

# Beregningsmetoder for betongplater

**Vegar Felle Dyrnes**

Master i Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2017

Hovedveileder: Jan Arve Øverli, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for konstruksjonsteknikk





## MASTEROPPGAVE 2017

FAGOMRÅDE: Bygg, Konstruksjon	DATO: 10.06.2017	ANTALL SIDER: 119
-------------------------------	------------------	-------------------

TITTEL:

### Beregningsmetoder for betongplater

Design of Concrete Slabs

UTFØRT AV:

Vegar Felle Dyrnes

SAMMENDRAG:

Oppgavens problemstilling: Hvordan beregner utvalgte dataprogrammer armering av betongplater med hensyn på torsjonsmomentet?

Opggaven startet med å undersøke hvilke dataprogrammer som brukes til å beregne og dimensjonere betongplater. Det ble klart at FEM-Design brukes av flere store konsultentselskaper, både til å beregne krefter og til å beregne armeringsmengder. Teorimanualen til FEM-Design ble så undersøkt nærmere og det ble klart at programmet hovedsakelig forholder seg til Eurokodene og at beregning av dimensjonerende krefter baserer seg på litteratur fra M.P. Nielsen og Wood-Armer. M.P. Nielsens bok *Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs* (1964) inneholdt ligninger som er like de såkalte Wood-Armer ligningene, og det ble klart at dette mest sannsynlig er ligningene FEM-Design refererer til. Disse ligningene ble så testet på et element i FEM-Design. Det ble klart at disse ligningene ga de samme dimensjonerende kreftene som blir kalkulert i FEM-Design, men de bruker en forenklet versjon av ligningene. Etter dette ble det kartlagt hvilke ligninger som brukes for å regne ut selve armeringsmengden. Disse ligningene ga resultater som var tilnærmet like armeringsmengden som ble kalkulert i FEM-Design. Det ble da konkludert med at dette var mest sannsynlig hvordan FEM-Design kalkulerte krefter og armering. For å lære mer om FEM programmer og beregningsmetoder ble boken *Plates and FEM* av Blaauwendraad brukt. Der presenteres metoden som antas å gi den beste representasjonen av virkeligheten, «den avanserte sandwichmetoden». Ved hjelp av kilder i boken ble det sporet opp en artikkel av P.B. Lourenco som inneholder datakoden for metoden. Datakoden måtte oversettes til et moderne programmeringsspråk og testes til den var en kopi av originalen. For å undersøke beregningsmetoden brukt i FEM-Design ble metoden sammenlignet med to andre beregningsmetoder, en standard sandwichmodell og den avanserte sandwichmetoden. Testene ga noen like resultater men også større avvik. Konklusjonen er at beregningene som presenteres i oppgaven er mest sannsynlig de som brukes i programmet FEM-Design da både teorimanualen og resultatene antyder dette. Resultater sammenlignet med de to andre beregningsmetodene kan tyde på at denne beregningsmetoden skal brukes med forsiktighet eller eventuelt ikke brukes i det hele tatt, da den til tider gir større avvik og er en forenklet tilnærming til virkeligheten.

FAGLÆRER: Jan Arve Øverli

VEILEDER(E): Jan Arve Øverli

UTFØRT VED: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

## Sammendrag

Oppgaven startet med å undersøke hvilke dataprogrammer som brukes til å beregne og dimensjonere betongplater. Det ble klart at FEM-Design brukes av flere store konsultentselskaper, både til å beregne krefter og til å beregne armeringsmengder.

Teorimanualen til FEM-Design ble så undersøkt nærmere for å finne ut hvilke beregninger programmet baserer seg på. Det ble klart at programmet hovedsakelig forholder seg til Eurokodene og at beregning av dimensjonerende krefter baserer seg på litteratur fra M.P. Nielsen, Wood-Armer og Dr.Ferenc Nemeth. Det fantes ingen relevant litteratur for sistnevnte, men dette var også den mest ukjente kilden innenfor betongvitenskapen. M.P. Niensens bok *Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs* (1964) inneholdt ligninger som er like de såkalte Wood-Armer ligningene, og det ble klart at dette er mest sannsynlig ligningene FEM-Design refererer til. Disse ligningene ble så testet på et element i FEM-Design. Det ble klart at disse ligningene ga de samme dimensjonerende kreftene som de som blir kalkulert i FEM-Design, men de bruker en forenklet versjon av ligningene. Etter dette ble det kartlagt hvilke ligninger som brukes for å regne ut selve armeringsmengden. Disse ligningene ga resultater som var tilnærmet like armeringsmengden som ble kalkulert i FEM-Design. Det ble da konkludert med at dette var mest sannsynlig hvordan FEM-Design kalkulerte krefter og armering.

For å lære mer om FEM programmer og beregningsmetoder ble boken *Plates and FEM* av Blaauwendraad brukt. Der presenteres det forskjellige beregningsmetoder, men det er fokus på to versjoner av tre-lags sandwichmodellen. Det skrives forøvrig i boken at det er vanlig at dataprogrammer tar i bruk denne forenklete versjonen av Wood-Armer ligningene. Det som antas å gi den beste representasjonen av virkeligheten ifølge boken er metoden som kalles «den avanserte sandwichmetoden». Det ble derfor klart at denne metoden ville gi det beste tilgjengelige sammenligningsgrunnlaget. Ved hjelp av kilder i boken ble det sporet opp en artikkel av P.B. Lourenco som kan kjøpes på nettet. Her skriver han mer om metoden og presterer en datakode som utfører beregningene som gjøres i den avanserte sandwichmodellen. Datakoden var skrevet på et gammelt programmeringsspråk som ikke brukes lengre. Koden måtte derfor oversettes, noe som var veldig tidskrevende, da den er skrevet på en slik måte som vanskelig lar seg oversettes til moderne dataspråk. En ny datakoden ble skrevet i Python og den ble testet utallige ganger for å sørge for at koden kjører

som den skal. Den ble også testet opp mot tall og resultater presentert i artikkelen til Lourenco for å se at koden gir samme resultater og er en tro kopi av originalen.

For å undersøke beregningsmetoden brukt i FEM-Design ble metoden sammenlignet med to andre beregningsmetoder. Den ene metoden var «Standard Sandwichmetode» basert på trelags sandwichmodell og den andre metoden var den avanserte sandwichmetoden presentert i artikkelen til Lourenco. Ved noen tester ga de tre metodene relativt like resultater med forskjeller rundt 1%-5%, men det var også tester der forskjellene ble relativt store. Forskjellene ble store både for små og store torsjonsmomenter. For et torsjonsmoment på 145 kNm beregnet FEM-Design total nødvendig armeringsmengde til 4400 mm<sup>2</sup>. De to andre sandwichmetodene ga total nødvendig armeringsmengde på rundt 6540 mm<sup>2</sup>. Total armeringsmengde var dermed nesten 50% større. Dette er store forskjeller. Det ble gjort lignende tester i boken *Plates and FEM* hvor resultater fra et eksperiment sammenlignes med en standard sandwichmetode, den avanserte metoden og en metode de kaller «normal moment yield criterion». I boken frarådes det å bruke sistnevnte metode, og den avanserte metoden gir resultater som er nærmest eksperimentet. Resultatene i oppgaven er ikke ulike resultatene i boken og er nærmere å bekrefte bokens konklusjoner og påstander enn den er å avkrefte dem. De to sandwichmodellene gir relativt stabile og like resultater, mens FEM-Design sin beregningsmetode gir til tider store avvik fra de to andre metodene. Konklusjonen er at beregningene og ligningene som presenteres i oppgaven er mest sannsynlig de som brukes i programmet FEM-Design. Både teorimanualen, tester gjort og resultatene som presenteres antyder dette. I tillegg nevnes det i *Plates and FEM* boken at en slik forenklet tilnærming av Wood-Armer ligningene er mye brukt i software. Metoden er en forenklet tilnærming til virkeligheten og det er flere faktorer som ikke blir tatt hensyn til. Sandwichmodellene skal være en bedre tilnærming til virkeligheten, når det gjelder fordeling av krefter og likevekts fordelinger. Resultatene for FEM-Design sin beregningsmetode sammenlignet med de to andre sandwichmetodene kan tyde på at denne beregningsmetoden skal brukes med forsiktighet, eller ikke i det hele tatt.

## Summary

How do design software calculate reinforcements in concrete slabs, with a focus on the torsional moments?

The project started with researching which programs and software was being used for designing concrete slabs. The companies contacted were using a program called FEM-Design, which could be used for calculating forces and reinforcement in concrete slabs. The theory manual for the program was then assessed to gain information on how the program calculated their design forces and reinforcement. The program was basing its calculations on the Eurocodes and the design forces was determined by calculations by M.P. Nielsen, Wood-Armer and Dr. Ferenc Nemeth. There was no relevant literature by Nemeth, but that was also the most unknown source and author within the field of concrete science. M.P. Nielsens book *Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs* (1964) contained equations similar to the so-called Wood-Armer equations. These equations seemed to be the equations used by FEM-Design for calculating the design forces in the element. The equations were then tested on an element and results found in FEM-Design, and the equations deemed to give the same results for the design forces as the forces calculated in the program. After this the equations that were assumed to be used for calculating the reinforcement in the slab was tested. The results seemed to confirm these were indeed the equations used by FEM-Design. It was then assumed that this was the method FEM-Design used to calculate design forces and reinforcement.

To learn more about FEM-software and different calculation methods the book *FEM and Plates* by Blaauwendraad was used. The book presents different methods for calculating forces and reinforcement in slabs, with a focus on two three-layer sandwich model methods. The two sandwich models that are presented are the *standard sandwich model* and the *advanced three-layer model*. Testing in the books indicates that the latter is the one that gives the best adaptation to reality and the best results. This meant that the method seemed like a good comparison for the calculations done in FEM-Design. Based on sources in the book, an article written by P.B Lourenco was located and bought online. In the paper Lourenco writes more about the method and presents a computer code used for the advance three-layer model. The code was written in an old programming language and had to be translated to a modern language. This was a very time-consuming process, because the code was written in a manner

which makes it hard to translate and adjust to the modern programming languages. The new code was written in Python and was tested relentlessly to pinpoint holes in the code. The code was also tested up against results and numbers presented in Lourencos article, to confirm it was indeed a copy of his code.

To test the calculation method used by FEM-Design, it had to be compared with other proven calculation methods. The methods selected was the *Standard sandwich model* and the *advanced three-layer sandwich model* presented by Lourenco in his paper. Some of the tests gave similar results between the three calculation methods where the required reinforcement varied between 1%-5%. There were also tests where the results varied quite much. The results varied both for large torsional moments and the small ones. For a torsional moment of 145 kNm the FEM-Design method calculated total required reinforcement to be around 4400 mm<sup>2</sup>. The two sandwich models calculated the total required reinforcement to be around 6540 mm<sup>2</sup>, almost 50 % more reinforcement. There were similar tests done in the Plates and FEM book, where the results from an experiment were compared to a standard sandwich model, a more advanced sandwich model and a method called *normal moment yield criterion*. In the book, the *normal moment yield criterion* is recommended to be used with caution or not at all, and the advanced model gives results closest to the experiment. The results in this paper are closer to confirm and underline the results and recommendations in the book, then it is to debunk or disagree with them. The two three-layer sandwich methods seem to give agreeable results with each other and the FEM-Design calculations can at times give very different results. The conclusion is that the calculations and equations presented in the paper seems to be the equations FEM-Design bases its calculations on. Both the tests conducted, the results presented and the theory manual seems to confirm that these are the formulas used. The results found by using this method of calculating design forces and reinforcements, seems to indicate that this method must be used with caution, or not at all. It seems to be a simplification of reality and there are many factors these calculations do not consider.

## Innhold

1. Innledning .....	1
2. Plater .....	3
3. Beregningsmetoder og armering av betongplater .....	5
3.1 Beregning av membrantilstand .....	7
3.2 Beregning av dekker – Normal Moment Yield Criterion .....	13
3.3 Dekker- og Skallelementer – Standard modell .....	15
3.4 Formulering av den avanserte tre-lags modellen .....	20
4. FEM-Design .....	31
5. Beregning av krefter .....	32
5.1 Wood-Armer metoden .....	32
5.2 M. P. Nielsen .....	34
6. Test av Wood-Armer ligninger i FEM-Design .....	36
7. Beregning av armering FEM-Design .....	43
8. Den avanserte sandwichmodellen .....	46
9. Programmering av den avanserte sandwichmodellen .....	49
10. Testing av koden for den avanserte sandwichmodellen .....	54
10.1 Element kun påført momentkraft i x-retningen .....	54
10.2 Test av forskjellige aksialkrefter, bøye- og torsjonsmomenter .....	56
10.3 Oppsummering og inntrykk av koden .....	63
11. Sammenligning av beregningsmetoder .....	66
11.1 FEM-Design metoden .....	66
11.2 Enkel sandwichmetode fra kompendium .....	69
11.3 Den avanserte sandwichmodellen .....	73
12. Resultater .....	75
12.1 FEM-Design eksempel .....	75
12.2 Test av større momenter med torsjonskraft .....	79
13. Drøfting av resultater .....	90
14. Konklusjon .....	95
Figurer .....	97
Tabeller .....	97
Litteraturliste .....	98
Vedlegg .....	99



# 1. Innledning

Denne oppgaven handler om hvordan dataprogrammer beregner armeringsmengden i betongdekker. Problemstillingen ble først satt til å være «Hvordan beregner utvalgte dataprogrammer armering av betongplater?». Denne problemstillingen ble funnet å være litt for generell, da oppgaven hovedsakelig hadde fokus på hvordan torsjonsmomentet ble tatt hensyn til. Senere ble problemstillingen endret til «Hvordan beregner utvalgte dataprogrammer armering av betongplater med hensyn på torsjonsmomentet?», da dette var mer dekkende. Det vil også være viktig for problemstillingen å sammenligne beregningsmetoden med andre metoder slik at man får et bilde av hvor pålitelig den er, og hvilke resultater den gir sammenlignet med andre metoder.

For å finne ut hvilke programmer som var interessante ble flere av de store firmaene i Trondheim kontaktet for å høre hvilke programmer de brukte til denne typen utregninger. Det ble klart at FEM-Design var programmet som ble brukt av de som ble kontaktet og var derfor det mest aktuelle programmet å se nærmere på. For å finne ut mer om FEM-Design ble det undersøkt mer om programmet på internettet og der har Strusoft lagt ut teori-manualen til FEM-Design. Det var her de oppga litteraturen bak beregningene sine som var blant annet M.P. Nielsen, Wood-Armer og Eurokodene. Mye av tiden videre gikk på å få tak i bøker og litteratur av disse forfatterne. Dette var til tider veldig vanskelig da verkene og artiklene ble utgitt på 60-tallet. En av de mest refererte verken av R. H. Wood (Wood, 1968) viste seg å være nesten umulig å spore opp. Den finnes på bibliotek i Tyskland og Skottland, men det viste seg senere at det ikke ble nødvendig å bestille dette verket.

Det ville ikke vært veldig spennende å sett på beregningene gjort i FEM-Design om man ikke hadde noe å sammenligne resultatene med. Til dette ble boken *Plates and FEM* (Blaauwendraad, 2010) brukt, som handler om de forskjellige metodene man kan bruke for å beregne armeringsmengden i betongdekker. Her fokuseres det på tre-lags sandwichmetoden som er den metoden som skal gi best resultater og gi den beste representasjonen av virkeligheten. I boken presenteres det en avansert versjon av sandwichmetoden som skal gi resultater som er tilnærmet virkeligheten. Denne metoden ble videre undersøkt og det skulle vise seg at man kunne kjøpe en artikkel (Lourenco, 1993) som inneholdt en datakode for bruk av denne metoden. Metoden består av avanserte beregninger som går gjennom flere iterasjoner, noe som gjør at det er naturlig å ta i bruk data til hjelp. Koden er skrevet på tidlig

90-tallet og er derfor skrevet på et gammelt programmeringsspråk. For å kunne bruke denne metoden som sammenligningsgrunnlag ble koden oversatt til Python som er et moderne program og programmeringsspråk som er mye brukt nå til dags. Dette har tatt mye av tiden i oppgaven. Koden var skrevet med gamle «goto» funksjoner og på en veldig tungvindt og vanskelig måte. Så det var vanskelig og tok veldig lang tid å oversette koden, for så å teste den og finne feil. Dette ble egentlig en større del av oppgaven enn hovedsvaret på problemstillingen, men arbeidet var også kritisk for problemstillingen.

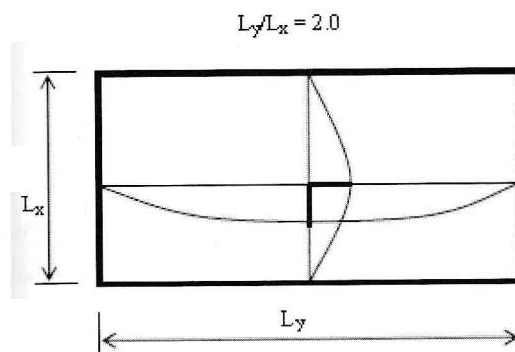
Det ble gjort mange tester av de forskjellige beregningsmetodene før de ble klare til å sammenlignes med hverandre. De tre metodene som skulle sammenlignes var beregningene som gjøres av FEM-Design, en forenklet eller «standard versjonen» av sandwichmetoden og den mer avanserte versjonen basert på koden til Lourenco (Lourenco, 1993). Metodene blir sammenlignet og resultatene blir drøftet. Siden det ikke er blitt utført et eksperiment som ville gitt resultater fra virkeligheten som de forskjellige metodene kunne sammenlignes med er det tatt utgangspunkt i at de to sandwichmetodene er en slags fasit. Resultatene sammenlignes også med resultater fra lignende undersøkelser gjort i Plates and FEM boken (Blaauwendraad, 2010).

## 2. Plater

En plate er et plant konstruksjonselement hvor tykkelsen er mye mindre enn utstrekningen i x- og y-retning. Det er vanlig at koordinatsystemet legges slik at x- og y-aksene er i plateplanet, og at z-aksen står normalt på planet. Lastene virker vanligvis i z-retningen normal på planet. Plateberegninger kan anvendes ved beregning av blant annet betongdekker, brudekker, offshorekonstruksjoner og skipskonstruksjoner.

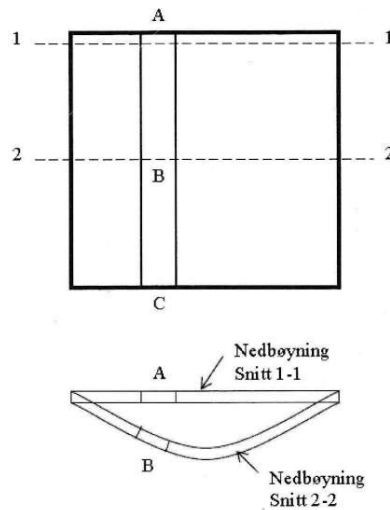
Det finnes mange forskjellige beregningsmetoder for plater og hvilke metoder som tas i bruk er avhengig av hvilken type plate som er aktuell. I «Theory of Plates and Shells» deler Timoshenko opp i tre typer plater (Timoshenko, 1940). Det finnes tynne plater, hvor deformasjoner eller nedbøying er små. En *tynn* plate har tykkelse mindre enn 1/20 av utstrekning i xy-planet og *små* deformasjoner er deformasjoner mindre enn tykkelsen. En annen type plate er tynne plater med store deformasjoner. Deformasjonene gjør seg så store at membrankreftene blir gjeldende. Og den tredje typen er tykke plater, hvor man også må ta hensyn til skjærdeformasjoner.

Plater deles også inn i det som kalles for toveisplater og enveisplater. Hvis en plate betraktes som en enveisplate så vil lasten kun bæres i én retning, mens for toveisplater betraktes det som om lasten bæres i to retninger. Hvis for eksempel platens lengde i y-retning strekker seg dobbelt så langt som lengden i x-retningen, kan platen betraktes som en enveisplate hvor all lasten bæres i x-retningen. Det kan da eksempelvis armeres for momentet i x-retningen, mens det legges minimumsarmering i y-retningen. Hvilken faktor som brukes for å avgjøre om det er en toveisplate eller en enveisplate kan variere, Eurokoden bruker  $L_y/L_x > 2,0$ , mens diverse annen litteratur sier  $L_y/L_x > 3,0$ . (Sørensen, 2013)



Figur 1 - Platelengder

For toveisplater så bæres lastene i to retninger. Platen får da bøyemomenter i to retninger,  $M_x$  og  $M_y$ , samt et torsjonsmoment  $M_{xy}$ . Figur 2 viser nedbøyningen av en platestripe og hvordan torsjonsmomentet da oppstår. Platestripen ABC blir påkjent av torsjon ved at den dreies i B i forhold til ved A. Ved plateberegninger varierer det veldig hvordan dette torsjonsmomentet tas hensyn til og dette er veldig avhengig av hvilke beregningsmetoder som brukes.



*Figur 2 – Nedbøyning av platestripe*

En vanlig beregningsmetode for toveisplater er «Stripemetoden». Beregningsmetoden ser bort i fra torsjonsmomentet og platen regnes med kryssende enveisbærende platestriper i x- og y-retningen. Platestripene regnes altså uten torsjonsstivhet og lastfordelingen er avhengig av spennviddeforholdet. Dette medfører da at lastandelene som bæres av torsjonsmomentet neglisjeres og all last bæres ved bøyning av platestripene. Bøyemomentene blir da noe større enn om torsjonsmomentene hadde vært med og armeringsmengden blir derfor på sikker side (Sørensen, 2013).

Det finnes mange andre måter å regne på plater. Hvilke som kan brukes avhengig av hvilken type plate det er, antakelser som gjøres om eksempelvis spenningstilstand og elastisitet og andre forhold. Det vanligste å bruke nå til dags er dataprogrammer som beregner kreftene ved bruk av elementmetoden. Denne oppgaven handler om hvordan dataprogrammet beregner kreftene og hvordan de armerer for kreftene som er beregnet.

### 3. Beregningsmetoder og armering av betongplater

Dette avsnittet er hentet fra boken *Plates and FEM: Surprises and Pitfalls* (Blaauwendraad, 2010). Boken handler om bruk og forståelse av FEM software og hvordan det kan brukes til å dimensjonere konstruksjoner. Med bruk av FEM software, menes det ikke at boken er en manual for selve programmene, men mer den praktiske bruken av informasjonen som hentes fra programmet. Dette avsnittet er hentet fra kapittel 16 i boken og heter «Reinforcement design using linear analysis» eller «armeringsberegninger ved bruk av lineær analyse». Dette kapitlet omhandler en metode, den avanserte sandwichmetoden, som vil være et referansepunkt for FEM-Design da den har vist seg å ha gitt gode resultater. Dette står det mer om mot slutten av kapitlet.

Beregning av armerte betongkonstruksjoner kan beskrives av følgende regler:

1. Velg et utgangspunkt for dimensjoner for alle konstruksjonselementer ved bruk av tommelfingerregler eller erfaring. Dimensjonene skal kunne tilfredsstille ULS og service krav, samt krav til utførelse på plass og andre krav som isolasjon, brann o.l.
2. Gjennomfør en global konstruksjonsanalyse for å kalkulere indre krefter som resulterer fra lastsituasjoner gitt i Eurokoder. Den vanligste metoden er FEM analyser og det er da gått ut ifra at konstruksjonen er lineærelastisk.
3. Bekreft innledende dimensjoner for betongen og regn ut armeringen som er i stand til å motstå indre krefter. I dette steget er ULS kapasiteten til det individuelle tverrsnittet betraktet.

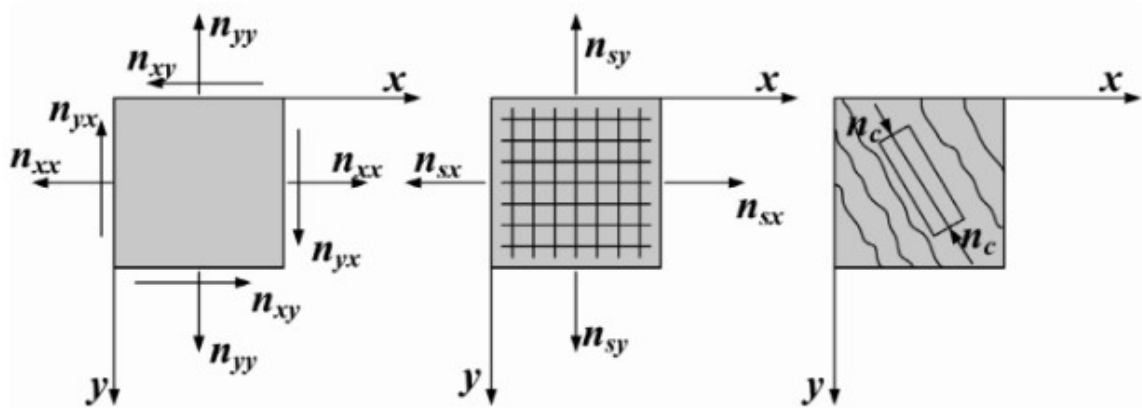
Hovedfordelen med prosessen ovenfor er at lineærelastiske FEM analyser er en veletablert metode og veldig rett-fram å bruke. I tillegg kan flere lastsituasjoner lett inkluderes og armering plasseres der det finnes behov. Disse områdene korresponderer med hvor det dannes riss, og brukes for å kontrollere riss forplantning.

Det finnes også bakdeler med prosessen som er beskrevet. Omfordeling av spenninger kan være vanskelig å inkludere i beregningene, og kan lede til større utgifter på armering. Mangel på informasjon om bruddlast/kollaps av konstruksjonen, selv med et nedre grenseanslag der duktilitet er kjent. Det er heller ingen informasjon om rissdybde, nedbøyning og andre aktuelle

tall, selv om de kan beregnes for et bjelkelignende element. Derfor må prosessen også ta i bruk retningslinjer for å sikre krav til duktilitet og servicekrav.

Bare i noen spesielle tilfeller vil konstruksjoner med uvanlig fasong, form og kompleksitet bli grundig analysert. Det vil da bli gjennomført en full ikke-lineær analyse av en tidligere beregnet konstruksjon, for å se oppførselen til konstruksjonen risset, urisset og gjennom forskjellige stadier. En slik prosedyre vil vanligvis ta mye tid for pre-processing (før-behandling), utregninger og post-processing (etter-behandling), som ikke tilfredsstiller krav til kostnader og tid. Og siden ikke-lineær analyse ofte krever å vite geometri og armering, kan det anses å være mer et vurderingsverktøy enn dimensjonering- og designverktøy. Simulering av betongvegger, gulv, dekker og skall med FEM-analyse begynner å bli standarden for analyseverktøy i beregninger og dimensjonering av konstruksjoner, noe som gjør at det trengs gode metoder for beregning av disse elementene. I dette kapittelet diskuterer boken beregningsmetoder for membrantilstand (vegger), bøyningstilstand (gulv) og kombinasjoner som kan oppstå i diverse plater og skall. Heretter vil disse refereres til som skall.

Litt historie: Dimensjonering av betongelementer utsatt for membrantilstander har vært i utvikling siden 1960-tallet av forfattere som Baumann, Braestrup og Nielsen. Nielsens bok (Nielsen, 1998) er en klassisk referanse, og forfatteren nevnes i flere sammenhenger i denne oppgaven. Denne prosessen resulterte i flere formler for beregning og dimensjonering av betongkonstruksjoner i CEB-FIB Model Code 1990 for betongkonstruksjoner (CEB, 1993). Beregninger av gulv, dekker og skall blir også nevnt i Model Code 1990. Det er her tre-lags sandwichmodellen blir introdusert, som er metoden dette kapittelet omhandler. Mennene bak denne metoden er Gupta og Marti. Den innledende versjonen av Eurokode 2 foreslo en annen metode basert på flytekriteriumet, det er denne metoden som er populært referert til som Wood-Armer ligningene eller Wood-Armer metoden (Wood, 1968). Denne metoden gjelder kun for dekker og ikke skall. Senere versjoner har gått bort i fra denne metoden. Tre-lags sandwichmodellen ble inkludert i Eurokode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner og er beskrevet i tilleggene i Del 2: Bruer (CEN, EN, 2005/2009). Fib har og publisert «a Practitioners guide to finite element modeling of reinforced concrete structures» (Bulletin, 2008) og mer informasjon rundt utviklingen av de forskjellige metodene kan finnes i Lourencos «Automatic design of reinforcement in concrete and plates» (Lourenco, 1993) og «Solution for the design of reinforced concrete plates and shells» (Lourenco, 1995).



Figur 3 – Membran elementer, fra venstre (a) påførte krefter (b) armeringens bidrag (c) betongens bidrag

Her vil det refereres til tre-lags sandwichmodellen fra Eurokode 2 og «Fib practitioners guide» som standard modellen. Modellen kalles *standard* fordi konseptet er veldig nyttig, men gjennomgangen krever forbedring da indre momentarmer er tilnærmet og noen uttrykk er sett bort fra i likevekts ligninger. Både standard og en mer avansert modell vil bli diskutert.

### 3.1 Beregning av membrantilstand

I Figur 3 er det avbildet et membranelement med tykkelse  $h$ , som er utsatt for kreftene  $n_{xx}$ ,  $n_{yy}$ , og  $n_{xy}$  i planet. Armeringen består av to ortogonale sett av armeringsjern parallelle til x- og y-aksene. I dette koordinat systemet er  $a_{sx}$  og  $a_{sy}$  nødvendig armeringsareal per valgt enhetslengde. De beregnes fra  $n_{sx}$  og  $n_{sy}$  respektivt. Formålet for dette delkapittelet er å finne formler for  $n_{sx}$  og  $n_{sy}$ .

Påførte krefter vil bli tatt opp av armering og betongbidraget. Det er antatt at betongen er utsatt for en uniaksial trykkraft  $n_c$  som er parallell med rissvinkel, i en vinkel  $\theta$  på y-aksen. De to settene av armeringsjern i Figur 3 (b) og betongstavene (concrete struts) fra Figur 3 (c) må sammen bære lastene vist i Figur 3 (a). Kraftene  $n_{sx}$  og  $n_{sy}$  er alltid positive eller null, og membrankraften  $n_c$  i betongen er negativ eller null. I valgt koordinatsystem er skjærmotstanden til armeringen null og spenningstilstanden til betongen er uniaksial. Den første hovedkraften i membranen er null og trykkraften  $n_c$  forekommer i den andre hovedretningen.

Spenningstilstanden i Figur 3 (a) er ekvivalent til kombinasjonen av tilstandene i Figur 3 (b) og (c) når følgende likevekts betingelser er oppfylt:

$$n_{xx} = n_{sx} + n_c \sin^2\theta \quad (1)$$

$$n_{yy} = n_{sy} + n_c \cos^2\theta \quad (2)$$

$$n_{xy} = -n_c \sin\theta \cos\theta \quad (3)$$

Den andre hovedspenningen  $\sigma_c$  må være mindre enn trykkfastheten  $f_c$  til betongen:

$$n_c \geq -h f_c \quad (4)$$

Det minnes om at  $n_c$  er negativ, så  $n_{sx}$  er ikke mindre enn  $n_{xx}$ , og  $n_{sy}$  er ikke mindre enn  $n_{yy}$ . Tilfellene for  $\theta = 0$  og  $\theta = \pi / 2$  er trivielle, noe som betyr at hovedretningene er på linje med x- og y-aksen. Hvis  $\theta \neq 0$  og  $\theta \neq \pi / 2$ , kan ligning (1) til ligning (4) skrives om slik:

$$n_{sx} = n_{xx} + n_{xy} \tan\theta \quad (5)$$

$$n_{sy} = n_{yy} + n_{xy} \cot\theta \quad (6)$$

$$n_c = \frac{n_{xy}}{\sin\theta \cos\theta} \quad (7)$$

Ligning (7) viser at  $n_{xy}$  og  $\theta$  må ha samme fortegn slik at  $n_c$  er negativ og i trykk. Den totale mengden armering finnes fra de to første uttrykkene ligning (5) og (6) som gir

$$n_{sx} + n_{sy} = n_{xx} + n_{yy} + n_{xy} (\tan\theta + \cot\theta) \quad (8)$$

Den siste delen av uttrykket er alltid positiv, siden  $n_{xy}$  og  $\theta$  er av samme fortegn. Det vil si minimum armeringsmengde korresponderer til  $\theta = \pm \pi / 4$ . For disse verdiene av  $\theta$ , gitt at



armeringen alltid er utsatt for strekkraft, dvs.  $n_{sx} \geq 0$  og  $n_{sy} \geq 0$ , vil ligningene (5) og (6) gi  $n_{xx} \geq -|n_{xy}|$  og  $n_{yy} \geq |n_{xy}|$  respektivt. Om ikke må verdien  $\theta$  forandres. Derfor må 4 forskjellige tilfeller vurderes.

**Tilfelle 1: Armering i x- og y-retning nødvendig:**

$$n_{xx} \geq -|n_{xy}| \quad (9)$$

$$n_{yy} \geq |n_{xy}| \quad (10)$$

$$n_{sx} = n_{xx} + |n_{xy}| \quad (11)$$

$$n_{sy} = n_{yy} - |n_{xy}| \quad (12)$$

$$n_c = -2|n_{xy}| \quad (13)$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{4} \quad (14)$$

**Tilfelle 2: Armering i y-retning nødvendig:**

$$n_{xx} < -|n_{xy}| \rightarrow n_{sx} = 0 \quad (15)$$

$$\tan\theta = -\frac{n_{xx}}{n_{xy}} \quad (16)$$

$$n_{sy} = n_{yy} - \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}, n_{sy} \geq 0 \rightarrow n_{yy} \geq \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}} \quad (17)$$

$$n_c = n_{xx} + \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}} \quad (18)$$

**Tilfelle 3: Armering i x-retning nødvendig:**

$$n_{yy} < |n_{xy}| \rightarrow n_{sy} = 0 \quad (19)$$

$$\tan\theta = \frac{n_{xy}}{n_{yy}} \quad (20)$$

$$n_{sx} = n_{xx} - \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}, n_{sx} \geq 0 \rightarrow n_{xx} \geq \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}} \quad (21)$$

$$n_c = n_{yy} + \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}} \quad (22)$$

#### Tilfelle 4: Ingen armering nødvendig i noen av retningene

Ingen riss forekommer og spenningstilstanden er biaksielt trykk. I betongen er de to hovedspenningene i membranen  $n_{c1}$  og  $n_{c2}$  tilstede:

Case	$n_{sx}$	$n_{sy}$	$n_c$
$n_{xx} \geq - n_{xy} $ $n_{yy} \geq - n_{xy} $	$n_{xx} +  n_{xy} $	$n_{yy} +  n_{xy} $	$-2 n_{xy} $
$n_{xx} < - n_{xy} $ $n_{yy} \geq \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}$	0	$n_{yy} - \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}$	$n_{xx} + \frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}$
$n_{xx} \geq \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}$ $n_{yy} < - n_{xy} $	$n_{xx} - \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}$	0	$n_{yy} + \frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}$
other	0	0	$\frac{n_{xx} + n_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{2}\right)^2 + n_{xy}^2}$
$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{f_{syd}} \quad a_{sy} = \frac{n_{sy}}{f_{syd}} \quad f_c = \frac{n_c}{h} \leq f_{cd}$			

Figur 4 – De fire tilfellene for membranarmering

$$n_{xx} < -|n_{xy}| \text{ eller } n_{yy} < -|n_{xy}| \quad (23)$$

$$n_{yy} < -\left|\frac{n_{xy}^2}{n_{xx}}\right| \text{ eller } n_{xx} < -\left|\frac{n_{xy}^2}{n_{yy}}\right| \quad (24)$$

$$n_{sx} = 0, n_{sy} = 0 \quad (25)$$

$$n_{c1,c2} = \frac{n_{xx} + n_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_{xx} - n_{yy}}{2}\right)^2 + n_{xy}^2} \quad (26)$$

### ***Beregning av armering og betongspenning***

De fire forskjellige tilfellene er gitt i Figur 4. Formlene tilsvare den optimale retning for betongtrykk, det vil si verdien for  $\theta$  som gir minimum armeringsmengde. Formelen for armering er gitt som:

$$a_{sx} = \frac{n_{sx}}{f_{syd}}, \quad a_{sy} = \frac{n_{sy}}{f_{syd}} \quad (27)$$

Hvor  $a_{sx}$  og  $a_{sy}$  er stål areal per lengde enhet og  $f_{syd}$  er stålets fasthet. Betongspenningen er gitt som:

$$f_c = -\frac{n_c}{h} \quad (28)$$

Betongspenning  $f_c$  må sjekkes mot dimensjonerende betongspenning  $f_{cd}$ . For dette kan det brukes «model code 1990» eller «practioners guide of fib».

*Model code 1990* anbefaler:

$$\text{Tilfelle 1 til 3 } f_c \leq f_{cd2} \quad (29)$$

$$\text{Tilfelle 4 } f_c \leq K f_{cd1} \quad (30)$$

Hvor

$$f_{cd1} = 0.85 \left| 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right| f_{cd} \quad (31)$$

$$f_{cd2} = 0.60 \left| 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right| f_{cd} \quad (32)$$

$$K = \frac{1 + 3.65 \alpha}{(1 + \alpha)^2}, \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (33)$$

Her er  $f_{cd}$  betongens dimensjonerende styrke,  $f_{ck}$  er betongens karakteristiske styrke, og  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  er de to hovedtrykkspenningene. Formlene er basert på eksperimentelle studier av biaksial betongs oppførsel av Kupfer.

### ***Fib practioners guide***

*The practioners guide of fib* anbefaler følgende endringer for ACI koden. Den anbefalte formelen for betongstyrke er:

$$f_{cd} = \frac{0.85 \beta f_{ck}}{\gamma_c} \quad (34)$$

hvor faktoren 0,85 tar høyde for in-situ og sylinder styrke,  $\beta$  tar høyde for transvers strekkbelastning,  $f_{ck}$  er betongens trykkfasthet og  $\gamma_c$  er sikkerhetsfaktoren. Formelen for  $\beta$  er:

$$\beta = \frac{1}{0.8 + 170\varepsilon_1} \quad (35)$$

Her er  $\varepsilon_1$  hoved belastningen normalt på betongstavene (concrete struts). Her velges det at belastningen tas opp av armeringen så  $\varepsilon_1 = f_{syd} / E$  hvor E er Young-modulen til stål.

### ***Bemerkning***

Det må merkes at den diskontinuerlige variasjonen av betongens trykkfasthet mellom tilfelle 3 og tilfelle 4, eller mellom 2 og 4 ikke virker akseptabelt. Dette blir ekstra relevant da uttrykket  $f_{cd2}$  i ligning (31) – (33) korresponderer til et absolutt minimum av risset betongarmering. Det virker som at dette er prisen man må betale for en forenklet beregningsmetode.

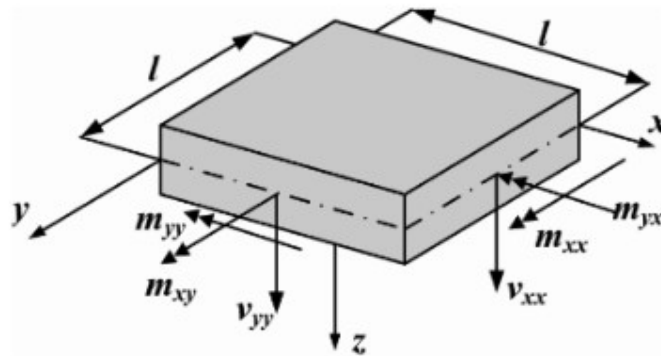
## **3.2 Beregning av dekker – Normal Moment Yield Criterion**

Som i et element i membrantilstand, er dimensjonering av dekker og skall med interne krefter funnet av FEM analyse basert på en likevektsmodell i ULS. Mens betongens begrensede duktilitet skal tas med i betraktning for membranelementer, er det ikke like bekymringsverdig for dekker da de ofte er underarmerte. Svikt i konstruksjonen vises ved at armeringen gir etter, med unntak av punktlaster hvor det kan forekomme gjennomlokking i dekket og skall uten tverrarmering.

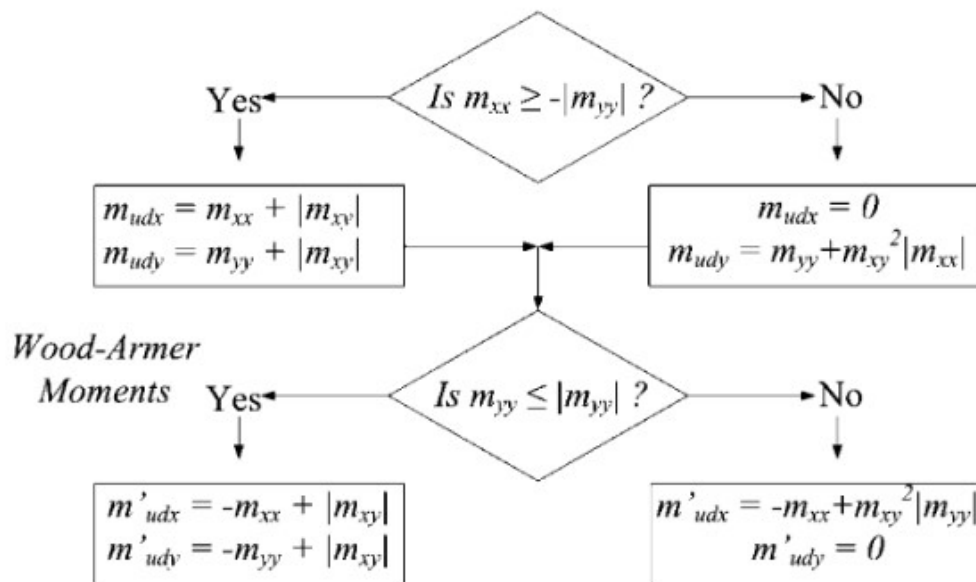
Kreftene i dekket er avbildet i Figur 5, som viser hvordan bøyemomentene  $m_{xx}$  og  $m_{yy}$  og torsjonsmomentet  $m_{xy}$  virker på elementet. Flytekriterium krever at på et hvilket som helst punkt i elementet som betraktes skal moment kapasiteten  $m_n^*$  være større enn påført normalmoment  $m_n$  for alle verdier av  $\theta$ , som er orienteringen av planet målt med urviseren fra x-aksen. Resulterende formler for dimensjonerende momenter er presentert i figur 16.4.

Armering er påført i x- og y-retning for å motstå dimensjonerende momenter  $m_{xb}$ ,  $m_{xt}$ ,  $m_{yb}$  og  $m_{yt}$ . Indeksene  $b$  og  $t$  indikere bøyemomentene gir strekk i bunnen av dekket og toppen av dekket i respektiv rekkefølge. Bunnen er på positiv z-side av midten på dekkets plan og

toppen på negativ side. De viste ligningene er mye brukt i software som dimensjonerer armering av dekker. Ofte er det bare delen øverst til venstre som er brukt.



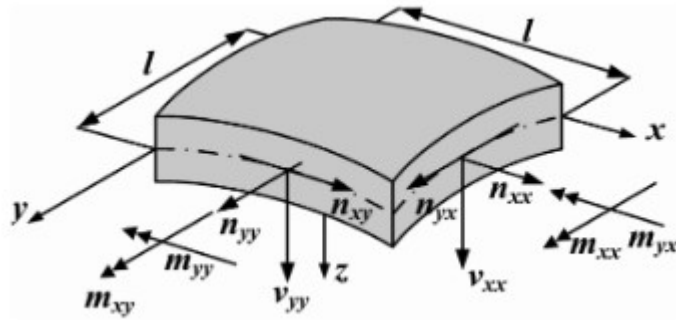
Figur 5 – Krefte som virker på dekket



Figur 6 – Armering av dekker ifølge EN 1992-1-1

## Evaluering

Bruken av ligningene fra Figur 6 frarådes av flere grunner. Ligningene tar ikke hensyn til skjærkraft, sjekker ikke betongknusing og oppfyller ikke likevektskrav. Det anbefales her å bruke tre-lags sandwichmodell for dekker og skall. Dette omtales i de neste avsnittene.



Figur 7 – Krefte som virker på skallelementet

### 3.3 Dekker- og Skallelementer – Standard modell

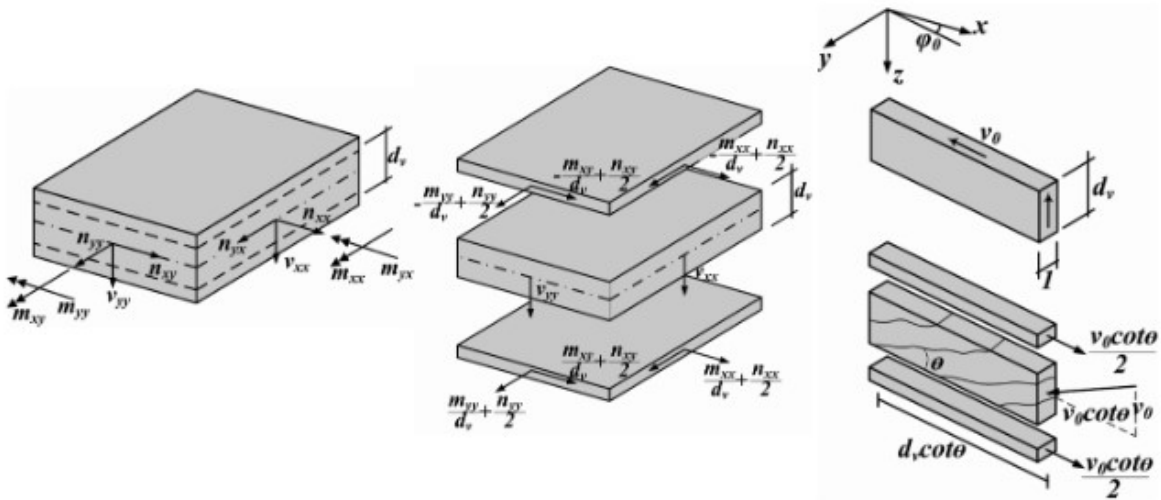
Problemstillingen som diskuteres i dette avsnittet er dimensjonering av et skallelement med tykkelse  $h$ , belastet med en kombinasjon av bøyemoment og membrankraft, og hvor hovedbøyekrefter og membrankrefter ikke sammenfaller. Et dekke er et spesielt tilfelle av denne problemstillingen. Figur 7 viser påførte krefter og momenter. Disse kreftene og momentene må være i likevekt med strekkreftene i armeringen og trykkreftene i betongen. Det velges  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -akser, hvor  $z$ -aksen peker nedover som vist i Figur 7. Armeringen består av flere lag jern som står vinkelrette på  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -aksen plassert i øvre og nedre del av elementet. Det refereres til øvre del av elementet som  $t$  (på negativ side av  $z$ -akse) og nedre del er  $b$  (positiv side av  $z$ -akse).

Formuleringen av problemstillingen er identisk til den i avsnittet om beregning av membran tilstand. Den totale motstanden til elementet finnes ved å legge sammen betong- og armeringsbidraget. Skallelementet modelleres etter 3-lags sandwichmetoden vist i Figur 8. De to ytterste lagene gir motstand til bøyning og kraft i planet og kjernen gir skjæroverførsel mellom de to lagene. Tykkelsen på de ytre lagene er  $a$  og avstanden mellom midtpunktene av de ytre lagene er  $d_v$ .

Avhengig av størrelsen så kan skjærkraften ha innvirkning på armeringen i de ytre lagene. Små verdier har ingen innvirkning, men det har store verdier. For å avgjøre om skjærkreftene er små brukes formelen for maksimal skjærkraft ligning (36) som virker i en retning  $\beta_0$  med  $x$ -aksen som definert i ligning (37).

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (36)$$

$$\tan\beta_0 = \frac{v_y}{v_x} \quad (37)$$



Figur 8 – Sandwichmodell, (a) Skallelement (b) Krefter i lag (c) Overføring av skjærkrefter, (Marti 1991)

Skjærkraften defineres som liten om den er under skjærmotstanden  $d_v$ ,  $\tau_{c,red}$ , hvor  $\tau_{c,red}$  er dekkets nominelle styrke uten tverrarmring. Da vil kjernen ikke risse opp. For  $\tau_{c,red}$  kan det brukes ENV 1992-1-1 som gir:

$$\tau_{c,red} = 0.25 f_{ctd} (1.6 - d_v) (1.2 + 40\rho_1) + 0.15\sigma_{cp} \quad (38)$$

Her er  $f_{ctd}$  strekkfasthet,  $d_v$  er indre momentarm i meter,  $\rho_1$  er prosent lengdearmring og  $\sigma_{cp}$  er normal trykkspenning i planet. Hvis store strekk membrankrefte er påført elementet settes  $\tau_{c,red} = 0$ . Om ikke kan ligning (38) forenkles og man ser bort i fra den positive effekten fra lengdearmringen.

$$\tau_{c,red} = 0.30 f_{ctd} (1.6 - d_v) \quad (39)$$



### ***Standard sandwichmodell – Ikke riss grunnet skjærkraft***

Først sees det nærmere på små skjærkrefter. Kjernen skal ikke risse og skal kunne bære skjærkraften. Figur 8 (b) viser sandwichmodellene for dette tilfellet. Behovet for armering må undersøkes kun for kombinasjonen av membrankraft, bøye- og vridningsmoment (torsjon). Det er viktig å bestemme tykkelsen på de to ytterste lagene. I standard modellen blir ikke tykkelsen eksplisitt tatt hensyn til. Det er antatt at alle armeringslagene sammenfaller med de ytre lagene, som også sammenfaller med resultatanten av betong trykkraften. Derfor vil en momentarm  $d_v$  gjelde for både x- og y-retning. Membrankreftene i de ytre lagene er gitt ved:

$$n_{xxt} = \frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2}, \quad n_{xxb} = -\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} \quad (40)$$

$$n_{yyt} = \frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2}, \quad n_{yyb} = -\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} \quad (41)$$

$$n_{xyt} = \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2}, \quad n_{xyb} = -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \quad (42)$$

Ved å bruke disse ligningene for de ytterste lagene av membranelementet, blir ligningene for dimensjonering av armering i skall:

$$n_{sxt} = \frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right| \quad (43)$$

$$n_{syt} = \frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right| \quad (44)$$

$$n_{sxt} = -\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right| \quad (45)$$

$$n_{syt} = -\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} \right| \quad (46)$$

Fra disse kreftene kan det beregnes armeringsprosentene:

$$\rho_{xt} = \frac{n_{sxt}}{h f_{syd}}, \quad \rho_{xb} = \frac{n_{sxb}}{h f_{syd}} \quad (47)$$

$$\rho_{yt} = \frac{n_{syt}}{h f_{syd}}, \quad \rho_{yb} = \frac{n_{syb}}{h f_{syd}} \quad (48)$$

Hvor  $f_{syd}$  er strekkfastheten til stål.

### ***Standardmodell – Riss grunnet skjærkraft***

Hvis skjærkraften er stor nok til at kjernen risser så trengs det ekstra armering. Her følges Marti (Marti, 1991), men en alternativ metode er Eurocode 2. Figur 8 (c) viser at betongens stivere i kjernen er i en vinkel  $\theta$  på midt planet. For å sikre likevekt, må det oppstå ekstra membrankrefter i de ytre lagene. Velges det  $\theta = 45^\circ$  så blir det ekstra membrankrefter i begge de ytre lagene med størrelse  $v_0$  i retningen av maksimal skjærkraft. Valget av  $45^\circ$  for rissvinkel i kjernen er i overensstemmelse med det tradisjonelle «Morsch truss» for armerte betong bjelker. Dekomponering av de ekstra membrankreftene i de ytre lagene til membrankrefter i x- og y-retning gir disse ligningen:

$$n_{xxt} = \frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \frac{v_x^2}{2 v_0}, \quad n_{xxb} = -\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \frac{v_x^2}{2 v_0} \quad (49)$$

$$n_{yyt} = \frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{v_y^2}{2 v_0}, \quad n_{yyb} = -\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{v_y^2}{2 v_0} \quad (50)$$

$$n_{xyt} = \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2 v_0}, \quad n_{xyb} = -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2 v_0} \quad (51)$$

Brukes disse ligningene for membranelementer kan ligningene for dimensjonering av armering av betongskall utledes:

$$n_{sxt} = \frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \frac{v_x^2}{2 v_0} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2 v_0} \right| \quad (52)$$

$$n_{syt} = \frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{v_y^2}{2 v_0} + \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2 v_0} \right| \quad (53)$$

$$n_{sxb} = -\frac{m_{xx}}{d_v} + \frac{n_{xx}}{2} + \frac{v_x^2}{2 v_0} + \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2 v_0} \right| \quad (54)$$

$$n_{syb} = -\frac{m_{yy}}{d_v} + \frac{n_{yy}}{2} + \frac{v_y^2}{2 v_0} + \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2 v_0} \right| \quad (55)$$

Fra disse uttrykkene finner man armeringsprosenten. Nødvendig tverrarmoring med prosenten er gitt ved  $\rho_z$ :

$$\rho_z = \frac{v_0}{d_v f_{syd}} \quad (56)$$

I praktiske problemer anbefales det å øke tykkelsen på dekket så tverrarmoring unngås.

## ***Evaluering***

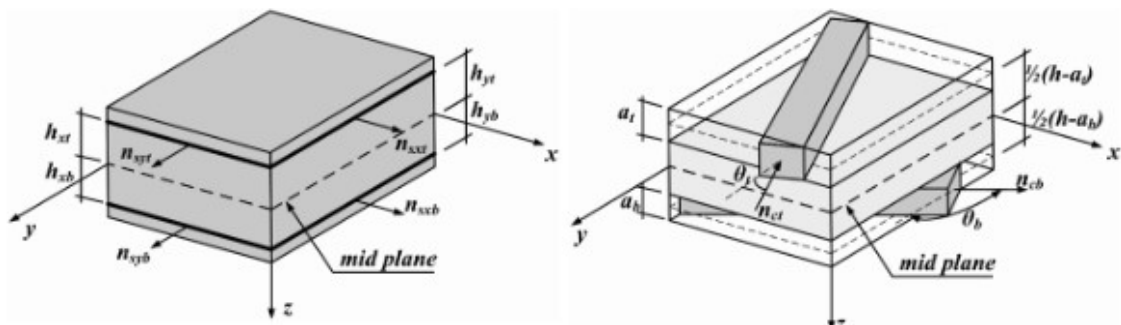
Bruken av standard sandwichmodell er veldig enkel, men det er også en tilnærmet versjon av virkeligheten. Det er antatt at kjernen ikke bidrar til å overføre membrankrefter. Krav til kompatibilitet viser at dette ikke kan være korrekt. Det er antatt at begge lag med armering i de ytterste lagene er posisjonert i midtplanet av laget. Dette er fysisk umulig og at dette midtplanet sammenfaller med resultanten av de respektive betong trykkreftene er sjeldent tilfellet. Vinkelen  $\beta_0$  av risset i kjernen grunnet skjærkraften er antatt å være  $\pm 45^\circ$ .

Selv om global likevekt er tilfredsstillt, flere vilkår assosiert med forskjellige momentarmer til de forskjellige kreftene er ikke medregnet. Dette betyr at avvik fra virkeligheten har en tendens til å stige ved høyere armeringsmengder eller store torsjonsmomenter. I disse tilfellene vil tykkelsen av betonglagene ofte stige og standardmodellen er usikker.

I neste avsnitt blir det presentert en mer avansert sandwichmodell. Den starter også med antakelsen om en tre-lags sandwichmodell inndeling av kraftoverføring, sånn at de ytre lagene bærer membrankreftene, bøyemoment og torsjonsmoment. Kjernen bærer skjærkrefter. For resten så vil manglene til standardmodellen bli «reparert». Hvert lag med armering tildeles et eget plan, som tillater tykkelsen av de ytre lagene å bli tilstrekkelig beregnet og tar hensyn til manglende vilkår. Konsekvente hypoteser legger grunnlaget for den avanserte modellen.

### 3.4 Formulering av den avanserte tre-lags modellen

I den mer avanserte modellen, vil indre arm  $d_v$  ikke bli antatt å være «*a priori*» og ikke like stor i alle retninger, og den blir kalkulert ved bruk av en iterativ prosess. Fire forskjellige tilfeller analyseres og behandles hver for seg: (a) armering nødvendig i begge ytre lag; (b) armering kun nødvendig i nedre lag; (c) armering kun nødvendig øvre lag; (d) ingen behov for armering. Hele formuleringen av problemet finnes i Lourenco (Lourenco, 1993) og (Lourenco, 1995). Det beskrevne fenomenet er enkelt, men resulterende ligninger er relativt kompliserte og leder til et ubestemt system av ikke-lineære ligninger.



Figur 9 – Figur av trelags sandwichmodellen

Geometrien til den avanserte modellen er vist i Figur 9. Det brukes fire forskjellige distanser  $h_{xt}$ ,  $h_{yt}$ ,  $h_{xb}$  og  $h_{yb}$  fra de fire armeringslagene til midten av planet. Tykkelsen på de ytre lagene er respektivt  $a_t$  og  $a_b$ . Kjernen mellom de to lagene har tykkelse  $h_c$ . På samme måte som i standard modellen defineres motkreftene i armeringen  $n_{sxt}$ ,  $n_{syt}$ ,  $n_{sxb}$  og  $n_{syb}$ . De to kreftene i x-retningen blir summert til  $n_{sx}$  og y-retning blir summert til  $n_{sy}$ . Motstående momenter er

definert som  $m_{sx}$  og  $m_{sy}$ . For øvre og nedre lag introduseres kreftene  $n_{ct}$  og  $n_{cb}$  i gitt rekkefølge og momentene  $m_{ct}$  og  $m_{cb}$ . Her brukes  $s$  for stål,  $c$  for betong,  $t$  for øvre lag og  $b$  for nedre lag.

**Tilfelle 1: Armering i begge ytre lag:**

Hvis det er nødvendig med armering i ytre lag vil krefter og momenter for armeringen være gitt ved:

$$n_{sx} = n_{sxt} + n_{sxb} \quad (57)$$

$$n_{sy} = n_{syt} + n_{syb} \quad (58)$$

$$m_{sx} = -n_{sxt} h_{xt} + n_{sxb} h_{xb} \quad (59)$$

$$m_{sy} = -n_{syt} h_{yt} + n_{syb} h_{yb} \quad (60)$$

For betongen:

$$n_{ct} = -a_t f_c \quad (61)$$

$$n_{cb} = -a_b f_c \quad (62)$$

$$m_{ct} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{ct} \quad (63)$$

$$m_{cb} = \frac{1}{2} (h - a_b) n_{cb} \quad (64)$$

Ligningene fra ligning (57) til ligning (62) gir indre krefter og momenter. Likevekt av påførte krefter og momenter gir:

$$n_{xx} = n_{sx} + n_{ct} \sin^2 \theta_t + n_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (65)$$

$$n_{yy} = n_{sy} + n_{ct} \cos^2 \theta_t + n_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (66)$$

$$n_{xy} = -n_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - n_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (67)$$

$$m_{xx} = m_{sx} + m_{ct} \sin^2 \theta_t + m_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (68)$$

$$m_{yy} = m_{sy} + m_{ct} \cos^2 \theta_t + m_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (69)$$

$$m_{xy} = -m_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - m_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (70)$$

Ligningene (65) til (67) tilsvarer membrankrefter, mens ligning (68) til (70) tilsvarer ligningene for bøyning. Hvis  $\theta_t \neq 0, \pi/2$  og  $\theta_b \neq 0, \pi/2$ , de foregående ligningene kan omskrives til:

$$-n_{ct} = \frac{(h - a_t)n_{xy} - 2 m_{xy}}{h_c \sin 2 \theta_t} \quad (71)$$

$$-n_{cb} = \frac{(h - a_b)n_{xy} + 2 m_{xy}}{h_c \sin 2 \theta_b} \quad (72)$$

Armeringsmengde finnes fra ligningene (65) til (70). Formålet er å kalkulere kreftene i armeringsjernene  $n_{sxt}$ ,  $n_{syb}$ ,  $n_{sxb}$  og  $n_{syb}$ . De andre ukjente er  $a_t$ ,  $a_b$ ,  $\theta_t$  og  $\theta_b$ . Dette medfører at de seks ligningene inneholder åtte ukjente. Verdiene  $\theta_t$  og  $\theta_b$  bør velges slik at den totale armeringsmengden er minst mulig. Et godt utgangspunkt vil være  $\theta_t = \theta_b = \pi/4$  og  $a_t = a_b = 0,2h$ . Det å sette  $\theta = \pi/4$  minimerer total armeringsmengde og  $a = 0,2h$  er vanlig for bjelker. Verdien vil så justeres med en iterativ prosess til man oppnår likevekt. Den iterative prosessen er beskrevet i et eget avsnitt og boken referer til Lourenco ved (Lourenco, 1993) og (Lourenco, 1995). Knusing sjekkes ved  $a_t + a_b \leq h$  og strekkarmering kalkuleres med å anta flytning i armeringen.

### ***Tilfelle 2: Kun armering i nedre lag***

For et biaksielt trykk i øvre lag, så er ikke armering nødvendig i laget. Kreftene i øvre lag noteres som  $n_{cxt}$ ,  $n_{cyyt}$  og  $n_{cxyt}$ . Kreftene og momentene som armeringen motvirker i x- og y-retning gis ved:

$$n_{sx} = n_{sxb} \quad (73)$$

$$n_{sy} = n_{syb} \quad (74)$$

$$m_{sx} = n_{sxb} h_{xb} \quad (75)$$

$$m_{sy} = n_{syb} h_{yb} \quad (76)$$

Og betongen i nedre lag:

$$n_{cb} = -a_b f_c \quad (77)$$

$$m_{cb} = \frac{1}{2} (h - a_b) n_{cb} \quad (78)$$

Likevekt av påførte krefter og momenter gir:

$$n_{xx} = n_{sx} + n_{cxt} + n_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (79)$$

$$n_{yy} = n_{sy} + n_{cyt} + n_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (80)$$

$$n_{xy} = n_{cxyt} - n_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (81)$$

$$m_{xx} = m_{sx} + m_{cxt} + m_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (82)$$

$$m_{yy} = m_{sy} + m_{cyt} + m_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (83)$$

$$m_{xy} = m_{cxyt} - m_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (84)$$

Med:

$$m_{cxt} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{cxt} \quad (85)$$

$$m_{cyt} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{cyt} \quad (86)$$

$$m_{cxyt} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{cxyt} \quad (87)$$

I dette tilfellet er det fortsatt åtte ukjente. Derimot så må en ekstra ligning legges til de seks likevektsligningene, den vil representere biaksiell spenning i øvre lag.

$$n_{ct} = -a_t f_c = \frac{n_{cxt} + n_{cyt}}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_{cxt} + n_{cyt}}{2}\right)^2 - n_{cxyt}^2} \quad (88)$$

Det er åtte ukjente og sju ligninger, som betyr at  $\theta_b$  bør velges slik at den totale armeringsmengden er minst mulig.

### ***Tilfelle 3: Armering i øvre lag.***

Dette tilfellet hvor man har bi-aksielt trykk i nedre lag, er identisk til bi-aksielt trykk i øvre lag, med en rotering av indekser. Det krever derfor ingen videre forklaring.

### ***Tilfelle 4: Ingen armering***

Her er det biaksielt trykk i øvre og nedre lag og det kreves ingen armering, noe som gjør løsningen unik. Det antas at membrankreftene i øvre lag er  $n_{ext}$ ,  $n_{cyt}$  og  $n_{cxyt}$  i x-retning, y-retning og skjærkraft i gitt rekkefølge. Kraftene i nedre lag er  $n_{cxb}$ ,  $n_{cyb}$  og  $n_{cxyb}$  og likevektsligningene blir dermed:



$$n_{xx} = n_{cxt} + n_{cxb} \quad (89)$$

$$n_{yy} = n_{cyt} + n_{cyb} \quad (90)$$

$$n_{xy} = n_{cxyt} + n_{cxyb} \quad (91)$$

$$m_{xx} = m_{cxt} + m_{cxb} \quad (92)$$

$$m_{yy} = m_{cyt} + m_{cyb} \quad (93)$$

$$m_{xy} = m_{cxyt} + m_{cxyb} \quad (94)$$

Med

$$m_{cxt} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{cxt} \quad m_{cxb} = \frac{1}{2} (h - a_b) n_{cxb} \quad (95)$$

$$m_{cyt} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{cyt} \quad m_{cyb} = \frac{1}{2} (h - a_b) n_{cyb} \quad (96)$$

$$m_{cxyt} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{cxyt} \quad m_{cxyb} = \frac{1}{2} (h - a_b) n_{cxyt} \quad (97)$$

Hovedtrykkreftene i betongen kan kalkuleres slik:

$$n_{c,t} = \frac{n_{cxt} + n_{cyt}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_{cxt} - n_{cyt}}{2}\right)^2 + n_{cxyt}^2} \quad (98)$$

$$n_{c,b} = \frac{n_{cxb} + n_{cyb}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_{cxb} - n_{cyb}}{2}\right)^2 + n_{cxyb}^2} \quad (99)$$

Og tykkelsen kan ifølge MC90 kalkuleres med:

$$a_t = -\frac{n_{ct,max}}{K f_{cd1}}, \quad a_b = -\frac{n_{cb,max}}{K f_{cd1}} \quad (100)$$

Dette gir åtte ligninger og åtte ukjente, hvor det er seks likevektsligninger og to ligninger for å sjekke maksimal trykkraft i lagene.

## ***Bruksområder på element nivå***

I dette avsnittet illustreres bruken av standard modellen og den mer avanserte modellen. Den første er påført membrankrefter og bøyemoment. Den andre er et dekke element utsatt for vridning/torsjonsmoment.

### ***Element med bøyemoment og membrankrefter***

Et element påføres bøyemoment og membranskjærkraft gitt ved  $m_{xx} = 235$  kNm/m and  $n_{xy} = 1,806$  kN/m. Materialeegenskapene for betong er  $f_c = 41,8$  MPa og stål er  $f_{sy} = 492$  MPa. Lokasjonen til armeringen er gitt ved  $h_{xt} = h_{xb} = 0,122$  m og  $h_{yt} = h_{yb} = 0,100$  m. Dette elementet er valgt fordi det ble gjort et eksperiment av Kirsher og Collins (Kirscher, 1986) som var tilgjengelig for sammenligning. Nevnte krefter ovenfor er ULS lastene i eksperimentet. Dette brukes som utgangspunkt for å bestemme armeringen.

Den øverste raden i Tabell 1 viser at det er totalt  $111,4$  cm<sup>2</sup>/m armering påført elementet i testen. Ikke all armering oppnådde flytning ved svikt. Den andre raden er antatt nødvendig armering basert på ikke-lineær analyse av et iterativt optimalisert dataprogram. Dette ga minimum nødvendig armering lik  $68,6$  cm<sup>2</sup>/m. Tredje rad er resultater fra standard sandwichmodell og fjerde rad den avanserte sandwichmodellen. Radene Eksperiment og Normal moment blir målverdier som sammenlignes med resultater fra standard og avansert sandwichmodell.

**Tabell 1 – Armering for membran skjær og torsjonsmoment**

Metode	Armeringsarealer (cm <sup>2</sup> /m)				
	x-topp	y-topp	x-bunn	y-bunn	Total
Eksperiment	41.8	13.9	41.8	13.9	111.4
Normal moment	0.0	14.1	37.6	16.9	68.6
Standard modell	0.0	15.7	39.9	18.4	74.0
Avansert modell	0.0	16.6	36.8	17.9	71.3

### **Standard modell**

For standardmodellen er den gjennomsnittlige avstanden fra midten av de ytre lagene til midten av kjernen så er 0,111 m valgt. Det gir at  $d_v = 0,222$ m. Ved bruk av ligningene (40) til (42) finner følgende:

$$n_{xxb} = \frac{235}{0.222} = 1.059 \text{ kN/m} \quad (101)$$

$$n_{xxt} = -\frac{235}{0.222} = -1.059 \text{ kN/m} \quad (102)$$

$$n_{yyb} = 0 \quad (103)$$

$$n_{yyt} = 0 \quad (104)$$

$$n_{xyb} = \frac{1.806}{2} = 903 \text{ kN/m} \quad (105)$$

$$n_{xyt} = \frac{1.806}{2} = 903 \text{ kN/m} \quad (106)$$

Brukes uttrykkene for membranelementer for topplaget (ingen krav til armering) er det mulig å finne:

$$n_{sxt} = 0 \quad (107)$$

$$n_{syt} = n_{yyt} - \frac{n_{xyt}^2}{n_{xxt}} = 0 - \frac{903^2}{-1.059} = 770 \text{ kN/m} \quad (108)$$

$$n_{ct} = -1.059 + \frac{903^2}{-1.059} = -1.829 \text{ kN/m} \quad (109)$$

$$a_{sxt} = 0 \quad (110)$$

$$a_{syt} = \frac{n_{syt}}{f_{sy}} = \frac{770}{492 \times 10^3} \times 10^4 = 15.7 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (111)$$

$$a_t = -\frac{n_{ct}}{f_c^{eff}} = -\frac{1.829}{0.6 \times 41.8 \times 10^3} = 0.073 \text{ m} \quad (112)$$

Her ble verdien for effektiv trykkfasthet antatt å være  $0,6 f_c$ . Det samme for nedre lag:

$$n_{sxb} = n_{xxb} + |n_{xyb}| = 1.059 + 903 = 1.962 \text{ kN/m} \quad (113)$$

$$n_{syb} = n_{yyb} + |n_{xyb}| = 0 + 903 = 903 \text{ kN/m} \quad (114)$$

$$n_{cb} = -2 |n_{xyb}| = -2 \times 903 = 1.806 \text{ kN/m} \quad (115)$$

$$a_{sxb} = \frac{n_{sxb}}{f_{sy}} = \frac{1.962}{492 \times 10^3} \times 10^4 = 39.9 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (116)$$

$$a_{sxt} = \frac{n_{sxt}}{f_{sy}} = \frac{903}{492 \times 10^3} \times 10^4 = 18.4 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (117)$$

$$a_b = -\frac{-1.806}{0.6 \times 41.8 \times 10^3} = 0.072 \text{ m} \quad (118)$$

### *Avansert modell*

For den avanserte modellen kreves fem iterasjoner og gir tykkelse på nedre lag  $0,072\text{m}$  og øvre lag  $0,075 \text{ m}$ . Armeringsmengder er gitt i Tabell 1. Resultatene er nesten de samme som ved sandwichmodellen. Resultatene fra «Nonlinear» i tabellen til sammenligning gir standard modellen  $+8\%$  armering og den avanserte modellen  $+4\%$  armering.

### ***Dekke utsatt for torsjon***

Et dekke er utsatt for ren torsjon grunnet et torsjonsmoment. Verdien for dette torsjonsmomentet er satt en gang til  $m_{xy} = 42,5$  kNm/m og en gang til  $m_{xy} = 101,5$  kNm/m. Disse verdiene er valgt etter resultater fra testen. Marti, Leesti og Khalifa fant de fra et lett armert element (0,25%) og et tungt armert element (1%) (Marti & Leesti, 1987). Momentene brukes som laster og det beregnes nødvendig armering. Materialenes egenskaper er  $f_c = 44,4$  MPa,  $f_{sy} = 479$  MPa for lett armering og  $f_{sy} = 412$  MPa er streng armering. Lokasjonen er gitt ved  $h_{xt} = h_{xb} = 0,073$  m og  $h_{yt} = h_{yb} = 0,084$  m for lett armering. For streng har gjelder  $h_{xt} = h_{xb} = 0,066$  m og  $h_{yt} = h_{yb} = 0,082$  m.

***Tabell 2 – Armering for et lite torsjonsmoment***

<b>Metode</b>	<b>Armeringsarealer (cm<sup>2</sup>/m)</b>				
	<b>x-topp</b>	<b>y-topp</b>	<b>x-bunn</b>	<b>y-bunn</b>	<b>Total</b>
Eksperiment	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0
Normal moment	5.0	5.3	5.0	5.3	20.6
Standard modell	5.6	5.6	5.6	5.6	23.4
Avansert modell	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0

Tabell 2 er armering for et lite torsjonsmoment. Linjen eksperiment viser eksisterende armering i testet element, som er det samme i x-retning, y-retning, øvre og nedre lag. Den andre linjen viser «normal moment method». Denne bryter med likevekten da det er kalkulert forskjellig mengde i hver retning. Det er forskjellig momentarm for hver retning, mens likevekt krever samme krefter i all armering. Standard og avansert sandwichmodell oppfyller disse kravene. «Normal moment method» gir en konservativ verdi for armering for det lille torsjonsmomentet. Armeringen i x-retning er 27% mindre enn nødvendig og 19% mindre i y-retning. Standard modellen er veldig trygg for et lite torsjonsmoment. Den avanserte modellen gir et eksakt resultat.

Tabell 3 viser resultatene for det store torsjonsmomentet. I eksperimentet ble 20mm<sup>2</sup>/m brukt for all armering. «Normal moment method» gir forskjellig armeringsmengde i x- og y-retning, og underestimerer armeringen i x-retning med 27% og totalt med 24%. Standard modellen gir lignende resultater, men 19% er for lite. Den avanserte standard modellen gir tilfredsstillende resultater med kun 3% forskjell fra testen.

**Tabell 3 – Armering for et stort torsjonsmoment**

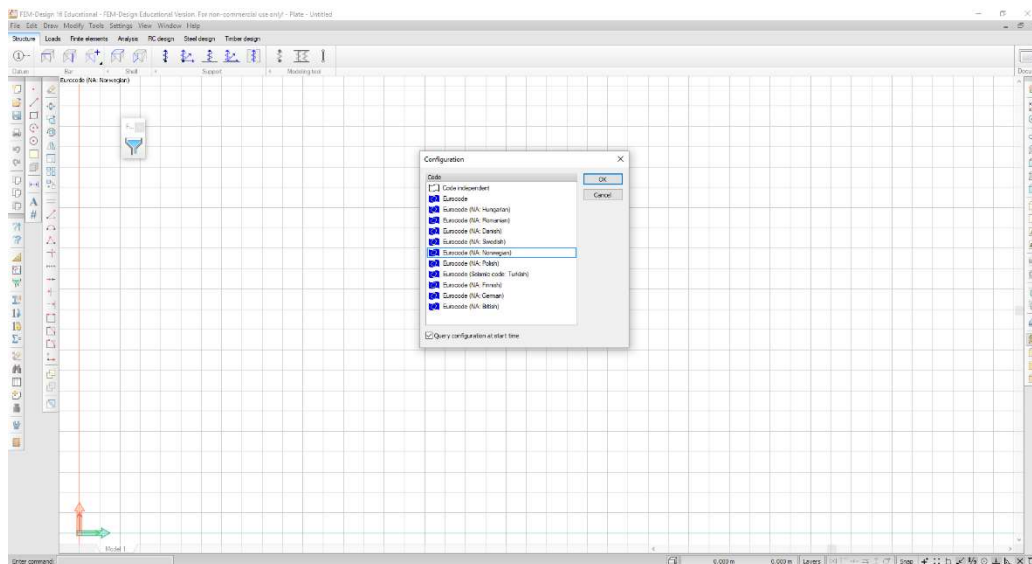
Metode	Armeringsarealer (cm <sup>2</sup> /m)				
	x-topp	y-topp	x-bunn	y-bunn	Total
Eksperiment	20.0	20.0	20.0	20.0	80.0
Normal moment	14.6	16.3	14.6	16.3	61.8
Standard modell	16.2	16.2	16.2	16.2	64.8
Avansert modell	19.4	19.4	19.4	19.4	77.6

Grunnen til at antakelsene blir så dårlige er at lokasjonen til kreftenes resultant i betongen er ukorrekt beregnet og samspillet mellom kreftene i armeringen og betongen er sett bort i fra. Derfor bør ligningene på basis av «normal moment yield criterion» og standard modellen brukes med forsiktighet eller ikke i det hele tatt.

## 4. FEM-Design

FEM-Design er et avansert modelleringsverktøy som kan brukes til elementanalyser, dimensjonering og beregning av betong-, stål- og trekonstruksjoner. FEM-Design er brukt av flere av de største konsulentfirmaene i Norge som Sweco og Aas-Jakobsen. En av grunnene til at det er populært kan være det at beregningene følger Eurokodene og reglene som brukes der. Programmet gis ut av StruSoft og det kan brukes på alt fra enkle elementanalyser til globale stabilitetsanalyser av større konstruksjoner. StruSoft startet for øvrig i Skanska på tidlig åttitallet og var da Skanskas software avdeling. Dette utviklet seg og i 2002 ble Structural Design Software in Europe AB dannet som et privat selskap, som senere endret navn til StruSoft i 2014.

På hjemmesidene sine legger FEM-Design ut både brukermanual og en teoribok som handler om hvordan programmet brukes og hva de baserer beregningene sine på. I teoriboken skriver de kort om hva de baserer beregningene sine på og hvilke teorier de bruker. Under avsnittet om betongdimensjonering skriver de følgende: «In FEM-Design the design forces calculation is based on the mechanism of optimal reinforcement calculation for skew reinforcements made by M.P. Nielsen, Wood-Armer and Dr. Ferenc Németh» (Strusoft AB, n.d.). Det blir derfor naturlig å undersøke disse forfatterne og deres beregningsmetoder nærmere.



Bilde 1 – Startside av FEM-Design Plate med valg av Eurokoder

## 5. Beregning av krefter

### 5.1 Wood-Armer metoden

Wood-Armer metoden er mye nevnt i forbindelse med beregning av betongplater og om du søker den opp på nettet vil du få mange treff. En av treffene du får er Autodesk, som står bak flere av de mest brukte dataprogrammene som blant annet AutoCad og Revit. På Autodesk sine hjemmesider legger de ut teorien bak utregningene i programmet deres. Dette er ikke programmet som tas for seg i oppgaven, men et program som heter Robot Structural Analysis Professional 2015. De bruker ligningene som refereres til som Wood-Armer ligningene og er basert på en metode utarbeidet av R. H. Wood og G. S. T. Armer. Autodesk refererer til at nærmere detaljer og kilde finnes i R.H.Wood, "The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments" (Wood, 1968). De fleste lærebøker og artikler som handler om Wood-Armer refererer til samme kilde. Autodesk har en veldig oversiktlig og fin fremstilling av Wood-Armer ligningene på sin hjemmeside, noe som kan være overraskende vanskelig å finne. Hovedkilden som er utgivelsen av R.H. Wood er også ekstremt vanskelig å få tak i og ble kun funnet på et bibliotek i Skottland og et bibliotek i Tyskland. Autodesk anses derfor som en veldig god kilde da de både er oversiktlige, tydelige i presentasjonen av ligningene og anses som et stort selskap med godt rykte blant denne typen software.

Disse ligningene brukes for å finne dimensjonerende momenter som brukes til å beregne Armeringsmengder i plater. For valgte retninger x og y, så kalkuleres to momenter: Øvre momenter som er negative og gir strekk i øvre lag, og nedre momenter som er positive og gir strekk i nedre lag. Det som blir referert til som nedre momenter ( $M_d$ ) er altså momenter i underkant av platen eller den nedre delen, og øvre momenter ( $M_g$ ) er i overkant av platen (Autodesk, n.d.).

#### Bestemmelse av nedre momenter $M_{xd}^*$ og $M_{yd}^*$ :

$$M_{xd}^* = M_x + |M_{xy}|$$

$$M_{yd}^* = M_y + |M_{xy}|$$

$$\text{Hvis } M_x < -|M_{xy}| \text{ altså } M_{xd}^* < 0$$



$$M_{xd}^* = 0$$

$$M_{yd}^* = M_y + \frac{M_{xy}^2}{|M_x|}$$

Hvis  $M_y < -|M_{xy}|$  altså  $M_{yd}^* < 0$

$$M_{xd}^* = M_x + \frac{M_{xy}^2}{|M_y|}$$

$$M_{yd}^* = 0$$

Hvis  $M_{xd}^* = M_{yd}^* < 0$  antar man at de er lik null.

**Bestemmelse av øvre momenter  $M_{xg}^*$  og  $M_{yg}^*$ :**

$$M_{xg}^* = M_x - |M_{xy}|$$

$$M_{yg}^* = M_y - |M_{xy}|$$

Hvis  $M_x > |M_{xy}|$  altså  $M_{xg}^* > 0$

$$M_{xg}^* = 0$$

$$M_{yg}^* = M_y - \frac{M_{xy}^2}{|M_x|}$$

Hvis  $M_y > |M_{xy}|$  altså  $M_{yg}^* > 0$

$$M_{xg}^* = M_x - \frac{M_{xy}^2}{|M_y|}$$

$$M_{yg}^* = 0$$

Hvis  $M_{xg}^* = M_{yg}^* > 0$  antar man at den er lik null, da slike momenter vil dimensjonere armeringen i underkant.

For beregning av aksialkraft gjelder det samme og er også nærmere beskrevet på Autodesk sine hjemmesider (Autodesk, n.d.).

## 5.2 M. P. Nielsen

Disse ligningene er hentet fra M. P. Nielsen Acta polytechnica Scandinavica Civil engineering and building construction series 26 (Nielsen, 1964) fra 1964. Her under delkapittelet «design of reinforcement for given bending and torsional moments» finnes ligningene som er antatt å brukes i FEM-Design.

$M_{Fx}^U$  – Numerical value of the positive yield moment in pure bending in an x-section, i.e. a section perpendicular to the x-axis.

$M_{Fx}^O$  – Numerical value of the negative yield moment in pure bending in an x-section.

$M_{Fy}^U$  – Numerical value of the positive yield moment in pure bending in an y-section.

$M_{Fy}^O$  – Numerical value of the negative yield moment in pure bending in an y-section.

$$M_x \leq M_y$$

### Case 1

$$M_x \geq -|M_{xy}|$$

$$M_{Fx}^U = M_x + |M_{xy}| \quad M_{Fy}^U = M_y + |M_{xy}|$$

1a: Hvis  $M_y \leq |M_{xy}|$ , gir

$$M_{Fx}^O = -M_x + |M_{xy}| \quad M_{Fy}^O = -M_y + |M_{xy}|$$

1b: Hvis  $M_y > |M_{xy}|$ , gir

$$M_{Fx}^O = -M_x + \frac{M_{xy}^2}{|M_y|} \quad M_{Fy}^O = 0$$

### Case 2

$$M_x < -|M_{xy}|$$

$$M_{Fx}^U = 0 \qquad M_{Fy}^U = M_y + \frac{M_{xy}^2}{|M_x|}$$

2a: Hvis  $M_y \leq |M_{xy}|$  blir 1a gjeldende.

2b: Hvis  $M_y > |M_{xy}|$  blir 1b gjeldende.

Hvis noen av disse formlene leder til at  $M_{Fx}^U$ ,  $M_{Fx}^O$ ,  $M_{Fy}^U$  eller  $M_{Fy}^O$  er av negativ verdi så settes verdien til null.

En eklere versjon av gitte formler, som også er på den sikre siden, er gitt ved:

$$M_{Fx}^U = M_x + |M_{xy}| \qquad M_{Fy}^U = M_y + |M_{xy}|$$

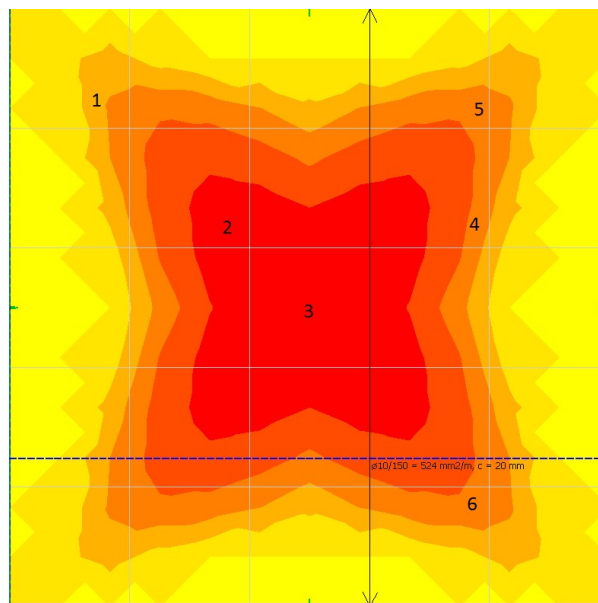
$$M_{Fx}^O = -M_x + |M_{xy}| \qquad M_{Fy}^O = -M_y + |M_{xy}|$$

Hvis en eller flere av verdiene er negative, settes verdien lik null.

Ligningene som finnes her i M.P. Nielsens Acta polytechnica (Nielsen, 1964) ser veldig lovende ut. Det virker som dette er de samme ligningene som Wood-Armer ligningene og at det er disse ligningene FEM-Design tar utgangspunkt i. Det var ikke mulig å spore opp noe relevant litteratur om Ferenc Németh, da de fleste treffene på artikler av forfatteren handlet om andre ting. Dette var uansett den mest ukjente forfatteren da både Wood, Armer og Nielsen er kjente for sitt arbeid innenfor fagfeltet betong. Derfor vil det tas utgangspunkt videre at det er disse ligningene FEM-Design bruker for å beregne dimensjonerende krefter. Wood-Armer ligningene må derfor teste opp mot verdier funnet og kalkulert i FEM-Design, noe som vil avsløre om det virkelig er disse ligningene som brukes. I det neste avsnittet undersøkes ligningene nærmere.

## 6. Test av Wood-Armer ligninger i FEM-Design

For å sjekke om FEM-Design bruker ligningene som M. P. Nielsen skriver i Acta polytechnica (Nielsen, 1964) og Wood-Armer ligningene Autodesk (Autodesk, u.d.) presenterer på sin hjemmeside utføres en test av ligningene. Tabell 4 viser resultater fra FEM-Design hvor en plate er fast innspent langs hele randen. Den er 10x10 meter, 300 mm tykk og utsatt for en jevnt fordelt last på  $3 \text{ kN/m}^2$ . En analyse av platen gir platekreftene  $M_x$ ,  $M_y$  og  $M_{xy}$  i seks forskjellige punkter. De seks punktene er valgt for å få et bredt utvalg av verdier, der torsjonsmomentet er både større og mindre enn de to bøyemomentene. For hvert punkt i FEM-Design er de to bøyemomentene og torsjonsmomentet ført inn i tabellen. Det er også de dimensjonerende momentene i bunn og topp av platen i x- og y-retningen. Ved å sette verdiene for bøyemomentene og torsjonsmomentet inn i Wood-Armer ligningene skal de dimensjonerende kreftene kalkuleres. Om FEM-Design bruker Wood-Armer ligningene skal disse kalkulerte dimensjonerende momentene bli de samme som resultatene fra FEM-Design gitt i tabellen under «Design forces», som er de dimensjonerende kreftene. I FEM-Design heter disse kreftene « $M_x$ ' eller  $M_r$  bottom,  $M_y$ ' eller  $M_t$  bottom» og « $M_x$ ' eller  $m_r$  top,  $M_y$ ' eller  $M_t$  top». Det er disse dimensjonerende momentene som skal returneres ved bruk av Wood-Armer ligningene.



Bilde 2 – Platen og de seks punktene testet med ligninger

**Tabell 4 – Resultater av FEM-analyse**

<b>Design forces</b>	<b>Punkt 1</b>	<b>Punkt 2</b>	<b>Punkt 3</b>	<b>Punkt 4</b>	<b>Punkt 5</b>	<b>Punkt 6</b>
M <sub>X</sub> bunn	16	30	31	10	16	16
M <sub>X</sub> topp	-12	0	0	-2	-12	-12
M <sub>Y</sub> bunn	16	30	31	17	16	16
M <sub>Y</sub> topp	-12	0	0	0	-12	-12
<b>Plate forces</b>	<b>Punkt 1</b>	<b>Punkt 2</b>	<b>Punkt 3</b>	<b>Punkt 4</b>	<b>Punkt 5</b>	<b>Punkt 6</b>
M <sub>X</sub>	2	27	31	4	2	2
M <sub>Y</sub>	2	27	31	11	2	2
M <sub>XY</sub>	14	3	0	-6	-14	14

I testen av Wood-Armer ligningene brukes følgende:  $M_{Xd}$  og  $M_{Yd}$  er de dimensjonerende momentene i underkant som brukes til underkantarmering.  $M_{Xg}$  og  $M_{Yg}$  er de dimensjonerende momentene i overkant som brukes til overkantarmeringen. Dette tilsvarer da  $M_r$  og  $M_t$  som brukes i programmet, men med en mer ryddig benevning. Ved bruk av Wood-Armer ligningene skal  $M_{Xd} = M_X$  bunn,  $M_{Yd} = M_Y$  bunn,  $M_{Xg} = M_X$  topp og  $M_{Yg} = M_Y$  topp. Ligningene som brukes er også nærmere beskrevet i Autodesk sin guide til Wood-Armer metoden (Autodesk, n.d.) i forrige kapittel.

### **Punkt 1:**

#### **Underkant**

Forutsetninger:  $M_X = 2 > - |M_{XY}| = -14$

$M_Y = 2 > - |M_{XY}| = -14$

Medfører at følgende ligninger blir gyldige →

$M_{Xd} = M_X + |M_{XY}| = 2 + 14 = 16$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_X$  bunn i Punkt 1.

$M_{Yd} = M_Y + |M_{XY}| = 2 + 14 = 16$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_Y$  bunn i Punkt 1.

### **Overkant**

$$M_X = 2 < |M_{XY}| = 14 \qquad M_Y = 2 < |M_{XY}| = 14$$

→

$M_{Xg} = M_X - |M_{XY}| = 2 - 14 = -12$  som er det samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_X$  topp i Punkt 1.

$M_{Yg} = M_Y - |M_{XY}| = 2 - 14 = -12$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_Y$  topp i Punkt 1.

### **Punkt 2:**

#### **Underkant**

$$M_X = 27 > -|M_{XY}| = -3 \qquad M_Y = 27 > -|M_{XY}| = -3$$

→

$M_{Xd} = M_X + |M_{XY}| = 27 + 3 = 30$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_X$  bunn i Punkt 2.

$M_{Yd} = M_Y + |M_{XY}| = 27 + 3 = 30$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_Y$  bunn i Punkt 2.

### Overkant

$$M_X = 27 > |M_{XY}| = 3 \qquad M_Y = 27 > |M_{XY}| = 3$$

→

$M_{Xg} = 0$  som er det samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_X$  topp av Punkt 2.

$M_{Yg} = 0$  som er samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_Y$  topp av Punkt 2.

### Punkt 3:

#### Underkant

$$M_X = 31 > -|M_{XY}| = 0 \qquad M_Y = 31 > -|M_{XY}| = 0$$

→

$M_{Xd} = M_X + |M_{XY}| = 31 + 0 = 31$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_X$  bunn i Punkt 3.

$M_{Yd} = M_Y + |M_{XY}| = 31 + 0 = 31$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_Y$  bunn i Punkt 3.

#### Overkant

$$M_X = 31 > |M_{XY}| = 0 \qquad M_Y = 31 > |M_{XY}| = 0$$

→

$M_{Xg} = 0$  som er det samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_X$  topp av Punkt 3.

$M_{Yg} = 0$  som er samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_Y$  topp av Punkt 3.

## Punkt 4:

### Underkant

$$M_X = 4 > - |M_{XY}| = -6 \qquad M_Y = 11 > - |M_{XY}| = -6$$

→

$M_{Xd} = M_X + |M_{XY}| = 4 + 6 = 10$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_X$  bunn i Punkt 4.

$M_{Yd} = M_Y + |M_{XY}| = 11 + 6 = 17$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_Y$  bunn i Punkt 4.

### Overkant

$$M_X = 4 < |M_{XY}| = 6 \qquad M_Y = 11 > |M_{XY}| = 6$$

→

$M_{Xg} = M_X - |M_{XY}| = 4 - 6 = -2$  som er det samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_X$  topp av Punkt 4.

$M_{Yg} = 0$  som er samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_Y$  topp av Punkt 4.

## Punkt 5:



## Underkant

$$M_X = 2 > - |M_{XY}| = -14 \qquad M_Y = 2 > - |M_{XY}| = -14$$

→

$M_{Xd} = M_X + |M_{XY}| = 2 + 14 = 16$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_X$  bunn i Punkt 5.

$M_{Yd} = M_Y + |M_{XY}| = 2 + 14 = 16$  som er samme verdi beregnet av FEM-Design for  $M_Y$  bunn i Punkt 5.

## Overkant

$$M_X = 2 < |M_{XY}| = 14 \qquad M_Y = 2 < |M_{XY}| = 14$$

→

$M_{Xg} = M_X - |M_{XY}| = 2 - 14 = -12$  som er det samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_X$  topp av Punkt 5.

$M_{Yg} = M_Y - |M_{XY}| = 2 - 14 = -12$  som er samme verdi beregnet i FEM-Design for  $M_Y$  topp av Punkt 5.

## Punkt 6 vil gi samme resultater som i Punkt 1.

Ved å bruke Wood-Armer ligningene så beregnes de samme dimensjonerende kreftene som de som er oppgitt i FEM-Design i alle punktene. I manualen skriver de at i FEM-Design er kalkulasjonen av de dimensjonerende kreftene som brukes i beregning av armering er basert på M. P. Nielsen, Wood-Armer og Dr. Ferenc Nemeth. Det var ingen tilgjengelig litteratur på Nemeth innenfor dette emnet. Det er likevel tydelig at ligningene fra M. P. Nielsen og Wood-Armer gir korrekte verdier i alle punkter.

Det som også kan nevnes er at det virker som om FEM-Design gjør det noe annerledes enn ligningene presentert i på Autodesk sine hjemmesider. Om man ser nærmere på punkt 4 og ligningene for moment i topplaget (overkant) så var moment- og torsjonskreftene

$$M_X = 4 < |M_{XY}| = 6 \text{ og } M_Y = 11 > |M_{XY}| = 6.$$

Autodesk sine ligninger sier at hvis

$$M_Y > |M_{XY}| \text{ så settes } M_X = M_X - |M_{XY} * M_{XY} / M_Y| \text{ og } M_Y = 0.$$

I FEM-Design derimot så er  $M_X = -2$  og den er da blitt regnet ut som

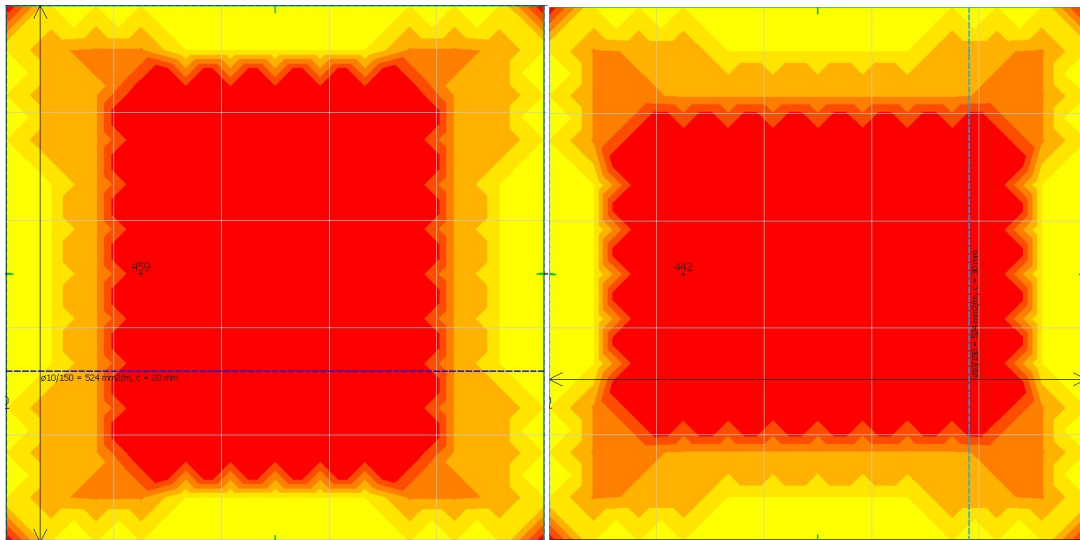
$$M_X = M_X = - |M_{XY}|.$$

Dette vil si at det virker som om hver kraft blir behandlet individuelt og at selv om  $M_Y > |M_{XY}|$  så vil ikke dette påvirke  $M_X$  slik det er oppgitt i ligningene på Autodesk sine hjemmesider. Det kan altså se ut som tilfellene der  $M_{X/Y} = M_{X/Y} - |M_{XY} * M_{XY} / M_{X/Y}|$  er uaktuelle. Hvis ikke ville  $M_{Xg}$  i punkt 4 bli -5 og ikke -2 som det blir i FEM-Design.

Det konkluderes derfor med at ligningene som er brukt i FEM-Design er de samme ligningene som M. P. Nielsen skriver om i Acta polytechnica (Nielsen, 1964) og er populært referert til som Wood-Armer ligningene. Det konkluderes også med at tilfellene der  $M_{X/Y} = M_{X/Y} - |M_{XY} * M_{XY} / M_{X/Y}|$  er uaktuelle. Dette er på grunn av resultatene i FEM-Design og det da virker som programmet behandler  $M_X$  og  $M_Y$  som uavhengige av hverandre, så selv om  $M_Y > |M_{XY}|$  som i punkt 4 så vil ikke dette endre  $M_X$ . Verdiene regnes da nøyaktig som de gjøres i dette avsnittet og det gir korrekte resultater. Hvorfor programmet ikke bruker formlene hvor  $M_{X/Y} = M_{X/Y} - |M_{XY} * M_{XY} / M_{X/Y}|$  vites ikke, da i punkt 4 ville denne formelen gi en større kraft med -5 istedenfor -2. Kanskje den velger den største «tallverdien» som er -2. Det vil likevel antas at denne ligningen ikke brukes i det hele tatt og at utregningene blir gjort på samme måte som i dette avsnittet. Dette nevnes for øvrig kort i boken «Plates and FEM» at det er vanlig at denne delen av ligningene ikke brukes (Blaauwendraad, 2010). Ovenfor figur 6 står det nemlig at det er vanlig at bare delen øverst til venstre brukes i dataprogrammer. Dette indikerer at antakelser er korrekte og at dette gjøres i flere programmer enn FEM-Design.

## 7. Beregning av armering FEM-Design

For å se nærmere på hvordan FEM-Design beregner armering, blir det samme dekket som ble brukt til å teste Wood-Armer ligningene undersøkt videre. Dekket er som nevnt 10x10 meter, 300 mm tykk og utsatt for en jevnt fordelt last på  $3 \text{ kN/m}^2$ . De største verdiene av  $M_x$ -bunn og  $M_y$ -bunn ble beregnet til  $31 \text{ kN/m}$ . For disse verdiene beregnet programmet nødvendig armering i x- og y-retning som vises i bildene under. Bilde til venstre viser armering i bunnet i x-retning og bilde til høyre viser armering i bunnet i y-retning.



Bilde 3 - (a) Armering i x-retning (b) Armering i y-retning

FEM-Design har beregnet nødvendig armering til å være  $459 \text{ mm}^2/\text{m}$  i x-retning og  $442 \text{ mm}^2/\text{m}$  i y-retning. Det er mulig å be programmet beregne og armere dekket automatisk og resultatet er representert av den blå streken i bildet. Der står det  $\phi 10/150 = 524 \text{ mm}^2/\text{m}$  for begge retningene. For å teste hvilke regler og beregningsmetoder programmet bruker må disse tallene sammenlignes med håndberegninger. Håndberegningene følger eurokodenes krav til minimum armering og hensikten med dette er å kartlegge hvordan programmet kalkulerer armering og krefter.

Data:

$$f_{ck} = 35, f_{yk} = 500, \gamma_c = 1,5, \gamma_s = 1.15, \alpha_c = 0.85, f_{ctm} = 3.2, h = 300, b = 1000, \phi = 10.$$

Ligningene som brukes er:

$$f_{cd} = \frac{\alpha_c f_{ck}}{\gamma_c}, \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$d = h - c_{nom} - \frac{\phi}{2}$$

$$M_{Rd} = 0.275 f_{cd} b d^2$$

$$z = \left(1 - \frac{0.17 M_{Ed}}{M_{Rd}}\right) d, \quad \text{der } z < 0.95 d$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{z f_{yd}} \quad A_{s,min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d$$

Disse beregningene ble først gjort for hånd, så i skrevet Mathcad, for så å bli kjørt i et eget program skrevet i Python. Ved å sette  $c_{nom} = 30$  mm som i x-retning blir nødvendig armeringsmengde  $A_s = 272.92$  mm<sup>2</sup>/m og  $A_{s,min} = 457.6$  mm<sup>2</sup>/m. Programmet har beregnet nødvendig armeringsmengde til å være 459 mm<sup>2</sup>/m. Settes  $c_{nom} = 20$  mm som i y-retning blir nødvendig armeringsmengde  $A_s = 283.22$  mm<sup>2</sup>/m og  $A_{s,min} = 440.96$  mm<sup>2</sup>/m. Programmet har beregnet nødvendig armeringsmengde til å være 442 mm<sup>2</sup>/m. Det er derfor rimelig å anta at det er nettopp disse ligningene som brukes til å beregne armeringen. Det vil være rimelig å anta at det er minimumsarmeringen som blir dimensjonerende og er beregnet i FEM-Design, da resultatene viser at det er kun 1 mm<sup>2</sup>/m forskjell fra håndberegningene. Avviket kan oppstå fra en avrundet verdi i fasthet eller annet som gir et lite avvik.

I det øverste laget er de maksimale momentverdiene beregnet til 66 kN/m. I x-retningen er nødvendig armering beregnet til 571 mm<sup>2</sup>/m og i y-retning er den nødvendig armeringsmengden beregnet til 598 mm<sup>2</sup>/m. For x-retningen settes  $c_{nom} = 20$  mm og  $\phi = 12$  mm fordi det er disse verdiene programmet har tatt utgangspunkt i. Ved håndberegning blir da 583 mm<sup>2</sup>/m. Hvis premisen om at  $z < 0.95 d$  fjernes, så beregnes nødvendig armeringsmengde til 569.6 mm<sup>2</sup>/m. For y-retningen settes  $c_{nom} = 32$  mm og  $\phi = 12$  mm. Ved

håndberegning blir da  $609.88 \text{ mm}^2/\text{m}$ , og om igjen hvis premissen om at  $z < 0.95 d$  fjernes, så er  $A_s = 597.29 \text{ mm}^2/\text{m}$ . Disse resultatene tyder igjen på at FEM-Design følger Eurokodene og bruker de samme ligningene som er oppgitt i håndberegningene. Resultatene tyder også på at programmet ikke setter noen grense for maksimal verdi for  $z$ . Ved å være konservativ og si at  $z < 0.95 d$  så vil det bli noe høyere verdier for  $A_s$ , men ved å fjerne denne premissen og bruke beregnet verdi for  $z$  så blir tallene tilnærmet samme verdi som beregnet i FEM-Design.  $A_s = 597.29 \text{ mm}^2/\text{m}$  sammenlignet med  $598 \text{ mm}^2/\text{m}$  og  $569.6 \text{ mm}^2/\text{m}$  sammenlignet med  $571 \text{ mm}^2/\text{m}$ . Dette gir et tilnærmet avvik på  $1 \text{ mm}^2/\text{m}$  igjen for begge tilfellene.

Det står for øvrig også i teori-manualen til FEM-Design at det er Eurokodene som følges ved beregninger. Man velger også å følge den norske standarden ved start av programmet. Det at man ikke får nøyaktig de samme resultatene kan komme av flere grunner. Det er vanskelig å se hvilke tall som brukes i beregningene i FEM-Design da det på figuren som er avbildet oppgir avrundete tall. Til høyre for figuren i programmet så finner man også en fargeskala hvor tallene er oppgitt i desimaler. Det er her kun oppgitt maks og minimums verdier. Denne skalaen tyder på at armeringen i  $y$ -retning er  $598,1 \text{ mm}^2/\text{m}$ , men siden det kun er oppgitt maksimalverdi så sier den ingenting om  $x$ -retning verdien. Det er med andre ord vanskelig å si hvor og når FEM-Design avrunder verdiene sine. Uansett så er avvikene veldig små. Alt tyder på at det er ligningene som er tatt i bruk ved håndberegning som er brukt i programmet. Det virker som om  $z$ -verdien ikke justeres for maksimal verdi og programmet tillater den å være større enn  $0.95 d$ . Med denne antakelsen var avvikene  $1-2 \text{ mm}^2/\text{m}$  og virker å stemme. Det vil derfor antas at disse ligningene ligger til rette for armeringsberegningene. Når beregningsmetoden brukt i FEM-Design skal sammenlignes med andre metoder vil dette være utregningene og ligningene som brukes videre.

## 8. Den avanserte sandwichmodellen

Den avanserte sandwichmetoden omtales med lovende ord i boken *Plates and FEM* (Blaauwendraad, 2010) og det henvises flere ganger til Lourenco sine to vitenskapelige artikler «Automatic design of reinforcement in concrete and plates» (Lourenco, 1993) og «Solution for the design of reinforced concrete plates (Lourenco, 1995). Førstnevnte kan kjøpes hos [www.emeraldinsight.com](http://www.emeraldinsight.com) og går nærmere inn på den avanserte tre-lagsmodellen. Det er denne vitenskapelige artikkelen og koden den inneholder som dette avsnittet omhandler.

### *Solution for the design of reinforced concrete plates*

Første del av artikkelen handler mye om det samme som står i avsnittet «Beregning av membrantilstand» i *Plates and Fem*. Lourenco konkluderer her med det samme som står under *bemerkning* i nevnt avsnitt, som sier: «Det må merkes at den diskontinuerlige variasjonen av betongens trykkfasthet mellom tilfelle 3 og tilfelle 4, eller mellom 2 og 4 ikke virker akseptabel. Dette blir ekstra relevant da uttrykket  $f_{cd2}$  i ligning (31) – (33) korresponderer til et absolutt minimum av risset betongarmering. Det virker som at dette er prisen man må betale for en forenklet beregningsmetode». Av denne grunn vil Lourenco foreslå en alternativ løsning til problemet. Videre skriver Lourenco at i MC90 foreslås det at en plate kan deles inn i tre lag hvor det midtre laget overfører skjærkraft, men at denne metoden ikke er nærmere beskrevet. Formålet med artikkelen er da at Lourenco vil foreslå en fremgangsmåte å beregne krefter og armering ved hjelp av denne tre-lags modellen. Ligningene og figurene han bruker er de samme som er beskrevet i *Plates and FEM* under avsnittet om den avanserte tre-lags modellen og omhandler da denne artikkelen til Lourenco. Det som skiller denne artikkelen og avsnittet fra *Plates and FEM*, er at artikkelen inneholder metoden og utregningene Lourenco bruker, samt talleksempel.

Dette er eksempelet hvor det er behov for armering i begge de ytre lagene. Ligningene som brukes da er:

For stål:

$$n_{sx} = n_{sxt} + n_{sxb} \quad (119)$$

$$n_{sy} = n_{syt} + n_{syb} \quad (120)$$

$$m_{sx} = -n_{sxt} h_{xt} + n_{sxt} h_{xb} \quad (121)$$

$$m_{sy} = -n_{syt} h_{yt} + n_{syt} h_{yb} \quad (122)$$

For betongen:

$$n_{ct} = -a_t f_c \quad (123)$$

$$n_{cb} = -a_b f_c \quad (124)$$

$$m_{ct} = -\frac{1}{2} (h - a_t) n_{ct} \quad (125)$$

$$m_{cb} = \frac{1}{2} (h - a_b) n_{cb} \quad (126)$$

Likevekt av påførte krefter og momenter gir:

$$n_{xx} = n_{sx} + n_{ct} \sin^2 \theta_t + n_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (127)$$

$$n_{yy} = n_{sy} + n_{ct} \cos^2 \theta_t + n_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (128)$$

$$n_{xy} = -n_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - n_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (129)$$

$$m_{xx} = m_{sx} + m_{ct} \sin^2 \theta_t + m_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (130)$$

$$m_{yy} = m_{sy} + m_{ct} \cos^2 \theta_t + m_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (131)$$

$$m_{xy} = -m_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - m_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (132)$$

Ligningene (127) til (129) tilsvarer membrankrefter, mens ligning (130) til (132) tilsvarer ligningene for bøyning. Hvis  $\theta_t \neq 0, \pi/2$  og  $\theta_b \neq 0, \pi/2$  som er trivielle løsninger, kan de foregående ligningene omskrives til:

$$-n_{ct} = \frac{(h - a_t)n_{xy} - 2 m_{xy}}{h_c \sin 2 \theta_t} \quad (133)$$

$$-n_{cb} = \frac{(h - a_b)n_{xy} + 2 m_{xy}}{h_c \sin 2 \theta_b} \quad (134)$$

Som nevnt tidligere finnes armeringsmengde fra ligningene (127) til (132). Formålet er å kalkulere kreftene i armeringsjernene  $n_{sxt}$ ,  $n_{syb}$ ,  $n_{sxb}$  og  $n_{syb}$ . De andre ukjente er  $a_t$ ,  $a_b$ ,  $\theta_t$  og  $\theta_b$ . Dette medfører at de seks ligningene inneholder åtte ukjente. Verdiene  $\theta_t$  og  $\theta_b$  bør velges slik at den totale armeringsmengden er minst mulig. Lourenco starter derfor med å sette  $\theta_t = \theta_b = \pi/4$  og  $a_t = a_b = 0,2h$ . Etter disse verdiene har vært gjennom den iterative prosessen så vil man få ut nye verdier for  $\theta_t$ ,  $\theta_b$ ,  $a_t$  og  $a_b$ , samt verdiene for  $n_{sxt}$ ,  $n_{syb}$ ,  $n_{sxb}$  og  $n_{syb}$  som igjen brukes til å kalkulere armeringen.

I artikkelen finner Lourenco at denne metoden med disse verdiene som utgangspunkt gir resultater som er tilfredsstillende nære den optimale løsningen. Det er mulig å ta i bruk en optimaliserings modul som minimaliserer summen av strekkrefter, men det konkluderes med at resultatene dette gir ikke er nevneverdige nok til at det er lønnsomt. Denne optimaliseringen vil gi maksimum 5% bedre resultat, men krever 27 000% mer cpu tid. Det nevnes at denne optimaliseringen ga det absolutte minimum for dette elementet i denne testen. Det er her snakk om minimums armering og det konkluderes som nevnt med at besparelsene er minimale. Det nevnes også at  $a = 0.2 \times h$  ikke har noen spesiell betydning og et bedre valg kan gjøres med hensyn til krefter og momenter. Testen viser likevel at den enkle gjettingen gir tilstrekkelige resultater og løser alle problemer.

Metoden ble testet jevnt og intensivt og viste seg å være pålitelig og effektiv. Verdiene for  $\theta$  blir satt til 0 eller  $\pi/2$  om de er innenfor  $10^\circ$  til  $15^\circ$  rekkevidde for 0 eller  $\pi/2$ . I koden er grensen satt til  $10^\circ$ . Lourenco skriver at dette er gjort blant annet fordi det står i MC90 at strekk og trykk krefter må separeres med minimum  $15^\circ$ . MC90 begrensningen er satt fordi det ikke er fornuftig å anta at for to retninger som er veldig like så vil man finne strekk i armeringen og trykk i betongen. Dette følges også i den iterative løsningen i koden da trykk i armeringen ikke skal forekomme. I et av talleksempelene finnes  $\theta$  til å være høyere enn  $90^\circ - 15^\circ$ . Den optimale løsningen er da å sette denne lik 0. Artikkelen inneholder flere eksempler med konkluderer med det samme, at koden gir resultater som er tilstrekkelige nære den optimale løsningen og vil være et bedre alternativ enn tidligere metoder.



## 9. Programmering av den avanserte sandwichmodellen

Koden til Lourenco ble skrevet i 1992. Den baserer seg på en gammel funksjon som heter «goto» og er inndelt i forskjellige avsnitt som «goto» funksjonen refererer til. Denne funksjonen brukes ikke i moderne programmeringsspråk og er derfor veldig slitsom å oversette til moderne programmer. Koden baserer seg og på «if» funksjoner som gir premisser for hvor koden og «goto» funksjonen skal ta deg videre. Et eksempel for dette er `if Nct1 .gt. 1.0D-3 then goto 1100`. Han instruerer da at hvis denne verdien ( $N_{ct1}$ ) er større enn (.gt.)  $1 \times 10^{-3}$  så skal koden gå til et gitt avsnitt kalt 1100 i koden. Dette er som sagt funksjoner som ikke brukes lengre. Den største utfordringen er at flere plasser skal koden startes på nytt eller gå noen hakk tilbake. En løsning kan være å erstatte dette med et utall «while» funksjoner, men det blir utrolig stygt og rotete. Uten å gå dypere i dette, må likevel koden som er brukt i denne oppgaven forklares noe, da den kan være vanskelig å forstå.

Koden startet med input og data verdier. Dette er helt likt koden til Lourenco. Verdiene «tomin» og «tomax» er grensene for  $\theta$  som ble nevnt i forrige avsnitt. De er satt til  $10^\circ$  og  $\pi/2 - 10^\circ$  og ikke  $15^\circ$  som nevnt i artikkelen. Alt som står i starten er utgangspunktverdier fram til funksjonen «while True». While True funksjonen er brukt fordi dette gir muligheten til å lage en loop. Loopen kan man starte på nytt med å skrive *continue* eller man kan forlate den med å skrive *break*. Koden sjekker først en del spesialtilfeller, før den begynner å beregne krefter.

Man ser så at det står «def Armering1». Dette er en funksjon, og det finnes totalt fire funksjoner i koden. Dette er erstatninger for tallkodene 2100, 3100 og 4100 i Lourenco sin kode. Dette er de fire forskjellige armeringstilfellestrekke i begge lag, trykk i begge lag, trykk i øvre og trykk i nedre. Hvis  $N_{sxt}$ ,  $N_{syx}$ ,  $N_{sxb}$  og  $N_{syb}$  er negative vil koden kjøre funksjonene «Armering1» som sjekker trykk i begge lag. Her går koden inn i en ny «while True» loop. Her beregnes blant annet  $N_{ct1}$  og  $N_{cb1}$  og hvis det viser seg at noen av disse blir positive, så avbrytes funksjonen. Dette kriteriet ligger også helt i slutten av koden og sier at hvis en av disse verdiene er positive så startes hele loopen på nytt. Dette er en av tiltakene som ble gjort for å gjenskape koden til Lourenco. Lourenco bruker de samme verdiene, men skriver i koden at hvis en av disse er positive så skal koden gå tilbake til starten. I denne koden derimot så brytes det ut av den første loopen, for så å starte den andre loopen på nytt. Slik oppnås samme effekt.

Koden følger mye det samme mønsteret gjennom hele koden. Den sjekker hvilke armeringstilfeller, noen spesialtilfeller og så starter den på nytt til ønskede verdier er oppnådd. «Convergence check» fra Lourenco sine koder er en av de siste sjekkene og sørger for at det blir riktige verdier for  $a_t$  og  $a_b$ . Den sammenligner den gamle verdien for  $a_t$  og  $a_b$  trukket i fra den nye verdien og om de begge er mindre enn  $0.0001 \times h$  så starter hele prosessen på nytt. I stedet for å bruke Lourenco sin «goto» funksjon brukes altså looper og funksjoner. De fire forskjellige funksjonene er markert med *def*, og er de fire armeringstilfellene. Koden ligger vedlagt og det er kommentert noe underveis som gir bedre innsikt i koden, hva det har erstattet i Lourenco sine koder og hvor i koden man havner ved gitte premisser.

Koden ble testet opp mot de to talleksemlene i Lourenco sin artikkel og ga de samme tallene. Ved første eksempel startet koden på nytt 14 ganger før den fant ønskelige verdier for  $a_t$  og  $a_b$ . Rundt 12 verdier fra resultatene ble sammenlignet som en slags stikktest for å se at det ikke var tilfeldigheter som ledet til samme svar. Alle verdiene stemmer med så mange desimaler som tilgjengelige utenom  $N_{sy}$  som er oppgitt i artikkelen som 79,0 kN/m og ble beregnet til 78,95 kN/m. I og med at 11 andre verdier stemmer, der flere har sammenheng med resultatene, så er det antatt at dette er en avrundet verdi eller skrivefeil. Koden ble som sagt testet med 2 eksempler og dette var den eneste verdien som ikke stemte med mange desimaler. Det ble for øvrig funnet noe som er antatt å være skrive feil i Lourenco sin kode. Følgende formler er oppgitt:

$$N_{sxt} = a_1 * h_{xb} - b_1 / (h_{xb} + h_{xb}) \quad (119)$$

$$N_{syt} = a_2 * h_{yb} - b_2 / (h_{yt} + h_{yb}) \quad (120)$$

Her ble det antatt at Lourenco mente at i nevneren på ligning (119) så skulle det stå  $h_{xt} + h_{xb}$ . Denne antakelsen har sett ut til å være riktig da testing av koden har gitt de ønskelige resultatene. I Lourenco var verdiene som ble brukt:

$$N_x = -200 \text{ kN/m}; \quad N_y = 300 \text{ kN/m}; \quad N_{xy} = 75 \text{ kN/m};$$

$$M_x = -60 \text{ kN/m}; \quad M_y = 40 \text{ kN/m}; \quad M_{xy} = -20 \text{ kN/m};$$

$$h = 0.20 \text{ m}; \quad h_{xt} = h_{yt} = h_{xb} = h_{yb} = 0.08\text{m};$$

$$f_{cd} = 13.3 \text{ MPa};$$

$$f_{cd2} = 7.34 \text{ MPa};$$

$$f_{syd} = 348 \text{ MPa}$$

Disse verdiene ga resultatene:

$$N_{sxt} = 526.8 \text{ kN/m}; \quad N_{syt} = 79.0 \text{ kN/m}; \quad N_{sxb} = 34.7 \text{ kN/m}; \quad N_{syb} = 422,5 \text{ kN/m}$$

$$a_t = 0.0495;$$

$$a_b = 0.0816;$$

$$\theta_t = 45^\circ$$

$$\theta_b = -79.6^\circ$$

Test av den nye koden ga følgende resultater (med flere desimaler enn artikkel for nøyaktighet):

$$N_{sxt} = 526.80253 \text{ kN/m};$$

$$N_{syt} = 78.95046 \text{ kN/m};$$

$$N_{sxb} = 34.73991 \text{ kN/m};$$

$$N_{syb} = 422,51787 \text{ kN/m}$$

$$a_t = 0.04951399;$$

$$a_b = 0.081629280;$$

$$\theta_t = 45.00^\circ$$

$$\theta_b = -79.562524^\circ$$

Koden går gjennom mange iterasjoner før den kommer fra til disse tallene, for å få et lite innblikk i koden så er prosessen noe beskrevet her. Ved iterasjon 1 gir følgende tall:

$$N_{sxt} = 437,5 \text{ kN/m};$$

$$N_{syt} = 62,5 \text{ kN/m};$$

$$N_{sxb} = -387,5 \text{ kN/m};$$

$$N_{syb} = 487,5 \text{ kN/m};$$

Det finnes så en ny verdi for tetab under en av spesialtilfellene der kun  $N_{syb}$  er negativ før koden starter på nytt. Under iterasjon 2 ender koden opp med følgende tall:

$$N_{sxt} = 437,5 \text{ kN/m};$$

$$N_{syt} = 62,5 \text{ kN/m};$$

$$N_{sxb} = 0 \text{ kN/m};$$

$$N_{syb} = 416,12 \text{ kN/m}$$

$$a_t = 0.4;$$

$$a_b = 0.4$$

Koden går så inn i Armering4() som er strekk i alle lagene, siden alle kreftene er positive. Den beregner de nye verdier for  $a_t = 0.442$  og  $a_b = 0.0668$ . Den feiler så konvergens testen av de gamle og nye verdiene for  $a_b$  og  $a_t$ , før koden så starter på nytt. Iterasjon 3 gir:

$$N_{sxt} = 490,4 \text{ kN/m}; \quad N_{syt} = 72,2 \text{ kN/m}; \quad N_{sxb} = 14,8 \text{ kN/m};$$

$$N_{syb} = 418,8 \text{ kN/m}.$$

Koden går så inn i Armering4() som er strekk i alle lagene, siden alle kreftene er positive. Den beregner de nye verdier for  $a_t = 0.047$  og  $a_b = 0.074$ . Denne prosessen gjentas gjennom tilnærmet 10 iterasjoner før den endelig består konvergenstesten og har funnet godkjente verdier for tykkelsen på lagene  $a_t$  og  $a_b$ . Det gjør da at resultatene blir som nevnt tidligere.

Koden ble så testet i det andre eksempelet i Lourenco, verdiene som ble brukt der var:

$$N_x = -200 \text{ kN/m}; \quad N_y = 300 \text{ kN/m}; \quad N_{xy} = 75 \text{ kN/m};$$

$$M_x = 60 \text{ kN/m}; \quad M_y = 40 \text{ kN/m}; \quad M_{xy} = -20 \text{ kN/m};$$

$$h = 0.20 \text{ m}; \quad h_{xt} = h_{yt} = h_{xb} = h_{yb} = 0.08\text{m};$$

$$f_{cd} = 13.3 \text{ MPa}; \quad f_{cd2} = 7.34 \text{ MPa}; \quad f_{syd} = 348 \text{ MPa}$$

Her er momentet i x-retning endret til å bli positivt. I Lourenco sin artikkel skriver han at dette ga følgende resultater:

$$N_{sxt} = 0 \text{ kN/m}; \quad N_{syt} = 0 \text{ kN/m}; \quad N_{sxb} = 377.6 \text{ kN/m}; \quad N_{syb} = 493.7 \text{ kN/m}$$

$$a_t = 0.0474; \quad a_b = 0.0236; \quad \theta_b = -44.6^\circ \text{ (ved optimalisering)}$$

Test av den nye koden ga følgende resultater (med flere desimaler enn artikkel for nøyaktighet):

$$N_{sxt} = 0 \text{ kN/m}; \quad N_{syt} = 0 \text{ kN/m}; \quad N_{sxb} = 377.6059 \text{ kN/m}; \quad N_{syb} = 493.7201$$

$$\text{kN/m}$$

$$a_t = 0.074885; \quad a_b = 0.023643; \quad \theta_b = -44.999^\circ$$

Det er her klart at det er noen avvik. Alle kreftene stemmer, men platetykkelsen i toppen er feil. Det kan tenkes at dette er en skrivefeil i artikkelen da det står 0.0474 og den nye koden gir 0.074. Det gir heller ingen mening at alle de andre tallene skal medføre riktighet og at dette tallet skal være feil i en så lang prosess. Det ville vært mange store tilfeldigheter og et tilnærmet utenkelig scenario. Avviket for vinkelen skyldes mest sannsynlig optimaliseringen og resultatet av vinklene før optimalisering er ikke oppgitt. Siden alle verdier generelt er riktige antas eventuelle avvik å skyldes skrivefeil og eventuelle avrundinger av desimaler. I artikkelen er fcd2 oppgitt med 2 desimaler, men i koden brukes den med alle gjeldende desimaler. Det er gjort mange kontroller av de tallene som er inkludert i vedlegg B i Lourenco (Lourenco, 1993) og alle tallene stemmer med oppgitte desimaler. Det er derfor stor sannsynlighet for at antakelser gjort angående avrundinger og skrivefeil medfører riktighet. Koden er også testet på mange tilfeldige tall eksempler for å se at den går der den skal ved gitte premisser. Alle if-setninger og løkker skal stemme overens med Lourenco sin opprinnelige kode.

Koden har blitt endret noe underveis i prosessen og det har blitt luket ut feil og mangler underveis. Selve oppbyggingen av koden har for det meste vært stabil, men den har hele tiden vært basert på samme type funksjoner og løkker (looper). Koden har hele tiden blitt testet på Lourenco sine tall når endringer har blitt gjort, og den har da blitt studert nøye. Det er lett å legge inn *print* funksjoner underveis i koden for å se at den kjører som den skal og kontrollere tallene. Alle feil skal være luket ut og den skal fungere som en eksakt kopi av koden til Lourenco. Svakheter og utfordringer med koden kommenteres senere.

```

66 ab = at
67 hc = h - (ab + at) / 2
68 Ncxyt = ((h - ab) * Nxy - 2 * Mxy) / 2 / hc
69 Ncxyb = ((h - at) * Nxy + 2 * Mxy) / 2 / hc
70 if (Ncxyt == 0):
71     Ncxyt = 1e-7
72 if (Ncxyb == 0):
73     Ncxyb = 1e-7
74
75 tetat = pi / 4 * abs(Ncxyt) / Ncxyt
76 tetab = pi / 4 * abs(Ncxyb) / Ncxyb
77
78
79 while True:
80     #1100 Start av beregninger, skal aldri lengre tilbake enn hit
81
82     Nct1 = 0
83     Ncb1 = 0
84     arml = 0
85     #nullstiller enkelte verdier
86
87     #To lag i strekk, iterativ syklus
88
89     hc = h - (ab + at) / 2
90     if (tetat != 0):
91         Nct = (2 * Mxy - (h - ab) * Nxy) / hc / math.sin(2*tetat)
92     if (tetab != 0):
93         Ncb = (2 * Mxy + (h - at) * Nxy) / hc / -math.sin(2*tetab)
94
95
96     # if ((abs(tetat) > tomin) & (abs(tetab) < tomax) & (abs(tetab) > tomin) & (abs(tetab) < tomax));
97

```

**Bilde 4 – Utdrag av koden**

## 10. Testing av koden for den avanserte sandwichmodellen

### 10.1 Element kun påført momentkraft i x-retningen

Koden til Lourenco er allerede testet på eksemplene som er gitt i artikkelen (Lourenco, 1993). Den skal også være testet av Lourenco på forskjellige eksempler og skal ha gitt stor nøyaktighet. I artikkelen skriver han at metoden som diskuteres er for et skallelement med membrankrefter og momentkrefter. Det kan likevel være interessant å se på hvordan koden takler et helt enkelt eksempel som en bjelke som kun er utsatt for momentkraft i x-retningen. Det er her koden allerede møter et første problem. I dette eksempelet ble alle kreftene utenom  $M_x$  satt lik null. Høyden ble satt til 300 mm og avstanden fra midten av elementet til armering ble satt til 110 mm (hxt/hxb/hyb/hyt). Betongen som ble brukt er av fasthet B35 og stålqualität B500. Koden starter med å regne ut  $N_{ct}$  og  $N_{cb}$  som er for øvrig ligning (71) og (72). Disse ligningene er basert på å ha en verdi for  $N_{xy}$  og  $M_{xy}$ . Ligningene blir derfor null. Så videre i koden blir også  $M_{ct}$  og  $M_{cb}$  null da de regnes ut fra  $N_{ct}$  og  $N_{cb}$ . Verdiene blir  $N_{sxt} = -611 \text{ kN}$ ,  $N_{sxb} = 611 \text{ kN}$  og de andre to kreftene blir 0. Siden det kun er  $N_{sxt}$  som er negativ blir dette et spesialtilfelle, og linje 484 i koden blir gjeldende og skal beregne en ny verdi for tetatb. Nevneren i denne ligningen blir null, da  $M_{ct}$  og  $N_{ct}$  er null og det blir da en feilmelding om at programmet ikke kan dele på null. Det er da viktig å tenke på at Lourenco skriver selv at koden er ment for et skallelement med membrankrefter og momentkrefter. Det er kanskje ikke meningen at denne beregningen kan foretas ved bruk av denne koden.

Det skal også nevnes at det er lagt inn mange spesialtilfeller i starten av koden. Her er det tilfeller som at hvis tetat er null og tetab er  $\pi/2$ , så beregnes  $N_{ct}$  og  $N_{cb}$  ut ifra  $M_x$ ,  $N_x$ ,  $M_y$  og  $N_y$ . Problemet er at disse kriteriene er avhengig av vinklene tetab og tetat. Vinklene tetat og tetab er en vinkel som står normalt på rissvinkelen. Hvis de er tilnærmet 0 eller  $\pi/2$  så må dette settes fra starten av i koden og om noen av disse settes lik null så vil  $N_{ct}$  eller  $N_{cb}$  få null i nevneren. Alternativet er å sette begge til  $\pi/2$ , men du vil da få null i nevner ved et senere tidspunkt. Det kan være at koden kan brukes til dette formålet ved å gjøre endringer i vinkler og ved bruk av spesialtilfellene, men slik som koden er skrevet og forklart så ser det ikke ut som dette er mulig.

Det som kan gjøres er at istedenfor å sette verdiene lik null så settes de lik 0.000000001.

Verdiene blir da  $N_{sxt} = -611 \text{ kN}$ ,  $N_{sxb} = 611 \text{ kN}$  og de andre to kreftene blir tilnærmet 0. Koden går gjennom et par iterasjoner og ender til slutt med følgende resultat:

$$\begin{array}{lll} N_{sxt} = -6.46 \text{ kN/m}; & N_{syt} = -7.49 \text{ kN/m}; & N_{sxb} = 579.47 \text{ kN/m}; \\ N_{syb} = 4.87 \text{ kN/m} & a_t = 0.055; & a_b = 7.8 \cdot 10^{-13}; \\ \theta_b = 45^\circ & \theta_t = 90^\circ & A_{sxb} = 1335.2 \text{ mm}^2/\text{m} \end{array}$$

Disse resultatene kan sammenlignes med håndberegninger av momentkapasiteten til en armert bjelke. Denne kalkulasjonen ble gjort først og verdiene den resulterte i ble brukt for å teste koden. Mrd fra håndberegningene ble satt som  $M_{ed}$  i koden. Samme fasthet og geometri som nevnt ovenfor brukes ( $b = 1000$  siden det regnes per meter). Bjelken er armert med 4 armeringsjern med en diameter på 20 mm. Utregningen for hånd går som følger:

$$\varepsilon_s = 2 \times 10^5; \quad \varepsilon_{yd} = f_{yd} / \varepsilon_s; \quad \varepsilon_{cu} = 0.0035; \quad A_s = 1256 \text{ mm}^2$$

$$\alpha_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.00217}$$

$$A_{s,b} = 0.8 \alpha_b \frac{f_{cd}}{f_{yd}} d b = 5854 \text{ mm}^2$$

$$A_s < A_{s,b} \rightarrow \text{Underarmert}$$

$$\alpha = \frac{A_s f_{yd}}{0.8 f_{cd} b d} = 0.132$$

$$\varepsilon_s = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \varepsilon_{cu} = 0.0229 < \varepsilon_{ud} = 0.03$$

$\rightarrow$  Armeringstøying er ok

$$M_{Rd} = 0.8 (1 - 0.4 \alpha) \alpha f_{cd} b d^2 = 134.53 \text{ kNm}$$

Denne  $M_{Rd}$  verdien er brukt som  $M_X$  verdien i koden. Koden resulterte at  $A_{sxb} = 1335 \text{ mm}^2$  ved bruk av denne verdien.  $A_s$  som ble brukt i håndberegningene var altså  $1256 \text{ mm}^2$ . Koden

resulterte altså en verdi for  $A_s$  som er 6% større, eller  $79 \text{ mm}^2$  om du vil. Det vises altså at den gir en noe større verdi. Hvis høyden økes til 600 mm og armeringsmengden økes til fem armeringsjern med en diameter på 25 mm så gir det en ny og mye større verdi for momentkapasiteten.  $M_{Rd}$  blir da 576.88 kNm og dette resultatet (og ny geometri) blir igjen brukt i koden til å beregne armeringsmengden på nytt.  $A_s$  brukt i håndberegningen var da  $2454 \text{ mm}^2$  og resultatet fra koden blir  $A_{sxb} = 2632 \text{ mm}^2$ . Forskjellen blir da selvfølgelig større med  $178 \text{ mm}^2$ , men prosentmessig er den fortsatt rundt det samme på 7%.

Som nevnt tidligere er altså koden skrevet for skallelementer som er utsatt for moment- og membrankrefter. Det virker som at den er skrevet på en så måte at det forventes at kreftene ikke skal være lik null. Det finnes spesialtilfeller som er ment for å ta hensyn til dette, men om normalvektorene på rissvinkel skal endres krever det stor kunnskap om koden og betongvitenskap. Det blir vanskelig å si nøyaktig hvordan dette bør løses uten å investere betydelig med tid for å løse dette. Allikevel kan man komme seg rundt noen av utfordringene med koden ved å sette verdiene tilnærmet lik null. Koden gir en noe høyere armeringsmengde og mengden ser ut til å ligge på rundt 6-7%, som ikke er veldig stort avvik.

## 10.2 Test av forskjellige aksialkrefter, bøye- og torsjonsmomenter

I dette avsnittet er det blitt gjort 9 forskjellige tester av koden. Høyder er oppgitt i millimeter, armering i kvadratmillimeter og krefter er oppgitt i kilonewton og kilonewtonmeter. I tillegg til de 9 testene som er oppført ble det gjort utallige andre tester for å se hvordan koden fungerer på forskjellige typer input og utfordringer. Koden går som den skal og følger løkker og formler som den skal. Allikevel møtet den på flere utfordringer som blir drøftet senere i avsnittet. Disse eksemplene blir også brukt til å sammenligne beregningsmetoder senere. Betongfastheten som brukes gjennom alle eksempler er B35 og stålfastheten er B500. Armeringsdiameter og  $c_{nom}$  er begge antatt å være 20mm. De eneste verdiene som endres er oppgitt i tabellen, ellers brukes verdiene og antakelsene som er oppgitt i koden. Disse eksemplene er tatt med for å vise hvordan koden fungerer.



**Tabell 5 – Test 1**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_X$	$M_Y$	$M_{XY}$	$N_X$	$N_Y$	$N_{XY}$
	300	110	110	-600	400	-200	-2564	3200	750
<b>Resultater</b>									
	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
Kode	2532	0	1045	3363		5834	0	2408	7749

Tabell 5 viser resultater av den første testen som ble gjort. I starten av koden (linje 151 – 154) gir den verdiene  $N_{sxt} = 2687$ ,  $N_{sxb} = -3585$ ,  $N_{syt} = 1024.24$  og  $N_{syb} 3842$ . Siden dette ikke matcher noen av armeringstilfellene i koden går den til spesialtilfellet i linje 523 i koden. Her beregnes en ny verdi for  $\theta_b$  og koden starter på nytt. Som sluttresultatet viser så gjør dette at  $N_{sxb}$  blir tilnærmet lik null og de andre resultatene som er oppgitt i tabellen. Det blir altså strekkraft i begge lag, hvor  $N_{sxb}$  er tilnærmet lik null. Om tallene ser ekstreme eller rare ut så er dette fordi at i dette eksemplet oppnås knusing i betongen. Derfor økes høyden på tverrsnittet for å unngå knusing og se hvilken effekt dette har på tallene. Lagtykkelsene  $a_t$  og  $a_b$  er på henholdsvis 231 mm og 371 mm som er høyere enn tverrsnittet selv. Dette er selvfølgelig fordi det oppnås knusing i betongen.

**Tabell 6 – Test 2**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_X$	$M_Y$	$M_{XY}$	$N_X$	$N_Y$	$N_{XY}$
	800	360	360	-600	400	-200	-2564	3200	750
<b>Resultater</b>									
	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
Kode	425	0	1689	2177		978	0	3892	5017

I test 2 så er høyden for tverrsnittet økt og armeringsdiameter og  $c_{nom}$  er uendret (disse verdiene er uendret i alle 9 eksempler). Høyden er mer enn doblet for å unngå knusing i betongen. Dette er på ingen måte en minimumsverdi for å unngå knusing, men en passende verdi for sammenligning og testing. I dette eksempelet går koden ganske likt i test 1. Her blir også  $N_{sxb}$  negativ og ender opp med å bli null. Forskjellen her er at det ikke oppnås knusing og alle utregninger fullføres og skal være representative tall for koden. Dette er tall som altså

senere kan sammenlignes med andre metoder. Koden gir også representative verdier for de to lagtykkelsen  $a_t$  som tykkelsen av topplaget er på 127 mm. Lagtykkelsen for bunnlaget  $a_b$  er på 222 mm som er ganske mye tykkere enn topplaget. Lagtykkelsen regnes i linje 538 og 539 i koden. Disse tykkelsene er basert på betongfastheten og krefter i betongen som er formlene oppgitt i linjene 538 og 539.  $N_{ct}$  og  $N_{cb}$  beregnes i linjene 91 og 93. I disse formlene beregnes kreftene ut fra torsjonskreftene. Det vil si at disse kreftene har mye å si for tykkelsen på lagene. Dette er ikke de eneste faktorene, men gir likevel en indikasjon på hvordan koden fungerer og hvilke verdier som påvirker resultatene. Dette vil selvfølgelig variere ved hvilket armeringstilfellet som oppstår og det finnes nesten uendelige muligheter for hvilke veier iterasjonene går og hvilke verdier man får.

**Tabell 7 – Test 3**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b><math>h_{xt}=h_{xb}</math></b>	<b><math>h_{yt}=h_{yb}</math></b>	<b><math>M_X</math></b>	<b><math>M_Y</math></b>	<b><math>M_{XY}</math></b>	<b><math>N_X</math></b>	<b><math>N_Y</math></b>	<b><math>N_{XY}</math></b>
	300	110	110	-600	-400	-200	2564	-3200	750
<b>Resultater</b>									
	<b><math>N_{sxt}</math></b>	<b><math>N_{sxb}</math></b>	<b><math>N_{syt}</math></b>	<b><math>N_{syb}</math></b>		<b><math>A_{sxt}</math></b>	<b><math>A_{sxb}</math></b>	<b><math>A_{syt}</math></b>	<b><math>A_{syb}</math></b>
Kode	5207	-1021	1330	-2994		11998	-2353	3066	-6899

I test 3 så endres kreftene, men ellers brukes samme tall som i test 1. Her har  $M_y$ ,  $N_x$  og  $N_y$  endret fortegn. Dette gjør at ved første utregning av krefter, så blir kreftene  $N_{sxt} = 5251$ ,  $N_{sxb} = -1021$ ,  $N_{syt} = 1460$  og  $N_{syb} = -2993$ . Det blir altså trykk i bunnlaget. Dette gjør at koden går til programmet som heter Armering3 og som går gjennom formlene for trykk i bunnlaget. Det oppstår her også knusing og programmet går da til armeringsformlene som det skal. Her er da også verdiene for lagtykkelse for store og koden sier at dette ikke går på grunn av knusingen i betongen. Høyden må økes igjen.

**Tabell 8 – Test 4**

Data	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	800	360	360	-600	-400	-200	2564	-3200	750
<b>Resultater</b>									
	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
Kode	2518	467	224	0		5802	1077	515	0

I test 4 økes da høyden av tverrsnittet for å unngå knusing. Dette gir også nye verdier som utgangspunkt i koden. Verdiene blir  $N_{sxt} = 2768$ ,  $N_{sxb} = 545.88$ ,  $N_{syt} = -391.67$  og  $N_{syb} = -2058$ . Dette er verdier som avslører en av svakhetene med koden. Hvis en av disse verdiene blir negative så faller dette som nevnt tidligere utenfor de fire armeringstilfellene som er strekk i begge lag, trykk i begge lag, trykk i topplag og trykk i bunnlag. Denne verdien vil da gi en ny verdi for  $\theta$  og starte koden på nytt, ved hjelp av spesialtilfellene i linjene 515 til 529. I starten av koden er det også gitt en del spesialtilfeller med grenseverdier for  $\theta$  hvor ved disse spesialtilfellene så settes  $\theta$  lik 0 eller  $\pi / 2$ . Lourenco skriver at dette er fordi at trykk- og strekkrefter skal separeres med minimum 15 grader (han bruker 10 grader) og for å «tillate nødvendig konvergens for løsningen av det ikke lineære systemet» (Lourenco, 1993). Uten disse forutsetningene kan det oppstå trykkraft og strekkraft i samme retning og trykkraft i armeringen som ikke er ønskelig.

Problemet som oppstår når det er to krefter som er negative som ikke faller innenfor de fire armeringstilfellene er at koden kan få null i nevner i en brøk. Dette kan skje ved at koden først går ned til spesialtilfellene og finner en ny  $\theta$ -verdi før koden starter på nytt. De første spesialtilfellene med grenseverdier for  $\theta$  kan så sette  $\theta$  ( $\theta_T$  f.eks) til null før den igjen går videre til spesialtilfellene fra linje 515 for å rette på den andre  $N$  verdien. Som i dette eksempelet hvor både  $N_{syt}$  og  $N_{syb}$  er negative så må koden kjøre to ganger hvor den korrigerer begge verdiene. Etter den første gangen hvor det settes en ny verdi for  $\theta$ , i dette eksempelet er dette  $\theta_T$ , blir denne verdien satt til null i de første spesialtilfellene fordi den er for stor eller liten. Så når koden da setter en ny  $\theta_B$  verdi på grunn av at  $N_{syb}$  er negativ og starer på nytt så vil  $\theta_T$  være null og det vil bli null i nevner på linje 91 hvor  $N_{ct}$  regnes ut.

I Lourenco sin kode vil dette være et problem som kan oppstå flere ganger. Vinkelen kan settes til null flere steder i koden og starte på nytt, enten i, eller utenfor armeringstilfellene. Dette er løst i den nye koden ved if-setninger. Disse if-setningene i linje 90 og 92 sier at hvis

$\theta$  er satt til å være null så skal den hoppe over  $N_{ct}$  eller  $N_{cb}$ , avhengig av hvilken av vinklene som er satt til å være null. Dette er ikke gjort i Lourencos kode så dette er et tiltak for å løse slike tilfeller som dette. Om Lourenco ikke har gjort dette med overlegg vites ikke. Det kan være at en slik error vil si at eksempelet feiler en av kravene eller premissene som er satt for denne typen utregning. Det skrives at denne koden tar hensyn til mange ting som de andre utregningene ikke gjør og en slik error (eller feilmelding) kan komme av disse kravene eller premissene som for eksempel at det blir trykk i armeringen. Det kan være ment som en advarsel. Det samme eksemplet blir kjørt på nytt med justert kode. Koden endrer i eksempelet  $N_{sy}$  til å bli tilnærmet null ved første iterasjon, før den gjør det samme med  $N_{syb}$ . Når  $N_{syb}$  settes lik null endrer  $N_{sy}$  seg til positiv. Koden kjører 5 iterasjoner for å oppnå krav til lagtykkelse (kalt convergence test i Lourenco sin kode) før den sier seg fornøyd med resultatene. Da har  $N_{sy}$  økt til en relativt høy verdi på 224 kN. Det kan tenkes at denne skulle vært satt til null, da det virker som det er måten koden takler slike verdier. Det kan også tenkes at dette eksempelet var ment å gi en feilmelding og siden Lourenco ikke virker å ha tatt høyde for slike verdier i sitt eksempel og at dette ikke er relevant. Det noteres altså en usikkerhet rundt disse tallene.

**Tabell 9 – Test 5**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b><math>h_{xt}=h_{xb}</math></b>	<b><math>h_{yt}=h_{yb}</math></b>	<b><math>M_X</math></b>	<b><math>M_Y</math></b>	<b><math>M_{XY}</math></b>	<b><math>N_X</math></b>	<b><math>N_Y</math></b>	<b><math>N_{XY}</math></b>
	1200	560	560	-1024	-868	-655	3225	3968	954
<b>Resultater</b>									
	<b><math>N_{sxt}</math></b>	<b><math>N_{sxb}</math></b>	<b><math>N_{syt}</math></b>	<b><math>N_{syb}</math></b>		<b><math>A_{sxt}</math></b>	<b><math>A_{sxb}</math></b>	<b><math>A_{syt}</math></b>	<b><math>A_{syb}</math></b>
Kode	3581	942	3814	1453		8252	2170	8787	3347

Test 5 er en test av nye verdier hvor høyden og kreftene økes og endres. Dette gir utgangspunktverdier med strekk i alle lag. Verdiene blir  $N_{sxt} = 3618$ ,  $N_{sxb} = 972$ ,  $N_{syt} = 3850$  og  $N_{syb} = 1482$ . Koden kjører da utregninger for strekk i alle lag og gjennomgår 6 iterasjoner for å finne ønsket lagtykkelse. Verdiene som kommer ut er gitt i tabellen og er ikke veldig endret fra utgangspunktet. Lagtykkelsen på topplaget  $a_t$  er på 215 mm og for bunnlaget  $a_b$  er tykkelsen 329 mm. Det vil ikke oppstå knusing og koden kjører som den skal. Dette er også et eksempel på verdier som er skikket til å sammenlignes med andre metoder.

**Tabell 10 – Test 6**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	1200	560	560	-1024	-868	-655	322	396	75
<b>Resultater</b>									
	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
Kode	1695	0	1593	0		3904	0	3670	0

I test 6 er det kun aksialkreftene som er endret siden test 5. Dette er gjort av to grunner. Den ene er for å se en indikasjon på hvor stor innvirkning aksialkreftene har på armeringsmengden og for å undersøke forholdet mellom aksial- og momentkrefter. Den andre er for å se koden kjøre et av armeringstilfellene. Det som også er av interesse er at i denne testen så går ikke koden rett til et av armeringstilfellene, da i starten så er det kun N<sub>sxb</sub> som er negativ. Altså kraften i x-retning i bunnlaget. Kreftene blir ved første utregning N<sub>sxt</sub> = 1790, N<sub>sxb</sub> = -103, N<sub>syt</sub> = 1687 og N<sub>syb</sub> = 73. Det blir altså store krefter i topplaget. Siden kun N<sub>sxb</sub> er negativ kjører koden spesialtilfellet der den beregner en ny  $\theta_b$  og starter på nytt. Da blir N<sub>sxb</sub>  $-2 \times 10^{13}$  som er tilnærmet null, men negativ og N<sub>syb</sub> blir -14. Dette gjør altså at koden går til Armering3 som er armeringstilfellet for trykk i bunnlaget. Der kjører den 5 iterasjoner for å finne ønsket lagtykkelse før den gir resultatene gitt i tabellen. Resultatene viser at selv om momentkreftene er de samme så er armeringsmengden i topplaget tilnærmet halvert. Aksialkreftene er tilnærmet ti ganger mindre og det er derfor forventet at armeringsmengden skal synke en god del. Det blir beregnet å ikke være behov for armering i bunnlaget der det oppstår trykkrefter. Lagtykkelsen for topplaget a<sub>t</sub> er beregnet til å være 121 mm og for bunnlaget a<sub>b</sub> er tykkelsen 75 mm. Dette er mye mindre enn ved test 5 og spesielt bunnlaget er mye tynnere da det var på hele 329 mm. Det oppstår ikke knusing av betongen og koden kjører som den skal. Dette kan også være et aktuelt eksempel å sammenligne med andre beregningsmetoder.

**Tabell 11 – Test 7**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	1200	560	560	-3054	-2868	-1067	322	396	75
<b>Resultater</b>									
	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
Kode	4060	0	3920	0		9354	0	9032	0

I test 7 så er momentkreftene tilnærmet dobbelt så store for å se hvilken innvirkning dette har på resultatene. Dette er også et perfekt eksempel for å teste armeringstilfellet da dette er relativt rent eksempel for koden å kjøre. Ved første utregning av kreftene blir verdiene  $N_{sxt} = 4031$ ,  $N_{sxb} = -1486$ ,  $N_{syt} = 3902$  og  $N_{syb} = -1283$ . Det blir altså rent trykk i bunnlaget og koden kan gå rett til Armering3 som er programmet eller funksjonen for dette tilfellet. Koden kjører 5 iterasjoner før den kommer ut med resultatene. Denne finner altså at det ikke er behov for armering i bunnlaget. Den beregner lagtykkelsene for topplaget og bunnlaget på å være henholdsvis 211 mm og 191 mm. Dette er en betydelig økning fra forrige test. Disse resultatene antyder at momentverdiene har større påvirkning på resultatene enn aksialkreftene. Dette er positivt og er hva som var forventet å finne. Også her oppstår ikke knusing og eksempelet kan sammenlignes med andre beregningsmetoder.

**Tabell 12 – Test 8**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	1200	560	560	-3054	-2868	-1067	1522	1796	475
<b>Resultater</b>									
	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
Kode	4753	0	4716	0		10952	0	10865	0

I test 8 er aksialkreftene økt betraktelig for å se resultatene av dette. Her kjører koden på akkurat samme måte som i test 7 og det vil her også bli trykk i bunnlaget. Resultatene er også noe like. Aksial kreftene er tilnærmet ti ganger større og det utgjør rundt 15% på resultatene grovt regnet. Dette er igjen positive resultater da de tyder på at momentkreftene blir avgjørende i et beregningstilfelle av et gulv. Hvis aksialkreftene hadde vært den største

påvirkningskraften så hadde dette vært et rødt flagg for videre bruk av koden. Lagtykkelsene ble for øvrig 251 mm for topplaget  $a_t$  og 141 mm for bunnlaget  $a_b$ .

**Tabell 13 – Test 9**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_X$	$M_Y$	$M_{XY}$	$N_X$	$N_Y$	$N_{XY}$
	1200	560	560	-1024	-868	-655	1522	1796	475
<b>Resultater</b>									
Resultater	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
Kode	2495	257	2493	533		5749	592	5743	1229

I test 9 så er momentkreftene senket igjen. Dette er for å få en bekreftelse på samspillet mellom aksial- og momentkreftene. Dette eksempelet gir igjen strekk i alle lag. Koden kjører 5 iterasjoner før den finner ønsket lagtykkelse og gir resultatene ovenfor. Resultatene bekrefter igjen at momentkreftene har mest å si for hvor store krefter som oppstår og mengden armering som blir nødvendig. Lagtykkelsen for topplaget  $a_t$  er beregnet til å være 163 mm og for bunnlaget  $a_b$  er tykkelsen 72 mm.

### 10.3 Oppsummering og inntrykk av koden

Som nevnt er koden til Lourenco er allerede testet på eksemplene som er gitt i artikkelen (Lourenco, 1993) og den skal også være testet av Lorencio på forskjellige eksempler og skal ha gitt stor nøyaktighet. Disse eksemplene er beskrevet og gjengitt i boken og avsnittet om Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010). I artikkelen skriver han også at metoden som diskuteres er for et skallelement med membrankrefter og momentkrefter. Det første eksempelet som ble testet som var momentkraft kun i x-retningen kan derfor vurderes som mindre aktuelt. Det er likevel et eksempel som viser antydning til enkelte svakheter ved koden, nemlig nullverdier. Dette er noe koden sliter med på mange måter ved forskjellige typer tester og det kan spekuleres i om dette er utfall Lourenco fikk når han testet koden.

Nå er koden blitt testet utallige ganger. Koden har blitt testet både med tanke på hvordan den er skrevet og kodens gang, men også hvordan den takler forskjellige tallkombinasjoner. Den er nå antatt å være perfektjonert og skal være en nøyaktig kopi av hvordan koden til Lourenco

går gjennom de forskjellige syklusene og beregningene. Den første utfordringen koden støtet på etter dette var i nevnte eksempel hvor både  $M_{xy}$  og  $N_{xy}$  var satt til å være null. Dette er omtalt tidligere i avsnittet og hvordan man kan omgå dette ved å sette verdier lik 0.00000001 for eksempel. Det kan også antas at koden ikke er ment for slikt et eksempel eller at den da skal tilpasses eller omskrives. Den neste utfordringen ble også omtalt tidligere og det var når to av verdiene  $N_{sxt}$ ,  $N_{syt}$ ,  $N_{sxb}$  eller  $N_{syb}$  var negative, og kombinasjonen ikke falt innenfor en av de fire armeringstilfellene. Det var da koden kjører flere iterasjoner hvor vinkelen  $\theta$  kan settes til null og koden får null i nevner ved beregning av kreftene i betongen. Det ble også her foreslått en løsning med if-setninger hvor koden hopper over formelen for f.eks  $N_{ct}$  om  $\theta_t$  er null og bruker den  $N_{ct}$  formelen som er foreslått av spesialtilfellet. Dette er det forslaget som er antatt å bli mest riktig og er lagt til i den nye versjonen av koden. Det noteres likevel at dette ikke er en del av den originale koden og man kan spekulere om dette er med overlegg eller ikke testet. I testen ledet dette til drastiske endringer av verdier som det kan stilles spørsmålstegn bak. Hvis koden skal brukes i praksis er dette tilfeller som burde undersøkes nærmere. For videre testing vil slike tilfeller unngås. If-setningene kan lett fjernes om ønskelig.

Dette er nettopp denne utfordringen med null verdier i nevner som koden har støtet på oftest. Det har skjedd flere ganger at  $\theta$  blir satt til null og når koden starter på nytt så ender den med null i en nevner. Dette kan oppstå på samme plass i koden som i nevnte eksempel (i test 4) eller det kan oppstå i armeringstilfellene (funksjonene). Det skjer gjerne når  $\theta$  blir satt lik null og lagtykkelsene feiler det Lourenco kaller «convergence test» hvor  $a_t$  og  $a_b$  testes opp mot sine tidligere verdier. Også her kan koden omskrives ved å hoppe over disse formlene på samme måte om man vil det. Dette er som sagt ikke gjort i Lourenco sin originale kode og igjen kan det spekuleres i om Lourenco testet lignende tilfeller. Det er flere alternativer som kan medføre sannhet. Det ene er at han ikke støtet på slike eksempler og rett og slett ikke var klar over denne svakheten med koden. Det andre man kan spekulere i er at dette er med vilje og at alle feilmeldinger man får er ment som advarsler mot at dette ikke er et eksempel som skal gå. At man da enten må endre geometriske verdier, fasthet eller se nærmere på tallene man kjører. Det mest usannsynlige tilfellet er at koden til Lourenco kjører på en måte som gjør at null i nevner ikke gir feilmelding eller at den hopper over et slikt resultat. Det er meget usannsynlig at det er noe feil med den nye koden da den er testet utrettelig og det er tatt mange stikktester. Stikktester tas ved å legge inn mange såkalte «print» funksjoner for å kunne se tall og gitte punkter hvor koden går. Hvis man legger inn at koden skal «printe»



tallene 1 til 30 forskjellige steder i koden, kan man hele tiden følge hvor koden går og eventuelt se aktuelle tall. «Print» er som å be koden skrive et gitt tall eller en ønsket melding på et gitt sted i koden. Slik kan koden overvåkes under alle tester og man kan luke ut eventuelle feil.

Det har også oppstått situasjoner der koden beregner og går inn i et armeringstilfellet, men under utregningene feiler den en av testene og starter på nytt. Så regner koden ut nye verdier, går inn i et nytt tilfellet og feiler nok en test. Det har vært noen tilfeller av dette hvor koden går i en uendelig «loop», eller løkke som det heter på norsk, og koden kommer aldri frem til noe svar. Disse eksemplene blir veldig spesifikke og det kan spekuleres igjen om dette er svakhet i koden. Her vil disse eksemplene antas å være ugyldige. Det antas at dette er situasjoner, tall og tilfeller som det er ment skal feile koden og testen. Det kan være at det er fordi det oppstår trykk i armeringen eller andre situasjoner som gjør at koden ikke kommer til et resultat. Det vites ikke om dette er med overlegg eller om dette er eksempler Lourenco aldri støtet på.

Det er altså flere måter koden kan møte på feilmeldinger og utfordringer på og det vites ikke om Lourenco har kommet over lignende resultater av koden. Ut i fra det som er publisert av tester og resultater så har Lourenco hatt positive resultater av koden sin og det skrives ikke om lignende utfordringer. Det kan være tilfellet at slike feilmeldinger er indikasjoner på at eksempelet ikke er gjennomførbart eller at man må se nærmere på tallene sine. Det kan også være at denne typen eksempler er ansett av Lourenco å være høyst usannsynlige og derfor irrelevante. Dette blir kun spekulasjoner og det er vanskelig å si noe sikkert om saken. Det kan antas at koden ble skrevet med enkelte forutsetninger som gjør at noen av disse feilmeldingene er eksempler som er uaktuelle. Koden viser seg likevel å kjøres fint på de aller fleste eksempel og tallene som kommer ut virker å være fornuftige. Koden skrevet i Python har vist seg å kjøre som den originale koden til Lourenco. Koden vil videre bli sammenlignet med andre beregningsmetoder. Det vil generelt fokuseres på kodens styrker og talleksempler som anses å være relevante og gyldige.

## 11. Sammenligning av beregningsmetoder

For å kunne si noe om FEM-Design sin metode for å inkorporere torsjonsmomentet i beregning av armeringen så må den sammenlignes med noe. I dette avsnittet vil FEM-Design bli sammenlignet med to alternative metoder. Den ene metoden er den tidligere omtalte koden utviklet av Lourenco og som kalles den avanserte sandwichmetoden i Plates and FEM boken (Blaauwendraad, 2010). Den andre metoden er en enklere versjon av sandwichmetoden. Det er ikke den enkle versjonen fra Plates and FEM, men en veldig lik metode fra et kompendium for TKT4222 Concrete Structures fra NTNU (Øverli, n.d.). De forskjellige utregningene vil bli gjennomgått før resultatene presenteres og drøftes. Det ideelle ville vært å ha en fasit å sammenligne med eller et eksperiment. Dette skal ha vært gjort ifølge Plates and FEM boken der lignende resultater presenteres. Forsøkene og mer informasjon ble vanskelig å spore opp, men skal være referert til i kildene til boken. Der sa resultatene at spesielt ved store torsjonsmomenter ga den avanserte sandwichmodellen mest riktige resultater og var nærmest eksperimentets armeringsmengde. Det er ganske få eksempler som er oppgitt og lite informasjon rundt resultatene og tallene bak. Hvor mye som ble testet utenfor resultatene som ble presentert er også ukjent. Her vil det bli undersøkt eksempler med og uten aksialkrefter og med forskjellige størrelser på verdiene.

### 11.1 FEM-Design metoden

Wood Armer metoden er som nevnt tidligere mest sannsynlig den metoden og de ligningene FEM-Design tar i bruk for å inkorporere torsjonsmomentet ved beregning av dekker. Det er det som er oppgitt i teorimanualen til programmet og tester av resultater i programmet bekrefter dette. Antakelser og nærmere undersøkelser er nevnt i egne avsnitt tidligere der alle utregninger og antakelser er presentert. Tidligere ble Wood Armer ligningene og armeringsberegninger presentert hver for seg, så her presenteres det som antas å være prosessen bak beregningene i FEM-Design. Den er denne prosessen og resultatene den gir som vil sammenlignes med de to andre metodene senere. Om det er noen begrunnelser bak antakelser som ikke er forklart så skal de være beskrevet i tidligere avsnitt hvor ligningene ble testet og sammenlignet med resultater i programmet. Her tas det utgangspunkt i at

programmet har regnet ut platekreftene og det utregningene viser er prosessene der FEM-Design gjennomfører sine automatiske beregninger av armering.

Det første programmet gjør er å finne det den kaller «mr» eller «mt» som blir de dimensjonerende momentene eller kreftene programmet bruker i armeringsberegningene sine. Disse er basert på resultatene i x- og y-retning kombinert med torsjonsmomentet gjennom Wood-Armer metoden og ligningene. Programmet bruker så disse resultatene til å regne ut armeringen. For å se på hvordan FEM-Design regner ut armeringsmengden presenteres her et talleksempel. Ligningene som brukes er som sagt presentert tidligere, men dette er for å få oversikt og sammenheng over hvordan prosessen er antatt å gå. Eksemplet som presenteres her (og flere) er først beregnet for å hånd og så testet i et eget program skrevet i Python som regner ut armeringen på samme måte som FEM-Design gjør. I hele dette avsnittet fastheten på betongen B35 og stålet av kvalitet B500C. Her er kreftene i kNm og lengdeenheter i mm. Armeringen har diameter 20 mm og cnom er 20 mm. Høyden på tverrsnittet her er 1200 mm.

$$M_X = -1024 \text{ kNm}, \quad M_Y = -868 \text{ kNm}, \quad M_{XY} = -655 \text{ kNm}$$

Først brukes Wood Armer ligninger for å finne dimensjonerende krefter.

### **Momenter bunnlag:**

$$M_x < -|M_{xy}|$$

$$\rightarrow M_{xb} = 0$$

$$M_y < -|M_{xy}|$$

$$\rightarrow M_{yb} = 0$$

### **Momenter topplag:**

$$M_x < |M_{xy}|$$

$$M_{xt} = M_x - |M_{xy}| = -1024 - 655 = -1679 \text{ kNm}$$

$$M_y < |M_{xy}|$$

$$M_{yt} = M_y - |M_{xy}| = -868 - 655 = -1523 \text{ kNm}$$

Det blir altså ikke nødvendig å beregne armering i bunnlaget. Hvis det hadde blitt nødvendig hadde de blitt beregnet på samme måte som  $M_{xt}$  og  $M_{yt}$ . Det beregnes her først  $d$  og  $M_{Rd}$  som brukes til å finne  $z$ . Så beregnes armeringsmengden.

$$d = h - c_{\text{nom}} - \frac{\Phi}{2} = 1200 - 20 - 10 = 1170 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} = 0.275 f_{cd} b d^2 = 0.275 \times 19.83 \times 1000 \times 1170^2 = 7464953915 \text{ kNm}$$

$$z = \left(1 - \frac{0.17 M_{Ed}}{M_{Rd}}\right) d$$

$$z_{xt} = \left(1 - \frac{0.17 M_{xt}}{M_{Rd}}\right) d = \left(1 - \frac{0.17 \times 1679 \times 10^6}{7464953915}\right) d = 0.9617 d$$

$$z_{yt} = \left(1 - \frac{0.17 M_{yt}}{M_{Rd}}\right) d = \left(1 - \frac{0.17 \times 1523 \times 10^6}{7464953915}\right) d = 0.9653 d$$

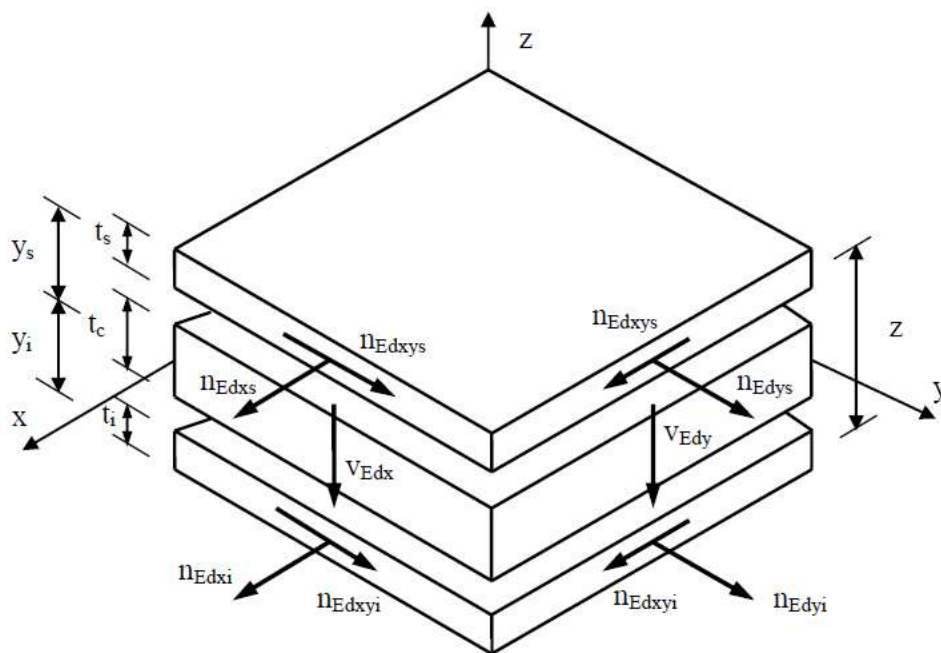
$$A_{sxt} = \frac{M_{xt}}{z_{xt} \times f_{yd}} = \frac{1679 \times 10^6}{0.9617 \times 1170 \times 434} = 3438 \text{ mm}^2$$

$$A_{syt} = \frac{M_{yt}}{z_{yt} \times f_{yd}} = \frac{1523 \times 10^6}{0.9653 \times 1170 \times 434} = 3107 \text{ mm}^2$$

Dette er altså formlene og ligningene som blir brukt for å representere utregningene fra FEM-Design. Begrunnelser og antakelser for hvorfor nettopp disse ligningene er valgt er som sagt begrunnet i avsnittene for de respektive temaene. Disse ligningene er skrevet inn i og gjort om til et program i Python og programmet er testet på flere håndberegninger og testene som ble gjort i FEM-Design. Siden det vil bli gjort mange tester vil dette programmet bli brukt til å teste andre verdier som sammenlignes med de forskjellige metodene. Programkoden vil bli lagt til som vedlegg.

## 11.2 Enkel sandwichmetode fra kompendium

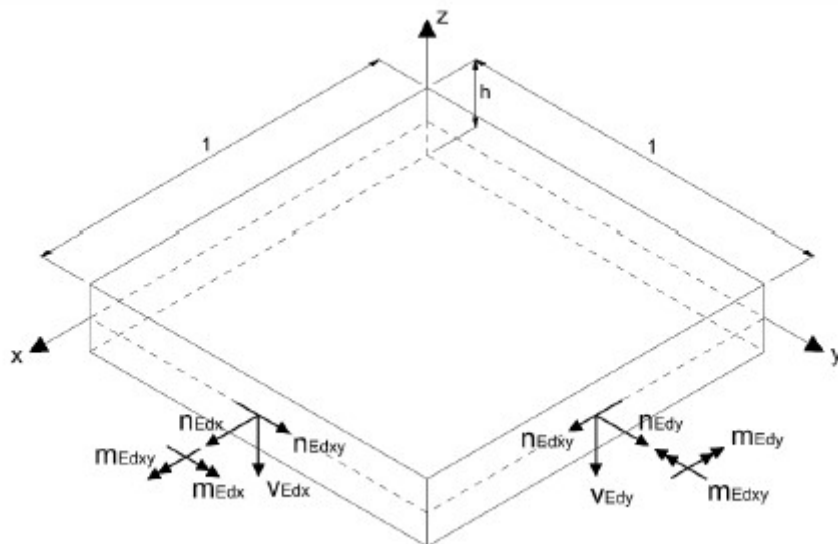
Før ligningene og utregningene for denne enkle sandwichmetoden presenteres så må enkelte antakelser og verdier forklares. Det er nemlig enkelte forskjeller på fortegn og koordinatsystem som er brukt i koden til Lourenco og metoden som er presentert i dette avsnittet. Den største forskjellen er at z-retningen er positiv i motsatt retning fra Lourenco sin figur og kode. Her er z-retningen positiv i topplaget, som man kan se under på Figur 10. Dette er motsatt av den avanserte sandwichmodellen som ble presentert tidligere. Dette gjør altså at resultatene for krefter og armering topplaget her representerer bunnlaget i Lourenco sin kode. På samme måte blir resultatene for bunnlaget her tilsvare topplaget i koden til Lourenco. Det går ikke å bytte fortegn på alle krefter og sette dette inn i koden til Lourenco da man da vil får helt feil resultat. Det enkleste er derfor å regne de forskjellige metodene som vanlig og bytte om resultatene slik at topplaget i standard sandwichmetoden er det samme som bunnlaget for den avanserte metoden. Dette er viktig å vite om resultatene skal gjenskapes eller testes.



Figur 10 – Modell av krefter og lagtykkelser for enkel sandwichmetode

I kompendiet går torsjonskraften  $M_{xy}$  motsatt vei av det kraften gjør i koden til Lourenco. I kompendiet går kraften i positiv x-retning og mot negativ y-retning. Det kan man se i Figur 11 under. I Lourenco sin kode går  $M_{xy}$  kraften i positiv y-retning og negativ x-retning. Dette

gjør at  $M_{xy}$  verdien må endre fortegn enten i koden for den avanserte sandwichmodellen eller i utregningene for den enkle sandwichmetoden. Det brukes også andre navn i kompendiet hvor for eksempel lagtykkelsene er kalt  $t_s$  og  $t_i$  istedenfor  $a_t$  og  $a_b$ . Da disse utregningene for den enkle sandwichmetoden også er skrevet om til et program i Python er disse navnene endret til de samme som er brukt i koden til Lourenco. Her vil  $t_s$  bli  $a_t$ ,  $t_i$  blir  $a_b$ ,  $y_s$  blir  $y_t$  og  $y_i$  blir  $a_b$ . Krefter og armering beskrives da gjennom  $x$  for  $x$ -retning,  $y$  for  $y$ -retning,  $t$  for topplag og  $b$  for bunnlag. Skjærkreftene som er beregnet i eksempelet fra kompendiet tas ikke med her. Fokuset vil være på torsjonsmomentet og hvordan det behandles. Skjærkreftene i den avanserte sandwichmodellen antas for øvrig å bli tatt opp av kjernen på samme måte som den gjør i den enkle metoden. Skjærkreftene er inkludert i eksempelet for ryddighetens skyld og at ligningene vises slik de er opprinnelige. De vil derimot ikke bli tatt med i testing av metodene, da fokuset er på torsjonskraften.



*Figur 11 – Figur av momentkrefter for enkel sandwichmetode*

Verdiene som brukes i dette eksempelet er som følger (som ellers er krefter og armering per meter uten at dette trengs å oppgis i eksemplene):

B35  $\rightarrow$   $f_{cd} = 19.8$  MPa;      B500NC  $\rightarrow$   $f_{yd} = 435$  MPa;  $c_{nom} = 70$  mm

$N_x = -7748$  kN;                       $N_y = -3865$  kN;                       $N_{xy} = -54$  kN

$M_x = 4274$  kNm;                       $M_y = 1950$  kNm;                       $M_{xy} = -41$  kNm

$$at = ab = 2 \times c_{nom} = 140 \text{ mm};$$

$$= 1360 \text{ mm}$$

$$y_t = y_b = h/2 - at/2 = 680 \text{ mm};$$

$$z = at + ab$$

### Topplaget:

$$N_{xt} = N_x \frac{z - y_t}{z} + \frac{M_x}{z} + \left( \frac{1}{2} \frac{V_x^2}{V_0} \cot\theta \right)$$

$$N_{xt} = -7748 \times 0.5 + \frac{4274}{1.36} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{1095^2}{1569} \times 2 \right) = 33 \text{ kN}$$

$$N_{yt} = N_y \frac{z - y_t}{z} + \frac{M_y}{z} + \left( \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{V_0} \cot\theta \right)$$

$$N_{yt} = -3865 \times 0.5 + \frac{1950}{1.36} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{1124^2}{1569} \times 2 \right) = 307 \text{ kN}$$

$$N_{xyt} = N_{xy} \frac{z - y_t}{z} - \frac{M_{xy}}{z} + \left( \frac{1}{2} \frac{V_x V_y}{V_0} \cot\theta \right)$$

$$N_{xyt} = -54 \times 0.5 + \frac{41}{1.36} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{1095 \times 1124}{1569} \times 2 \right) = 788 \text{ kN}$$

### Sjekk av trykkapasitet

$$\sigma_c = \frac{N_{xyt}}{a_t \times \sin\phi \times \cos\phi}, \text{ der } \phi = 45^\circ$$

$$\sigma_c = \frac{788}{140 \times \sin 45 \times \cos 45} = 10.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Rd,Max} = 0.6 \times \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} = 0.6 \times \left( 1 - \frac{35}{250} \right) 19.8 = 10.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Rd,Max} > \sigma_c \rightarrow OK$$

**Bunnlaget:**

$$N_{xb} = N_x \frac{z - y_b}{z} - \frac{M_x}{z} + \left( \frac{1}{2} \frac{V_x^2}{V_0} \cot\theta \right)$$

$$N_{xb} = -7748 \times 0.5 - \frac{4274}{1.36} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{1095^2}{1569} \times 2 \right) = -6253 \text{ kN}$$

$$N_{yb} = N_y \frac{z - y_b}{z} - \frac{M_y}{z} + \left( \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{V_0} \cot\theta \right)$$

$$N_{yb} = -3865 \times 0.5 - \frac{1950}{1.36} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{1124^2}{1569} \times 2 \right) = -2561 \text{ kN}$$

NB: I kompendiet så står det at 1950/1.36 adderes, men dette er sikkert trykkfeil da  $M_y$  er positiv.

$$N_{xyb} = N_{xy} \frac{z - y_b}{z} + \frac{M_{xy}}{z} + \left( \frac{1}{2} \frac{V_x V_y}{V_0} \cot\theta \right)$$

$$N_{xyb} = -54 \times 0.5 - \frac{41}{1.36} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{1095 \times 1124}{1569} \times 2 \right) = 727 \text{ kN}$$

**Krefter i armeringen:**

$$F_{sxb} = N_{xb} + N_{xyb} = -6253 + 727 = -5526 \text{ kN}$$

$$F_{syb} = N_{yb} + N_{xyb} = -2561 + 727 = -1834 \text{ kN}$$

**Sjekk av trykkapasitet i hovedtrykkraftens retning:**

$$\sigma_c = \frac{1}{a_b} \left( \frac{N_{xb} + N_{yb}}{2} + \sqrt{\left( \frac{N_x - N_y}{2} \right)^2 + N_{xy}^2} \right)$$



$$\sigma_c = \frac{1}{140} \left( \frac{6253 + 2561}{2} + \sqrt{\left( \frac{6253 - 2561}{2} \right)^2 + 727^2} \right) = 45.6 \text{ MPa}$$

$\sigma_c > f_{cd} \rightarrow$  Må øke lagtykkelse

Utrekningene må da gjøres på nytt med økt lagtykkelse. Siden formlene er de samme vil ikke nye utregninger inkluderes her. De nye verdiene som finnes er  $F_{sxt} = 1665 \text{ kN}$  og  $F_{syt} = 1504 \text{ kN}$ . Dette er for topplaget som vises av bokstaven «t». Armeringen beregnes med:

$$A_{sxt} = \frac{F_{sxt}}{f_{yd}} = \frac{1665}{435} = 3827 \text{ mm}^2$$

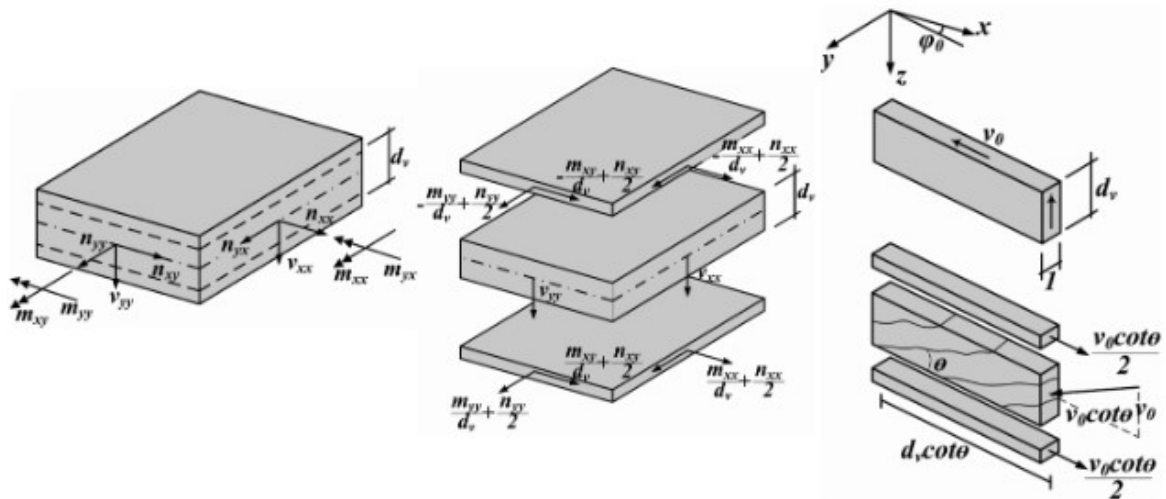
$$A_{syt} = \frac{F_{syt}}{f_{yd}} = \frac{1504}{435} = 3457 \text{ mm}^2$$

Disse ligningene representerer altså den enkle sandwichmetoden i sammenligningene av beregningsmetoder. Den er ikke ulik den som er presentert Plates and FEM boken og noen av ligningene er like. Også dette er skrevet inn i Python og gjort om til et program som er testet med håndberegninger og dette eksempelet. Denne koden vil også bli vedlagt.

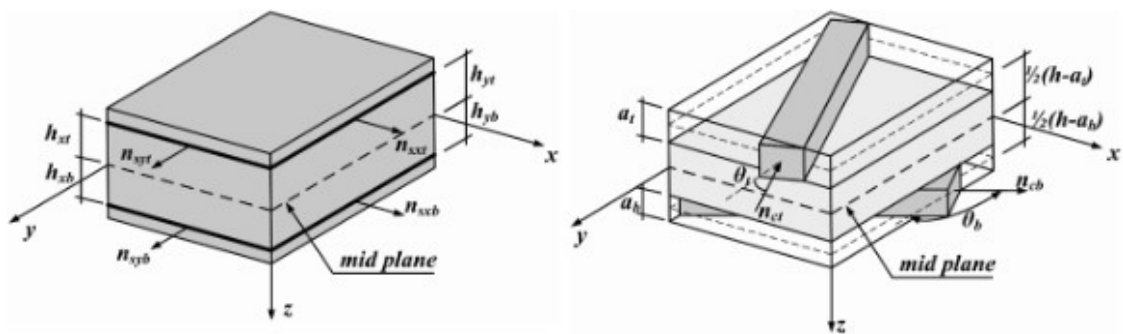
### 11.3 Den avanserte sandwichmodellen

Utrekningene for den avanserte sandwichmodellen vil ikke bli gjennomgått da de er alt for mange, store og kompliserte. Formlene som brukes er avhengige av utallige tilfeller og situasjoner og den eneste metoden og bli kjent med koden er å lese den og studere den. Koden som brukes er som sagt en omskrevet versjon av Lourenco sin kode (Lourenco, 1995). Her bærer kjernen også skjærkrefter. For resten så vil manglene til standardmodellen bli «reparert» ifølge Lourenco og boken Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010). Hvert lag med armering tildeles et eget plan, som tillater tykkelsen av de ytre lagene å bli tilstrekkelig beregnet og tar hensyn til manglende vilkår. Disse er kalt  $h_{xt}$ ,  $h_{yt}$ ,  $h_{xb}$  og  $h_{yb}$ . Som forklart i forrige avsnitt er z-retningen snudd på hodet her og topplaget og bunnlaget er byttet om sammenlignet med utregningene for den enkle sandwichmetoden. Torsjonsmomenter har og omvendt fortegn. Under er en figur som viser kreftenes retning i forhold til aksene og en figur

som viser hvordan lagene er delt inn. Sistnevnte figur viser vinklene  $\theta_t$  og  $\theta_b$  som er vinkelen som står normalt på rissvinkel for topplaget og bunnlaget. Koden er nærmere beskrevet og gått gjennom i tidligere avsnitt.



Figur 12 – Modell av lagtykkelser og krefter for den avanserte sandwichmodellen



Figur 13 – Laginndeling og vinkler for den avanserte sandwichmetoden

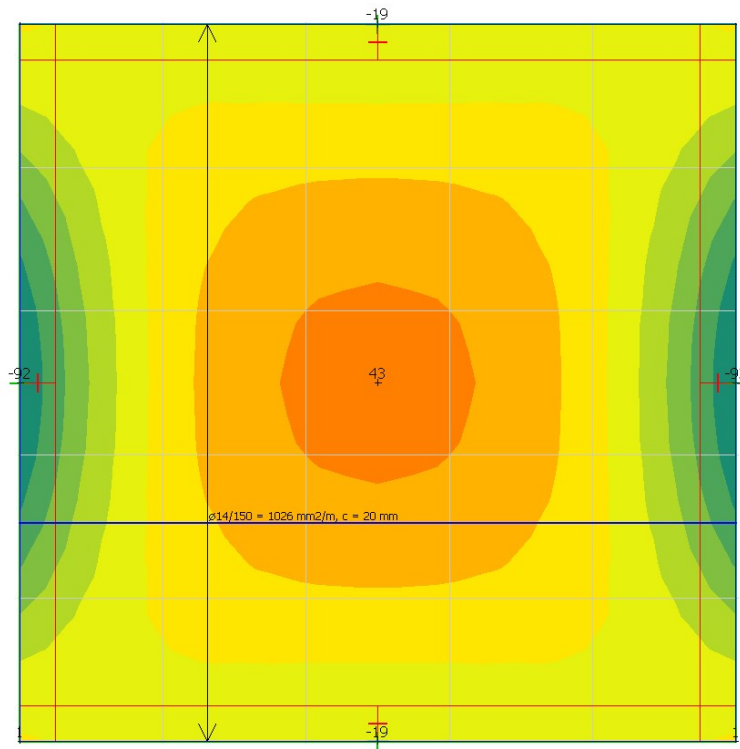
## 12 Resultater

### 12.1 FEM-Design eksempel

Det første eksempelet som skal undersøkes er også kanskje det viktigste. Her tas tallene direkte fra FEM-Design. Her tas det utgangspunkt i et fast innspent betonggulv. Dekket er av kvalitet B35 og 300 mm tykt. Det er 10 x 10 meter. Dekket blir utsatt for en jevnt fordelt last på  $7,5 \text{ kN/m}^2$ . Denne verdien er hentet fra Eurokode 1: Laster på konstruksjoner (Standard Norge, 2008) tabell 6.2. Dette er en karakteristisk last som gjelder bygg i klasse C5 som kan være konsertarealer og andre arealer som lett overfylles. Dekket er utsatt for denne lasten og en egenlast. Den jevnt fordelte nyttelasten ganges med en faktor på 1.5 og egenlasten ganges med en faktor på 1.2. Dette kan velges i FEM-Design og man kan lage en lastkombinasjon av disse to lastene. Armeringen programmet tar utgangspunkt i har diameter på 10 mm, kvalitet B500C og avstanden til første armeringslag er 20 mm. Avstanden til armeringen i x-retning blir derfor 20 mm og det er 30 mm til armeringen i y-retningen.

Gjennom analyse av dekket finnes maksimum og minimumsverdier for momentene. For  $M_x$  er den største verdien 43 kNm i midten av dekket og -92 kNm på siden. Hvordan resultatene presenteres er avbildet på neste side. De samme verdiene gjelder i y-retning, men da vil resultatene være snudd  $90^\circ$ . Det vil si at hvis bilde under snus under  $90^\circ$  så vil det være resultatene for  $M_y$ .

For  $M_{xy}$  vil maksimum verdien være 20 kNm og minimumsverdien er på -20 kNm. Dette vil være utgangspunktverdiene for de forskjellige beregningsmetodene.



**Bilde 5 – Resultater i FEM-Design**

De dimensjonerende kreftene i programmet blir da 43 kNm i bunnet, både i x- og y-retning. For topplagene blir det 92 kNm. Det er disse kreftene det armeres for. Disse resultatene stemmer og overens med tallene beregnet av Python programmet som representerer FEM-Design. Ved beregning av armering i bunnet blir den nødvendige armeringsmengden under minimumsarmering. Dette medfører da at FEM-Design krever nødvendig armering for bunnet i x-retning blir 459 mm<sup>2</sup>, mens Python programmet gir 457 mm<sup>2</sup>. For topplaget blir FEM-Design resultatene for nødvendig armering i bunnet 442 mm<sup>2</sup> og koden gir 441 mm<sup>2</sup>. For topplaget blir nødvendig armering i FEM-Design 847 mm<sup>2</sup> og koden gir 833 mm<sup>2</sup>. Fra nå av blir kun resultatene i koden presentert, men man kan se her at koden gir et riktig bilde av resultatene i FEM-Design. Programmets automatiske armeringsfunksjon armerer med god margin fra den nødvendige mengden og armerer med 524 mm<sup>2</sup>/m i bunnet og 1026 mm<sup>2</sup>/m.

Det som er en liten utfordring med dette eksempelet er som nevnt tidligere at den avanserte sandwichmodell koden takler dårlig at begge torsjonsmomenter settes lik null. I punktet som FEM-Design armerer for i dette eksempelet er alle verdiene utenom  $M_x$  lik null. Derfor settes  $M_{xy}$  og  $N_{xy}$  til 0.0000001 i den avanserte sandwichmodell koden under denne utregningen. I standard sandwichmetode er lagtykkelsene satt til 40 mm som er  $2 \times c_{nom} = 2 \times 20$  mm.

**Tabell 14 – Resultat 1**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$N_x$	$N_y$	$N_{xy}$
	300	120	110	-92	0	0	0	0	0
<b>Resultater</b>									
Resultater	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		800	0	0	0
Std. Sand.	-	-	-	-		814	0	0	0
Ava. Sand.	366	0	0	0		842	0	0	0

**Tabell 15 – Resultat 2**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$N_x$	$N_y$	$N_{xy}$
	300	120	110	0	-92	0	0	0	0
<b>Resultater</b>									
Resultater	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		0	0	832	0
Std. Sand.	-	-	-	-		0	0	882	0
Ava. Sand.	0	0	382	0		0	0	880	0

For  $M_x$  momentet gir FEM-Design et resultat for nødvendig armeringsmengde på 800 mm<sup>2</sup>. Dette er 98% av standard sandwichmodellen som bare gir 14 mm<sup>2</sup> mer, eller 2% mer. Den avanserte sandwichmodellen gir 842 mm<sup>2</sup> som er 42 mm<sup>2</sup> større enn FEM-Design. Dette er 5% mer i nødvendig armeringsmengde. Det er nevnt tidligere at det må føres en viss skepsis rundt hvor vidt det er ment at koden for den avanserte sandwichmodellen skal brukes på

denne måten, hvor alle disse verdiene er satt til null og tilnærmet null. Det kan som sagt være at den er skrevet på en slik måte at disse tilfellene ikke er aktuelle. Den gir likevel veldig like verdier som standard sandwichmetode vil gjøre. I resultatene for y-retningen er de overraskende like. Her gir FEM-Design en nødvendig armeringsmengde på  $832 \text{ mm}^2$ . Standard sandwich metode gir nødvendig armeringsmengde på  $882 \text{ mm}^2$  som er bare  $2 \text{ mm}^2$  mer enn resultatene fra den avanserte sandwichmetoden. Sandwichmetodene gir altså tilnærmet 6% mer armering.

De første inntrykkene er at standard sandwichmodellen er veldig avhengig av hva lagtykkelsen settes til å være. Lagtykkelsene som er brukt i Tabell 15 for standard sandwichmodellen er på 60 mm. Dette er fordi her var  $c_{nom}$  endret til 30 mm og  $2 \times c_{nom}$  settes som lagtykkelse. Om man beholder lagtykkelsen på 40 mm ville man også her ha fått  $814 \text{ mm}^2$  som er samme som resultatet for momentet i x-retningen. Svaret varierer derfor veldig med hva som blir satt til å være lagtykkelsen. Med den avanserte sandwichmetoden ble lagtykkelsen for topplaget tilnærmet null for både  $M_x$  og  $M_y$ . Dette er fordi tykkelsen i topplaget regnes ut i fra  $N_{ct}$  som her blir veldig liten, siden den regnes ut i fra  $N_{xy}$  og  $M_{xy}$ .  $N_{cb}$  regnes også ut i fra disse verdiene, men her adderes verdiene og det blir en større verdi. Dette gir lagtykkelsene 35 mm for x-retning og 36.5 mm for y-retningen. Dette er en av grunnene til at man skal møte disse resultatene med en viss skepsis som nevnt tidligere. Siden torsjonsmomentene er tilnærmet null så blir lagtykkelsene litt spesielle. Koden beregner at det trengs armering i topplaget, men den setter likevel lagtykkelsen for topplaget tilnærmet null, for så å sette bunnlaget til 35 mm. Dette ringer noen alarmbjeller og høres ikke helt riktig ut. Armeringsmengden virker å bli beregnet til fornuftige verdier og er veldig sammenlignbar med de andre metodene. Det virker likevel som om koden sliter noe med lagtykkelsene og at nullverdier og justering av nullverdier bryter noe med kodens oppbygging.

Sandwichmetodene gir større verdier for nødvendig armeringsmengde enn det som beregnes i FEM-Design. Den automatiske armeringen i FEM-Design vil uansett være innenfor disse verdiene da den armerer med  $1026 \text{ mm}^2$  i begge retninger. I dette eksempelet er det veldig mange nullverdier og hvordan torsjonsmomentet inkorporeres kommer dårlig fram. Derfor vil de neste testene være eksempler der både  $M_x$ ,  $M_y$  og  $M_{xy}$  brukes i utregningene.

## 12.2 Test av større momenter med torsjonskraft

I de neste eksemplene vil beregningsmetodene testes for momenter i x- og y-retning kombinert med en torsjonskraft. Størrelsen for kreftene vil variere. Det kan være interessant å se hvordan armeringsmengden påvirkes av store og små krefter generelt, men kanskje mest av alt store og små torsjonsmomenter med uendrede momenter. Da ser man tydeligere effekten av selve torsjonsmomentet. I eksemplene vil fastheten fortsette å være B35 og armeringsstålet av kvalitet B500C. Armeringsjern vil være av diameter 20 mm og  $c_{nom}$  vil være 20 mm. Lagtykkelsen i standard sandwichmodellen kan settes lik lagtykkelsene som beregnes i den avanserte sandwichmetoden, eller den kan settes til  $2 \times c_{nom}$ . Hva som blir mest riktig kan diskuteres. På den ene siden vil input være likest om man setter lagtykkelsen lik den som blir beregnet i den avanserte sandwichmodellen. På den andre siden så har ikke standard sandwichmodell «luksusen» å vite den optimale lagtykkelsen som den avanserte modellen beregner. Hvilken lagtykkelse som blir brukt oppgis derfor under drøfting av resultatene, men i utgangspunktet vil den bli satt til  $2 \times c_{nom}$ . Høyder og krefter oppgis i tabellen.

**Tabell 16 – Resultat 3**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_X$	$M_Y$	$M_{XY}$	$N_X$	$N_Y$	$N_{XY}$
	800	360	360	-256	-355	125	0	0	0
<b>Resultater</b>									
Resultater	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		1161	0	1471	0
Std. Sand.	-	-	-	-		1153	0	1453	0
Ava. Sand.	512	0	645	0		1180	0	1486	0

Tabell 16 viser her resultatene fra den tredje testen hvor ingen av momentkreftene er null. Tverrsnittet er noe økt til en høyde på 800 mm. Her er  $c_{nom}$  20 mm og armeringsjern har diameter på 20 mm, som nevnt tidligere vil dette være tilfellet for alle testene med mindre noe annet blir nevnt. Det er derfor  $h_{xt} = 360$  mm da dette er avstanden fra midten av dekket til armeringslaget i x-retning. Her er alle verdiene  $h_{xt}$ ,  $h_{xb}$ ,  $h_{yt}$  og  $h_{yb}$  satt til det samme for å enkelt kunne sammenligne de tre metodene. I realiteten vil ikke armeringen i x- og y-retning

ligge i samme høyde. Tykkelsene i standard sandwichmodellen er satt til 40 mm som er 2 x  $c_{nom}$ .

FEM-Design sin beregningsmetode gir her en nødvendig armeringsmengde på 1161 mm<sup>2</sup> i topplaget i x-retning og 1471 mm<sup>2</sup> i y-retningen. Dette er tilnærmet 1 % mer enn standard sandwichmodellen som gir 8 mm<sup>2</sup> mindre i x-retningen og 18 mm<sup>2</sup> mindre i y-retningen. Den avanserte sandwichmodellen gir 19 mm<sup>2</sup> mer armering i x-retning og 15 mm<sup>2</sup> mer i y-retningen. Dette er tilnærmet 2% mer i x-retning og 1 % mer i y-retningen. Det er med andre ord ikke veldig store forskjeller på de forskjellige metodene. Den største forskjellen kommer fra lagtykkelsene som finnes fra den avanserte sandwichmodellen. Den avanserte sandwichmodellen beregner  $a_t = 31$  mm, der  $a_t$  er tykkelse topplag og  $a_b = 32$  mm for bunnlaget. I standard sandwichmodellen er begge lagene satt til 40 mm, men her feiler bunnlaget testen av lagtykkelsen. Ved sjekken av trykkapasiteten i hovedtrykkraftens retning (som vist i utregningene tidligere) så finner den at  $\sigma_c = 20.9$  MPa >  $f_{cd} = 19.8$  MPa. Dette krever da at lagtykkelsen økes til 43 mm. Dette er 11 mm mer enn hva den avanserte sandwich modellen setter lagtykkelsen for bunnlaget til. En økning av lagtykkelsen i bunnlaget vil ikke påvirke armeringen i topplaget nevneverdig. Det er også viktig å huske at hvis denne koden for standard sandwichmodellen skal testes og sammenlignes med den avanserte, så vil resultatene være byttet om. For øvrig hvis lagtykkelsene i standard modellen settes lik resultatene fra den avanserte modellen på 31 mm og 32 mm så vil armeringsmengden bli mindre og den vil selvfølgelig være enda lengre unna å få godkjent lagtykkelsen for trykkraften. Endringen i armeringsmengde blir relativt liten og er ikke veldig interessant. Det som er interessant fra resultatet er at lagtykkelsen ikke godkjennes i standardmodellen men i den avanserte.

**Tabell 17 – Resultat 4**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b><math>h_{xt}=h_{xb}</math></b>	<b><math>h_{yt}=h_{yb}</math></b>	<b><math>M_X</math></b>	<b><math>M_Y</math></b>	<b><math>M_{XY}</math></b>	<b><math>N_X</math></b>	<b><math>N_Y</math></b>	<b><math>N_{XY}</math></b>
	1200	560	560	524	465	252	0	0	0
<b>Resultater</b>									
	<b><math>N_{sxt}</math></b>	<b><math>N_{sxb}</math></b>	<b><math>N_{syt}</math></b>	<b><math>N_{syb}</math></b>		<b><math>A_{sxt}</math></b>	<b><math>A_{sxb}</math></b>	<b><math>A_{syt}</math></b>	<b><math>A_{syb}</math></b>
FEM-Desi.	-	-	-	-		0	1553	0	1433
Std. Sand.	-	-	-	-		0	1539	0	1422
Ava. Sand.	0	679	0	628		0	1565	0	1446



I dette eksempelet er høyden igjen økt og momentene er økt, ellers er verdiene de samme. Høyden her er 1200 mm, og momentene er økt slik at her er  $M_x$  større enn  $M_y$  og alle verdiene er positive. Utrengninger med FEM-Design og Wood-Armer metoden gir her nødvendig armeringsmengde 1553 mm<sup>2</sup> i x-retning for bunnlaget og 1433 mm<sup>2</sup> for y-retningen. Dette er tilnærmet 1% mer enn standard sandwichmodellen som gir 14 mm<sup>2</sup> mindre i x-retning og 11 mm<sup>2</sup> mindre i y-retningen. Den avanserte modellen gir 12 mm<sup>2</sup> mer enn FEM-Design i x-retning og 13 mm<sup>2</sup> mer i y-retningen. Dette utgjør også tilnærmet lik 1%. Igjen er det noe uenigheter rundt lagtykkelsene. For standardmodellen feiler lagtykkelsen nok en gang og  $\sigma_c > \sigma_{Rd,Max}$ . Igjen krever disse tallene at lagtykkelsen økes til 43 mm for bunnlaget. Dette er veldig likt den avanserte modellen som gir at tykkelsen for bunnlaget bør være 41 mm (41.1447 som kan også konservativt rundes oppover til 42 mm) og topplagets tykkelse settes til 35 mm. Lagtykkelsen er økt med tanke på trykkfastheten i standard sandwichmodellen. Selv om det er noe uenighet her er de minimale og om lagtykkelsene fra den avanserte modellen settes inn i standard modellen så er det snakk om mindre enn 2 mm i bunnlaget unna å godkjennes kriteriet den feiler. Resultatene her er veldig like.

**Tabell 18 – Resultat 5**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$N_x$	$N_y$	$N_{xy}$
	1200	560	560	-1024	-868	-655	0	0	0
<b>Resultater</b>	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		3432	0	3102	0
Std. Sand.	-	-	-	-		3329	0	3020	0
Ava. Sand.	1500	0	1361	0		3457	0	3136	0

Som man kan se i Tabell 18 så er kun moment- og torsjonskrefter økt, ellers er verdiene uendret. En kraftig økning av momenter gir også en kraftig økning i armeringen. FEM-Design metoden gir nødvendig armeringsmengde 3432 mm<sup>2</sup> i topplaget for x-retningen. For y-

retningen blir armeringsmengden  $3102 \text{ mm}^2$ . Standard sandwichmetode gir  $103 \text{ mm}^2$  mindre i x-retning og  $82 \text{ mm}^2$  mindre i y-retning. Dette vil si at den gir tilnærmet 3 % mindre i armeringsmengde. For den avanserte sandwichmodellen så er det en økning på  $25 \text{ mm}^2$  fra FEM-Design i x-retning og  $34 \text{ mm}^2$  økning for armeringen i y-retning. Dette utgjør tilnærmet 1% mer armering enn FEM-Design metoden. Her er forslått lagtykkelse fra den avanserte metoden på hele 113.5 mm for topplaget og 82 mm for bunnlaget. Dette mye høyere enn 2 x cnom som er brukt i standard metoden, noe som også bekreftes av lagtykkelsen ikke blir godkjent i utregningene. Det vil derfor være av interesse å øke lagtykkelsene å se resultatene av dette. Resultatene økes da til 114 mm for topplaget og 82 mm for bunnlaget.

**Tabell 19 – Nye resultater for resultat 5**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_X$	$M_Y$	$M_{XY}$	$N_X$	$N_Y$	$N_{XY}$
	1200	560	560	-1024	-868	-655	0	0	0
<b>Resultater</b>									
Resultater	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		3432	0	3102	0
Std. Sand.	-	-	-	-		3504	0	3179	0
Ava. Sand.	1500	0	1361	0		3457	0	3136	0

En økning av lagtykkelsene for standard metoden gir altså mye større resultater. Økningen er på  $175 \text{ mm}^2$  for x-retningen og  $159 \text{ mm}^2$  for y-retningen. Lagtykkelsene ble økt fra 40 mm til 114 mm og 82 mm. Dette var likevel ikke nok for å bestå test av trykkfasthet og fasthet. Tykkelsen må da økes til 118 mm for topplaget og 97 mm for bunnlaget. Dette vil gi en ny armeringsmengde på  $3535 \text{ mm}^2$  for x-retningen og  $3206 \text{ mm}^2$  for y-retningen. Dette er tilnærmet 2% mer i armeringsmengde enn den avanserte sandwichmetoden, men det er en 6% økning fra sine opprinnelige verdier. Det er nevnt i boken Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010) at den enkle sandwichmetoden ofte kan gi veldig tykke lag sammenlignet med den avanserte metoden. Lagtykkelsene er også her veldig knyttet til armeringsmengden, noe som gjør at utgangspunktet med lagtykkelse på 40 mm ikke er aktuelt.

**Tabell 20 – Resultat 6**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_X$	$M_Y$	$M_{XY}$	$N_X$	$N_Y$	$N_{XY}$
	1200	560	560	-1024	-868	-1310	0	0	0
<b>Resultater</b>									
Resultater	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		4846	566	4505	878
Std. Sand.	-	-	-	-		5766	0	5381	0
Ava. Sand.	2321	492	2182	632		5348	1135	5027	1455

I dette eksempelet er den eneste endringen at torsjonsmomentet er økt fra -655 kNm til -1310 kNm. Her er lagtykkelsen ikke satt til  $2 \times c_{nom}$ , men 269 mm som er hentet fra resultatene av den avanserte sandwichmetoden. Dette er fordi 40 mm ville vært alt for lite og det er ikke aktuelt for dette eksempelet. Kraftene som er valgt i dette eksempelet er for å se forskjellen i tallene ved økt torsjonskraft og uendrede momentkrefter. Siden torsjonsmomentet her er større enn både momentet i x-retning og momentet i y-retning så gir metodene litt forskjellige resultater. For den avanserte metoden blir det strekk i alle lag og retninger. Det samme gjelder FEM-Design og Wood-Armer metoden, men armeringsmengden er noe mindre. For standard sandwichmetoden blir det ikke behov for armering i bunnlaget. Dette er det første eksempelet hvor det er forskjeller i hvor armeringen legges.

For bunnlaget i standard sandwichmetode blir  $N_x = -1100$  kN,  $N_y = -932$  kN og  $N_{xy} = -1407$  kN. Når kreftene i armeringen beregnes blir  $F_{sx} = N_x + N_{xy}$  og  $F_{sy} = N_y + N_{xy}$ . Det kan her virke som det er en fortegnsfeil, da om man plusser på denne torsjonskraften så blir resultatene mer like den avanserte metoden og FEM-Design metoden. Da blir  $A_{sxb} = 707$  mm<sup>2</sup> og  $A_{syb} = 1092$  mm<sup>2</sup>. Feilen virker å være at det egentlig skal være absoluttverdien til torsjonsmomentet som skal plusses på. Dette har vist seg å være tilfellet i flere eksempler som er testet. Om dette ikke er tilfellet og så vil standard sandwichmetoden lede til flere rare resultater som avviker veldig fra de to andre beregningsmetodene. I resultat 3 for eksempel ville nødvendig armeringsmengde blitt 396 mm<sup>2</sup> og 696 mm<sup>2</sup> istedenfor 1153 mm<sup>2</sup> og 1453 mm<sup>2</sup> (ble oppdaget senere da torsjonsmomentet ble satt med feil fortegn). Dette er altså langt under resultatene for de to andre metodene. Det gir lite mening at metodene skal gi så like

resultater på så mange forskjellige eksempler, for så å gi helt andre resultater. Spesielt når det viser seg at en så enkel korrigerings gir like resultater igjen. Dette er ikke ulikt slik torsjonsmomentet plusses på i standard metoden som er brukt i Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010). Formlene ser litt annerledes ut, men det er absoluttverdien av torsjonsmomentet som plusses på (se ligning 52 til ligning 55 i avsnitt om Plates and FEM). Det vil derfor antas at det er meningen at det er absoluttverdien til torsjonsmomentet som skal plusses på ved beregning av kraften i armeringsjernet,  $F_{sx/y}$ . Dette har blitt testet i mange eksempler og gir langt mer fornuftige resultater. Om dette tiltaket ikke hadde blitt gjort ville standard sandwichmetode til tider gitt store avvik i resultatene.

For FEM-Design metoden økes  $A_{sxt}$  med 29% og  $A_{sxb}$  økes med 31%. Den totale armeringsmengden økes med tilnærmet 40%. For den avanserte metoden økes  $A_{sxt}$  med 35% og  $A_{syt}$  økes med tilnærmet 38%. Den totale armeringsmengden økes med nesten 50%, det samme gjør standard sandwichmetode med de nye verdiene for armering i bunnlaget. Dette indikerer at torsjonsmomentet påvirker i armeringsmengden i mindre grad ved bruken av FEM-Design metoden og Wood-Armer ligningene som brukes der. For den avanserte sandwichmetoden blir den totale armeringsmengden 17% større enn ved FEM-Design metoden. Den øker også 10% mer individuelt ved samme økning av torsjonsmomentet. Resultatene indikerer da at denne metoden FEM-Design bruker armerer mindre og mer konservativt, noe som også ble påstått i testene av metodene i Plates and FEM. Med konservativt menes det at en større armeringsmengde kunne vært tatt i bruk og at tverrsnittet likevel ville vært underarmert.

**Tabell 21 – Resultat 7**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_X$	$M_Y$	$M_{XY}$	$N_X$	$N_Y$	$N_{XY}$
	1500	660	660	1628	1705	624	0	0	0
<b>Resultater</b>									
	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		0	3779	0	3913
Std. Sand.	-	-	-	-		0	3666	0	3791
Ava. Sand.	0	1650	0	1706		0	3802	0	3932

I dette eksempelet så er det gjort en del endringer i geometrien og kreftene. Høyden er økt til 1500 mm og  $c_{nom}$  er økt til 70mm. Kreftene er justert slik at  $M_{xy}$  kan økes drastisk uten å overstige  $M_x$  og  $M_y$ . Dette gir resultater som er lettere å sammenligne når  $M_{xy}$  økes og gir et mer ryddig eksempel, samtidig som det kan brukes til å sammenlignes med de to foregående resultatene. Lagtykkelsen for standard sandwichmetode er satt etter resultatene av den avanserte metoden og er på 84 mm for bunnlaget og 90 for topplaget. Nødvendig armeringsmengde for FEM-Design metoden er på 3779 mm<sup>2</sup> for bunnlaget i x-retning og 3913 mm<sup>2</sup> for y-retningen. Dette er veldig like resultatene fra den avanserte metoden, forskjellen er på under 1%. For standard metoden så blir resultatene noe mindre. Nødvendig armeringsmengde blir tilnærmet 4% mindre enn de to andre metodene. Den godkjenner heller ikke bunnlagets tykkelse og den bør økes til nærmere topplagets tykkelse. Det som er mest interessant er uansett å se økningen av armeringsmengde med tanke på torsjonsmomentet. Derfor dobles torsjonsmomentet i neste eksempel så det får samme økning som mellom resultat 5 og 6.

**Tabell 22 – Resultat 8**

Data	h	$h_{xt}=h_{xb}$	$h_{yt}=h_{yb}$	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$N_x$	$N_y$	$N_{xy}$
	1500	660	660	1628	1705	1248	0	0	0
Resultater	$N_{sxt}$	$N_{sxb}$	$N_{syt}$	$N_{syb}$		$A_{sxt}$	$A_{sxb}$	$A_{syt}$	$A_{syb}$
FEM-Desi.	-	-	-	-		0	4875	0	5012
Std. Sand.	-	-	-	-		0	4908	0	5040
Ava. Sand.	0	2134	0	2192		0	4918	0	5050

I dette eksempelet er torsjonsmomentet dobbelt så stort som i forrige. Lagtykkelsen for standard sandwich metode er igjen justert etter den avanserte metoden og satt til 125 mm for topplaget og 180 mm for bunnlaget. Dette gir veldig like armeringsmengder mellom den avanserte metoden og standard metoden. Kravene til lagtykkelse er noen millimeter større for standard metoden enn hva som er beregnet av den avanserte, men ikke nevneverdige forskjeller. Som man kan se fra resultatene gir de tre forskjellige metodene ganske like resultater igjen. Den totale armeringsmengden for FEM-Design metoden har økt med 22%.

For standard sandwichmetoden har den økt med 25% og for den avanserte metoden har den økt med tilnærmet 22%. Her er resultatene mye likere enn ved resultat 5 og 6. Der var økningen betydelig mindre for FEM-Design metoden og det samme gjaldt armeringsmengden. Momentene har motsatt fortegn i dette eksempelet og det ble her ikke et nytt armeringstilfellet som det ble i det forrige eksempelet. Dette kan ha medvirket til den store økningen fra armeringsmengden i resultat 5 til resultat 6. Dette betyr ikke at det ene resultatet er mer gyldig enn det andre, men at økningen er avhengig av armeringstilfellet og hvilke krefter som påvirker elementet.

**Tabell 23 – Resultat 9**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	1500	660	660	0	0	250	0	0	0
<b>Resultater</b>									
	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
FEM-Desi.	-	-	-	-		407	407	407	407
Std. Sand.	-	-	-	-		394	394	394	394
Ava. Sand.	170	170	170	170		393	393	393	393

Her er elementet kun utsatt for ren torsjonskraft. Lagtykkelsen er satt til 40 mm for standard sandwichmetode. Den avanserte metoden beregner lagtykkelsene til 33 mm. Overraskende nok er det her FEM-Design metoden som gir størst nødvendig armeringsmengde.

**Tabell 24 – Resultat 10**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	1500	660	660	0	0	500	0	0	0
<b>Resultater</b>									
	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
FEM-Desi.	-	-	-	-		816	816	816	816
Std. Sand.	-	-	-	-		804	804	804	804
Ava. Sand.	349	349	349	349		804	804	804	804

Her er torsjonsmomentet dobbelt så stort. Igjen så er det FEM-Design metoden som gir størst krav til armeringsmengden. Det er litt overraskende da det var vanligvis motsatt i resultatene presentert i Plates and FEM boken (Blaauwendraad, 2010). Øker torsjonsmomentet en tredje gang og endrer geometrien noe.

**Tabell 25 – Resultat 11**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	1200	550	530	0	0	1500	0	0	0
<b>Resultater</b>									
<b>Resultater</b>	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
FEM-Desi.	-	-	-	-		3081	3081	3139	3139
Std. Sand.	-	-	-	-		3965	3965	3965	3965
Ava. Sand.	1722	1722	1722	1722		3968	3968	3968	3968

I dette eksempelet er geometrien endret. Høyden er satt til 1200 mm, c<sub>nom</sub> er satt til 30 mm og diameteren til armeringsjern er satt til 20 mm. I utregningene for den avanserte sandwichmodellen så er avstanden fra midten av elementet til armeringen i x-retning 550 mm og avstanden til armeringen i y-retningen er 530 mm. For FEM-Design metoden er derfor c<sub>nom</sub> satt til 30 mm i x-retningen og 50 mm i y-retningen. Torsjonsmomentet er økt kraftig til 1500 kNm.

Dette eksempelet demonstreres noe av kritikken mot «Normal moment method» eksempelet i Plates and FEM boken (Blaauwendraad, 2010). Den kritiseres for å bryte med likevekts kriteriene da den gir ulike mengder armering i hver retning, selv om elementet er utsatt for ren torsjonskraft. For FEM-Design metoden her så er det tidligere ikke tatt hensyn til at armeringen i x-retning og y-retning ikke kan ligge i samme høyde. C<sub>nom</sub> er hele tiden satt til det samme for begge retninger. I dette eksempelet prøves det å ta hensyn til dette med å sette c<sub>nom</sub> til 30 mm i x-retningen og 50 mm i y-retningen. Dette gir da ulik armeringsmengde i de to retningene, som igjen vil bryte med teoretiske krav til likevekt. FEM-Design metoden gir også en mye mindre armeringsmengde enn de to sandwichmetodene. Den avanserte metoden

beregner lagtykkelsen til 329 mm og den ble så satt til 330 mm for standard sandwichmetode. Dette gir da nesten helt like resultater i armeringsmengde. Standard metoden krever at lagtykkelsen økes noe og bør økes til i underkant av 350 mm. Dette ville gitt nærmere 4060 mm<sup>2</sup> i armeringsmengde.

Disse resultatene blir dermed veldig annerledes tidligere resultater fra Tabell 23 og Tabell 24. Tidligere resultater ga veldig like verdier for de forskjellige metodene, både for økningen og den totale mengden. Der ga også FEM-Design metoden den største armeringsmengden. I dette eksempelet ga sandwichmetodene hele 22% større Armeringsmengder og dette utgjør nesten 1000 mm<sup>2</sup>. Dette er så drastiske endringer så torsjonsmomentet senkes igjen.

**Tabell 26 – Resultat 12**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	1200	550	530	0	0	500	0	0	0
<b>Resultater</b>									
	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
FEM-Desi.	-	-	-	-		1003	1003	1021	1021
Std. Sand.	-	-	-	-		1036	1036	1036	1036
Ava. Sand.	449	449	449	449		1034	1034	1034	1034

Her er torsjonsmomentet senket til 500 kNm igjen, men geometrien er beholdt. Her er det igjen kun 3% forskjell fra FEM-Design metoden. Dette tyder på at forskjellene øker og er avhengig av store torsjonsmomenter. For å teste dette så senkes momentet igjen, men geometrien endres også til et mindre tverrsnitt



**Tabell 27 – Resultat 13**

<b>Data</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>xt</sub>=h<sub>xb</sub></b>	<b>h<sub>yt</sub>=h<sub>yb</sub></b>	<b>M<sub>X</sub></b>	<b>M<sub>Y</sub></b>	<b>M<sub>XY</sub></b>	<b>N<sub>X</sub></b>	<b>N<sub>Y</sub></b>	<b>N<sub>XY</sub></b>
	340	140	140	0	0	145	0	0	0
<b>Resultater</b>									
<b>Resultater</b>	<b>N<sub>sxt</sub></b>	<b>N<sub>sxb</sub></b>	<b>N<sub>syt</sub></b>	<b>N<sub>syb</sub></b>		<b>A<sub>sxt</sub></b>	<b>A<sub>sxb</sub></b>	<b>A<sub>syt</sub></b>	<b>A<sub>syb</sub></b>
FEM-Desi.	-	-	-	-		1109	1109	1109	1109
Std. Sand.	-	-	-	-		1635	1635	1635	1635
Ava. Sand.	709	709	709	709		1633	1633	1633	1633

Her er tverrsnittet og torsjonsmomentet mye mindre. Høyden er senket til 340 mm, c<sub>nom</sub> er 20 mm og diameter for armeringen er 10 mm. Lagtykkelsen for den avanserte sandwichmetoden blir beregnet til 136 mm som er verdiene som blir brukt i utregningen for standard metoden. Dette er noen millimeter under kravene standard metoden setter og krever nærmere 150 mm.  $\sigma_c$  blir ofte rundt 10.4 MPa og kravet er 10.2 MPa. Dette er uansett ikke grunnen til at disse verdiene for dette eksemplet ble valgt. De ble valgt for å vise at selv ved mindre torsjonskrefter kan resultatene bli veldig forskjellige for metodene. Her er torsjonskraften mye mindre, men det er også tverrsnittet. Her blir nødvendig armeringsmengde for FEM-Design metoden 1109 mm<sup>2</sup> sammenlignet med den avanserte sandwichmetoden som gir 1633 mm<sup>2</sup>. Standard sandwichmetode gir tilnærmet det samme og vil bli noe større om lagtykkelsen økes. Forskjellen på resultatene som nevnes er ganske store. Den avanserte metoden gir her hele 32% verdi for kravet til nødvendig armeringsmengde. Sammenlignet med 3% forskjell fra forrige eksempel er dette en ganske så drastisk økning.

## 13 Drøfting av resultater

De første fem eksemplene som er testet gir relativt stabile resultater. Momentene varierer fra i underkant av 100 kNm til i overkant av 1000 kNm. Likevel er forskjellene i resultatene relativt stabile. Armeringsmengden varierer gjerne med rundt 1% og på det meste er den ikke større enn 5%. Sandwichmetodene gir noe større verdier enn FEM-Design metoden, men det er aldri store avvik. Det største avviket kommer i resultat 3 for lagtykkelsene. Her krever standard modellen en lagtykkelse på 43 mm som er 12 mm mer enn den minste tykkelsen den avanserte metoden forslår. Prosentmessig er dette hele 28% som er ganske stor forskjell. Likevel utgjør 12 mm bare 1,5% av den totale høyden til tverrsnittet, så det kan argumenteres for at forskjellene ikke er så store likevel. I de andre eksemplene er også lagtykkelsene relativt like, og vanligvis er det snakk om bare noen millimetre forskjell. Resultatene er relativt stabile i alle eksemplene, det standard modellen gir størst lagtykkelser.

Det er først i Tabell 18 til Tabell 20 forskjellene begynner å vise seg. Her er momentkreftene og geometrien den samme, men torsjonsmomentet økes fra -655 kNm til -1310 kNm. Dette gir så at den totale armeringsmengden ved bruk av FEM-Design metoden økes ved 40%, mens for de to sandwichmetodene økes den ved 50%. Standard sandwichmetode gir her den største armeringsmengden og gir 17% større armeringsmengde enn FEM-Designs metode. Den vil også kreve en økning av lagtykkelse for å godkjenne fasthetskrav som gjør at armeringsmengden vil bli enda større enn den som er oppgitt i tabellen. Her endres også armeringstilfellet, da det går fra å være kun strekkraft i topplaget til strekkrefter i begge lagene. Dette kan ha noe med den store forskjellen å gjøre, eller det kan kun ha med hvordan torsjonsmomentet tas hensyn til. Derfor ble tallene endret i de to neste eksemplene slik at torsjonsmomentet ikke ville overstige de to momentkreftene ved en økning. Her ble økningen og resultatene veldig like i begge testene. Her var forskjellen bare 3% i motsetning til 10% som i de foregående eksemplene. Dette kunne igjen tyde på at de store forskjellene hadde med armeringstilfellet å gjøre.

For å teste virkningen av torsjonskraften ytterligere blir elementet utsatt for ren torsjonskraft. Ikke ulikt testene som blir presentert i boken Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010). Det blir gjort fem forskjellige tester med ren torsjonskraft. De to første testresultatene er relativt like, og overraskende nok gir FEM-Design metoden større verdier enn de to sandwichmetodene. Når torsjonsmomentet økes til 1500 kNm blir resultatene drastisk endret. De to sandwichmetodene gir da mye større resultater og gir en armeringsmengde som er 22% større

enn FEM-Design metoden. Her demonstreres også at FEM-Design metoden bryter med likevektskriterier da armeringsmengden blir ulik i de to retningene selv om elementet er utsatt for rent torsjonsmoment. I det siste eksempelet senkes torsjonsmomentet og geometrien representerer et mindre tverrsnitt. Dette er for å vise at det kan bli store forskjeller i armeringsmengden også med mindre torsjonsmoment. Torsjonsmomentet er på 145 kNm og den totale armeringsmengden beregnet med FEM-Design metoden blir på 4400 mm<sup>2</sup>. For de to andre sandwichmetodene blir den totale armeringsmengden beregnet til 6540 mm<sup>2</sup>. Dette er nesten 50 % mer armering. Dette viser at selv ved mindre torsjonsmomenter kan forskjellene mellom de forskjellige metodene bli veldig store.

Det kan være mange grunner til at forskjellene blir så store, og grunnene vil variere fra eksempel til eksempel. Spesielt for den avanserte sandwichmetoden er armeringsberegningene en lang prosess. Det som er sikkert er at det ikke trenger å være påført et enormt torsjonsmoment for at forskjellene skal bli store, og det trenger heller ikke være et spesielt armeringstilfelle. I det siste eksempelet blir det strekkrefter i begge lag og i x- og y-retning. Torsjonskraften er på 145 kNm og armeringsmengden beregnet av FEM-Design metoden er 1109 mm<sup>2</sup> for begge retninger i begge lag. Allikevel blir forskjellene veldig store og den avanserte metoden gir totalt 6532 mm<sup>2</sup> armering sammenlignet med FEM-Design metodens 4436 mm<sup>2</sup>. Dette tilsvarer 47% mer armering. I starten av utregningene vil den avanserte metoden ikke gi så mye større resultater enn FEM-Design metoden, men når kreftene justeres for krav og lagtykkelser så stiger krefter og armeringsmengde. Den avanserte sandwichmetoden tar hensyn til mange flere faktorer og fordeler krefter på en mer komplisert måte. Det tar rundt 20 iterasjoner før den endelige armeringsmengden blir kalkulert i sistnevnte eksempel. Det er også derfor avvikene blir så store som de blir. Standard sandwichmetode gir resultater som er veldig like den avanserte metoden, men i dette eksempelet har denne metoden blitt justert etter lagtykkelsen gitt av den avanserte modellen. Om lagtykkelsen hadde blitt justert kun etter standard sandwichmodellen ville armeringsmengden blitt noe større enn den avanserte modellen.

Armeringsmengdene for begge sandwichmodellene vil være avhengig av lagtykkelser og høyden av tverrsnittet. For Wood-Armer og FEM-Design metoden regnes armeringsmengder kun med hensyn til høyden til tverrsnittet. Dette er jo fordi sistnevnte metode ikke deler tverrsnittet inn i lag, men det nevnes likevel fordi dette har stor påvirkning på svarene. For standard sandwichmodell vil større lagtykkelse medføre større armeringsmengder. Den avanserte sandwichmodellen beregner lagtykkelsen ved hjelp av flere utregninger og satte

krav, kreftene og armeringsmengden øker vanligvis under denne prosessen. Dette er en av grunnene til at forskjellene blir så store. Inndelingen av lagtykkelser og tanken bak å bruke en slik sandwichmodell er for å få et mer realistisk bilde av virkeligheten og hvordan kreftene fordeles. De ytre lagene tar opp membrankrefter, torsjon- og bøyemomenter, og kjernen tar opp skjærkreftene. Dette skal gi en mer korrekt representasjon av virkeligheten. FEM-Design metoden er en veldig forenklet representasjon av virkeligheten og vil derfor gi et veldig forenklet svar. I utgangspunktet kan resultatene være relativt like de to sandwichmodellene, men etter hvert som de blir justert for lagtykkelser og andre krav så vil avvik i resultater og armeringsmengder kunne øke veldig. Derfor er det ikke bare store torsjonsmomenter eller spesielle armeringstilfeller som påvirker resultatene, men lagtykkelser, høyde og geometrien av tverrsnittet.

FEM-Design metoden og Wood-Armer ligningene er altså en forenklet versjon av virkeligheten og må derfor møtes skepsis. Det er som nevnt tidligere gjort lignende tester i boken *Plates and FEM* (Blaauwendraad, 2010). Der brukes «Normal Moment Yield Criterion» og «Basic Sandwich model» til sammenligning med den avansert sandwichmodellen som representeres av koden til Lourenco (Lourenco, 1993). «Normal Moment Yield Criterion» er ikke ulik det som her kalles FEM-Design metoden og «Basic Sandwich model» er ikke ulik standard sandwichmodellen som brukes her. Førstnevnte baserer seg også på Wood-Armer ligningene, men utenom dette regnes armeringen litt annerledes. «Basic Sandwich model» ligningene ligner på standard modellen som brukes her, men aksialkreftene regnes litt annerledes og det er noen mindre forskjeller. Her advares det mot bruken av Wood-Armer ligningene og «Normal Moment Yield Criterion». Det skrives at metoden bryter med krav til likevekt, uten at det skrives nærmere om dette. Det nevnes også at den ikke tar hensyn til skjærkrefter og den sjekker ikke knusing. Dette kan også sies om FEM-Design metoden. Det vites ikke med sikkerhet om eller hvordan FEM-Design eventuelt takler disse utfordringene, men det kan virke som om dette kan være et rødt flagg.

Om metoden som kalles «Basic Sandwich model» skrives det også at dette er en tilpasning til virkeligheten. Det er antatt at kjernen ikke bidrar til å overføre membrankrefter, som ikke medfører riktighet i praksis. Vilkår for global likevekt er tilfredsstillt, men det er flere vilkår for momentarmene til de forskjellige kreftene som ikke stemmer, noe som leder til at det kan bli store avvik fra virkeligheten ved høye armeringsmengder og store torsjonsmomenter. Ved disse tilfellene vil tykkelsen av lagene ofte stige og standardmodellen blir usikker (Blaauwendraad, 2010). Dette er en påstand som resultatene i denne oppgaven ser ut til å

bekreftede, resultatene motstrider i hvert fall ikke disse påstandene. For mange av testene gir den avanserte sandwichmetoden større armeringsmengder enn standard metoden, men dette er vanligvis ved bruk av samme lagtykkelse. Ofte vil krav og utregninger for standard metoden gi større lagtykkelser og dette vil lede til større armeringsmengde. Spesielt i tilfellene hvor det var snakk om store torsjonsmomenter og armeringsmengder ble krav til lagtykkelse større ved bruk av standard modellen og dette ga igjen store armeringsmengder. Dette viste seg spesielt i testen nevnt tidligere hvor torsjonsmomentet ble doblet og det ble store forskjeller i armeringsmengdene. Hvis lagtykkelsen hadde blitt satt ut i fra standard modellen (den ble bestemt etter resultat fra den avanserte modellen), så ville standard modellen gitt størst armeringsmengde og mye større lagtykkelser.

For den avanserte sandwichmodellen har alle armeringslagene fått et eget plan. Den skal ifølge Lourenco (Lourenco, 1993) og Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010) være basert på konsekvente teorier og antakelser, flere hensyn tas og tykkelsen på lag blir nøye kalkulert. Den skal også «reparere» det som er feil med standard sandwichmodellen. I denne oppgaven er det ikke gjort eksperimenter som resultatene kan sammenlignes med, men det er det gjort i Plates and FEM boken. Der viser det seg at den avanserte metoden gir verdier som er mye nærmere eksperimentet enn de to andre metodene, spesielt ved større torsjonsmomenter. Resultatene er ikke veldig ulike testene og resultatene som er gjort i denne oppgaven, og er nærmere å bekrefte enn å avkreftede påstandene presentert av Lourenco (Lourenco, 1993) og Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010). Det er derfor rimelig å kunne anta at dette er gode sammenligningsgrunnlag for FEM-Design resultatene.

Standard sandwichmetoden som er tatt fra «Compendium of Concrete Structures» (Øverli, u.d.) virker å være en pålitelig beregningsmetode og har gitt fornuftige resultater som er like den avanserte metoden basert på koden til Lourenco (Lourenco, 1993). Det som igjen må nevnes er at det ble gjort en justering hvor det var absoluttverdien av torsjonsmoment som adderes ved beregning av kraften i armeringen og det ble korrigert en fortengsfeil. Dette er utdypet tidligere. Det ble også gjort en del justering av koden til Lourenco (Lourenco, 1993), og disse justeringene er utdypet under gjeldende avsnitt. Under testing viste det seg at det finnes tilfeller hvor koden får feilmeldinger grunnet null i nevner, eller at den går i uendelige løkker og aldri kommer fram til et slutt svar. Det kan spekuleres i at dette er tilfeller som er ansett som uaktuelle i praksis eller at dette er feilmeldinger som er ment å forekomme for å advare om at enkelte verdier ikke er gyldige. Det må likevel nevnes at slike tilfeller kan forekomme og at koden ikke er feilfri. Når det er sagt så fungerer koden for det meste veldig

bra og gir verdier som virker å være fornuftige. Som nevnt tidligere virker resultatene å være nærmere å bekrefte påstandene fra Lourenco (Lourenco, 1993) og Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010), enn å avkrefte eller diskvalifisere sandwichmodellene.

Si at det antas at disse sandwichmodellene vil gi resultater som er nærmere virkeligheten og verdiene man vil få i praksis i sammenligning med et eksperiment av et betongelement. Si at den avanserte metoden legger grunnlaget for det man kan kalle en fasit på verdiene man vil oppnå. Hva kan da sies om resultatene ved bruk av Wood-Armer ligninger og FEM-Design metoden? I mange eksempler er resultatene veldig like og det kunne virke som om forskjellene var små og ubetydelige. Dette er jo avhengig av hvilken skala man vurderer det på, da små forskjeller kan utgjøre store forskjeller over tid og det kan være veldig situasjonsbestemt. Det er likevel eksempler og tilfeller som skiller seg ut der forskjellene blir veldig store. På større prosjekter kan forskjellene være kritiske og avgjørende. I eksemplene som skiller seg ut så vil FEM-Design metoden undervurdere nødvendig armeringsmengde med rundt 10% i et eksempel og over 30% i et annet. Dette er relativt store forskjeller. Dette er resultater som ligner på resultatene i Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010) hvor de tre metodene blir sammenlignet med resultater av et eksperiment (Marti & Leesti, 1987). Her er det påført rent torsjonsmoment og i eksperimentet er betongelementet påført en viss armeringsmengde som resultatene sammenlignes med. Da var den avanserte sandwichmodellen 3% fra armeringsmengden brukt i eksperimentet og «Normal Moment Yield Criterion» var 24% mindre enn armeringsmengden brukt i eksperimentet. Det advares derfor i Plates and FEM å ta i bruk denne «Normal Moment» metoden. Dette virker igjen ikke ulikt resultater og testing av FEM-Design sin bruk av Wood-Armer ligningene.

## 14 Konklusjon

Problemstillingen var «Hvordan beregner utvalgte dataprogrammer armering av betongplater med hensyn på torsjonsmomentet?». Det utvalgte programmet var FEM-Design som er mye brukt i diverse store konsultantselskaper, der det brukes i forskjellig grad. Det kan kun brukes til beregning av kreftene eller til beregning av armeringen i tillegg. Resultatene måtte sammenlignes med andre metoder og metodene som ble valgt var en forenklet og en avansert metode av sandwichmodellen. Manualen til programmet skriver at kalkulasjonen av de dimensjonerende kreftene som brukes i beregning av armering er basert på teori av M. P. Nielsen, Wood-Armer og Dr. Ferenc Nemeth (Anon., u.d.). Det sto også at beregningene av armering var basert på Eurokodene. Etter undersøkning av litteraturen til M.P Nielsen og hans bok (Nielsen, 1964) og diverse litteratur om Wood-Armer ligningene (Autodesk, u.d.) så ble ligningene testet opp mot resultater fra FEM-Design. Det viste seg å gi de samme verdiene i de utvalgte punktene som ble undersøkt og ligningene som ble antatt å være de som er brukt i programmet FEM-Design. Videre ble ligningene som er antatt å være grunnlaget for selve armeringsberegningene testet og antatt riktige. Før de forskjellige beregningsmetodene ble sammenlignet, ble hele denne prosessen igjen sammenlignet med et eksempel kalkulert i FEM-Design, og utregningene ga tilstrekkelig like resultater. Hele denne utregningen er oppgitt under FEM-Design metoden i avsnittet «Sammenligning av beregningsmetoder». Dette avsnittet er på mange måter konklusjonen. Det er slik det er antatt at FEM-Design, som er det utvalgte dataprogrammet, beregner armeringen av betongplater. Det tar utgangspunkt i en forenkling av Wood-Armer ligningene og bruker gitte formler for å beregne nødvendig armeringsmengde og minimumsarmeringen. Dette skal også være vanlig for andre programmer ifølge boken Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010).

Hovedfokuset til oppgaven var på hvordan programmet tar hensyn til torsjonsmomentet. En del av oppgaven vil da naturligvis være å sammenligne resultatene med andre metoder og vurdere resultatene. Inntrykket før oppgaven startet var at torsjonen er tatt hensyn til på en forenklet måte og det kunne bli interessant å vurdere om beregningene og resultatene i FEM-Design var tilstrekkelige. Det ble relativt tidlig klart at Wood-Armer ligningene lå til grunne for disse beregningene. Det ble også relativt tidlig klart fra boken Plates and FEM (Blaauwendraad, 2010) at det beste sammenligningsgrunnlaget ville være den avanserte sandwichmetoden. Etter mye leting ble koden (som beskrev metoden) til Lourenco (Lourenco, 1993) funnet og kjøpt via internett. Koden ble nøye studert, oversatt til et moderne

programmeringsspråk og testet opp mot tall presentert i Lourencos artikkel (Lourenco, 1993). Koden ble så testet over lengre tid før den ble klar til å kunne sammenlignes med andre metoder. De tre metodene som ble sammenlignet var FEM-Design metoden, standard sandwichmodellen (Øverli, u.d.) og den avanserte sandwichmodellen (Lourenco, 1993). Det ble ikke gjort noen eksperimenter i praksis som ville kunne bli brukt som en slags fasit for de tre metodene. Det er derfor vanskelig å si med sikkerhet om FEM-Design tar hensyn til torsjonsmomentet på en tilstrekkelig måte. Lignende metoder blir sammenlignet med et eksperiment gjort i praksis i boken *Plates and FEM* (Blaauwendraad, 2010). Resultatene i boken gjør at bruken av denne «Normal Moment» metoden som også baserer seg på Wood-Armer ligningene blir frarådet. Resultatene i boken er veldig like resultatene i denne oppgaven. Her ga FEM-Design metoden også en mye lavere armeringsmengde enn den avanserte sandwichmodellen. I boken er den avanserte modellen antatt å gi et resultat som er en god representasjon av virkeligheten. Om man går ut i fra at dette er tilfellet tyder resultatene på at FEM-Design metoden bør brukes med stor forsiktighet eller ikke brukes i det hele tatt.

Det kan konkluderes med at FEM-Design med stor sannsynlighet bruker utregningene oppgitt i denne oppgaven. Testing og resultater antyder at det er med stor sannsynlighet Wood-Armer ligningene som brukes til beregning av de dimensjonerende kreftene. Det er også stor sannsynlighet for at ligningene som brukes for å beregne armeringsmengden i det som presenteres som «FEM-Design metoden» enten er helt like, eller tilnærmet like de som brukes av FEM-Design programmet. Om ligningene er en tilstrekkelig representasjon av virkeligheten kan ikke sies med full sikkerhet. Resultatene antyder at dette ikke er tilfellet og at ved flere tilfeller vil beregnet armeringsmengde være mye mindre enn den burde være. Det kan virke som sandwichmodellene gir likere armeringsmengder og er en bedre representasjon av virkeligheten da resultatene ligner på testene utført i *Plates and Fem* (Blaauwendraad, 2010). Det kan ikke sies med sikkerhet at koden til den avanserte sandwichmodellen ville vært et bedre alternativ, da den virker å ha sine utfordringer eller mangler. Standard metoden som undersøkes virker å gi for store lagtykkelser og Armeringsmengder, men er en antatt bedre tilnærming til virkeligheten. Resultatene i oppgaven er ikke ulike resultatene i *Plates and FEM* (Blaauwendraad, 2010) hvor det frarådes bruk av en lignende metode som den FEM-Design bruker. Resultatene tyder på at ligningene FEM-Design baserer seg på bør brukes med en viss skepsis og at måten torsjonsmomentet inkorporeres kan virke utilstrekkelig.



## Figurer

Figur 1 - Platelengder.....	3
Figur 2 – Nedbøyning av platestripe.....	4
Figur 3 – Membran elementer, fra venstre (a) påførte krefter (b) armeringens bidrag (c) betongens bidrag.....	7
Figur 4 – De fire tilfellene for membranarmering.....	10
Figur 5 – Kraftene som virker på dekket.....	14
Figur 6 – Armering av dekker ifølge EN 1992-1-1.....	14
Figur 7 – Kraftene som virker på skallelementet.....	15
Figur 8 – Sandwichmodell, (a) Skallelement (b) Krefter i lag (c) Overføring av skjærkrefter, (Marti 1991).....	16
Figur 9 – Figur av trelags sandwichmodellen.....	20
Figur 10 – Modell av krefter og lagtykkelser for enkel sandwichmetode.....	69
Figur 11 – Figur av momentkrefter for enkel sandwichmetode.....	70
Figur 12 – Modell av lagtykkelser og krefter for den avanserte sandwichmodellen.....	74
Figur 13 – Laginndeling og vinkler for den avanserte sandwichmetoden.....	74

## Tabeller

Tabell 1 – Armering for membran skjær og torsjonsmoment.....	27
Tabell 2 – Armering for et lite torsjonsmoment.....	29
Tabell 3 – Armering for et stort torsjonsmoment.....	30
Tabell 4 – Resultater av FEM-analyse.....	37
Tabell 5 – Test 1.....	57
Tabell 6 – Test 2.....	57
Tabell 7 – Test 3.....	58
Tabell 8 – Test 4.....	59
Tabell 9 – Test 5.....	60
Tabell 10 – Test 6.....	61
Tabell 11 – Test 7.....	62
Tabell 12 – Test 8.....	62
Tabell 13 – Test 9.....	63
Tabell 14 – Resultat 1.....	77
Tabell 15 – Resultat 2.....	77
Tabell 16 – Resultat 3.....	79
Tabell 17 – Resultat 4.....	80
Tabell 18 – Resultat 5.....	81
Tabell 19 – Nye resultater for resultat 5.....	82
Tabell 20 – Resultat 6.....	83

Tabell 21 – Resultat 7.....	84
Tabell 22 – Resultat 8.....	85
Tabell 23 – Resultat 9.....	86
Tabell 24 – Resultat 10.....	86
Tabell 25 – Resultat 11.....	87
Tabell 26 – Resultat 12.....	88
Tabell 27 – Resultat 13.....	89

## Litteraturliste

Anon., u.d. *Strusoft*. [Internett]

Available at: <http://download.strusoft.com/FEM-Design/inst150x/theory.pdf>

Autodesk, u.d. *www.autodesk.com*. [Internett]

Available at: <https://knowledge.autodesk.com/support/robot-structural-analysis-products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2015/ENU/Robot/files/GUID-80FE7814-C14D-4A89-A6DF-68EB9E7E4815-htm.html>

[Funnet 01 Mars 2017].

Blaauwendraad, J., 2010. *Plates and FEM: Suprises and Pitfalls*. s.l.:s.n.

Bulletin, F., 2008. *Practitioner's Guide to Finite Element Modelling of Reinforced Concrete Structures*. s.l.:s.n.

CEB, 1993. *CEB-FIB Model Code*. s.l.:s.n.

CEN, EN, 2005/2009. *Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 2: Bruer*. s.l.:s.n.

Kirscher, U. o. C. M., 1986. *Investigating the behavior of reinforced concrete shell elements*. s.l.:s.n.

Lourenco, P., 1993. *Automatic design of reinforcement in concrete and plates*. s.l.:s.n.

Lourenco, P., 1995. *Solution for the design of reinforced concrete plates and shells*. s.l.:s.n.

Marti, M. & Leesti, P. a. K. W. U., 1987. *Torsion tests on reinforced concrete slabs elements*. s.l.:s.n.

Marti, P., 1991. *Dimensioning and detailing, IABSE Colloquim Report, Vol 62*. s.l.:s.n.

Nielsen, M., 1964. *Limit analysis of reinforced concrete slabs*. s.l.:Acta polytechnica Scandinavica Civil engineering and building construction series.

Nielsen, M., 1998. *Limit Analysis and Concrete Plasticity 2nd ed.* s.l.:CRC Press.

Øverli, J. A., u.d. *Compendium Concrete Structures*. s.l.:NTNU.

Sørensen, S. I., 2013. *Betongkonstruksjoner*. 2. red. s.l.:s.n.

Standard Norge, 2008. *Eurokode 1: Laster på konstruksjoner NS-EN 1991-1-1*. s.l.:Standard Norge.

Strusoft AB, u.d. *www.strusoft.com*. [Internett]

Available at: <http://download.strusoft.com/FEM-Design/inst150x/theory.pdf>

Timoshenko, S., 1940. *Theory of Plates and Shells*. s.l.:s.n.

Wood, R., 1968. *The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments*. s.l.:Garston, Eng. : Building Research Station.

## Vedlegg

Vedlagt ligger de forskjellige kodene som er brukt i resultatdelen av oppgaven. Vedleggene er lagt ved nøyaktig som de er skrevet i Python da dette vil gi den mest riktige representasjonen av kodene. Det er da inkludert linjenummer og riktig oppsett. Dette er vurdert som den beste måten å presentere kodene på og gir mest oversikt.

Den første koden som er lagt ved er FEM-Design metoden eller Wood-Armer metoden. Den baserer seg på Wood-Armer ligningene for å finne dimensjonerende krefter, for så å regne ut armering basert på Eurokoden.

Den andre koden som er lagt ved er standard sandwichmodell metoden som baserer seg på formler og eksempel gitt i Compendium for Concrete Structures (Øverli, u.d.).

Den tredje koden som er lagt ved er den avanserte versjonen av sandwichmodellen. Det er den omskrevne versjonen av Lourencos kode (Lourenco, 1993). Alle kodene er skrevet i Python.

```

1 #Beregning av armering ved hjelp av Wood Armer metoden
2
3 import math
4 pi = math.pi
5
6 #Krefter
7
8 Nx = 0
9 Ny = 0
10 Nxy = 0
11 Mx = 0
12 My = 0
13 Mxy = 145
14
15 #Dekket
16
17 h = 340
18 b = 1000
19
20 #Standard data fra Eurokoder
21
22 Yc = 1.5
23 Ys = 1.15
24 alfac = 0.85
25
26 #Betong input
27
28 fck = 35
29 fctm = 3.2
30 cnom = 20
31 phi = 10
32
33 #Staal data
34
35 fyk = 500
36
37 #Dimensjonerende betong krefter og utregning
38
39 #Nedre momenter
40
41 Mxb = Mx + abs(Mxy)
42 Myb = My + abs(Mxy)
43
44 if(Mx < -abs(Mxy)):
45     print("Spesialtilfelle for Mx Nedre")
46     Mxb = 0
47     #Myb = My + abs(Mxy * Mxy / Mx)
48
49 if(My < -abs(Mxy)):
50     print("Spesialtilfelle for My Nedre")
51     #Mxb = Mx + abs(Mxy * Mxy / Mx)
52     Myb = 0
53
54 #if((Mx < -abs(Mxy)) and (My < -abs(Mxy))):
55     #Mxb = 0
56     #Myb = 0
57
58 #Ovre momenter
59
60 Mxt = Mx - abs(Mxy)
61 Myt = My - abs(Mxy)
62
63 if(Mx > abs(Mxy)):
64     print("Spesialtilfelle for Mx Ovre")
65     Mxt = 0
66     #Myt = My - abs(Mxy * Mxy / Mx)
67
68 if(My > abs(Mxy)):
69     print("Spesialtilfelle for My Ovre")
70     #Mxt = Mx - abs(Mxy * Mxy / Mx)
71     Myt = 0
72

```

```

73 #if((My > abs(Mxy)) and (Mx > abs(Mxy))):
74     #Mxt = 0
75     #Myt = 0
76
77
78 #Aksialkrefter strekk
79
80 Nxs = Nx + abs(Nxy)
81 Nys = Ny + abs(Nxy)
82
83 if(Nx < -abs(Nxy)):
84     print("Spesialtilfelle for Nx strekk")
85     Nxs = 0
86     #Nys = Ny + abs(Nxy * Nxy / Nx)
87
88 if(Ny < -abs(Nxy)):
89     print("Spesialtilfelle for Ny strekk")
90     #Nxs = Nx + abs(Nxy * Nxy / Nx)
91     Nys = 0
92
93 #if((Nx < -abs(Nxy)) and (Ny < -abs(Nxy))):
94     #Nxb = 0
95     #Nyb = 0
96
97 #Aksialkrefter trykk
98
99 Nxt = Nx - abs(Nxy)
100 Nyt = Ny - abs(Nxy)
101
102 if(Nx > abs(Nxy)):
103     print("Spesialtilfelle for Nx trykk")
104     Nxt = 0
105     #Nyt = Ny - abs(Nxy * Nxy / Nx)
106
107 if(Ny > abs(Nxy)):
108     print("Spesialtilfelle for Ny trykk")
109     #Nxt = Nx - abs(Nxy * Nxy / Nx)
110     Nyt = 0
111
112 #if((Ny > abs(Nxy)) and (Nx > abs(Nxy))):
113     #Nxt = 0
114     #Nyt = 0
115
116 print("Nxs", "Nxt", "Nys", "Nyt")
117 print(Nxs, Nxt, Nys, Nyt)
118
119 print("Mxt", "Mxb", "Myt", "Myb")
120 print(Mxt, Mxb, Myt, Myb)
121
122
123
124
125 #Beregning av Armering og minimumsarmering
126
127
128 fcd = (alfac * fck) / Yc
129 fyd = fyk / Ys
130
131 print ("fcd")
132 print (fcd)
133 print ("fyd")
134 print (fyd)
135
136 d = h - cnom - (phi / 2)
137
138 print ("d")
139 print (d)
140
141 Mrd = 0.275 * fcd * b * d ** 2
142
143 print ("Mrd")
144 print (Mrd)

```

```
145
146 zxt = (1 - (0.17 * abs(Mxt * 10 ** 6) / Mrd)) * d
147 zyt = (1 - (0.17 * abs(Myt * 10 ** 6) / Mrd)) * d
148 zxb = (1 - (0.17 * abs(Mxb * 10 ** 6) / Mrd)) * d
149 zyb = (1 - (0.17 * abs(Myb * 10 ** 6) / Mrd)) * d
150
151 #if (z > 0.95 * d):
152     #z = 0.95 * d
153
154 print ("zxt", "zyt", "zxb", "zyb")
155 print (zxt, zyt, zxb, zyb)
156
157 Asxt = abs(Mxt * 10 ** 6) / (zxt * fyd)
158 Asyt = abs(Myt * 10 ** 6) / (zyt * fyd)
159 Asxb = abs(Mxb * 10 ** 6) / (zxb * fyd)
160 Asyb = abs(Myb * 10 ** 6) / (zyb * fyd)
161
162 Asmin = (0.26 * fctm * b * d) / fyk
163
164 print ("Asxt", "Asyt", "Asxb", "Asyb")
165 print (Asxt, Asyt, Asxb, Asyb)
166 print ("As minimum")
167 print (Asmin)
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
```

```

1 #Beregning av armering ved hjelp av enkel/standard sandwich metode
2
3 import math
4 pi = math.pi
5
6 #Krefter
7
8 Nx = 0
9 Ny = 0
10 Nxy = 0
11 Mx = 0
12 My = 0
13 Mxy = -145
14
15 #Dekket
16
17 h = 340
18 b = 1000
19
20 #Standard data fra Eurokoder
21
22 Yc = 1.5
23 Ys = 1.15
24 alfac = 0.85
25
26 #Betong input
27
28 fck = 35
29 fctm = 3.2
30 cnom = 20
31 phi = 10
32
33 #Staal data
34
35 fyk = 500
36
37 #Fasthet
38
39 fcd = (alfac * fck) / Yc
40 fyd = fyk / Ys
41
42 #Lagtykkelser
43
44 at = 150
45 ab = 150
46 yt = (h / 2) - (at / 2)
47 yb = (h / 2) - (ab / 2)
48 z = yt + yb
49 print("z", ("yb"))
50 print(z, yb)
51
52 #Dimensjonering av ytrelag
53
54 #Topplag
55
56 Nxt = Nx * ((z - yt) / z) + Mx / z * 1000
57 Nyt = Ny * ((z - yt) / z) + My / z * 1000
58 Nxyt = Nxy * ((z - yt) / z) - Mxy / z * 1000
59
60 print("Nxt", "Nyt", "Nxyt")
61 print(Nxt, Nyt, Nxyt)
62
63 if (Nxt + Nxyt < 0 and Nyt + Nxyt < 0):
64     print("SJEKK AV FASTHET/LAGTYKKELSE")
65     sigmat1 = (((abs(Nxt) + abs(Nyt)) / 2) + math.sqrt(((abs(Nxt) + abs(Nyt)) / 2)
66     ** 2 + abs(Nxyt) ** 2)) / at
67     print(sigmat1)
68     if (sigmat1 > fcd):
69         print("NB!!!!!! maa oke lagtykkelse")
70     if (sigmat1 < fcd):
71         print("OK")

```

```

72 phil = pi / 4
73 sigmacl = abs(Nxyt) / (at * math.sin(phi1) * math.cos(phi1))
74 print(sigmacl)
75 sigmardmax = 0.6 * (1 - fck / 250) * fcd
76 if (sigmardmax > sigmacl):
77     print("OK")
78 if (sigmardmax < sigmacl):
79     print("IKKE OK")
80
81 #print("sigmardmax", "sigmacl")
82 #print(sigmardmax, sigmacl)
83
84 #Bunnlag
85
86 Nxb = Nx * ((z - yb) / z) - Mx / z * 1000
87 Nyb = Ny * ((z - yb) / z) - My / z * 1000
88 Nxyb = Nxy * ((z - yb) / z) + Mxy / z * 1000
89
90
91 print("Nxb", "Nyb", "Nxyb")
92 print(Nxb, Nyb, Nxyb)
93
94
95 if (Nxb + Nxyb < 0 and Nyb + Nxyb < 0):
96     print("SJEKK AV FASTHET/LAGTYKKELSE")
97     sigmab2 = (((abs(Nxb) + abs(Nyb)) / 2) + math.sqrt(((abs(Nxb) - abs(Nyb)) / 2)
98     ** 2 + abs(Nxyb) ** 2)) / ab
99     if (sigmab2 > fcd):
100         print("NB!!!!!! maa oeke lagtykkelse")
101     if (sigmab2 < fcd):
102         print("OK")
103
104
105 phil = pi / 4
106 sigmacl = abs(Nxyb) / (ab * math.sin(phi1) * math.cos(phi1))
107 print(sigmacl)
108 sigmardmax = 0.6 * (1 - fck / 250) * fcd
109 if (sigmardmax > sigmacl):
110     print("OK")
111 if (sigmardmax < sigmacl):
112     print("IKKE OK")
113
114 Fsxt = Nxt + abs(Nxyt)
115 Fsyb = Nyb + abs(Nxyb)
116 Fsyb = Nyb + abs(Nxyb)
117
118 print("Fsxt", "Fsxb", "Fsyb", "Fsyb")
119 print(Fsxt, Fsxb, Fsyb, Fsyb)
120
121 Asxt = 0
122 Asyt = 0
123 Asxb = 0
124 Asyb = 0
125
126 if(Fsxt > 0):
127     Asxt = Fsxt * 1000 / fyd
128 if(Fsxb > 0):
129     Asxb = Fsxb * 1000 / fyd
130 if(Fsyb > 0):
131     Asyb = Fsyb * 1000 / fyd
132 if(Fsyb > 0):
133     Asyb = Fsyb * 1000 / fyd
134
135 print("Asxt", "Asxb", "Asyt", "Asyb")
136 print(Asxt, Asxb, Asyt, Asyb)
137
138
139

```



```

1 #Avansert Sandwichmetode
2
3 # Data
4
5 # Geometri (m)
6
7 h = 0.34
8 hxt = 0.14
9 hxb = 0.14
10 hyt = 0.14
11 hyb = 0.14
12
13 # Krefter og momenter input (kN/m og kNm/m)
14
15 Nx = 0
16 Ny = 0
17 Nxy = 0
18 Mx = 0
19 My = 0
20 Mxy = 145
21
22 # Material input (MPa)
23
24 fcd = 19.8
25 fsyd = 434
26
27 # Resultater
28
29 # icrush = 0, no concrete crushing
30 # icrush = 1, concrete crushing
31 # Asxt = topp armering parallel til x akse
32 # Asxb = bunn armering parallel til x akse
33 # Asyt = topp armering parallel til y akse
34 # Asyb = bunn armering parallel til y akse
35
36 import math
37 pi = math.pi
38 tolhe = 0.00001 * h
39 tolan = (10 / 180) * pi
40 tomin = tolan
41 tomax = (pi / 2) - tolan
42
43 #Dimensjonerende betongstyrke
44
45 fcd1 = 0.85 * (1 - fcd * 1.5 / 250) * fcd * 1000
46 fcd2 = 0.6 * (1 - fcd * 1.5 / 250) * fcd * 1000
47
48 #Utgangspunt for verdier Armeringstilfeller 1,2 og 3
49
50 oldat = 0
51 oldab = 0
52 Nsxt = 0
53 Nsyt = 0
54 Nsxb = 0
55 Nsyb = 0
56 icrush = 0
57 syklus = 0
58 syklus2 = 0
59 #syklus legges til for aa erstatte goto funksjonen og for å kunne bryte ut av loop
naar vi vil det
60 arml = 0
61 #arml brukes for aa kunne erstatte en goto funksjon paa gitte punkter i koden
62
63 # Antatte verdier
64
65 at = 0.2 * h
66 ab = at
67 hc = h - (ab + at) / 2
68 Ncxyt = ((h - ab) * Nxy - 2 * Mxy) / 2 / hc
69 Ncxyb = ((h - at) * Nxy + 2 * Mxy) / 2 / hc
70 if (Ncxyt == 0):
71     Ncxyt = 1e-7

```

```

72  if (Ncxyb == 0):
73      Ncxyb = 1e-7
74
75  tetat = pi / 4 * abs(Ncxyt) / Ncxyt
76  tetab = pi / 4 * abs(Ncxyb) / Ncxyb
77
78
79  while True:
80      #1100 Start av beregninger, skal aldri lengre tilbake enn hit
81
82      Nct1 = 0
83      Ncb1 = 0
84      arml = 0
85      #nullstiller enkelte verdier
86
87      #To lag i strekk, iterativ syklus
88
89      hc = h - (ab + at) / 2
90      if (tetat != 0):
91          Nct = (2 * Mxy - (h - ab) * Nxy) / hc / math.sin(2*tetat)
92      if (tetab != 0):
93          Ncb = (2 * Mxy + (h - at) * Nxy) / hc / -math.sin(2*tetab)
94
95
96      # if ((abs(tetat) > tomin) & (abs(tetab) < tomax) & (abs(tetab) > tomin) &
97      (abs(tetab) < tomax));
98
99      #Spesial tilfeller
100
101      if ((abs(tetat) <= tomin) and (abs(tetab) <= tomin)):
102          tetat = 0
103          tetab = 0
104          Ncb = (My + 0.5 * (h - at) * Ny) / hc
105          Nct = Ny - Ncb
106
107      if ((abs(tetat) <= tomin) and (abs(tetab) >= tomax)):
108          tetat = 0
109          tetab = pi / 2
110          Ncb = (Mx + Nx * hxt) / (0.5 * (h - ab) + hxt)
111          Nct = (My - Ny * hyb) / (-0.5 * (h - at) - hyb)
112
113      if ((abs(tetat) >= tomax) and (abs(tetab) >= tomax)):
114          tetat = pi / 2
115          tetab = pi / 2
116          Ncb = (Mx + 0.5 * (h - at) * Nx) / hc
117          Nct = Nx - Ncb
118
119      if ((abs(tetat) >= tomax) and (abs(tetab) <= tomin)):
120          tetat = pi / 2
121          tetab = 0
122          Ncb = (My + Ny * hyt) / (0.5 * (h - ab) + hyt)
123          Nct = (Mx - Nx * hxb) / (-0.5 * (h - at) - hxb)
124
125      if (abs(tetat) >= tomax):
126          tetat = pi / 2
127          Nct = (Mx - Nx * hxb - (0.5 * (h - ab) - hxb) * Ncb * math.sin(tetab)**2) /
128              (-0.5 * (h - at) - hxb)
129
130      if (abs(tetat) <= tomin):
131          tetat = 0
132          Nct = (My - Ny * hyb - (0.5 * (h - ab) - hyb) * Ncb * math.cos(tetab)**2) /
133              (-0.5 * (h - at) - hyb)
134
135      if (abs(tetab) >= tomax):
136          tetab = pi / 2
137          Ncb = (Mx + Nx * hxt - (-0.5 * (h - at) + hxt) * Nct * math.sin(tetat)**2) /
138              (0.5 * (h - ab) + hxt)
139
140      if (abs(tetab) <= tomin):
141          tetab = 0
142          Ncb = (My + Ny * hyt - (-0.5 * (h - at) + hyt) * Nct * math.cos(tetat)**2) /
143              (0.5 * (h - ab) + hyt)

```

```

139
140
141 #Slutt paa spesialtilfeller
142
143 # 1110 Her starter beregning av krefter og armering, 4 forskjellige tilfeller
144
145 Mct = -0.5 * (h - at) * Nct
146 Mcb = 0.5 * (h - ab) * Ncb
147 a1 = Nx - Nct * math.sin(tetat) ** 2 - Ncb * math.sin(tetab) ** 2
148 b1 = Mx - Mct * math.sin(tetat) ** 2 - Mcb * math.sin(tetab) ** 2
149 a2 = Ny - Nct * math.cos(tetat) ** 2 - Ncb * math.cos(tetab) ** 2
150 b2 = My - Mct * math.cos(tetat) ** 2 - Mcb * math.cos(tetab) ** 2
151 Nsxt = (a1 * hxb - b1) / (hxt + hxb) #I denne formelen er oppgitt i Lourencos
    formler (hxb+hxb), men er antatt feil
152 Nsxb = a1 - Nsxt
153 Nsyt = (a2 * hyb - b2) / (hyt + hyb)
154 Nsyb = a2 - Nsyt
155
156
157
158 #Sjekker krav til armering (topp og bunn, topp, bunn eller trykk i hele)
159
160 #Trykk i begge lag (Armering1 tilsvare 1200/2100)
161
162 def Armering1():
163     while True:
164         global hc
165         global Ncxyb
166         global Ncxyt
167         global Ncb
168         global Nct
169         global Nsxt
170         global Nsyb
171         global Nsxb
172         global Nsyb
173         global at
174         global ab
175         global oldat
176         global oldab
177         global Nct1
178         global Ncb1
179         global syklus
180         global icrush
181         global syklus2
182
183         hc = h - (ab + at) / 2
184         Ncxyb = (Mxy + 0.5 * (h - at) * Nxy) / hc
185         Ncxyt = Nxy - Ncxyb
186         Ncxb = (Mx + 0.5 * (h - at) * Nx) / hc
187         Ncxt = Nx - Ncxb
188         Ncyb = (My + 0.5 * (h - at) * Ny) / hc
189         Ncyt = Ny - Ncyb
190         Ncb = (Ncxb + Ncyb) / 2 - math.sqrt(((Ncxb - Ncyb) / 2) ** 2 + Ncxyb ** 2)
191         Nct = (Ncxt + Ncyt) / 2 - math.sqrt(((Ncxt - Ncyt) / 2) ** 2 + Ncxyt ** 2)
192         Ncb1 = (Ncxb + Ncyb) / 2 + math.sqrt(((Ncxb - Ncyb) / 2) ** 2 + Ncxyb **
193         2)
194         Nct1 = (Ncxt + Ncyt) / 2 + math.sqrt(((Ncxt - Ncyt) / 2) ** 2 + Ncxyt **
195         2)
196         alfa = Ncb1 / Ncb
197         Kb = (1 + 3.65 * alfa) / (1 + alfa) ** 2
198         alfa = Nct1 / Nct
199         Kt = (1 + 3.65 * alfa) / (1 + alfa) ** 2
200         #Lagre gamle verdier for lengde av ytre lag
201
202         oldat = at
203         oldab = ab
204
205         #Nye ytre lag verdier
206
207         ab = -Ncb / fcd1 / Kb
208         at = -Nct / fcd1 / Kt
209

```

```

208
209     if ((Nct1 > 1e-3) or (Ncb1 > 1e-3)): #da skal vi gaa tilbake til 1100
210         break
211
212     #sjekk for crushing
213
214     if ((at + ab) > h): #da skal vi gaa til 4200
215         icrush = 1
216         syklus2 = 1
217         break
218
219     #convergency check
220
221     if ((abs(oldab - ab) > tolhe) and (abs(olddat - at) > tolhe)):
222         #da skal vi tilbake til def armering1 eller 1200/2100
223         continue
224
225     #end of full compression cycle
226
227     icrush = 0
228
229     Nsxt = 0
230     Nsyt = 0
231     Nsxb = 0
232     Nsyb = 0
233
234     #goto 4200
235     #Dette betyr at det ikke er behov for armering, crushing oppstaar ikke
    og kreftene settes lik null
236
237     syklus = 1
238
239     break
240
241     if ((Nsxt <= 1e-3) and (Nsyb <= 1e-3) and (Nsxb <= 1e-3) and (Nsyb <= 1e-3)):
242         Armering1()
243
244     #Legger til en del betingelser slik at koden følger goto funksjonene fra Lourenco
245
246     if ((Nct1 > 1e-3) or (Ncb1 > 1e-3)): #da skal vi gaa tilbake til 1100
247         continue
248
249     if (syklus2 == 1): #da skal vi gaa til 4200
250         icrush = 1
251         break
252
253     if (syklus == 1): #da skal vi gå til 4200
254         break
255
256     #Slutt paa trykk i begge lag
257
258
259     #Trykk i ovre lag (Armering2 tilsvareer 2200/3100)
260
261     def Armering2():
262         while True:
263             global hc
264             global Ncxyt
265             global Ncb
266             global Nct
267             global Nsxt
268             global Nsyb
269             global Nsxb
270             global Nsyb
271             global at
272             global ab
273             global Nct1
274             global Ncb1
275             global oldab
276             global oldat
277             global tetab
278             global Mcb

```

```

279     global syklus
280     global icrush
281     global arml
282     global syklus2
283
284     hc = h - (ab + at) / 2
285     Ncb = -(Nxy * (h - at) + 2 * Mxy) / hc / math.sin(2 * tetab)
286
287     #Spesial tilfeller
288
289     if (abs(tetab) <= tomin):
290         tetab = 0
291         Ncb = (My + 0.5 * (h - at) * Ny) / hc
292
293     if (abs(tetab) >= tomax):
294         tetab = pi / 2
295         Ncb = (Mx + 0.5 * (h - at) * Nx) / hc
296
297     #Slutt paa spesialtilfeller
298
299     Mcb = 0.5 * (h - ab) * Ncb
300     a1 = Nx - Ncb * math.sin(tetab) ** 2
301     b1 = Mx - Mcb * math.sin(tetab) ** 2
302     a2 = Ny - Ncb * math.cos(tetab) ** 2
303     b2 = My - Mcb * math.cos(tetab) ** 2
304     Nsxb = (a1 * 0.5 * (h - at) + b1) / (hxb + 0.5 * (h - at))
305     Nsyb = (a2 * 0.5 * (h - at) + b2) / (hyb + 0.5 * (h - at))
306
307
308     if ((Nsxb <= 1e-3) and (Nsyb <= 1e-3)):
309         arml = 1
310         break #Her vil vi gaa til 1200/2100 som jeg har kalt Armering1, arml
311             brukes for aa ikke bruke nsxb og nsyb utenfor loopen
312
313     if (Nsxb <= -1e-3):
314         tetab = math.atan((2 * Mx + (h - at) * Nx) / (0.5 * (h - at) * Ncb +
315             Mcb) / math.sin(2 * tetab))
316         continue #Her vil vi gaa tilbake til Armering2 som tilsvareer 2200/3100
317
318     if (Nsyb <= -1e-3):
319         tetab = math.atan((Mcb + 0.5 * (h - at) * Ncb) * math.sin(2 * tetab)
320             / (2 * My + (h - at) * Ny))
321         continue #Her vil vi gaa tilbake til Armering2 som tilsvareer 2200/3100
322
323     Ncxyt = Nxy + Ncb * math.sin(tetab) * math.cos(tetab)
324     Ncxt = a1 - Nsxb
325     Ncyt = a2 - Nsyb
326     Nct = (Ncxt + Ncyt) / 2 - math.sqrt(((Ncxt - Ncyt) / 2) ** 2 + Ncxyt ** 2)
327
328     #Lagre gamle verdier for at og ab
329
330     oldat = at
331     oldab = ab
332
333     #Oppdater ytre lag verdier for at og ab
334
335     Nct1 = (Ncxt + Ncyt) / 2 + math.sqrt(((Ncxt - Ncyt) / 2) ** 2 + Ncxyt **
336         2)
337     alfa = Nct1 / Nct
338     Kt = (1 + 3.65 * alfa) / (1 + alfa) ** 2
339     at = -Nct / fcd1 / Kt
340     ab = -Ncb / fcd2
341
342     #Re-check av trykk i topplag
343
344     if (Nct1 > 1e-3):
345         break
346         #go to 1100 tilbake til start
347
348     #Sjekk concrete crushing

```

```

347     if ((at + ab) > h):
348         icrush = 1
349         syklus2 = 1
350         break
351         #go to 4200
352
353     #Convergence check
354
355     if ((abs(oldab - ab) > tolhe) and (abs(olddat - at) > tolhe)):
356         continue #go to 3100
357
358     #Slutt paa trykk i ovre lag syklusen
359
360     icrush = 0
361
362     Nsxt = 0
363     Nsyt = 0
364
365
366     syklus = 1
367     #goto 4200
368
369
370     break
371
372     if ((Nsxt <= 1e-3) and (Nsyb <= 1e-3) and (Nsxb > 1e-3) and (Nsyb > 1e-3)):
373         Armering2()
374
375     if (arm1 == 1):
376         Armering1()
377
378     if (Nct1 > 1e-3):
379         continue
380
381     if (syklus2 == 1):
382         icrush = 1
383         break
384
385     if (syklus == 1): #da skal vi gå til 4200
386         break
387
388
389     #Trykk i nedre lag (Armering3 tilsvare 3200/4100)
390
391     def Armering3():
392         while True:
393             global hc
394             global Ncxyb
395             global Ncb
396             global Nct
397             global Nsxt
398             global Nsyb
399             global Nsxb
400             global Nsyb
401             global at
402             global ab
403             global Nct1
404             global Ncb1
405             global oldat
406             global oldab
407             global tetat
408             global syklus
409             global icrush
410             global arm1
411             global syklus2
412
413             hc = h - (ab + at) / 2
414             Nct = -(Nxy * (h - ab) - 2.0 * Mxy) / hc / math.sin(2 * tetat)
415
416             #Spesial tilfeller
417
418             if (abs(tetat) <= tomin):

```

```

419         tetat = 0
420         Nct = (My - 0.5 * (h - ab) * Ny) / -hc
421
422     if (abs(tetat) >= tomax):
423         tetat = pi / 2
424         Nct = (Mx - 0.5 * (h - ab) * Nx) / -hc
425
426     #Slutt paa spesialtilfeller
427
428     Mct = -0.5 * (h - at) * Nct
429     a1 = Nx - Nct * math.sin(tetat) ** 2
430     b1 = Mx - Mct * math.sin(tetat) ** 2
431     a2 = Ny - Nct * math.cos(tetat) ** 2
432     b2 = My - Mct * math.cos(tetat) ** 2
433     Nsxt = (a1 * 0.5 * (h - ab) - b1) / (hxt + 0.5 * (h - ab))
434     Nsyt = (a2 * 0.5 * (h - ab) - b2) / (hyt + 0.5 * (h - ab))
435
436     if ((Nsxt <= 1e-3) and (Nsyt <= 1e-3)):
437         arml = 1
438         break #go to 1200/2100
439
440     if (Nsxt <= -1e-3):
441         tetat = math.atan((2 * Mx - (h - ab) * Nx) / (Mct - 0.5 * (h - ab) *
442         Nct) / math.sin(2 * tetat))
443         continue #goto Armering3 eller 3200/4100
444
445     if (Nsyt <= -1e-3):
446         tetat = math.atan((Mct - 0.5 * (h - ab) * Nct) * math.sin(2 * tetat)
447         / (2 * My - (h - ab) * Ny))
448         continue #goto Armering3 eller 3200/4100
449
450     Ncxyb = Nxy + Nct * math.sin(tetat) * math.cos(tetat)
451     Ncxb = a1 - Nsxt
452     Ncyb = a2 - Nsyt
453     Ncb = (Ncxb + Ncyb) / 2 - math.sqrt(((Ncxb - Ncyb) / 2) ** 2 + Ncxyb ** 2)
454
455     #Lagre gamle verdier for ytrelag
456
457     oldat = at
458     oldab = ab
459
460     #oppdaterer ytre lag med nye verdier
461
462     Ncb1 = (Ncxb + Ncyb) / 2 + math.sqrt(((Ncxb - Ncyb) / 2) ** 2 + Ncxyb **
463     2)
464     alfa = Ncb1 / Ncb
465     Kb = (1 + 3.65 * alfa) / (1 + alfa) ** 2
466     at = -Nct / fcd2
467     ab = -Ncb / fcd1 / Kb
468
469     #Re-check om trykk i nedre lag
470
471     if (Ncb1 > 1e-3):
472         break
473         #goto 1100/start
474
475     #Sjekk concrete crushing
476
477     if ((at + ab) > h):
478         icrush = 1
479         syklus2 = 1
480         break
481         #goto 4200
482
483     #Convergence check
484
485     if ((abs(oldab - ab) > tolhe) and (abs(oldat - at) > tolhe)):
486         continue #goto Armering3/3200/4100
487
488     #Slutt paa trykk i nedrelag syklus

```

```

488
489     icrush = 0
490
491     Nsxb = 0
492     Nsyb = 0
493
494     syklus = 1
495
496     break
497
498 if ((Nsxb <= 1e-3) and (Nsyb <= 1e-3) and (Nsxt > 1e-3) and (Nsyt > 1e-3)):
499     Armering3() #goto Armering3 som er 3200/4100 i Lourenco
500
501 if (arm1 == 1):
502     Armering1() #goto 1200
503
504 if (Ncb1 > 1e-3):
505     continue #start på nytt
506
507 if (syklus2 == 1):
508     icrush = 1
509     break #goto 4200
510
511 if (syklus == 1):
512     break
513
514 #Strekk i begge lag
515 if ((Nsxt <= -1e-3)):
516     tetat = math.atan(2 * (Mx - hxb * Nx - (Mcb - Ncb * hxb) * math.sin(tetab)
517     ** 2) / (Mct - Nct * hxb) / math.sin(2 * tetat))
518     continue #goto 1100
519
520 if ((Nsyt <= -1e-3)):
521     tetat = math.atan(math.sin(2 * tetat) * (Mct - Nct * hyb) / 2 / (My - hyb *
522     Ny - (Mcb - Ncb * hyb) * math.cos(tetab) ** 2))
523     continue #go to 1100
524
525 if ((Nsxb <= -1e-3)):
526     tetab = math.atan(2 * (Mx + hxt * Nx - (Mct + Nct * hxt) * math.sin(tetab)
527     ** 2) / (Mcb + Ncb * hxt) / math.sin(2 * tetab))
528     continue #goto 1100
529
530 if ((Nsyb <= -1e-3)):
531     tetab = math.atan(math.sin(2 * tetab) * (Mcb + Ncb * hyt) / 2 / (My + hyt *
532     Ny - (Mct + Nct * hyt) * math.cos(tetab) ** 2))
533     continue #goto 1100
534
535
536 oldat = at
537 oldab = ab
538
539 #Oppdatere verdier for ytre lag
540
541 at = -Nct / fcd2
542 ab = -Ncb / fcd2
543
544 #Sjekker concrete crushing
545
546 if ((at + ab) > h):
547     icrush = 1
548     break
549     #goto 4200
550
551 if ((abs(oldab - ab) > tolhe) and (abs(oldat - at) > tolhe)):
552     continue #go to 1100
553
554 icrush = 0
555
556 break #goto 4200

```



```
556
557
558
559
560 #Beregning av armering (Siste del, kalt 4200 i Lourenco)
561
562 Asxt = Nsxt * 1000 / fsyd
563 Asxb = Nsxb * 1000 / fsyd
564 Asyt = Nsyt * 1000 / fsyd
565 Asyb = Nsyb * 1000 / fsyd
566
567
568 tetaTT = (tetat * 180 / pi)
569 tetaBB = (tetab * 180 / pi)
570
571 print ("Vinkler")
572 print ("tetat", "tetab")
573 print (tetaTT, tetaBB)
574
575 print ("diverse verdier")
576 print ("Nct", "Ncb", "Mct", "Mcb", "at", "ab")
577 print (Nct, Ncb, Mct, Mcb, at, ab)
578
579 print ("Armering")
580 print ("Asxt", "Asxb", "Asyt", "Asyb")
581 print (Asxt, Asxb, Asyt, Asyb)
582
583 print ("Krefter")
584 print ("Nsxt", "Nsxb", "Nsyb", "Nsyb")
585 print (Nsxt, Nsxb, Nsyb, Nsyb)
586
587 if (icrush == 1):
588     print("knusing")
589 if (icrush == 0):
590     print("ikke knusing")
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
```