har benyttet seg av i løsning av parkeringsplassproblemet, og at strategien kan benyttes til å løse andre oppgaver hvor konteksten har endret seg:

138. Ole: Ok, det høres greit ut, vi starter med den da; Martin skal kjøpe sin første bil. Han har funnet en bil han vil kjøpe som koster 15 000 kr. Martins pappa sier han vil hjelpe til å betale, og tilbyr seg å betale 35% av bilens kostnad. Hvor mye av bilen betaler pappa? Bestefar vil også hjelpe Martin, han betaler 3600, hvor mange prosent av prisen på bilen utgjør dette?
139. S: Ja, så dere starter med pappaen først, også kan dere ta bestefar etterpå.
140. Jens: Ok, så hvis vi tar det der (15 000) og deler på 100 først da, for da finner vi hvor mye 1% er.
141. Ole: 15 null null null, delt på en null null, er liik 150 ganger
142. Jens: 35
143. Ole: Ganger 35 er lik 5250.
144. Jens: 150 ganger 35 er lik 5 2 5 0.
145. Ole: Også plusser vi bare på 360 fordi det er det bestefar betaler.

Nei vi plusser på 3600 fordi det var det bestefaren ville betale.

146. Jens: Huh? For å finne ut hvor mange prosent han gir?
147. Ole: Åja, nei da må vi gjøre noe annet.
148. Jens: Vi skriver ned denne først da (pappa oppgaven)

149. Ole: Ok, bestefar vil betale 3600 kr, hvor mange prosent utgjør dette?
150. Jens: Hvis vi…. Neeeei
151. Ole: 15000 delt på 3600 hva blir det?
152. Jens: 15000/3600 er lik 4,16666
153. Ole: Hmmm… Nei, jeg tror vi må tenke oss alt omvendt.
154. Jens: Ja, men 4,16 det er jo ikke noe?

10 sek stille

155. Ole: Ok, men hvis vi tar det omvendt da.
156. Jens: Ja fordi nå skal vi finne…. Hvordan finner vi ut det da?
157. Ole: Ja hvis vi har tatt det omvendt, da blir det jo
158. Jens: Det(3600) ganger 100.
159. Ole: Nei, men noe sånt? For da har vi tatt noe, delt på 100, også finner vi det? Så må vi nå ta noe ganger 100?
160. Jens: Nei, men vent litt. Vi tar den (3600) delt på 150. 24!! For det er 1 prosent, ganger 150, sant (viser 3600 på kalkulatoren). Betaler han ikke 24% da?
161. Ole: Jo han gjør det. Gjør han ikke?
162. Jens: Han betaler jo litt mindre enn pappaen, så
163. Ole: Ja, vi tar 3600 delt på 150 = 24%. og 35 + 24 det er jo over halve bilen de betaler de da. De betaler 59 prosent av hele bilen.
164. Jens: Ja, men da er vi ferdige med den vi da!

Løsningen kom umiddelbart etter at oppgaven var gitt. Det kan dermed sies at på dette tidspunktet har Jens og Ola opparbeidet seg en god forståelse for regning med prosent. Gjennom oppgaven viser de også at de har kjennskap til de relasjonene som inngår i problemet. For eksempel at 150 tilsvarer 1%, og at dette kan videreføres fordi de allerede har regnet det ut i den første delen av oppgaven. Elevene er ikke helt sikre på strategien, men ved å referere tilbake til det arbeidet de har gjort ser vi at de er i stand til å se sammenhenger mellom de tallene de har oppgitt i denne oppgaven, og de tallene som var oppgitt i parkeringsplassproblemet. Følger vi guttenes arbeid videre vil det også trekkes fram at gjennom løsningen av de neste oppgavene trenger ikke guttene lengre referere til oppgaven i løsningen, men at de går direkte på å behandle de tallene som de får oppgitt.

7. Drøfting: Forholdet mellom elevers intuitive modeller, og den presentasjon læreverk gir av temaet prosent.

I starten av denne oppgaven stilte jeg følgende problemstilling:

> *Hvordan er forholdet mellom den intuitive kunnskap og den forståelsen elever naturlig viser gjennom arbeidet med en RME-inspirert kontekstoppgave i prosent som har en innebygd bar-modell, og læreverks framstilling av temaet?*

Gjennom det følgende kapitelet skal jeg i lys av presentert teori drøfte hvordan analysen som er gjort av datamaterialet kan være med på å besvare den første delen av dette spørsmålet. Kapitelet er delt inn i to hoveddeler, den første delen drøfter de strategier som elevene har benyttet seg av i arbeidet med parkeringsplasskonteksten opp mot de strategier som læreverket legger fram. I den neste delen vil jeg ta for meg forståelsesbegrepet. Jeg vil her drøfte den forståelsen som elevene viser gjennom sine arbeider opp mot hvilken type forståelse læreverkene tar sikte på at elevene skal sitte igjen med etter arbeidet med deres presentasjon av temaet.

7.1. Læreverkenes presentasjon av fremgangsmetoder og de strategiene elevene bruker til å løse kontekstoppgaven

Gjennom analysen av elevenes arbeid med kontekstoppgaven kom det fram at elevene totalt sett har en god forståelse for det matematiske konseptet prosent, og er i stand til å benytte seg av mange ulike strategier i løsning av de gitte oppgavene. Strategiene og tankemåtene kom fram uten at elevene på forhånd hadde fått undervisning eller noen form for gjennomgang i det aktuelle temaet.

I den første delen av oppgaven fikk elevene i oppgave å finne hvor mange prosent av parkeringsplassen p1 som var full når det sto 32 biler parkert. Dette ga brøken 32/40. I løsningen av denne oppgaven valgte mange av elevene å benytte seg av *bygge opp tankemåten*. Mye av grunnen til dette kan være de tallene som elevene skulle arbeide med, da både 32 og 40 går opp i 8. En slik tankemåte vil ofte bli benyttet av elever der tallene er relativt snille å arbeide med, og at der de gir en naturlig inndeling av bar-modellen (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). I læreverket Sirkel 8 var det funn av representasjoner hvor dette kan kjennes igjen. For eksempel trekkes det fram at ved å halvere får vi 50 %, og ved å halvere dette finner vi 25 %. Legger vi sammen disse to finner vi 75 %. Det gis også framstillinger hvor ulike figurer er delt opp i ulike antall ruter/deler. Disse representasjonene gir et bilde av at hver del i en figur kan inneholde mer enn 1 %, og at hver rute i en figur kan representere mer enn 1 del. Gjennom en slik presentasjon vil det være mulig for elevene å trekke sammenhenger til brøker.

Det å se sammenhenger til brøk var noe mange elever gjorde i sine løsninger. Dette kan ha sammenheng med at elevene har god kjennskap til enheten prosent som *hundredeler*, men det er likevel interessant å se hvordan elevene intuitivt trekker fram brøker og likeverdige brøker i sine løsningsstrategier, for dette blir gjort på mange ulike måter. Når elevene arbeidet med konteksten valgte flere av dem å sette opp forholdet mellom antallet parkeringsplasser totalt, og antallet parkeringsplasser i bruk opp som en brøk. Videre gikk strategien ut på å utvide brøkene slik at brøken viser 100 i nevneren. Gjennom dette viser elevene at de har forståelse for at prosentbegrepet betyr hundredel. Dette gjenkjennes i arbeidet til elev 5. I læreverkene forekom også dette i de presentasjoner som blir framstilt. I Sirkel 8 blir nettopp tankestrategien om å utvide nevner til 100 presentert. Der læreverket legger fram hvordan man gjør om fra brøk til prosent gis det et eksempel der vi kan finne prosenten ved å få hundre i nevner (se eksempel side 89, Sirkel 8). En slik presentasjon kan for elevene være med på å styrke innsikten i sammenhengen mellom prosent og brøk, men det vil være essensielt i denne sammenhengen at elevene har forståelse for hvorfor vi kan utvide brøker, og for hvordan vi utvider brøker. I Grunntall 8 er det også fokus på sammenhengen mellom prosent og brøk, og der vi for eksempel skal *finne prosenten* trekkes det sammenhenger til brøk ved at det gir en presentasjon der vi får presentert brøken 100/400, og at denne er lik ¼ som tilsvarer 25%. Til tross for at det trekkes fram sammenhengen til brøk, trekkes det ikke fram sammenhengen mellom den presenterte brøken og prosent. Det kan tenkes at det naturlige for at elevene skulle sett sammenhengen ville være å utvide brøken slik at nevneren ble 100, og slik også vise sammenhengen mellom likeverdige brøker. Presentasjoner som trekker en sammenheng til brøk finner vi under alle delkapitler hvor det skal regnes med prosent. Det kritiske er at det rett i etterkant av dette blir presentert en formel som ikke tar sikte på å forklare relasjonene som inngår i formelen. Det er heller ikke nødvendigvis alltid slik at sammenhengen mellom presentasjonen som kobles opp mot brøk også kobles opp mot den formelen som blir gitt. Dermed kan det hende at ved kun å studere læreverket vil fokuset på sammenhengen til brøk forsvinne, og fokuset går over til å være på den presenterte formelen. Det kan derfor også tolkes at representasjonen ikke klarer å gi elevene et fullstendig innblikk i de numeriske relasjonene som inngår.

I elevenes løsninger ble brøker bruk på flere forskjellige måter. Det som ingen av læreverkene trekker fram er at det er mulig å forenkle brøker, og forkorte brøker for så å utvide brøkene igjen til hundredeler. I flere av elevarbeidene ble for eksempel brøker som 24/40 første gjort om til 6/10, for deretter å utvide nevneren til 100. En slik type framgangsmåte har også tett sammenheng med elevenes forståelse for sammenhengen mellom likeverdige brøker og prosent.

I analysen ble blant annet det å gå veien om 1 trukket fram som en strategi som mange av elevene intuitivt valgte å benytte seg av. Å gå veien om 1 fungerer uansett om man skal finne *delen* eller *prosenten* (Van Galen, et al., 2008). I læreverket Sirkel ble veien om 1 presentert som en av strategiene som elevene kunne benytte seg av. Gjennom eksemplet får elevene presentert både fremgangsmetoden, i tillegg til at det blir gitt forklaringer på hvorfor fremgangsmetoden er som den er. Det presiseres i eksemplet at 200 er 100 %, og at 1 % derfor blir 200 / 100. Hvis man deretter multipliserer med prosenttallet som man skal finne kommer man fram til det rette svaret, som da er den verdien en gitt prosentverdi har. Presentasjonen av operasjonen skjer i to ledd. Dermed vil elevene få et innblikk i de relasjoner som er involvert i metoden. Det kan dermed tolkes til at målet med eksemplet er at elevene skal oppleve å få en relasjonell og begrepsmessig forståelse for det som blir presentert (Hiebert & Lefevre, Conceptual and Procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis, 1986). I tillegg samsvarer dette godt overens med den kunnskapen som elevene intuitivt har, og intuitivt tar i bruk når de løser oppgaver som omhandler prosent. Som en motsetning til dette kan vi se på presentasjonen til Grunntall når de skal gi elevene et innblikk i hvordan man kan regne for å finne en ut hvor mye en prosentverdi av et gitt tall er.

I Grunntall 8 får vi presentert formelen: $delen = \frac{Det\ hele * prosenten}{100}$. Det blir ikke gitt noen som helst forklaring på formelen annet enn at det blir vist et eksempel der det vises hvordan vi kan benytte oss av formelen dersom vi ønsker å finne 25 % av 1000 kr. Deler vi opp formelen kan vi gjenkjenne den som den samme framgangsmåten som vi fikk presentert i Sirkel 8 der de presenterte veien om 1: $\frac{\det hele}{100}$ er den samme regneoperasjon som den Sirkel beskrev som *vi finner først 1 %*. Og ved å deretter multiplisere med prosenttallet finner vi verdien for det aktuelle prosenttallet. Fordi leddene, eller sammenhengen mellom disse regneoperasjonene ikke blir forklart i Grunntall kan det tolkes til at læreverket i større grad legger vekt på at elevene skal mestre en spesiell regneferdighet, heller enn å ha forståelse for de numeriske relasjonene og sammenhengene som inngår i regneoperasjonen. Læreverket legger derfor mer vekt på det som av Skemp (1976) ble beskrevet som en instrumentell forståelse, og av Hiebert og Lefevre (1986) som prosedyrekunnskap (jfr. Kap 2.1).

Sirkel 8 trekker også fram at det er mulig å benytte seg av *en kjent prosent* når man regner med prosent. De viser blant annet et eksempel hvor det benyttes 10 % av 150 til å regne ut hvor mye 30 % av 150 er. Dette ser vi også forekomme i elevarbeidene (se elev 4). Denne sammenhengen kan også delvis trekkes fram fra analysen av Grunntall 8. Det å vise elever at de kan benytte seg av en kjent prosent kan vekke mange innsyn i de numeriske relasjonene, og i de proporsjonale størrelsene som man opererer med innenfor prosentregning. Benytter man seg av å gå via 10 % vil dette gi et innblikk i at for hver gang prosentandelen øker med 10 prosent, vil også den motstående verdien øke med like mye. Dermed kan det gi innblikk i at den ene størrelsen avhenger av den andre.

For elevene kunne vi se et mangfold av strategier og tenkemåter som kom fram gjennom deres arbeider. Strategien de valgte å benytte seg av var ofte tilpasset den delen av oppgaven de arbeidet med, og til de erfaringer de hadde gjort seg gjennom det tidligere arbeidet med konteksten. I læreverket Sirkel 8 kan presentasjonen av prosent tolkes til å stemme opp mot dette. Læreverket legger vekt på å presentere mange ulike strategier, eller tankemåter gjennom et mangfold av presentasjoner, eksempler og oppgaver. Dette gjør at læreverket ikke legger noe direkte føringer i hvilke strategier elevene skal benytte seg av, men at det blir mer opp til hver enkelt elev. Gjennom å sette opp flere strategier får også elevene mulighet til å gå inn og vurdere ulike strategier opp mot hverandre. Dette er ifølge Hiebert og Grouws (2007) en metode som kan være med på å skape en dypere relasjonell forståelse hvor elevene får mulighet til å oppdage sammenhenger og koblinger til andre matematiske temaer i tillegg til å oppdage numeriske relasjoner innenfor det presenterte temaet.

Gjennom analysen av elevarbeid, og gjennom analysen av læreverkene kan det konkluderes med at læreverkene er bygget opp svært forskjellig, og at formålet og tankene bak oppbygningen kan tolkes til å være forskjellig. I Sirkel blir det aldri presentert noen konkrete formler, men det blir hele tiden satt opp ulike tankemåter mot hverandre i løsning av et matematisk problem. På denne måten tar det sikte på å gi elevene innblikk i flere løsningsstrategier. Gjennom måten de velger å presentere de ulike tankemåtene på tar de også sikte på å gi elevene en relasjonell forståelse for det aktuelle temaet. Oppgavene er også varierte i den forstand at de søker etter å la elevene arbeide med det matematiske konseptet, heller enn å øve seg i en bestemt regneferdighet. De strategiene og tankemåtene som presenteres er lette å kjenne igjen i de elevarbeidene som er blitt tolket og analysert i denne forskningsoppgaven. Dermed kan det sies at læreverket gjennom sin presentasjon lykkes i å bygge på strategier som elevene intuitivt har en forståelse for. Det som Sirkel 8 presenterer har sammenheng til den intuitive kunnskapen som elevene sitter inne med om temaet, både når det gjelder strategier og når det gjelder kobling opp mot brøk. I Grunntall forekommer det formler som vi kan gjenkjenne som generaliseringer av noen av strategiene som elevene viste gjennom sine arbeider, men uten noen videre forklaringer eller beskrivelser kan det tenkes at det for elevene er vanskelig å gjenkjenne disse som tankestrategier som de intuitivt har. Dette fører til at det kun ved å studere presentasjonen, og formlene som blir presentert er vanskelig å si at presentasjonen gir støtte til elevenes utvikling av en relasjonell forståelse. I følge Parker og Leinhardt (1995) er det dette som er blitt trenden for det matematiske temaet *prosent.*

7.2. Den forståelse elevene viser gjennom arbeidet med kontekstoppgaven, og den forståelse læreverkene legger opp til at eleven skal sitte inne med etter å ha arbeidet med kapittelet som omhandler prosent.

I det elevene startet å arbeide med selve oppgaven kom de raskt i gang med å finne løsninger på det gitte kontekstproblemet. Når elevene er engasjerte i sine løsninger og i sitt arbeid med oppgaven kan det indikere at de sitter inn med en forståelse for det arbeidet de gjør. Det å forstå de operasjoner som man gjør er ifølge Hiebert, et al. (1997) viktig fordi forståelse er en viktig faktor i å det å klare å holde seg engasjert og motivert til å løse en oppgave. Gjennom arbeidet med parkeringsplassproblemet dag 2 viste elevene at de har en god forståelse for det matematiske konseptet prosent. Det kan trekkes fram at denne forståelsen spesielt kan sees opp mot brøk.

I følge Fosnot og Dolk (2002) er arbeid med kontekstoppgaver en av de mest effektiv måter å la elever få innarbeide seg forståelse og kunnskap om et nytt matematisk tema. Funnene i analysen av mitt datamateriale kan tolkes til å støtte opp under denne påstanden. Gjennom kontekstoppgaven sto elevene fritt til å benytte seg av de strategier som passet til deres egne tanker om temaet, og til deres egne intuitive kunnskap. En av utfordringene i kodingen var nettopp å plassere elevenes arbeider, fordi de i sine løsninger ikke bestandig kun benyttet seg av en strategi, men ofte vekslet mellom flere ulike strategier og tankemåter. I flere tilfeller virket det også som om elevene valgte å sjekke opp om de løsningene de hadde kommet fram til var korrekte ved at de også løste oppgaven ved å benytte seg av andre strategier enn den de opprinnelig hadde benyttet seg av. Dette kan gjenkjennes i det Treffers (i Freudenthal, 1991) beskrev som den vertikale delen av matematiseringen. Gjennom å teste ut flere mulige framgangsmåter kan elevene få innblikk i sammenhenger mellom ulike strategier, og snarveier. Det kan tenkes at disse operasjonene er med på å gi elevene et bedre innblikk i det matematiske temaet, og at elevene slik utvikler seg en bedre og dypere forståelse for det matematiske temaet.

Gjennom analysen ble det konkludert med at hvilken type kunnskap de to analyserte læreverkene la opp til at elevene skulle sitte igjen med, var et av de momentene som helt klart skilte dem fra hverandre. I Grunntall 8 så vi tydelig et fokus på prosedyrer og algoritmer. En slik type framstilling vil i mange tilfeller ikke oppleves som gunstig for elevene. Dette er fordi slik kunnskap blir sett på som mindre anvendbar og fleksibel (Hiebert, et al., 1997). En slik type kunnskap vil basere seg på at elevene er i stand til å memorere ulike algoritmer. I arbeid med etteroppgavene kom det fram et tydelig eksempel på dette. Når Elin, Maria og Kaja ble bedt om å regne ut oppgaver som ikke var knyttet til konteksten forsøkte Kaja å heller sette opp standardlogaritmen for prosent. Da denne var noe hun ikke hadde benyttet på lenge ble regnestykket feil fordi hun ikke klarte å sette opp formelen korrekt. Hadde hun sittet inne med en relasjonell/begrepsmessig forståelse for algoritmen ville hun kunne klart å resonnere seg fram til for eksempel at hun først kunne finne ut hvor mye 1% utgjorde før hun gikk videre. Når prosentregning blir knyttet tett opp mot en eller flere algoritmer, vil den også oppleves som en isolert enhet heller enn å sees som en kobling til andre matematiske temaer. Oppgavene kan da sees å stille det som Stein og Smith (2011) beskriver som lave kognitive krav til eleven. Slike oppgaver fokuserer på en gitt algoritme, og gir derfor ingen dypere forståelse, men kan tolkes til å fremme en instrumentell forståelse.

Utformingen av oppgaver er en annen faktor som spiller en avgjørende rolle til den læringen som skjer i matematikkundervisningen (Smith & Stein, 2011; Hiebert, et al., 1997). Utformingen av oppgaver kan også sees som svært ulik i Sirkel 8 og Grunntall 8. I Grunntall var oppgavene relativt ensformige, dermed ble det lagt opp til at elevene skulle bli flinke i en spesiell type regneferdighet. I Sirkel var oppgavetypen variert. Det var lite oppgaver som kunne tolkes direkte til problemløsningsoppgaver, men det var lagt til rette for flere oppgaver hvor elevene ble bedt om å reflektere over ulike aspekter innenfor prosentregning. Det ble også fokusert på å sammenlikne ulike metoder, noe som ifølge Hiebert et al. (1997) kan føre til at den kunnskapen man tilegner seg handler om relasjoner, noe som er med på å gi forståelse for et matematisk tema.

Gjennom arbeidet med parkeringsplassproblemet og etteroppgavene kan det tolkes at den type kunnskap som elevene får gjennom en slik type oppgave kan relateres til en *relasjonell- og begrepsmessig kunnskap* ((Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976). Gjennom matematiseringsprosessen kan vi ut fra analysen trekke konklusjonen om at det skjedde en matematisk vekst hos elevene. Dette handlet blant annet om at elevene var i stand til å benytte seg av de strategier som de kom fram til gjennom arbeidet med parkeringsplassproblemet dag 2, over til parkeringsplassproblemet dag 3, og til arbeidet med de aktuelle etteroppgavene. En tilnærming til et matematisk tema hvor elevene selv får oppdage og utvikle matematiske verktøy gir mange fordeler. De får for eksempel mulighet til å ¨bygge en bro¨ mellom den uformelle matematikken og den formelle og mer generelle delen av matematikken. Dermed er elevene selv med på å skape seg et meningsinnhold for den matematikken de tilegner seg (Frudenthal 1991). En slik type forståelse vil det i lærebøker være vanskelig å legge grunnlaget for. Grunnen til dette er fordi en slik matematiseringsprosess ikke vil følge en lineær bane, men læringsbanen (kilde) vil hele veien ta avstikkere og variere. Til tross for dette er det faktorer som læreverk kan legge til rette for som kan kobles opp mot en læring der elevene ser sammenhengen mellom den formelle og den uformelle matematikken. Dette handler om at matematikken må presenteres gjennom fenomener som for dem er gjenkjennbare fra elevenes hverdag, eller såkalte *realistiske situasjoner* (Gravmeijer, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Derfor bør også læreverkene fokusere på å presentere fagstoff ut fra de intuitive modeller som elevene sitter inne med, og også legge til rette for at elevene får diskutere og reflektere over ulike fenomener og fremgangsmetoder innenfor et og samme fenomen.

8. Avslutning

8.1. Oppsummering

I denne studien har jeg undersøk forholdet mellom elevers intuitive strategier i prosentregning og temaets presentasjon i læreverk. For å undersøke dette har jeg sett på elevers skriftlige arbeider i en RME inspirert kontekstoppgave med en innebygd bar-modell, og jeg har analysert to ulike læreverks framstilling av det aktuelle temaet. Fokuset i sammenlikningen har vært å trekke en slutning mellom de strategier og den forståelse elevene intuitivt sitter inne med, og de strategiene og den forståelse læreverkene legger opp til at elevene skal kunne gjennom arbeid med temaet.

Denne studien har vist at elever sitter inne med en mangfoldig forståelse for prosent. Gjennom arbeidet med kontekstoppgaven viste elevene mange ulike strategier og tankemåter. Det varierte i hvilken intuitiv kunnskap elevene satt inne med. Det kom fram at svært mange hadde god forståelse for temaets nærhet til det matematiske temaet brøker. Dette viste de gjennom at de *bygget opp* og benyttet bar-modellen aktivt til å illustrere ulike brøker og tilsvarende prosenter. Elevene viste også at de hadde en forståelse for den proporsjonale tankegangen innenfor prosentregning, og elevene viser i stor grad at de gjennom arbeid med en slik kontekstoppgave er i stand til å komme fram til strategier som de ser at er overførbare til andre typer oppgaver som omhandler prosent. Dette er med på å forsterke bildet av at elevene tilegner seg det som beskrives som *begrepsmessig*- og *relasjonell kunnskap.*

Fra drøftingen av elevenes strategier opp mot læreverkene kan det konkluderes med at de to analyserte læreverkene i ulik grad treffer den intuitive kunnskapen elevene sitter inne med. I Sirkel ser vi stor grad av variasjon i presentasjon av strategier for å løse oppgaver som omhandler prosent. Mange av de strategiene som blir presentert i Sirkel kan gjenkjennes i de skriftlige elevarbeidene fra kontekstoppgaven. I tillegg til dette legger læreverket stor vekt på å gi elevene oppgaver hvor de må reflektere over det matematiske konseptet, og oppgaver hvor elevene skal få innblikk i de numeriske relasjonene som inngår i det aktuelle temaet. Dermed kan det trekkes fram at læreverket vektlegger å gi elevene den typen kunnskap som gjennom studien er blitt beskrevet som *begrepsmessig- og relasjonell kunnskap* ((Skemp, 1976; Hiebert & Lefevre, 1986). Dette er den samme typen kunnskap som elevene viste gjennom sine intuitive modeller.

I Grunntall oppleves fokuset litt annerledes. Læreverket presenterer ferdige generaliserte formler for hvordan man kan løse oppgaver som omhandler ulike deler innenfor prosentregning. Det må understrekes at disse alltid presenteres i forbindelse med annet fagstoff, men fordi det trekkes fram som det siste i presentasjonen gir det inntrykket av at ¨dette er den enkleste måten å gjøre det på¨. Formlene som blir presentert er i tillegg i flere tilfeller vanskelig å knytte opp til den presentasjonen som er gitt. I forhold til elevenes strategier er det også vanskelig å gjenkjenne disse formlene uten å ha god erfaring med prosentbegrepet. Det kan tenkes at etter en lengre arbeidsprosess ville elevene klare å generalisere og se sammenhenger slik at de kunne kommet fram til formlene selv. Men da ville formlene basert seg på de relasjoner og oppdagelse som elevene selv har gjort gjennom arbeider, og dermed være et resultat av deres forståelse for konseptet. Når formlene derimot blir presentert direkte slik som de gjør i Grunntall, kan det være kritisk å ha forståelse for de sammenhenger og numeriske relasjoner som inngår. I tillegg er oppgavetypen som dominerer kapittelet oppgaver som ble kodet til oppgaver som er ment å gi elevene øving i en regneferdighet. Dermed trekkes konklusjonen mot at dette læreverket i hovedsak sikter på at elevene skal sitte igjen med en *instrumentell*- og *begrepsmessig forståelse* for det matematiske temaet.

8.2. Perspektiveringer

I arbeidet med denne studien har jeg oppdaget et mangfold av elementer som beriker min matematikkdidaktiske kunnskap, og som vil ha betydning for min undervisningspraksis.

Det første elementet som kan trekkes fram er innblikket jeg har fått i hvordan undervisningen kan bygge på elevenes intuitive kunnskaper gjennom at de får arbeide med kontekstbaserte oppgaver. Min oppfatning av dette, er at det gir mange styrker, både for elevene, men også for læreren. Gjennom å utforme og undervise gjennom slike oppgaver er det større mulighet for at man får tilpasset undervisningen og opplæringen til flest mulig elever. I tillegg til dette fører en slik type undervisning til at elevene sitter igjen med en bedre og dypere forståelse for de matematiske temaene.

I matematikkundervisningen er det viktig å hele tiden se koblinger opp mot andre matematiske temaer. Å kunne sette disse i sammenhenger og se relasjoner innad mellom ulike matematiske temaer, istedenfor at hvert emne blir behandlet isolert, gjør at det man lærer blir mer anvendbart. I tillegg vil man da ikke ha samme behov for å huske de enkelte algoritmene. Dette kan sees på som en didaktisk implikasjon. Gjennom å benytte seg av kontekster som har røtter i hverdagen, gir det elevene mulighet til å benytte seg av matematikken i situasjoner som er tett knyttet opp til deres virkelighet.

Referanser

Botten-Verboven, C., Maugesten, M., Bendiksen, V., Nilsen, G., Dalvang, T., Aigeltinger, R., . . . Ødegaard, P. (2010, 06 01). *Matematikk for alle, ... men alle trenger ikke kunne alt.* Oslo. Hentet fra Matematikk for alle, ... men alle behøver ikke kunne alt: https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/rapporter/2010/5/matematikk_for_alle2.pdf

Clarke, D., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 practical tips for making fractions come alive and make sense,. *Mathematics teaching in middle school*, ss. 372-380. Hentet fra https://www.acu.edu.au/__data/assets/pdf_file/0019/374032/MTMS_Clarke_Roche_and_Mitchell_Ten_practical_tips_for_making_fractions_come_alive.pdf

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Reaserch methods in education.* New York: Routledge.

Dole, S. (2000, November). Promoting Percent as a proportion in eight-grade mathematics. *School science and mathematics*(100), ss. 380-389. doi:10.111/j.1949-8594.2000.tb18180.x

Dunn, R., & Griggs, S. (2004). *Læringsstiler - grunnbok i Dunn og Dunns læringsstilmodell.* Oslo: Universitetsforlaget.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mthematics*(61), ss. 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Fangen, K. (2004). *Deltagende observasjon.* Bergen: Fagbokforlaget.

Fishbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving Verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in mathematics education, 16* (1), ss. 2-17. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/pdf/748969.pdf

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work, constructing fractions, decimals and percents.* Portsmouth: Heinemann.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education- China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), ss. 105-128. doi:10.1207/s15327833mtl0602_3

Gravmeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning, 2*, ss. 155-177. doi:10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravmeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics, 39*(1), 111-128. doi:10.1023/A:1003749919816

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The Effects Of Classroom mathematics teaching on students learning. I J. Hiebert, & D. Grouws (Red.), *Second handbook of research on mathematics Teaching and learning* (ss. 371-404). Charlotte, NC: Information Age. Hentet fra http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.405.3591&rep=rep1&type=pdf

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and Procedural knowledge: The cas og mathematics* (ss. 1-23). New York: Routledge.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., . . . Human, P. (1997). *Making Sense - teaching and learining mathematics with understanding.* Portsmounth: Heinemann.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Kristoffersen, L. (2006). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode.* Oslo: Abstrakt forlag.

Kunnskapsdepartementet. (2013a). *Utdanningsdirektoratet.* Hentet fra Læreplan i matematikk fellesfag. Kompetansemål etter 10. årstrinn: http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2013b). *Utdanningsdirektoratet.* Hentet fra Læreplan i matematikk fellesfag. Kompetansemål etter 7. årstrinn: http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese andUS mathematics textbooks: the case og fraction division. *Springer, 2009*(41), 809-826. doi:10.1007/s11858-009-0177-5

Lokus. (u.d.). Hentet fra Sirkel 8-10 elev: http://www.lokus.no/8-10/Sirkel-8-10.-Elev

Mack, N. (1990). Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*(VOL. 21), 16-32. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/pdf/749454.pdf

Mack, N. (1993). Learning Rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. I T. Carpender, E. Fennema, & R. Thomas (Red.), *Rational numbers: An integration of researsh* (ss. 85-105). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Nordtvedt, G. A., & Pettersen, A. (2016). Matematikk. I M. Kjærnsli, & F. Jensen, *Stø kurs- Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015* (ss. 107-135). Oslo: Uniersitetsforlaget. doi:10.18261/9788215027463-2016

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged porportion. *Review on educational research*(vol 65.), 421-481. doi:https://doi.org/10.3102/00346543065004421

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode- en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*(77(1)), ss. 20-26. Hentet fra https://ww.atm.org.uk/write/MediaUploads/Resources/Richard_Skemp.pdf

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Rewston: Corwin.

Tvete, K. (2006). Blir det gange eller dele her, lærer? (H. M. Johnsen, & N. Lindèn, Red.) *Stifinnerern- Tangenten, 17*(5), ss. 41-54. Hentet fra http://www.caspar.no/tangenten/stifinneren

Tvete, K. (2016). Multiplikative strukturer. *2. Kompendiet utlevert i forelesning*. (E. Alstad, Oppdatert) Levanger: Nord Universitetet.

Van den Heuvel-Panheuizen, M. (2002). Math education in Netherlands: A guidet tour. *Freudenthalinstitute CD-rom for ICME9*, ss. 1-32.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(9), ss. 9-35. doi:10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education, 2014*, 521-534. doi:10.1007/978-94-007-4978-8

Van der Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and middle school mathematics - teaching developmentally.* Harlow: Pearson.

Van Galen, F., Feija, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and propotions- a learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6.* Rotterdam: Sense Publisher.

Wæge, K., & Nosrati, M. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk.* Matematikksenteret - Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Hentet fra http://www.matematikksenteret.no/multimedia/3083/Sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk

Vedlegg 1: Informasjonsskriv vedrørende forskningsprosjekt i skolen

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjekt

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Elevers læring av matematikk.

NTNU

Hensikt og formål:

Gjennom min masteroppgave ved fakultetet for grunnskolelærer- og tolkeutdanning ved NTNU skal jeg undersøke hvorvidt en undersøkende og utforskende matematikkundervisning kan ha effekt på elevers læring i matematikkfaget. Hensikten med prosjektet er å avdekke om aktiviteter der elevene får utforske modeller kan føre til en formell kompetanse i regning med prosenter.

Hva innebærer deltakelse i studien?

En viktig del av studien innebærer å utprøve en planlagt undervisning. Denne undervisningen vil bli gjennomført i ordinær klasse. Deltakelse i studien innebærer at elevene vil bli observert av student i et visst antall undervisningsøkter der det er lagt opp til aktiviteter med utforskende matematikkundervisning. Observasjonen vil omhandle at det blir tatt lydopptak, notater, og i noen tilfeller lydopptak av deltakerne. I etterkant av undervisningsøktene kan det også bli aktuelt med elevintervju for å redegjøre for de observasjoner som er gjort. Disse intervjuene vil i så tilfelle bli gjennomført i grupper på 3-4 elever, og det vil bli tatt lydopptak av disse. Spørsmål i forbindelse med intervju vil omhandle undervisning av matematikk og den gjennomførte undervisningen.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Det vil ikke bli samlet inn andre personopplysninger enn alder og kjønn. Innhentet data vil behandles konfidensielt, og det vil derfor ikke være mulig å spore deltakere i prosjektet. Innhentet lyd vil sikres på passordbelagt pc gjennom prosjektperioden, og i etterkant av prosjektet vil innhentet data i form av lydfiler slettes. Innhentet data vil kun være tilgjengelig for studenten som gjennomfører prosjektet. Data som publiseres vil være anonymisert.

Prosjektet avsluttes 20.06.2017.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert. Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med:

Student	**Veileder**
Christine Vang	Heidi Dahl
Tlf: 92831234	Tlf: 735 59 819
	E-post: heidi.dahl@ntnu.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i forskningsprosjekt

Jeg har lest informasjonen, og er villig til at mitt barn deltar i forskningsprosjektet

Sted og dato: ___________________________________

Forelders/foresattes underskrift: ____

Tusen takk!

Vedlegg 2: Kvittering NSD

Heidi Dahl
Institutt for grunnskolelærerutd. 5-10 og bachelor i tegnspråk og tolking NTNU

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 24.10.2016	Vår ref: 50311 / 3 / IJJ	Deres dato:	Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 30.09.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

50311	*Å forbedre elevers matematiske kompetanse og ferdigheter gjennom arbeid med modeller i realistisk matematikkundervisning (RME)*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Heidi Dahl*
Student	*Christine Vang*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 20.06.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Ida Jansen Jondahl

Kontaktperson: Ida Jansen Jondahl tlf: 55 58 30 19

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 50311

INFORMASJON OG SAMTYKKE
I e-post 21.10.2016 opplyser studenten om at utvalget har blitt informert skriftlig og muntlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskrivet er godt utformet. Vi forutsetter at alle foreldre og barn har samtykket til å delta, dersom dette ikke er tilfellet, må skolen planlegge et alternativt opplegg for de som ikke deltar.

Merk at når barn skal delta aktivt, er deltagelsen alltid frivillig for barnet, selv om de foresatte samtykker. Barnet bør få alderstilpasset informasjon om prosjektet, og det må sørges for at de forstår at deltakelse er frivillig og at de når som helst kan trekke seg dersom de ønsker det.

INFORMASJONSSIKKERHET
Personvernombudet legger til grunn at student og veileder følger NTNU sine rutiner for datasikkerhet.

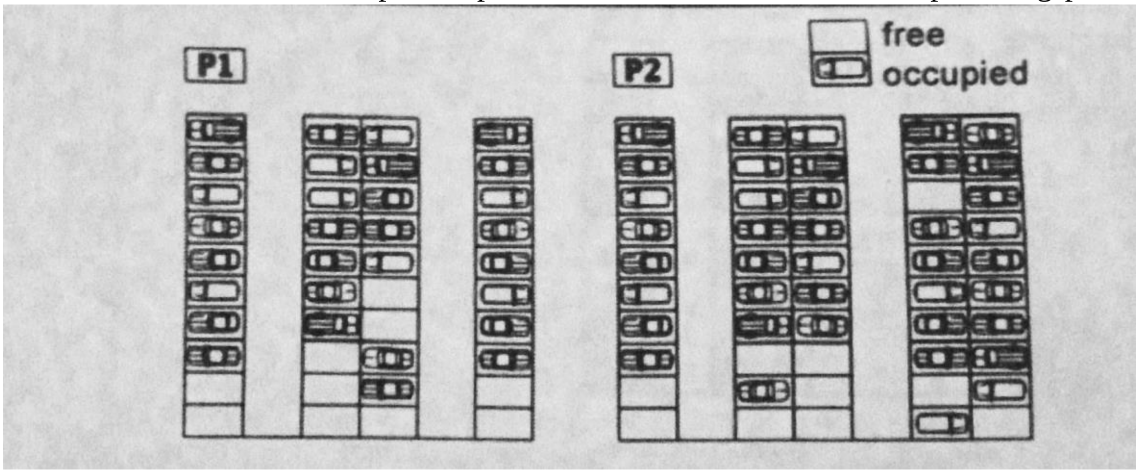
PROSJEKTSLUTT OG ANONYMISERING
Forventet prosjektslutt er 20.06.2017. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:
- slette direkte personopplysninger
- slette/omskrive indirekte personopplysninger
- slette digitale lyd-/bilde- og videoopptak

Vedlegg 3: Kontekstoppgaven: Parkeringsplassproblemet dag 1

Parkeringsplassproblemet dag 1

I Surreby har kommunestyret gått inn for å skape flere grønne arealer i sentrum. Dette betyr at flere områder i byen skal brukes til parker og aktivitetsområder. Per dags dato er det to store parkeringsplasser som befinner seg i sentrum. Disse to parkeringsplassene benyttes av de som arbeider i sentrum, og for besøkende. Nå er det bestemt at den ene parkeringsplassen skal gjøres om til aktivitetspark for byens innbyggere. Bystyret bestemmer seg for at de vil beholde den parkeringsplassen som på dagtid er mest full.

1) P1 og P2 er parkeringsplassene i Surreby. De har ulikt antall plasser, og på en vanlig dag er det ulikt antall biler som står parkert på hver av dem. Sammenlikn de to parkeringsplassene.



P1

Antall plasser____________

Ledige plasser___________

Antall plasser i bruk oppgitt som brøk_____________________

Antall plasser ledig oppgitt som brøk_____________________

P2

Antall plasser____________

Ledige plasser___________

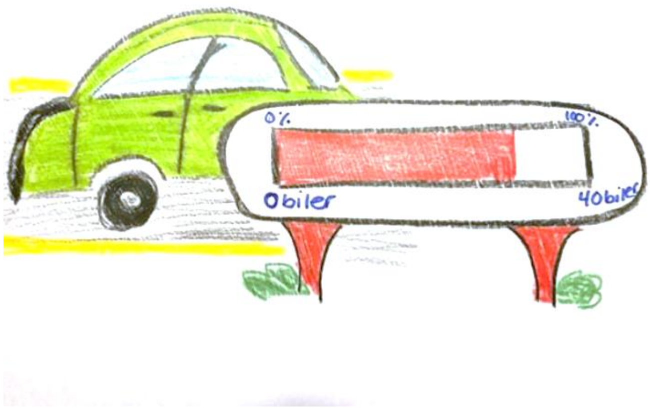
Antall plasser i bruk oppgitt som brøk_____________________

Antall plasser ledig oppgitt som brøk_____________________

Bruk den informasjonen dere har funnet og vis ved hjelp rektanglene under hvilken av parkeringsplassene som er mest fylt opp.

Vedlegg 4: Kontekstoppgaven: Parkeringsplassproblemet dag 2

Dag 2: parkeringsplassproblemet



Det blir satt opp en måler på hver av parkeringsplassene. Målerne forteller hvor stor prosentandel av parkeringsplassen som er i bruk. Hvis måleren er helt rødt betyr det at hele parkeringsplassen er i bruk, mens hvis måleren er halvveis rødt betyr det at parkeringsplassen er halvfull. Bystyret vil finne ut hvilken av de to parkeringsplassene som i løpet av en arbeidsdag mest full. De sjekker begge parkeringsplassene 2 ganger.

Første gang parkometeret sjekkes er klokken 10.00. På parkeringsplass P1 er det da 32 biler, mens på P2 er det 42 biler. Neste sjekk er klokken 14.00. Da er det 24 biler på P1, og på P2 er det 30 biler. Ut fra opplysningene, hvilken av de to parkeringsplassene bør Surreby beholde som parkeringsplass?

Vedlegg 5: Kontekstoppgaven: Parkeringsplassproblemet dag 3

Dag 3: Parkeringsplassproblemet

Ordføreren i Surreby går inn for å beholde P2. de bestemmer også at parkeringsplassen skal utvides med 30 plasser. En dag etter at de har utvidet parkeringsplassen viser måleren at den er 90 % full.

Hvor mange bilder står det da på parkeringsplassen?

Vedlegg 6: Etterarbeidoppgaver.

Oppgave 1: Martin skal kjøpe sin første bil. Han har funnet en bil han vil kjøpe som koster 15 000 kr. Martins pappa sier han vil hjelpe til å betale, og tilbyr seg å betale 35% av bilens kostnad. Hvor mye av bilen betaler pappa?

Bestefar vil også hjelpe Martin, han betaler 3600, hvor mange prosent av prisen på bilen utgjør dette?

Oppgave 2: En leverposteiboks veier 150 g. Den inneholder 29% lever. Hvor mange gram lever inneholder boksen?

Oppgave 3: Markus skal kjøpe seg ny jakke. Den koster opprinnelig 500 kr. Når Markus skal betale får han 70 kroner avslag. Hvor mange prosent avslag får Markus?

Oppgave 4: Ola fikk 360 kroner av Nils, det var 40 prosent av alt det Nils var skyldig Ola. Hvor mye var Nils skyldig i a