Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Astrid Varhol

"Jeg hadde aldri fått til dette om jeg skulle gjort det alene"- Å lære gjennom samtale

En observasjonsstudie av 8. klasseelevers arbeid med å løse en generaliseringsoppgave i matematikk i en gruppesituasjon

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5-10
Veileder: Ove Gunnar Drageset
Trondheim, mai 2017

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Astrid Varhol

"Jeg hadde aldri fått til dette om jeg skulle gjort det alene"- Å lære gjennom samtale

En observasjonsstudie av 8. klasseelevers arbeid med å løse en generaliseringsoppgave i matematikk i en gruppesituasjon

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5-10
Veileder: Ove Gunnar Drageset
Trondheim, mai 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Dette forskningsprosjektet setter et punktum på min femårige lærerutdanning ved NTNU i Trondheim. Utdanningen har gitt meg en solid matematikkdidaktisk bakgrunn som jeg ser frem til å videreføre til egen praksis i fremtidig arbeid i skolen.

I forbindelse med denne masteroppgaven vil jeg rette en stor takk til min veileder Ove Gunnar Drageset. Takk for stadig konstruktive tilbakemeldinger og gode råd. Din kunnskap har bidratt til å få frem potensialet til denne oppgaven på en måte jeg på forhånd ikke kunne ha forestilt meg.

Jeg vil også takke mine medstudenter, spesielt min kompanjong på nabokontoret, for alle faglige og ikke-faglige samtaler, motivasjonsbooster og gode råd. Og for å bare være i samme båt.

Til slutt vil jeg takke mine nærmeste for støtten jeg har fått gjennom dette året, og for å alltid ha troen på meg.

Astrid Varhol

Trondheim, mai 2017.

INNHOLDSFORTEGNELSE

FIGUROVERSIKT

TABELLOVERSIKT

VEDLEGG

1.0. Innledning

1.1. Bakgrunn for oppgaven, hensikt og forskningsspørsmål

”Mange husker matematikktimene som timer i stillhet regnende i oppgaveboka” skrev Kari Aamli i en artikkel for HiOA 03.02.2015. Litt senere samme året publiserte Aamli en ny artikkel for forskning.no, hvor den samme problematikken var tema. Her ble det skrevet at ”matematikk blir fort et fag der elevene blir sittende og regne oppgaver for å øve seg til nasjonale prøver”. I begge artiklene vises det til forskning av Kleve og Solem (2014) som fremhever hvor viktig det er at elever får uttrykt seg muntlig i matematikkfaget. Her står det blant annet at ”elever ikke lærer å tenke om de ikke blir bedt om å uttrykke tankene sine”.

Også Barnes (2008) skriver at en effektiv måte å arbeide med forståelse i matematikk på, kan være gjennom samtale. Dette fordi den fleksibiliteten man har ved å bruke språket, kan være til hjelp både for å sette ord på egne tanker, og for å prøve ut ulike måter å fremstille sin kunnskap på. Han skriver videre at når elever diskuterer og arbeider i små grupper, kan dette føre til at en større andel av elevene er aktive muntlig. Dette mener også Säljö (2001), som sier at når elever arbeider sammen om utforskende oppgaver i matematikktimene, og bruker språket som verktøy, kan dette bidra til at elevene lærer av hverandre. Gjennom språklig aktivitet re-presenterer elevene problemet for seg selv og for resten av gruppa, noe som igjen kan føre til felles innsikt i problemet. Å ha evne til å samarbeide er også en egenskap som verdsettes i den generelle delen av den norske læreplanen. I læreplanen omtales *det samarbeidende mennesket* som en mennesketype som skal bidra til at evner og identitet utvikles i samspill med andre (Utdanningsdirektoratet, 2015).

Basert på det som kommer frem i Aamlis artikler fra 2015, er det interessant å se dette opp mot den norske læreplanen for matematikk fellesfag. Her står det nemlig at det i matematikkfaget skal legges opp til og arbeides med muntlige ferdigheter på lik linje med andre fag i grunnskolen. Dette innebærer blant annet at elever kan ”gjøre seg opp en mening, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både et uformelt språk, presis fagterminologi og begrepsbruk. Det vil si å være med i samtaler, kommunisere ideer og drøfte matematiske problemer, løsninger og strategier med andre” (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4). Når man leser dette, kan man få inntrykk av at læreplanens formål ikke samsvarer med hvordan matematikkfaget blir praktisert ute i skolen.

Ut fra egen skolegang i norsk grunnskole, en femårig lærerutdanning med årlige praksisperioder gjennom NTNU, og vikartimer på både barneskoler og ungdomsskoler ulike steder i landet, har også jeg erfart at fokuset på muntlige ferdigheter i matematikk i mange tilfeller dessverre nedprioriteres til fordel for individuell oppgaveløsning, ofte rett fra læreboka. Siden muntlige ferdigheter i matematikkfaget blir fremmet i den norske læreplanen, ser jeg det som interessant å finne ut mer om hvordan kommunikasjonen foregår mellom elevene i matematikklasserommet. Dersom god kommunikasjon i matematikkfaget kan bety bedre forståelse og større engasjement i læreprosessen, og dermed være med på å bedre læringsresultatet i faget (Botten, 2016), er det viktig å være klar over og forstå *hvordan* kommunikasjonen foregår. Det å få innblikk i samtaler som utspiller seg mellom elever i matematikkfaget, kan også være et nyttig verktøy for å kartlegge elevers faglige nivå, og å avdekke eventuelle utviklingsområder blant elevene. I tillegg til å kunne si noe om kvaliteten på dialogene som forekommer mellom elevene. Med dette som utgangspunkt, stiller jeg følgende forskningsspørsmål:

Hvordan samarbeider og diskuterer elever på 8. trinn seg frem til løsninger på en matematisk generaliseringsoppgave i en gruppesituasjon?

Utgangspunktet for undersøkelsen er elever på 8. trinn, og det matematiske temaet er generalisering, som innebærer evnen til å se det generelle i det spesielle (Mason, 1996). Flere matematikkforskere sier at å arbeide med generalisering av voksende figurative mønster er en effektiv metode for innlæring av algebra (utdypes i kapittel 2.2.) Blant annet sier Mason (1996) at generalisering er nøkkelen i prosessen til en underliggende dyp forståelse av algebra. Formålet med dette forskningsprosjektet er å undersøke og å tilegne meg kunnskap om hvordan elever som arbeider med en generaliseringsoppgave i en gruppesituasjon, setter ord på egne tanker og ideer, kommer opp med ulike strategier og løsninger på det matematiske problemet, og hvordan elevene diskuterer og argumenterer rundt de aktuelle løsningene.

Jeg vil med denne studien derfor undersøke hvordan samtaler mellom elever fungerer når man beveger seg bort fra det vanlige kommunikasjonsmønsteret i klasserommet med ordinær tavleundervisning, og heller baserer undervisningen på arbeid i små grupper i et undersøkende læringslandskap (Alrø & Skovsmose, 2002). Kan det være slik at om man lar elever arbeide sammen i grupper med muntlig og utforskende oppgaveløsning, så kan dette være med på å styrke matematikkundervisningen og skape et større engasjement i læreprosessen? Kan det å arbeide med matematikk på denne måten være med på å skape mer læring og å heve læringsresultatene i faget? Og kan det å ta i bruk denne arbeidsformen fungere som et hjelpemiddel for lærere for å kartlegge elevers faglige nivå? Dette er spørsmål jeg gjennom denne studien ønsker å tilegne meg mer kunnskap om, for videre å kunne ta med meg inn i læreryrket og fremtidig arbeid i skolen.

1.2. Oppgavens oppbygging

Denne oppgaven er bygd opp av seks overordnede kapitler. I påfølgende kapittel vil oppgavens teoretiske rammeverk bli presentert. Her blir det tatt utgangspunkt i tidligere forskning for å kunne gi leseren et bilde av det litteratur- og teorigrunnlaget oppgaven er forankret i. Videre presenteres oppgavens metodekapittel, som beskriver de forskningsmetodiske valgene jeg har stått ovenfor i prosessen, fra ide til gjennomført studie. Disse valgene vil også bli drøftet slik at en leser selv kan vurdere forskningens gyldighet ut fra de metodene som er valgt og benyttet. I kapittel 4 presenteres og analyseres sentrale utdrag fra elevdialogene. Oppgavens analysekapittel er bygd opp av tre underkapitler: Analyse av matematikken, analyse av samtalene, og til slutt en sammenbinding av disse. En gjennomgående grundig analyse i alle de tre underkapitlene, vil kunne gi leseren et godt innblikk i hvordan elevenes samtaler utartet seg, og hvordan elevene diskuterte og samtalte for å generere løsninger på generaliseringsoppgaven. I kapittel 5, oppgavens diskusjonsdel, vil funnene som har kommet frem i analysekapitlet bli drøftet opp mot oppgavens teoretiske forankring. Avslutningsvis vil det bli presentert en konklusjon, hvor jeg svarer på oppgavens forskningsspørsmål basert på resultater fra analyse og drøfting. Her vil det også bli tatt opp forslag til videre arbeid innen forskningsfeltet.

2.0. Teoretisk rammeverk

2.1. Figurmønster og generalisering

Figurmønster er noe som er representert med noen påfølgende geometriske konfigurasjoner oppstilt på linje, der utviklingen tenkes å fortsette i det uendelige. Algebraisk generalisering av et figurmønster betyr dermed å finne et matematisk uttrykk for det generelle elementet i tallfølgen som er avbildet gjennom figurmønsteret (Måsøval, 2011). Innen generalisering av figurmønster skilles det ofte mellom to vesentlige begreper, eksplisitt og rekursiv løsning (Mason, 1996). Rekursiv løsning innebærer å finne en lokal regel, og å gjenkjenne og bruke elementer og endringer fra tidligere i mønsteret, for å finne det neste i rekken (Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Mason, 1996). Eksplisitt løsning går derimot ut på å oppdage et mønster som fører til en direkte formel som alltid vil fungere for hvilket som helst nummer i rekken (Mason, 1996).

Det å uttrykke generalitet er en helt naturlig og givende del av hvordan vi som mennesker gir mening til verden rundt oss. Algebra gir oss et forråd av symboler som vi kan håndtere, og et språk for å uttrykke og behandle det generelle. Den pedagogiske kjernen bak dette blir altså å la elever ta i bruk de naturlige styrkene i algebraen, både for å forstå verden, men også for å gi mening til andres bruk av algebra (Mason, Graham, & Johnston-Wilder, 2014).
Mason (1996) definerer algebraisk tenking som det å identifisere likheter og forskjeller, gjøre antakelser, og å gjenta, klassifisere, organisere og merke seg mønstre og sammenhenger. Han skriver også at generalisering er nøkkelen i prosessen til en underliggende dyp forståelse av algebra. Både Mason, Radford og Lee ser på det å uttrykke generalitet som en sentral aktivitet i arbeidet med algebra i skolen. Innenfor dette tema finnes det ingen uenigheter eller motsetninger blant forskernes synspunkter.

2.2. Læring av algebra gjennom generalisering

Det finnes mange ulike måter å se på algebraisk tenking på. Likevel er mange matematikkforskere enige om at generalisering – evnen til å se det generelle i det spesielle (Mason, 1996) er fundamental, og kan sees på som en hjørnestein i matematikkfaget (Wilkie, 2016). En typisk brukt tilnærming for å introdusere algebra i grunnskolen, er å utforske figurmønster ved å identifisere hva som går igjen i mønstrene, og å uttrykke disse mønstrene som funksjoner eller algebraiske uttrykk (Lannin, 2005; Radford, 2010; Wilkie, 2016).

Radford (2010) skriver i sin artikkel at en typisk måte å introdusere algebra for elever, er å arbeide med figurmønster, da dette handler om å bruke symboler til å tenke på en særegen måte. Og at dette mer eller mindre er selve hovedessensen i algebra. Lannin (2005) mener at det å bruke figurmønster i innlæringen av algebra, skaper en kontekst hvor elever må generalisere en eller flere regler som videre kan brukes til å fastslå andre spesifikke forekomster av figurmønster. Dette er også Wilkie (2016) enig i, som sier at generalisering av numeriske situasjoner blir sett på som et hjelpemiddel i overgangen til en mer formell algebra. I tillegg kan det å arbeide med algebra gjennom generaliseringsoppgaver hjelpe elever til å se sammenhenger i symbolske representasjoner, samt å løfte elevenes aritmetiske kunnskaper.

Felles for alle disse matematikkforskernes begrunnelser for hvorfor figurmønster er en typisk innfallsvinkel ved læring av algebra, er at det fremmer algebraisk tenkning og at utvikling i algebraisk tenkning videre vil kunne hjelpe elevene på veien mot en mer formell algebra. De sier også at generalisering av voksende figurative mønster er en hjørnestein i matematikken, noe som også kommer frem i dette sitatet av Blanton og Kaput (2011, s. 7), "the heart of algebraic thinking is building, expressing, and justifying mathematical relationships, or generalizations". Også den norske læreplanen for matematikk fellesfag har fokus på læring av algebra gjennom generaliseringsaktiviteter. Her står det skrevet at "algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall. Det gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger" (Kunnskapsdepartementet, 2013).

2.3. Kategorier innenfor algebra og generalisering

Kieran (2004) skriver at hovedelementene i skolealgebra innebærer problemløsning, modellering og generalisering av numeriske og figurative mønster. Basert på dette skiller Kieran (2004) mellom tre ulike algebraiske aktiviteter i skolen, *genererende, transformerende* og *resonnerende* aktiviteter. Genererende aktiviteter (generational activities) går ut på å skape uttrykk og likninger, noe hun omtaler som selve objektene av algebraen. Man kan arbeide med genererende aktiviteter på ulike måter. Dette innebærer blant annet arbeid med likninger med ukjente eller variabler som representerer en problemsituasjon. Det innebærer også å arbeide med, og å finne uttrykk for voksende figurative mønstre eller numeriske følger, samt arbeid med styrende regler for numeriske forhold (Kieran, 2004). Transformerende aktiviteter (transformational activities) innebærer å samle like uttrykk, utvide, faktorisere, løse ligninger og ulikheter og å forenkle uttrykk. Transformerende aktivitet innebærer de regnetekniske prosessene i algebra, og omtales ofte som en «regel-basert» aktivitet (Kieran, 2004). Resonnerende aktiviteter (global/meta-level activity) innebærer problemløsning, gjenkjenne mønster og endringer i mønster, argumentere, bevise, gjøre antakelser og å lete etter forhold og strukturer. Innenfor resonnerende aktiviteter skal det være mulig å generere svar uten å bruke formell algebra. Det er heller ikke én bestemt måte å komme frem til svaret på. Innen denne kategorien handler det like gjerne om å avdekke et problem eller å vurdere et svar, som å faktisk finne et svar (Kieran, 2004).

Lee (1996) omtaler også algebraisk generalisering som en sentral aktivitet i matematikkfaget. Lee har gjennom sin forskning utarbeidet en nivåinndeling for elevers arbeid med generalisering gjennom figurmønster. Nivåene er kalt: oppfattelsesnivå, verbaliseringsnivå og symboliseringsnivå. Oppfattelsesnivået sier noe om hvordan elever tolker oppgaven, og hvordan de oppfatter mønsteret. Dette legger føringer for eventuelle hindringer som kan forekomme videre i elevenes generaliseringsarbeid. Med verbaliseringsnivå mener Lee (1996) elevenes evne til å gi en verbal fremstilling av det aktuelle figurmønsteret. Det er ofte en glidende overgang fra oppfattelsesnivå til verbaliseringsnivå. Dette kan man se ved at elevene går fra å bruke hverdagsspråk til et mer matematisk språk hvor de benytter seg av tallsymboler. Symboliseringsnivå innebærer at elevene kan uttrykke en formell løsning med en eller flere variabler, ofte uttrykt med bokstaven n. Dette kan fremstilles både rekursivt og eksplisitt, avhengig av oppgaven (Lee, 1996)

Også Radford (2010) beskriver generalisering av figurmønster som en overordnet aktivitet for innlæring av algebra. Men tross dette, mener han likevel at *all* generalisering ikke kan karakteriseres som algebraisk. Ved å bruke generalisering som en metode for å nærme oss algebraisk forståelse, har vi som lærere et ansvar for å ikke forveksle algebraisk generalisering med andre måter å uttrykke det generelle på. I likhet med Lee (1996), har også Radford (2010) ut fra sin forskning utarbeidet en karakteristisk nivådeling for algebraisk generalisering. Forskjellen er at Radford (2010) deler elevenes løsningsstrategier i to overordnede nivå, aritmetisk generalisering og algebraisk generalisering. Aritmetisk generalisering består av praktiskbaserte løsningsstrategier, mens algebraisk generalisering består av tre underkategorier basert på grad av generalisering.

Radfords første generaliseringsnivå innebærer å være i stand til å identifisere kjennetegn og fellestrekk i et gitt mønster. Dette nivået går også ut på å legge merke til lokale likheter mellom enkelte elementer i et mønster, uten å være i stand til å bruke denne informasjonen til å gi et eksplisitt uttrykk for ethvert element (Radford, 2010). På dette nivået baserer elever ofte sine løsningsstrategier på prøving og feiling samt andre gjette-strategier. Dette fører ikke til algebraisk resonnering, og blir dermed kalt aritmetisk generalisering eller ikke-algebraisk generalisering, i følge Radford (2010). Dette ligner også det Weingarden, Heyd-Metzuyanim og Nachlieli (2016) beskriver som et lavt nivå av algebraisk tenkning, som innebærer at elever kun er i stand til å memorere og reprodusere fakta som allerede er gitt.

Radfords (2010) andre generaliseringsnivå går ut på å utarbeide generelle regler for hvilket som helst tall, gjennom å identifiserte de generelle objektene i figurmønsteret. Dette karakteriseres som algebraisk-generalisering. For at generalisering av figurmønster skal kunne kalles algebraisk, innebærer det at elementene som er identifisert og generalisert, kan plasseres inn i et skjema, dvs. å kunne generere regler som gir et uttrykk for hvilket som helst nummer i rekken av figurmønsteret, altså en eksplisitt løsning. Radford (2010) deler algebraisk-generalisering inn i tre nivå: *faktabasert, kontekstbasert og symbolsk generalisering.*

I *faktabasert generalisering* er de generelle objektene i mønsteret ikke anerkjent eller navngitt, men implisitt, da de kan komme til uttrykk gjennom handlinger som gestikulering, ord eller fakter. Faktabasert generalisering er en måte å beregne konkrete tilfeller av en variabel på. Løsninger elever genererer på nivået faktabasert generalisering, danner råstoffet innen algebraisk resonnering, da kategorien også blir kalt fremvoksende algebraisk resonnering. Det som skjer på dette nivået, kan bidra til at det senere skjer utvikling innenfor et høyere nivå av algebraisk generalisering.

Ut fra Radford (2010) sin forskning, er de generelle objektene i figurmønsteret uttrykt språklig eksplisitt både innen kontekstbasert og symbolsk generalisering. *Kontekstbasert generalisering* innebærer kontekstuelle referanser til variablene i figurmønsteret, f.eks. en blanding av matematiske symboler og begreper gjennom naturlig språk. De generelle objektene i mønsteret beskrives ofte som for eksempel ”det neste tall” eller ”den øverste rekken” o.l. *Symbolsk generalisering* innebærer at generaliteten er uttrykt gjennom algebraens alfanumeriske semiotiske system. Innenfor symbolsk generalisering, skriver Radford (2010) at elevene er i stand til å beskrive regelen og uttrykke den med symboler, og/eller å kunne beskrive regelen for hvilket som helst tall med en full symbolsk ligning. Dette innebærer at elevene kan bruke eksplisitt tilnærming i tillegg til å kunne beskrive løsningen for hvilken som helst figur med ord.

Det finnes flere likheter blant de tre teoretikernes kategoriske inndeling av algebraisk aktivitet. På tross av at Kieran (2004) sin inndeling gjelder algebra generelt og Lee (1996) og Radford (2010) mer spesifikt tar for seg generalisering som tema, kan førstnevnte på noen måter sammenlignes med sistnevntes generaliseringsnivå. Lee (1996) og Radford (2010) sine rammeverk kan dermed plasseres under Kieran (2004) sin genererende aktivitet, da denne kategorien innebærer generalisering av figurmønster. Under Kieran (2004) sin kategori for resonnerende aktivitet, kan man plassere Lee (1996) sitt oppfattelsesnivå og Radford (2010) praktiskbaserte nivå, da man innenfor begge disse nivåene kan generere svar på oppgaver uten å bruke formell algebra. Videre kan man se generaliseringsnivåene til Lee (1996) og Radford (2010) opp mot hverandre. Disse bygger på mange av de samme prinsippene, da begge er basert på en nivåinndeling av elevers utvikling av løsninger ved arbeid med generaliseringsoppgaver. Lee (1996) sitt oppfattelsesnivå sammenligner jeg med Radfords (2010) praktiskbaserte ikke-algebraiske nivå. Det symbolske nivået til Lee (1996) ser jeg også på som likestilt med Radford (2010) sitt symbolske nivå. Forskjellen mellom de to matematikkforskernes generaliseringsnivå, er at Radford (2010) sitt faktabaserte og kontekstbaserte nivå, kan ses på som en todeling av Lee (1996) sitt verbaliseringsnivå. Dette fører til at fremstillingen av elevers løsninger basert på generaliseringsnivå blir mer detaljert ut fra Radfords (2010) inndeling. Derfor velger jeg i dette forskningsprosjektet å studere elevers generaliseringsarbeid med utgangspunkt i Radfords (2010) fire generaliseringsnivå.

2.4. Noen utfordringer

Selv om generalisering av figurmønster er mye brukt i innlæring av algebra i grunnskolen, er det likevel noen utfordringer å ta hensyn til. Tidligere undersøkelser og forskningsprosjekter av blant annet Lee (1996), Wilkie (2016) og Warren og Cooper (2007) har vist at elever ofte finner det vanskelig å se og uttrykke sammenhenger i voksende figurative mønster. Her er det spesielt språket som viser seg å være et utfordrende område. Elever viser ofte manglende matematiske språkferdigheter for å kunne sette ord på og beskrive sammenhengene de ser. Mange elever viser også manglende evne til å visualisere figurmønster, uttrykke generalisering med naturlig språk, og å konvertere mønster inn i tabeller med verdier og se etter sammenhenger (Warren & Cooper, 2007). Også Lee (1996) uttrykker gjennom sin forskning at generaliseringsaktiviteter blant elever ikke bare er problemfrie. Gjennom sin forskning har hun identifisert utfordringer på alle de tre generaliseringsnivåene. Hun skriver at både på oppfattelsesnivå, verbalt nivå, og symbolsk nivå, oppstår det hindringer når elever skal gi et muntlig uttrykk for mønsteret, eller ved bruk av n for å uttrykke variabelen i det gjentatte figurative mønsteret.

2.5. Ulike representasjoner

Algebraisk resonnering innebærer forståelse av matematiske og aritmetiske sammenhenger. Disse sammenhengene uttrykkes gjennom språk, handlinger og bruk av ulike representasjoner og konkreter (Warren & Cooper, 2007). «Multiple representations can be a powerful tool to facilitate students' understanding. The process of problem posing and solving that happens around the representations can foster mathematical learning» (Tripathi, 2008, s. 444). Dette sitatet poengterer at læring og forståelse kan skje ved gjengivelse av kunnskap gjennom ulike representasjonsformer. Det å legge merke til og å uttrykke generelle objekter i voksende figurative mønster kan være relatert til algebraisk tenkning mediert av ulike representasjoner. Det å bevege seg mellom ulike typer representasjonsformer, kan hjelpe elever med å forstå matematiske ideer. Noe som blir sett på som grunnleggende for elevers utvikling av å forstå fleksibiliteten av samspillet mellom de ulike representasjonene (Wilkie, 2016).

Å uttrykke seg visuelt gjennom tegninger eller figurer, er en vesentlig faktor innen problemløsning som kan bidra til at elever ser sammenhenger og kan utarbeide løsninger på problemer. Visualisering kan også bidra til utvikling som fører til at elevene tenker på et høyere og mer abstrakt nivå (Tripathi, 2008). «Visualization is being recognized as a key component of reasoning, problem solving and even proving» (Arcavi, 2003 i Tripathi 2008, s.441)

2.6. Forståelse

Tidligere har flere forskere vært inne på ideen om å dele forståelsesbegrepet i to. Å skille mellom ferdighet og forståelse er trolig den mest anerkjente måten å dele dette begrepet på i følge Hibert og Lefevre (1986). Skemp (1976) er blant annet en av de som skiller mellom *instrumentell* og *relasjonell* forståelse. Instrumentell forståelse innebærer å lære seg noe, uten å vite hvorfor. F.eks. at en elev kan regne ut arealet av et rektangel fordi en vet at formelen er lengden multiplisert med bredden. Men utover dette er ikke eleven i stand til å si noe mer om hvorfor det blir slik. Slike tilfeller omtaler Skemp (1976) som ”rules without reasons”, og skriver videre at dersom man har instrumentell forståelse for noe, memorerer man ulike metoder og lærer seg hvilke problem de fungerer for og hvilke de ikke fungerer for. Skemp (1976) nevner også tre grunner for at lærere underviser instrumentelt. Disse er 1) det er enklere å forstå, 2) belønningen er mer umiddelbar og innlysende, 3) på grunn av at det er mindre kunnskap involvert, er sjansene større for at man raskere kommer frem til et svar.

Relasjonell forståelse derimot, krever at man legger ned en større innsats i innlæringen, og innebærer mer kunnskap om hva man gjør og hvorfor. Skemp (1976) beskriver fire vesentlige fordeler ved å undervise relasjonelt. Disse er 1) kunnskap man har relasjonell forståelse for er enklere å ta i bruk for å løse nye oppgavetyper, 2) selv om det innebærer en mer krevende innlæringsprosess blir det desto enklere å huske, 3) relasjonell forståelse kan effektivt fungere som et mål i seg selv, 4) relasjonell forståelse skaper interesse for å tilegne seg mer kunnskap, for å forstå hvordan ting henger sammen, og for videre utforsking. På bakgrunn av dette mener Skemp (1976) at ikke noe annet enn relasjonell forståelse bør være tilstrekkelig for en lærer som underviser i matematikk. Dersom vi utvikler en relasjonell forståelse i matematikk, medfører dette at elever opplever relasjoner og strukturer i matematikkfaget som mer interessante. Når elever skal utvikle sin algebraiske tenkning, er det i følge Skemp (1976) disse strukturene og relasjonene det må arbeides med.

I likhet med Skemp (1976) har også Hibert og Lefevre (1986) kommet frem til en todeling av forståelsesbegrepet. De skiller mellom *begrepsbasert* og *prosedyrebasert* matematisk forståelse. Begrepsbasert forståelse er kunnskap som er rik på forhold, og kan betraktes som et sammensett nettverk av kunnskap, hvor relasjoner gjennomsyrer de enkelte fakta og proposisjoner slik at alle deler av informasjonen er knyttet til et nettverk. Utviklingen av begrepsbasert forståelse oppnås ved å skape forhold og relasjoner både mellom allerede ervervet kunnskap, og ny informasjon (Hibert & Lefevre, 1986). Prosedyrebasert forståelse består i følge Hibert og Lefevre (1986) av to elementer. Den ene delen består av formelt språk og symbolske representasjonssystemer. Den andre delen består av trinnvise instruksjoner, algoritmer og regler for å løse matematiske oppgaver. Et nøkkelelement i prosedyrebasert forståelse er at oppgavene er utført via en strukturert forutbestemt lineær sekvens. Matematisk kunnskap i sin fulle betydning, inneholder betydelige og grunnleggende forhold mellom begrepsbasert og prosessbasert forståelse og kunnskap skriver Hibert og Lefevre (1986). Elever er ikke fullstendig kompetente i matematikk om ikke begge de to forståelsestypene er ervervet, men forblir separate enheter. I tilfeller hvor elever ikke har utviklet fullstendige koblinger mellom de to forståelsestypene, kan man likevel oppleve at elevene har en god intuitiv forståelse for matematikk, og at de er i stand til å generere svar på oppgavene, men at de likevel ikke er i stand til å forstå *hva* de gjør (Hibert & Lefevre, 1986).

Spørsmål om hvordan elever lærer matematikk, og spesielt hvordan det legges opp til læring i matematikkundervisningen, byr på spørsmål rundt hvilken type forståelse som er best egnet, eller hva som kan være en passende balanse mellom dem. Det finnes forskjeller mellom Skemp (1976) og Hibert og Lefevre (1986) sine inndelinger av forståelsesbegrepet. Mens Skemp (1976) sier at relasjonell forståelse er bedre egnet enn instrumentell forståelse, sier Hibert og Lefevre (1986) at begge typene av forståelse er nødvendig for å kunne tilegne seg tilstrekkelig kunnskap om et tema. Selv om de to teoriene bygger på den samme ideen om å dele forståelse i to retninger, kan en likevel ikke si at instrumentell forståelse er det samme som prosedyrebasert forståelse, og at relasjonell forståelse er det samme som begrepsbasert forståelse. Et interessant element som Hibert og Lefevre (1986) bidrar med i denne todelingen av forståelsesbegrepet, er å se på de to typene som utfyllende, og ikke som rett eller galt, som Skemp (1976) uttrykker i sin forskning.

2.7. Kommunikasjon og muntlige ferdigheter

Muntlige ferdigheter er en forutsetning for utforskende samtaler hvor det skapes og deles kunnskap i samhandling med andre mennesker (Utdanningsdirektoratet, 2015). I følge Botten (2016) er kommunikasjon i matematikk svært viktig, da faget i stor grad handler om å formulere hypoteser, argumentere, og å finne strategier for å løse problemer. Videre skriver han at kommunikasjon har stor betydning både ved innlæring og anvendelse av faget matematikk. God kommunikasjon kan bety bedre forståelse og større engasjement i læreprosessen, og dermed være med på å bedre læringsresultatet i faget. Ved å legge opp til læringssituasjoner hvor elever er aktive språkbrukere, hvor de lærer å ta i bruk begreper og å kommunisere med lærere og andre elever, vil elever i større grad kunne utvikle eierskap til kunnskapen, da den tilegnes gjennom aktivitet og handling. Bottens (2016) ideer kan også sees opp mot det Barnes (2008) sier om at å reflektere i matematikkfaget innebærer at elever tar ansvar for å finne sammenhenger og eksempler, stille spørsmål, tolke erfaringer, og søke etter nye teknikker og nye måter for å forstå det aktuelle problemet på.

Også Chapin, O`Connor og Anderson (2013) mener at samtaler og kommunikasjon er viktige elementer ved læring av matematikk. De skriver at samtale blant annet kan bidra til at elever setter ord på egne tanker og lærer seg å lytte til andre og å ta til seg andres ideer. Å øke mengden samtaler i klasserommet er ikke et mål i seg selv, men heller det å øke mengden samtaler av høy kvalitet. Slike samtaler omtaler de som *produktive matematikksamtaler*.
For at en matematikksamtale skal kunne defineres som produktiv, må det matematiske tema og pensum som elevene skal gjennom ha et sentralt fokus. Produktive matematikksamtaler bør være tett integrert i innholdet i den øvrige undervisningen, og ikke opptre som isolerte samtaler med lite tilknytning til det som ellers skjer i klasserommet. Produktive matematikksamtaler skal også bidra til å hjelpe enkeltelever i å klargjøre og dele sine tanker, og videre kunne hjelpe elever med å orientere seg mot andre elevers tenking. Samtalene skal også hjelpe elever med å utvikle sin egen evne til resonnering, og bidra til at elever engasjerer seg i hvordan andre tenker og resonnerer (Chapin et al., 2013).

Barnes (2008) mener også at å samtale er en effektiv måte å arbeide med forståelse på. Dette fordi den fleksibiliteten man har ved å samtale, legger til rette for å prøve ut nye løsningsstrategier, og å endre dem undervis om man finner de utilstrekkelige. Barnes (2008) omtaler en samtaletype i forbindelse med muntlig læring av matematikk, som han kaller exploratory talk, eller *utforskende samtale*. Slike samtaler forekommer som regel på et tidlig stadium, hvor elever arbeider med nye tanker og ideer. Utforskende samtale er nølende og ufullstendig, da den som snakker prøver ut ideer og tanker underveis. Når elever prøver ut ideer og løsningsstrategier og endrer dem underveis, er det å forvente at det som blir sagt er nølende, oppstykket og inneholder avbrytninger og retningsendringer. Utforskende samtale fremmer et viktig virkemiddel for å jobbe med forståelse. Et viktig kriterium for at elever skal kunne arbeide med oppgaver ved hjelp av en slik samtaletype, er at de føler seg trygge i gruppesituasjonen og at de vet at de ikke kommer til å få negative tilbakemeldinger eller bli gjort narr av (Barnes, 2008).

Mye av de samme elementene går igjen blant de ulike forskernes meninger om hvorfor samtale og kommunikasjon er nyttig for ervervelse av ny kunnskap i matematikkfaget. Felles for det som blir sagt, er at samtale gjør at elever må sette ord på egne tanker, argumentere for egne løsninger og lære seg å lytte til medelever. Noe som igjen kan føre til utvikling i egen resonneringsevne, samt bedre læringsresultater i faget. Dette ligner også det norsk læreplan for matematikk fellesfag sier om at muntlige ferdigheter er sett på som et grunnleggende element i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2013). Der står det blant annet at muntlige ferdigheter innebærer å skape mening gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Det innebærer å gjøre seg opp en mening, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av uformelt språk, presis fagterminologi og begrepsbruk. Det vil si å være med i samtaler, kommunisere ideer og drøfte matematiske problemer, løsninger og strategier med andre. Muntlige ferdigheter innebærer også å være i stand til å lytte til andre, gi respons og å være bevisst på mottakeren når en selv taler.

2.8. Gruppearbeid. Å lære sammen.

Arbeid i mindre grupper i matematikkfaget, gjør det mer sannsynlig at en større andel av klassen vil være aktive og involverte i samtalene som forekommer, og i det å tenke høyt. Vellykket gruppearbeid krever derfor forarbeid, veiledning og tilsyn. I tillegg er det nødvendig at diskusjonene som forekommer i smågruppene bygges inn i en utvidet form av andre kommunikasjonsmønstre, som f.eks. en felles samtale med lærer og hel klasse (Barnes, 2008). Botten (2016) er også positiv til gruppearbeid, men skriver at det er av stor betydning at utvelgelsen av oppgavene elevene skal arbeide med under gruppearbeidet, blir gjort på en slik måte at elevene erfarer at kunnskapen utvikles i et fellesskap hvor de er gjensidig avhengige av hverandre. Det er vesentlig hvordan elevene opplever fordelen ved å arbeide sammen, og hvordan dette gjelder alle elever, uansett evner og forutsetning i faget. Oppgavens utforming og innhold er avgjørende for hvor vellykket gruppearbeidet blir. Oppgaven må ha et slik innhold og være formulert på en slik måte at elevene føler det nærmest som en forutsetning at de arbeider sammen (Botten, 2016).

Interaksjon og samarbeid mellom elever i mindre grupper er også noe Cobb (1995) har studert gjennom ulike case-studier. I disse studiene kommer det frem situasjoner der elever befinner seg i en løsningsprosess, hvor samarbeidet og interaksjonen mellom elevene skilles ved å enten være direkte eller indirekte. Direkte samarbeid oppstår når den aktuelle oppgaven kan løses ved rutinearbeid og ved at elevene koordinerer forsøkene sine ved å løse en oppgave eksplisitt. Dette viste seg å skape lite muligheter for læring. Ved indirekte samarbeid derimot, blir oppgavene løst ved at elever tenker høyt, bygger videre på andre elevers utsagn, og løser oppgavene uavhengig av hverandre. Læring oppstår gjennom indirekte samarbeid når en elev sier og gjør noe som tilfeldigvis er aktuelt og avgjørende for den andre elevens tenkning på det tidspunktet. Indirekte samarbeid er en produktiv arbeidsmåte som fører til at læring oppstår. En avgjørende faktor er likevel at elevene har etablert et antatt felles grunnlag for kommunikasjon (Cobb, 1995).

Også Webb (1991) har studert gruppearbeid, og mener at elever som arbeider i små grupper kan dra nytte av hverandre for å utvikle forståelse. Når elever arbeider med et problem for første gang, kan man ofte se at elever innad i gruppen er i stand til å hjelpe hverandre med å kartlegge det de ikke forstår, bedre enn hva læreren er i stand til. Dette sier Webb (1991) er fordi elever deler et felles hverdagsspråk, som de bruker for å verbalisere og å oversette vanskelige ord og uttrykk, slik at medelever kan forstå. Et annet element som også blir synliggjort når elever arbeider i grupper med elever i samme situasjon, er at de har en stadig trang for å få bekreftet om sitt arbeid er riktig. Det å arbeide sammen med medelever, og å se at flere også kommer frem til de samme svarene, kan være med på å stimulere denne trangen (Webb, 1991).

Ut fra de ulike forskernes teorier om gruppearbeid, kan man se at det finnes mange fordeler ved å arbeide i gruppe. Som Underlid (1997) skriver, fremmer grupper kognitiv variabilitet, ved at det finnes variert kunnskap og ulike kognitive problemløsningstilnærminger. Videre kan grupper skaper oppjustering av risikonivå ved å være dristigere enn enkeltindividet, noe som kan være til fordel i mange (men ikke alle) sammenhenger. Gruppearbeid kan også skape motivasjon, læring og vekst for den enkelte når det kommer til kunnskap, holdninger, mellommenneskelige forståelser og sosiale ferdigheter. Dette er faktorer som videre kan tilfredsstille sosiale behov. Når en gruppe fungerer som best, oppnås noe som kalles synergieffekt – gruppen fungerer bedre enn summen av de individuelle medlemmene hver for seg (Underlid, 1997).

Selv om det er mange fordeler ved gruppearbeid, kan likevel mange av momentene nevnt over snus til det motsatte. Underlid (1997) skriver at selv om det kan være motiverende å arbeide i gruppe, kan det også i tilfeller virke demotiverende. Det er heller ikke alltid at gruppedeltagelse tar vare på sosiale behov, det kan ofte være motsatt. Slike tilfeller kan for eksempel komme av ujevn deltakeraktivitet, ansvarsfraskrivelse, oppgavetype o.l.

2.9. Undersøkende læringslandskap

Kvaliteten på samtalene i matematikkundervisningen har sammenheng med kvaliteten på den matematikkundervisningen som finner sted. Dette henger nødvendigvis ikke sammen med god eller dårlig undervisning, men at ulike kommunikasjonsformer kan generere ulike former for læring. Matematikkundervisning må derfor fokusere mer på å tilrettelegge og å skape rammer for at læring kan finne sted. For at læring kan finne sted, må den lærende påta seg eierskapet for læringsprosessen (Alrø & Skovsmose, 2006).

Alrø og Skovsmose (2002) omtaler det tradisjonelle klasserom som et oppgaveparadigme som baserer seg på lærebokstyrt-undervisning og lærer-elev samtaler, noe som fører til begrensninger i elevenes mulighet for å ta ansvar, være aktive og å stifte eierskap til sin egen læringsprosess. Basert på dette vil Alrø og Skovsmose (2002) utfordre oppgaveparadigmet på en måte som åpner for nye former elevaktivitet og læringssamtaler som inneholder større grad av nysgjerrighet og undersøkende karakter. Dette blir omtalt som et *undersøkelseslandskap*. Typisk for et undersøkelseslandskap, er at læreren presenterer et tema eller en problematikk, og videre er det opp til elevene å finne ut hvordan de vil løse problemet. Elevene arbeider altså med oppgaver som ikke baserer seg på kun ett korrekt svar eller bestemte fremgangsmåter og løsninger. Lærerens rolle i et undersøkende læringslandskap er å være en slags hjelper, som støtter og utfordrer elevene. I en undersøkende dialog har læreren en undrende og nysgjerrig holdning, og sitter heller ikke alltid inne med det korrekte svaret (Alrø, Skovsmose, & Skånstrøm, 2003).

2.10. Inquiry Co-operation Model

I forbindelse med undersøkende læringslandskap, har Alrø og Skovsmose (2002) utarbeidet en modell som angir noen indikasjoner på kvaliteter i dialoger som finner sted mellom lærer og elever eller elever innbyrdes når de arbeider i en undersøkende prosess. Disse indikasjonene kan igjen brukes til å si noe om kvaliteten på dialogene som forekommer i klasserommet under arbeid med matematikkoppgaver. Når de dialogiske handlingene i modellen opptrer i undervisningen, kan de åpne muligheter for læring med særlige kvaliteter. En forutsetning for at dette kan skje, er at undervisningen legger til rette for undersøkende aktiviteter, slik som beskrevet under undersøkende læringslandskap.

IC-modellen består av 8 elementer som kan bidra og støtte opp om læring på spesifikke måter. De åtte elementene er: *å kontakte, å oppdage, å identifisere, å advokere, å tenke høyt, å reformulere, å utfordre og å evaluere* (Alrø & Skovsmose, 2002, 2006). Samtaletrekkene som blir trukket frem i IC-modellen, er med på å få elevers tanker og perspektiver frem i klasserommets offentlige arena, noe som gjør at nye ressurser for læring blir tilgjengelig (Alrø & Skovsmose, 2002).

Et av hovedelementene i IC-modellen er aktiv lytting. Det er kalt "aktiv", fordi lytteren har et klart ansvarsområde. Den som lytter kan ikke bare passivt absorbere det som blir sagt, en må også aktivt forsøke å forstå fakta og følelser i det en hører, og videre prøve å skape sin egen forståelse av problemet. Aktiv lytting innebærer å stille spørsmål, og å gi non-verbal støtte mens en forsøker å forstå hva den som snakker prøver å nærme seg (Alrø & Skovsmose, 2002). Aktiv lytting ligner også et av elementene til Chapin et al. (2013) som beskriver produktive matematikksamtaler. At det å lytte til hverandre skal bidra til at elever engasjerer seg i hvordan andre tenker og resonnerer.

2.10.1. IC-modellens åtte grunnelementer:

1. *Å kontakte:* Å kontakte går ut på å tune inn på sin samarbeidspartner og å sette seg inn i andres perspektiver, noe som er en forutsetning for at samarbeid kan finne sted. Å kontakte innebærer også å være til stede og å være oppmerksom i forhold til hverandre og hverandres bidrag i samtalen. Kontakt i sin forstand, er med på å etablere en positiv relasjon mellom partene, og åpner for samarbeid. Det er også viktig å opprettholde den allerede etablerte kontakten i en gruppe. Dette kan skje i form av å støtte, bekrefte, bruke humor og å stille undersøkende spørsmål og oppfølgingsspørsmål.

2. *Å oppdage:* Å oppdage betyr å finne ut av noe man ikke visste eller var klar over på forhånd. Lærer og elever kan forsøke å oppdage nye eller allerede eksisterende perspektiver ved å for eksempel stille spørsmål, dvs. å stille undersøkende, undrende, utvidende og oppklarende spørsmål, og å stille kontrollspørsmål. Å oppdage gjennom samarbeid betyr å utrykke og synliggjøre perspektiver på samtalens overflate, som kan bidra til videre utforsking og utprøving av muligheter. Å oppdage innebærer også å stille hypotetiske spørsmål og hva-hvis spørsmål, som kan skape nye oppdagelser. Å oppdage er tett knyttet til om elevene har stiftet eierskap til den undersøkende prosessen og det arbeidet de er i gang med.

3. *Å identifisere:* Ved å oppdage og utforske perspektiver vil det videre bli mulig å identifisere et faglig innhold, og å gjøre det synlig for alle deltakerne i undersøkelseslandskapet. Å identifisere innebærer å utarbeide matematiske ideer ut fra

gruppens tidligere felles oppdagelser. Hva-hvis spørsmål fra forrige kategori blir gjerne fulgt opp av hvorfor-spørsmål, med en undrende og åpen tilnærming fra elevenes side.

4. *Å advokere:* Når det er flere lærende som samarbeider, er det viktig å etablere et intersubjektivt fellesskap om det man allerede vet og kan. Det krever at man har en perspektivbevissthet, altså en bevissthet om at det vil eksistere ulike perspektiver blant medlemmene i gruppen, og at hver og en av disse perspektivene kan bidra som ressurser i samtalen. Dette er viktig for å få frem egne synspunkter, ideer og forslag til undersøkelse, men samtidig være åpen og villig til å revidere egen oppfattelse, for å oppnå en felles forståelse i gruppen. Å advokere innebærer også å kunne reflektere kollektivt, med et formål om å avklare en gitt forståelsesmåte. Dette er ikke det samme som å påstå eller å overbevise noen om at man har rett.

5. *Å tenke høyt:* Å tenke høyt innebærer at tanker og ideer uttrykkes mens det undersøkes og arbeides. Her gjøres tanker om til ord, og er med på å offentliggjøre ideer og tanker som ressurs for gruppen. Denne kategorien innebærer også å stille hypotetiske spørsmål som elevene sammen som gruppe videre kan undersøke.

6. *Å reformulere:* Å reformulere er et viktig element i dialoger hvor deltakere arbeider tett sammen for å forstå hverandre, og å sammen skape nye forståelser. Denne kategorien innebærer å gjenta, å utfylle hverandre, og å parafrasere. Å parafrasere kan virke bekreftende i den form av at man uttrykker at man har hørt det som ble sagt. Dermed kan deltakerne bekrefte en gjensidig forståelse, noe som også bidrar til opprettholdelse av kontakt i gruppen.

7. *Å utfordre:* Å utfordre går ut på å stille spørsmål ved allerede oppnådde erkjennelser eller fastslått forståelse. Dette gjøres gjerne gjennom hypotetiske spørsmål som kan legge til rette for å utforske nye alternative muligheter. En betingelse for at å utfordre skal bli vellykket, er at noen i gruppen tar utfordringen. Om elever har stiftet eierskap til prosessen og griper utfordringen, kan dette være med på å introdusere et vendepunkt i undersøkelsen, da flere forslag til løsninger kan komme frem i lyset.

8. *Å evaluere:* Evaluering forekommer etter at elever har kommet frem til løsninger og svar på problemene de arbeider med i den undersøkende prosessen. Dette kan komme til uttrykk på mange måter, som for eksempel ved å påpeke feil, respondere med kritikk eller støtte, gi konstruktiv kritikk, gode råd, ubetinget oppbakking, bekreftelse eller ros.

(Alrø & Skovsmose, 2002, 2006)

Elementene i IC-modellen opptrer ikke i noen bestemt rekkefølge, men oppstår i forskjellige mønstre og kombinasjoner. Når de opptrer, ser det ut til at de har stor innflytelse på både lærerens og elevenes muligheter for å produsere nye erkjennelser sammen. Samtidig er det viktig å være oppmerksom på at IC-elementene ofte opptrer sporadisk og glimtvis. De er sjeldent tilstede i en hel undervisningstime eller i et helt samarbeidsforløp. Dialogiske læringsprosesser kan fort avbrytes av uenigheter, fastlåsninger av ideer, mangel på utfordring, forsøk på overbevisning, gjetting o.l., som alle er helt vanlige elementer i en samtale (Alrø & Skovsmose, 2002, 2006).

3.0. Metode

I dette kapittelet argumenteres det for forskningsmetodiske valg i forbindelse med mitt forskningsprosjekt. Her vil det blant annet bli gjort rede for hvilke metoder som er brukt i forhold til datainnsamling, bearbeidelse av datamateriale og analyse av datamateriale. Først vil jeg ta for meg oppgavens mål og forskningsdesign, for så å se dette opp mot oppgavens forskningsspørsmål. Deretter vil jeg beskrive valg av forskningsdeltakere og gjennomføringen av datainnsamlingen, før jeg tar jeg for meg transkripsjon og etterarbeid. Videre vil det bli skrevet om hvilken analysemetode som er benyttet for å få oversikt over det innsamlede datamaterialet og for å kartlegge funnene. Forskningens validitet og reliabilitet vil deretter bli drøftet, før etiske betraktninger og metodekritikk presenteres avslutningsvis.

3.1. Oppgavens mål og forskningsdesign

Mitt forskningsspørsmål er: *Hvordan samarbeider og diskuterer elever på 8. trinn seg frem til løsninger på en matematisk generaliseringsoppgave i en gruppesituasjon?*

For å kunne svare på dette forskningsspørsmålet behøves et datamateriale som gir meg mulighet til å analysere samtaler som utspiller seg mellom elever som arbeider sammen i en gruppesituasjon med en matematisk generaliseringsoppgave. For at dette skal være gjennomførbart, ser jeg det som mest hensiktsmessig å dra ut i skolen og møte elevene der de befinner seg. Ved å ta dette valget, plasseres forskningen min under sosial forskning, da forskningens fokus vil være på sosiale handlinger mellom elever (Cohen, Manion, Morrison, & Bell, 2011).

I følge Cohen et al. (2011) skilles det mellom to ulike retninger innen sosial forskning, *objektivistisk* og *subjektivistisk* tilnærming. Objektivistisk forskning tar utgangspunkt i at det eksisterer en objektiv virkelighet uavhengig av noens bevissthet. Kunnskapen innenfor objektivistisk forskning kjennetegnes som hard, objektiv og håndgripelig, og som noe som allerede eksisterer der ute, klar til å oppdages (Cohen et al., 2011). Subjektivistisk forskning er basert på unik og personlig kunnskap konstruert i møtet mellom forsker og forskningsdeltakere (Cohen et al., 2011). Det er ikke noe som allerede finnes som kan beskrives uavhengig av den samhandlingen som skjer. Dette gjør at virkeligheten blir sett på som kompleks og i stadig forandring, og som igjen betyr at det finnes mange virkeligheter. Dette vil da innebære at forskningen gir oss noen svar, men ikke ett rett svar (Nilssen, 2012). Objektivistisk tilnærming er mest typisk innen kvantitativ forskning, mens subjektivistisk tilnærming opptrer innen kvalitativ forskning (Cohen et al., 2011). Kvalitative studier har fokus på forskningsdeltakerne, og skaper et grunnlag for fordypning og detaljerte forståelser av sosiale fenomener som handlinger, holdninger, væremåter og intensjoner mellom forskningsobjekter (Cohen et al., 2011). I kvalitativ forskning har forsker en helt sentral rolle, og blir sett på som kanskje det viktigste instrumentet. Dette fordi det er forsker selv som bestemmer utvalget for datainnsamlingen, gjennomfører datainnsamlingen i samarbeid med forskningsdeltakerne, og deretter bearbeider, tolker og analyserer dette datamaterialet (Nilssen, 2012). I følge Thagaard (2010) gir kvalitative studier hvor det er nær kontakt mellom forsker og forskningsobjekter, et grunnlag for å oppnå en forståelse av sosiale fenomener på bakgrunn av fyldige data om personer og situasjoner. Det er dette som også står sentralt innen subjektivistisk forskning, hvor kunnskapen blir konstruert i møtet mellom forsker og forskningsdeltakere (Cohen et al., 2011).

I tillegg til kvalitativ forskning, finnes også kvantitativ forskning som er svært effektivt når man vil spørre et stort utvalg representanter og basere seg på numeriske data (Cohen et al., 2011). En forsker som benytter kvantitativ metode er ute etter å kunne generalisere noe utover enkelthendelser, og å få en bred oversikt over hva mange enheter mener (Postholm & Jacobsen, 2011). Dette er også kjennetegnene innen objektivistisk forsking, hvor kunnskapen sees på som hard, håndfast og objektiv (Cohen et al., 2011).

Kvalitative og kvantitative forskningsmetoder blir ofte fremstilt som to motsetninger med et klart skille mellom seg. Men i følge Postholm og Jacobsen (2011), bør man heller se på de to metodiske tilnærmingene som komplementære. At de utfyller hverandre, gir ulike typer informasjon, og at de kan inspirere til ytterligere refleksjon og diskusjon. Dette fordi kvantitativ metode går ut på å anvende teori og å telle forekomster i en populasjon, mens kvalitativ metode utvikler teori og forståelse, som legger grunnlag for videre kvantitativ forskning. Kvalitativ metode gir også forskningsdeltakerne en stemme, og kan gi innblikk i tema som ligger under overflaten ved å studere personers atferd og handlinger (Cohen et al., 2011). I dette forskningsprosjektet er det valgt en kvalitativ tilnærming, da jeg er ute etter noe mer enn å kun telle forekomster av elementer i samtalene når elevene samarbeider og diskuterer. Hensikten med dette forskningsprosjektet er ikke å kunne fremstille noen generaliserbare svar, men heller å forstå en bestemt situasjon som utspiller seg mellom elever som arbeider med oppgaver i en gruppesituasjon. Ut fra mitt forskningsspørsmål er datamaterialet begrenset, og min tilknytning til forskingsfeltet og forskningsdeltakerne stor. Dette er også grunner til at denne studien havner innenfor kvalitativt forskningsarbeid.

3.2. Valg av datainnsamlingsmetode

For å tilegne meg kunnskap for å kunne svare på oppgavens forskningsspørsmål, er jeg avhengig av at datamaterialet som blir samlet inn gir et godt innblikk i hvordan kommunikasjonen og de matematiske samtalene mellom elevene foregår. For å få innblikk i dette, kunne intervju vært en mulig metodisk innfallsvinkel. Enten individuelt dybdeintervju eller fokusgruppeintervju (Cohen et al., 2011). Ved fokusgruppeintervju får man fanget opp flere menneskers oppfatninger av én ansikt-til-ansikt interaksjon, og samtidig styre denne interaksjonen inn på noen spesifikke forhåndsbestemte temaer. Denne metoden kan virke mindre truende enn individuelle dybdeintervjuer (Tjora, 2012). Observasjon er også en mulig datainnsamlingsmetode, da observasjon gir forsker tilgang til ”live-data” og interaksjoner mellom mennesker i sosiale kontekster (Cohen et al., 2011). Dette omtaler også Christoffersen og Johannessen (2012) som direkte tilgang til forskningsfeltet. Observasjon er mer enn å bare se. Det er å systematisk se og merke seg personer, hendelser, oppførsel, settinger, artefakter og rutiner. Observasjon er også nyttig for å registrere non-verbal oppførsel blant forskningsdeltakerne som blir observert (Cohen et al., 2011).

Intervju og observasjon er begge datainnsamlingsmetoder som er mye brukt i kvalitativ forskning. Ved intervju får man tak i informasjon om hvordan elever tenker, deres begrunnelser, forklaringer og logikk. Ved observasjon ser man på det som faktisk skjer i situasjonen, men uten å vite noe særlig om hvordan elevene tenker, begrunner og forklarer. Basert på at de to datainnsamlingsmetodene genererer ulik type informasjon, vurderer jeg det ut fra oppgavens forskningsspørsmål som mest hensiktsmessig å velge observasjon fremfor intervju, da en ved denne metoden får tilgang til det som faktisk skjer i virkeligheten. Dette vil være en fordel i dette forskningsprosjektet, da jeg er ute etter å studere interaksjoner mellom elever i reelle situasjoner. Som Cohen et al. (2011) skriver, hender det at man kan oppdage forskjeller i hva folk sier de gjør, og hva de faktisk gjør. I slike tilfeller kan observasjon fungere som er realitetssjekk.

Observasjon er et vidt begrep for datainnsamling, som består av flere underkategorier. Observasjon kan både stå alene som metode, eller kombineres med andre metoder. En systematisk innsamling av data ved hjelp av observasjon forutsetter at observasjonen har et fokus. Innen observasjon som datainnsamlingsmetode finnes det tre kategorier som skiller omfanget av struktur i observasjonen. *Strukturert observasjon* er den observasjonsformen som i størst grad er forhåndsbestemt, og er dermed godt egnet til bruk ved kvantitative studier. Ved denne observasjonsmetoden ser man etter det man på forhånd har planlagt å se etter, og kun det. I forkant av observasjonen har man laget en hypotese, som man ut fra observasjonen kan bekrefte eller avkrefte. Ved strukturert observasjon har forsker en passiv rolle, som vil si at en ikke deltar i undervisningen eller i settingen man observerer (Cohen et al., 2011). Videre har man *semi-strukturert observasjon* hvor forsker på forhånd har laget en agenda med problemer og tema en vil ha fokus på under datainnsamlingen. Tross dette er ikke den semi-strukturerte observasjonen så styrt at det ikke er rom for fleksibilitet utenfor den forhåndsbestemte agendaen (Cohen et al., 2011). Den tredje observasjonsmetoden er *ustrukturert observasjon*. Her har forsker langt mindre klare rammer rundt hva en ser etter, og må derfor gå inn i situasjonen og observere det som faktisk skjer, før en bestemmer seg for forskningens signifikans (Cohen et al., 2011).

Observasjon som forskningsmetode innebærer også at den som forsker kan opptre i ulike roller. I følge Gold (1958 i Cohen et.al. 2011), finnes det fire grunnleggende forskerroller innen observasjon. Gold ser på observasjon som en aktivitet som beveger seg langs en akse fra fullstendig deltaker til fullstendig observatør. De fire rollene er: *fullstendig deltaker, observerende deltaker, deltakende observatør og fullstendig observatør* (Cohen et al., 2011). Inndelingen av forskerroller innebærer at forsker ikke er en del av eller medlem av feltet det forskes på. Postholm og Jacobsen (2011) omtaler dette som at forsker skal forbli forsker gjennom hele prosessen, selv om grad av deltakelse kan variere.

Fullstendig deltaker innebærer at forsker er en del av miljøet som studeres, og deltar i de ordinære samhandlingene mellom aktørene. En fullstendig deltakende forsker holder ofte sin identitet skjult for gruppen, da en vil forsøke å ikke gå utenfor gruppens rammer for å unngå å avsløre sin identitet (Cohen et al., 2011). Å ha en fullstendig deltakende observatørrolle, ser Cohen et al. (2011) på som etisk utfordrende, da en opererer i spenningsforholdet mellom observasjonsdeltakernes rett til beskyttelse av personvern, og deres rett til å vite om studien gjennom informert samtykke. American Educational Research Association (2000, i Cohen et.al, 2011) sier også at informasjon innhentet på denne måten, kun skal tas i bruk ved ytterst nødvendige studier. Og i etterkant av studien skal deltakere og institusjonelle representanter bli informert om hemmeliggjøringen.

En forsker som er *deltakende observatør* er en del av det miljøet som studeres, og de som observeres er klar over at de blir observert. Her vil forsker identifisere seg som et fullverdig medlem av gruppen, hvor en vil dokumentere og notere inntrykk, samtaler, observasjoner, kommentarer og atferd ut fra det forskningsformålet en har satt seg. Deltakende observatør er spesielt nyttig når en skal studere små grupper eller hendelser og prosesser over et kort tidsrom, eller hendelser som gjentar seg hyppig (Cohen et al., 2011). Som *observerende deltaker*, tilhører ikke forsker gruppen som observeres, men rollen som observatør er likevel klar og utilslørt. Forsker deltar i liten grad i samhandlingen som foregår mellom aktørene i gruppeaktiviteten, men engasjerer seg heller gjennom samtaler og intervjuer. De fleste observasjonsstudier er av denne typen (Christoffersen & Johannessen, 2012). Å være observerende deltaker kan være svært effektivt for å kartlegge gruppedynamikk og forhold mellom gruppemedlemmer. En slik observatørrolle kan også gi forsker en følelse av situasjonen, og hvordan saker blir organisert i en gruppe eller subkultur. En kan også få innblikk i interaksjoner og relasjoner i gruppen, som kan utvikle spørsmål for videre forskning (Cohen et al., 2011). En *fullstendig observerende* forsker derimot, deltar ikke i felten i det heletatt, noe som innebærer at observasjonsobjektene ikke vet at de blir observert (Cohen et al., 2011). Situasjoner som egner seg for denne observatørrollen, kan være om man for eksempel vil studere barns lek i skolegården fra en skjult posisjon som en takterrasse e.l. (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Ved observasjon som forskningsmetode kan det ofte oppstå endringer i hvor stor grad man som observatør deltar i sekvensen. Man har på forhånd tatt beslutninger og gjort seg opp en mening om hvilken forskerrolle man skal ha og hvordan man skal opptre. Men siden man som observatør deltar i et naturlig miljø hvor man opplever situasjoner slik de konstant utspeiler seg, kan man aldri ha fullstendig kontroll over sin rolle som forsker, og hvordan rollen kan komme til å endre seg i løpet av den tiden man gjør observasjoner (Tjora, 2012).

Observasjon innebærer både muntlige og visuelle data. Hvordan en registrerer denne informasjonen danner det empiriske grunnlaget for videre analyse i en observasjonsstudie. Lyd-og videoopptak kan være nyttige hjelpemidler for observasjon, da disse opptakene vil gi en mer ufiltrert fremstilling av situasjonen akkurat slik den oppstod, samt at man i ettertid kan se opptaket gjentatte ganger (Cohen et al., 2011). I tillegg til lyd- og videoopptak kan man også benytte feltnotater. Notater kan alene være et verktøy for å registrere det som skjer under observasjon, men det kan også kombineres med lyd eller videoopptak for å frigjøre mer tid til forskeren. Analyse av feltnotater og lyd- og videoopptak kan i midlertid ikke oppfattes som en objektiv eller verdinøytral beskrivelse av handlingene som utspilte seg. Dette er resultater av de utvelgelsene forsker gjør i løpet av observasjonssekvensen (Postholm & Jacobsen, 2011).

3.3. Metodiske valg

Som vist i oppgavens teoretiske rammeverk, er kommunikasjon av stor betydning ved innlæring og anvendelse av matematikkfaget. Som Botten (2016) skriver, kan god kommunikasjon bety bedre forståelse og større engasjement i læreprosessen, og dermed være med på å bedre læringsresultatet i faget. Utforsking av figurmønster er også en typisk brukt tilnærming for å introdusere algebra i grunnskolen. Dette baserer seg på å identifisere hva som går igjen i et mønster og uttrykke disse sammenhengene som funksjoner eller algebraiske uttrykk (Warren & Cooper, 2007). Å basere seg på kommunikasjon ved innlæring av nye tema, kan dermed bidra til at elever blir i stand til å formulere hypoteser, argumentere, og å finne strategier for å løse de aktuelle problemene (Botten, 2016).

På bakgrunn av dette, ønsker jeg i denne studien å utføre observasjon som baserer seg på at observasjonsdeltakerne får snakke mer eller mindre fritt. Ved å åpne for fri dialog, ser jeg for meg at det kan dukke opp flere aspekter ved samtalene som vil fremstå som interessante i forhold til studiens forskningsspørsmål. Selv om elevene snakker fritt under observasjonen, vil jeg som forsker likevel ha mulighet til å kunne styre samtalene og å stille spørsmål underveis for å opprettholde en viss struktur. På forhånd av observasjonen hadde jeg laget noen spørsmål som ved behov kunne stilles i løpet av observasjonssekvensen. Hensikten med disse spørsmålene var å "strekke" elevenes tanker, ved å be om begrunnelse eller forklaring på deres tenkemåter. Dette er noe Franke, Kazemi og Battey (2007) beskriver som et av de mest effektive grepene en lærer kan gjøre for å utvikle elevers matematiske kompetanse, da det kan føre til at elever utvikler forståelse som resultat av at de må forklare egne strategier og tenkemåter. I følge Drageset (2014) kan man få innblikk i elevers tenkemåter ved å stille det enkle spørsmålet "hvorfor?". Når man ber elever om begrunnelse på denne måten, åpnes det for å øve opp elevers evne til å argumentere matematisk. Under observasjonen vurderte jeg fortløpende hvilke spørsmål eller kommentarer jeg burde respondere med for å gjøre datamaterialet så innholdsrikt som mulig i forhold til studiens forskningsspørsmål. Ved ha mulighet til å stille spørsmål og å bryte inn i samtalene underveis, forsikret jeg meg også om at forskningsdeltakerne holdt seg innenfor det gitte temaet. Min rolle som forsker ble dermed observerende deltaker. Dette fordi jeg var tilstede under observasjonen, men deltok likevel ikke i samtalene på lik linje som observasjonsdeltakerne.

Når det kommer til grad av struktur under observasjonen, er den til en viss grad forhåndsbestemt, da det tas utgangspunkt i et forskningsspørsmål. Observasjonsmetoden kan sees på som en form for ustrukturert observasjon, da elevene snakker mer eller mindre fritt, samt at forsker er åpen for nye aspekter og innfallsvinkler til tema. Men likevel vil jeg omtale observasjonsmetoden i dette forskningsprosjektet som semi-strukturert. Ved å benytte denne type datainnsamlingsmetode får jeg mulighet til å utvikle ny forståelse for tema, noe jeg ikke ville gjort om jeg hadde valgt en fullstendig strukturert observasjon, hvor man kartlegger noe man allerede vet fra før. Med dette som utgangspunkt plasseres min forskning innenfor en kvalitativ observasjonsstudie, da jeg vil få et dypt innblikk i kompleksiteten til et lite utvalg observasjonsdeltakere (Cohen et al., 2011). Basert på denne kompleksiteten i det avgrensede observasjonsutvalget, vil jeg ikke gjennom denne studien kunne generalisere funn som blir oppdaget. De observerte samtalene vil ikke alene kunne representere et generelle resultat for samtlige matematiske samtaler mellom elever på 8. trinn. Resultatene av studien vil heller fremstille eksempler på hvordan slike samtaler kan utarte seg, og hvilke samtaleelementer og faktorer som er unike for akkurat dette utvalget av forskningsobjekter.

Når jeg bestemte meg for å gjøre en observasjonsstudie av denne typen, var jeg på forhånd klar over at jeg kom til å måtte forholde meg til et stort datamateriale. Det å studere samtaler innebærer ikke bare verbalt språk, men også non-verbal kommunikasjon og gestikuleringer mellom observasjonsdeltakerne (Cohen et al., 2011). Under observasjonen ønsket jeg å ha lite fokus på å notere, da jeg ville være mest mulig tilstede for å kunne skape et reelt bilde av situasjonen. Derfor valgte jeg å benytte meg av videoopptak. Hovedgrunnen til dette var at jeg ville registrere observasjonsdeltakernes ordlyd så korrekt som mulig, for å i ettertid kunne tolke og se sammenhenger i samtalene mellom elevene. En korrekt ordlyd hadde ikke vært mulig å oppnådd om jeg kun benyttet feltnotater. Det å bruke videoopptak under observasjon gjør at situasjoner blir levende igjen når de skal studeres i ettertid. Ved å se og lytte til videoopptakene, får en ikke bare tak i utsagn, men også non-verbal kommunikasjon på en presis måte. I tillegg vil nye ideer og tanker oppstå når en ser videomaterialet gjentatte ganger (Nilssen, 2012).

3.4. Læringssyn

I psykologien finnes det ulike læringsteorier som fokuserer på atferd, faktorer som påvirker atferd, hvordan mennesker tilegner seg kunnskap, og læring i sosiale mellommenneskelige situasjoner (Säljö, 2001). Ved å studere situasjoner ut fra læringsteorier kan man få et innblikk i hvordan individet tilegner seg kunnskap i ulike perspektiver og settinger. Man kan også se elementer ved de ulike læringsteoriene som kan bidra og støtte opp om ervervelse av ny kunnskap i læringsprosessen (Cobb, 2007). Mitt forskningsprosjekt plasseres innenfor sosiokulturelt læringssyn, fordi elever i en gruppesituasjon arbeider sammen om å komme frem til løsninger på en gitt matematisk generaliseringsoppgave. Læring i et sosiokulturelt miljø handler om samspillet mellom kollektiv og individ. Hva kan en oppnå i en kultur eller et samfunn? Og hva behersker de enkelte medlemmene? Hvordan reproduseres den kollektive kunnskapen hos individet, og hvilke deler av den kollektive kunnskapen vil den enkelte komme til å beherske? (Säljö, 2001). Sosiokulturelt læringssyn ser på tenkning som en kollektiv prosess som finner sted mellom og i mennesker. Det som holder en samtale sammen, er nettopp det at vi gir og mottar mening i tråd med visse felles spilleregler, og at man tenker sammen som en gruppe. Sosiokulturell læringsteori bygger på at læring skjer gjennom språk og sosial samhandling med andre mennesker. Gjennom språklig aktivitet kan et problem bli re-presentert for en selv og andre samtidig, noe som er med på å opprettholde en felles forståelse for hva en holder på med. Det er gjennom kommunikasjon at sosiokulturelle ressurser blir skapt, men det er også gjennom kommunikasjon at de blir ført videre. Dette er en grunntanke i et sosiokulturelt perspektiv (Säljö, 2001).

Vygotsky er en sentral teoretiker innenfor sosiokulturell læringsteori. Han sier blant annet at mennesker stadig forandrer og utvikler seg, og at vi i enhver situasjon har mulighet til å ta til oss kunnskap fra våre medmennesker i samspillsituasjoner. Dette kalles *nærmeste utviklingssone*. Vygotsky beskriver dette som avstanden mellom det et individ kan prestere på egenhånd, uten støtte, og det individet kan prestere under ledelse av en voksen eller i samarbeid med mer kapable andre. Den nærmeste utviklingssonen kan også beskrives som sonen hvor den lærende er mest mottakelig for støtte og forklaring fra en som er mer kompetent (Vygotsky, 1978). *Medierende hjelper* er et begrep som blir brukt om den mer kunnskapsrike andre som hjelper den lærende fra det nåværende kunnskapsnivå, til et nytt og høyere kunnskapsnivå. Når en fungerer som en medierende hjelper er det viktig å tenke på at det kreves en tilpasning til de intellektuelle redskapene og ferdighetene som den lærende behersker, slik at den som lærer skal kunne ta til seg nye kunnskaper og innsikter (Säljö, 2001).

Situert læring viser hvordan de sosiokulturelle forholdene rundt den lærende er avgjørende for betydningen av læringen. Her spiller situasjonen en avgjørende rolle for tolkning, forståelse og løsning av en oppgave (Lave & Wenger, 1991). Situert læring formidler at læring er en prosess hvor enkeltmennesket vurderes som del av en sosial, samfunnsmessig praksis. Mennesket besitter en personlig handlingsevne basert på oppfattelse og vurdering, der handlingskonteksten basert på ståsted, posisjon og perspektiv er avgjørende for det som læres (Bakke & Tønnesen, 2007).

Blant matematikkdidaktikere er det i dag en dominerende oppfatning av at tilegnelse av matematisk kunnskap skjer ved at den enkelte konstruerer og strukturerer sin kunnskap ut fra egne erfaringer, oppfatninger og opplevelser i møte med omgivelsene. Kunnskap er altså ikke i første rekke noe som overføres og formidles fra en person til en annen, men noe som konstrueres av den enkelte. Selv om kunnskap konstrueres og formes hos den enkelte, betyr ikke det at kunnskapstilegnelse er en ren individuell aktivitet. Den sosiale konteksten er avgjørende for og eventuelt hvordan kunnskapstilegnelsen skjer (Botten, 2016).

3.5. Praktiske forberedelser: Valg av skole, trinn og forskningsdeltakere

Innsamling av datamateriale til dette forskningsprosjektet ble gjort på 8. trinn ved en middels stor ungdomsskole i Midt-Norge. Jeg har gjennom de siste årene vært innom denne ungdomsskolen og jobbet som vikar ved siden av lærerstudiet. Da jeg ikke hadde noen spesifikke kriterier for valg av skole i forbindelse med forskningsprosjektet, var det naturlig for meg å kontakte en skole jeg allerede hadde bekjentskap til. Rektor og fagkoordinator var positive til å ha en masterstudent innom skolen for å forske på utvikling og læring i matematikkfaget. Jeg stod fritt til å velge både trinn og hvilken lærer jeg ville samarbeide med, og tok derfor kontakt med en matematikklærer på 8. trinn som jeg hadde litt bekjentskap til fra tidligere. Grunnen til at jeg valgte akkurat denne læreren, var fordi jeg hadde vært vikar i hennes klasse bare noen uker i forveien, og jeg var dermed ikke et ukjent fjes for elevene. En annen faktor som spilte inn for valg av klasse, var at jeg ønsket å gjennomføre studien med elever tidlig på 8. trinn, da figurmønster og generalisering enda ikke hadde blitt introdusert. Elevene hadde dermed få eller ingen forkunnskaper i temaet, og stilte med mer eller mindre ”blanke ark” i forhold til forskningsprosjektets matematiske tema. Dette kunne også bekreftes av elevenes matematikklærer. Fordelen med dette var at det kunne bidra til å få frem et bredere spekter av løsninger og tenkemåter blant elevene, da de på forhånd ikke hadde en allerede innlært metode for å løse generaliseringsoppgaver som omhandlet figurmønster.

Basert på studiens forskningsspørsmål, ønsket jeg å observere elever som arbeidet i grupper med muntlig oppgaveløsning for å få et innblikk i hvordan elever samarbeider og diskuterer seg frem til løsninger på en generaliseringsoppgave. Observasjonen hadde stort fokus på kommunikasjon og interaksjon mellom forskningsobjektene. Dermed så jeg det som en fordel om elevene var aktive muntlig, at de kunne delta i faglige diskusjoner, og at de følte seg trygge på de andre elevene i gruppen. Dette er faktorer som kan fremme mer matematisk innholdsrike samtaler mellom elevene under oppgavejobbingen, som igjen kunne bidra til at et mer fyldig datamateriale ble samlet inn. Klassens matematikklærer hjalp meg med gruppesammensetningen, da hun kjenner elevene og har en formening deres faglige nivå i matematikk. Uavhengig av kjønn, valgte vi ut totalt 12 elever som skulle få delta i forskningsprosjektet. Kvalitativ forskning fokuserer ofte på et mindre utvalg forskningsobjekter, da dataene blir langt mer detaljert og innholdsrike enn ved kvantitativ forskning (Cohen et al., 2011). Det å drive med observasjonsstudier er tidkrevende med tanke på etterarbeid og analyse, derfor vil 12 forskningsdeltakere gi et bredt og variert nok datamateriale i forhold til studiens forskningsspørsmål. De 12 forskningsdeltakerne ble videre delt i tre grupper med fire elever pr gruppe. Grunnen til fire stk. pr gruppe, var fordi jeg ville at de skulle være så få at alle gruppemedlemmene hadde mulighet til å ta ordet, i tillegg til at de skulle være såpas mange at det kunne oppstå innholdsrike samtaler med innspill fra flere elever. Som Gjøsund og Huseby (2010) skriver, kan det ”sosiale limet” som bidrar til opprettholdelse av felles ansvar for produktivitet i gruppa, bli anonymisert og svekket når gruppene blir for store.

Elevene ble plassert i grupper med andre elever på et noenlunde likt faglig nivå i matematikk. Dette for å skape mest mulig samsvar mellom gruppemedlemmene og for at det ikke skulle oppstå situasjoner hvor elever enten falt ut av samtalen på grunn av for høyt faglig nivå, eller at f.eks. en faglig sterk elev skulle løse oppgavene på egenhånd uten å inkludere resten av gruppen. I denne studien ønsket jeg forskningsdeltakere som var på et middels til høyt nivå i matematikk. Dette beskrev elevenes matematikklærer som de med karakter fire og oppover. Ved å velge elever fra et middels nivå og høyere, så jeg for meg at elevene i større grad behersket matematikken i oppgaven de skulle arbeidet med, og at de var i stand til å argumentere, begrunne, reflektere og å tenke mer abstrakt. Dette er faktorer som også kan bidra til et rikere datamateriale. Forskningsdeltakerne i denne studien er altså en bevisst utvalgt gruppe elever basert på forhåndsbestemte kriterier, da de er valgt ut fra kvalifikasjoner som er strategiske i forhold til forskningsspørsmålet (Cohen et al., 2011).

På forhånd av dette forskningsprosjektet, ble det planlagt at de tre elevgruppene skulle observeres gjennom to sekvenser hver. Tema for dag 1 var generalisering, og tema for dag 2 var en annen problemløsende oppgave som omhandlet tallkombinasjoner. Alle de tre gruppene gjennomførte begge sekvensene. I etterkant av observasjonen bestemte jeg i samarbeid med min veileder, å kun ta utgangspunkt i observasjonssekvensene som ble gjennomført på dag 1. Dette fordi det allerede i løpet av denne dagen ble generert nok mengde data i forhold til forskningsprosjekts omfang.

3.6. Gjennomføring av observasjonen

Elevene var som sagt delt inn i grupper på fire og fire, og under observasjonen valgte jeg å ta ut en og en elevgruppe på et eget rom. Dette fordi observasjonsdeltakerne var valgt ut på forhånd, og det var dermed ikke behov for at hele klassen skulle delta. Det ble satt av 45 minutter pr gruppe, noe jeg ut fra oppgavens omfang anså som rikelig. Elevene ble tatt ut fra den ordinære undervisningen på timeplanen, og det var derfor ulikt fra gruppe til gruppe hvilke fag som ble berørt med fravær når de var ute av klasserommet for å delta i forskningsprosjektet.

Oppgaven elevene skulle arbeide med, er en generaliseringsoppgave inspirert av boken «Algebra and the Elementary Classroom» av Blanton (2008). Oppgaven går ut på å finne en generell formel for et figurmønster, og er bygget opp av tre deloppgaver. Oppgaven består av problemer uttrykt med tekst og tilhørende visuelle tegninger. Figurmønsteret som presenteres i oppgaven, går ut på å sette sammen bord, for så å finne antall stoler det er plass til rundt dem. Oppgaven er bygget opp med en stigende vanskelighetsgrad, hvor elevene først blir bedt om å finne antall stoler på to bord, deretter fem bord, ti bord, hundre bord, og til slutt prøve å nærme seg et uttrykk for n bord. Jeg anser denne oppgaven for å være sammensatt av virkelighetsnære problemer som elevene kan kjenne seg igjen i. Figurene nedenfor viser hvordan figurmønsteret ble presentert for elevene. Komplett oppgaveark finnes som vedlegg (vedlegg 2).

Figur 1

Jeg var opptatt av at eleven skulle føle seg trygge i observasjonssituasjonen og på meg som forsker. Siden en stor del av datamaterialet i kvalitative studier konstrueres i samspill mellom forsker og forskningsdeltakere, er relasjonen mellom dem en viktig faktor (Nilssen, 2012). Før observasjonen startet, informerte jeg elevene om hensikten med forskningsprosjektet, at det var fullstendig anonymt, og at det de uttalte seg om under observasjonssekvensen ikke skulle kunne spores tilbake til dem. Jeg poengterte også at det var selve samtalen mellom elevene jeg var interessert i, og at det var viktig at alle skulle føle at de hadde mulighet til å si akkurat det de tenkte, da det ikke var noen gitt løsningsstrategi på oppgaven.

Før elevene fikk sette i gang med generaliseringsoppgaven, ble de også informert om det tekniske utstyret. Dette fordi elevene uttrykte nysgjerrighet og en mild uro allerede fra de gikk inn døren til rommet og fikk øye på videokameraet som stod plassert i hjørnet. Jeg følte dermed det var viktig å poengtere at videoopptakene skulle transkriberes og anonymiseres, og umiddelbart slettes når forskningsprosjektet var avsluttet. At elevene blir gjort oppmerksomme på det tekniske utstyret som er involvert, er i følge Postholm og Jacobsen (2011) viktig for at elevene skal klare å holde fokuset rettet mot den læringsaktiviteten og de oppgavene som skal utføres. Hvis dette ikke gjøres, kan det føre til at det i etterkant blir vanskelig for forsker å vurdere og analysere datamaterialet opp mot studiens forskningsspørsmål.

3.7. Bearbeiding og analyse: Datamateriale og transkripsjon

Mitt datamateriale består av videosekvenser fra de tre elevgruppene, hvor hver av dem er på ca. 25 minutter. I tillegg til videoopptak, ble også notatene som elevene produserte under gruppearbeidet samlet inn. Videoopptakene av alle tre gruppene ble transkribert innen kort tid etter gjennomføring, slik at feltnotatene kunne relateres mest mulig til situasjonene akkurat slik de oppstod. På tross av dette vil en transkripsjon produsert av forsker aldri bli helt nøyaktig. Dette fordi forsker på forhånd har en formening om hva som er viktig og bør tolkes. I tillegg til at når man gjør tale om til tekst, mister man menneskelige handlinger som mimikk, tonefall, gester osv. (Nilssen, 2012). Jeg har likevel prøvd å være så nøyaktig som mulig i mine transkripsjoner for å skape et reelt bilde av situasjonene slik de utspilte seg. Av de tre videosekvensene på 25 minutter, ble det tilsammen transkribert ca. 20 dataskrevne sider, som danner utgangspunktet for dette forskningsprosjektet. De 12 forskningsobjektene fikk i transkripsjonen tildelt fiktive navn som ikke kan spores tilbake til dem. Forsker blir omtalt som F.

3.8. Metode for analyse

Analyse handler om å lete etter system, mønster og mening i det innsamlede datamaterialet. Et mønster innebærer å finne en struktur som kan være med på å gjøre det som studeres mer oversiktlig og håndterlig (Postholm & Jacobsen, 2011). En måte å arbeide med datamaterialet i en kvalitative analyseprosess, er koding og kategorisering. Det å se sammenhenger mellom kodene, for så å til slutt å sitte igjen med noen kategorier som fanger opp essensen i materialet, er en typisk arbeidsmåte innen kvalitativt forskningsarbeid (Nilssen, 2012).

Analysearbeidet jeg har gjort av det innsamlede datamaterialet er tredelt. Noe som igjen resulterte i at forskningsprosjektets analysekapittel er delt i tre overordnede delkapittel. Det første som ble gjort i analysearbeidet var å gå gjennom transkripsjonene fra alle de tre gruppene for å kartlegge de ulike matematiske løsningene elevene hadde generert. Deretter gjorde jeg et litteratursøk, hvor jeg fant tidligere forskning om ulike generaliseringsnivå. Jeg betrakter Radfords (2010) fire nivåer til å være tilstrekkelige for å analysere prosessen fra elevene setter i gang med en oppgave, til de har generert et svar de vurderer som fullverdig. Hvert generaliseringsnivå har sine elementer og kjennetegn som man som lærer kanskje overser i praksis. Derfor kan det å se elevers matematiske arbeid opp mot Radfords (2010) fire generaliseringsnivå, være med på å kartlegge elevenes nåværende matematiske nivå, samt eventuelle problemområder og forbedringspunkter. Analysekapittelets første del vil dermed ta for seg og vise frem hvordan elevene jobbet matematisk innenfor de ulike generaliseringsnivåene.

Det neste steget i analysearbeidet, var å se på ulike samtaletrekk uttrykt av elevene i dialogene. På forhånd hadde jeg lest om Alrø og Skovsmose (2002) sin IC-modell, og hadde bestemt meg for å ta utgangspunkt i denne modellen, da jeg syns den består av mange ulike elementer som kan skape et innholdsrikt innblikk i elevers samtaler. Her arbeidet jeg på setningsnivå, hvor jeg gikk gjennom alle setningene i elevdialogene hver for seg, og kartla dem med fargekoder basert på IC-modellens åtte hovedkategorier. Dette var et tidkrevende arbeid som måtte gjøres om igjen utallige ganger, da det ofte opplevdes som utfordrende å skulle avgjøre hvilken kategori fra IC-modellen som var riktig for elevenes ulike utsagn. Arbeidet med denne delen av analysen resulterte i del to av forskningsprosjektets analysekapittel. Å gjøre et grundig analysearbeid, og å gå gjennom samtalene gjentatte ganger, førte til at jeg fikk god oversikt over datamaterialet. I tillegg førte dette til at jeg gjorde flere oppdagelser og funn enn først forventet, noe som også vil være viktig for å senere kunne svare på studiens forskningsspørsmål.

Siste del av analysearbeidet gikk ut på å fremstille en sammenbinding av analysens to foregående kapitler. Her ble transkripsjonene av datamaterialet gjentatte ganger gjennomgått på ny, denne gangen for å kartlegge elevutsagn som viste matematisk fremgang i samtalene. Dette innebar utsagn som viste at elevgruppene hadde generert en løsning som førte til at de beveget seg opp på et høyere generaliseringsnivå. I analysekapittelets siste del vil dermed strategier og løsninger generert av elevene under arbeidet med generaliseringsoppgaven, bli sett sammen med de samtaletrekkene som opptrådte i elevdialogene. Dette vil bidra til å kunne svare på oppgavens forskningsspørsmål, om hvordan elever på 8. trinn i en gruppesituasjon samarbeider og diskuterer seg frem til løsningsstrategier på en generaliseringsoppgave.

For å kunne avgi et gjennomarbeidet svar på oppgavens forskningsspørsmål, benyttes det kategorier for å plassere elevenes løsningsstrategier inn i, og for å kunne fremstille elevenes ulike samtaletrekk og uttrykksmåter. Dette for å videre ha belegg til å si noe om utviklingen i samtalene og løsningene som genereres i forbindelse med generaliseringsoppgaven. Jeg ønsker å basere mitt forskningsprosjekt på tidligere forskning så langt det finnes resultater som er godt nok egnet til å beskrive de nivåene av generalisering som elevene arbeider innenfor, og de samtaletrekkene som finner sted i dialogene. Radfords (2010) generaliseringsnivå og Alrø og Skovsmoses (2002) IC-modell, består begge av veldefinerte kategorier som er mye forsket på. Ved å bygge videre på det andre har funnet ut før meg, bidrar jeg til å videreføre kunnskapen fra det som allerede foreligger innen forskningsfeltet. Likevel er det ikke sikkert at den tidligere forskningen vil fremstå like klar og tydelig i mitt forskningsprosjekt. I analysekapittelet vil jeg derfor vise til kategorier jeg har benyttet meg av fra tidligere forskning, samt å vise til eventuelle trender som finnes i datamaterialet utover de teoribaserte kategoriene. I tillegg til å ta utgangspunkt i noe som allerede er funnet ut, vil jeg også kunne bidra til å videreutvikle disse teoriene.

Basert på studiens analysemetode anser jeg min forskning til å være av både induktiv og deduktiv tilnærming (Cohen et al., 2011). Datamaterialets teoribaserte kategorisering er deduktiv, da tidligere forskning blir testet på datamaterialet for å kunne svare på forskningsspørsmålet. På denne måten beveger jeg meg fra teori til empiri (Christoffersen & Johannessen, 2012). Men forskningsprosjektet er også basert på induktiv tilnærming, da jeg ut over de ferdigutviklede kategoriene fra tidligere forskning, også vil vise frem trender fra mitt eget datamateriale hvor disse kategoriene kanskje ikke er tilstrekkelige. Ut fra det innsamlede datamaterialet finner jeg frem til generelle mønstre som kan gjøres om til teori eller generelle begreper, og beveger meg dermed fra empiri til teori (Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.9. Oppgavens validitet og reliabilitet

Kvalitativ forskning vil alltid være påvirket av forskers bakgrunn og forforståelse (Cohen et al., 2011). Ved forskning stilles det alltid krav om refleksivitet. Det vil si at forskeren reflekterer åpent om styrker og svakheter rundt hvordan datamaterialet er samlet inn og behandlet. Hvor god kvaliteten på arbeidet er, finnes det ikke noe entydig svar på. Men det at leseren kan etterspore prosessen og vurdere om den kan overføres til egen kontekst, er med på å sikre studiens troverdighet (Nilssen, 2012). Innen forskning, benyttes ofte en todelt forklaring på kvalitet i arbeid, *validitet og reliabilitet* (Cohen et al., 2011).

Validitet eller gyldighet går ut på om vi har dekning for våre fortolkninger av funn og resultater. En kan presisere begrepet validitet ved å stille spørsmål om de tolkningene forskeren gjør er gyldige i forhold til den virkeligheten en har studert (Cohen et al., 2011).

Forskeren kan styrke validiteten i sin studie ved å være åpen om hvordan en har praktisert forskningen, og ved å begrunne valgene en tar underveis i forbindelse med f.eks. datainnsamlingsmetode og valg av teorigrunnlag. I følge Tjora (2012), er den viktigste kilden til validitet at forskningen foregår innenfor fagets rammer og at den er forankret i annen relevant forskning. For å sikre validitet i min studie, vil jeg i oppgavens analysekapittel presentere deler av datamaterialet i form av utdrag fra elevdialogene. På denne måten vil jeg ovenfor leseren kunne presentere og understreke mine funn på en troverdig måte.

Reliabilitet eller pålitelighet handler om hvor nøyaktig arbeid forskeren har gjort i forbindelse med undersøkelsen. Reliabilitet er ikke noe en kan garantere 100%, men det forskeren kan gjøre for å i større grad bidra til kvalitet i arbeid, er å reflektere over eventuelle problemer knyttet til forskningen. Det kan f.eks. være hvilke data som brukes, måten de er samlet inn på, hvordan de bearbeides, og om det finnes åpenbare feil eller mangler knyttet til datainnsamlingen (Postholm & Jacobsen, 2011). I denne studien vil jeg forsøke å være mest mulig åpen og beskrivende rundt disse temaene. Derfor begrunnes de valgene jeg har måttet ta stilling til både før, underveis og i etterkant datainnsamlingen i dette kapittelet. I kapittel 3.11. om metodekritikk, vil det også bli fremhevet faktorer som kan ha påvirket resultatet av datainnsamlingen. Jeg vil gjennom studien forsøke å skape et mest mulig åpent og ærlig bilde av analyseverktøyet jeg har benyttet meg av. En slik åpenhet rundt hvordan arbeidet har foregått gjør det mulig for leseren å vurdere kvaliteten på arbeidet, og å kunne si noe om det som rapporteres og fortelles om i studien oppleves som troverdig (Cohen et al., 2011).

3.10. Etiske betraktninger

Som forskere er vi gjester i det private rom, og vi er avhengige av at andre slipper oss inn i tankene og livene sine (Nilssen, 2012). Det å drive med kvalitativ forskning i skolen innebærer at visse forhåndsregler tas, og at en må forholde seg til ulike etiske retningslinjer. I Norge har Den nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) utarbeidet forskningsetiske retningslinjer som blant annet skal ivareta etiske krav i forholdet mellom forsker og forskningsdeltakere. Et av disse kravene omhandler fritt og informert samtykke. Dette skal sikre at studiens deltakere deltar frivillig, og at de er så godt informert om forskningens hensikt som overhodet mulig. I Norge har vi en regel som sier at barn under 15 år må ha samtykke fra foreldre/foresatte for å delta i forskningsprosjekter (NESH, 2006). Det er likevel viktig å se barnet som et individuelt subjekt, og selv om en har fått foreldrenes samtykke, skal barn over 7 år ha mulighet til å kunne medvirke i saker som omhandler dem selv (Nilssen, 2012).

Omtrent en måned før jeg satt i gang observasjonsarbeidet, var jeg innom klassen og delte ut informasjonsskriv til elever med foreldre/foresatte, hvor jeg informerte om forskningsprosjekts mål og hensikt, frivillig deltakelse, konfidensialitet og anonymitet. Vedlagt infoskrivet var et samtykkeskjema for deltakelse i studien (vedlegg 1). Samtlige av totalt 26 elever med foreldre/foresatte meldte positiv interesse for deltakelse i studien. Forskningsprosjektet ble også meldt opp til NSD, Norsk senter for forskningsdata. Vedlagt i søknaden var informasjonsskrivet og samtykkeskjemaet som ble delt ut til klassen. Etter fem uker fikk jeg beskjed om at personvernombudet for forskning hadde vurdert mitt prosjekt som meldepliktig, men at behandlingen av personopplysninger tilfredsstilte kravene i personopplysningsloven, og det var dermed klart til å starte datainnsamlingen.

3.11. Metodekritikk

Jeg valgte å gjennomføre forskningsarbeidet på en skole hvor jeg på forhånd hadde kjennskap til ledelsen, de ansatte og noen av elevene. Selv om de 12 observasjonsdeltakerne visste hvem jeg var fra tidligere vikartimer, vil jeg likevel si at jeg var ukjent for elevene, da verken jeg eller de kjente hverandre personlig. I tillegg til dette, ble elevene under observasjonen delt inn i forhåndsbestemte grupper etter kriterier, tatt ut av den ordinære undervisningen og plassert på et eget rom med videokamera tilstede. Dette er alle faktorer som bidro til at situasjonen fant sted i en unaturlig setting, og som kan ha vært med på å påvirke den innhentede informasjonen under datainnsamlingen. Ut fra dette forsøkte jeg derfor gjennom hele observasjonssekvensen å minimere disse faktorene, slik at elevene skulle føle seg mest mulig trygg i situasjonen.

Som forsker tok jeg på forhånd et bevisst valg om å observere elever som var på et middels nivå eller høyere (begrunnet i kapittel 3.5.). Som sagt var det elevenes matematikklærer som plasserte elevene i grupper basert på tidligere prestasjoner i matematikkfaget. Det at læreren bare hadde kjent elevene i noen måneder, kan ha vært med på å farge utvelgelsen av observasjonsobjektene. Det matematiske temaet generalisering av figurmønster var heller ikke kjent for elevene i følge deres matematikklærer. Men bare noen uker etter skulle temaet gjennomgås i klassen. Om elevene hadde deltatt i forskningsprosjektet i etterkant av denne gjennomgangen, ville de mest sannsynlig hatt en annen forståelse og teoribakgrunn innenfor temaet. Noe som igjen ville gitt et annerledes datamateriale enn det som ble samlet inn i forbindelse med dette forskningsprosjektet.

Kvalitativ forskning er ikke en lineær prosess, men en frem- og tilbakeprosess. Det å finne en forskbar enhet, er en utfordring når målet er å oppnå forståelse av kompliserte situasjoner (Nilssen, 2012). Dette har jeg selv erfart under arbeidet med mitt masterprosjekt, da en stadig må revurdere og ta nye valg i forbindelse med forskningsspørsmålet, i tillegg til å måtte forholde seg til nye og aktuelle teorier. Ut fra forskningsspørsmålet ønsket jeg å studere hvordan elever samarbeidet og diskuterte seg frem til løsninger på en generaliseringsoppgave i en gruppesituasjon. Generaliserbare funn var dermed ikke et mål i seg selv, men heller det å kunne vise frem hvordan slike samspillsituasjoner mellom elever kan utspille seg. Dette er også noe som kan være av interesse for andre som arbeider i skolen, da situasjonene som er blitt observert i denne studien, reelt sett også kunne oppstått på hvilken som helst annen skole i landet.

4.0. Analyse

4.1. Analyse del 1: Matematikken

Innledningsvis i denne oppgaven ble følgende forskningsspørsmål presentert:
Hvordan samarbeider og diskuterer elever på 8. trinn seg frem til løsninger på en matematisk generaliseringsoppgave i en gruppesituasjon? I dette kapitelet vil jeg forsøke å belyse elementer som kan legge til rette for at forskningsspørsmålet kan besvares avslutningsvis. Som tidligere nevnt er studiens analyse delt i tre overordnede kapitler. Hvert kapittel vil bli avsluttet med et oppsummerende avsnitt.

Analysens første del tar for seg matematikken som kom frem i samtalene og de ulike løsningene elevene genererte. Her vil elevenes løsninger bli sett opp mot Radford (2010) sine fire generaliseringsnivå. Disse nivåene er nærmere beskrevet i oppgavens teorikapittel. Rekkefølgen elevenes løsninger blir presentert i, avhenger av hvilket generaliseringsnivå de er blitt plassert innenfor. Praktiskbaserte løsningsstrategier vil bli presentert først, deretter faktabasert generalisering, kontekstbasert generalisering, og til slutt symbolsk generalisering. De tre forskjellige elevgruppenes løsninger vil bli presentert om hverandre, da hensikten med denne delen av analysen er å vise frem mangfoldet av løsninger, uavhengig av hvilken gruppe som genererte dem. Nevneverdig er det at flere av gruppene i noen tilfeller benyttet seg av de samme løsningsstrategiene. For å unngå gjentakelse velger jeg derav å ikke legge frem alle løsningene til samtlige av de tre gruppene. Avslutningsvis i dette kapitlet vil de genererte løsningene bli presentert samlet i en tabell for en mer oversiktlig fremstilling.

4.1.1. Ikke-algebraiske / praktiskbaserte løsningsstrategier

Det første eksemplet er et utdrag hentet fra begynnelsen av dialogen til gruppe 1. Her arbeides det med å finne en løsning på antall stoler ved to sammensatte bord.

Situasjon 1, gruppe 1:

1. Ada: (leser oppgaven) Hvis bordene blir satt sammen slik. Hvor mange er det plass til da? Okei, så da er det to bord?
2. Anders: Ja.
3. Alex: Så, på ett bord er det plass til fem stoler.
4. Anna: Når man setter sammen to bord må man ta minus to, fordi det kan jo ikke sitte folk i midten.
5. Ada: Ja, man kan jo ikke sitte der hvor bordene blir slått sammen, så da blir det jo bare fire på hvert bord da. Så da blir det åtte. (resten av gruppen bekrefter ved å nikke)
6. Anders: Skal vi skrive ned åtte da eller?
7. F: Ja, dere kan godt skrive ned svaret. (alle elevene setter i gang med å skrive)

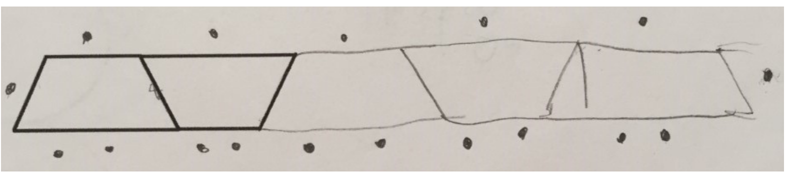
Her baserer elevene løsningen sin på det visuelle, altså tegningen som er oppgitt på oppgavearket. Ved å se på tegningen er elevene i stand til å se for seg hvor mange stoler som kan plasseres rundt to sammenslåtte bord. Denne metoden har jeg valgt å kalle *addisjonsmetoden*, da elevene tar utgangspunkt i det bordet de allerede har fått oppgitt bilde av på oppgavearket, for så å legge til det neste bordet ved å "sette sammen to bord" og "ta minus to", da det er to stoler som "forsvinner" mellom bordene. Addisjonsmetoden kan sees på som en rekursiv metode (Mason, 1996), da elevene gjenkjenner og bruker elementer og endringer fra tidligere i mønsteret, for å finne det neste i rekken. I denne situasjonen blir svaret gitt ved muntlig fremstilling, og ikke ved et algebraisk uttrykk.

Selv om dette utdraget er hentet fra dialogen som fant sted i gruppe 1, viste det seg at alle de tre elevgruppene benyttet seg av addisjonsmetoden i begynnelsen av arbeidet med generaliseringsoppgaven. Ut fra det teoretiske rammeverket som omhandler nivå av generalisering, er dette et eksempel på en ikke-algebraisk løsning. Dette fordi elevene kun legger merke til lokale likheter i mønsteret, for så å bruke dette til å uttrykke et svar for det neste leddet i figurmønsteret Radford (2010).

En annen løsningsstrategi som tar utgangspunkt i tegningen, blir presentert i situasjon 2.

Situasjon 2, gruppe 1:

11. Anna: (leser oppgaven) Hvor mange er det plass til når man setter sammen fem bord?
12. Alex: Fem bord, fem ganger fire? (ser spørrende på gruppen)
13. Anna: Nei det kan ikke være det, fordi... eeeh.
14. Anders: (tar sjefsavgjørelse) Vi kan tegne opp fem bord. (alle setter i gang med å tegne)
15. Anna: Jeg tror det blir 17.



Figur 2

Denne løsningsstrategien var en gjenganger blant alle de tre elevgruppene i begynnelsen av arbeidet med generaliseringsoppgaven. Jeg valgte dermed å ta utgangspunkt i et utdrag av dialogen til gruppe 1, hvor det arbeides med å finne en løsning på antall stoler ved fem sammensatte bord. Her ser vi at elevene ender opp med å tegne de fem bordene, og telle antall stoler i rundt. Vi kan se at Alex kommer med forslag om en løsningsstrategi som inneholder multiplikasjon, hvor han vil multiplisere fire stoler med det totale antallet bord som er fem. De andre elevene avviser dette, og videre ender de opp med å bruke en strategi som de anser som å ha større sjanse for å gi et korrekt svar. Jeg velger å kalle denne løsningsstrategien for *tegn-og-tell metoden*, og ser på dette som en oppfølger til addisjonsmetoden. Dette fordi elevene skaper mer struktur for hverandre, da de beveger seg et steg videre og fremstiller svaret gjennom tegning. Dette er også en ikke-algebraisk løsningsmetode, da elevene kun reproduserer fakta som allerede er gitt (Weingarden et al., 2016). Selv om denne løsningen fungerer for oppgaver med et lite antall bord som i dette tilfellet, vil ikke tegn-og-tell metoden være en optimal løsningsstrategi ved større tall.

De to situasjonene som nå er blitt presentert, er begge eksempler på praktiskbaserte og ikke-algebraiske løsninger. Tross dette, synliggjøres nyanserende forskjeller mellom de to situasjonene. Selv om begge er rekursive løsningsstrategier hvor elevene tar utgangspunkt i noe de vet fra før, vil jeg likevel si at situasjon 2 eksemplifiserer en mer avansert og systematisk fremstilling enn situasjon 1. Dette kommer av at elevene både benytter seg av addisjonsmetoden, i tillegg til å fremstille svaret visuelt i form av tegning.

4.1.2. Faktabasert generalisering

Det første eksempelet hvor elevene genererer en løsning som baserer seg på fremvoksende algebraisk resonnering, er hentet fra et utdrag hvor gruppe 2 diskuterer løsningen på antall stoler ved ti sammensatte bord. Denne situasjonen oppstod etter at elevene hadde funnet ut at 17 var riktig antall stoler ved fem sammensatte bord.

Situasjon 3, gruppe 2:

37. Mons: Men 10 bord, blir ikke det dobbelt så masse da?
38. Mie: Nei (rister på hodet).
39. Mons: Nei...
40. F: Hvorfor tror du at det blir dobbelt så mange på 10 bord?
41. Mons: Heh, fordi 5 er halvparten av 10.

I denne situasjonen ser vi at Mons tenker at svaret på antall stoler ved ti bord vil være det dobbelte av svaret de kom frem til ved fem bord. Mie uttrykker uenighet uten videre begrunnelse, noe som gjør at Mons blir usikker på egen løsningsstrategi. I denne situasjonen bryter forsker inn i samtalen og stiller et utdypende spørsmål for å få innblikk i Mons sin tankegang. Dette begrunner Mons ved å si at når de allerede vet svaret på antall stoler ved fem bord, må antall stoler ved ti bord være dobbelte så mange, da fem er halvparten av ti. I denne situasjonen baserer eleven seg på faktabasert generalisering, hvor en tar utgangspunkt i noe som allerede er belyst gjennom en tidligere løst oppgave. Eleven benytter seg av en strategi som jeg velger å kalle *dobling/halvering.*

Elevene i gruppe 2 fortsetter å tenke på nye løsninger, men klarer ikke å komme frem til andre løsningsstrategier enn den som ble foreslått innledningsvis i situasjon 3. I det neste utdraget som blir presentert, forsøker Mons fremdeles å overbevise resten av gruppen om at doblingsmetoden er riktig.

42. Mons: JA det blir det
43. Mie: Ja, blir det det?
    (Mie og Mons nikker bekreftende til hverandre)
44. Mie: Ja, det blir det.
45. Mons: Ja, det blir dobbelt så mange.
46. Marie: Fordi 17 + 17 er
47. Mons: 34
48. Marie: 34 (ser smilende og bekreftende på Mons)
49. Mie: Ja, 34

Videre i denne situasjonen er elevene enda ikke sikre på om det er riktig å doble svaret fra fem bord (17) for å finne svaret på ti bord (34), da elevene ikke på noen måte har grunnlag til å bevise at dette stemmer. Elevene velger derfor videre å benytte seg av den praktiskbaserte og ikke-algebraiske tegn-og-tell metoden for å sammenligne svaret de får ved regning opp mot tegningen.

50. F: Hva fikk dere? 34?
51. Mons: (teller stolene på tegningen til Mie): 1, 2, 3,..., 32.
52. Mie: 32? (ser spørrende ut)
53. Mons: 32
54. Mie:32
    (Mie og Mons ser på Marie)
55. Mons: Fikk du 32? (henvender seg til Marie)
56. Marie: Ja.
57. Mie: Så 17 + 17 blir 32? (spørrende)
58. Mons: Nei!
59. Marie: Nei!
60. Mie: Nei?
61. Mons: Nei, det blir det ikke.
    (alle vender seg forundret mot tegningen igjen, og grubler over løsningen)
62. Mons: Ja, så er det 32?
63. Marie: Ja, det blir 32 på 10 bord.
64. Mons: Jeg, aner ikke jeg... (smiler)

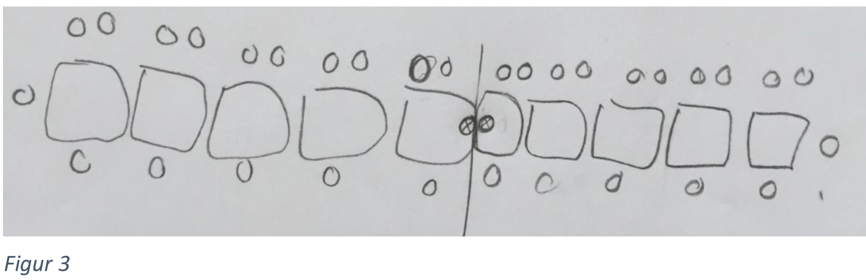
I dette utdraget ser vi at forsker bryter inn i samtalen og stiller et oppklarende spørsmål angående svaret elevene har landet på (34), da dette ikke stemmer overens med fasitsvaret

(32). Her oppstår det en uoverensstemmelse mellom svarene elevene generere ved de to ulike løsningsstrategiene. Ved å doble antall stoler ved fem bord for å finne svaret på antall stoler ved ti bord, fikk elevene 34. Ved å tegne opp bordene og telle antall stoler, fikk elevene 32. Med dette oppstår det en usikkerhet i gruppen, angående hvilken løsning de skal stole på. Ut fra stemningen i gruppen uttrykker elevene mest tiltro til den praktiskbaserte løsningen som går ut på å tegne og telle, da de tar utgangspunkt i noe de allerede vet. I tillegg til at de tydelig kan se svaret svart på hvitt på arket foran seg. Dette er et tegn på at elevene befinner seg i brytningspunktet mellom praktiskbaserte løsningsstrategier og faktabasert generalisering. I følge Radford (2010) er det tankene som kommer frem i kategorien faktabasert generalisering som danner grunnlaget og råstoffet for videre tenking og utvikling av algebraisk resonnering. I denne situasjonen kommer dette tydelig frem ved at elevene utvikler en forståelse for at løsningsstrategien som gikk ut på å doble/halvere ikke stemte overens med den visuelle tegningen. Dette kan senere hjelpe elevene til å utvikle seg innenfor et høyere nivå av generalisering.

Et annet interessant funn i denne situasjonen, er at eleven Mie begynner å tvile på sine egne regneferdigheter, og stiller spørsmål til om regnestykket 17+17 blir 32 eller 34. Selv om Mie i utgangspunktet var den som var pådriver for at svaret ikke skulle bli 34, indikerer det som skjer i situasjon 3, at elevene ikke har utviklet forståelse for den kontinuerlige utviklingen i figurmønsteret. Elevene har på dette tidspunkt verken grunnlag til å uttrykke en muntlig eller symbolsk matematisk formel for figurmønsteret.

Etter uenigheten om antall stoler ved ti sammensatte bord skal bli 32 eller 34, prøver Mie seg på en forklaring av problemet.

> 74. Mie: Jo! Fordi at, hvis vi deler den her. Så er det jo en person her og en person der, fordi det er liksom enden på bordet. Så da blir det jo minus 2. 2 personer fordi, 17+17 er 34 sa du Mons, minus 2 personer fordi bordet blir sammensatt igjen, og da blir jo de plassene borte.



Figur 3

Her benytter Mie både regnemetoden med dobling, i tillegg til den visuelle tegn-og-tell metoden for å presentere det riktige svaret som er 32. Dette viser at eleven er i stand til å bevege seg mellom ulike representasjonsformer. Som Tripathi (2008) sier, er det å uttrykke seg visuelt gjennom f.eks. tegning, en vesentlig faktor innen problemløsning som kan bidra til at elever ser sammenhenger og kan utarbeide løsninger på problemer. Visualisering kan også bidra til utvikling som fører til at elevene tenker på et høyere og mer abstrakt nivå. I denne situasjonen ser altså Mie for seg ti bord som er satt sammen av to "langbord" bestående av fem småbord hver. Dette gir da regnestykket 17+17, minus de to stolene som "forsvinner" mellom de to sammensatte langbordene. Dette er en riktig løsning på oppgaven om antall stoler ved ti sammensatte bord. Men likevel klassifiseres løsningen i kategorien faktabasert generalisering, da Mie beregner et konkret tilfelle av en variabel (ti bord), i tillegg til at hun benytter seg av den praktiskbaserte løsningsstrategien tegn-og-tell metoden.

En annen løsningsstrategi som baserer seg på tidligere funn og allerede løste oppgaver, er situasjonen som oppstår i gruppe 2 når elevene arbeider med å finne løsningen på antall stoler ved 100 bord.

Situasjon 4, gruppe 2:

132. Marie: Og for å få 100 bord..
133. Mons: Ja, så da må vi gange 32 med 10! Det blir 320! For du kan ikke gange 17 med 100!
134. Mie: Men på ett bord da, hvor mange fant vi ut at det ble der? 17? Nei, 17 nei? Ikke på ett bord (smiler). På fem bord.
135. Mons: Men 5 bord ja. (ivrig) Offf, nei altså...
136. Marie: På ett bord så er det 5 plasser.
137. Mie: Det er ikke 32 på to bord Marie!
138. Marie: Nei, nei, på 10 bord.
139. Mie: Ja
140. Mons: Ja på 10 bord
141. Mie: Ja
142. Marie: Ja.
143. Mons: Ja, det var på 10 bord. Nå er vi på 100. Da må vi gange det med 10. For 10*10 det er 100.
144. Mie: Ja
145. Mons: Så nå ganger vi de 32 stolene med 10, bare at vi må ta minus noe. Så det blir 320 minus noe.
146. Mie: Ja (klør seg i hodet med blyanten)
147. Mons: Men hva skal vi minuse da?! (litt oppgitt)

I denne situasjonen er elevene på vei bort fra en rekursiv tankegang, og beveger seg mot en mer eksplisitt måte å fremstille ideer og tanker på. Jeg har valgt å kalle denne løsningsstrategien *multiplikasjonsmetoden*, da elevene baserer seg på å multiplisere antall bord for å komme frem til det ønskede antallet, her 100. Elevene vet at det ved 10 bord er 32 stoler. 10*10= 100 bord. 32*10= 320. Men spørsmålet elevene stiller seg, er hva de skal subtrahere for å komme frem til riktig svar. Hvor mange stoler "forsvinner" mellom bordene? Elevene er ivrige etter å finne forslag til løsninger, og stemningen i gruppen er oppgiret. Men elevene uttrykker også frustrasjon over at de ikke finner ut av det kontinuerlige aspektet ved figurmønsteret. Elevene bygger altså kun videre på allerede løste oppgaver, hvor de beregner konkrete tilfeller av en variabel. Dette er kjennetegn innenfor kategorien faktabasert generalisering (Radford, 2010).

4.1.3. Kontekstbasert generalisering

Videre presenteres en situasjon som oppstod når gruppe 3 arbeidet med å finne løsningen på antall stoler ved 100 bord. Denne situasjonen er basert på at elevgruppen tidligere har funnet ut at løsningen på antall stoler ved 10 bord er 32.

Situasjon 5, gruppe 3:

111. Jonas: 100 bord.
112. Jens: Da tror jeg vi bare kan ta bort de på sidene og gange med ti.
113. Jenny: Ja
114. Jens: Og så plusser vi på to igjen
115. Jenny: 30*10
116. Jens: 300
117. Jenny: Ja. Pluss 2. 302
118. Jens: Ja, okei.
    (latter)
119. Jenny: Det tror jeg
120. Johanne: Ja, det blir rett
121. F: Hvorfor blir det rett da?
122. Jonas: Ja, Jenny forklar!
123. Jenny: Jo, fordi at... jaa, Jens kan også fortelle! (peker på Jens)
124. Jens: Ja, her har vi for ti bord, og hundre bord.
125. Jonas: Ja, men du glemmer fortsatt de som er inni her (peker mellom bordene)
126. Jenny: Nei, så tar du bort de to her (endene), og da blir det 30. 30*10 + 2, som er de to på hver side.
    Da blir det 302.
127. Jonas: Ja, okei. 302. Da er vi ferdige da. Eh nei. En oppgave igjen.

I denne situasjonen tar elevene utgangspunkt i løsningen de har funnet for ti bord. Jens uttaler i setning 112 at for å finne løsningen på 100 bord vil han fjerne stolene på endene, for så å multiplisere antallet med 10. Denne gruppen oppdaget det generelle i figurmønsteret tidlig i sekvensen. Jens uttalte allerede under arbeidet med første deloppgave, at bordene bestod av en stol på kortsiden og to stoler på langsiden. Å uttrykke de generelle objektene i figurmønsteret muntlig eksplisitt er et kjennetegn både innen kontekstbasert og symbolsk generalisering. Men siden elevene i situasjon 5 kun er i stand til å sette ord på hvordan figurmønsteret utvikler seg, uten å sette det opp som en formel med numeriske tegn og variabler (Radford, 2010), plasseres løsningen deres innenfor kontekstbasert generalisering.

Strategien gruppe 3 benytter seg av i situasjon 5, kan sammenlignes med strategien gruppe 2 benyttet i situasjon 4. Begge gruppene tar utgangspunkt i å multiplisere svaret for 10 bord for å finne løsningen på 100 sammensatte bord. Forskjellen mellom de to gruppenes løsningsstrategier er at gruppe 2 velger å multiplisere 10*32, for så å trekke fra ”noe”. Dette ”noe” vet de ikke hva er, da de baserer tankegangen sin på at de må finne ut hvor mange stoler som ”forsvinner” mellom bordene. Dette indikerer at elevene ikke har utviklet forståelse for det generelle i figurmønsteret. Dette kom også til uttrykk da de benyttet seg av tegn-og-tell metoden for å finne svaret på antall stoler ved ti sammensatte bord. Gruppe 3 derimot velger å trekke fra de to endestolene før de multipliserer, for så å addere dem til slutt. Dette gir regnestykket 10*30+2 = 302, som er et korrekt svar på oppgaven. Sammenligningen av løsningsstrategiene til de to gruppene, forteller noe om at gruppe 3 på dette stadiet av sekvensen har utviklet mer innsikt i figurmønsterets generelle trekk. Selv om elevene ikke har fremstilt uttrykket algebraisk, har de likevel kommet frem til en eksplisitt formel for oppgaven.

Det neste eksempelet er et utdrag fra gruppe 1 som har beveget seg over til å jobbe innenfor kontekstbasert generalisering, hvor de generelle objektene i mønsteret er uttrykt språklig eksplisitt. I situasjon 6 arbeider elevene med løsningen på antall stoler ved 100 sammensatte bord.

Situasjon 6, gruppe 1:

64. Ada: Men hvis vi tar bort de på sidene, så ganger vi det så mange ganger som det skal ganges?
65. Anna: 2*100 , pluss 1*100. Jo det blir jo 300. Pluss de to på sidene. Ja men, da blir det 302 kanskje? (De andre elevene ser på hverandre. Ikke helt sikker på om de stoler på forklaringen)
66. Ada: Skal vi prøve...
67. Anders: Jojo, nei...
68. F: Forklar til de andre hva du tenker
69. Anna: Når vi har to her, og en her, så kan vi ta to ganger 100, som er 200. Pluss en ganger 100, det blir 300. Fordi at her er det en stol og her er det to (peker på lang- og kortsiden på bordene). Så legger vi bare til to på endene, da blir det jo 302.

I dette utdraget har elevene Ada og Anna identifisert at bordene er formet som trapes, som rommer en stol på kortsiden og to stoler på langsiden, samt en på hver ende. Elevene er altså i stand til å se figurmønsterets kontinuerlige utvikling, og å språklig eksplisitt sette ord på hvordan figurmønsteret utvikler seg. Men likevel har ikke elevene nok kunnskap til å presentere denne utviklingen som en formel med numeriske tegn og variabler (Radford, 2010). Anna stiller avslutningsvis spørsmål ved forklaringen sin som forekommer i setning 65. Dette tyder på at eleven ikke er helt sikker på løsningen, og søker dermed bekreftelse fra de andre gruppemedlemmene. Da elevgruppen uttrykker usikkerhet i forbindelse med forklaringen, bryter forsker inn og stiller et oppklarende spørsmål til Anna. Anna forklarer dermed løsningen sin mer spesifikt, noe som skaper et felles innblikk for resten gruppen. Anna viser med denne forklaringen en forståelse for den kontinuerlige endringen i figurmønsteret, og er dermed i stand til å bruke dette til å finne svaret for 100 bord.

Like etter situasjon 6, genererer en annen elev i gruppe 1 en ny løsning på oppgaven om 100 bord. Denne løsningen havner også i kategorien kontekstbasert generalisering.

Situasjon 7, gruppe 1:

82. Anders: Altså hvis du ikke hadde lagt de sammen da, så hadde det vært fem på hvert bord. Som vil si 500 personer. Og så skal vi ha bort... ehhh, nei... ehhh, jo. Vi skal ha vekk to fra 98 av bordene, og en fra 2 av bordene.
    (Alex kikker lurt på Anders)
83. Anders: Det er sant!
84. Ada: For det er jo bare 3 stoler på ett bord, og på de ytterste så er det fire.
85. Anders: Mhm. Og på alle de andre er det tre.
86. Ada: Ja! Så da, hvordan skal vi... (tenker på hvordan de skal skrive ned/fremstille svaret)
87. Anders: 3*98 + 8?

I setning 82 tar Anders utgangspunkt i at alle bord består av totalt fem stoler. Videre mener han at det skal fjernes to stoler fra alle bordene, foruten de to ytterste bordene hvor det skal fjernes en stol. Setning 82 indikerer at Anders ser noe generelt i figurmønsteret, nemlig at felles for alle bordene er at lang- og kortsiden totalt består av tre stoler. Ada uttrykker også enighet for dette i setning 84. Dette viser at elevene er i stand til å muntlig eksplisitt uttrykke det generelle i figurmønsteret. Noe som kjennetegner løsningsstrategier som havner i kategorien kontekstbasert generalisering (Radford, 2010). I setning 87 uttrykker Anders nok en løsningsvariant, som er forskjellig fra den som ble uttrykt i setning 82. I setning 87 velger eleven å trekke fra to bord fra det totale antallet bord, for så å multiplisere det resterende antallet bord med 3, da de tidligere har uttrykt at 3 stoler er felles for alle bordene. Til slutt velger Anders å legge til de 8 gjenværende stolene, som hører til på de to ytterste bordene som ble trukket fra i starten. Dermed blir uttrykket 3*98 + 8 = 302. Dette er forskjellig fra utrykket for løsningen hans i setning 82, som ville vært: 500 – (2*98) – (1*2) = 500 – 196 – 2 = 302. Situasjon 6 havner i kategorien kontekstbasert generalisering, da elevene bruker en blanding av matematiske symboler og begreper gjennom et naturlig språk, som understreker at elevene har kontekstuelle referanser til variablene i figurmønsteret (Radford, 2010).

Neste situasjon viser et utdrag fra dialogen til gruppe 2 hvor samtalen var på vei til å spore av. Gruppen er nå blitt hentet inn igjen av forsker som har foreslått at elevene bør starte forfra, og tenke på hva som er generelt for bordene, og om de har oppdaget noen fellesnevnere.

Situasjon 8, gruppe 2:

203. Mons: 5, det er 5 på ett bord
204. Mie: Ja, og så fjerner vi en fra hver ende, da er det 2.
205. Marie: 3
206. Mie: 3, sorry.
207. F: Er dette for eksempel noe som går igjen?
208. Mons: Ja! Det går igjen ja.
209. Mie: At det er 3 på hvert bord hele rekka, unntatt de to helt ytterst, for de har 4. Fordi de her blir ikke fjernet (peker på endestolene)
210. Mons: Ooooh! (Aha-opplevelse)
211. F: Hvis dere tenker slik da. Klarer dere da for eksempel å komme frem til svaret på 100 bord? Eller for eksempel på 10 bord da, uten å måtte tegne opp. Nå når dere vet dette.
212. Mari: Men kanskje det skal bli 3*100, og så + 2 fordi det er på hver ende. (riktig svar)
213. Mie og Mons: Mhm
214. Mari: Så kanskje det er 302.
    (resten av gruppa tenker, nikker og svarer ja)
215. Mons: Ja, ja, det er det jo. Ja!
    (elevene lyser opp i begeistring, og smiler til hverandre)
216. Mie: Ja!
217. Mons: Ja, det hørtes logisk ut!

Denne situasjonen viser hvordan gruppe 2 ble klar over det generelle i figurmønsteret, og hvordan de videre var i stand til å kunne svare på oppgaven om antall stoler ved 100 sammensatte bord. Denne elevgruppen fikk litt starthjelp av forsker, når det gjaldt å komme inn på tanken om hva som var felles for alle bordene. Vi kan se at elevene kommer opp med to forskjellige løsningsforslag i dette utdraget. Elevene er både innom løsningen (3*98) + (4*2), og (3*100) + 2. Etterhvert klarte elevene å se at hvert bord bestod totalt av 5-2 = 3 stoler, som er et generelt element ved figurmønsteret. Denne situasjonen havner dermed også i kategorien kontekstbasert generalisering, da elevene språklig eksplisitt setter ord på de generelle objektene i mønsteret, men uten å uttrykke formelen symbolsk (Radford, 2010).

4.1.4. Symbolsk generalisering

I situasjonen presentert nedenfor, er elevene på gruppe 1 på vei mot å uttrykke en generell formel for generaliseringsoppgaven.

Situasjon 9, gruppe 1:

210. Ada: Så ja, da blir det jo egentlig å gange hvor mange bord med hvor manges stoler det er, og så plusser man på to. Det blir jo det som er rett?

211. Anna: Ja, vi kan jo bare skrive at vi ganger 3 med antall bord, pluss to. Det er jo den måten vi regnet oppgavene på.
212. Ada: Skal vi ta den med 1000?
213. F: Nei, for da har du ett spesifikt tall. Men jeg vil ha noe generelt.
214. Anna: Jeg skrev 3*antall bord pluss 2.
215. Ada: Eller antall stoler ganger antall bord + 2.
216. Anders: Ja.
217. Anna: Men er det det samme da? For antall stoler er 3. Ja, du kan skrive det slik for da blir det mer forklart?

Utdraget over viser en dialog hvor Ada og Anna presenterer to forskjellige uttrykksmåter for det generelle i figurmønsteret. Anna uttrykker symbolsk generalisering, ved å multiplisere antall bord med 3, for så å legge til 2. En løsning som er en gyldig eksplisitt formel i forhold til figurmønsterets utvikling. Ada uttrykker i setning 210 en forklaring som jeg anser for å inneholde mindre generalitet enn Annas løsning, og passer derfor bedre inn i kategorien kontekstbasert generalisering. Dette fordi Ada gir uttrykk for å ville multiplisere antall stoler med antall bord, uten å uttrykke spesifikt hvor stort antallet stoler er. Basert på det som har skjedd tidligere i dialogen, kan en likevel gå ut fra at det Ada egentlig mener å si, er at det generelle antall stoler er 3, og dermed blir uttrykket 3*antall bord + 2. Noe som i utgangspunktet er det samme som Annas uttrykk. Da Ada i setning 212 gir uttrykk for at det fortsatt er ønskelig å operere med et spesifikt antall bord i formelen, her 1000, velger jeg ut fra situasjonen å se det som at Anna har utviklet mer forståelse for problemet enn Ada. Da det å operere med et spesifikt talleksempel er noe som er mer typisk innen det Radford (2010) definerer som kontekstbasert generalisering. I setning 217 stiller Anna spørsmål til Adas måte å uttrykke den generelle formelen på. Da Anna mener at det generelle antallet stoler er 3, er det uvisst hvorfor eleven uttaler at ”antall stoler ganger antall bord” er en mer forklarende uttrykksmåte. Dette har ikke jeg som forsker grunnlag til gi en utdypende forklaring på. Men jeg antyder at det enten kan komme av usikkerhet i forhold til egen løsning, eller av høflighet overfor medelev.

Neste situasjon oppstår i gruppe 2, når elevene forsøker å skive ned hva de har funnet ut om det generelle i oppgaven.

Situasjon 10, gruppe 2:

258. Marie: Eh, du tar, ut i fra hvert bord så er det jo 3 stoler. Så da tar du 3 gange med så mange bord du skal ha, pluss 2 på endene.
259. Mons: Mhm
(Mie smiler)
260. F: Ja, hva sier dere andre om det?
261. Mons: Ja, det er riktig

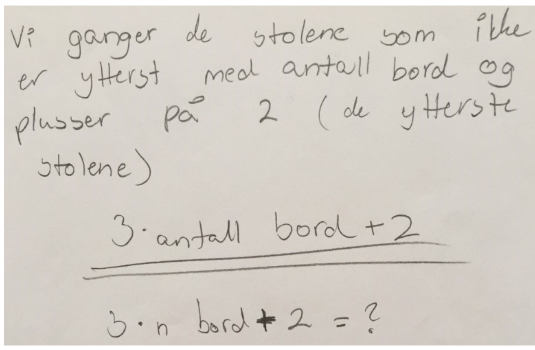
262. Mie: JA, det er rett!
263. F: Ja, det er helt rett det Marie sa. Klarer dere nå å skrive ned med ord, eller en evt. matematisk formel for dette?
264. Mons: Skriv du Marie.
(Stillhet, fordi de ikke helt forstår)
265. Marie: Hehe, 3*antall bord + 2
266. Mie: Hehehe
267. Mons: 3 gange n
268. Mie: Haha 3*n (ironisk)

I denne situasjonen tar elevene i bruk bokstaven n, slik det blir spurt om i siste deloppgave elevene skal gjennomføre. Derfor blir denne løsningen plassert innenfor symbolsk generalisering, da elevene benytter seg av algebraens alfanumeriske semiotiske system (Radford, 2010). I dette utdraget er det Marie som er den på gruppen til å både utrykke generaliteten muntlig eksplisitt, og å være den første til å si 3*antall bord + 2. Dette indikerer at Marie har utviklet en eksplisitt forståelse for problemet i oppgaven. Basert på Maries uttalelser, nevner Mons uttrykket 3*n, som viser at han også er i stand til å ta i bruk variabelen n, og har forståelse for at n er en notasjon for antall bord. Mie derimot, er på et lavere nivå innen algebraisk resonnering, da hun responderer med latter og ironi på Mons sitt forslag om å uttrykke generaliteten gjennom variabelen n. Grunnen til at Mie reagerer slik, er antakeligvis at bruk av variabler på denne måten er ukjent for elevene, og at eleven dermed har lite eller ingen relasjon til en slik algebraisk uttrykksform.

Også Jenny på gruppe 3 viste evne til å uttrykke seg innen symbolsk generalisering mot slutten av sekvensen, som den enste på gruppa.

Situasjon 11, gruppe 3:

162. Jenny: Det blir liksom 5-2. Det blir jo 3, også gange det med antall bord. N. (Hehe). Og plusse på to.



Figur 4

Utsagnet over viser at Jenny har evne til å bruke den generelle informasjonen gruppen har identifisert ved arbeidet med generaliseringsoppgaven til å gi et eksplisitt uttrykk for et hvert element i figurmønsteret. Jenny viser at hun er i stand til å beskrive regelen, uttrykke den med symboler, og å beskrive regelen for hvilket som helst tall med en full symbolsk ligning (Wilkie, 2016). Eleven er også i stand til å uttrykke seg skriftlig. Dette kan sees i figur 4.

4.1.5. Oppsummering av analysens første del

Visse tendenser er blitt synliggjort ved de tre elevgruppenes arbeid med generaliseringsoppgaven. Gjennom analysen av det matematiske innholdet kommer det frem at samtlige av gruppene startet med å generere ikke-algebraiske løsninger som plasseres innenfor det laveste generaliseringsnivået til Radford (2010), praktiskbaserte løsningsstrategier. Gruppene jobbet seg deretter videre og genererte både løsninger innen faktabasert og kontekstbasert generalisering. Mot slutten av sekvensen kom det frem eksempler blant alle elevgruppene som viste at de var i stand til å generere løsninger innenfor symbolsk generalisering, Radfords (2010) høyeste generaliseringsnivå. Selv om alle elevgruppene viste at de var i stand til å generere en eller flere løsninger innenfor symbolsk generalisering, dukker det likevel opp eksempler innad i gruppene som viser at det finnes forskjeller blant elevene når det kommer til hvilke generaliseringsnivå de befant seg på, og var i stand til å oppnå. Visse utsagn tyder nemlig på at selv om det på en gruppe ble generert løsninger innen symbolsk generalisering, var det likevel ikke alle elevene på gruppen som var i stand til å utvikle den samme forståelsen for det aktuelle problemet. Eksempel på et sikt tilfelle kommer blant annet frem i situasjon 10 i gruppe 2, hvor eleven Mie ironisk uttrykker ”haha 3*n”. Dette indikerer at hun ikke har utviklet forståelse for bokstavuttrykk og bruken av n. Nærmere utgreiing av denne situasjonen finnes under kapittel 4.1.4.. Et annet eksempel på et tilfelle hvor en elev befinner seg på et lavere generaliseringsnivå enn resten av gruppen, kommer frem i utsagnet til Alex på gruppe 1. Dette utsagnet ble ikke belyst i analysen, men jeg velger likevel å ta det med i oppsummeringen.

> 226. Alex: 3*n? Men da blir det jo ikke noe svar da!

Dette utsagnet responderer Alex med da en annen elev på gruppen akkurat har uttrykt den generelle løsningen på oppgaven i form av symbolsk generalisering. I begge disse eksemplene som viser forskjeller i nivå, uttrykker elevene uvitenhet rundt det generelle bokstavuttrykket som har blitt presentert av andre elever på gruppen. Dette indikerer at selv om en elev befant seg på en gruppe som var i stand til å generere løsninger innen symbolsk generalisering, var det likevel ikke alle elevene innad i gruppen som var i stand til å nå opp til Radfords (2010) høyeste generaliseringsnivå. Ut fra de tre gruppenes dialoger kommer det frem at blant de to første gruppene nådde 3 av 4 elever opp til symbolsk generalisering, mens i den siste gruppen nådde kun en elev toppen av generaliseringens nivådeling.

Praktiskbasert løsningsstrategi	Faktabasert generalisering	Kontekstbasert generalisering	Symbolsk generalisering
Addisjonsmetoden	Dobling / Halvering	5–2*talleksempel + 2	3*antall bord +2
Tegn-og-Tell	Multiplikasjonsmetoden	3*talleksempel + 2	3n + 2
		3*98 + 8 → 3*(n-2) + 8	
		(3*98) + (4*2)	
		(1*100) + (2*100) +2 → n + 2n +2	

Tabell 1: Oversikt over alle genererte løsningsstrategier.

4.2. Analyse del 2: Samtalene

I denne delen av analysen vil jeg ta for meg elevutsagnene fra dialogene som oppstod under arbeidet med generaliseringsoppgaven. Elevutsagnene vil i hovedsak bli sett opp mot de åtte elementene innenfor Alrø og Skovsmoses (2002) Inquiry Co-operation Model. Disse elementene klassifiserer kvaliteter i dialoger som finner sted mellom lærer og elever eller elever innbyrdes når de arbeider i en undersøkende prosess (Alrø & Skovsmose, 2006). Avslutningsvis i dette kapitlet, vil det komme et oppsummerende avsnitt med en tilhørende tabell som viser oversikt over IC-modellens kategorier og variasjoner av elevenes uttrykksmåter innad i kategoriene.

4.2.1. Å kontakte

Den første typen elevutsagn som blir presentert, går ut på hvordan elever skaper og opprettholder kontakt i gruppen. Når elevene arbeidet med generaliseringsoppgaven, oppstod det ofte elementer og samtaletrekk som bidro til kontakt. Nedenfor blir det vist to eksempel på dette:

10. Ada: Tar du neste da Alex? (Gruppe 1)

265. Mons: Skriv du Marie (Gruppe 2)

Her ser vi to eksempler på elevutsagn som viser at det opprettholdes kontakt i gruppen. Felles for disse utsagnene er at både Ada og Mons delegerer oppgaver innad i gruppen. Setning 10 viser at gruppe 1 er i ferd med å starte på en ny oppgave, og siden Ada leste den forrige deloppgaven, vil hun nå at noen andre skal lese den neste, og henvender seg dermed til Alex. Ved å la alle delta på denne måten, er det med på å styrke følelsen av tilhørighet i gruppen. Ut fra slik situasjonene utspilte seg, ser jeg begge utsagnene over som forsøk på å være høflige og inkluderende. Dette ved å la alle få mulighet til å delta i gruppearbeidet, og til å føle seg velkommen og ønsket. Dette viser at elevene er oppmerksomme i forhold til andre gruppemedlemmer, noe som er et viktig element innen kategorien å kontakte (Alrø og Skovsmose, 2006).

Et annet eksempel er dette:

144. Jenny: jaa, dere må jo hjelpe til. Ikke se på meg alle sammen (Gruppe 3)

Dette er også et eksempel som viser at det blir opprettholdt kontakt i gruppen, hvor vi ser at Jenny søker støtte og hjelp fra sine medelever. Dette utsagnet kan komme av at Jenny føler hun var den som ble tildelt hovedansvaret på gruppen, og at de andre gruppemedlemmene forventer at hun skal sitte inne med de riktige svarene. At Jenny søker støtte fra resten av gruppen, er med på å opprettholde kontakten ved å inkludere og å sette krav til de andre gruppemedlemmene, og å arbeide med oppgaven sammen som et team.

En annen måte elevene holdt kontakt i gruppen på, var gjennom non-verbal oppførsel (Cohen et.al., 2011). Dette kom til syne gjennom ulike gester som blikk, latter, begeistring, frustrasjon, high-five og andre kroppslige bevegelser. Dette var noe som hyppig oppstod gjennom samtalene. Å gi bekreftelse er også et element innen kategorien å kontakte. Dette kunne man se i form av at elevene f.eks. svarte ja, nei eller mhm. Men det kom også til syne gjennom nikking og risting på hodet. Slike gester viste at elevene var interessert og tilstede under oppgavesekvensen.

Også forsker kom i løpet av samtalene med utsagn som bidro til kontakt i gruppen. Nedenfor ser vi to eksempler på dette.

> 59. F: En om gangen. Alle må få si hva de tenker (Gruppe 3).
>
> 91. F: Dere må nesten komme til enighet (Gruppe 3).

Her ser vi to utsagn som er hentet fra dialogen i gruppe 3. Utsagn 59 oppstod i en situasjon hvor gruppemedlemmene var så ivrige på å finne løsninger og fronte egne meninger, at det var vanskelig for alle å komme til orde. Utsagn 91 oppstod i en situasjon hvor det var uenighet i gruppen. Da måtte forsker bryte inn for å få elevene til å argumentere for og i mot de to ulike løsningsforslagene det stod mellom. I begge disse utsagnene kommer forsker med oppfordringer til elevene som skal bidra til å holde fast ved strukturen i samtalen. Disse utsagnene ligner de tidligere eksemplene, ved at de er med på å skape og opprettholde kontakten i gruppesituasjonen.

Felles for alle de presenterte utsagnene og eksemplene av både elever og forsker, er at de bidrar til kontakt eller opprettholdelse av kontakt i gruppen. Å kontakte går ut på å tune inn på sin samarbeidspartner og å sette seg inn i andres perspektiver, noe som er en forutsetning for at samarbeid skal kunne finne sted. Kontakt i sin forstand, er med på å etablere en positiv relasjon mellom partene, og åpner for samarbeid (Alrø & Skovsmose, 2006). Gjennom dialogene til alle de tre gruppene var det tydelig at elevene var til stede og oppmerksomme i forhold til hverandre og hverandres bidrag i samtalen. Dette kom til syne ved at de støttet hverandre gjennom bekreftelse og ulik form for non-verbal oppførsel. Det var også mye latter til stede, de brukte humor, og de var oppmerksomme og inkluderende i forhold til andre gruppemedlemmer. Alle disse faktorene er også viktige elementer for opprettholdelse av kontakt.

At elevene tok initiativ til kontakt, samt at de opprettholdt den kontakten som allerede var skapt i gruppen, var noe som skjedde jevnt over gjennom hele samtalen til alle de tre elevgruppene. Som Barnes (2008) skriver, kan arbeid i mindre grupper i matematikkfaget føre til at en større andel av klassen er aktive og involverte i samtalene, og i å tenke høyt. Dette var også noe som kom tydelig frem under elevenes arbeid med generaliseringsoppgaven.

4.2.2. Å oppdage

Under arbeidet med generaliseringsoppgaven kom elevene ofte med utsagn som uttrykte undring og interesse for videre undersøkelse, samt utprøving av nye muligheter, slik som her:

> 37. Mons: Men 10 bord, blir ikke det dobbelt så masse da? (Gruppe 2)

> 184. Ada: Så ja, da blir det jo egentlig å gange hvor mange bord med hvor manges stoler det er, og så plusser man på to. Det blir jo det som er rett ja? (Gruppe 1)

Dette er to eksempler på elevutsagn hvor begge er uttrykt i spørsmålsform. Å stille spørsmål er et typisk element i kategorien å oppdage. I både Mons og Ada sine utsagn ser vi at elevene kommer med forslag til en løsning, for så å stille et åpent spørsmål til resten av gruppen. Dette viser at elevene har utviklet innsikt og forståelse for problemene de arbeider med, men at de likevel ikke er helt sikre på sine løsningsforslag, og søker dermed respons fra de andre gruppemedlemmene ved å stille et spørsmål.

Et annet eksempel på elevutsagn som uttrykte undring, er dette:

> 148. Mons: Men hva skal vi minuse da?! (Gruppe 2)

Som de to forrige eksemplene er også dette elevutsagnet uttrykt gjennom en undrende og undersøkende spørsmålsform. Det som skiller dette utsagnet fra de to eksemplene over, er at Mons i dette tilfellet ikke presenterer en løsning i forkant av spørsmålet. Mons uttrykker heller en uvisshet rundt den løsningsstrategien som er oppe for diskusjon i gruppen. Eleven gir dermed de andre gruppemedlemmene ansvaret med å svare på det undrende spørsmålet som ble stilt, noe som igjen kanskje kan bidra til å hjelpe han videre i prosessen med å finne en fungerende løsningsstrategi for oppgaven.

Tross noen forskjeller, er likevel det som kjennetegner alle de presenterte elevutsagnene, at de uttrykkes som spørsmål med en undersøkende, undrende, utvidende og/eller oppklarende tilnærming. Slike typer spørsmål er et vesentlig element innen IC-modellens kategori å oppdage (Alrø og Skovsmose, 2006).

Elevene stilte seg også undrende og utforskende til arbeidet med generaliseringsoppgaven på andre måter. Dette kommer frem i de to neste eksemplene.

1. Jenny: Jeg prøver å tegne først jeg. (Gruppe 3)

146. Mons: Så nå ganger vi de stolene på 32 med 100 bare at vi må ta minus noe. Så det blir 320 minus noe. (Gruppe 2)

Disse utsagnene ligner de tre første eksemplene, da alle uttrykker en undersøkende tilnærming til arbeidet. Men det som skiller disse to utsagnene fra de tre første, er at her kommer elevene med forslag og muligheter til videre utprøving. Dette kommer frem både i Jenny og Mons sine utsagn, hvor det blir gitt direkte forslag til å prøve ut en mulig løsningsstrategi.

Alle de fem elevutsagnene som nå er presentert, plasseres i kategorien å oppdage. Dette fordi elevene baserer seg på å finne ut av noe nytt, altså noe de ikke visste på forhånd. Disse utsagnene viser også at elevene gjennom gruppesamarbeidet gjør nye oppdagelser sammen, ved at de utrykker og synliggjør perspektiver i samtalens overflate, som bidrar til å kunne utforske og prøve ut nye muligheter. I følge Alrø og Skovsmose (2006) er å oppdage tett knyttet til om elevene har stiftet eierskap til prosessen og det arbeidet som gjøres. At det er blitt stiftet eierskap til den undersøkende prosessen, kommer til uttrykk ved at elevene gjennom hele sekvensen kommer med nye forslag og spørsmål, og virker interesserte i å finne nye løsningsstrategier som kan hjelpe dem på veien med å finne det riktige svaret på oppgaven.

Selv om alle de fem presenterte utsagnene er plassert innenfor kategorien å oppdage, ser vi likevel at det finnes forskjeller i hvordan elevene uttrykker seg. De tre første eksemplene baserer seg på at elevene stiller undersøkende spørsmål, og de to siste eksemplene innebærer at elevene kommer med forslag til videre utprøving. Ut fra disse forskjellene finner jeg det dermed hensiktsmessig å dele kategorien å oppdage inn i to underkategorier: Spørsmål og forslag.

A. Spørsmål innebærer en undrende, oppklarende, undersøkende eller utvidende spørsmålsstilling. Spørsmål kan også opptre sammen med forslag til ny løsning.
B. Forslag innebærer å komme med mulige løsninger og forslag til videre utprøving.

Utsagn som plasseres i kategorien å oppdage, oppstår jevnlig i alle de tre elevgruppenes dialoger, både i spørsmålsform og i form av forslag til videre utprøving. Utsagn i denne kategorien er med på å skape fremgang i elevenes matematiske utvikling. At elevene viser en undrende og undersøkende holdning til gruppearbeidet, bidrar til opprettholdelse av driv og fremgang i samtalene. At elevene utforsker og prøver ut muligheter kan også føre til nye oppdagelser i den undersøkende prosessen.

4.2.3. Å identifisere

Gjennom dialogene hendte det at elevene utarbeidet matematiske ideer ut fra tidligere felles oppdagelser i gruppen. Nedenfor presenteres et eksempel på dette.

36. Mie: Nei, jeg tenkte i hodet fordi at liksom når man setter sammen to bord, eller tre bord da, så blir jo det midtabordet, da mangler, da mister jo det to plasser på sidene, fordi at de (viser med hendene at de blir satt sammen), fordi at bordene blir sammensatt. (Gruppe 2)

I dette utsagnet ser vi at Mie introduserer en ny oppdagelse under arbeidet med generaliseringsoppgaven. Ved å introdusere sin ide til resten av gruppen, kan dette bidra til matematisk forståelse. Oppdagelsen Mie har gjort, er at man ”mister” stolene på endene når man setter sammen bord. Ved å forstå dette, beveger eleven seg i riktig retning mot å etterhvert utvikle forståelse for en mer generell løsning på oppgaven.

Et annet eksempel på å identifisere er dette:

70. Alex: Når vi har to her og en her, så kan vi ta to ganger 100, som er 200. Pluss en ganger 100, det blir 300. Fordi at her er det en stol og her er det to. (Peker på lang- og kortsidene på bordene). Så legger vi bare til to på endene, da blir det jo 302. (Gruppe 1)

Dette utsagnet er likt Mie sitt utsagn, da begge elevene identifiserer og utarbeider matematiske ideer på bakgrunn av tidligere oppdagelser. Men i Alex sitt utsagn ser vi at han har beveget seg opp på et høyere matematisk nivå, da han har utviklet forståelse for at det totalt er tre stoler pr bord, pluss en stol på hver ende. I dette tilfellet arbeider eleven med å finne løsningen på hundre bord, og svaret som avgis er korrekt.

Under samtalene hendte det også at elevene uttrykte seg i form av ”hæ?” og ”hvorfor det?”. Dette er utsagn som tyder på at elevene var ute etter å identifisere de matematiske problemene de arbeidet med. Å stille hvorfor-spørsmål er også et av de sentrale elementene i kategorien å identifisere (Alrø og Skovsmose, 2006).

Det hendte også at forsker kom med innspill i samtalene, slik som her:

248. F: Okei, jeg kan forklare hva n betyr. N betyr et hvilket som helst antall bord. Det kan være hva som helst. Si at det er en person som skal lage et langbord i et selskapslokale da, og det spiller ingen rolle om han skal ha 10 bord eller 20 bord eller 100 eller 1000 bord. Han må finne en metode han kan bruke for å finne antall stoler for hvilket som helst antall bord da, om dere skjønner? (Gruppe 2)

Det var altså ikke bare elevene som identifiserte matematiske ideer. Under arbeidet med generaliseringsoppgaven var det også behov for å gi elevene forklaringer, for å hjelpe dem i gang med oppgavene. I dette utsagnet av forsker, ser vi at begrepet n bord blir forklart. Dette blir gjort for å identifisere det faglige innholdet, og å synliggjøre det for deltakerne i gruppen, slik at alle skulle ha mulighet til å delta i å finne en løsning på oppgaven. At forsker måtte forklare og hjelpe elevene med å identifisere betydningen av n bord, skjedde i alle de tre elevgruppene når de startet på siste deloppgave, hvor de skulle finne løsningen på n bord. Dette kommer nok av at elevene hadde lite erfaring med bokstavuttrykk, og at de aldri hadde vært borti begrepet n før. Noe elevenes matematikklærer også kunne bekrefte.

Alle de tre presenterte utsagnene er plassert i kategorien å identifisere, da de tar utgangspunkt i å utarbeide matematiske ideer basert på gruppens tidligere felles oppdagelser.

Ved å oppdage og å utforske perspektiver, vil det videre bli mulig å identifisere et faglig innhold og å gjøre det synlig for alle deltakerne i undersøkelseslandskapet. I forrige kategori, å oppdage, ble det vist til ulike spørsmål elevene stilte. Disse undrende ”hva-hvis” spørsmålene fra forrige kategori, blir i denne kategorien fulgt opp av hvorfor-spørsmål. Hvorfor-spørsmål skal ikke bare kartlegge matematiske ideer, de skal også i bred forstand bidra til videre utforsking av disse ideene (Alrø og Skovsmose, 2006).

Utsagn som ble plassert i kategorien å identifisere opptrådte heller sjeldent gjennom elevenes dialoger. Ut fra datamaterialet kommer det frem at elevene i større grad benyttet seg av undrende, utforskende, og utvidende spørsmål for å identifisere elementer ved oppgaven de arbeidet med. Slike typer spørsmål ble det skrevet om under forrige kategori, å oppdage.

4.2.4. Å advokere

Noe som tydelig kom til syne gjennom transkripsjonene av datamaterialet, var at elevene ofte uttrykte egne synspunkter og kom med forslag til løsningsstrategier under arbeidet med generaliseringsoppgaven, slik som i eksemplet nedenfor:

> 74. Marie: Jo! Fordi at, hvis vi deler den her. Så er det jo en person her og en person der, fordi det er liksom enden på bordet. Så da blir det jo minus 2. 2 personer fordi, 17+17 er 34 sa du Mons, minus 2 personer fordi bordet blir sammensatt igjen, og da blir jo de plassene borte. *(Gruppe 2)*

Et annet eksempel på dette er:

> 4. Mons: Fordi at når det er ett og ett bord så har du alle sidene. Men når du setter dem sammen så mister du en av sidene på hvert bord. Det er sånn jeg tenker. *(Gruppe 2)*

I begge disse utsagnene presenterer elevene løsninger på oppgaven de arbeider med. Ordet ”fordi” blir brukt av både Marie og Mons. Når en sier fordi så forklarer en hvorfor en mener noe er slik. At elevene bruker ordet fordi, gjør at de åpner for at andre elever på gruppen skal kunne forstå hvordan de tenker, og lar dem ta del i sin tankeprosess. Det sentrale i begge disse utsagnene er dermed at elevene argumenterer for sine synspunkter gjennom å presentere egne tanker og ideer i form av løsningsstrategier.

I Maries utsagn ser vi at hun omtaler gruppen som ”vi”, og viser dermed en inkluderende holdning til gruppearbeidet. Dette er en indikator på at hun har stiftet eierskap til arbeidet, noe som Alrø og Skovsmose (2002) omtaler som en viktig faktor i en undersøkende prosess.

I tillegg kan vi se at når Marie argumenterer for sin egen løsning, velger hun å spille på et utsagn som medeleven Mons har uttalt tidligere i dialogen. At Marie gjør dette, viser at hun benytter seg av aktiv lytting, som er et viktig element i Inquiry Co-operation. Dette kommer frem ved at hun oppfatter en annen elevs uttrykte forståelse, og er videre i stand til å ta i bruk dette i prosessen med å skape sin egen forståelse av problemet (Alrø & Skovsmose, 2002). I Mons sitt utsagn, kan vi se at han avslutter med å si ”det er sånn jeg tenker”. Dette ligner på det Alrø og Skovsmose (2006) beskriver som at eleven er villig til å revidere egen oppfattelse. Dette kan bidra til å nå en felles forståelse i gruppen, ved at også flere elever inviteres til å presentere egne løsninger, og at de sammen som gruppe kan reflektere kollektivt over de ulike forslagene.

Elevene støttet også opp om forslag, og kom med egne synspunkter på andre måter under arbeidet med generaliseringsoppgaven. Dette blir vist i eksemplene under.

2. Alex: Okei, på oppgave 1 så er det 8 stk. (Gruppe 2)

152. Anna: JO! Denne løsningen funker! (Gruppe 1)

214. Ada: Jeg skrev 3*antall bord pluss 2. (Gruppe 1)

Disse tre utsagnene kan sammenlignes med de to første eksemplene, ved at elevene også her støtter andre elevers forslag og kommer med egne synspunkter. Samtidig skiller de seg klart fra eksemplene over fordi dette er rene påstander som ikke inneholder forsøk på forklaring eller argumentasjon. Disse elevutsagnene ser jeg på som konkrete uttalelser hvor elevene enten kommenterer sin egen eller andres løsningsstrategi. Vi kan se at alle elevene gjennom de tre utsagnene uttrykker egne synspunkter, noe som er et viktig element i kategorien å advokere (Alrø & Skovsmose, 2006). Men forskjellen fra Marie og Mons sine utsagn, er at elevene i disse tilfellene ikke sier noe om *hvorfor* de mener det skal bli slik.

Alle de fem elevutsagnene som nå er presentert, plasseres i IC-modellens kategori å advokere, da elevene får frem egne synspunkter, ideer og forslag til undersøkelse, som kan bidra til å nå en felles forståelse i gruppa. Når flere lærende arbeider sammen, som i disse situasjonene, er det viktig at man opprettholder en bevissthet om at det eksisterer ulike perspektiver og synsvinkler blant medlemmene i gruppen, og at hver og en av disse perspektivene kan bidra som ressurser i samtalen (Alrø & Skovsmose, 2006). Dette så også ut til å fungere godt blant elevgruppene i denne undersøkelsen, da det gjennom hele sekvensen stadig dukket opp nye forslag til løsninger. Disse løsningene ble videre undersøkt i gruppen, og bidro som ressurser i samtalen.

Selv om alle elevutsagnene innenfor kategorien å advokere baserer seg på å stå for et standpunkt og å uttrykke egne synspunkter, blir det likevel gjort på forskjellige måter. Dette kan man se da de første eksemplene bærer preg av å argumentere, og de siste av å komme med en påstand. Ut fra mitt datamateriale finner jeg det dermed hensiktsmessig å snakke om to typer advokering: Argumentasjon og påstand. Ved å dele kategorien å advokere inn i to underkategorier, vil jeg få frem to viktige nyanser i hvordan elever advokerer:

A. Argumentasjon innebærer å presentere egne synspunkt ved å argumentere for sine påstander. Samtidig er man åpen for nye muligheter og å reflektere kollektivt.
B. Påstand innebærer å komme med et utsagn eller en påstand uten noen form for videre begrunnelse.

Utsagn som plasseres innenfor kategorien å advokere, opptrådte jevnt gjennom samtalene mellom elevgruppene. At elevene kom med påstander, skjedde oftest når elevene befant seg i en idemyldrings-prosess, hvor de prøvde ut ulike løsningsstrategier. Argumentasjon derimot, kom vanligvis til syne når elevene var godt i gang med å utvikle en løsningsstrategi for en gitt oppgave. Det kan tenkes at dette skyltes at elevene på dette tidspunkt av oppgavejobbingen hadde utviklet nok kunnskap og forståelse til å kunne komme med en påstand, i tillegg til å være i stand til å begrunne for denne påstanden. Mitt datamateriale viser at innenfor kategorien å advokere, hendte det oftere at elevene argumenterte enn at de kom med påstander.

4.2.5. Å tenke høyt

Gjennom samtalene hendte det ofte at elevene uttrykte utsagn som viste at de tenkte høyt. Å tenke høyt kunne for eksempel bli uttrykt på denne måten:

45 Anders: (ivrig) Ja men, se her da, se her da. Hvis du tar en på hver ende. Så tar du ti bortover, med annenhver en, to, en , to,,, det blir jo...(Gruppe 1)

186. Jonas: Det som er, er at først så er det 17 og 8 og sånn. Og så etter det kommer 32, og 302, og 3002. Og så bare fortsatte det. (gruppe 3)

Disse utsagnene viser at elevene tenker høyt ved at de uttrykker ideer og tanker til videre undersøkelse. I utsagnet til Anders ser vi at han er i ferd med å oppdage at bordene består av en stol på kortsiden og to stoler på langsiden, samt en stol på hver ende. Dette uttrykker han ivrig til resten av gruppemedlemmene ved å gjøre tanker om til ord, noe som er et kjent fenomen innen denne kategorien (Alrø & Skovsmose, 2002). Også i Jonas sitt utsagn blir tanker omgjort til ord. Her har eleven begynt å interessert seg for om det finnes sammenhenger mellom svarene de generere på de ulike oppgavene, noe som legger opp til videre undersøkelse i gruppen. Dette utsagnet viser også at eleven har stiftet eierskap til den undersøkende prosessen, ved at en ikke bare fokuserer på akkurat det oppgaven spør etter, men også interesserer seg for å finne andre sammenhenger ved figurmønsteret. Å reflektere over det matematiske problemet på denne måten, mener Barnes (2008) innebærer at elevene selv tar ansvar for å finne sammenhenger og at de søker etter nye teknikker og nye måter å forstå det aktuelle problemet på.

Andre eksempler på hvordan elevene tenkte høyt, kunne for eksempel se slik ut:

44. Mie: Såå, når det er 10 bord...så blir det jo ikke dobbelt såå... (pause) jo det blir det. (smiler)(usikker) (Gruppe 2).

117. Mie: Ja, men på 1 bord er det plass til 17stk, så da må vi ta 17 gange..ehhm (tenker seg om) (Gruppe 2)

140. Jenny: og så plusse de sammen? Eh nei nei, gaange? Gange med antall bord... ooog plusse på to (gruppe 3)

Dette er også eksempler på å tenke høyt, fordi tanker blir offentliggjort som ressurs for gruppen. Men forskjellen fra de to første utsagnene, er at disse to utsagnene gjennom å uttrykke tanker, også inviterer andre elever på gruppen til å delta i tankeprosessen og å arbeide sammen. Dette kommer frem ved at elevene uttrykker en usikkerhet, ofte i spørsmålsform, som tilbyr andre elever muligheten til å komme med sine tanker rundt problemet. Et annet fellestrekk for disse tre utsagnene, er at de er uttrykt gjennom avbrutte og oppstykkede setninger. Dette avslører elevenes usikkerhet rundt det de arbeider med. Men det kan også være en indikator på at elevene føler en trygghet i forhold til de andre gruppemedlemmene, som fører til at de tør å uttrykke alle de tanker som faller dem inn under gruppearbeidet, selv om de ikke er sikre på svaret. Dette er et kjennetegn på det Barnes (2008) omtaler som utforskende samtale, som er en samtaletype som typisk forekommer når elever på tidlige stadier jobber med nye tema og nærmer seg nye ideer. Barnes (2008) sier at en av de mest vesentlig faktorene som bidrar til utforskende samtale, er at elevene føler seg trygge i gruppesituasjonen. Noe elevene i dette forskningsprosjektet ga uttrykk for at de var.

At elever får gjøre sine tanker og ideer om til ord, mens det undersøkes og arbeides med oppgaver i en gruppesituasjon, er med på å offentliggjøre ideer og tanker som ressurs for gruppen (Alrø & Skovsmose, 2002). Dette så vi eksempler på i alle de presenterte utsagnene ovenfor. At elevene tenkte høyt, var noe som opptrådte jevnt over i samtalene til alle de tre elevgruppene, uavhengig av hvilken oppgave de arbeidet med. Selv om det kommer frem forskjeller i hvordan elevene uttrykte seg når de tenkte høyt, er variasjonene likevel ikke så store at jeg finner det hensiktsmessig å opprette underkategorier.

4.2.6. Å reformulere

Å reformulere er et viktig element i dialoger hvor gruppedeltakere arbeider tett sammen, for å forstå hverandre, og å sammen skape nye forståelser. Dette forekom også i dialogene under oppgavejobbingen, og kunne for eksempel se slik ut:

5. Ada: Ja, man kan jo ikke sitte der hvor bordene blir slått sammen, så da blir det jo bare fire på hvert bord da. Så da blir det åtte (Gruppe 1)

68. Anders: Mhm. Og på alle de andre er det tre (Gruppe 1)

126. Anders: For da hadde det til sammen vært åtte stoler på de ytterste bordene (Gruppe 1)

Her ser vi to elevers utsagn som plasseres i kategorien å reformulere, da elevene gjentar noe som tidligere er blitt sagt med egne ord. I setning 5 ser vi at Ada bekrefter forståelse for at stolene mellom bordene "forsvinner", og at det da blir plass til åtte stoler på to bord. I setning 68 ser vi at Anders bekrefter og tilføyer at det på alle bordene er plass til tre stoler. Dette sier han fordi en medelev rett før i dialogen har uttalt seg om at det er fire stoler på de ytterste bordene. Senere i dialogen uttaler Anders i setning 126 seg igjen om antall stoler på de ytterste bordene, selv om dette har vært nevnt både av han selv og av Ada tidligere i samtalen. Disse utsagnene kategoriseres som å reformulere, da elevene refererer til noe som allerede er blitt sagt, ved å gjenta tidligere uttalelser, men på en litt annen måte. Dette er med på å bekrefte at elevene har hørt hva som har blitt sagt.

Nedenfor presenteres det nok et eksempel på hvordan elever reformulerer.

> 150. Johanne: Og så tar vi bort den
> 151. Jenny: Ja, så tar vi bort de to her (endene)
> 152. Jonas: Og da står det tre igjen.
> 153. Jenny: ja

Her ser vi et utdrag fra dialogen i gruppe 3, hvor tre av fire elever er innblandet. Dette er et eksempel på at reformulering skjer flere ganger på rad, da elevene bygger videre på hverandres utsagn for å komme til enighet i det aktuelle problemet de arbeider med. Disse fire utsagnene viser også at elevene utfyller hverandres ytringer, noe som er et av de sentrale elementene innen kategorien å reformulere (Alrø & Skovsmose, 2006).

De utsagnene som nå er presentert, er eksempler på at elever reformulerer på ulike måter ved at de gjentar og utfyller hverandre. Når elever gjør dette, er de med på å bekrefte en gjensidig forståelse ovenfor de andre medlemmene i gruppen. Å reformulere kan i følge Alrø og Skovsmose (2006) brukes til å finne ut om man har forstått hverandre riktig, i tillegg til at det sikrer opprettholdelse av kontakt mellom gruppemedlemmene. Ut fra utsagnene, ser vi at det er forskjellige måter å reformulere det andre tidligere i samtalen har uttalt seg om. Men forskjellene innad i kategoriene er ikke så store at det er nødvendig med underkategorier.

Gjennom samtalene mellom elevene, var det ikke mange tilfeller av at elever reformulerte. Men når det oppstod, var det når en elev tidligere hadde kommet med en påstand eller argumentert for en løsningsstrategi. Deretter kunne andre elever gjenta det som ble sagt på en litt annen måte. Dette er igjen med på å bekrefte at man har hørt hva som er blitt sagt, noe som er et viktig element i situasjoner hvor det jobbes tett sammen som gruppe. Dette elementet ved kategorien å reformulere, ligner også et av elementene som Chapin et.al. (2013) beskriver som en viktig faktor i produktive samtaler. Nemlig at slike samtaler skal bidra til at elever engasjerer seg i hvordan andre tenker og resonnerer.

4.2.7. Å utfordre

Andre tydelige trekk ved elevdialogene, er at løsninger og strategier ofte ble utfordret, eller at det ble introdusert vendepunkter i den utforskende prosessen. Gjennom samtalene skjedde det både at elever utfordrer hverandre, og at forsker utfordrer elevene. Jeg vil nå gjennomgå dette hver for seg.

Når elever utfordrer:

134. Ada: Hvordan var det vi kom frem til 294? (Gruppe 1)

139. Anders: Hvordan kan vi få 294 hvis det er 100 bord, og det er 3 på alle de i midten? (Gruppe 1)

104. Johanne: Er det rett eller Jenny? (Gruppe 3)

I disse tre elevutsagnene tas det utgangspunkt i noe som allerede er funnet ut, før det så stilles spørsmål til dette. Spørreordet ”hvordan” blir brukt i utsagn 134 og 139. Når elevene tar i bruk dette ordet, spørres det etter en nærmere forklaring på hvorfor noe er som det er. Dette blir trolig gjort fordi elevene er usikre på om den løsningsstrategien eller det svaret de har kommet frem til stemmer. Både Ada og Anders stiller spørsmål til om 294 er riktig antall stoler for hundre bord. Da svaret på hundre bord skal bli 302, kan dette være årsaken til at elevene på gruppe 1 velger å utfordre det svaret gruppen har kommet frem til (294).

I Johanne sitt utsagn stilles det derimot et direkte spørsmål til én bestemt medelev. Noe som skiller seg fra Ada og Anders sine utsagn, hvor det utfordres ved å stille spørsmål til gruppen som helhet. Fellestrekkene i disse utsagnene er dermed at både Ada, Anders og Johanne stiller spørsmål til en løsningsstrategi de har kommet frem til eller benyttet seg av tidligere, noe som er et typisk element i IC-modellens kategori å utfordre (Alrø & Skovsmose, 2006). Når elever utfordrer gjennom å stille spørsmål til hvordan og hvorfor noe er slik som det er, fører dette til at andre gruppemedlemmer må sette ord på og forklare sine tanker. Noe som igjen kan være med på å skape en felles innsikt i problemene.

Andre måter elevene utfordrer, er for eksempel slik som dette:

83. Jenny: Men kan du skrive opp hvordan du regner ut og får 30 Jonas? (Gruppe 3)

123. Jonas: Ja Jenny, forklar! (Gruppe 3)

Disse utsagnene ligner på de tre første, da elevene også her stiller spørsmål ved allerede oppnådde erkjennelser eller fastslåtte forståelser. Men det som skiller dem fra de tre første, er at elevene i disse utsagnene utfordrer andre medelever til å forklare eller å vise en tenkemåte. Likheter ved utsagn 83 og 123, er at både Jenny og Jens henvender seg direkte til en spesifikk person på gruppen. Dette kommer nok av at disse personene som blir bedt om å forklare dypere, tidligere i samtalen har presentert en løsningsstrategi eller et svar som Jenny og Jens (her) ønsker en nærmere forklaring på.

En annen måte å utfordre på, er for eksempel slik som her:

163. Alex: Jeg tror den funker på alle tall unntatt desimaltall. (Gruppe 1)

I Alex sitt utsagn ser vi at han uttrykker enighet i den generelle løsningen som gruppen har kommet frem til, om at formelen fungerer for hvilket som helst antall bord. Men i tillegg introduseres det også et vendepunkt i undersøkelsen, da eleven presenterer et alternativ som utfordrer den allerede genererte løsningen, ved å komme med forslag om desimaltall. At eleven uttrykte dette, kan være et tegn på at han har utviklet både eierskap og forståelse for den utforskende prosessen. Noe som kom til uttrykk da han faktisk var i stand til å tenke på andre løsninger, og å utforske noe som var utenfor det oppgaven spurte etter.

Når forsker utfordrer:

Videre innenfor kategorien å utfordre, vil jeg presentere hvordan forsker bidro i samtalene med å utfordre elevene på ulike måter. Eksempler på hvordan dette foregikk, blir presentert nedenfor.

147. F: Men da må dere prøve å forklare slik at alle på gruppa skjønner. (Gruppe 3)

224. F: Mari, fortell de andre hvordan du tenker. (Gruppe 2)

70. F: Okei, kan du forklare gruppen din hvorfor du tror det er 30? (Gruppe 3)

104. F: Men det stemte når det var 2 bord, og når det var 5 bord. Hvorfor stemmer det ikke nå? (Gruppe 3)

Utsagnene ovenfor viser fire eksempler på hvordan forsker utfordrer elevene ved å stille spørsmål angående deres tenkemåter og svar de har kommet frem til på ulike oppgaver. Grunnen til at forsker gjør dette, er fordi en vil at elevene skal sette ord på hva de har gjort og hvordan de tenker. Dette for at resten av gruppen skal kunne oppnå en felles innsikt i arbeidet, og for at samtlige gruppemedlemmer skal få sjansen til å delta i andres tenkemåter og løsninger på oppgavene. Ut fra utsagnene ser vi at forsker gjør dette ved å spørre om elevene kan forklare nærmere, eller eventuelt gjenta forklaringen som har vært omsnakket tidligere i dialogen. Forsker gjør dette da andre elever på gruppen har gitt uttrykk for at de ikke forstår.

I setning 104 ser vi at forsker stiller spørsmål til et spesifikt svar som elevene har kommet frem til. Dette blir gjort da elevene har gitt uttrykk for at den løsningsstrategien de har kommet frem til ikke fungerer på alle antall bord. Forsker vil med dette utsagnet hjelpe elevene til å finne ut hvorfor dette er tilfelle. Dette utsagnet kan eventuelt hjelpe elevene med å rydde opp i egen tankegang, da de blir utfordret til å sette ord på sine tanker, noe som kanskje kan hjelpe dem med å finne nye og forbedrede løsninger på problemet. Tross noen ulikheter, er fellestrekket for alle de fire presenterte utsagnene dermed at forsker utfordrer elevene ved å be om forklaring på elevenes tenkemåter og løsninger.

Forsker utfordret også elevene på andre måter. Slik som her:

188. F: Hva er det som er felles for alle bordene da? Ser dere noen fellestrekk? (Gruppe 2)

213. F: Nei, for da har du ett spesifikt tall. Men jeg vil ha noe generelt. (Gruppe 1)

Disse utsagnene er også måter å utfordre elevene på, da vi ser at forsker kommer med utsagn som kan være med på å ”strekke tanken” til elevene, og å utvikle deres løsningsstrategier. Det som skiller disse to utsagnene fra de forrige eksemplene, er at forsker her gir elevene hint som kan hjelpe dem videre i prosessen om å komme frem til en riktig løsning. Dette ser vi ved at forsker i begge utsagnene uttrykker og poengterer at oppgaven er ute etter noe generelt. Dette betyr dermed at elevene på dette tidspunktet arbeider med å finne løsningen på n bord. Det var altså ikke nødvendig at forsker kom med hint før enn på dette tidspunkt av samtalene, da elevene tidligere i arbeidsprosessen var i stand til å finne svarene på egenhånd.

Alle eksemplene som nå er presentert, både av elever og forsker, er plassert i kategorien å utfordre. Dette kommer frem ved at det blir stilt spørsmål som kan legge til rette for å utforske nye alternative muligheter, noe som er vesentlig i kategorien å utfordre (Alrø & Skovsmose, 2002). Som Alrø og Skovsmose (2002) også sier, er en betingelse for å lykkes med å utfordre, at noen i gruppen tar utfordringen. Om elever tar på seg eierskap i prosessen og griper utfordringen, kan dette være med på å introdusere et vendepunkt i undersøkelsen, da flere forslag til løsninger kan komme frem i lyset. Dette er noe som blir synliggjort i dette forskningsprosjektet, da det tydelig kommer frem at elevene tok utfordringene som ble gitt av både forsker og medelever. Dette var videre med på å utvikle elevenes tenkemåter og å legge til rette for at elevene kunne gjøre nye oppdagelser som hjalp dem på veien mot å finne svar på oppgaven.

Selv om det nå er blitt presentert flere ulike måter å utfordre på, har jeg likevel valgt å ikke dele kategorien inn i underkategorier, utover det at jeg har skilt mellom hvordan elever utfordrer og hvordan forsker utfordrer. Det overordnede elementet ved å utfordre, er å stille spørsmål ved allerede oppnådde erkjennelser eller fastslåtte forståelser. Dette kommer frem som et grunnleggende element for alle utsagnene som er presentert innenfor denne kategorien. De presenterte utsagnene viser dermed et stort mangfold innen kategorien å utfordre, både som forsker og elev.

Samtaleelementer fra kategorien å utfordre opptrådte i dialogene etter at elevene hadde presentert en mulig løsning på et problem. At elevene utfordret hverandre hendte som regel når de ikke riktig forstod hvorfor en medelev gjorde som han gjorde, eller avga det svaret som ble gjort. Dermed utfordret elevene hverandre gjennom å stille spørsmål, og å be medeleven(e) forklare sin tenkemåte nærmere. At elevene utfordret hverandre, var likevel noe som sjeldent hendte gjennom dialogene. At forsker kom med innspill som utfordret, opptrådte derimot hyppigere. Dette skjedde som oftest ved at forsker ba om nærmere forklaring av tenkemåte, noe som hendte i situasjoner hvor forsker fikk inntrykk av at ikke alle elevene på gruppen ”hang med” på det som ble sagt eller gjort. Forsker utfordret også elevene ved å gi hint som kunne være med på å utvikle elevenes tanker. Dette var noe som skjedde mot slutten av sekvensene, når elevene arbeidet med å fremstille et uttrykk for n bord.

4.2.8. Å evaluere

Etter at elevene hadde generert svar og løsninger på oppgaven de arbeidet med, ble disse ofte evaluert underveis i dialogene. Dette så for eksempel slik ut:

> 62. Anders: At, nei, at, at, nei det blir helt feil. Jeg vil ikke si det en gang (Gruppe 1)

> 318. Mons: JA! Det var det jeg sa! (slår blyanten i bordet) (Gruppe 2)

Disse elevutsagnene er eksempler på å evaluere, og det som er kjennetegner dem er at elevene her evaluerer seg selv. I Anders sitt utsagn ser vi at han tenker på et svar, men innser underveis at svaret ikke kan stemme, og vurderer det dermed som irrelevant å i det heletatt uttale seg om det tenkte svaret. Mons uttrykker at han etter å ha hørt noen andre på gruppen komme frem til det samme svaret som seg selv, kan konkludere med at han har tenkt riktig. Dette stemmer overens med det Webb (1991) sier om at elever som arbeider sammen i grupper, har en trang til å få bekreftet om sitt arbeid er riktig. Det å arbeide sammen med andre elever i samme situasjon og å se at også de kommer frem til de samme svarene, kan dermed bidra til å stimulere denne trangen.

Å evaluere ble også synlig i dialogene på andre måter, sånn som her:

84. Anders: Det er sant! (Gruppe 1)

94. Anders: ja, det er rett det. Yes, greit... (Gruppe 1)

84. Mons: Åjaaa! Ja, sånn blir det (Gruppe 2)

Disse tre utsagnene er lik de to første, ved at det også her gjøres evaluering av noe elevene har kommet frem til. Det som skiller disse utsagnene fra de forrige, er at elevene her gir respons til medelever ved at de bekrefter eller sier seg enige i andre elevers utsagn eller løsninger. Å gi bekreftelse er med på å vise ovenfor gruppen at en har forstått det som er blitt sagt. Dette er en sentral faktor innen kategorien å evaluere.

Andre måter elevene evaluerte hverandre på, kunne for eksempel se slik ut:

138. Mie: Det er ikke 32 på to bord Marie! (Gruppe 2)

53. Jonas: Ja men det kan jo ikke stemme! (Gruppe 3)

Dette er også utsagn hvor elevene evaluerer hverandre. Det som er annerledes med disse utsagnene, er at elevene her kommer med uttalelser hvor de påpeker feil ved andre elevers løsninger eller utsagn. At elever gjør dette, kan føre til at det introduseres vendepunkt eller skjer endringer i den undersøkende prosessen. Å påpeke feil i en gruppesituasjon kan være sårbart for medlemmene i gruppen. Men da det i disse situasjonene ikke oppstod negativ stemning innad i gruppen, var det heller et tegn på at gruppesammensetningen fungerte, og at gruppearbeidet bidro til å fremme holdninger, mellommenneskelig forståelse, sosiale ferdigheter og vekst for den enkelte elev. Dette er alle faktorer som Underlid (1997) beskriver som faktorer som tilfredsstiller sosiale behov.

Å evaluere kunne også se slik ut:

161. Anna: Da funket løsningen på 5 bord også da! (Gruppe 1)

219. Mons: Ja, det hørtes logisk ut! (Gruppe 2)

110. Jenny: Jeg syns det stemmer! Fordi du ser jo bare for deg at det ser sånn som dette i virkeligheten. (Gruppe 3)

I disse utsagnene evaluerer elevene en løsning de i fellesskap har kommet frem til. Dette er ulikt fra eksemplene som er presentert tidligere, hvor elevene evaluerer direkte utsagn gitt av seg selv eller av medelever. I Jenny sitt utsagn ser vi at hun i tillegg til å evaluere og bekrefte det de har kommet frem til, kommer med forslag til hvorfor hun syns det er riktig. Jenny sier at hun syns løsningen stemmer, fordi man kan se det for seg i virkeligheten. At eleven sier dette, er et tegn på at hun fant oppgaven virkelighetsnær og kjenner seg igjen i problemet. Det kan også bety at eleven har stiftet eierskap til den undersøkende prosessen, noe Alrø og Skovsmose (2006) omtaler som et sentralt element i undersøkelseslandskap. I slike læringssituasjoner arbeider elevene med oppgaver som ikke baserer seg på kun ett korrekt svar eller bestemte fremgangsmåter, og dermed er det opp til elevene å finne ut hvordan de vil løse problemet.

Mot slutten av sekvensen kom det frem nok en måte å evaluere på, som jeg syns fortjente en plass i analysen.

197. Anna: Dette var artig! (Gruppe 1)

210. Jonas: Eneste oppgaven jeg er usikker på, er den der 32 og 30. Hva det skulle bli liksom. Men vi fant jo en sånn regnemåte, sånn at 32 ble rett (Gruppe 3)

247. Ada: Jeg hadde aldri fått til dette om jeg skulle gjort det alene (Gruppe 1)

Her ser vi at elevene uttrykker en positiv holdning til det arbeidet som er blitt gjort i gruppesituasjonen. Jonas uttrykker i sitt utsagn at han underveis i sekvensen var usikker på om svaret skulle bli 30 eller 32. Dette oppstod når elevene arbeidet med å finne løsningen på ti bord. Men fordi elevene arbeidet sammen som gruppe og prøvde ut ulike løsninger, kom de frem til at svaret skulle bli 32. Utsagnet til Jonas kan dermed tyde på at han fant det nyttig å arbeide i gruppe, da de sammen kom frem til et svar han muligens ikke ville ha gjort på egenhånd. Dette ligner det Botten (2016) skriver om at elever som arbeider i grupper, må bli tildelt oppgaver med et slikt innhold at elevene nærmest føler det som en forutsetning å arbeide sammen. Ut fra Adas utsagn (247), uttrykker også hun begeistring for arbeidet som har funnet sted i gruppesituasjonen. Og bekrefter at å diskutere ulike løsninger gjennom interaksjon med medelever, trolig har hjulpet henne til å utvikle mer forståelse i den undersøkende prosessen enn hva hun ville gjort ved individuelt arbeid.

I tillegg til alle disse eksemplene på å evaluere, benyttet også elevene seg av bekreftende ord som ja, nei, yes, mhm o.l.. Dette virket som støttende og bekreftende elementer underveis i samtalene. Det var også med på å vise ovenfor andre elever at de var til stede i samtalene under gruppearbeidet. Noe som ligner elementene det ble skrevet om i kategorien å kontakte, hvor det ble nevnt non-verbal oppførsel, som nikking, risting på hodet, vise begeistring og engasjement, himle med øynene osv.

Som en kan se ut fra de presenterte eksemplene, finnes det ikke noen fasit på hvordan evaluering kom til uttrykk i samtalene mellom elevene, og listen over hvordan løsninger og svar ble evaluerte underveis i den undersøkende prosessen er lang. Evaluering kom til uttrykk gjennom at elevene både evaluerte egne og andres strategier og tanker, samt at løsningsstrategier som de sammen hadde kommet frem til i gruppen ble evaluert. Dette skjedde gjennom å bekrefte, være enig eller uenig, gi ros, påpeke feil, gi konstruktiv kritikk, vise engasjement og komme med ubetinget oppbakking. Som alle er sentrale elementer innen denne kategorien i følge Alrø og Skovsmose (2006). Gjennom de ulike måtene elevene uttrykte seg på innen kategorien å evaluere, finner jeg ikke forskjellene så store at jeg ser det som hensiktsmessig med en inndeling med flere underkategorier. Derfor valgte jeg heller å kun presentere nyansene i kategorien med eksempler, uten videre klassifisering.

At elevene evaluerte seg selv og hverandre, var noe som skjedde flere ganger i alle de tre elevgruppenes dialoger. Dette hendte oftest når elevene nærmet seg slutten på en av deloppgavene de arbeidet med, og bidro til videreutvikling av nye løsninger. Det er også blitt vist tilfeller av at elevene kommenterte og påpekte feil ved hverandres løsninger. Selv om slike tilfeller fant sted, opptrådte de likevel sjeldent gjennom elevenes dialoger. Og det var heller ikke i alle elevgruppene en kunne finne tilfeller av det.

4.2.9. Oppsummering av analysens andre del

Ut fra analysen av samtaletrekkene, kan man se at det innenfor alle IC-modellens åtte elementer finnes variasjoner og nyanser av hvordan elever uttrykker seg. Med dette menes måten elevene argumenterte for egne synspunkter, uttrykte en undrende og undersøkende holdning til den problemløsende prosessen, opprettet kontakt i gruppen, og lot medelever ta del i sine tankeprosesser. Elevene viste også evne til å plukke opp elementer ved andre elevers forklaringer og løsninger, for så å reformulere og videreutvikle dem til å skape egen forståelse og til å danne nye erkjennelser sammen som gruppe. I kategoriene *å oppdage* og *å advokere* var forskjellene i elevenes uttrykksmåter så tydelige, at det ble vurdert som hensiktsmessig å dele kategoriene inn i underkategorier. Blant resten av IC-modellens kategorier, var ikke forskjellene like tydelige, og de ble derfor presentert uten ytterligere inndeling med underkategorier.

Forsker deltok også i noen grad i samtalene blant elevene. Når dette var tilfelle, skjedde det via innslag av samtaletrekk fra kategoriene *å kontakte*, *å identifisere* og *å utfordre*. Derfor ble det i disse kategoriene skilt mellom elevers uttrykksmåter og forskers uttrykksmåter. Av disse tre, var det kategorien *å utfordre* som i størst grad inneholdt innslag av forsker. Som nevnt i det teoretiske rammeverket, hadde jeg som forsker på forhånd av observasjonen planlagt noen spørsmål som gikk ut på å be om begrunnelse eller forklaring fra elevene. Dette for å strekke elevenes tanker, og for å la dem ta del i hverandres tankeprosess. Det var på forhånd ikke planlagt *når* og *om* disse spørsmålene skulle stilles, da elevene diskutere fritt under arbeidet med generaliseringsoppgaven. Etter å ha arbeidet med det innsamlede datamaterialet, kom det frem at mange av de forhåndsplanlagte spørsmålene ble benyttet under observasjonen. Spørsmålene bestod for det meste av ord som ”hvorfor”, ”hvordan” og ”kan du forklare til de andre hva du tenker”. En slik type spørsmålsstilling beskriver også Franke et al. (2007) som verdifull for å få innblikk i, og for å offentliggjøre elevers tenkemåter. Utover det som nå er nevnt, var det ikke nødvendig for forsker å gjøre andre grep for å kontrollere samtalene underveis i observasjonssekvensene.

Kategori fra IC-modellen	Variasjoner innad i kategoriene og eventuelle underkategorier
Å kontakte	Elev: - Delegere oppgaver innad i gruppen - Søke hjelp og støtte fra medelever - Non-verbal oppførsel Forsker: - Opprettholde struktur i samtalen
Å oppdage	To underkategorier Elev: 1. Spørsmål: Innebærer en undrende, oppklarende, undersøkende eller utvidende spørsmålsstilling. Spørsmål kan også opptre sammen med et forslag om en ny løsning. 2. Forslag: Innebærer å komme med mulige løsninger og forslag til videre utprøving.
Å identifisere	Elev: - Introdusere ny oppdagelse - Hvorfor-spørsmål Forsker: - Forklare betydningen av n
Å advokere	To underkategorier Elev: 1. Argumentasjon: Innebærer å presentere egne synspunkt ved å argumentere for sine påstander. Samtidig er man åpen for nye muligheter, og å reflektere kollektivt. 2. Påstand: Innebærer å komme med et utsagn eller en påstand uten noen form for videre begrunnelse.
Å tenke høyt	Elev: - Offentliggjøre tanker og ideer - Offentliggjøre tanker og ideer til videre undersøkelse gjennom en spørrende tilnærming - Avbrutte setninger (utforskende samtale)
Å reformulere	Elev: - Gjenta - Utfylle hverandres setninger - Bygge videre på noe som tidligere er blitt sagt
Å utfordre	Elev: - Stiller spørsmål til egne og andres løsninger - Direkte henvendelse til medelev → be om forklaring - Bygge videre på allerede løste oppgaver Forsker: - Be om nærmere forklaring eller begrunnelse - ”Strekke tanken” ved å gi hint
Å evaluere	Elev: - Evaluere egne løsninger - Evaluere medelevers løsninger - Evaluere løsninger gruppen sammen har kommet frem til

Tabell 2: IC-modellen
Oversikt over IC-modellen, og de underkategoriene som er blitt utviklet som et resultat av dette forskningsprosjektet.

4.3. Analyse del 3: Nøkkelutsagn

I del 1 og 2 av analysen ble det tatt opp flere elementer som til sammen danner et stort område av empiri. I dette kapitlet vil jeg vise sammenhenger og systemer basert på det som kom frem i både analysen av matematikken og analysen av samtalene. Jeg vil si noe om hvordan disse elementene er over- og underordnet hverandre, og hvordan de opptrer i forhold til hverandre. Å studere de tre elevgruppenes dialoger, har gitt meg innblikk i hvordan interaksjonen mellom elevene foregikk, og hvordan gruppene fungerte når de sammen arbeidet om å løse en oppgave som omhandlet generalisering. I dette kapitlet vil det bli presentert en oversikt over elevutsagn fra hver enkelt gruppe med tilhørende tabeller. Disse elevutsagnene har jeg valgt å kalle *nøkkelutsagn*, da dette er utsagn som viser at det har skjedd fremgang i samtalene og at elevene har generert løsninger som har ført dem opp på et høyere nivå av generalisering. Generaliseringsnivåene er som tidligere nevnt: praktiskbaserte løsningsstrategier, faktabasert generalisering, kontekstbasert generalisering og symbolsk generalisering (Radford, 2010). Hensikten med dette kapitlet er å trekke ut de utsagnene fra elevdialogene som tydeligst viser at det har skjedd fremgang i arbeidet innen Radfords (2010) fire generaliseringsnivå. Tabellene skal få frem det elevene sier, som viser at de har gått fra å generere løsninger innen ett generaliseringsnivå, til å bevege seg over til å finne løsninger som kan plasseres innenfor et høyere nivå av generalisering. Tabellene viser også hvilke samtaletrekk som kjennetegner og preger disse utsagnene, og hvilke elever som genererer dem.

For å systematisk vise gruppenes utvikling og fremgang under oppgavejobbingen, vil det først bli presentert en tabell over nøkkelutsagnene til hver enkelt gruppe, med oversikt over generaliseringsnivå, elevutsagn og hvilken kategori fra IC-modellen det tilhører. Videre vil hver gruppes tabell bli kommentert. Elevutsagnene har de samme numrene som i transkripsjonen, da dette vil gi et mer reelt bilde over når utsagnene oppstod i samtalene. Avslutningsvis i dette kapitlet vil det bli presentert en oppsummering, som en overgang til diskusjonskapitlet som presenteres påfølgende.

Jeg vil igjen poengtere at nøkkelutsagnene som blir presentert i tabellene nedenfor, er de utsagnene som tydeligst viser hvilket nivå av generalisering elevgruppene befinner seg på. Disse utsagnene kan igjen fortelle at det har skjedd utvikling i elevenes genererte løsninger, og at en endring i generaliseringsnivå har funnet sted. Innimellom de utvalgte nøkkelutsagnene, var det naturligvis flere elevutsagn til stede som også kunne vise hvilket nivå av generalisering elevene befant seg på. Men da det i hovedsak ikke var disse utsagnene som førte til at gruppene genererte løsninger innenfor et høyere generaliseringsnivå, vil de i dette kapitlet ikke være et fokusområde.

4.3.1. Gruppe 1

Nivå av generalisering	Elevutsagn	Kategori fra IC-modell
Praktiskbaserte løsningsstrategier	4. Anna: Når man setter sammen to bord må man ta minus to, fordi det kan jo ikke sitte folk i midten 5. Ada: Ja, man kan jo ikke sitte der hvor bordene blir slått sammen, så da blir det jo bare fire på hvert bord da. Så da blir det åtte	Å advokere Å reformulere
	12.Alex: fem bord, fem ganger fire? (Ser spørrende på gruppen) 13.Anna: Nei det kan ikke være det, fordi... Ehhh. 14.Anders: Vi kan tegne opp fem bord. (Tar sjefsavgjørelse. Alle setter i gang med å tegne)	Å tenke høyt Å advokere Å oppdage
Faktabasert generalisering	37.Anna: Da er det to på langsidene, og en på kortsidene, også to på enden.	Å advokere
	45.Anders: Ja man, se herda, se her da. Hvis du tar en på hver ende. Så tar du ti bortover, med annenhver en, to, en, to, det blir jo... (ivrig)	Å tenke høyt
Kontekstbasert generalisering	64.Anna: 2*100 , pluss 1*100. Jo det blir jo 300. Pluss de to på sidene. Ja men, da blir det 302 kanskje? (De andre elevene ser på hverandre. Ikke helt sikker på om de stoler på forklaringen)	Å advokere
	82.Anders: Altså hvis du ikke hadde lagt de sammen da, så hadde det vært fem på hvert bord. Som vil si 500 personer. Og så skal vi ha bort... ehhh, nei... ehhh, jo. Vi skal ha vekk to fra 98 av bordene, og en fra 2 av bordene.	Å oppdage
	87.Anders: 3*98 + 8?	Å advokere
Symbolsk generalisering	210.Ada: Så ja, da blir det jo egentlig å gange hvor mange bord med hvor manges stoler det er, og så plusser man på to. Det blir jo det som er rett?	Å oppdage
	214.Anna: Jeg skrev 3*antall bord pluss 2.	Å advokere

Tabell 3: Nøkkelutsagn gruppe 1

Tabellen ovenfor presenterer nøkkelutsagnene fra gruppe 1, som viser fremgang innenfor Radfords (2010) generaliseringsnivå. Tabellen gir også oversikt over hvilke typer utsagn dette er, basert på samtaletrekkene fra Alrø og Skovsmose (2002) sin IC-modell.

De fem utsagnene plassert innen praktiskbaserte løsningsstrategier, er nøkkelutsagn som viser at elevene arbeider innen Radfords (2010) første og ikke-algebraiske generaliseringsnivå. I setning 4 og 5 prøver elevene ut mulige løsninger basert det visuelle hjelpemiddelet i

oppgaven, nemlig tegningen. Dette viser at elevene befinner seg på det laveste generaliseringsnivået. De to første utsagnene er med på å offentliggjøre for gruppen at det ”forsvinner” to stoler når man setter sammen bord. Dette er en tanke som legger grunnlag for videre utvikling innen elevenes algebraiske tenkning i prosessen med å finne oppgavens generelle eksplisitte formel. Setning 4 klassifiseres som argumentasjon da eleven bruker ordet ”fordi”. Setning 5 er en reformulering hvor Ada tar i bruk det Anna sa i setningen før, for å generere en ikke-algebraisk løsning på oppgaven som omhandler to sammensatte bord.
I setning 12-14 ser vi at Alex kommer med et forslag til en løsning, men som blir avslått av Anna, uten noen form for begrunnelse. Deretter får Anders det siste ordet og foreslår at de skal benytte seg av den praktiskbaserte løsningsstrategien tegn-og-tell metoden. En praktiskbasert metode som ble benyttet av alle gruppene under oppgavejobbingen.

At endring i generaliseringsnivå har oppstått, kommer frem i setning 37 og 45. Her gir elevene uttrykk for at de er i gang med å utvikle forståelse for at bordene består av to stoler på langsiden og en stol på kortsiden. I setning 37 kommer Anna med en påstand (å advokere) hvor hun uttrykker det som er felles for alle bordene. Dette bidrar til videre utforsking i gruppen, som fører til at Anders i setning 45 uttrykker det generelle for bordene gjennom å tenke høyt. Ved at elevene tenker høyt og uttrykker egne ideer ved å komme med forslag til videre utforsking, har elevene beveget seg over til å arbeide innenfor Radfords (2010) andre generaliseringsnivå, faktabasert generalisering.

Videre går elevene over til å generere løsninger innenfor Radfords tredje generaliseringsnivå, kontekstbasert generalisering. Overgangen til dette nivået blir synlig gjennom setning 64, 82 og 87. Sammenlignet med forrige kategori, faktabasert generalisering, kan man ut fra de løsningene elevene presenterer innenfor kontekstbasert generalisering, se at elevene nå har beveget seg opp på et høyere generaliseringsnivå. Innen kontekstbasert generalisering presenterer elevene nye løsninger på oppgavene, hvor de uttrykker kontekstuelle referanser til variabelen i mønsteret språklig eksplisitt, gjennom en blanding av matematiske symboler og begreper uttrykt ved naturlig språk (Radford, 2010). Nøkkelutsagnene som opptrer innenfor kontekstbasert generalisering befinner seg innenfor IC-modellens kategorier å advokere og å oppdage, hvor setning 64 er argumentasjon og setning 87 er påstand. Setning 87 er et forslag om en løsningsstrategi uten nærmere begrunnelse. Men siden eleven uttrykker påstanden i spørsmålsform, åpnes det likevel for andre synspunkter og felles utforsking i gruppen. Setning

82 er plassert i kategorien å oppdage, da eleven genererer en ny løsningsstrategi som gruppen sammen kan utforske videre.

Mot slutten av arbeidet med oppgaven, genererer elevene løsninger som kan plasseres innenfor Radfords (2010) høyeste generaliseringsnivå, symbolsk generalisering. At det har skjedd utviklingen opp til dette nivået, kommer frem i setning 210 og 214. Her tar elevene i bruk generelle representasjoner for variabelen i uttrykket, og bruker ikke lengre spesifikke talleksempel i uttrykkene sine. De to nøkkelutsagnene som viser utvikling opp til det høyeste generaliseringsnivået, kommer til uttrykk gjennom IC-modellens kategorier å oppdage og å advokere. Sistnevnte plasseres i underkategorien påstand, da eleven ikke uttrykker noen form for videre begrunnelse.

4.3.2. Gruppe 2

Nivå av generalisering	Elevutsagn	Kategori fra IC-modell
Praktiskbaserte løsningsstrategier	1.Mons: Okei, på oppgave 1 så er det 8 stk.	Å advokere
	4.Mons: Fordi at når det er ett og ett bord så har du alle sidene. Men når du setter dem sammen så mister du en av sidene på hvert bord. Det er sånn jeg tenker.	Å advokere
Faktabasert generalisering	36.Mie: Nei, jeg tenkte i hodet fordi at liksom når man setter sammen to bord, eller tre bord da, så blir jo det midtabordet, da mangler, da mister jo det to plasser på sidene, fordi at de (viser med hendene at de blir satt sammen), fordi at bordene blir sammensatt.	Å identifisere
	98.Mie: Ja. Vi skiller av fem og fem bord. Og da er det 17 på hvert bord. Og d er det jo plass til en på hver ende. Så da blir det 17 tilsammen. Men hvis vi setter sammen bordene, da får jo ikke de folka plass, så da blir det liksom 32.	Å advokere
	146.Mons: Så nå ganger vi de stolene på 32 med 100, bare at vi må ta minus noe. Så da blir det 320 minus noe.	Å oppdage
Kontekstbasert generalisering	209.Mie: At det er 3 på hvert bord hele rekka, unntatt de to helt ytterst, for de har 4. Fordi de her blir ikke fjernet (peker på endestolene)	Å advokere
	212.Mari: Men kanskje det skal bli 3*100, og så + 2 fordi det er på hver ende (riktig svar)	Å advokere
Symbolsk generalisering	258.Marie: Eh, du tar, ut i fra hvert bord så er det jo 3 stoler. Så da tar du 3 gange med så mange bord du skal ha, pluss 2 på endene.	Å advokere
	265.Marie: Hehe, 3*antall bord + 2	Å oppdage

Tabell 4: Nøkkelutsagn gruppe 2

Også gruppe 2 starter med å generere praktiske ikke-algebraiske løsninger innenfor Radfords (2010) laveste generaliseringsnivå. Setning 1 og 4 viser tydelig at elevene arbeider innenfor praktiskbasert generalisering. Dette kommer til uttrykk ved at de baserer løsningene sine på prøving og feiling, og at de legger merke til lokale enheter i mønsteret, uten å være i stand til å uttrykke det eksplisitt (Radford, 2010). Utsagnene på dette nivået preges av IC-modellens kategori å advokere. Begge utsagnene er uttalt av eleven Mons, hvor han i setning 1 presenterer en påstand/løsningsforslag uten videre begrunnelse. Setning 4 derimot, kategoriseres som argumentasjon, da eleven bruker ordet "fordi" til å forklare sin tankegang for medelevene. Det å offentliggjøre egne tanker som ressurs for resten av gruppen, kan bidra til at elevene kan reflektere kollektivt og sammen jobbe seg videre til høyere nivå av generalisering.

Videre i dialogen kan man ut fra setning 36, 98 og 146 se at elevene arbeider innenfor faktabasert generalisering. Fremgangen og utviklingen som viser at elevene er i stand til å generere løsninger innenfor faktabasert generalisering, kommer frem ved at elevene både stiller utforskende spørsmål og kommer med forslag til videre utforskning. Dette er noe som videre kan føre til at de blir i stand til å generere løsninger innenfor kontekstbasert generalisering. Denne gruppens arbeid innenfor faktabasert generalisering preges ikke av en bestemt kategori fra IC-modellen. Utsagnene inneholder samtaletrekk både fra kategorien å identifisere, å advokere og å oppdage, som alle bidrar til at elevene etterhvert beveger seg opp på et høyere nivå av generalisering. Nøkkelutsagnene som viser at elevene har beveget seg over til å arbeide innenfor kontekstbasert generalisering, kommer til syne ved at de presenterer forslag til løsninger og uttrykker ideer som kan være til hjelp for resten av gruppen. Dette kan man se i setning 209 og 212, som begge er kategorisert som argumentasjon innenfor IC-modellens kategori å advokere. I begge nøkkelutsagnene benytter elevene seg av ordet "fordi", som viser at de også ønsker å la andre elever få innblikk i og ta del i sin tenkning og forståelse rundt problemet.

Mot slutten av dialogen genereres det utsagn som tydelig viser at det har skjedd utvikling i generaliseringsnivå. I setning 258 viser Marie at hun er i stand til å produsere løsninger innenfor det høyeste generaliseringsnivået, symbolsk generalisering. Ved symbolsk generalisering viser elevene evne til å uttrykke det generelle i figurmønsteret med en full symbolsk ligning (Wilkie, 2016). Dette kommer tydelig frem, da Marie gjennom sitt utsagn argumenterer for at hvert bord består av tre stoler og at man dermed må multiplisere tre med det antallet bord man ønsker, for til slutt å legge til to. Det Marie uttrykker i dette utsagnet, i tillegg til det gruppen sammen har kommet frem tidligere i dialogen, gjør at Marie noen setninger senere er i stand til å uttrykke den generelle formelen 3*n + 2. Dette utsagnet plasseres innenfor IC-kategorien å oppdage, og viser at hun har utviklet forståelse for variabelen i oppgaven og notasjonen n.

4.3.3. Gruppe 3

Nivå av generalisering	Elevutsagn	Kategori fra IC-modell
Praktiskbaserte løsningsstrategier	1.Jenny: Jeg prøver å tegne først jeg.	Å oppdage
Faktabasert generalisering	2. Jens: Okei, på langsiden er det plass til to folk, og på kortsiden er det plass til en folk. 3. Jenny: Minus 1. For det er ikke plass til en person i mellom bordene.	Å advokere Å reformulere
	20.Johanne: Det var 8 på 2 bord. Da blir det 16 på 4 bord.	Å advokere
	47.Jonas: 10 bord, er jo det samme som 17+17, og så tar vi bort så mange ekstra som kommer her (peker mellom bordene)	Å advokere
Kontekstbasert generalisering	112. Jens: Da tror jeg vi bare kan ta bort de på sidene og gange med ti. 113. Jenny: Ja 114. Jens: Og så plusser vi på to igjen 115. Jenny: 30*10 116. Jens: 300 117. Jenny: Ja. Pluss 2. 302	Å oppdage Å evaluere Å reformulere Å advokere Å reformulere Å reformulere
	178.Johanne: Det må jo være 3 da. For hvis du har 10 bord da, så er det jo mest 3`ere og så er det 2 bord det er 4 på, og 2 på endene.	Å advokere
Symbolsk generalisering	162. Jenny: Det blir liksom 5-2. Det blir jo 3, også gange det med antall bord. N. (Hehe). Og plusse på to.	Å advokere

Tabell 5: Nøkkelutsagn gruppe 3

Som de to forrige gruppene, startet også gruppe 3 sitt arbeid med å produsere løsninger innen kategorien praktiskbaserte løsninger. Dette kommer frem allerede i setning 1, gjennom et forslag om å benytte tegn-og-tell metoden som en grunnleggende aktivitet for å komme i gang med oppgaven. Dette utsagnet er plassert i kategorien å oppdage, da eleven kommer med forslag om utprøving av en løsningsmetode. Videre i dialogen oppstår det utsagn som tydelig viser at elevene har begynt å jobbe innenfor faktabasert generalisering, Radfords (2010) andre generaliseringsnivå. Utsagnene innenfor dette nivået er tydelig preget av IC-modellens kategori å advokere. Jens uttrykker allerede i setning 2 en påstand som beskriver det generelle i figurmønsteret. Dette viser at denne eleven startet direkte med å arbeide innen faktabasert generalisering, uten å være innom praktiskbaserte løsningsstrategier først. Jenny tilføyer et utsagn til Jens sin påstand, som regnes som reformulering. Dette viser at hun er i stand til å sette seg inn i medelevers tanker, og har forstått hva som ble sagt. Både setning 2 og 3 inneholder grunnleggende tanker og oppdagelser som fører til at elevene er i stand til å generere løsninger på resten av oppgavene. Videre i arbeidet innen faktabasert generalisering, blir det i setning 20 og 47 presentert to utsagn som også plasseres i kategorien å advokere. Johanne sitt utsagn er en påstand uten videre begrunnelse, mens Jonas uttrykker argumentasjon da han også underbygger med forklaring for egen tankegang.

Videre i dialogen kan man se en utvikling som fører til at elevenes løsninger kan regnes som kontekstbasert generalisering. Det som viser at elevene har beveget seg over til å arbeide på dette nivået, er at de sammen som gruppe kommer med seks påfølgende utsagn (112-117), hvor de bygger videre på hverandres uttalelser og ideer. Dette gjør at de til slutt kommer frem det korrekte svaret på oppgaven, 302 stoler på 100 bord. Denne rekken av utsagn består av flere samtaleelementer, hvor kategorien å reformulere er mest dominerende. Å reformulere og å gjenta noe som har blitt sagt tidligere, bistår som er et viktig element i dialoger hvor deltakere arbeider tett sammen (Alrø & Skovsmose, 2006).

De to siste nøkkelutsagnene presentert i tabellen for gruppe 3, er plassert i kategorien å advokere, og uttrykkes i form av argumentasjon. Dette kommer frem ved at elevene ikke bare presenterer en påstand, men også en forklaring på hvorfor de mener det er slik. Gjennom Johanne sitt utsagn (178) kommer det frem at hun er i stand til å se det generelle i mønsteret, at alle borden består av tre stoler foruten de ytterste som består av fire. Dette uttrykkes med et naturlig språk gjennom et spesifikt talleksempel (her 10), med kontekstuelle referanser til variabelen i figurmønsteret (Radford, 2010). Dette viser dermed at eleven arbeider innenfor kontekstbasert generalisering. Jenny sitt utsagn (162) derimot er plassert innenfor symbolsk generalisering, da hun viser evne til å bruke en eksplisitt tilnærming, i tillegg til å kunne beskrive løsningen for hvilken som helst figur både med ord og algebraisk bokstavuttrykk. En interessant og nevneverdig bemerkelse ved disse utsagnene, er at Johanne sitt utsagn (178) forekommer i etterkant av Jenny sitt utsagn (162). Dette viser også at det innad i gruppene fantes forskjeller i hvilke generaliseringsnivå elevene befant seg på, og var i stand til å oppnå.

4.3.4. Oppsummering

Ut fra tabellene med nøkkelutsagn som viser hvilke nivå av generalisering elevene arbeidet innenfor, kommer det frem at disse utsagnene er tydelig preget av elementer fra IC-modellens kategorier *å advokere* og *å oppdage*. Blant alle elevgruppene fantes det tilfeller av samtaletrekk fra disse to kategoriene, som kunne si noe om hvor elevene befant seg innen Radfords (2010) fire generaliseringsnivå.

Angående kategorien å advokere, har det tidligere i analysen blitt argumentert for at det var mest hensiktsmessig å dele denne kategorien i to underkategorier, *argumentasjon* og *påstand.* Nøkkelutsagnene som opptrådte når elevene befant seg i brytningspunktet mellom to generaliseringsnivå, viser tilfeller av at elevene både argumenterte og kom med påstander. Ut fra tabellene presentert over, inneholder utsagnene fra kategorien å advokere i størst grad argumentasjon. Tabellene viser omtrent 55% argumentasjon og 45% påstander, noe som tilsier at det ikke var enorme forskjeller i hvor hyppig de to underkategoriene forekom. Men likevel viser en overvekt av argumentasjon at elevene i flest tilfeller også kom med forklaringer og begrunnelser for sine påstander. Og at dette skjedde oftere enn at elevene kun presenterte en påstand uten videre form for begrunnelse.

Utsagn fra kategorien *å oppdage* viste sin eksistens ved at elevene stilte undersøkende, oppklarende og undrende spørsmål, samt at de kom med forslag om videre undersøkelse og utprøving av muligheter. Av utsagnene som er med på å skape fremgang og utvikling innenfor generaliseringsnivåene, blir omlag 30 % av utsagnene i kategorien å oppdage uttrykt i spørsmålsform, og 70 % uttrykt som forslag til videre undersøkelse og utprøving av nye muligheter. Sistnevnte representeres i størst grad, noe som tyder på at dette var mer effektivt for å skape fremgang innenfor generaliseringsnivåene.

Selv om det også var tilfeller av andre samtaletrekk fra IC-modellen blant nøkkelutsagnene, var det likevel kategoriene å advokere og å oppdage som utmerket seg med flest antall opptredener. Ut fra de tre tabellene, er det tilsammen blitt presentert 34 nøkkelutsagn. Av disse 34 utsagnene var 18 av dem fra kategorien å advokere (53%) og 7 fra kategorien å oppdage (21%). Noe som tilsier at 74% av nøkkelutsagnene tilhørte disse kategoriene. De resterende 26% er fordelt blant kategoriene å tenke høyt (6%) å identifisere (3%), å reformulere (14%) og å evaluere (3%). Verdt å merke seg, er at det blant nøkkelutsagnene ikke var noen tilfeller av kategoriene å kontakte og å utfordre.

Om man studerer nøkkelutsagnene og sammenligner disse med utsagn og samtaletrekk som ellers oppstod i dialogene, kan man merke seg visse nevneverdige tendenser. Det første som kan nevnes er at utsagn fra kategoriene *å advokere* og *å oppdage* ikke bare var til stede som nøkkelutsagn, men også opptrådte ellers i samtalene. Selv om utsagn fra disse kategoriene var til stede ellers i dialogene, var deres opptredener likevel hyppigere blant nøkkelutsagnene. Gjennom elevdialogene kommer det frem at nøkkelutsagn fra kategorien å advokere var de utsagnene som oftest brakte frem nye løsninger, enten ved å komme med en påstand, eller ved å også argumentere for og begrunne denne påstanden. Utsagn fra kategorien å advokere som ikke regnes som nøkkelutsagn, bærer preg av å opptre i form av forslag om ukorrekte løsninger, som videre i samtalen enten ble avslått, avkreftet eller motargumentert. Utsagn fra kategorien å oppdage var også å finne ellers i samtalene, men uten å utmerke seg spesielt mer enn andre kategorier. I likhet med å advokere, opptrådte også kategorien å oppdage i større grad blant nøkkelutsagnene enn ellers i dialogene. Utsagn fra kategorien å oppdage som ikke er regnet som nøkkelutsagn, viste seg ofte å være i form av at elever eller forsker stilte oppklarende spørsmål og kontrollspørsmål til gruppen som helhet. Dette for å klarne opp i noe som var blitt sagt eller gjort tidligere i situasjonen. Disse bemerkelsene underbygger teorien om at kategoriene å advokere og å oppdage var spesielt viktige blant nøkkelutsagnene som viste hvilket nivå av generalisering elevene befant seg på.

Blant nøkkelutsagnene var ikke kategoriene *å reformulere* og *å tenke høyt* de som utmerket seg mest. Sammenligner man dette opp mot samtaletrekkene som oppstod ellers i dialogene, ser man at det her ofte finnes innslag av disse to kategoriene. Samtaletrekk fra disse kategoriene bidro til å skape fremgang i arbeidet med generaliseringsoppgaven ved at elevene kom med forslag om nye løsningsstrategier, og at de sammen som gruppe kunne skape felles innsikt i problemene de arbeidet med. Det har også tidligere blitt nevnt at det ikke var noen tilfeller av kategorien *å utfordre* bandt nøkkelutsagnene. Men studerer man utsagn og samtaletrekk ellers i dialogene, kommer det frem at kategorien å utfordre her opptrer med jevne mellomrom. Dette hendte både ved at elever utfordret hverandre, og at forsker utfordret elevene. Som nevnt i del to av analysen, var det flest tilfeller av sistnevnte. Selv om elementer fra denne kategorien ikke var eksplisitt til stede blant nøkkelutsagnene, viste det seg likevel å være et viktig element ellers i samtalene.

Kategoriene *å kontakte* og *å evaluere* opptrådte også med jevne mellomrom ellers i dialogene, selv om det blant nøkkelutsagnene fantes få eller ingen tilfeller av dem. Elementer fra disse kategoriene bidro ikke direkte til nye forslag eller løsninger, men fungerte likevel som støtteelementer for å holde samtalene på rett spor, og å bekrefte eller avkrefte ulike løsningsforslag som ble tatt opp underveis i samtalene. Videre var kategorien *å identifisere* den det var minst innslag av i samtalene. Utsagn fra denne kategorien kom bare frem i noen få tilfeller hos hver av de tre gruppene. Når den opptrådte var det oftest i form av at elevene introduserte en ny oppdagelse. Men dette var også noe som lignet elementer fra kategorien *å tenke høyt* eller å komme med en *påstand* (å advokere), og ble dermed oftere plassert innenfor disse kategoriene.

I analysen kom det også frem forskjeller blant gruppene knyttet til hvilket tidspunkt av samtalen elevene viste utvikling innen generaliseringsnivåene. Men det var ikke bare *mellom* gruppene man kunne se forskjeller på dette området. Gjennom nøkkelutsagnene kommer det også frem forskjeller blant elevene innad i gruppene angående hvor tidlig de oppdaget det generelle i mønsteret. Et eksempel på dette blir synliggjort i gruppe 3, hvor Jens allerede i setning 2 uttaler seg om det generelle i figurmønsteret (se tabell 5). Nevneverdig er det også å si noe om at selv om det generelle for hvert bord ble nevnt allerede i første halvminutt av arbeidet med oppgaven, var det likevel ikke før i siste del av dialogen at elevene sammen som gruppe genererte en felles løsning på problemet. Dette gir en indikasjon på at elevene arbeidet for at alle på gruppen skulle være med på utviklingen av løsninger, og at det ikke skulle være enkeltelever på gruppene som dominerte de genererte svarene.

5.0. Diskusjon: Å finne løsninger sammen

I dette kapittelet vil jeg med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket, diskutere hvordan elevene gjennom arbeidet i grupper genererte ulike løsninger på generaliseringsoppgaven, hvordan de utviklet seg innenfor de ulike generaliseringsnivåene, og hvilke samtaletrekk og uttrykksmåter elevene benyttet seg av. Basert på analysens ulike deler, har det kommet frem flere interessante trekk både ved matematikken og samtalene som oppstod mellom elevene. Samlet har analysekapitlet generert noen større og viktige funn fra elevdialogene som vil bli drøftet i dette kapitlet, for å deretter kunne svare på oppgavens forskningsspørsmål.

5.1. Matematisk utvikling

Det første tema som vil bli drøftet i dette kapitlet handler om elevenes matematiske utvikling. Et viktig funn som ble synliggjort i analysens første del, var at samtlige av elevgruppene arbeidet seg gjennom alle de fire generaliseringsnivåene til Radford (2010). Alle gruppene startet med å generere praktiskbaserte løsninger, som er Radfords (2010) laveste generaliseringsnivå, for å videre arbeide seg opp på faktabasert generalisering og kontekstbasert generalisering. Og mot slutten av sekvensen viste gruppene at de var i stand til å generere løsninger innen symbolsk generalisering, Radfords (2010) fjerde og høyeste generaliseringsnivå. Dette er et interessant funn som viser steg i elevers løsningsprosesser som en i lærerrollen neppe er bevisst på ellers. Som det står skrevet i oppgavens teoretiske rammeverk, mener Radford (2010) at *all* generalisering ikke kan karakteriseres som algebraisk. Og at når vi som lærere tar i bruk generalisering som metode for å nærme oss algebraisk forståelse, har vi et ansvar for å ikke forveksle algebraisk generalisering med andre måter å uttrykke det generelle på. I denne studien har jeg studert elevers arbeid med en generaliseringsoppgave, og videre skilt mellom elevers ikke-algebraiske og algebraiske løsninger. Dette arbeidet har bidratt til at jeg, både i forskerrollen og lærerrollen har tilegnet meg kunnskap om elevers arbeid med generalisering på ulike nivå. Og som Radford (2010) sier, blitt mer bevisst på å skille mellom algebraisk generalisering og andre generelle uttrykksmåter. Dette er kunnskap jeg kan ta med meg inn i fremtidig arbeid med algebra i skolen.

I det teoretiske rammeverket nevnes flere matematikkforskere som sier at generalisering av figurmønster er en typisk brukt tilnærming for å introdusere algebra i skolen. Blant annet sier Lannin (2005) at det å bruke figurmønster i innlæringen av algebra, skaper en kontekst hvor elever må generalisere en eller flere regler som videre kan brukes til å fastslå andre spesifikke forekomster av figurmønster. Wilkie (2016) sier at å arbeide med algebra gjennom generaliseringsoppgaver kan hjelpe elever til å se sammenhenger i symbolske representasjoner, og å løfte elevenes aritmetiske kunnskaper. Min undersøkelse viser at elevene som deltok i forskningsprosjektet, tross lite eller ingen erfaring med generaliseringsbegrepet, var i stand til å generere løsninger på alle nivåene innenfor algebraisk generalisering ved hjelp av språklig aktivitet i en gruppesituasjon. Dette samsvarer med det som blir skrevet i oppgavens teoretiske rammeverk om generalisering av figurmønster som aktivitet ved innlæring av algebra, og viser at elevene i løpet av sekvensen var i stand til å utvikle sine løsninger og bevege seg mot en mer formell algebra.

Selv om alle elevgruppene mot slutten av sekvensene viste at de var i stand til å generere løsninger innenfor symbolsk generalisering, kom det gjennom analysens første del likevel frem at det fantes forskjeller blant elevene innad i gruppene knyttet til hvilket nivå av generalisering de befant seg på, eller var i stand til å oppnå. Selv om alle gruppene var i stand til å generere løsninger som kunne plasseres innenfor Radfords (2010) høyeste generaliseringsnivå, symbolsk generalisering, viste likevel noen elever lavere algebraisk forståelse enn andre på gruppen. Som forsker har jeg ikke grunnlag til å uttale meg om elevenes utviklede forståelse, utover akkurat det som er blitt observert i forbindelse med forskningsprosjektet, og den informasjonen jeg på forhånd hadde tilegnet meg gjennom samtale med elevenes matematikklærer. Men ved å se dette opp mot tidligere forskning om forståelsesbegrepet, kan man likevel ha grunnlag til å si *noe* om dette funnet.

Skemp (1976) skiller mellom instrumentell og relasjonell forståelse. Dersom elever utvikler relasjonell forståelse i matematikk, medfører dette at elever opplever relasjoner og strukturer i matematikkfaget som mer interessante. Når elever arbeider med å utvikle sin algebraiske tenkning, er det i følge Skemp (1976) disse strukturene og relasjonene det må arbeides med. I denne studien kom det frem at de elevene som nådde det høyeste generaliseringsnivået, symbolsk generalisering, tydelig viste forståelse for det generelle i figurmønsteret, figurmønsterets kontinuerlige utvikling, og var i stand til å uttrykke formelen som en full symbolsk ligning ved å bruke notasjonen n. Dette gir et inntrykk av at disse elevene hadde utviklet en relasjonell forståelse for problemet. Når det gjelder de elevene som viste lavere algebraisk forståelse, kan det å studere elevers løsninger og utsagn som i denne studien, være et hjelpemiddel for å kartlegge aktuelle problemområder, og for å som lærer arbeide videre med utvikling av elevers forståelse innen algebra. Som Warren og Cooper (2007) skriver, viser elever ofte manglende matematiske språkferdigheter for å kunne sette ord på og beskrive de sammenhengene de ser. Ut fra analysen kan det se ut som at dette også er tilfelle for de elevene som ikke nådde opp til det høyeste generaliseringsnivået. Dermed kan fokus på utvikling av muntlige ferdigheter i matematikkfaget bidra til å oppnå bedre læringsresultater ved arbeid med algebra gjennom generalisering, noe den norske læringsplanen for matematikk fellesfag også oppfordrer til, som nevn innledningsvis i denne studien.

Også Hibert og Lefevre (1986) deler forståelsesbegrepet i to retninger, og sier at matematisk kunnskap i sin fulle betydning, inneholder betydelige og grunnleggende forhold mellom begrepsbasert og prosessbasert forståelse. De sier at elever ikke har oppnådd fullstendig forståelse i matematikk om de to forståelsestypene forblir separate enheter. Selv om elever ikke har utviklet en fullstendig kobling mellom de to forståelsestypene, kan man i noen tilfeller likevel oppleve at elevene har en god intuitiv forståelse for matematikk, og at de er i stand til å generere svar på oppgavene. Tross dette er det likevel ikke sikkert at elevene er i stand til å forstå *hva* de gjør (Hibert & Lefevre, 1986). De elevene som deltok i dette forskningsprosjektet, viste fra begynnelsen av forståelse for arbeidet med praktiskbaserte løsninger, hvor de blant annet brukte tegning som metode for å representere problemet. Videre viste alle elevene også forståelse for løsninger innen faktabasert og kontekstbasert generalisering. Men i brytningspunktet mellom kontekstbasert og symbolsk generalisering kunne man se forskjeller i elevenes utviklede forståelse for generaliseringsproblemet. Det å skulle plassere elevene innenfor forståelsesbegrepets ulike retninger, blir i dette tilfellet vanskelig, da tidsrommet elevene ble observert var svært begrenset. Hadde forskningsprosjektet derimot pågått over lengre tid, ville det trolig dukket opp flere funn som kunne underbygge og si mer om elevenes utviklede forståelse for symbolsk generalisering av voksende figurmønster.

5.2. Nyansering av IC-modellen

Alrø og Skovsmose (2006) ser på undersøkelseslandskaper og undersøkende samtaler som et supplement i undervisnings- og læringsaktiviteter, hvor man setter rutinebasert tavleundervisning til side. Når elementene i IC-modellen opptrer, ser det ut til at de har stor innflytelse på elevers mulighet til å produsere ny forståelse og erkjennelser sammen. Alrø og Skovsmose (2006) sine forskningsresultater støtter også den erfaringen av IC-modellen jeg har tilegnet meg gjennom dette forskningsprosjektet. At læringssamtaler i et undersøkelseslandskap som i større grad inneholder nysgjerrighet og utforsking, åpner for at nye former for læring kan skje. Læringen som oppstod blant elevene i denne studien, kom til syne ved at elevene i løpet av samtalene var i stand til å løse generaliseringsoppgaven, og å utvikle sine løsninger innenfor høyere nivå av Radford (2010) sin nivåinndeling.

Selv om IC-modellen er en velutviklet modell som inneholder et bredt spekter av kategorier som beskriver ulike samtaleelementer, har det likevel gjennom dette forskningsprosjektets analyse blitt vist til eksempler hvor kategoriene i IC-modellen ikke har vært tilstrekkelige for å beskrive mitt datamateriale. Derfor har det underveis i analysearbeidet vært hensiktsmessig å legge til flere variasjoner og nyanser ved hver av IC-modellens kategorier, i tillegg til å opprette underkategorier og å skille mellom elevers og forsker uttrykksmåter. Utviklingsarbeidet som har oppstått i forbindelse med IC-modellen, ser jeg på som et viktig funn, da det setter lys på nyanser og variasjoner innenfor kategoriene som tidligere ikke har kommet frem i Alrø og Skovsmose (2002) sin originale modell. Gjennom analysen av samtalene har jeg sett og kommet frem til at IC-modellen ikke var fullstendig utviklet i forhold til resultatene i min undersøkelse, og at dette forskningsprosjektet dermed har bidratt til en videreutvikling av nye ideer innenfor den opprinnelige IC-modellen.

5.3. Nøkkelutsagn

Samtaletrekkene som ble sett opp mot IC-modellen i andre del av analysen, var med på å få elevers tanker og perspektiver frem i klasserommets offentlige arena, slik at nye ressurser for læring ble gjort tilgjengelig (Alrø & Skovsmose, 2002). I del tre av analysen ble det presentert elevutsagn som viste at det hadde skjedd matematisk utvikling, og at elevene befant seg på et nytt og høyere nivå av generalisering. Disse utsagnene fikk navnet *nøkkelutsagn*. Et viktig funn som ble synliggjort ved å studere nøkkelutsagnene, var at IC-modellens kategorier *å advokere* og *å oppdage* var de som opptrådte hyppigst og var mest sentrale. Dette er to kategorier som åpner for felles forståelse og for å la elever ta del i hverandres tenkning, slik blant annet Cobb (1995), Säljö (2001) og Botten (2016) omtaler som viktige elementer for kommunikasjon i matematikkfaget. Blant nøkkelutsagnene stod disse to kategoriene for 74% av opptredenene, hvor 53% var å advokere, og 21% å oppdage.

Blant alle IC-modellens kategorier, var også *å advokere* og *å oppdage* de to kategoriene som ble sett på som mest hensiktsmessig å dele opp med underkategorier, da variasjonen av elevenes uttrykksmåter kom såpas tydelig frem. Hvorfor noen av IC-modellens opprinnelige kategorier ble delt i underkategorier, er begrunnet under *nøkkelutsagn* tidligere i dette kapitlet. Kategorien *å advokere* ble delt inn i argumentasjon og påstand, mens kategorien *å oppdage* ble delt i spørsmål og forslag. Disse fire underkategoriene er elementer som bidrar til at nye ideer og løsninger kommer frem i den undersøkende prosessen og blir tilgjengelig for videre undersøkelse. Denne studien viser altså at hvilket nivå elevene befinner seg på innen generalisering, ofte kommer frem gjennom elevers argumentasjon, påstander, spørsmål eller forslag til videre utforsking. Ser man dette i en større sammenheng, kan disse elementene være viktige ved videre arbeid når elever i grunnskolen skal nærme seg algebraisk forståelse. At elever må lære seg å argumentere, sette ord på egne tanker, lytte til andre og stille spørsmål kan være med på å skape fremgang i læringssamtalene, som igjen kan føre til fremgang i elevenes matematiske utvikling. Forskningen til Chapin et al. (2013) viser også at samtale og kommunikasjon er viktige elementer ved læring av matematikk. De omtaler produktive matematikksamtaler som et hjelpemiddel for enkeltelever til å klargjøre og dele sine tanker, og for å videre hjelpe elever til å orientere seg mot andre elevers tenking. Produktive matematikksamtaler skal også hjelpe elever til å utvikle sin egen resonneringsevne samt engasjere seg i hvordan andre elever tenker og resonnerer. Elementene som beskriver produktive matematikksamtaler kan også sees opp mot det Botten (2016) sier om at god kommunikasjon kan bety bedre forståelse og større engasjement i læreprosessen, og dermed være med på å bedre læringsresultatet i faget.

I forhold til denne studien, viste det seg at ved å la elever arbeide sammen i en gruppesituasjon, og ved å bruke språket som verktøy, var elevene nødt til å både sette ord på egne tanker og ideer, og å sette seg inn i medelevers tenkning. Dette er også viktige elementer innenfor aktiv lytting, som er et av hovedelementene i forbindelse med Alrø og Skovsmose (2002) sin IC-modell. Aktiv lytting beskrives som at lytteren har et klart ansvarsområde hvor en ikke bare passivt kan absorbere det som blir sagt, men må også aktivt forsøke å forstå fakta og følelser i det en hører, og videre prøve å skape sin egen forståelse av problemet. Ved at elevene gjorde dette førte det videre til at de sammen som gruppe var i stand til å generere løsninger på generaliseringsoppgaven innenfor ulike nivå. Det at 74% av nøkkelutsagnene bestod av elementer fra kategoriene å advokere og å oppdage, sier noe om at dette var betydningsfulle kategorier for å studere elevenes matematiske utvikling, og for å kunne kartlegge hvilket nivå av generalisering elevene befant seg på.

5.4. Sammen klarer en mer enn alene

Et viktig funn som kom frem gjennom analysen av samtalene, var at elevene dro nytte av å arbeide med generaliseringsoppgaven gjennom interaksjon med andre mennesker. Dette skjedde blant annet gjennom det Cobb (1995) omtaler som indirekte samarbeid. Altså at oppgavene ble løst ved at elevene tenkte høyt og bygget videre på andre elevers utsagn, eller at en elev sa og gjorde noe som var aktuelt og avgjørende for andre elevers tenkning på det tidspunktet. Slike tilfeller hvor elevene bygget videre på andres utsagn, kan også sees opp mot noen av kategoriene i Alrø og Skovsmose (2002) sin IC-modell, som blir omtalt i del to av analysen. Et eksempel på dette er for eksempel innen kategorien å tenke høyt, hvor det ble vist til ulike tilfeller hvor elever offentliggjorde sine tanker som ressurs for resten av gruppen for videre arbeid med oppgaven. I analysens første del kom det også frem eksempler hvor elevene dro nytte av hverandres tenkning, slik som i situasjon 4 av gruppe 2, og situasjon 5 av gruppe 3. Her kunne man se at elevenes utsagn hadde betydning for medelevers videre tenkning, arbeid og forståelse i forbindelse med generaliseringsoppgaven. Disse eksemplene kan igjen sees opp mot det Webb (1991) sier om at elever som arbeider i små grupper, kan dra nytte av hverandre for å utvikle forståelse. Dette fordi elever deler et felles hverdagsspråk som brukes til å verbalisere og oversette vanskelige ord og uttrykk for å skape forståelse for de andre i gruppen.

I denne studien har det blitt vist til flere situasjoner hvor elevene opplevde læring og fremgang under arbeidet med generaliseringsoppgaven gjennom kollektive arbeidsprosesser. Dette var det også en elev som var i stand til å sette ord på i analysens andre del, i utsagn 247 av Ada (s.67). Eleven uttrykte her at samarbeidet i gruppen var nyttig for å generere løsninger på generaliseringsoppgaven, og mente at hun trolig ikke ville vært i stand til å oppnå det samme ved individuelt arbeid. Med dette utsagnet underbygges grunntankene innenfor sosiokulturell læringsteori, som går ut på at man gjennom samspill med andre i ulike kollektive virksomheter, kan utnytte de begrensede forutsetningene naturen har gitt oss som fysiske enkeltindivider. Noe som betyr at vi gjennom sosial interaksjon kan tilegne oss og utnytte kognitive ressurser i samspillsituasjoner, og å som gruppe kunne være i stand til å oppnå mer enn enkeltindividet (Säljö, 2001). Eksemplene og situasjonene som har blitt belyst

i denne studien kan også betraktes som at elevene fungerte som medierende hjelpere for hverandre i den undersøkende prosessen, ved at de hjalp hverandre fra nåværende kunnskapsnivå, til et nytt og høyere kunnskapsnivå (Säljö, 2001).
Det var derimot ikke bare elevene som hadde funksjon som medierende hjelpere i samtalene. Under kategorien å utfordre i analysens andre del, kom det frem at også forsker fungerte som medierende hjelper. Innenfor denne kategorien ble det påpekt at forsker hadde den mest sentrale rollen, da elevene ble utfordret ved at det ble stilt spørsmål rundt det arbeidet de hadde gjort og de løsningene de hadde kommet frem til. Disse spørsmålene var med på å skape fremgang i samtalene og å "strekke" elevenes tanker. At forsker opptrådte på denne måten, kan sammenlignes med slik Alrø et al. (2003) beskriver lærers rolle i et undersøkende læringslandskap, at man skal være en slags hjelper som støtter og utfordrer elevene. Dette kan videre sees sammen med det Vygotsky (1978) beskriver som nærmeste utviklingssone. Altså avstanden mellom det et individ kan prestere på egenhånd og det individet kan prestere under ledelse av en voksen eller i samarbeid med mer kapable andre.

Et annet viktig funn var at det blant alle gruppene var forskjellige elever som aktivt bidro med utsagn gjennom hele sekvensen. Dette utmerket seg ikke bare generelt gjennom samtalene, men også blant nøkkelutsagnene. Det å basere en læringssituasjon på felles samtale og kollektive arbeidsmåter, som i denne studien, gjorde at ulike potensielle løsningsforslag kom frem i lyset og ble en felles eiendom. Hvem som helst i elevgruppen kunne fritt bygge videre på dem, ikke bare den eleven som hadde tenkt ut den mulige løsningen. Å bruke språket som verktøy er som tidligere nevnt sentralt innenfor sosiokulturell læringsteori (Säljö, 2001). Gjennom en slik arbeidsform, oppstod det en kontinuitet i tenkingen mellom individene i gruppen, og det var nettopp gjennom denne språklige kommunikasjon at elevene var i stand til å etablere og opprettholde en felles forståelse for det arbeidet som ble gjort. Det at elevene brukte språket som muntlig representasjon, viste at de var i stand til å sette ord på kunnskapen sin (Säljö, 2001). Å bevege seg mellom ulike representasjonsformer, kan hjelpe elever med å forstå matematiske ideer, noe som i følge Wilkie (2016) blir sett på som grunnleggende for elevers utvikling av å forstå fleksibiliteten av samspillet mellom de ulike representasjonene. Dette viste seg også å være tilfelle i min undersøkelse. Ved at elevene satt ord på sine tanker og ideer, re-presenterte de sine forklaringer til de andre, slik at de sammen som gruppe kunne danne en felles forståelse for problemet, og videre være i stand til å utvikle løsninger på ulike nivå innenfor Radford (2010) sine fire generaliseringsnivå.

At det var ulike elever som bidro med utsagn, og at utsagnene hadde betydning for andre elevers arbeid og videre tenkning rundt generaliseringsoppgaven, viser at det er mulig at læring kan skje ved å arbeide med matematikk gjennom sosiale interaksjoner og ved å bruke språket som verktøy. Det at forskjellige elever stadig bidro med utsagn i den undersøkende prosessen, kan ha ført til at elevene oppnådde mer i gruppesituasjonen enn hva de ville gjort på egenhånd. Et sentralt element innenfor sosiokulturelt læringssyn er som tidligere nevnt at kommunikasjon og samarbeid mellom mennesker i ulike kollektive virksomheter, legger grunnlag for hvordan man tilegner seg ny kunnskap og at læring kan skje. Dette kan sees opp mot det Underlid (1997) sier om at når en gruppe fungerer som best, oppnås noe som kalles synergieffekt – gruppen fungerer bedre enn summen av de individuelle medlemmene hver for seg. Tross dette kan en ikke si noe om den utviklingen elevgruppene viste innenfor generaliseringsnivåene i gruppesituasjonen, ville ha oppstått i en annen gruppesituasjon, eller ved individuelt arbeid. Dette fordi det innenfor situert læring legges vekt på at situasjonen spiller en avgjørende rolle for tolkning, forståelse og løsning av en oppgave. Dermed kan en ikke vite om elevene som deltok i forskningsprosjektet ville vært i stand til å løse et lignende problem i senere tid, individuelt eller i en annen gruppesammensetning. I tillegg er de sosiokulturelle forholdene rundt den lærende avgjørende for betydningen av læringen (Lave & Wenger, 1991).

6.0. Konklusjon

Forskningsspørsmålet *"Hvordan samarbeider og diskuterer elever på 8. trinn seg frem til løsninger på en matematisk generaliseringsoppgave i en gruppesituasjon?"* har stått sentralt gjennom hele forskningsprosjektet. For å kunne svare på dette spørsmålet, ble 12 forskningsobjekter observert under sitt arbeid med en generaliseringsoppgave i en gruppesituasjon. Gjennom bearbeiding og analyse av det innsamlede datamaterialet, har jeg skaffet meg tilstrekkelig innsikt for å avslutningsvis kunne svare på dette forskningsspørsmålet.

Gjennom analysen kom det frem flere interessante trekk som sa noe om hvordan elevene samarbeidet og diskuterte seg frem til løsninger på generaliseringsoppgaven. Samlet genererte analysekapitlet noen større og viktige funn som ble presentert i oppgavens diskusjonskapittel. Vi har sett at samtlige av elevgruppene arbeidet seg gjennom Radfords (2010) fire generaliseringsnivå, og at alle gruppene mot slutten av sekvensene viste at de var i stand til å generere algebraiske løsninger innenfor symbolsk generalisering. Tross dette, kom det likevel frem eksempler som viser at det fantes forskjeller blant elevene innad i gruppene knyttet til hvilket nivå av generalisering de var i stand til å oppnå.

Studien har også vist at elevene benyttet en rekke ulike samtaleelementer under dialogene i forbindelse med generaliseringsoppgaven de arbeidet med. Hvordan elvene uttrykte seg, har blitt sett opp mot kategorier og samtaleelementer fra Alrø og Skovsmose (2002) sin IC-modell. Selv om IC-modellen består av åtte velutviklete kategorier, oppstod det likevel situasjoner under analysearbeidet hvor kategoriene ikke var tilstrekkelige i forhold til innholdet i mitt datamateriale. For å fremstille det brede spekteret av nyanser i elevenes uttrykksmåter på best mulig måte, var det dermed hensiktsmessig å opprette noen underkategorier, samt å skille mellom forskers og elevers uttrykksmåter.

Videre i denne studien ble det satt lys på nøkkelutsagn som viste hvilket nivå at generalisering elevene befant seg på eller hadde nådd opp til. Her kom det frem at hvordan elevene argumenterte, kom med påstander, stilte spørsmål og kom med forslag til videre utprøving, var sentrale elementer for å kunne si noe om hvor elevene befant seg innenfor generaliserinsnivåene. Et annet viktig funn som kom frem gjennom arbeidet med dette forskningsprosjektet, var at elever som arbeidet i sosiale interaksjoner og brukte språket som verktøy, dro nytte av hverandres tenkning for å generere riktige løsninger på oppgaven de arbeidet med. Dette støtter grunnprinsippene i sosiokulturell læringsteori, om å basere en læringssituasjon på felles samtale og kollektive arbeidsformer. Gjennom analysen ble det også synliggjort at det var forskjellige elever som aktivt bidro med innspill i samtalene. Dette underbygger teorien om at elever i gruppesituasjoner er i stand til å oppnå mer enn enkeltindividet. Dette var også avgjørende for hvorvidt elevene kom frem til riktige løsninger, og at de gjennom samtale og diskusjon var i stand til å utvikle en mer formell algebra basert på Radfords (2010) karakteristiske nivåinndeling.

Ved å skaffe seg innblikk i læringssamtaler mellom elever som arbeider i en gruppesituasjon, som i denne studien, kan en som lærer utvikle kunnskap for å kjenne til hvilke elementer ved samtaler og diskusjoner som bidrar til utvikling innen algebraisk generalisering. Dette kan igjen være til hjelp for å legge opp til undervisningsaktiviteter som fremmer muntlig aktivitet, og som hjelper elever i å utvikle sin algebraiske forståelse til høyere nivå. Dette støttes også i teorien om at ved å legge opp til læringssituasjoner hvor elever er aktive språkbrukere, og hvor de lærer å ta i bruk begreper og å kommunisere med andre, vil de i større grad kunne utvikle eierskap til kunnskapen, da den tilegnes gjennom aktivitet og handling. Noe som igjen vil kunne bidra til bedre læringsresultatet i faget (Botten, 2016).

6.1. Videre arbeid innen forskningsfeltet

I etterkant av en studie som dette, melder det seg flere aktuelle spørsmål innenfor det matematikkdidaktiske forskningsfeltet. Da denne studien foregikk over et lite tidsrom, hvor hver elevgruppe kun ble observert under arbeidet med *en* enkelt generaliseringsoppgave, kunne det derfor vært interessant å videre studert hvilken effekt et regelmessig arbeid over en lengre periode hadde hatt for de samme elevgruppene. I dette tilfellet ville en som forsker hatt mulighet til å avdekke flere tendenser, fordeler og eventuelle ulemper ved å arbeide i grupper med algebra og generalisering. Her blir det også naturlig å tenke at siden undersøkende læringslandskap (Alrø & Skovsmose, 2002) er en undervisningsform som bryter med tradisjonelle undervisningsmetoder i norsk skole, kunne en videreutvikling av denne studien bidratt til økt kunnskap om den matematikklæring som finner sted blant elever i slike læringssituasjoner.

Innledningsvis i denne oppgaven ble det nevnt at norsk læreplan for matematikk fellesfag sier at det også i matematikkfaget skal legges opp til og arbeides med muntlige ferdigheter. Dette innebærer blant annet *"å være med i samtaler, kommunisere ideer og drøfte matematiske problemer, løsninger og strategier med andre"* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4). Videre arbeid innenfor forskningsfeltet kunne dermed bidratt til økt kunnskap om hvordan kommunikasjonen mellom elever foregår, hvordan en som lærer kan legge opp undervisningen for å optimalisere elevers læring i samtalesituasjoner, og hvordan bruke denne type læringssituasjoner som et hjelpemiddel for lærere i forhold til å kartlegge elevers faglige nivå. Økt kunnskap om disse temaene kunne på sikt bidratt til en ytterligere utvikling av matematikkundervisningen i norsk grunnskole.

Referanseliste

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education : intention, reflection, critique* (B. v. 29). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2006). Undersøgende samarbejde i matematikundervisning - udvikling af IC-Moldellen. I O. Skovsmose, M. Blomhøj & H. Alrø (Red.), *Kunne det tænkes? : om matematiklæring* (s. 110-126). Albertslund: Malling Beck.

Alrø, H., Skovsmose, O., & Skånstrøm, M. (2003). Læring gennem samtale. I O. Skovsmose, M. Blomhøj & H. Alrø (Red.), *Kan det virkelig passe? : om matematiklæring* (s. 25-37). København: L&R Uddannelse Forlag Malling Beck.

Bakke, K. R., & Tønnesen, E. S. (2007). *Lave & Wenger og Dreyfus & Dreyfus: læring i et sosiokulturelt perspektiv*. Hentet fra https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/30977/Oppgave.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Barnes, D. (2008). Exploratory Talk for Learning. I N. Mercer & S. Hodgkinson (Red.), *Exploring Talk in School : Inspired by the Work of Douglas Barnes* (s. 1-11). London: SAGE Publications.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom : transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, N.H: Heinemann.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). *Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening : mening for alle*. Bergen: Caspar forlag.

Chapin, S., O`Connor, C., & Anderson, N. C. (2013). *Classroom Discussions in Math: A Teacher's Guide for Using Talk Moves to Support the Common Core and More, Grades K-6*. Sausalito, California: Math solutions.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Cobb, P. (1995). Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The Emergence of mathematical meaning : interaction in classroom cultures* (s. 25-127). Hillsdale, N.J: L. Erlbaum.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. I K. Frank & J. R. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (B. 1, s. 3-38). Charlotte, NC: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). London: Routledge.

Drageset, O. G. (2014). Korleis leie ein matematisk samtale. *Tangenten, 25*(1), 12-16.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (B. 1, s. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Gjøsund, P., & Huseby, R. (2010). *To eller flere- : basiskunnskaper i gruppepsykologi* (3. utg.). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.

Hibert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analyis. I J. Hibert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge; The case of mathematics* (s. 1-23). University of Delaware: Routledge.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra the 12 th ICMI study* (s. 21-33). The University of Melbourne, Australia: Kluwer Academic Publishers.

Kleve, B., & Solem, I. (2014). Aspects of teacher´s mathematical knowledge in the orchestration of a discussion about rational numbers, Nordic Studies in Mathematics Education. *19*, 119-134.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 7*(3), 231-258. doi: 10.1207/s15327833mtl0703_3

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(4), 299-317.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning : Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalisation activities. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching* (s. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2014). *Å lære algebraisk tenkning*. Bergen: Caspar Forlag AS.

Måsøval, H. S. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college*. Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/2394000.

NESH. (2006). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi-2006.pdf

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis : et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelens Akademisk Forlag.

Thagaard, T. (2010). *Systematik og indlevelse : en indføring i kvalitativ metode*. København: Akademisk Forlag.

Tjora, A. H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Underlid, K. (1997). *Gruppepsykologi*. Sandviken, Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2015). *Generell del av læreplanen*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/generell-del-av-lareplanen/

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Warren, E., & Cooper, T. (2007). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185.

Webb, N. M. (1991). Task-Related Verbal Interaction and Mathematics Learning in Small Groups. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(5), 366-389.

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Nachlieli, T. (2016). The Realization Tree Assessment tool: Assessing the exposure to mathematical objects during a lesson. I S. Altorre, J. L. Cortina, M. Saiz & A. Mendez (Red.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 333-361.

Aamli, K. (2015a, 11.04). *Lærer matte av å snakke matte*. 2015, fra http://forskning.no/2015/04/laere-barna-tenke

Aamli, K. (2015b, 16.09). *Å lære barna å tenke*. 2015, fra http://www.hioa.no/Aktuelle-saker/AA-laere-barna-aa-tenke

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Informasjonsskriv og forespørsel om deltakelse i forskningsprosjekt i matematikk

"Kommunikasjon og matematiske samtaler blant elever i et samarbeidende fellesskap"

Bakgrunn og formål
Jeg er masterstudent ved NTNU avd. for lærer og tolkeutdanning, og skal dette skoleåret gjennomføre et forskningsprosjekt i matematikkdidaktikk som skal ende i en masteroppgave våren 2017. Jeg vil i dette skrivet informere foreldre/foresatte i klasse .... ved .... Ungdomsskole om hva deltakelse i dette forskningsprosjektet innebærer.

Målet med prosjektet er å undersøke og å tilegne meg kunnskap om hvordan elever sin matematiske tenkning kommer frem under muntlig oppgaveløsning i et samarbeidende fellesskap. Kunnskap om dette kan være et nyttig verktøy for å kartlegge elevenes nivå i matematikk, og å kunne si noe om kvaliteten på dialogene som forekommer mellom elevene i matematikktimene.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Ut fra prosjektets mål, vil deltakelse i studien innebære at elever blir observert når de arbeider med muntlig oppgaveløsning i grupper sammen med 2-3 andre medelever. Elevene vil arbeide med problemløsende matematikkoppgaver som fremmer diskusjon.
Jeg som forsker vil være tilstede under sekvensen, og observere og oppfordre til samtale. Observasjonen vil innebære at det tas notater, lydopptak av samtalene, og at evt. noen sekvenser tas opp på video.

Det vil tilsammen være 2-4 elevgrupper, der hver gruppe vil bli observert to ganger (dvs. 2x45 min). Disse sekvensene vil foregå på et grupperom separat fra den vanlige undervisningen. Det vil være elevenes matematikklærer som velger ut hvilke elever som skal arbeide sammen i grupper.

Hva skjer med informasjonen?
Det samles ikke inn personopplysninger utover alder og kjønn. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Tilgang til datamaterialet vil kun være tilgjengelig for meg og min veileder ved NTNU. Data som publiseres vil være anonymisert, og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere. Prosjektet skal etter planen avsluttes 30.juni 2017. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lyd- og videoopptak vil slettes.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt barn fra studien uten å oppgi noen grunn. Dersom dere velger å trekke dere ut av studien vil alle opplysninger bli anonymisert snarest.

Har du har spørsmål ang. mitt masterprosjektet, ta kontakt på mail: .... eller tlf.: ....

Samtykke til deltakelse i studien

Foreldre / foresattes samtykke

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet.

Barnets navn: ....

Jeg samtykker i at: (Kryss av der det passer)

☐ Mitt barn deltar i observasjon, og at det gjøres lydopptak til videre transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra barnet, der barnet ikke nevnes eller kan identifiseres, kan bli publisert i masteroppgaven.

☐ Det tas videoopptak av barnet under oppgaveløsning i gruppe med andre medelever. Videoen kan brukes av masterstudent for forskningsarbeid. Videoen skal ikke offentliggjøres, og vil bli slettet etter endt oppgave.

Sted og dato: ....

Foreldre/foresattes underskrift: ....

Vennligst lever utfylt skjema til .... eller .... før høstferien.

På forhånd takk!

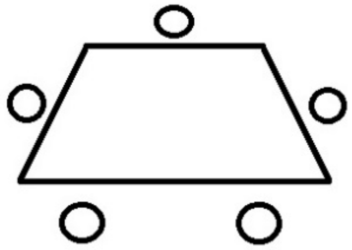
Mvh Astrid Varhol

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning,
NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

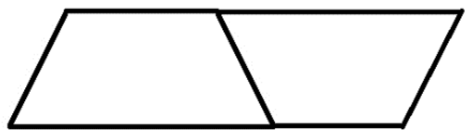
Vedlegg 2: Generaliseringsoppgaven

Bord-problemet

Se for deg at du har et bord som ser slik ut (trapes). Rundt bordet er det plass til 5 stoler.



Oppgave 1.
Figuren nedenfor viser hvordan man skal sette sammen flere bord når man vil lage et langbord. Hvor mange stoler er det plass til rundt bordet nå?



Oppgave 2.
Hvor mange stoler er det plass til når man setter sammen

a) 5 bord
b) 10 bord
c) 100 bord

Oppgave 3:
Hvor mange stoler er det plass til når man setter sammen n bord? Altså et hvilket som helst antall bord.