NTNU
Det skapende universitet

Elevers bruk og oppfatning av formler

En casestudie om fem 10.-trinnselevers bruk
og oppfatning av formler knyttet til areal,
omkrets og volum

Kari Hovstad

Master i realfag
Innlevert: januar 2017
Hovedveileder: Heidi Strømskag, IMF

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Å ferdigstille denne masteroppgaven innebærer at jeg nå er ferdig med min tid som lektorstudent ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. Tilværelsen som student har vært spennende, krevende og lærerik. Det samme gjelder arbeidet med masteroppgaven. Dette arbeidet har vært interessant og givende, og erfaringene og lærdommen tar jeg med meg i mitt framtidige virke som lærer.

Takk til min veileder, Heidi Strømskag. Du har vært tilgjengelig for spørsmål på e-post så vel som på kontoret ditt. Jeg har alltid fått en positiv følelse og ny motivasjon av å diskutere prosjektet med deg. Dine kommentarer og synspunkter har vært svært verdifulle for meg.

Jeg vil også rette en takk til alle jeg har blitt kjent med i studietiden. Takk for fine opplevelser gjennom flere år! Dere har vært viktige støttespillere under arbeidet med masterprosjektet.

Til mine nærmeste, familie og venner. Dere har vist interesse for studiene og for prosjektet især. Alle samtaler hvor dere har måttet høre på min entusiasme, så vel som min frustrasjon setter jeg umåtelig stor pris på.

Takk til eleven som viste meg Kule-sylinder-oppgaven og ga meg et spennende tema å forske på. Takk til læreren som lot meg bruke av undervisningstiden for å samle inn data. Til sist vil jeg rette en spesiell takk elevene som har stilt opp som informanter til dette prosjektet. Dere har vist en motivasjon og en interesse som jeg verdsetter høyt. Uten dere hadde ikke prosjektet vært mulig å gjennomføre!

Trondheim, januar 2017

Kari Hovstad

Sammendrag

Målet med denne studien har vært å undersøke hvordan elever på 10.-trinn bruker og oppfatter formler. Studien konsentrerer seg om formler for areal, omkrets og volum, og forsøker å besvare følgende forskningsspørsmål: *Hvordan bruker og oppfatter fem 10.-trinnselever formler som inngår i geometrioppgaver om areal, omkrets og volum?* I tillegg undersøkes hva som er til hinder for elevene med tanke på formler. Dette belyses ved å besvare underspørsmålet: *Hvilke aspekter ved formler utgjør hindringer for 10.-trinnselever i deres løsning av geometrioppgaver?* Svarene på forskningsspørsmålene er søkt gjennom et kvalitativt forskningsdesign, en casestudie med 17 informanter på 10.-trinn ved en ungdomsskole i Trondheimsområdet.

Metodene som er brukt for å besvare forskningsspørsmålene er innsamling av 17 elevers besvarelser på oppgaver som omhandler bruk av formler for areal, omkrets og volum, samt intervjuer med fem av disse elevene. I intervjuene diskuteres elevenes besvarelser på geometrioppgavene, hvor de forklarer hvordan de har tenkt, og hva som eventuelt stopper dem fra å komme videre med løsningen.

Studien viser at noen elever har en prosessoppfatning av formler, mens andre har en objektoppfatning. En prosessoppfatning innebærer blant annet å anvende formler som oppskrifter, hvor man setter inn tall og får ut tall som svar. Et av studiens resultater er at elevene som har en prosessoppfatning av formler blir forhindret i å komme til en endelig konklusjon i komplekse oppgaver, gjennom manglende evne til å kombinere opplysningene som gis i oppgaven. Prosessoppfatningen gir seg også til kjenne gjennom et ønske om å sette inn tall, som studien viser at utgjør en hindring for elevene. Studien viser at elevenes begrepsbilde av formler er begrenset, og vanskeliggjør å gjenkjenne en formel, avgjøre om et uttrykk er en formel, og å assosiere begreper med formeluttrykk. Dette påvirker elevenes forventninger til svaret på oppgaver, og dermed løsningsprosessen. Videre viser studien at brøk og parenteser i formeluttrykk er hindringer for elevene med tanke på å manipulere formler.

Abstract

This master thesis attempts to examine the ways in which Norwegian 10^{th} graders use and perceive formulas. The focus is on formulas of area, circumference and volume. The study aims to answer the following research question: *How do five 10^{th} graders use and perceive formulas related to geometry problems with area, circumference and volume?* The study also examines what factors that prevent the pupils from working successfully with formulas. These factors are identified while answering the sub question: *Which aspects of formulas prevent 10^{th} graders in their solution of geometry problems?* The research questions are answered by using a qualitative research design, a case study with 17 pupils from a 10^{th} grade class in Trondheim.

The data material consists of 17 pupils answers to a set of problems concerning area, circumference and volume, in addition to interviews with five of the pupils. The focus in the interviews is on the pupils' answers to the problems, where the pupils explain their thoughts, and what prevents them from getting further with their solutions.

The study shows that some of the pupils have a perception of formulas as processes, while others perceive formulas as objects. A process perception of formulas means for example using the formula as a recipe, by putting in numbers and getting a number as the answer. The pupils who have this kind of perception are prevented from getting to a final conclusion in the most complex problems, caused by their lacking ability to combine the given information in the problem text. The process perception of formulas can also be seen when the pupils want to put in numbers, which involves a constraint for them. The pupils' concept image of formulas is limited, and makes it difficult for them to recognize a formula, to decide whether an expression is a formula or not, and to associate other words with the concept of formula. This influences the expectations of the pupils regarding the answer of the problems, and also their solution process. Next, the study shows that fractions and parentheses in formulas prevent the pupils from dealing properly with formulas.

Innhold

1 Innledning ... 1

1.1 Bakgrunn for studien ... 1

1.2 Formål og forskningsspørsmål ... 1

1.3 Oppbygning av oppgaven ... 3

2 Teori ... 4

2.1 Forståelse og oppfatninger i matematikk ... 4

2.1.1 Relasjonell og instrumentell forståelse ... 4

2.1.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon ... 5

2.1.3 Prosess- og objektoppfatning av matematiske begreper ... 6

2.1.4 Semiotikk ... 7

2.2 Oppfatninger av bokstaver og formler ... 8

2.2.1 Ulike oppfatninger av bokstaver ... 8

2.2.2 Ulike oppfatninger av formler ... 9

2.2.3 Tidligere forskning på elevers utfordringer med algebra og geometri ... 11

3 Metode ... 12

3.1 Forskningsdesign ... 12

3.2 Valg av skole og informanter ... 14

3.3 Datainnsamlingsmetoder ... 15

3.3.1 Innsamling av oppgavebesvarelser fra elever ... 15

3.3.2 Intervju ... 21

3.4 Etiske betraktninger ... 23

3.5 Analysemetode ... 25

3.5.1 For-analyse av elevbesvarelser ... 25

3.5.2 Analysemetode for intervjuer og elevbesvarelser ... 27

4 Analyse ... 29

4.1 Hindringer knyttet til regneteknikk ... 29

4.1.1 Brøk som representasjonsform og operasjoner med og på brøk 29

4.1.2 Operasjoner med og på parenteser med bokstavuttrykk i formler 35

4.2 Hindringer knyttet til forståelse og oppfatning av formler....................................... 39

4.2.1 Begrenset begrepsbilde av formler.. 39

4.2.2 Ulike former for forståelse av formler 44

4.2.3 Innsetting av tall 46

4.2.4 Behov for spesiell plassering av bokstaven i en formel 51

4.3 Hindringer knyttet til bruk av formler i skriftlige besvarelser.................................. 53

4.3.1 Kombinasjon av opplysninger fra oppgaveteksten 53

4.3.2 Uklarhet i skriftlig kommunikasjon 55

5 Diskusjon.. 59

5.1 Prosessoppfatning av matematiske begreper og behov for avslutning...................... 59

5.2 Relasjonell og instrumentell forståelse.. 61

5.3 Begrenset begrepsbilde av formler 62

5.4 Vurdering av kvaliteten til studien 64

6 Konklusjon 68

6.1 Oppsummering av forskningsresultater... 68

6.2 Didaktiske refleksjoner.. 69

6.3 Videre forskning 70

7 Referanser... 72

8 Vedlegg 75

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Gjennom min egen skolegang har jeg alltid syntes at algebra er en interessant og morsom del av matematikkfaget. Etter at jeg først mestret å sette opp og løse likninger, har jeg brukt dette som et verktøy i mange slags matematikkproblemer. I praksisperiodene i tilknytning til studiene, og i ulike vikaroppdrag, har jeg imidlertid erfart at mange elever ikke opplever algebra på denne måten, men heller synes det er vanskelig, kjedelig eller til og med umulig. For en tid tilbake fikk jeg spørsmål fra en gutt jeg kjenner om å se på en oppgave han hadde fått til tentamen i matematikk på 10.-trinn. Denne omhandlet bruk av formler i geometri. Jeg løste oppgaven ved hjelp av en likning på noen få linjer, noe som medførte litt frustrasjon hos gutten, som hadde løst oppgaven på en langt mer tidkrevende måte. Jeg ble slik interessert i å undersøke elevers erfaringer med å bruke formler og likninger til å løse liknende oppgaver.

I media fokuseres det en del på norske elevers resultater i både nasjonale prøver (Utdanningsdirektoratet, 2016), PISA (Programme for International Student Assessment) (OECD, 2016) og TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) (IEA, 2017). TIMSS ble sist gjennomført i 2015, hvor resultatene nok en gang viser at norske 9.-trinnselever skårer svakest i emnet algebra i forhold til andre emner (Bergem, 2016). Bergem skriver at det har skjedd en tilbakegang i emnet siden 2011. De norske elevene skårer også lavt i geometri, men innen dette emnet har det skjedd en framgang i den samme perioden. Undersøkelsen viser at norske elever er sterkest i emnet statistikk. Disse resultatene gir ytterligere motivasjon for å undersøke emnet algebra blant norske elever. Hvorfor er akkurat dette emnet en utfordring? Dette spørsmålet gir ikke TIMSS svar på, og det er derfor gunstig å ta i bruk kvalitative forskningsmetoder for å kunne undersøke det. En videre utdyping og avgrensning av forskningsspørsmålet mitt vil bli gitt i neste avsnitt.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Som nevnt over ønsker jeg i denne studien å finne ut på hvilke måter algebra kan være en utfordring for norske elever på 10.-trinn. Oppgaven som har motivert meg, omhandler bruk av formler for å løse et problem tilknyttet romgeometri. Mitt fokusområde har derfor blitt avgrenset til elevers bruk og oppfatning av formler brukt i geometri, nærmere bestemt areal, omkrets og volum. Jeg er interessert i å finne ut hvordan elevene bruker formler for å løse oppgaver av denne typen. Jeg er i tillegg interessert i å undersøke hvordan elever forstår formler, altså hvordan de knytter symboluttrykket til den bakenforliggende geometrien – for eksempel hvordan bokstaver kan representere ulike matematiske størrelser som radius, omkrets eller volum. I sammenheng med dette vil jeg se på hvordan elevene oppfatter formlene de bruker. Dette er noe jeg undersøker med bakgrunn i at mange elever føler et behov for å sette inn tall, og at formelen dermed blir en oppskrift – mens andre oppfatter formler på andre måter. Forskningsspørsmålet jeg har arbeidet ut ifra er:

Hvordan bruker og oppfatter fem 10.-trinnselever formler som inngår i geometrioppgaver om areal, omkrets og volum?

Jeg har også brukt følgende underspørsmål:

Hvilke aspekter ved formler utgjør hindringer for 10.-trinnselever i deres løsning av geometrioppgaver?

Disse spørsmålene har jeg forsøkt å besvare ved å la en gruppe med 17 elever på 10.-trinn løse et oppgavesett med geometrioppgaver som omhandlet bruk av formler, for å samle inn og analysere elevbesvarelsene. Oppgavesettet har jeg laget for å få innsikt i hvordan elevene bruker formler i geometri, samt å undersøke hvilke oppgavetyper og bruksmåter av formler som elevene mestrer. I tillegg har jeg intervjuet fem av de 17 elevene om oppgavene og deres besvarelser. Fokuset i intervjuene har vært å få fram hvordan elevene har tenkt under løsningen av oppgavene, og gjennom dette finne ut noe om elevenes oppfatning av formler. Dersom elevene ikke har fått til en oppgave eller på noen måte har opplevd hindringer underveis, har jeg forsøkt å finne ut noe om dette i intervjuene. Grunnen til at jeg har valgt både oppgavebesvarelser og intervju er i hovedsak at besvarelsene ikke gir tilstrekkelig informasjon om elevers tankeprosesser og oppfatninger. I tillegg er flere datainnsamlingsmetoder generelt med på å styrke kvaliteten til studien. Som verktøy for å vurdere dataene har jeg brukt teori om begrepsutvikling, prosess- og objektoppfatning, ulike former for forståelse, og semiotikk. Jeg har også brukt teori om elevers ulike forestillinger knyttet til formler og algebraiske symboler.

1.3 Oppbygning av oppgaven

Denne oppgaven består av seks hovedkapitler. I denne innledningen har jeg redegjort for bakgrunnen for og formålet med studien. I det følgende gir jeg en kort beskrivelse av de neste kapitlene.

I kapittel 2 redegjør jeg for det teoretiske rammeverket i oppgaven. Dette er teorier som jeg bruker i analysen av datamaterialet og i diskusjonen av funnene.

Kapittel 3 består av en redegjørelse for metoden jeg har brukt. I kapitlet presenteres og begrunnes valg av forskningsdesign og informanter i studien. Her beskrives også datainnsamlingsmetodene jeg har brukt. Jeg redegjør deretter for etiske betraktninger jeg har gjort underveis i studien, før jeg til slutt i kapitlet beskriver analysemetoden jeg har brukt på det innsamlede datamaterialet. Her oppgir jeg koder og kategorier jeg har funnet gjennom analysearbeidet.

Analysen av datamaterialet er beskrevet i kapittel 4. Kapitlet er delt inn i egne delkapitler for hver av kategoriene fra analyseprosessen, hvor de tilhørende kodene beskrives og eksemplifiseres med utdrag fra datamaterialet.

I kapittel 5 oppsummerer og diskuterer jeg resultatene som er presentert i analysekapitlet opp mot teorien fra teorikapitlet. Dette kapitlet inneholder også en vurdering av kvaliteten i studien.

Avslutningsvis oppsummerer jeg funnene fra studien og presenterer min konklusjon i kapittel 6. Her inkluderer jeg mine didaktiske refleksjoner om hvordan resultatene fra studien kan være til nytte for matematikkundervisning, med et særlig fokus på formler. Til slutt kommer jeg med noen forslag til videre forskning.

2 Teori

I dette kapitlet redegjør jeg for teori jeg har brukt til å analysere og drøfte dataene som er samlet inn i studien. I studien undersøker jeg som nevnt innledningsvis elevers bruk, oppfatninger og forståelse av formler i arbeid med geometrioppgaver om areal, omkrets og volum. Det første avsnittet handler derfor om forståelse og oppfatninger, og om begrepsutvikling i matematikk. Her redegjør jeg også for teori om semiotikk i matematikk: bruk av tegn og symboler for å representere matematiske objekter. *Formler* brukt i geometri og *bokstaver* er en viktig del av algebra. Det andre avsnittet i kapitlet handler om aspekter ved elevers bruk og forståelse av algebra, hvor jeg fokuserer særlig på ulike oppfatninger av bokstaver og formler, herunder elevers behov for *avslutning* i arbeid med formler. Til sist i kapitlet gir jeg også en kort redegjørelse for hva andre har funnet innen det aktuelle temaet. Til sammen vil disse teoriene gi grunnlag for analyse og diskusjon av datamaterialet i de etterfølgende kapitlene.

2.1 Forståelse og oppfatninger i matematikk

2.1.1 Relasjonell og instrumentell forståelse

Innen matematikkfaget skiller man mellom *instrumentell* og *relasjonell forståelse.* Ifølge Skemp (1976) karakteriseres relasjonell forståelse i matematikk som å *vite hva man skal gjøre* og *hvorfor man gjør det.* Instrumentell forståelse karakteriseres som *regler uten begrunnelser.* Et eksempel på en slik regel kan være «flytt over til den andre siden og skift fortegn». Skemp hevder at instrumentell forståelse vanligvis innebærer å kunne mange regler, heller enn noen få prinsipper som kan brukes generelt. Instrumentell forståelse nødvendiggjør dermed at man må huske hvilke regler som gjelder for de ulike problemtypene, og at man må lære en ny metode for hver ny problemtype.

Til tross for at Skemp (1976) tydeliggjør at han foretrekker en relasjonell tilnærming, redegjør han for flere mulige fordeler ved instrumentell forståelse i matematikk. Slike fordeler kan være at instrumentell forståelse er enklere å oppnå enn relasjonell. Et eksempel er at det er enklere å lære en formel for å finne volumet av en geometrisk figur, enn å forstå dette i en større sammenheng. En annen fordel Skemp nevner er at man kan oppnå svaret på problemet på en rask måte. Han påpeker at også matematikere som har relasjonell forståelse ofte kan bruke en instrumentell tilnærming, på grunn av effektivitet. Som eksempel bruker Skemp beregning av areal. Det er opplagt enklere å lære å huske formler for areal av alle slags figurer, enn å lære hvorfor de ulike formlene gjelder. Samtidig vil forståelsen av hvorfor formlene gjelder, inkludere formlene og figurene som en del av en større konseptuell struktur, og denne lærdommen vil vare lengre enn å pugge en liste med formler. Skemp (1976) understreker at selv om man forstår hvorfor formlene gjelder, vil man huske dem, og bruke dem direkte.

2.1.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Med tanke på elevers oppfatninger om matematiske objekter er det relevant å gjøre rede for begrepene *begrepsbilde (concept image)* og *begrepsdefinisjon (concept definition).* Ifølge Tall og Vinner (1981) er det en vanlig oppfatning at matematikk er et fag hvor begreper kan defineres med høy presisjon, og at dette gir et solid grunnlag for matematisk teori. Forfatterne påpeker imidlertid at det psykologiske i tilknytning til dette er annerledes: ethvert individ har en kognitiv struktur i sinnet, og dette gir flere variasjoner av mentale bilder når et begrep fremkalles.

Tall og Vinner (1981) bruker begrepet *begrepsbilde* for å beskrive hele den kognitive strukturen som assosieres med et begrep. Dette omfatter alle mentale bilder, egenskaper og prosesser som man har samlet opp via alle typer erfaringer med begrepet. Brekke (2002) beskriver *misoppfatninger* som ufullstendige tanker om et begrep, som kan ses i sammenheng med begrepsbilde. Misoppfatninger er konsekvente oppfatninger om begrepet, og Brekke skiller derfor mellom feil hos elever som skyldes misoppfatninger, og tilfeldige feil som for eksempel kan skyldes feil avlesing av oppgaven. Et eksempel på en misoppfatning kan være en elev som skriver $4 + a = 4a$ når han skal forenkle uttrykk i algebra. Misoppfatninger kan bidra til et begrenset begrepsbilde, det Brekke omtaler som et *delvis begrep.*

Begrepsdefinisjon er på den andre siden en beskrivelse som spesifiserer et begrep (Tall & Vinner, 1981). Dette er noe som kan pugges, eller læres og relateres helhetlig til begrepet. Begrepsdefinisjonen kan ifølge Tall og Vinner være elevens egen formulering av begrepsbildet hans.

I arbeid med et matematisk begrep, kan det oppstå konflikter mellom ulike deler av begrepsbildet eller begrepsdefinisjonen. En del av begrepsbildet som skaper konflikt, kaller

Tall og Vinner (1981) en *potensiell konfliktfaktor*. Dersom denne faktoren fremkaller kognitive konflikter, kaller Tall og Vinner den en *kognitiv konfliktfaktor*.

2.1.3 Prosess- og objektoppfatning av matematiske begreper

Elevers oppfatninger kan knyttes til prosess- og objekt-dualiteten til matematiske begreper. I matematikkfaget har vi ikke tilgang til de matematiske begrepene på samme måte som i andre fag (Duval, 2006; Sfard, 1991). I naturfagene er det mulig å studere objektene direkte, for eksempel kan man gå ut å se på blomster for å få kunnskap om disse i biologi. I matematikk er det ikke mulig å tilegne seg kunnskap på denne måten, siden det vi skriver ned eller tegner bare er *representasjoner* av de matematiske begrepene (Duval, 2006). Et eksempel på en representasjon av et matematisk begrep er arealet av en sirkel, uttrykt ved formelen $A = \pi r^2$. Her er formelen en måte å representere arealet, men symboluttrykket er ikke *selve* arealet. Duval (2006) argumenterer slik for at representasjoner er den eneste måten vi kan få tilgang på kunnskap om de matematiske objektene. Jeg vil utdype teori om bruk av semiotikk som representasjoner i matematikk senere i teksten, og fokuserer her på utvikling av kunnskap om matematiske begreper.

Sfard (1991) skiller mellom å oppfatte et matematisk begrep som en *prosess* og som et *objekt*. En prosessoppfatning av begrepet kan ses på som noe dynamisk. Dette innebærer å kunne utføre prosesser på kjente objekter, og utvikle ferdigheter omkring dette. Et eksempel kan være å se en formel som en oppskrift for å regne ut en størrelse. Å oppfatte begrepet som et objekt, kan beskrives som å se det matematiske begrepet som en statisk struktur (Sfard, 1991). En viktig del av en slik oppfatning er å kunne gjenkjenne ulike representasjoner som det samme begrepet. En objektoppfatning innebærer å se begrepet som en gjenstand, og at denne blir sett på som en helhet, frigjort fra den tidligere tilknyttede prosessen. En slik oppfatning av en formel kan kjennetegnes ved å kunne gjøre operasjoner med *formelen* som et objekt, som kan innebære å bruke formelen til å gjøre betraktninger av mer komplekse situasjoner. Det er ifølge Sfard viktig at det ikke er et enten-eller-forhold mellom prosess- og objekt-naturen til et begrep, men at begge inngår og til sammen utgjør begrepet.

2.1.4 Semiotikk

Å uttrykke seg skriftlig i matematikk innebærer bruk av matematiske tegn og symboler. Som nevnt tidligere bruker vi tegn for å representere noe annet, og innen matematikken står tegnene ofte for et matematisk objekt (Duval, 2006; Steinbring, 2006). Steinbring (2006) understreker i likhet med Duval (2006) at symbolene ikke *er* det matematiske objektet, og at det matematiske objektet ikke nødvendigvis behøver å bli identifisert med symbolene. Et eksempel kan være x^2 og en figur av et kvadrat med sidelengde x. Figuren og symbolrepresentasjonen beskriver det samme matematiske objektet, kvadratet, men de to representasjonene trenger ikke å gjenkjennes som det samme objektet. De matematiske tegnene og symbolene har ifølge Steinbring en avgjørende rolle for koding, konstruksjon og kommunikasjon av matematisk kunnskap.

Steinbring (2006) nevner mange ulike former for bruk av matematiske tegn, som snakking, tegning og skriving. I denne studien fokuserer jeg i hovedsak på å *skrive* matematiske tegn og symboler, det Steinbring klassifiserer som den symbolske funksjonen til tegnene.

Steinbring (2006) sier at referansekonteksten og tegnene i seg selv ikke er matematisk kunnskap. I den forbindelse påpeker han at man ikke nødvendigvis trenger typisk algebranotasjon som bokstaver eller operasjonssymboler for å uttrykke algebraiske relasjoner. Algebranotasjonen er i seg selv ikke den aktuelle matematiske kunnskapen i algebra. Med dette mener Steinbring at man kan inneha kunnskap om algebraiske relasjoner, og kunne uttrykke disse, uten å bruke bokstaver og symboler slik vi ofte ser det i algebra. Et eksempel kan være problemer som omhandler forhold mellom ulike størrelser. En typisk algebraisk framstilling av at en størrelse er dobbelt så stor som en annen vil da være $2x = y$, hvor den ene (y) gjerne er gitt i problemet, og den andre (x) ønskes funnet. Det er åpenbart mulig å ha et begrep om hva det innebærer å være «dobbelt så stor», og kunne forklare dette, uten å nødvendigvis uttrykke det med symboler slik jeg har gjort over.

Radford (1996) påpeker at matematisk symbolrepresentasjon ikke er uavhengig av *målet* med oppgaven, og krever slik at eleven som løser oppgaven har en viss forventning til resultatet. Denne forventningen kan komme av hvordan eleven tolker faktaene som blir gitt i oppgaven. Problemet blir å finne ut hvilke egenskaper ved det matematiske objektet som beskrives i oppgaven som skal bevares i den nye representasjonen.

2.2 Oppfatninger av bokstaver og formler

I skolen har betydningen av algebra utviklet seg til å være å «bruke symboler for å uttrykke og manipulere generaliteter i tallkontekster» (Mason, 1996, s. 73, min oversettelse). Radford (1996) skiller mellom to ulike tilnærminger til algebra i skolen som til sammen utgjør algebraundervisning: *generalisering* og *problemløsning*. Algebra som *generalisering* handler om ulike mønstre og tallfølger, og målet i generaliseringsproblemer er å finne en formel uttrykt ved en variabel. Man går fra det spesielle, figurene eller tallene, til det generelle, formlene. Innen denne tilnærmingen er relasjonen mellom begrepene *variabel* og *formel* viktig (Radford, 1996). Innen algebra som *problemløsning* har man ofte tekstoppgaver. Målet er å finne en tallverdi for en ukjent ved hjelp av en likning. Radford sier at innen algebra som problemløsning er relasjonen mellom begrepene *ukjent* og *likning* viktig. Slik får bokstaven ulike roller innen de to tilnærmingene. I det følgende vil jeg også utdype hvordan elever kan oppfatte bokstaver og formler på ulike måter, og redegjøre for begrepet *avslutning (Closure)* (Biggs & Collis, 1982) som er svært aktuelt i tilknytning til dette.

2.2.1 Ulike oppfatninger av bokstaver

Janvier (1996) skriver at rollen til en symbolrepresentasjon i et problem avhenger av hvordan representasjonen tolkes av den som skal løse problemet, og at en bokstav i matematikk kan tolkes på fire ulike måter, *parameter, ukjent, variabel i en formel* eller *plassholder*. Disse tolkningene vil bli viktig for å kunne analysere elevers oppfatning og forståelse av formler, og jeg vil nå forklare hva jeg legger i de ulike tolkningene av en bokstav i et problem innebærer.

En tolkning av bokstaven som en *parameter* innebærer at denne bokstaven vil være med på å forme problemet. Parameteren brukes i beskrivelsen av en sammenheng mellom størrelser. Parameteren vil påvirke utfallet i ulike situasjoner, gjennom å ta en bestemt verdi i hver enkelt situasjon. Et eksempel kan være en andregradslikning på formen $ax^2 + bx + c = 0$, hvor både a, b og c er parametere som gir form til likningen.

Når en elev tolker bokstaven *x* som en *ukjent*, er problemet i oppgaven å finne tallverdien til *x*-en. Når man løser oppgaver hvor *x* er en ukjent ved hjelp av en likning, skriver Janvier (1996) at man antar at x er kjent gjennom løsningsprosessen. x er et tall som vi kan finne, og vi gjør operasjoner på *x* som om vi vet hvilket tall den representerer. Dette kan ses på som et verktøy innen algebra som problemløsning. Janvier (1996) påpeker imidlertid at en elev kan finne den ukjente ved andre metoder enn likningsløsning, noe som er i tråd med det Steinbring (2006) skriver om at en elev kan inneha kunnskap om algebraiske relasjoner uten å nødvendigvis benytte seg av typisk algebranotasjon.

Når en elev tolker bokstaven som en variabel i en formel, kan bokstaven ta ulike verdier. Dersom man for eksempel skal regne ut arealet av en sirkel, bruker man formelen $A = \pi r^2$, hvor *r* en variabel som kan ta ulike verdier. Janvier (1996) sier at disse verdiene som variabelen kan ta som regel er gitt i oppgaven. I eksemplet vil det si at *r* er oppgitt, og man skal regne ut *A*. Jeg vil skrive mer om ulike syn på formler i neste avsnitt.

Når *x* tolkes som en plassholder, står *x* for hvilket som helst tall, uten å være ukjent eller variabel. *x* representerer da et sted hvor man kan sette inn noe. Et eksempel på slik bruk av bokstaven er i uttrykket $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, hvor likheten holder uansett hvilken verdi vi setter inn for *x*.

2.2.2 Ulike oppfatninger av formler

Janvier (1996) definerer en *formel* som to symboluttrykk på hver sin side av et likhetstegn. Bruk av formler innebærer ifølge Janvier å gjøre beregninger med kjente tall. I løsningsprosessen av en *likning* gjør man beregninger med ukjente tall, og slik skiller Janvier mellom formler og likninger. Et uttrykk som har symboluttrykk på hver side av et likhetstegn, kan dermed betraktes som en formel eller en likning, avhengig av aktiviteten det involveres i. Videre sier Janvier at elever kan ha ulike oppfatninger av hva en formel er og hvordan den kan brukes. Jeg vil i det følgende redegjøre for forskjellige tolkninger elever kan gjøre av en formel.

Blant elever er det vanlig å betrakte formler som en oppskrift for å komme fram til et svar. Janvier (1996) bruker arealformelen for en sirkel, $A = \pi r^2$, som eksempel: formelen brukes til å finne arealet av en sirkel når radiusen er gitt. I slike tilfeller betraktes *r* som noe som kan ta spesifikke verdier som står oppgitt i oppgaven, i samsvar med oppfatning av en bokstav som variabel som er beskrevet i forrige avsnitt. Janvier (1996) påpeker at elevene ikke nødvendigvis forestiller seg at *A* er en ukjent i formelen, siden de har en gitt verdi for *r* som sikrer at en verdi for *A* vil eksistere. En slik oppfatning av formler kan ses i sammenheng med Biggs og Collis' (1982) begrep *avslutning (Closure).* Begrepet beskriver et behov for å komme til en bestemt avgjørelse eller konklusjon, og forfatterne nevner tre ulike nivåer for dette behovet. Det laveste nivået innebærer et ønske om å umiddelbart utføre de mulige operasjonene i et problem, som samsvarer med en oppfatning av formel som en oppskrift. Det kan for eksempel være å regne ut produktet av grunnflate og høyde i en trekant, og dermed erstatte to elementer med ett, *før* man deler på 2. Sett i sammenheng med Sfards (1991) teori mener jeg at et slikt ønske om å avslutte alle operasjoner samsvarer med en prosessoppfatning av formler.

Formelen for arealet av en sirkel vil tolkes på en annen måte dersom oppgaven er å finne radiusen når arealet er gitt. I et slikt tilfelle kan *ikke* den korresponderende radiusen leses av ved å sette verdien av arealet direkte inn i formelen. For å løse denne oppgaven skriver Janvier (1996) at man må betrakte bokstaver som generelle tall, uten spesifikke verdier, og gjøre operasjoner på disse. Dette innebærer å måtte akseptere at man ikke kommer til en avslutning av alle operasjoner, og slik å kunne betrakte utfallet av en operasjon uten å nødvendigvis gjennomføre operasjonen. Dette tilsvarer det midterste nivået i Biggs og Collis' (1982) teori.

På et høyt nivå vil elevene se på avslutning som en matematisk egenskap som kan eksistere for en mengde. Denne egenskapen kan da brukes på abstrakte elementer og definerte operasjoner. Biggs og Collis (1982) beskriver hvordan elever på dette nivået kan håndtere variabler, og at de avstår fra å trekke endelige konklusjoner før de har sett på flere forskjellige muligheter. Et eksempel kan være å lage en generell formel før man setter inn tall for å oppnå et unikt resultat, altså å operere på symbolene uten å vite hvilke tall de representerer. For igjen å knytte Sfards (1991) begreper til Biggs og Collis' begrep avslutning, vil en objektoppfatning av formler kunne sammenholdes med å akseptere mangel på avslutning.

2.2.3 Tidligere forskning på elevers utfordringer med algebra og geometri

Fokuset i denne studien er norske elevers bruk, forståelse og oppfatninger av formler knyttet til geometri. Resultatene fra TIMSS 2015 kan gi et bilde på norske elevers prestasjonsnivå. Bergem (2016) skriver at norske 9.-trinnselever skårer lavt i geometri, til tross for at det har vært en framgang i perioden fra 2011 til 2015. Det som også viser seg er at 9.-trinnselever er særlig svake i algebra i forhold til i andre emneområder, og i den samme perioden har det vært en tilbakegang innen dette området.

Brekke (2001) fant i en storskala studie med norske elever at elevenes manipulering av algebraiske uttrykk er isolerte prosesser, som kan være tilfeldige eller konsekvente. For eksempel sliter elevene i studien med å forenkle uttrykket $\frac{4x+2}{8x}$ på en korrekt måte. Brekke mener utfordringene kan skyldes en ufullstendig forståelse i aritmetikk, slik at tidligere kunnskap ikke overføres til nye situasjoner. Dette kan være med på å forklare hvorfor norske elever skårer lavere i algebra enn i andre emneområder i TIMSS. Brekke foreslår å sette fokus på å styrke forbindelsen mellom aritmetikk og algebra. TIMSS 2015 viser imidlertid at norske 5.-trinnselever skårer lavest i emneområdet tall, hvor fokuset ifølge Bergem (2016) er på de fire regneartene, samt regning med brøk og desimaltall. Bergem skriver at det er forbedringspotensial i dette emnet.

Herscovics og Linchevski (1994) har gjennomført en studie med 22 Canadiske 7.-trinnselever hvor de undersøker et kognitivt skille mellom aritmetikk og algebra, og bruker likninger som verktøy. Forfatterne fant at noen av hindringene elevene opplever i algebra skyldes elevenes bakgrunn i aritmetikk. Dette viser seg blant annet ved at elevene tyr til numeriske metoder heller enn å operere med og på symbolene som inngår i likningene. I tillegg nevner Herscovics og Linchevski at elevene tenderer til å gjøre aritmetiske operasjoner fra venstre mot høyre, noe som medfører utfordringer når rekkefølgen er avgjørende. Forfatterne påpeker at elevene retter opp slike feil ved oppfølgingsspørsmål fra intervjueren, og at problemet ikke forekommer dersom uttrykket inneholder parenteser. Herscovics og Linchevskis konklusjon er at det er viktig å utvikle og utvide elevenes oppfatninger i aritmetikk med tanke på videre læring i algebra. Sett i sammenheng med Brekkes (2002) anbefaling og de norske resultatene fra TIMSS, kan det tyde på at å legge inn en innsats i aritmetikk på lavere trinn vil bidra til å gjøre det enklere å styrke forbindelsen mellom aritmetikk og algebra på 9.- og 10.-trinn.

3 Metode

I dette kapitlet gir jeg en beskrivelse av metoden jeg har brukt i studien, og begrunner valgene jeg har gjort ut i fra mitt forskningsspørsmål og teori om forskning. Først beskriver jeg forskningsdesignet jeg har brukt, og forteller om utvalget av informanter i studien. Videre beskriver jeg de ulike metodene for datainnsamling jeg har brukt: en innledende datainnsamling av 17 elevers besvarelser på oppgaver, og deretter intervju med fem av elevene. Sammen med beskrivelsen av datainnsamlingen redegjør jeg for oppgavene jeg har gitt til elevene. Deretter gjør jeg rede for noen etiske betraktninger jeg har gjort ved studien, før jeg til sist i kapitlet beskriver analysemetoden jeg har brukt på de innsamlede dataene. Her presenteres kodene og kategoriene fra analysearbeidet.

3.1 Forskningsdesign

Hensikten med studien har vært å få innsikt i hvordan elever bruker og oppfatter formler i tilknytning til oppgaveløsning i geometri. Fordi jeg har hatt fokus på elevenes perspektiv, har jeg tatt i bruk en kvalitativ forskningsmetode i tråd med Postholms (2010) anbefaling. Ved hjelp av denne metoden forsøker jeg å svare på forskningsspørsmålet:

Hvordan bruker og oppfatter fem 10.-trinnselever formler som inngår i geometrioppgaver om areal, omkrets og volum? og underspørsmålet:

Hvilke aspekter ved formler utgjør hindringer for 10.-trinnselever i deres løsning av geometrioppgaver?

Studien har fulgt et fleksibelt design. En studie med et slikt design tar vanligvis utgangspunkt i en idé eller et problem som forskeren forsøker å forstå (Robson, 2011), og tilnærming eller metoder kan endres underveis. I denne studien har jeg vært motivert av en matematikkoppgave i romgeometri og en elevs løsning av denne, og forsøkt å undersøke om andre elever på samme trinn viser liknende tendenser i den samme og i liknende oppgaver. Gjennom dette søker jeg å få en dypere forståelse av elevenes bruk og oppfatning av formler. Jeg begynte med å samle inn oppgavebesvarelser fra en hel klasse, og utviklet videre datainnsamlingsmetoder ut ifra besvarelsene på oppgavene. Mer om dette skriver jeg i avsnittet om datainnsamlingsmetoder.

Som forskningsdesign har jeg valgt en casestudie. Ifølge Yin (2014) er casestudie en gunstig forskningsmetode dersom forskningsspørsmålene er av typen *hvordan* eller *hvorfor*, og hvis man stiller spørsmål som søker en dyp beskrivelse av et sosialt fenomen. I min studie er hovedspørsmålet *hvordan* elevene bruker og oppfatter formler. Videre skriver Yin (2014) at fenomenet som undersøkes i en casestudie er nåtidig og avgrenset av en virkelig kontekst hvor fenomenet foregår, uavhengig av forskeren. Dette oppfylles i min studie ved at elever stadig bruker og oppfatter formler i løsningen av den type geometrioppgaver som jeg undersøker, uavhengig av min tilstedeværelse eller innvirkning.

Studien er avgrenset i tid og sted, noe som er med på å sette konteksten. I første omgang er studien avgrenset til skolen og elevgruppen som deltok i undersøkelsen, og tiden som ble gitt til å løse oppgavene. Videre vil nivået på oppgavene være en faktor i konteksten. I neste omgang innvirker tiden som ble brukt til intervjuer, grupperommet intervjuene foregikk i, og de spørsmålene som jeg stilte. Tidsspranget fra innsamling av oppgavebesvarelser til siste intervju ble avsluttet var på to uker. I løpet av denne tiden regnet alle de 17 elevene et oppgavesett, og fem av elevene deltok i et intervju. Hele klassen gjorde oppgavesettet, også de elevene som ikke hadde gitt samtykke til undersøkelsen, mens bare elever med samtykke leverte sine besvarelser til meg. Intervjuene ble gjennomført når klassen hadde arbeidstime, så de mistet ikke eksplisitt undervisningstid i et fag ved å delta i studien.

Postholm (2010) skriver at hensikten med undersøkelsen bestemmer hvilke og hvor mange caser man skal velge. Med utgangspunkt i oppgavebesvarelser har jeg i denne studien gjennomført fire intervjuer for å få dypere innsikt i elevers bruk og oppfatning av formler. Hvert enkelt intervjuobjekt eller par av intervjuobjekt utgjør dermed en case. Som jeg vil beskrive grundigere senere ble tre elever intervjuet individuelt, mens to elever ble intervjuet sammen. Slik er det til sammen fire caser: tre caser med én elev i hver case, og en case med to elever. Hver av casene skal bidra til å belyse elevers bruk og oppfatning av formler, og studien er slik det Stake (2005) kaller en instrumentell, kollektiv casestudie. Til tross for at Postholm skriver at det kan være mest hensiktsmessig med bare en case i et mindre forskningsarbeid for å kunne gå i dybden i den ene casen, har jeg valgt fire caser i denne studien. Dette har jeg gjort fordi jeg søker innsikt i bruk og oppfatning av formler hos flere elever for å ha større sjanse til å si noe mer generelt om 10.-trinnselevers bruk og oppfatning.

3.2 Valg av skole og informanter

Undersøkelsene som ligger til grunn for denne studien ble gjennomført i en klasse på 10.-trinn ved en ungdomsskole i Trondheimsområdet. Bakgrunnen for dette valget var at matematikkoppgaven som har vært min motivasjon for dette prosjektet, Kule-sylinder-oppgaven som beskrives nærmere senere i denne oppgaven, i utgangspunktet var gitt på eksamen for 10.-trinn for noen år siden. Det var derfor naturlig å velge informanter på dette trinnet. Jeg sendte en henvendelse til en lærer ved en ungdomsskole hvor jeg har hatt praksis i løpet av studiet, og forklarte kort om prosjektet. Forespørselen ble videreformidlet til flere lærere som underviste matematikk i 10.-trinn. En lærer meldte sin interesse for prosjektet, og hans klasse ble derfor valgt.

Hele klassen fikk utdelt samtykkeskjema i god tid før undersøkelsen var planlagt (se Vedlegg A). 17 elever, en blanding av jenter og gutter, returnerte skjema hvor foreldre eller foresatte hadde gitt sitt samtykke til sitt barns deltakelse i undersøkelsen. Jeg og læreren ble enige om at det var gunstig at hele klassen gjorde oppgavesettet. Dette valgte vi slik at ingen skulle gå glipp av undervisning ved å delta, samt at det lettet læreren for planleggingsarbeid før denne timen. Læreren mente at oppgavene kunne brukes i videre undervisning, og det var dermed hensiktsmessig at alle gjorde dem. Etter hvert som elevene fullførte besvarelsene sine kontrollerte læreren hvilke besvarelser jeg kunne ta med meg for videre analyse, mens læreren samlet inn de andre besvarelsene.

Jeg kjenner ikke til elevenes matematikkfaglige nivå eller karakter i faget, men ifølge læreren var nivået til de 17 elevene som utvalget bestod av spredt. Dette ser jeg på som en fordel, da datamaterialet dermed vil gi et mest mulig nyansert bilde av hvordan elevene bruker og oppfatter formler som inngår i oppgaver om areal, omkrets og volum. I tillegg var det ifølge både læreren og elevene en stund siden klassen hadde arbeidet med dette temaet. Læreren sa at de nylig hadde begynt med algebra, med å trekke sammen like ledd og liknende. Det neste planlagte temaet var likninger og formelmanipulasjon. At jeg kom inn på dette tidspunktet i undervisningen, ser jeg på som en fordel, siden elevene ikke bare reproduserer noe de lærte «i går» i besvarelsene sine, men virkelig viser hvordan de *ville brukt formler*. Det må nevnes at skolen bruker en lærebok som følger spiralprinsippet (Bakke & Bakke, 2007), og at dette mest sannsynlig medfører at elevene allerede hadde vært igjennom disse temaene både i 8.- og 9.-trinn.

Etter innsamlingen av oppgavebesvarelsene, har jeg gjort ytterligere innsnevring i utvalg før andre del av datainnsamlingen, hvor jeg har intervjuet fem elever. Dette utvalget ble gjort på bakgrunn av oppgavebesvarelsene jeg fikk inn. Fokuset mitt var å velge elever som kunne gi meg mer informasjon som kunne hjelpe meg i å finne svar på forskningsspørsmålet mitt. Som jeg vil beskrive senere, så jeg i den tidligste fasen av analysearbeidet at elevene var mer tilbøyelige til å besvare oppgavene med tall enn oppgavene med bokstaver. Jeg har derfor valgt å intervjue elever som viser denne tendensen. Andre elever som ble valgt til intervju hadde levert besvarelser med funn jeg fant interessante i forhold til mitt forskningsspørsmål, som jeg ønsket å undersøke nærmere. Jeg skulle gjerne ha intervjuet flere av elevene, men på grunn av studiens omfang og tiden jeg hadde til rådighet med elevene, ble det med disse fem elevene.

3.3 Datainnsamlingsmetoder

To ulike metoder for datainnsamling er brukt, og i det følgende gir jeg en beskrivelse av disse. Først beskriver jeg gjennomføringen av den innledende datainnsamlingen med innhenting av besvarelser fra oppgaveløsning, samt en beskrivelse av oppgavene som ble brukt. Herunder gir jeg en grundigere beskrivelse av Kule-sylinder-oppgaven, en av oppgavene som ble brukt til datainnsamlingen. Dernest forteller jeg om intervjuene, og om prosessen fra innledende datainnsamling til gjennomføring av intervju.

3.3.1 Innsamling av oppgavebesvarelser fra elever

3.3.1.1 Beskrivelse av innsamlingen

Den innledende datainnsamlingen ble gjort ved at jeg samlet inn 17 elevbesvarelser på et oppgavesett som jeg hadde laget. Innledningsvis presenterte jeg meg og fortalte kort om hvorfor jeg gjennomførte studien. Dette var elevene som nevnt også informert om i samtykkeskjemaet de leverte før innsamlingen. Jeg informerte om at dette ikke var en prøve, og at jeg derfor ikke var ute etter «det riktige svaret», men heller deres tanker om løsning av oppgavene. Jeg ønsket å finne ut hva som hindret dem i å fullføre dersom de ikke kom til en endelig løsning. Slik oppfordret jeg elevene til å skrive ned noen tanker om hvordan de kunne ha løst oppgavene selv om de ikke kom til en endelig løsning, for eksempel hva de mangler for å kunne gjennomføre denne løsningen. Her tenkte jeg på om de ikke husket en formel de trengte, eller liknende. Denne situasjonen vil jeg drøfte senere, når jeg vurderer kvaliteten til studien i avsnitt 5.4. I tillegg til den praktiske informasjonen, takket jeg elevene for innsatsen og bidraget.

Innsamlingen av oppgavebesvarelsene ble gjennomført i det faste klasserommet til klassen, et relativt romslig klasserom innredet med pulter, tavle og bokskap. Elevene fikk i underkant av en skoletime på 60 minutter til å løse oppgavene. Oppgavene ble besvart skriftlig og individuelt, men klasserommet var møblert slik at elevene satt parvis under arbeidet. Det kan derfor har forekommet samarbeid eller «smugkikking». I klasserommet var jeg, læreren og en lærerassistent under gjennomføringen. Assistenten var i klasserommet på grunn av at det fantes elever i klasserommet med behov for ekstra ressurser. Detaljene rundt dette kjenner ikke jeg til. Jeg gikk rundt og kikket mens elevene arbeidet, og det gjorde også læreren og assistenten. Elevene hadde mulighet til å stille spørsmål, men jeg valgte å være tilbakeholden med å gi hjelp utover å bekrefte dersom de lurte på om de hadde forstått oppgaven riktig. Dette valgte jeg fordi jeg ønsket å oppnå mest mulig naturalistiske data som skulle belyse forskningsspørsmålet mitt. Dersom jeg på noen måte hjalp dem videre i løsningsprosessen, ville dette ha gitt misvisende data.

Elevene skrev besvarelsene med navn på utdelt papir. Oppgavearkene hadde en egen rubrikk for navn, slik at jeg kunne sammenkoble løsningsark med oppgaveark. Dette ønsket jeg å gjøre i tilfelle noen av elevene skrev eller markerte noe på oppgavearket som kunne være verdifullt for meg i videre arbeid. At besvarelsene var markert med navn var også nødvendig for å kunne identifisere elevene jeg ønsket å intervjue i etterkant.

3.3.1.2 Beskrivelse av oppgaver brukt til datainnsamling

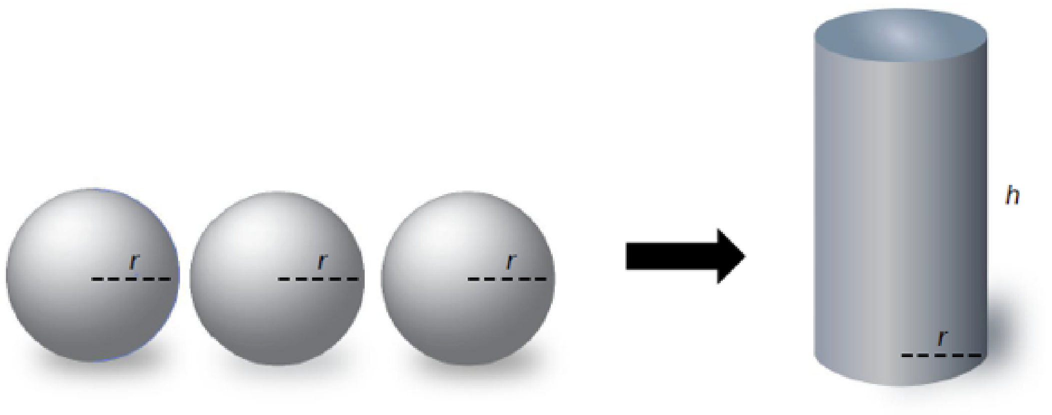
Som nevnt innledningsvis hadde jeg laget oppgavene som elevene jobbet med. Siden motivasjonen for denne studien var en oppgave hentet fra geometrien, valgte jeg å lage geometrioppgaver med fokus på areal, omkrets og volum, men hvor algebra spiller en viktig rolle som løsningsverktøy. Hensikten var å finne ut noe om hvordan elevene bruker og oppfatter formler i arbeidet med oppgavene. Settet består av fire oppgaver, med til sammen åtte deloppgaver (Oppgavearket i sin helhet ligger vedlagt i Vedlegg B). Med unntak av Oppgave 3, er det jeg som har laget alle oppgavene. Jeg valgte å la rekkefølgen på oppgavene være slik at det jeg anser som den vanskeligste oppgaven ikke står sist. Min vurdering er at det er Oppgave 3 som er vanskeligst, fordi den er mest kompleks og abstrakt. Rekkefølgen ble valgt fordi jeg ønsket at flest mulig skulle lese og forsøke å svare på denne oppgaven, uavhengig av hvor raske de er til å løse oppgaver. Jeg informerte elevene om denne «tilfeldige» rekkefølgen, slik at de ikke skulle miste motivasjonen av å møte en vanskelig oppgave midtveis. Hvorvidt denne strategien fungerte, vil jeg drøfte senere i denne oppgaven. I det følgende gir jeg en beskrivelse av oppgavene som inngår i settet, samt en begrunnelse av hvorfor de ulike oppgavene er gitt.

Først vil jeg gi en beskrivelse av *Kule-sylinder-oppgaven*, Oppgave 3 i oppgavesettet, som har vært motivasjonen for denne studien. Denne omtales i det følgende som Kule-sylinder-oppgaven. Oppgaven er vist i Figur 3.1.

Oppgave 3)

Tre like store kuler har alle radius r. En sylinder har samme radius r som kulene og høyde h. Sylinderen skal ha like stort volum som de tre kulene til sammen.

Formelen for volumet av en kule er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Bruk formler og bestem høyden h i sylinderen uttrykt ved r.

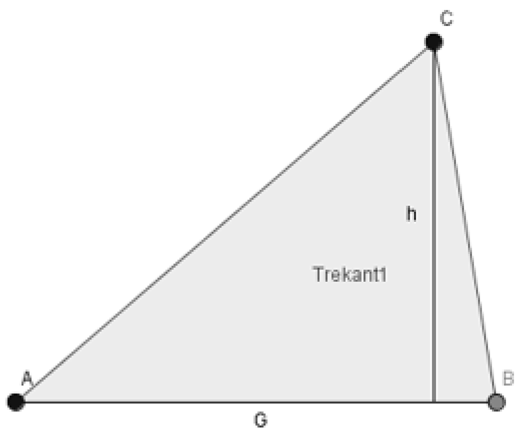
Figur 3.1 Kule-sylinder-oppgaven

Kule-sylinder-oppgaven er hentet fra eksamen i matematikk for 10.-trinn i 2013 (Utdanningsdirektoratet, 2013). Grunnen til at jeg har valgt denne oppgaven er at en gutt jeg kjenner, «Lars», spurte meg om å løse denne, og viste meg sin løsning. Han viste meg dette i privat sammenheng. Lars hadde valgt en tallverdi for *r* og brukt dette for å løse oppgaven. Lars begrunner denne metoden med at han synes det er enklere å jobbe med tall enn med bokstaver. Jeg brukte selv en likning hvor jeg satte inn volumformlene for kule og sylinder. Vi fikk det samme svaret, men metodene våre var ulike. Jeg har tatt med oppgaven for å undersøke om flere elever har samme strategi som Lars, og om bokstaver i formler og likninger virker like avskrekkende på flere elever. For å belyse temaet ytterligere har jeg i tillegg tre andre oppgaver, som jeg beskriver i det følgende.

Oppgave 1 (Figur 3.2) består av tre delspørsmål og er knyttet til ulike bruksmåter for formler. Denne oppgaven er laget med tanke på Janviers (1996) beskrivelse av ulike måter å bruke og tolke formler.

Oppgave 1)

a) Regn ut arealet av trekanten ABC, når h = 3 og G = 4.



b) Omkretsen i en sirkel er gitt ved $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

Hva er radiusen i en sirkel med omkrets 8 π?

c) Finn et uttrykk for radiusen i en sirkel når du vet at formelen for arealet i sirkelen er $A = \pi \cdot r^2$.

Figur 3.2 Oppgave 1 brukt til datainnsamling

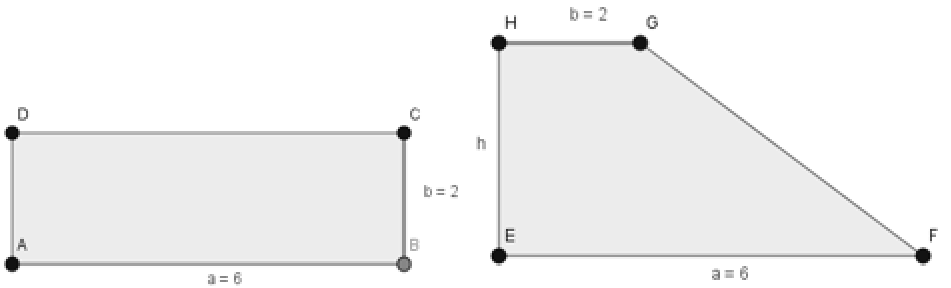
I Oppgave 1a er tanken at man har oppgitte verdier og kommer fram til svaret ved direkte innsetting. Janvier (1996) sier at slike oppgaver kan løses uten å oppfatte noen størrelse som ukjent. I Oppgave 1b blir oppgaven litt annerledes, da man har oppgitt omkretsen til en sirkel og formelen for denne, og blir bedt om å finne radiusen. Dette er gjort i tråd med Janviers påstand om at dette gjør oppgaven til en helt annen, med tanke på at det nå inngår en ukjent størrelse i oppgaven, og at formelen må behandles for å kunne løse oppgaven. Den siste deloppgaven, Oppgave 1c, inneholder ingen tall, og ber om å finne et uttrykk for radiusen i en sirkel, når man får oppgitt formelen for arealet av en sirkel. Den totale hensikten med Oppgave 1 er å kartlegge hvilke bruksmåter av formler elevene mestrer, og i hvilken grad elevene opplever behov for *avslutning*. Jeg mente det var hensiktsmessig å gjøre dette for å senere kunne si noe om elevenes arbeid med de andre oppgavene i settet.

I Oppgave 2 (Figur 3.3) har jeg hentet inspirasjon fra Kule-sylinder-oppgaven som er presentert over. Temaet for Oppgave 2 er areal av rektangel og trapes, og de to deloppgavene etterspør høyden i trapeset når det er gitt at arealet av rektangelet og trapeset er like stort.

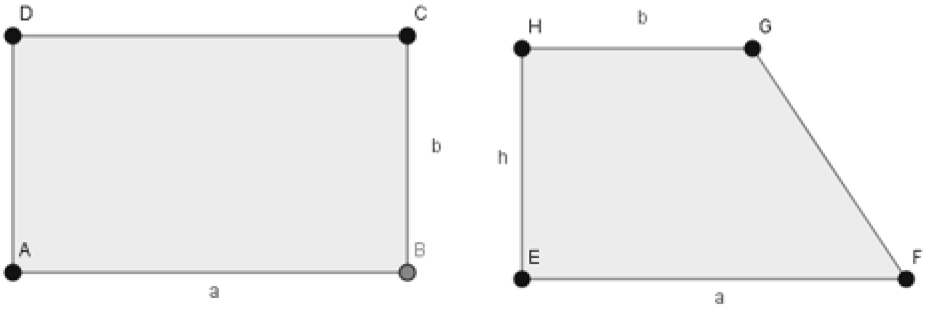
Oppgave 2)

Formelen for arealet av et trapes er: $A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

a) Arealet av trapeset EFGH er like stort som arealet av rektangelet ABCD i figurene under. Hva er høyden *h* i trapeset EFGH?



b) I figurene under er sidene *a* og *b* like lange i rektangelet ABCD som i trapeset EFGH. Arealet av trapeset skal være like stort som arealet av rektangelet. Finn et uttrykk for høyden *h* i trapeset uttrykt ved sidelengdene *a* og *b*.



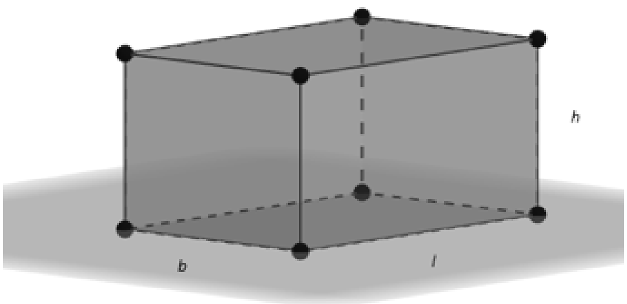
Figur 3.3 Oppgave 2 brukt til datainnsamling

I Oppgave 2a har man tallverdier, mens i Oppgave 2b spørres det etter et generelt uttrykk for høyden. I begge tilfeller må man bruke alle opplysninger gitt i oppgaven for å komme til en løsning. Hensikten med denne oppgaven er å sammenlikne elevenes løsninger når deloppgavene spør etter det samme, men hvor man bare har tallverdier i den ene deloppgaven. Jeg var her interessert i å se om elevene brukte informasjonen fra Oppgave 2a i Oppgave 2b, og senere kartlegge hvilke utfordringer som eventuelt oppstår når man ikke lenger har tallverdier.

Volum av prisme er temaet som utforskes i Oppgave 4 (Figur 3.4). Hensikten med denne oppgaven er å undersøke om, og eventuelt hvordan, elevene anvender formler når de får oppgitt noen tallverdier, og bes om å undersøke hvilke verdier de andre størrelsene som inngår i formelen kan ta. På samme måte som Oppgave 1 er denne oppgaven inspirert av Janvier (1996) og ulik bruk av formler. For å sikre meg at elevene ikke sa seg fornøyde med én mulig løsning, ba jeg dem om å finne så mange muligheter som de kunne. Siden jeg særlig er interessert i elevenes tanker og resonnement omkring generelle formler, var det naturlig å spørre etter et uttrykk med bokstaver i Oppgave 4b.

Oppgave 4)

Volumet i et prisme med bredde *b*, lengde *l* og høyde *h* er gitt ved formelen $V = b \cdot l \cdot h$.



I prismet i figuren er volumet $V = 72\ cm^3$ og høyden *h* = 3 cm. Lengden *l* og bredden *b* er hele tall.

a) Hvilke tall kan *l* og *b* være? Finn så mange muligheter for *l* og *b* som du kan.
b) Kan du finne et uttrykk for lengden *l* i prismet ved hjelp av bredden *b?*

Figur 3.4 Oppgave 4 brukt til datainnsamling

Som nevnt tidligere er elevenes besvarelser på disse oppgavene grunnlaget for den videre datainnsamlingen. Dette beskrives i neste avsnitt, om intervju.

3.3.2 Intervju

En viktig del av datamaterialet i denne studien er basert på intervjuer. Kvale og Brinkmann (2009) skriver at det kvalitative forskningsintervjuet forsøker å forstå verden fra intervjupersonenes side. I mine intervjuer forsøker jeg å få innblikk i elevenes tanker omkring formler i geometrioppgaver. Kvale og Brinkmann skriver at i et intervju er intervjueren det viktigste instrumentet, og kvaliteten avhenger slik av intervjuerens kunnskaper, følsomhet og empati. Intervjueren lytter til hvordan folk uttrykker sine oppfatninger og meninger med egne ord (Kvale & Brinkmann, 2009). Dette er noe jeg i stor grad har forsøkt å få til i gjennomføringen av intervjuene, med tanke på hvilke spørsmål jeg har stilt og hvordan jeg har tedd meg underveis. Aspekter rundt intervjuprosessen vil jeg redegjøre for i det følgende.

Jeg gjennomførte til sammen fire intervjuer med fem elever. Hvor mange intervjuer som skal gjennomføres er et av flere metodevalg som Kvale og Brinkmann (2009) nevner i forbindelse med intervju som datainnsamlingsmetode. Dette valget, som nevnt i beskrivelsen av utvalget, ble gjort med utgangspunkt i besvarelsene på oppgavene, og tiden jeg hadde til rådighet. Jeg hadde i analysearbeidet med besvarelsene funnet hvilke elever jeg ønsket å prate med. Siden jeg på forhånd ikke visste hvor lang tid hvert intervju ville ta, men hvor lang tid jeg hadde til rådighet, valgte jeg ut flere elever jeg kunne tenke meg å prate med, og satte opp en prioritert rekkefølge ut ifra hvilke elever jeg trodde ville bidra i størst grad med å besvare forskningsspørsmålet mitt. Utvelgelsesprosessen vil bli grundig beskrevet i avsnittet om analysemetode.

Forberedelsene til intervjuene gikk ut på å lage en god intervjuguide for hvert intervju. Jeg valgte å ha individuelle intervjuguider, siden jeg ønsket å få innsikt i den enkelte elevs tanker rundt løsningsprosessen av oppgavene. Svarene fra elevene skulle ikke sammenliknes, men heller belyse ulike aspekter ved løsning av denne typen geometrioppgaver. Jeg tok derfor utgangspunkt i besvarelsene, og brakte med elevenes besvarelser til intervjuene. En slik intervjusituasjon kalles et fokusintervju, en intervjutype som anbefales av Robson (2011) når et spesifikt fenomen skal belyses.

I tre av intervjuene snakket jeg med en og en elev, mens jeg valgte å intervjue to elever sammen i det ene intervjuet. Bakgrunnen for dette valget var at for-analysen av oppgavebesvarelsene viste at disse to elevene i stor grad hadde svart likt på oppgavene. Jeg hadde derfor en mistanke om at elevene hadde samarbeidet eller sett på hverandre under oppgaveløsningen, og for å sikre meg informasjon om løsningsprosessene deres fant jeg det hensiktsmessig å intervjue disse to elevene sammen. Dette intervjuet kan kalles et fokusgruppeintervju (Robson, 2011), hvor fokuset, på samme måte som i de andre intervjuene, var på elevenes besvarelser, men hvor to elever intervjues sammen. Robson nevner fordeler med et slikt intervju, for eksempel at gruppedynamikk kan hjelpe til med å holde fokuset på de viktigste emnene, og at deltakerne kan stimulere hverandre gjennom kommentarer og tanker. Dette er aspekter jeg tok med meg i planleggingen av dette intervjuet.

Alle intervjuene fikk en halv-strukturert form (Robson, 2011), hvor jeg gikk kronologisk gjennom de ulike deloppgavene i oppgavesettet sammen med elevene. Elevene ble oppfordret til å fortelle om løsningene sine, og jeg stilte oppfølgingsspørsmål eller spørsmål for å oppklare hva elevene mente underveis. I intervjuguiden hadde jeg skrevet aktuelle spørsmål til hver deloppgave, noe som hjalp meg med å huske de spørsmålene jeg ønsket å få svar på. Samtidig kunne jeg krysse av i intervjuguiden etter hvert som elevene svarte på noe interessant. En slik bruk av intervjuguiden, som en sjekkliste, samsvarer med Robsons beskrivelse av halv-strukturerte intervjuer. Underveis i intervjuet måtte jeg ta noen valg om hva jeg ville grave mer om. På grunn av tidsaspektet, valgte jeg å ikke diskutere Oppgave 4 i alle intervjuene. Dette gjorde jeg fordi jeg mente at de første tre oppgavene ville gi mer relevante data. Jeg har derfor ikke brukt data som er tilknyttet til Oppgave 4 i analysen.

Et metodevalg som Kvale og Brinkmann (2009) nevner er hvorvidt man skal ta lydopptak av intervjuene. Jeg valgte å bruke diktafon for å ta lydopptak under intervjuene, for å best mulig konsentrere meg om å få flyt i samtalen, lytte til eleven og stille de rette oppfølgingsspørsmålene. På denne måten slapp jeg å ta skriftlige notater, og dokumentasjonen av datamaterialet ble også naturlig og uten tolkning. Å ta lydopptak under intervju er anbefalt av Robson (2011).

I etterkant av hvert intervju tok jeg noen minutter for å notere litt om situasjonen, for eksempel hvordan stemningen var, eller hvis det var noe spesielt interessant som framkom fra samtalen. Disse notatene var til hjelp i analysearbeidet, da jeg ut ifra disse hadde et visst fokus når jeg jobbet meg gjennom datamaterialet. Dette vil jeg utdype når analysemetoden beskrives senere i dette kapitlet. Notatene kunne også være til hjelp dersom noe skulle gå galt med tanke på lydopptaket.

3.4 Etiske betraktninger

I løpet av arbeidet med masterprosjektet har jeg måttet gjøre flere etiske betraktninger. En av de første tingene jeg gjorde da jeg startet med prosjektet, var å undersøke hvorvidt prosjektet var meldepliktig. Siden jeg samlet inn elevenes besvarelser med navn, sendte jeg inn meldeskjema til NSD (Norsk senter for forskningsdata, 2016). Jeg fikk positivt svar på dette noen dager før jeg gjennomførte datainnsamlingen. Videre vil jeg beskrive hvordan jeg har fulgt Kvale og Brinkmanns (2009) tre regler for etikk i kvalitativ forskning. Disse er *informert samtykke*, *konfidensialitet* og *konsekvenser*.

Elevene som har deltatt som informanter i denne studien er under 18 år, og jeg ba derfor om foresattes samtykke til elevenes deltakelse. Dette ble gjort ved hjelp av et samtykkeskjema med informasjon om studien (Vedlegg A), hva jeg ønsker å finne ut, hva det innebærer å delta, hvordan dataene samles inn og hvordan dataene som samles inn behandles. I skrivet informerer jeg om at dataene kun vil bli sett av meg og min veileder, og at dataene vil bli slettet etter prosjektets slutt. Det ble satt en frist for levering av samtykkeskjemaet i god tid før datainnsamlingen var planlagt. I tillegg til dette skjemaet, informerte jeg klassen muntlig om hvorfor jeg gjennomførte studien, og hva jeg ønsket å finne ut, før de begynte med oppgavene. Før intervjuene startet ble hver elev som skulle intervjues spurt om de syntes det var greit å delta i intervju, og om jeg kunne bruke lydopptaker. Også her minnet jeg dem på hvorfor jeg gjennomførte denne studien, samt at det når som helst var mulig å avbryte intervjuet, og trekke seg fra undersøkelsen dersom de skulle ha noen grunn til å ønske det. Jeg minnet om at dette kunne de gjøre uten å måtte oppgi noen grunn til meg. Gjennom disse hensynene har jeg opprettholdt *informert samtykke.*

I det skriftlige arbeidet i denne studien er skolen, læreren og elevene holdt anonyme. Det samme gjelder eleven som i sin tid viste meg Kule-sylinder-oppgaven. Dette er gjort ved at alle navn på deltakere er pseudonymer. Om skolen har jeg bare skrevet at det er en ungdomsskole i Trondheim, og det er ikke gitt andre opplysninger som skal kunne identifisere hvilken skole det er snakk om. Som nevnt innledningsvis i dette avsnittet ble prosjektet meldt til NSD, og jeg innhentet skriftlig samtykke om deltakelse. Anonymiseringen var en av forutsetningene for å innhente dette samtykket. De aspektene ved studien jeg har beskrevet her inngår i å opprettholde studiens *konfidensialitet*.

Til sist vil jeg redegjøre for mulige *konsekvenser* ved å delta i studien. Dette er noe jeg har måttet ta hensyn til både i utformingen av prosjektdesignet og i det videre arbeidet. Et aspekt er tiden det skal ta for elevene å delta, og hva elevenes deltakelse vil innebære for læreren. I denne studien har deltakelse innebåret oppgaveløsning i en hel matematikktime, og intervjuer av varierende lengde i to arbeidstimer. Som forklart tidligere, valgte jeg og læreren å la alle elevene i klassen løse oppgavesettet, slik at dette ikke ble noe spesielt for dem som deltok i studien. Dette lettet i tillegg planleggingsarbeidet til læreren. Læreren hadde også planlagt å bruke oppgavene i senere undervisning, siden temaet for oppgavene var relevant for pensum i faget. Jeg vil anta at resultatene fra studien kan være interessante for læreren, og jeg har derfor valgt å gi ham masteroppgaven når den er ferdig. I samråd med læreren valgte jeg å komme tilbake til skolen og gjennomføre intervjuene i timer hvor elevene hadde arbeidstime. Dette er timer hvor elevene kan arbeide med det de ønsker på arbeidsplanen, samtidig som de har en lærer til stede og kan få hjelp. Gjennom å ta ut elevene til intervju i disse timene, forstyrret jeg ikke planlagt undervisning i et fag, og elevene gikk ikke glipp av undervisning. En ulempe for elevene kan være at de gikk glipp av verdifull arbeidstid ved å delta i intervju. Samtidig viste elevene en glede og interesse for diskusjonen av oppgavene i intervjuene, og intervjusituasjonen kan dermed ha vært lærerik for dem.

3.5 Analysemetode

Til sist i dette kapitlet vil jeg redegjøre for analysemetoden jeg har brukt på datamaterialet. I de foregående avsnittene i kapitlet har jeg nevnt at jeg begynte å analysere datamaterialet fra den innledende datainnsamlingen. Nå vil jeg gi en grundigere forklaring av dette, i tillegg til å beskrive hvordan jeg gikk fram i den videre analysen. Helt til slutt presenteres kategoriene med de tilhørende kodene jeg har brukt.

3.5.1 For-analyse av elevbesvarelser

Med *For-analyse* mener jeg den aller første prosessen som ble gjort i analysearbeidet, *før* intervjuene ble gjennomført. Dette har jeg allerede nevnt i avsnittet om intervju, og gir her en grundig beskrivelse av prosessen.

Etter at den innledende datainnsamlingen med innhenting av oppgavebesvarelser var gjennomført, begynte jeg analyseprosessen med oppgavebesvarelsene. Jeg leste alle 17 besvarelsene, og laget en tabell hvor jeg skrev inn hva hver enkelt elev hadde gjort på hver deloppgave for å skaffe meg oversikt over materialet. Her ga jeg hver elev et nummer fra 1 til 17, slik at elevens navn ikke skulle være inkludert i analysearbeidet. Et utdrag av denne tabellen er vist i Figur 3.5. Utdraget viser mine notater om to elevers besvarelser. Kolonnen til høyre i tabellen er mine kommentarer, hvor jeg blant annet noterte om jeg ønsket å ta med eleven til intervju.

Gjennom denne prosessen fikk jeg en god oversikt over datamaterialet, og kunne begynne å se etter tendenser. Etter at dette arbeidet var gjort, laget jeg en ny tabell (se utdrag i Figur 3.6), hvor jeg sorterte besvarelsene på hver enkelt oppgave etter ulike kategorier for svar og løsningsmetoder. Eksempler på slike kategorier er vist i utdraget i Figur 3.6 (Tabellen i sin helhet ligger vedlagt i Vedlegg E). Jeg plottet inn nummeret til elever som for eksempel ikke hadde svart på oppgaven, elever som hadde skrevet riktig svar men ikke vist framgangsmåte. For å visualisere mest mulig, brukte jeg tusjer og gav hver elev en farge, og markerte tallene i tabellen med fargene. Slik kunne jeg tydelig se hvilken svarkategori den enkelte eleven falt under på de ulike deloppgavene.

Oppgave/ navn	Oppgave 1a)	Oppgave 1b)	Oppgave 1c)	Oppgave 2a)	Oppgave 2b)	Oppgave 3) Kule-sylinder	Oppgave 4a)	Oppgave 4b)	Kommentar
1	Skrevet inn tall for høyde og grunnflate i figuren – men ikke kommet videre derfra						Skrevet inn tall i figuren – ikke gjort noen beregninger		Ikke gjort noen av oppgavene, men skrevet en lang tekst til svar. Ikke relevant for intervju
2	Satt opp at 4*3/2 = 6. Brukt enhet cm.	Funnet at r = 4. Skrevet at 2*4 = 8*pi. Usikker på metode.	Funnet at A/pi er r^2. Ikke gått videre derfra til uttrykk for r.	Regnet ut arealet av rektangelet. Deretter funnet ut at hvis h= 3 så stemmer det. Satt inn dette i formel for areal av trapes. Ikke brukt likning. Prøvd seg fram?	Kommet fram til formelen $h = \frac{A}{\frac{a+b}{2}}$ ved hjelp av oppgave a). Sjekker at det stemmer med tallene fra a).	Har satt opp $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 3$, og kommet fram til at $h = V:\pi r^3$. Kommer dette av at h=3 i forrige oppgave, eller at det er tre kuler? Bruker ikke sylinderen til noe – så vidt jeg kan skjønne.	Regner ut at 72:3 = 24. Lager tabell med mulige verdier for b og l. Skriver ingenting om at både l og b kan ta de forskjellige verdiene hvis produktet av dem er 24.	Kommer fram til formelen $l = V:h:b$. Kan komme av min upresise formulering.	Rask. Skriver lite på oppgavene, men har mange «riktige» svar. Relevant for intervju

Figur 3.5 Utdrag fra oversiktstabell fra analyseprosessen

	1a)	1b)	1c)
Ikke besvart		1, 1, 4, 10, 14, 16	1, 4, 7, 9, 10, 14, 15, 16, 17
Riktig u/metode		2, 3, 9, 11, [illegible], 15	
Formel/ likning og riktig	2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, [illegible], 14, 15, 16, 17	5, 8	5, 8
Feil formel	3, 6		
Metode som ikke fører fram		6, 17	3, [illegible]
Bruker tallverdier		5, 8, 9, 11, 12, 13, 15	11,
Formel/likning og feil			6, 2
Påbegynt løsning			

Figur 3.6 Utdrag fra tabell med kategorier for svar og løsningsprosesser

Ut ifra denne tabellen valgte jeg hvilke elever jeg ønsket å intervjue. Som nevnt i avsnittet om intervju valgte jeg ut flere aktuelle elever, og satte opp en prioritert rekkefølge for intervjuene.

Besvarelsene viste at enkelte elever hadde skrevet svært lite, og disse elevene ble derfor raskt utelukket, siden jeg helst ville prate med elever hvor jeg kunne ta utgangspunkt i deres arbeid. Elevene som ble valgt ut hadde typisk svart på det meste, bortsett fra en eller to deloppgaver. Videre hadde elevene fått til noe, men ikke alt, og gjerne begynt på en løsning, men ikke kommet til noen endelig konklusjon. Jeg fant det interessant å prate med disse elevene fordi det var tydelig av besvarelsene at de hadde begynt en tankeprosess om oppgavene, og denne tankeprosessen var jeg interessert i. Hvorfor stoppet det opp akkurat der? Og dersom de ikke hadde svart på en deloppgave, undret jeg meg over hva det var med den ene oppgaven som gjorde at de ikke hadde besvart den? Slike ting ble dermed tema for intervjuene, som jeg allerede har beskrevet tidligere i dette kapitlet.

3.5.2 Analysemetode for intervjuer og elevbesvarelser

Jeg har til nå redegjort for *For-analysen,* analysen jeg gjorde før jeg begynte med intervjuene. Jeg har videre benyttet meg av en konstant komparativ analysemetode (Corbin & Strauss, 2008) på det totale datamaterialet. I det følgende gir jeg en beskrivelse av hvordan jeg har gått fram.

I etterkant av hvert intervju skrev jeg som nevnt ned noen notater om hvilke oppfatninger jeg satt igjen med. Intervjuene transkriberte jeg fra lydopptak til tekst (se transkripsjonsnøkkel i Vedlegg C), og elevene fikk her pseudonymer. Allerede under transkripsjonen la jeg merke til tendenser i datamaterialet, for eksempel at brøk i formeluttrykk kunne være en hindring for elevene ved formelmanipulasjon. Disse observerte tendensene noterte jeg på papir. Videre analyse gjorde jeg av utskrifter av de transkriberte intervjuene. Jeg begynte med å lese hvert intervju, og brukte markeringstusj for å merke det som var interessant. Jeg tok for meg utsagn for utsagn. Dette gjorde analysearbeidet lettere enn å skulle se på ord for ord, slik Corbin og Strauss (2008) skriver. Her kom notatene fra transkriberingen til nytte, siden disse hjalp meg med å huske at for eksempel brøk var et interessant aspekt som jeg kunne se grundigere på. I margen skrev jeg hva jeg tolket, begrunnet hvorfor et markert utsagn var relevant for problemstillingen, men også korte referanser til aktuell teori som kan ses i sammenheng med dataene. Denne prosessen med navnsetting av fenomener i materialet er det Corbin og Strauss kaller *åpen koding.*

Etter et intervju var lest, oppsummerte jeg hvilke funn jeg hadde gjort på baksiden av utskriften. Ved sammenlikning av alle fire oppsummeringene, fant jeg at noen aspekter gikk igjen i flere intervjuer, og kunne relateres til hverandre. Eksempler på slike aspekter er *innsetting av tall*, *brøk* og *parentes*. De relevante aspektene som gikk igjen ble mine koder. Denne delen av analyseprosessen kaller Corbin og Strauss (2008) *aksial koding.*

Videre så jeg at kodene hørte sammen og kunne grupperes. For eksempel oppdaget jeg at elevene viste tegn til problemer med formelmanipulasjon når *brøk* og *parentes* var involvert. Disse kodene ble derfor gruppert sammen, i kategorien *Hindringer knyttet til regneteknikk*. Grupperingen av kodene til kategorier er det Corbin og Strauss (2008) kaller *selektiv koding.* Alle mine kategorier med tilhørende koder presenteres i Tabell 3-1 nedenfor.

Tabell 3-1 Kategorier og koder fra analysearbeidet

Kategori	**Koder**
Hindringer knyttet til regneteknikk	Brøk Parentes
Hindringer knyttet til forståelse og oppfatning av formler	Begrepsbilde av formler Forståelse av formler Innsetting av tall Plassering av bokstaven i en formel
Hindringer knyttet til bruk av formler i skriftlige besvarelser	Kombinasjon av opplysninger Skriftlig kommunikasjon

Forklaringene av kategoriene med tilhørende koder følger i de respektive avsnitt i neste kapittel. På grunn av det store datamaterialet mitt, er analysen i hovedsak basert på materiale fra intervjuene, men der det er aktuelt å belyse mine analytiske påstander utover hva intervjumaterialet gir, har jeg hentet eksempler fra de skriftlige besvarelsene. Som nevnt er ikke data fra Oppgave 4 brukt i analysen. Det vil framgå av analysekapitlet hvor i datamaterialet eksemplene er hentet fra.

4 Analyse

I dette kapitlet vil jeg presentere resultater fra analysearbeidet, for å forsøke å svare på forskningsspørsmålet: *Hvordan bruker og oppfatter fem 10.-trinnselever formler som inngår i geometrioppgaver om areal, omkrets og volum?* og underspørsmålet: *Hvilke aspekter ved formler utgjør hindringer for 10.-trinnselever i deres løsning av geometrioppgaver?*

Dette gjør jeg ved å ta for meg de tre kategoriene; *Hindringer knyttet til regneteknikk, Hindringer knyttet til forståelse og oppfatning av formler* og *Hindringer knyttet til bruk av formler i skriftlige besvarelser*, og eksemplifisere funnene ved utdrag fra datamaterialet. Kapitlet består av et delkapittel for hver kategori, hvor hvert delkapittel har egne avsnitt for hver av de tilhørende kodene. En overordnet beskrivelse av kategorien gis først i delkapitlet, og kodene presenteres fortløpende i avsnittene som omhandler dem.

4.1 Hindringer knyttet til regneteknikk

Kategorien *Hindringer knyttet til regneteknikk* viser eksempler på ulike hindringer elevene har når de jobber med formler, hvor hindringene har bakgrunn i deres regneteknikk. Kodene i denne kategorien er *Brøk* og *Parentes.* Dette er aspekter ved formelmanipulasjon hvor jeg har opplevd at elevene møter hindringer eller utfordringer, for eksempel ved at de stiller meg spørsmål under intervjuet om hvordan de kan få til en manipulasjon, men også hvor jeg har observert at elevene stopper opp i de skriftlige besvarelsene sine. Elevene har påpekt at det er lenge siden de jobbet med geometri sist, og gjennom samtale med læreren deres fant jeg ut at formler og likninger er det neste temaet i undervisningen, så dette er noe jeg vil ta i betraktning i drøftingen av resultatene som presenteres her.

4.1.1 Brøk som representasjonsform og operasjoner med og på brøk

Koden *Brøk* ble til gjennom transkripsjon og lesing av det som blir sagt om Kule-sylinder-oppgaven i intervjuene. Oppgaven diskuteres i samtlige intervjuer, og i alle tilfeller møter elevene på uttrykk med brøk. Dette henger sammen med at oppgaven baseres på volumet av kuler, med formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, som inneholder brøk. Utsagnene til elevene tolker jeg som at brøk hindrer dem i å gjøre de nødvendige formelmanipulasjonene for å komme fram til det ønskede svaret. Koden beskriver slik utfordringer med brøkregning i tilknytning til formelmanipulasjon.

4.1.1.1 Brøk som representasjonsform oppleves som vanskelig

Tendenser i datamaterialet kan tyde på at brøk oppleves som vanskelig blant elevene. Jeg spør Bjørn om uttrykket $3 \cdot \left(\frac{4}{3}r\right)$ kan forenkles. Bjørn viser at brøken oppleves som vanskelig ved å si: «4 delt på 3 er jo kanskje ikke så enkelt, da, jeg vet ikke.» Dette tolker jeg som at det er *brøken* i uttrykket som Bjørn opplever som vanskelig, eller som noe som burde forenkles. Bjørn får tilbud om kalkulator, men takker nei, noe som kan tyde på at Bjørn ikke opplever en kalkulator som et hjelpemiddel til å komme videre med uttrykket. Bjørn ser det dermed ikke som et alternativ å bruke denne for å gjøre utregninger med tallene som står i uttrykket. I tillegg har Bjørn en parentes i uttrykket, som kan ha vært en hindring. Dette vil kommenteres ytterligere i avsnittet om *Parenteser.*

Også Jon uttrykker at brøk gjør manipuleringen vanskelig. Om løsningen sin av Kule-sylinder-oppgaven (Figur 4.7) sier han: «Jeg gjorde om den til desimaltall for å få det enklere å regne med.». Her sier Jon at han regnet om brøken $\frac{4}{3}$ til desimaltall, og at det gjør det enklere å regne med når han beregner volumet av en kule. Også senere i arbeidet med Kule-sylinder-oppgaven regner Jon om brøkene til desimaltall. Jeg mener dette sier noe om hvilken oppfatning Jon har av brøk, at brøken gjør regningen vanskeligere og er til hindring. Han velger å møte hindringen gjennom å gjøre om brøken til desimaltall. En slik håndtering av brøk kan tyde på at Jon har en prosessoppfatning (Sfard, 1991) av brøk. I dette tilfellet er prosessen å dividere 4 på 3. Videre kan det ses på som at Jon ønsker å ha tallene representert ved desimaltall, og at ved å gjennomføre divisjonen *avslutter* Jon operasjonen, i tråd med Biggs og Collis' (1982) begrep *avslutning*.

4.1.1.2 Usikkerhet rundt hvilke operasjoner som er tillatt i brøkregning

Videre viser elevene tegn til usikkerhet rundt *operasjoner* tilknyttet brøkregning. Med dette mener jeg at elevene er usikre på hvilke operasjoner som kan benyttes for å oppnå et ønsket resultat, eller usikre på hvilke operasjoner som er tillatt når de håndterer brøk.

Et eksempel på usikkerhet om hvilke operasjoner som er lov er Jon som spør «Kan man skrive desimaltall over en brøkstrek? Nei, man kan ikke. Over der igjen. Eller har jeg lov til det?» Jon blander ordene her, og sier «desimaltall». Jon forteller at han har dysleksi, som er en mulig årsak til at ordene av og til blandes. Det han egentlig spør om er om han kan sette inn brøken $\frac{4}{3}$ over brøkstreken, noe som indikerer at han er usikker på hva som er tillatt i brøkregning.

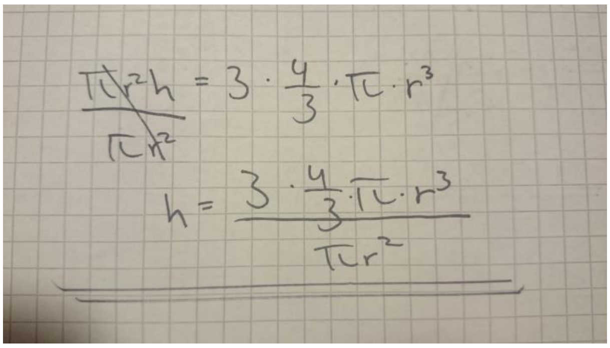
Et eksempel på usikkerhet rundt hvilke operasjoner som skal velges for å håndtere brøk er Jon, som tar utgangspunkt i uttrykket $h = \frac{4}{3}r$, uten å sette inn tall for radiusen. Han ønsker å forkorte vekk brøken, og sier: «Kan jeg gjøre sånn. Nei, [..] da må den stå på begge sidene.» Jon prøver å multiplisere med 3 og dele på 4, og stiller spørsmål om han kan gjøre det og deretter forkorte 4-erne og 3-erne. Samtidig som Jon prater peker han på venstresiden av uttrykket, hvor det står h. Han kommer da fram til at: «Da har jeg jo bare snudd brøken, når jeg tar den tilbake igjen.» Dette tyder på at Jon har en idé om hva han kan gjøre for å få et uttrykk uten brøk, men gjennom å multiplisere med den omvendte brøken ender han opp med uttrykket $\frac{3}{4}h = r$, som fortsatt inneholder brøk. Dette tolker jeg som at Jon er usikker på hvilke operasjoner han kan bruke for å få et uttrykk uten brøk. Samtidig kan det hende at Jon er usikker på hva han vil komme fram til, og dermed velger å prøve å multiplisere med den omvendte brøken for å se hva det fører til.

Et annet eksempel på usikkerhet rundt operasjoner med brøk gir Mona. På spørsmål om hva som skjer når de ganger et heltall med en brøk, svarer Mona: «Hmm. Du stryker over og under. Men hvis jeg ganger der så må jeg jo gange den og. Nei der, 3 gange.» Mona sier først at man kan forkorte over og under brøkstreken, før hun ombestemmer seg, og sier at hvis hun skal gjøre det, må hun også gange med 3 på den andre siden av uttrykket. Dette tror jeg henger sammen med at elevene er vant til å jobbe med likninger, hvor de har lært at man alltid skal gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet. Dette anvender Mona og Ingrid også i manipulasjonen av uttrykket. Det kan se ut til at jentene har glemt at 3-tallene allerede stod i uttrykket før de begynte å forkorte, og at det dermed er unødvendig, og feil, å multiplisere på begge sidene av likhetstegnet. På det samme spørsmålet om multiplikasjon av heltall med brøk svarer Bjørn: «Den blir mindre, ofte. Kanskje». Det virker som at Bjørn har en oppfatning om at når et heltall multipliseres med en brøk, vil produktet bli et mindre tall.

4.1.1.3 *Usikkerhet rundt forkorting av brøk*

Eksemplene over viser at *forkorting* er en operasjon som elevene viser usikkerhet rundt. Mange av oppgavene er konstruert slik at forkorting gjør det mulig å forenkle løsningsprosessen betraktelig. Elevene benytter seg i liten grad av dette i arbeidet med oppgavene, og under samtlige intervjuer får jeg spørsmål om hva som er «lov» med tanke på å forkorte vekk faktorer. De neste eksemplene viser ytterligere usikkerhet på når forkorting av brøk er tillatt eller mulig.

Peter viser denne usikkerheten i vår samtale rundt Kule-sylinder-oppgaven. Peter er den eneste eleven som kom fram til et «riktig» uttrykk for høyden i Kule-sylinder-oppgaven i sin besvarelse. Med «riktig» mener jeg at han kom til et uttrykk, men uten å forkorte så mye som mulig. Besvarelsen til Peter er vist i Figur 4.1 under.



Figur 4.1 Peters løsning av Kule-sylinder-oppgaven

Mitt fokus i intervjuet med Peter er på sluttsvaret, og ikke på prosessen som har ført ham dit, og jeg kommenterer derfor ikke på utroskapen mot likhetstegnet i første linje av løsningen. I samtalen kommenterer jeg at sluttsvaret til Peter, som vist i Figur 4.1, er litt komplisert. Peter viser umiddelbart en usikkerhet rundt videre forkorting:

> Peter: Ja. Jeg vet ikke om det går an å stryke den her og den her, hvis det er mulig. (Peter peker på de to pi-tegnene i uttrykket)
>
> Kari: Ja. Pi over og under brøkstreken ja
>
> Peter: Også for eksempel, de her går også vekk, så blir det igjen en *r*. Så det går an å forenkle litt.
>
> Kari: Ja. Bare prøv å skrive opp slik som du ville ha forenklet det.

Peter: (Peter skriver) Kanskje mer gunstig å gjøre sånn (Peter skriver $r \cdot r \cdot r$ i stedet for r^3). Da får jeg den med den, og den med den, og den med den. Også …

Kari: Tror du at du kunne gjort enda mer fra det siste uttrykket ditt?

Peter: Denne?

Kari: Ja

Peter: Enda mer? Går det her an? Sånn? (Peter stryker de to 3-tallene i uttrykket)

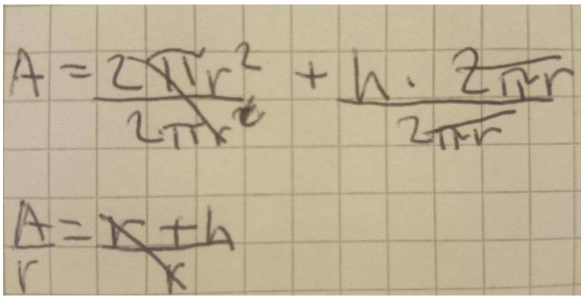
Når jeg påpeker at uttrykket ser komplisert ut, ser det ut til at Peter umiddelbart tenker på hva som kan forkortes, men i det første utsagnet hans opplever jeg at han er usikker på om forkortingen han gjør er tillatt. Videre sier han at det går an å forkorte vekk *r*-ene, slik at det gjenstår én *r*. Når jeg ber ham om å skrive opp, velger Peter å skrive ut r^3 som $r \cdot r \cdot r$, og deretter forkorte *r*-ene etter tur. Dette kan Peter ha gjort av flere årsaker, kanskje for å kommunisere hva som skjer i forkortingen, eller fordi Peter har en prosessoppfatning (Sfard, 1991) av forkorting, og derfor gjør det på en måte som er veldig «steg-for-steg». Tilslutt er Peter usikker på om de to 3-tallene i uttrykket kan forkortes mot hverandre, etter påtrykk fra meg om videre forenkling. Dette tolker jeg som at denne forkortingen ikke er intuitiv for Peter, men at påtrykket får ham til å se etter muligheter. De eneste like faktorene som finnes i uttrykket er på det tidspunktet 3-tallene, og det kan være en grunn til at Peter spør om det går an å forkorte dem.

Denne samtalen med Peter gav meg både svar og nye spørsmål. Jeg lurte på om han hadde vært rask under besvarelsen, og dermed ikke hadde forenklet uttrykket. Samtalen bekrefter i noen grad dette, siden han umiddelbart begynner med forkorting når jeg kommenterer at uttrykket er komplisert. Samtidig gir samtalen meg indikasjoner på at Peter er usikker på hvilke forkortinger som er tillatt. Jeg finner dette interessant, siden Peter framstår som en meget kompetent matematikkelev, gjennom å umiddelbart lese Kule-sylinder-oppgaven og sette opp en likning som gir ham et uttrykk. Å gjøre dette innebærer å se på kulene og sylinderen samtidig, og deretter se på sammenhengen mellom størrelsene som inngår.

Et annet eksempel på elevenes usikkerhet rundt brøk og forkorting er Bjørn som arbeider med Kule-sylinder-oppgaven. Bjørn har uttrykket $3 \cdot \left(\frac{4}{3}r\right)$, og etter å ha tatt bort parentesen, skriver

Bjørn ut dette som $\frac{3}{1} \cdot \frac{4r}{3}$. Han sier «Ja, stryke sånn her da, men det blir kanskje ikke riktig», samtidig som han viser at han vil forkorte de to 3-tallene mot hverandre. For å forsikre meg om hva som er hindringen på dette tidspunktet, spør jeg om det han lurer på er om han kan forkorte 3-tallene, noe Bjørn bekrefter. På spørsmål om hva han tror svarer Bjørn «Jeg husker ikke. Men jeg tror det». Dette tyder på at Bjørn har en instrumentell forståelse (Skemp, 1976) av forkorting, siden han må *huske* om en operasjon er lov – han kan ikke se på en situasjon og avgjøre hvorvidt noe er lov. Dersom han på et tidspunkt ikke husker reglene, er han forhindret fra å løse oppgaven tilstrekkelig. Her ser jeg i ettertid at jeg kunne stilt oppfølgingsspørsmål om hva som skal til for at noe kan forkortes, og dermed fått dypere innsikt i Bjørns oppfatninger.

Ingrid og Mona viser også at de ikke er helt trygge på prosessen rundt forkorting. Under intervjuet har de tatt utgangspunkt i et uttrykk for overflaten til en sylinder, og forsøker å få et uttrykk for høyden *h.* Arbeidet til jentene er vist i Figur 4.2. *A* står for overflaten til en sylinder, og jentene har delt med $2\pi r$. Som figuren viser er denne divisjonen gjennomført på bare høyre side av likheten. Deretter forsøker jentene å dele med *r* og forkorte vekk de to *r*-ene i uttrykket.



Figur 4.2 Utdrag fra Ingrid og Monas arbeid under intervjuet

Samtalen rundt dette går som følger:

> Kari: Nå står det *r* pluss *h*, også har du delt på *r*, og strøket bort *r*.
>
> Mona: Er det bare når det er gange, kanskje?

Operasjonen jentene har gjort her, er å forkorte bort *r* i et uttrykk hvor *r* er et ledd i en sum. Når jeg kommenterer dette, blir Mona usikker på om dette kanskje kun er tillatt dersom det står gange imellom. Jeg oppfatter dette som at Mona har noen verktøy for hvordan hun kan få bokstaven alene, ved forkorting, men at hun er usikker på når dette er en gyldig metode.

Et annet eksempel fra samtalen med Mona og Ingrid viser elevenes usikkerhet rundt mulige forkortingsoperasjoner. Mona ønsker å fjerne 2-tallet fra følgende uttrykk som hun manipulerer i Oppgave 2: $ab = \frac{(a+b)h}{2}$. Målet er å finne et uttrykk for *h*. Hun spør: «Så hvis vi får bort 2-eren. Da må vi gange med 2, må vi ikke det?». Her uttrykker Mona at hun ønsker å multiplisere med 2-tallet, altså å gjøre en operasjon som lar henne forkorte vekk et 2-tall, og at det vil hjelpe henne videre i manipuleringen av uttrykket. At hun likevel spør «må vi ikke det?» tolker jeg som at hun trenger bekreftelse på at denne operasjonen vil hjelpe for videre manipulasjon, og at det ønskede resultatet vil oppstå dersom hun utfører operasjonen. Når hun får bekreftelsen, forkorter Mona uten problemer, og 2-tallet er ikke lenger en hindring for Mona.

Mona sier også «Jeg vet ikke om det går an å dele på *ab* eller noe sånt» når hun ønsker at *a* og *b* skal forsvinne fra uttrykket over. Mona viser med utsagnet at hun er usikker på hvordan dette kan gjøres. «Det går jo ikke an. Eller, det her er jo gange, men der er det pluss.» Gjennom denne høyt-tenkningen uttrykker Mona sin mening om at det ikke er lovlig å bruke multiplikasjon for å ta bort *a* og *b* når de adderes i uttrykket.

Også i intervjuet med Jon oppstår situasjoner som viser at Jon ikke er helt sikker på hvilke situasjoner som tillater forkorting. Han stiller for eksempel spørsmål som «Har man lov til å stryke sånn?», og sikter til om *ab* kan forkortes mot *a*+*b* når de to uttrykkene står som teller og nevner i en brøk.

4.1.2 Operasjoner med og på parenteser med bokstavuttrykk i formler

Oppgave 2 fra datainnsamlingen inneholder en parentes i formelen for arealet av et trapes, $V = \frac{(a+b)h}{2}$. Denne oppgaven diskuteres i tre av fire intervjuer. I tillegg bruker noen elever en parentes i løsningen sin av kule-sylinder-oppgaven. I intervjuene opplevde jeg at parentesene i disse situasjonene var til hinder for elevene, noe jeg fokuserte ytterligere på da jeg leste transkripsjonene fra intervjuene. Slik ble koden *Parenteser* til. Denne koden belyser hvordan parenteser i formler påvirker elevenes håndtering av formler i løsning av geometrioppgaver. Dette eksemplifiseres både ved utsagn fra intervjuene og utdrag fra elevbesvarelsene.

4.1.2.1 Ønske om å benytte kjente regler

Parentesen kan være et hinder for elevene med tanke på formelmanipulasjon. Et eksempel på dette er Mona og Ingrid som arbeider med Oppgave 2b. Elevene ønsker å lage et uttrykk med bare h på den ene siden av likhetstegnet, med utgangspunkt i formelen for arealet av et trapes. Elevene er enige om at de måtte flytte $a+b$ over på den andre siden. Mona sier: «Er det ikke sånn, hvis du flytter det over på andre siden, så skal du skifte fortegn, men det er jo inni en parentes, så jeg vet ikke.» I denne situasjonen er parentesen som elevene ønsker å flytte en faktor i et produkt, mens Mona ser ut til å sikte til regler for behandling av ledd i en sum i et symboluttrykk. Dette er regler som Mona antakelig har lært i forbindelse med likningsløsning. Utsagnet hennes viser at hun er usikker på hvordan det vil bli når bokstavene står inni en parentes.

Utsagnet kan tyde på at elevene har pugget regler for hvordan formler og uttrykk skal manipuleres, og at Mona sikter til *flytte-bytte-regelen,* som ofte presenteres i lærebøker (se for eksempel Bakke & Bakke, 2007). Regelen sier at ledd som flyttes over likhetstegnet skifter fortegn. Fra Monas uttalelse tolker jeg at Mona har lært seg en regel om fortegnsskifte ved overflytting av ledd, men at hun er usikker på når denne regelen gjelder. Dette sammenholder jeg med en prosessoppfatning (Sfard, 1991) av overflytting, som om Mona vet at når hun flytter «noe» over til den andre siden av likhetstegnet, skal dette «noe» skifte fortegn, men at hun ikke helt har forstått hvorfor. Dette opplever jeg også som at Mona har en instrumentell forståelse (Skemp, 1976) av flytte-bytte-regelen. Dette, sammen med parentesen, kan ha vært hindringer for Monas videre manipulering.

Mona sier imidlertid at «Hvis vi finner ut svaret av $a + b$», så ville hun ha delt på dette tallet for å få det til den andre siden av likheten. Dette tolker jeg som at det er enklere for Mona og Ingrid å operere med tall, enn med bokstaver i en parentes. Parentesen er en hindring for videre formelmanipulasjon. Samtidig anser jeg det som at parentesen er en hindring hvis den inneholder bokstaver, siden Mona sier at hvis hun hadde hatt *svaret,* altså tallverdiene inni parentesen, vet hun at hun ville ha delt på dette tallet.

En liknende hindring er parentesen for Bjørn når han har uttrykket $\frac{3\cdot\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\pi r^2} = h$, og ønsker å forkorte bort slik at han får igjen bare r. På spørsmål om hva han vil forkorte vekk svarer Bjørn: «Pi og ja, sånn at det ble bare en r oppå da, men det står en parentes der, så da kan jeg ikke gjøre det, kan jeg?». Bjørn er altså usikker på om han kan forkorte faktorene i uttrykket på grunn av parentesen. Siden uttrykket er en brøk hvor teller og nevner er produkter, hvor parentesen er én faktor i telleren, er det mulig å ta bort parentesen uten å endre uttrykkets betydning. Det er dermed mulig å gjennomføre forkortingen som Bjørn nevner. Utsagnet til Bjørn tolker jeg som at parentesen er en hindring i Bjørns formelmanipulasjon.

Den videre diskusjonen med Bjørn om hva parentesen i uttrykket over betyr kan gi en mulig forklaring på hindringen:

> Bjørn: At det her skal ganges først, før man gjøre noe annet (Bjørn peker på det inne i parentesen)
>
> Kari: Ja, men det står jo gange mellom på alt her, ikke sant, inne i parentesen, og det står også gange med det 3-tallet som står utom parentesen
>
> Bjørn: Ja, men at det her skal ganges sammen før du ganger med det der da.
>
> Kari: Ja, når det står kun symbol her da, (Kari peker inni parentesen) går det an å utføre den gangingen da, tror du?
>
> Bjørn: Nei, det vet jeg ikke. Men jeg tror det da, siden du sier det på den måten.

Bjørn sier her at det som står inne i parentesen skal regnes ut før videre utregninger gjøres. Her tror jeg han sikter til generelle regler om regnerekkefølge[1], og det ser ut til at oppfatningen av at det som står inne i parentesen må regnes ut først hindrer Bjørn i å komme seg videre med manipulasjonen, siden denne utregningen ikke kan gjøres. Dette kan ses på som et behov for avslutning (Biggs & Collis, 1982), hvor en operasjon må avsluttes før den neste kan utføres. Det siste utsagnet til Bjørn sier meg at han fortsatt ikke er overbevist om at det går an å jobbe videre uten å regne ut det inne i parentesen, men at påtrykket fra meg gav ham en indikasjon på at det kunne gjøres. Sett i sammenheng med situasjonen med Mona og Ingrid over, kan det tyde

[1] Regler for regnerekkefølge sier at utregningene skal gjøres i følgende rekkefølge: parenteser, potenser, multiplikasjon og divisjon, addisjon og subtraksjon (Regnerekkefølge, 2016).

på at elevene har lært regler for behandling av parenteser i tilknytning til aritmetikk. I oppgavene i denne studien inneholder parentesene bokstaver, og gjennom en instrumentell forståelse (Skemp, 1976) blir reglene elevene har lært til hinder når de ikke er direkte overførbare til de nye situasjonene.

4.1.2.2 Usikkerhet rundt valg av operasjoner på og med parentes

Jon viser tegn på at parentesen er en hindring i Oppgave 2b. Han sier: «Jeg vil ikke gange inn den i parentesen, for da får jeg *ah, bh,* det trenger jeg jo ikke, for jeg skal jo ikke ha høyden og det sammen». Jon sier altså at det ikke er hensiktsmessig å gange ut parentesen, fordi han vil ha høyden for seg selv. Dette utsagnet viser også at han vet hva resultatet av å gange inn parentesen ville blitt. Videre går samtalen

> Jon: Har jeg lov til å bare løse opp parentesen utenom?
>
> Kari: Ja, hva er det du ønsker å gjøre nå?
>
> Jon: Jeg ønsker å flytte den over dit.
>
> Kari: Hele parentesen?
>
> Jon: Ja, så det likesom blir *A* gange 2, minus $a + b$.

Her ønsker Jon å løse opp parentesen, og deretter flytte over til den andre siden. Dette strider med den oppfatningen av parentesen som Jon viser over, hvor han viser forståelse for at det står gange mellom parentesen og *h*. Jeg minner om at det står et «usynlig gangetegn» mellom parentesen og *h*-en i uttrykket, som resulterer i at Jon velger å dele hele uttrykket på parentesen.

Jon viser her tegn til å bli hindret av parentesen med $a + b$ inni, til tross for at han innledningsvis viser at han vet at det står multiplikasjon mellom denne og *h*. Samtidig ser han med en gang at han må dele på parentesen når jeg påpeker at det står gange mellom parentesen og *h*-en. At ikke gangetegnet er skrevet kan være en hindring i tilknytning til parentesen. En annen mulig årsak til at elevene opplever parentesen som en hindring er at det er vanskelig å forestille seg at alt som står inne i parentesen representerer et tall, som det går an å gjøre operasjoner med.

4.2 Hindringer knyttet til forståelse og oppfatning av formler

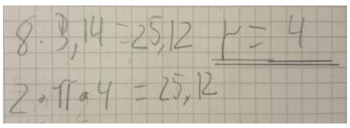
Hindringer knyttet til forståelse og oppfatning av formler er en kategori som tar for seg ulike hindringer som jeg opplever at bunner i hvilken forståelse eller oppfatning elevene har av formler. Her skiller jeg mellom *forståelse* og *oppfatning,* hvor jeg med forståelse sikter til instrumentell eller relasjonell forståelse slik Skemp (1976) definerer begrepene. I oppfatning legger jeg elevenes oppfatning av formler sett i lys av teori om prosess og objekt fra Sfard (1991). Først ser jeg på hvordan Tall og Vinners (1981) beskrivelse av utvikling av matematiske begreper, med tanke på begrepsbilde og begrepsdefinisjon, kan bidra til å si noe om elevenes oppfatning av formler. Kodene i denne kategorien er *Begrepsbilde av formler, Forståelse av formler, Innsetting av tall,* og *Plassering av bokstaven i en formel.*

4.2.1 Begrenset begrepsbilde av formler

Et viktig aspekt ved studien har vært elevers *oppfatning* av formler. For å finne ut noe om dette har jeg brukt Tall og Vinners (1981) begrep *begrepsbilde* til å analysere transkripsjonene av intervjuene. Koden *Begrepsbilde av formler* handler om hva elevene legger i begrepet formel, for eksempel hva de gjenkjenner som en formel eller ord de forbinder med formler. Her tar jeg også med hva elevene mener er forskjeller mellom de to begrepene *formel* og *likning*. Elevene har for eksempel stilt spørsmål om de samme operasjonene kan gjøres både i formler og i likninger, og de velger ulike bokstaver ut i fra situasjon. For å belyse denne koden, vil jeg eksemplifisere med utdrag fra intervjuene, og der det er nødvendig for å forstå innholdet i utsagnene vil jeg inkludere utdrag fra elevbesvarelsene.

4.2.1.1 Elevers meninger om formler og likninger

Elevene skiller mellom formler og likninger. Dette tolker jeg gjennom at elevene skiller mellom hvordan de bruker bokstaver i de ulike symboluttrykkene. Elevene bruker gjerne bokstaven *x* for ukjente størrelser. Et eksempel er Jon som forteller om hvordan han har brukt *x* i Oppgave 1b, vist i Figur 4.3.



Figur 4.3 Jons besvarelse av Oppgave 1b

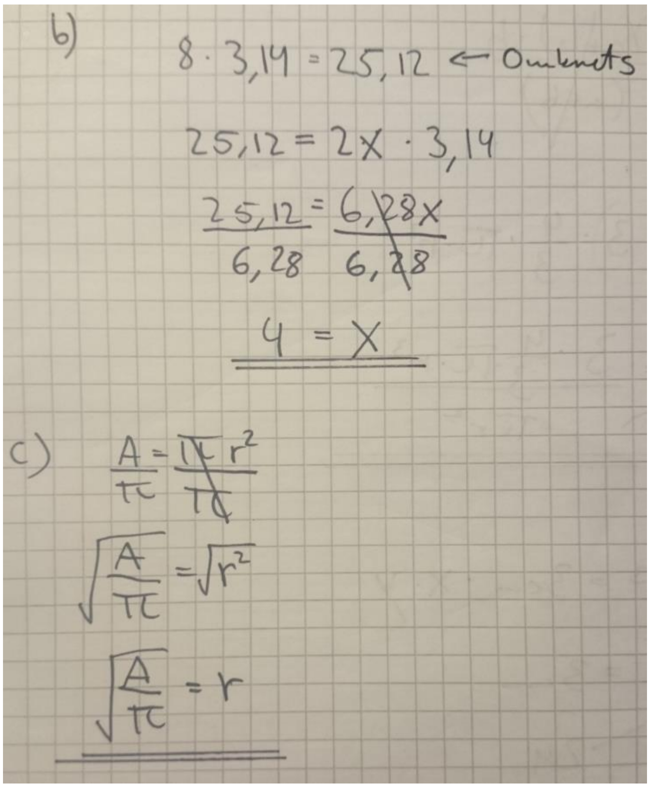
Det er verdt å merke seg at Jon ikke *skriver x*, men i følgende utsagn forteller han hvordan han ser for seg x i denne løsningen:

> Jon: Et tall som vi skal, liksom som er [..] svaret, som er x. Så liksom, setter du inn x her da, i en formel, også setter du inn tall og prøver på nytt
>
> Kari: Du ser for deg at 4-eren på en måte er en x i starten?
>
> Jon: Ja, som en likning da, også prøver jeg å løse den likningen

Her forteller Jon at han ser for seg at tallet han skal finne, altså radiusen, er x. Han sier at han «setter inn x» i en formel. Med dette mener Jon at han ser for seg x for den ukjente størrelsen i formelen. Videre sier han at det da blir «som en likning». Radiusen er allerede representert ved r i formelen som står oppgitt i oppgaven, men Jon velger å bytte ut dette symbolet med x, og sier at det da blir «som en likning». Jon gjør imidlertid ikke utskiftningen på papiret, men forteller at det er slik han tenker. Jeg tolker dette som at Jon forbinder x med noe ukjent, og derfor bruker dette symbolet for noe han skal finne.

Peter bekrefter en slik bruk av bokstaver gjennom sine besvarelser og i intervjuet. Peters løsninger på Oppgave 1b og Oppgave 1c (Figur 4.4) viser at Peter bruker x for radius i Oppgave 1b, hvor verdien av radiusen skal beregnes. Peter forteller at i likninger bruker han x, fordi det da er snakk om å finne verdien av en ukjent størrelse. En slik symbolbruk og -oppfatning er i tråd med Radford (1996) som understreker sammenhengen mellom likning og ukjent.

På spørsmål om det er nødvendig å bruke x når man skal finne et tall, sier Peter at han godt kunne ha brukt a, b eller hvilken som helst annen bokstav, men at han er mest vant til å bruke x. Ut ifra dette vil jeg si at Peter er bevisst på hvorfor han bruker de ulike symbolene i forskjellige situasjoner. Elevenes valg av bokstaver samsvarer i stor grad med teori om semiotikk og valg av representasjon. Radfords (1996) påstand om at forventninger til svaret og tolkning av gitte fakta påvirker hvilken representasjon man velger stemmer godt med at elevene velger ulike bokstaver til ulike formål.



Figur 4.4 Peters besvarelse av Oppgave 1b og Oppgave 1c

Et annet eksempel på hvordan elevene skiller mellom formler og likninger framkommer i samtalen med Ingrid og Mona. Under arbeidet med Oppgave 1c i samtalen har de kommet til uttrykket $\frac{A}{\pi} = r^2$, og skal finne et uttrykk for *r*. Nå uttrykker Mona skillet mellom formler og likninger gjennom en usikkerhet rundt hvilke operasjoner som kan gjøres likt i formler og likninger, ved å være usikker på veien videre:

> Mona: Kvadratrota, er det ikke det man må? Nei, det er kanskje på likninger det?
>
> Kari: Er det her ei likning, eller hva er [..] uttrykket her da?
>
> Mona: En formel, jeg vet ikke.

Gjennom dette utsagnet viser Mona at hun mener det er forskjell på formler og likninger, ved at hun setter spørsmålstegn ved om operasjonene som er tillatt i likningsløsning er tillatt ved formelmanipulasjon. Uttrykket som hun nå manipulerer, mener hun er en formel, men etter å ha tatt kvadratroten på begge sider, er hun fortsatt usikker på om uttrykket hun ender med er en formel for *r*. Senere i samtalen sier vi:

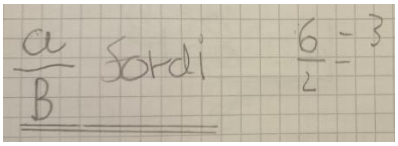
> Kari: Hva er det som trengs for at det skal være en formel, da?

Mona: To bokstaver eller tall på hver sin side av likhetstegnet. Og *A* og *r* er på hver sin side av likhetstegnet, det har vi jo her, men jeg vet ikke.

I denne situasjonen gir Mona sin begrepsdefinisjon (Tall & Vinner, 1981) av formel: «To bokstaver eller tall på hver sin side av likhetstegnet». At hun sier det er *to bokstaver* kan tyde på at hun har en oppfatning av at en formel viser en avhengighet mellom to størrelser, men samtidig sier hun *eller tall*, og det er derfor vanskelig å si hvilket begrepsbilde Mona har av formler, særlig siden hun er usikker på om uttrykket hun har fått faktisk er en formel. Slik tolker jeg situasjonen som at elevenes begrepsbilde (Tall & Vinner, 1981) er begrenset, da de ikke kan avgjøre om et gitt uttrykk er en formel eller ikke.

Mona viser et begrenset begrepsbilde av formel også når hun og Ingrid arbeider med Oppgave 2b, og oppgaven er å lage et uttrykk for *h*. Mona spør: «Er det bare sånn her det skal være da?» når de har kommet til uttrykket $2 \cdot a \cdot b = (a + b) \cdot h$. Dette kan tyde på at begrepsbildet (Tall & Vinner, 1981) av formel er begrenset, siden Mona og Ingrid har sagt hva de mener en formel er, men er usikre på om uttrykket de arbeider med kan klassifiseres som det.

Som nevnt tidligere i denne oppgaven er elevene opptatte av hvilke operasjoner som er tillatte når de manipulerer uttrykk. Spørsmålene deres om hva som er lov i formler forteller noe om hvilke oppfatninger elevene har om formler, både hva en formel *er* og *hvordan* formelen kan brukes. Et eksempel er Jon som skal lage en formel for høyden *h* i Oppgave 2b. Han sier «Man vet ikke høyden, så man kan ikke skrive *h* inni formelen sin. Og kan ikke bruke den i deling eller noe sånt.» Dette tolker jeg først og fremst som at Jon mener at man ikke kan gjøre operasjoner med *h*, siden man ikke kjenner verdien til denne størrelsen. At man ikke kan bruke *h* inni formelen, kan slik tolkes som at *h* ikke kan stå på begge sider av likhetstegnet i uttrykket. Samtidig kan vi studere hva Jon har skrevet på Oppgave 2b. Dette er vist i Figur 4.5.



Figur 4.5 Jons løsning av Oppgave 2b

Løsningen viser at Jon ikke har brukt *h* i formelen, men heller ikke satt opp formelen på formen «*h =…*», som er vanlig formelnotasjon. Dette kan tolkes som at Jon mener at *h* ikke skal være i formelen i det hele tatt, hverken på den ene eller andre siden av likhetstegnet. Dette kan være en misoppfatning (Brekke, 2002) Jon har om formler. Dette kan også ses i sammenheng med Biggs og Collis' (1982) beskrivelse av behov for avslutning, når Jon mener at man ikke kan gjøre operasjoner med *h* når han ikke vet hva høyden er på forhånd.

4.2.1.2 Ordlyd i oppgavetekst

Hvordan oppgaven er formulert påvirker elevenes løsningsstrategi. Et aspekt ved oppgavene er hvilke ord som brukes for matematiske objekter. I oppgavene jeg har brukt til datainnsamling, omtalt i 0 og vedlagt i Vedlegg B, har jeg anvendt ordet *uttrykk*, noe som viser seg uvant for elevene. Dette kan illustrere begrepsbildet (Tall & Vinner, 1981) av formler blant elevene.

Jons utsagn «Du skrev *uttrykk*, det er jeg ikke vant med, [..] jeg er vant med *finn en formel for radius*» viser dette. Samtidig sier Jon at «hvis du er lærer da, så hadde du skrevet uttrykk hele tiden, så hadde jeg blitt vant til å bruke *uttrykk*». Dette tyder på at lærerens bruk av ord påvirker hvilke ord elevene blir vant til å bruke. Bjørn bekrefter at ordlyden påvirker elevenes løsningsprosess: «Det var litt vanskelig å forstå at man skulle finne fram til formler hele tiden da».

Utsagnene til elevene kan tyde på at ordlyden i oppgaven påvirker hvilke forventninger elevene har til svaret, og at min bruk av *uttrykk* i stedet for *formel* gjør elevene usikre på hva jeg mener med oppgaven. Jeg fikk imidlertid ingen spørsmål om dette under oppgaveløsningen, og dette kan tyde på at elevene har en oppfatning av hva *uttrykk* betyr, men at denne oppfatningen ikke er i tilknytning til elevenes oppfatning av *formel*. Dette kan tolkes som et begrenset begrepsbilde (Tall & Vinner, 1981) av formel, siden elevene ikke forbinder uttrykk med formel. Kule-sylinder-oppgaven hentet fra en eksamen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013), og jeg mener derfor det burde være rimelig å anta at elever på samme trinn skal kjenne til denne ordbruken.

4.2.2 Ulike former for forståelse av formler

Koden *Forståelse av formler* omhandler hvilken forståelse elevene viser at de har for formlene. Her skiller jeg mellom *instrumentell* og *relasjonell* forståelse, i tråd med Skemp (1976). Jeg ser på de transkriberte intervjuene, og fokuserer blant annet på hvordan elevene forklarer eller begrunner formlene de har brukt i besvarelsene sine. Eksemplene i denne koden er hentet fra transkripsjonene av intervjuene, men jeg inkluderer annen informasjon der det anses som nødvendig.

4.2.2.1 Relasjonell og instrumentell forståelse

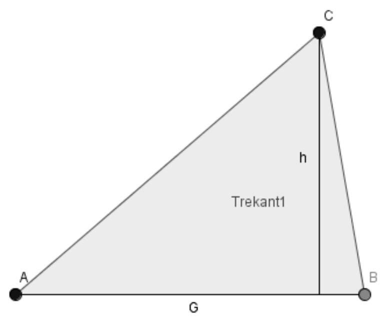
Elevene viser i flere tilfeller relasjonell forståelse (Skemp, 1976) for formler i geometri. Eksempler på dette er både Jon, Mona og Ingrid som forklarer sin bruk av formelen for arealet av en trekant i Oppgave 1a. Ingrid sier: «Vi tok høyden, og ganget med grunnlinja. Også delte vi på to, siden det er en trekant». På spørsmål om de «husket» formelen, bekrefter Mona og Ingrid. Om det samme sier Jon:

> Formelen er da høyde gange grunnlinje [..], delt på 2. Som blir en trekant, siden jeg har lært det utenat. Så blir det høyde gange grunnlinje, da får du liksom en firkant, også deler du på 2, for da får du en trekant.

De tre elevene sier at de har lært, eller «husket» formelen, noe som kan tyde på en instrumentell forståelse av formlene, slik Skemp (1976) beskriver slik forståelse. Likevel forklarer både Ingrid og Jon at de deler på to for å få trekanten. Jon nevner i tillegg at grunnlinje ganget med høyde vil gi en firkant, og at det er derfor man deler på to for å få trekanten. Dette innebærer at elevene knytter formelen til geometrien, og gir formelen praktisk mening. At elevene uoppfordret argumenterer for bruken av formelen i løsningsmetoden sin, mener jeg samsvarer med Skemps beskrivelse av en relasjonell forståelse av formelen. Elevenes utsagn om at de husket formelen kan slik ses i sammenheng med Skemp som skriver at en instrumentell forståelse kan være gunstig fordi den er effektiv, men at man likevel kan inneha den relasjonelle forståelsen som ligger bak. Elevene kan beskrive prosessen rundt å beregne arealet, med innsetting av tall i en innlært formel, men de kan også *forklare* hvordan de ulike stegene i beregningen med formelen er tilknyttet den geometriske situasjonen.

4.2.2.2 *Kritiske til om formlene er gyldige*

I tråd med elevenes relasjonelle forståelse av formler, er elevene kritiske til om formlene som er oppgitt eller de kommer fram til er gyldige i enkelte situasjoner. Eksempler fra samtalene viser at elevene ikke bruker formlene ukritisk, men ønsker en begrunnelse for at en gitt formel kan brukes i en bestemt kontekst. Jon stiller spørsmålstegn til om arealet av figuren i Oppgave 1a (Figur 4.6) kan finnes ved å bruke formelen for arealet av en trekant.



Figur 4.6 Figur av trekant fra Oppgave 1a

Jon peker på delen til høyre for høyden i trekanten, og sier: «Så var jeg usikker på om denne ble med da», og videre

> Si at du hadde kuttet her da, også hadde det vært en rettvinklet trekant, så hadde jeg jo automatisk tenkt at det hadde vært riktig. Men når det stikker ut noe her, tenker jeg [..] kanskje det er en annen figur enn en trekant.

Jon viser med dette utsagnet at han er helt sikker på at formelen gjelder for rettvinklede trekanter, men er usikker om den gjelder for trekanten i oppgaven. Han begrunner likevel hvorfor han valgte å bruke formelen: «Men siden det var bare tre punkt i en trekant, så må det være den formelen.» Med dette mener Jon at figuren har tre hjørner, og derfor må være en trekant, og formelen for arealet av en trekant må dermed være gyldig for denne figuren.

Et annet eksempel på elevenes kritiske sans i forhold til formlers gyldighet viser Mona. Hun er kritisk til om formelen for arealet av trapes som brukes i Oppgave 2a også er gyldig i Oppgave 2b: «Jeg vet ikke om den gjelder nå da». Mona gir ingen videre begrunnelse for skepsisen, noe som kan komme av at jeg er rask med å si at situasjonen er den samme som i 2a, med to like store arealer.

Jon viser også eksempler på å være kritisk til gyldigheten til formler. Ved manipulasjon, prøving og feiling kommer Jon fram til en formel for høyden i Oppgave 2b som sier at $h = A$. Denne utelukker han umiddelbart som en mulig løsning: «Det går ikke, for da får man arealet som høyden, og det er jo ikke riktig». Gjennom denne vurderingen, mener jeg at Jon viser en relasjonell forståelse (Skemp, 1976) for betydningen av formlene, og at han forsøker å gi mening til symbolene i formlene. Kritikken som elevene viser til å bruke formlene i ulike situasjoner, mener jeg tyder på at formlene er mer enn en metode for å få riktig svar for elevene, og at elevene søker en relasjonell forståelse for formlene.

4.2.3 Innsetting av tall

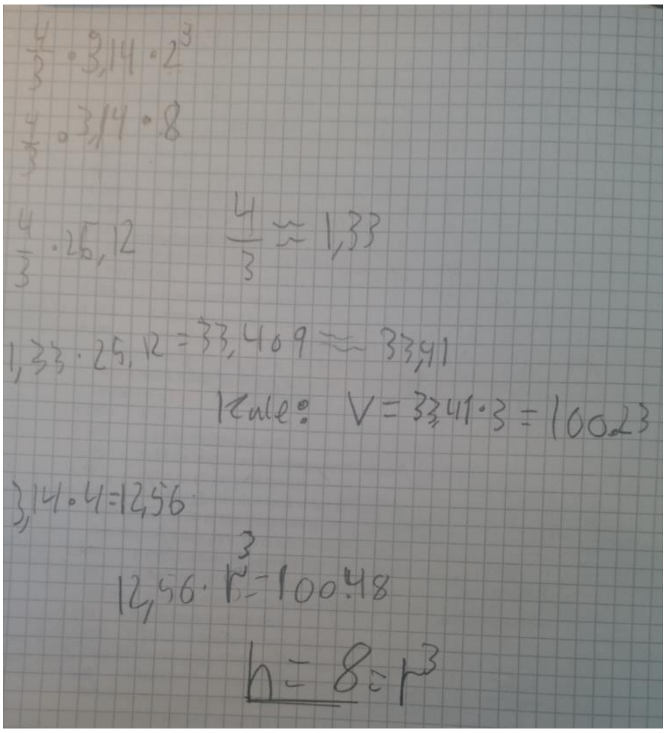
Lars' løsning av Kule-sylinder-oppgaven, som beskrevet i metodekapitlet, er basert på innsetting av tallverdi for r i formelen for volumet av kule, og generalisering ut ifra beregningene han gjør. Hvorvidt elevene i denne studien velger å bruke tallverdier i sine løsninger, har derfor vært et av mine fokusområder. Jeg har studert oppgavebesvarelsene med tanke på dette. Koden *Innsetting av tall* handler slik om tilfeller hvor elevene bruker tallverdier som hjelpemiddel for å løse oppgaver. Dette innebærer generalisering fra tallverdier så vel som innsetting av tallverdier for å kontrollere løsninger. Eksemplene i koden består av utdrag fra elevenes løsninger av Oppgave 2 og Kule-sylinder-oppgaven, i tillegg til utsagn fra samtalene som viser hvordan elevene begrunner løsningene sine.

4.2.3.1 Tall som hjelpemiddel for å løse oppgaven

Eksempler på innsetting av tallverdier som hjelpemiddel for å løse oppgaver er blant annet Jon som bruker tall både for kunne lage formel ved hjelp av generalisering, og å kontrollere om formelen han har laget stemmer. I Oppgave 2b har han laget formelen $h = \frac{a}{b}$ for høyden i trapeset, og dette forklarer han slik: «Da tenkte jeg at det var bare en mulighet, og det var da at den lengste siden, som ble da a, delt på den korte siden, må bli høyden», og videre sier han «Jeg har sjekket [..], for 6 delt på 2 er jo 3, og 3 var høyden». Her ser jeg at Jon har gjort en generalisering fra de spesifikke tallene i Oppgave 2a, slik Radford (1996) karakteriserer generalisering, og laget en formel for høyden. Han har kontrollert om dette stemmer med de spesifikke tallene, altså bruker han både tallene for å *lage formelen,* og for å *kontrollere* formelen. En slik bruk av tallverdier for å finne en formel er i tråd med Masons (1996) påstand om at elever ofte sjekker med noen få tallverdier og deretter godtar formelen. I samtalen diskuterte vi imidlertid hvorvidt denne formelen ville være gyldig for alle trapeser som har like stort areal som et rektangel med en gitt lengde og bredde, siden Jon kun kikket på ett tilfelle.

Et annet eksempel er Mona og Ingrid som gjerne vil sette inn tall for å finne riktig formel. Ved manipulering av uttrykket i Oppgave 2b kan parentesen, som tidligere nevnt, ses på som en hindring. Mona sier: «Hvis vi finner ut svaret av *a* pluss *b*, da». Dette tolker jeg som at Mona ønsker å sette inn tallverdier, og at dette vil hjelpe henne å komme videre. Når jeg spør hvordan hun ville håndtert denne situasjonen dersom hun hadde satt inn tallene fra Oppgave 2a, er Mona med en gang sikker på dette, og etter litt diskusjon blir vi enige om at dette kan overføres til situasjoner med bokstaver i parentesen. Elevenes bruk av tallverdier i oppgavene kan ses på som et behov for avslutning (Biggs & Collis, 1982) av operasjonene før en ny operasjon foretas. Samtidig viser denne situasjonen at å tenke seg innsetting av tall hjelper elevene til å avgjøre hvilken operasjon de skal velge.

Behovet for innsetting av tall er særlig framtredende i Jons besvarelse av Kule-sylinder-oppgaven, hvor han har begynt løsningen sin på en tilsvarende måte som Lars. Jons løsning er vist i Figur 4.7, som viser at Jon har begynt med å sette inn 2 for radiusen i formelen for volumet av en kule. Under intervjuet forteller Jon om løsningen sin: «Her prøvde jeg med radius 2. Bare satte inn at radiusen var 2, jeg. Startet bare med det». Å sette inn tallverdier kan være et hjelpemiddel Jon bruker for å se hvordan han kan komme videre i oppgaven. Samtidig kan en slik bruk av formler samsvare med en prosessoppfatning (Sfard, 1991) av formlene, hvor formelen oppfattes som noe som skal brukes for å regne ut et tall. Dette er også i tråd med det Janvier (1996) skriver er vanlig bruk av formler blant elever. Når oppgaven mangler tallene Jon trenger for å kunne bruke formler på denne måten, finner han på tall selv. Dette kan også ses som Jons behov for avslutning (Biggs & Collis, 1982), operasjonene med den ene formelen må utføres før Jon kan gå videre i løsningsprosessen.



Figur 4.7: Jons løsning av Kule-sylinder-oppgaven

På spørsmål om hvorfor han valgte akkurat tallet 2, svarer Jon: «Fordi at 2 er et veldig enkelt tall å regne med», og videre at «andre tall jeg ville ha satt inn er for eksempel 5, 10, sånne». Samtidig viser besvarelsen til Jon at valget hans har medført at han har gjort feil konklusjon helt til slutt. At han kommer fram til at høyden er 8 stemmer med valget, men han har sagt at dette er det samme som r^3. Ved ren betraktning av tall stemmer dette, men i den geometriske situasjonen som studeres er det ikke riktig, og vil ikke være gyldig ved innsetting av andre tall. Dette vil jeg si er en *uheldig tilfeldighet* ved generaliseringen som Jon har gjort ut ifra innsettingen, men en slik løsningsmetode stemmer nok en gang i stor grad med Masons (1996) påstand om at elever har en tendens til å sjekke en formel med noen få tallverdier, og godta denne dersom tallverdiene viser at det stemmer.

4.2.3.2 Forventninger om å få tallsvar

Radford (1996) skriver at valg av representasjon avhenger av hvilke forventninger eleven har til svaret på en oppgave. I intervjuene opplever jeg at elevenes forventninger kan hindre dem i å komme til den riktige konklusjonen, til tross for at de innehar de nødvendige matematiske kunnskapene for å løse oppgaven.

Elevene uttrykker at oppgaver hvor de skal finne en formel eller et uttrykk er uvante, og at de er mer vant til å skulle komme fram til tallverdier i matematikkoppgavene. Elevene forventer dermed ofte å finne tall som svar på oppgavene. Bjørn forklarer dette med følgende kommentar til Kule-sylinder-oppgaven: «Først så tenkte jeg i hvert fall at det var noen tall jeg skulle finne ut da, så jeg skulle finne ut hva høyden var.» Dette tror Bjørn kan ha bidratt til forvirring hos mange av sine medelever i løsningen av Kule-sylinder-oppgaven, fordi det ofte er tall de skal finne. Videre om Kule-sylinder-oppgaven sier Bjørn:

> Hvis du hadde skrevet «Du skal ikke finne ut av et bestemt tall, men du skal bare finne ut formelen» [..]. På barneskolen da, så stod det ofte [..] «Finn uttrykket» eller «Finn tallet». Så jeg tror det, da hadde jeg skjønt det med en gang.

Utsagnet til Bjørn kan ses i sammenheng med at elevene har forventninger til at svaret skal bli tall, også i oppgaver hvor man skal finne et uttrykk. Bjørn understreker at oppgaveformuleringen spiller en rolle.

Mona og Ingrid viser også eksempler på forventninger om tallsvar. Når Mona og Ingrid manipulerer formelen for arealet av en sirkel for å finne et uttrykk for radiusen i Oppgave 1c, ender de opp med $\frac{A}{\pi} = r^2$, og ønsker å ta kvadratroten for å få *r* på høyresiden. Samtalen mellom oss er:

> Mona: «Så får du bare *r* på den siden der [..], men jeg vet ikke hvordan det blir på siden der, da.»
>
> Kari: Hva ville du hatt på venstresiden da? Nå står det kvadratroten av *A* delt på pi. [..]
>
> Mona: Jeg ville jo. Det spørs hva tallene er [..], men svaret, det er på en måte det kvadratrota blir av *A* delt på pi.

Her har Mona og Ingrid kommet fram til det uttrykket for *r* som oppgaven spør etter ved formelmanipulasjon, men Mona sier likevel at svaret får hun ved å sette inn tall for *A* og pi. Dette sier meg at Mona mener svaret skal bli et tall, en verdi for radius.

Et annet eksempel som tyder på forventning om å finne tallsvar er utsagnet: «Vi skjønner oppgaven, men vi vet ikke helt hvordan vi skal gjøre det, hvordan vi regner ut», fra samtalen med Mona og Ingrid. Tidligere i samtalen sier Ingrid at oppgaven går ut på å finne et uttrykk. Utsagnet «hvordan vi regner ut» er noe jeg tolker som at elevene har en oppfatning av at noe skal regnes ut, og dette forbinder jeg med å komme fram til et tall. På bakgrunn av dette er jeg usikker på om elevene tenker på «å finne et uttrykk» som det samme som «å finne et tall», i stedet for å tenke på det som «å finne en formel», og igjen kan det diskuteres hva elevene forbinder med *uttrykk,* som allerede nevnt under *Begrepsbilde av formler.*

Mona og Ingrid viser videre en usikkerhet rundt hva svaret skal bli i Kule-sylinder-oppgaven i følgende utdrag fra samtalen:

> Mona: Å finne ut en formel for [..] Høyden i sylinderen ved uttrykt ved radius. Vi skal bruke radius til å finne ut høyden.
>
> Kari: Ja, du skal bruke radiusen til å finne ut høyden ja. Er det et tall som er svaret på oppgaven, tror dere?
>
> Ingrid: Hmm.
>
> Kari: du rister på hodet?
>
> Ingrid: Nei, jeg vet ikke.
>
> Mona: Nei, jeg tror egentlig ikke at. Det er sikkert en bokstav. Eller en. Radius gange radius, eller noe sånt, jeg vet ikke.

Mona vet ikke om svaret er et tall, men tror *egentlig ikke* det, og dette tolker jeg som at hun er usikker på om det kan være et tall. Videre sier hun at hun tror svaret er en bokstav. Her oppfatter jeg det som at Mona har en forventing til at svaret skal bli et uttrykk hvor hun bruker r, og at denne for eksempel skal kvadreres. Det er imidlertid verdt å merke seg at Mona mener svaret blir én bokstav, noe som kan tyde på at Mona har hengt seg opp i at det er radiusen som skal brukes for å uttrykke høyden, og at hun derfor ikke tenker på at også andre størrelser kan inngå i uttrykket. Dette er nok et eksempel på at oppgaveformuleringen kan ha påvirket hvordan Mona forventer at svaret skal se ut.

Et annet eksempel på elevenes ønske om å ha tall i løsningen er når Mona og Ingrid løser Oppgave 2b, og skal finne et uttrykk for h. Til å begynne med opererer elevene med symboler, og sier «Arealet av den her blir jo i hvert fall a gange b» om rektangelet. Videre ønsker Mona og Ingrid å finne arealet av trapeset, og sier «Hvis vi skal regne ut det så må vi finne ut hva arealet er, men vi vet jo ikke hva tallene er». Her er jeg usikker på hva Mona og Ingrid mener at svaret på oppgaven er, siden de først begynner med symboler i arealet av rektangelet. Likevel vil de sette inn tall når de snakker om arealet av trapeset. Ved videre diskusjon kommer Mona og Ingrid fram til at de kan løse oppgaven uten tall. De ender opp med å bruke samme framgangsmåte som de gjorde i Oppgave 2a, hvor de satte inn tall for *a* og *b*. De bytter ut tallene i Oppgave 2a med de respektive symbolene i Oppgave 2b. Dette kan ses på som en generalisering hvor elevene bruker metoden de kjenner fra aritmetikken, og skifter ut tall med symboler.

Til tross for at elevene kommer til at oppgaven kan løses ved hjelp av bokstaver tolker jeg denne situasjonen som at det er mest intuitivt for elevene å bruke tall i oppgaveløsning, siden det er det første de vil gjøre for å håndtere trapeset. Man kan diskutere hvorvidt elevene viser relasjonell forståelse, slik Skemp (1976) forklarer begrepet, i prosessen hvor de bytter ut tallene med bokstaver. Dette blir i stor grad en metode som elevene kanskje ikke får til dersom de ikke har tallene i utgangspunktet.

4.2.4 Behov for spesiell plassering av bokstaven i en formel

Mange av oppgavene jeg har brukt til datainnsamling handler om å lage formler. Jeg opplever i intervjuene at elevene er svært bevisste på at å lage en formel for en størrelse innebærer å få bokstaven for størrelsen alene. I noen tilfeller er elevene også opptatte av hvilken side av likhetstegnet denne bokstaven står. Disse erfaringene danner grunnlaget for koden *Plassering av bokstav,* som omhandler prosesser elevene gjør for å få en bokstav alene på en side av likhetstegnet, og aspekter ved disse prosessene. Dette er aspekter jeg tror kan henge sammen med hvilken oppfatning elevene sitter med av hva en formel er, og dermed hvordan de forventer at formelen skal se ut. Koden eksemplifiseres med utdrag fra de transkriberte intervjuene. Jeg vil klargjøre hvilken av oppgavene vi diskuterer i de ulike situasjonene.

4.2.4.1 Ønske om å få bokstaven alene på en side av likheten

Elevene forbinder det å lage en formel for en størrelse med å få symbolet for størrelsen alene på den ene siden av likheten. Mona viser dette gjennom følgende utsagn om Oppgave 1c:

> Det er uttrykket for areal. Så skal vi finne ut uttrykket for radiusen. Men det vi tenkte på var i hvert fall at vi skulle få *r*-en på ei side.

Ingrid kommenterer «alene». Mona og Ingrid viser denne oppfatningen på nytt i redegjørelsen for løsningen sin av Oppgave 2, som spør etter et uttrykk for høyden *h*: «Vi tenkte at vi måtte få *h*-en på en side [..] for å finne høyden, men vi husker ikke hvordan vi gjorde det». Mona sikter til at det var lenge siden de hadde jobbet med geometri og formler, og at de derfor ikke husket hvordan de skulle behandle uttrykket for å få *h*-en alene.

Denne oppfatningen bekreftes av Bjørn, som beskriver hvordan han har kommet fram til et uttrykk for *h* i Oppgave 2: «Jeg gjorde om formelen, da. [..] Også gjorde jeg om det slik at alt bortsett fra *h* kom dit.» Bjørn viser her at å lage et uttrykk for *h* innebærer å flytte det andre, slik at *h* blir alene på den ene siden av likheten.

4.2.4.2 Ønske om å plassere bokstaven på venstre side av likheten

Elevene vektlegger *plassering* av bokstaven i formelen. Mona og Ingrid viser dette i Oppgave 1c ved å begynne å multiplisere med *r* på begge sider av likhetstegnet for å lage en formel for *r*: «Vi kan jo prøve å gange på begge sider, så vi får *r* der.» Her oppfatter jeg det som at Mona og Ingrid ønsker å få *r* til venstresiden av likheten, noe de bekrefter: «Ja, har det ikke noe å si, kanskje ikke, det?». Det er likevel interessant at dette er det første de gjør når de skal manipulere en formel for å få et uttrykk for *r.* Det virker som jentene tenker at *r*-en bør stå på venstresiden for at det skal være en formel for *r*, og at dette er det første som må gjøres i prosessen. Dette kan henge sammen med hvordan de er vant til å se formler oppstilt i bøker eller formelsamlinger, som bidrar til elevenes begrepsbilde av formler. Dette er i tråd med Tall og Vinners (1981) beskrivelse av hvordan begrepsbilder dannes gjennom alle erfaringer med begrepet. Samtidig mener jeg at dette kan tyde på at elevene ikke er helt sikre på hva å multiplisere med *r* vil medføre. Elevene fokuserer sterkt på å få *r* til venstresiden, uten å tenke på hva som vil skje på høyresiden av likheten ved å gjøre denne operasjonen.

Jon viser at han mener at plassen bokstaven står på spiller en rolle gjennom følgende utsagn i diskusjonen av Kule-sylinder-oppgaven: «Men høyden er riktig, for vi skal finne høyden. Så den står på riktig plass.» Her jobber Jon med å lage en formel for høyden, og mener at han skal ha høyden på den ene siden, og noe annet på den andre siden.

Til sammen vil jeg si at disse eksemplene viser noe om elevenes oppfatning av formler. At elevene mener at bokstaven skal ha en «fast plass» på venstresiden av likheten kan tyde på at dette inngår i elevenes begrepsbilde av formler, som sannsynligvis stammer fra tidligere erfaringer elevene har med formler.

4.3 Hindringer knyttet til bruk av formler i skriftlige besvarelser

Kategorien *Hindringer knyttet til bruk av formler i skriftlige besvarelser* tar for seg hindringer jeg opplever at elevene har med å bruke formler under løsning av de aktuelle oppgavene. De skriftlige besvarelsene viser tendenser som jeg har undersøkt nærmere i intervjuene, og dette beskriver jeg i kodene *Kombinasjon av opplysninger* og *Uklarhet i skriftlig kommunikasjon*.

4.3.1 Kombinasjon av opplysninger fra oppgaveteksten

I denne studien har jeg vært motivert av Kule-sylinder-oppgaven, som er gjengitt og beskrevet i metodekapitlet. Gjennomgang av oppgavebesvarelsene viser at mange ikke har fått til denne oppgaven, og et av fokusene i intervjuene har derfor vært å undersøke hvorfor Kule-sylinder-oppgaven forble uløst hos mange elever. En utfordring som viser seg blant disse elevene, er å bruke alle nødvendige opplysninger for å finne svaret på en oppgave. Kule-sylinder-oppgaven kan løses ved å kombinere de opplysningene som gis. Dette kan for eksempel gjøres gjennom å beskrive forholdet mellom volumet av de tre kulene og sylinderen i en likning, hvor man setter inn formlene for volum av kule og volum av sylinder. Kategorien *Kombinasjon av opplysninger* beskriver hindringer ved Kule-sylinder-oppgaven som kommer fra mangelfull bruk av opplysningene i oppgaven. Disse hindringene eksemplifiseres i det følgende ved utdrag fra elevbesvarelsene og fra intervjuene.

Til tross for at flere av elevene viser forståelse for hva oppgaven spør etter, er det en utfordring å kombinere de nødvendige opplysningene for å komme til en konklusjon. Dette tolker jeg ut ifra at de elevene som har fått til oppgavene hvor slik kombinasjon av opplysninger er nødvendig argumenterer for bruken av de ulike opplysningene. I motsatt fall ser jeg at mange elever bruker deler av opplysningene separat, men ikke utnytter dem sammen for å finne en konklusjon.

I oppgavebesvarelsene har flere elever begynt en løsning av Kule-sylinder-oppgaven ved å ta utgangspunkt i formelen for volumet av en kule. Et eksempel på en slik løsning er gitt i Figur 4.8 under.

Figur 4.8 Påbegynt løsning av Kule-sylinder-oppgaven

I løsningen har eleven multiplisert formelen for volumet av en kule med 3. Deretter skriver eleven et uttrykk for h til høyre for dette. Dette uttrykket kan tolkes som et resultat av manipulasjon av formelen for volumet av sylinder, hvor eleven feilaktig har brukt formelen $V = \pi r^3 h$. Det er lenge siden elevene sist jobbet med geometri, så dette kan være en tilfeldig feil, eller en misoppfatning (Brekke, 2002). Uansett årsak til feilen og tolkning av uttrykket, er sluttsvaret feil, og det kan komme av at eleven ikke har brukt opplysningene om kulene og opplysningene om sylinderen sammen.

Mona og Ingrid viser i samtalen at de har forstått opplysningene, og hva Kule-sylinder-oppgaven spør etter. Til tross for dette kombinerer de ikke opplysningene i løsningen sin. I diskusjonen sier de dette:

> Kari: Og volumet, eller altså, *V*-en, hvordan, hvor finner vi den på figuren?
>
> Mona: Det er jo volumet av den. Som er dem pluss hverandre. Volumet av dem pluss hverandre.

Her viser Mona først at hun har forstått opplysningene i oppgaven, at volumet av sylinderen er det samme som volumet av alle kulene til sammen. Videre sier de «Så blir det på en måte, vi tar 3 ganger det her, så får du volumet av den der da». Til tross for dette kommer ikke elevene videre med en løsning av oppgaven. Dette tolker jeg som at elevene forstår oppgaven, og forstår opplysningene, men greier ikke å bruke dem sammen for å løse oppgaven. Elevene vet at det er sammenheng mellom kulene og sylinderen, men kan ikke gjøre den nødvendige konklusjonen ut ifra opplysningene. Dette kan ses i sammenheng med det Steinbring (2006) skriver om å forstå algebraiske sammenhenger uten å nødvendigvis uttrykke disse med algebranotasjon. I dette tilfellet viser elevene at de forstår sammenhengen, men problemet blir å representere denne på en måte som gjør det mulig å komme til en konklusjon.

Eksempler på at elevene kan kombinere opplysningene, og dermed komme til en løsning ser vi hos Bjørn og Peter. Både Bjørn og Peter viser innsikt i å kombinere opplysninger i sin forklaring av løsningen av Kule-sylinder-oppgaven. Bjørn sier: «Da har jeg brukt kulene sitt volum og brukt det som sylinderens volum», mens Peter tilsvarende viser besvarelsen sin med oppsatt likning og sier:

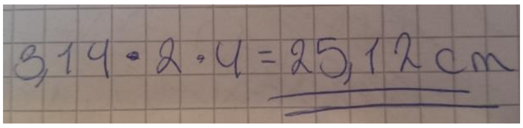
> Da vet jeg at volumet av alle dem her til sammen er like stort som hele volumet til sylinderen der. Så har jeg funnet ut at formelen til volumet til en sylinder er formelen her. Så vet jeg den verdien er like stor som ene kulen gange 3.

Bjørn og Peter er de eneste elevene som har begynt løsningen med å ta utgangspunkt i at volumet av de tre kulene er like stort som volumet av sylinderen. Løsningene til Bjørn og Peter kan tolkes som at de har en objektoppfatning av formlene, slik Sfard (1991) beskriver det. Gjennom en slik oppfatning kan elevene sette inn formlene på hver sin side av likhetstegnet i en likning, og videre gjøre operasjoner på dem. Dette innebærer at elevene ser på hver formel som en helhet, uten å måtte gjennomføre noen prosesser på den enkelte formelen før de settes inn i likningen. I motsatt fall kan det tenkes at elevene som ikke mestrer denne oppgaven har en prosessoppfatning av formler, i tråd med Sfards begrep. Dette kan innebære et behov for å avslutte operasjoner med tanke på de enkelte elementene i første omgang, og deretter sammenlikne dem, slik Biggs og Collis (1982) redegjør for behov for avslutning. I denne oppgaven finnes det ingen tallverdier som muliggjør slik avslutning, og elevene blir dermed forhindret fra å gjøre sammenlikningen av enkeltelementene. Her vil jeg imidlertid påpeke at jeg karakteriserer Jons løsning av Kule-sylinder-oppgaven, som tidligere nevnt, som et eksempel på prosessoppfatning av formler. Gjennom kreativitet kommer han likevel til en konklusjon ved at han finner et tall og setter inn, og gjør generaliseringer ut ifra dette.

4.3.2 Uklarhet i skriftlig kommunikasjon

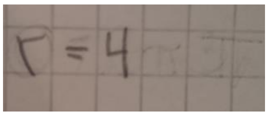
Ved gjennomgang av besvarelsene til elevene observerer jeg at mange elever har riktig løsning på oppgaver hvor svaret er et tall, men mange av besvarelsene mangler at metoden er vist. Dette gjelder særlig Oppgave 1b og Oppgave 2a, som søker tallsvar. Det kan for meg se ut som at elevene har «prøvd seg fram». I samtalene med elevene har jeg undersøkt på hvilke måter formler inngår i løsningene. Her framkommer det at elevene ofte har en klar framgangsmåte, men at forklaringen av denne ikke blir skrevet ned i besvarelsen. Gjennom en kombinasjon av eksempler fra oppgavebesvarelsene og utsagn fra intervjuene, beskriver og forklarer koden *Uklarhet i skriftlig kommunikasjon* løsninger på oppgaver hvor elevene ikke viser en bestemt metode, men har kommet fram til riktig svar.

I besvarelsene kommuniserer ikke elevene hvilken metode de har brukt. I Oppgave 1b mangler 7 av 17 elever begrunnelse for løsningen sin. Figur 4.9 viser et eksempel på dette:



Figur 4.9 Eksempel på elevbesvarelse hvor metoden ikke er vist

Oppgave 1b går ut på å finne radiusen i en sirkel som har omkrets 8π. Eleven har satt opp at «$3{,}14 \cdot 2 \cdot 4 = 25{,}12$ cm.» Eleven har brukt 4 som radius, og dermed funnet det riktige svaret. Samtidig har hun markert 25,12 med dobbel understreking, noe som kan tyde på at hun mener *det* er svaret på oppgaven. Dette kan tolkes som at eleven har prøvd seg fram, og fant at ved innsetting av 4 for radius, blir omkretsen den ønskede verdien, $8\pi = 25{,}12$, og derfor markerer på denne måten. Det er også en mulighet at eleven fikk tallet 4 av en medelev, og dermed har gitt denne besvarelsen, siden elevene satt to og to under oppgaveløsningen. Det må imidlertid kommenteres at ved å sette opp dette regnestykket, argumenterer eleven for at løsningen hun har funnet oppfyller kravene gitt i oppgaven.



Figur 4.10 Eksempel på elevbesvarelse med bare konklusjon

Figur 4.10 viser en besvarelse av Oppgave 1b hvor kun konklusjonen står oppgitt. Ved nøye studering kan man observere at eleven har skrevet noe som er visket ut, og skrevet $r = 4$ oppå. Dette kan bety flere ting; enten har eleven prøvd seg fram først, og deretter visket ut for kun å skrive konklusjonen. Det kan også bety at eleven har prøvd på egenhånd, men ikke kommet til noen konklusjon, og deretter fått svaret fra en medelev og skrevet kun dette. Det kan imidlertid like gjerne være en helt annen bakgrunn for denne besvarelsen.

Ut ifra flere slike besvarelser av denne oppgaven, tolker jeg at elevene ofte prøver seg fram, og at når de finner løsningen, skriver de opp bare denne, uten noen framgangsmåte. Dette kan tyde på en begrensning i hvordan elevene kommuniserer løsningsstrategiene sine på papiret. Elevene har fått riktig svar, men begrunner ikke hvordan de finner svaret, og noen begrunner heller ikke hvorfor svaret er riktig.

Mona og Ingrid har skrevet liknende besvarelse på Oppgave 1b som vist i Figur 4.9, og under samtalen snakker vi om framgangsmåten. Jentene forklarer hvordan de har funnet at radiusen er 4: «Vi så på den formelen, og da tenkte vi radiusen, hvis omkretsen. At diameteren var 8, tenkte vi da, så delte vi på 2, som var 4.» Her framgår det at elevene har tolket 8-tallet i oppgaven som diameteren i sirkelen, og sammenholdt dette med formelen for omkretsen av sirkelen. I oppgaven er formelen $O = 2\pi r$ oppgitt, men i samtalen merker jeg at jentene gjerne bruker formelen $O = \pi \cdot d$, hvor d er diameteren. Dermed har jentene brukt sin innsikt i at 8 må være det dobbelte av radiusen, som da er 4. Ut i fra dette vet jeg at Mona og Ingrid har hatt en klar framgangsmåte, og at de har kommet fram til svaret uten å prøve seg fram, mens løsningen de kommuniserer skriftlig ikke viser denne metoden. Dette mener jeg er en bekreftelse på at kommunikasjon av løsningsstrategi kan være en begrensning.

Samtalen med Jon viser at hans besvarelse ikke viser hans metode i Oppgave 1b. Besvarelsen er vist i Figur 4.3, og han forklarer denne slik:

> Da ser jeg at det stykket her blir 25,12, som svar, og da prøver jeg fram i hodet mitt, [..] å få samme [..] 25,12, og da ser jeg at 4 passer jo inn ganske bra.

Jon har altså regnet ut at $8\pi = 25{,}12$, og deretter prøvd seg fram med hvilken verdi av radiusen som vil gi denne omkretsen ved innsetting i formelen for omkretsen. At han har prøvd seg fram framkommer ikke av den skriftlige besvarelsen.

Et annet eksempel på at metoden elevene bruker ikke framgår av løsningen er Jon som sier at han bruker *formelen som mal* når han løser oppgaver. Om Oppgave 2a sier han først «Da bruker jeg formelen liksom som en sånn [..] mal, til å sette inn tall». På spørsmål om å forklare dette videre sier han at «Da har vi et areal på 12, [..] også tar man 2 pluss 6, også prøver man seg fram med tall for å få 12». Jon sier altså at han har regnet ut at arealet er 12, og at han bruker formelen for arealet av trapeset som en *mal* for å sette inn tall, og at han prøver seg fram med tall i denne slik at han får at arealet blir 12. Denne metoden framgår ikke av den skriftlige besvarelsen, hvor tallene er satt inn i formelen uten forklaring. Denne bruken av formelen samsvarer med det Janvier (1996) beskriver som vanlig bruk av formler blant elever, som oppskrift for innsetting av tall.

Jeg mener det framgår av samtalene med Mona, Ingrid og Jon at elevene har løsningsstrategier de bruker, og at de kan kommunisere disse godt når de får spørsmål om dem. Dette ser jeg ikke av de skriftlige besvarelsene deres, hvor svaret er oppgitt, men uten framgangsmåte. Jeg anser det derfor som en utfordring for elevene å mestre skriftlig kommunikasjon av metode i oppgaver hvor formler benyttes for å finne verdier. Dette bekreftes ytterligere av kommentaren som Jon kommer med under intervjuet: «Jeg vet ikke om jeg har tenkt riktig på arket.» Dette tolker jeg som at Jon føler at han ikke har fått uttrykt tankene sine på papiret, altså at han har tenkt – men ikke fått skrevet det ned.

5 Diskusjon

I dette kapitlet vil jeg oppsummere og drøfte resultatene fra analysekapitlet ut ifra et teoretisk perspektiv. Jeg benytter meg av teorien som er presentert i teorikapitlet. Gjennom diskusjonen forsøker jeg å belyse, og i den grad det er mulig å finne forklaringer på, sammenhenger mellom de ulike resultatene. Jeg redegjør også for hvordan resultatene kan sammenliknes med tidligere forskning på elevers utfordringer med algebra. Diskusjonen av resultatene etterfølges av en vurdering av kvaliteten i studien.

5.1 Prosessoppfatning av matematiske begreper og behov for avslutning

Resultatene fra studien viser at elevene innehar en prosessoppfatning av enkelte matematiske begreper som inngår i oppgavene om areal, omkrets og volum, slik Sfard (1991) beskriver en slik oppfatning. Elevene viser også et behov for avslutning av operasjoner, slik Biggs og Collis (1982) omtaler dette behovet, med tanke på disse matematiske begrepene. Dette vil jeg drøfte i det følgende.

I tilknytning til regneteknikk har jeg funnet at *brøk* og *parenteser* oppleves som hindringer for elevene når de forekommer i formlene. Gjennom analysen ser jeg at elevenes prosessoppfatning og behov for avslutning av operasjonene som inngår i brøk og parenteser kan være en forklaring på disse hindringene. Disse aspektene har jeg beskrevet i avsnitt 4.1.1 og 4.1.2. Prosessoppfatningen og behovet for avslutning innebærer å gjennomføre en operasjon for å oppnå et nytt element, for deretter å bruke det nye elementet i neste operasjon. Elevenes prosessoppfatning av brøk kommer til syne ved at elevene ønsker å skrive om brøk til desimaltall ved å gjennomføre divisjonen. Prosessen ved brøk blir slik divisjonen, og å avslutte denne operasjonen viser elevenes behov for avslutning. I tillegg uttrykker elevene et ønske om å oppnå uttrykk uten brøk. Slik har jeg tolket at brøk oppleves som en vanskelig representasjonsform av tall. Jeg synes det er interessant at brøkregning er en av utfordringene for elevene, med tanke på at norske 5.-trinnselever skårer lavere på emneområdet Tall enn andre emneområder i TIMSS 2015 (Bergem, 2016). Her er blant annet brøkregning et tema. Dette mener jeg kan tyde på at brøk er representasjonsform som blir en utfordring tidlig, og som elevene fortsatt har på 10.-trinn.

På liknende måte som for brøk viser elevene en prosessoppfatning av parenteser, gjennom et ønske om å regne ut det som står i parentesen før de kan gjøre neste operasjon. Dette ønsket synes elevene å ha uavhengig av om det som står i parentesen er bokstaver eller tall, og kan slik også ses i sammenheng med et behov for avslutning. Studien viser at en av måtene elevene håndterer parenteser med bokstavuttrykk, er ved innsetting av tall. Dette har jeg redegjort for i 4.2.3. Jeg ser bruken av tallverdier som et hjelpemiddel for å avgjøre hvilke operasjoner som kan brukes for å håndtere parentesen. Jeg vil her argumentere for at også dette kan skyldes prosessoppfatning og behov for avslutning med tanke på parenteser, og videre med tanke på formler. I studien har elevene vist at ved å sette inn tallene fra oppgaven i parentesen, kan de avgjøre hvilken operasjon som vil være til hjelp i videre manipulasjon. Gjennom denne innsettingen av tall kan elevene avslutte operasjonen i parentesen, oppnå et nytt element, og dermed gjøre operasjoner med det nye elementet. Dette kan ses i sammenheng med at elevene ønsker å bruke innlærte regler for håndtering av parenteser, for eksempel regnerekkefølge, men at disse ikke er direkte overførbare til parenteser som inneholder bokstavuttrykk. Disse funnene samsvarer i stor grad med funnene til både Herscovics og Linchevski (1994) og Brekke (2001), som har funnet at det er et skille mellom aritmetikk og algebra, og som foreslår et fokus på brobygging mellom kunnskap i aritmetikk og læring i algebra.

Mason (1996) skriver at det er vanlig praksis å bruke tallverdier for å sjekke om en formel stemmer, noe elevene i denne studien også viser tegn til. Dette gjør de både for å kontrollere egne formler, eller for å kunne generalisere. Denne studien har imidlertid vist at elevenes bruk av tallverdier på denne måten kan være en begrensning. Når elevene bruker tallene som står i første deloppgave for å kontrollere en formel som står i neste deloppgave, baserer de antakelsene sine på ett sett med tallverdier, og formelen trenger derfor ikke nødvendigvis å gjelde for andre tall. Eksempler på bruk av tallverdier fra forrige deloppgave finnes i samtalene med Jon, Mona og Ingrid som er redegjort for i 0. Her finnes også et tydelig eksempel på at konklusjonen kan bli feil ved generalisering fra ett sett med tallverdier, i Jons løsning av Kule-sylinder-oppgaven.

I forlengelsen av dette ser jeg også hvordan elevenes manglende *kombinasjon av opplysninger*, som jeg har omtalt i 4.3.1, videre kan skyldes prosessoppfatninger og behov for avslutning. Besvarelsene på Kule-sylinder-oppgaven viser at de elevene som ikke kommer til noen endelig løsning, ikke kombinerer de opplysningene som blir gitt. Elevene begynner for eksempel med formelen for volum av en kule, men kommer ikke videre derfra. I Kule-sylinder-oppgaven finnes ingen tallverdier som muliggjør avslutning slik elevene ønsker, og dette forhindrer dem fra å komme videre i løsningen sin. Prosessoppfatningen av formler innebærer at de ønsker å gjennomføre en operasjon med den enkelte formelen, før de deretter eventuelt vil anvende disse resultatene for å komme til en konklusjon. Dette har jeg funnet å være i tråd med Janviers (1996) teori om at elever ofte har en oppfatning av formler som en oppskrift for innsetting av tall. En slik oppfatning av formler har tilsynelatende de elevene som ikke mestrer å kombinere opplysningene i denne oppgaven. I studien har jeg funnet at dette skjer til tross for at elevene i intervjuene uttrykker en klar forståelse av de ulike opplysningene i oppgaven og sammenhengen mellom dem.

Andre tilfeller i studien viser at elevene som mestrer å kombinere opplysningene ser ut til å ha en objektoppfatning (Sfard, 1991) av formler. Dette innebærer at de kan se den enkelte formelen som et objekt, og dermed mestrer å sette formlene inn i en likning for videre behandling. En slik bruk av formlene viser at elevene ikke har et sterkt behov for avslutning (Biggs & Collis, 1982), men kan operere på formlene som en helhet uten å ha spesifikke tall som symbolene i formlene representerer. Studien viser at disse elevene kommer til en konklusjon i Kule-sylinder-oppgaven. Med tanke på brøk og parenteser, ville en objektoppfatning hos elevene bety å se på brøken og parentesen som unike objekter. Elevene kunne håndtert dem som en helhet uten for eksempel å regne om brøken til desimaltall før den inkluderes i andre operasjoner.

5.2 Relasjonell og instrumentell forståelse

I forrige avsnitt har jeg blant annet drøftet elevenes prosessoppfatning og behov for avslutning rundt parenteser. Elevene viser en tydelig vilje til å gjennomføre operasjonen inne i parentesen før videre behandling av uttrykket kan skje. Som nevnt har jeg funnet at dette kan skyldes et fokus på regler for regnerekkefølge. Fokuset på innlærte regler på denne måten kan sammenholdes med Skemps (1976) beskrivelse av instrumentell forståelse. Dette blir som nevnt over en begrensning for elevene når reglene ikke kan anvendes på denne situasjonen.

Forkorting av brøk er et annet aspekt ved håndtering av formler hvor jeg opplever at elevene har en instrumentell forståelse. Skemp (1976) skriver at en begrensning ved instrumentell forståelse er at man bare kan lære et visst antall regler for et visst antall situasjoner. Dersom man kommer i en situasjon som man ikke har lært noen regler for, vil det bli vanskelig å løse problemet. I tillegg kan det bli vanskelig å holde styr på hvilke regler som gjelder i de ulike situasjonene. Elevene i denne studien er usikre på hva de har lov til å gjøre med tanke på forkorting av brøk, men gir uttrykk for hvilke metoder de tror de kan bruke. Dette tyder på at de har lært et antall regler for forkorting av brøk. Usikkerheten viser de gjennom at de ofte søker bekreftelse fra meg på at operasjonene de velger med tanke på forkorting er riktige eller lovlige.

Til tross for at elevene viser en instrumentell forståelse for parenteser og forkorting av brøk, opplever jeg i intervjuene at elevene har en relasjonell forståelse for de formlene som brukes i oppgavene i denne studien. Samtalene med Mona, Ingrid og Jon som er redegjort for i avsnitt 4.2.2 viser dette. Oppgavene inneholder formler for areal, omkrets og volum, hvor elevene viser relasjonell forståelse gjennom å begrunne bruken av formlene i ulike situasjoner. Elevene relaterer symbolene som inngår i formlene med de geometriske egenskapene som symbolene beskriver, for eksempel ved å begrunne hvorfor man deler på 2 for å beregne arealet av en trekant. Elevenes relasjonelle forståelse kan skyldes at læreren har et relasjonelt fokus i undervisningen. Skemp (1976) skriver imidlertid at en instrumentell tilnærming kan være effektivt, for eksempel ved å benytte seg av at man husker formler. Det er derfor ikke noe i veien for å ha en instrumentell forståelse *sammen med* en relasjonell forståelse. Dette viser elevene i denne studien at de mestrer gjennom at de har lært de formlene som inngår i oppgavene utenat, og kan bruke dem til å sette inn tall og få ut et svar, samtidig som de viser å ha satt formlene inn i en større geometrisk sammenheng.

5.3 Begrenset begrepsbilde av formler

For å kunne si noe om elevenes oppfatning av formler, har jeg brukt Tall og Vinners (1981) begreper *begrepsbilde* og *begrepsdefinisjon.* Studien viser, til tross for relasjonell forståelse, at elevene har et begrenset begrepsbilde av formler. Dette framkommer på flere punkt i analysen, for eksempel gjennom hvilke ord elevene assosierer med formler og hvilke uttrykk elevene gjenkjenner som formler. Elevene i denne studien sier at ordet *uttrykk* er uvant for dem, og bruken av dette ordet i oppgavetekstene har medført at elevene har vært usikre på om svaret på oppgavene er tall eller formler. Studien viser slik at når det ikke er samsvar mellom ordene i oppgaven og elevenes begrepsbilde, kan det resultere i feil forventninger til løsningen på oppgaven. Utfordringen ved dette, som jeg har opplevd i intervjuene, kan beskrives som det Tall og Vinner kaller en *kognitiv konfliktfaktor*. Elevenes forventinger til svaret som følge av ordlyd i oppgaven har jeg redegjort for i 4.2.1.2.

Under intervjuene har elevene gitt uttrykk for å ha en tydelig oppfatning av hva en formel er gjennom sine begrepsdefinisjoner (Tall & Vinner, 1981). Eksempelvis har jeg gjengitt Monas begrepsdefinisjon av formel i 4.2.1.1. Elevene har til tross for sin tydelige oppfatning av formel uttrykt usikkerhet om hvorvidt uttrykket de arbeider med faktisk er en formel, noe jeg mener kan skyldes et begrenset begrepsbilde. Det er utfordrende for elevene å avgjøre om et gitt uttrykk faktisk er en formel. Elevenes ønske om å plassere symbolet alene på venstre side i uttrykket, gir videre indikasjoner på et begrenset begrepsbilde av formel. Med symbolet mener jeg her symbolet for størrelsen det spørres etter en formel for, for eksempel A i formelen for arealet av en sirkel. Dette ønsket kan være til hinder for elevene ved at de velger ugunstige operasjoner i øyemed å få symbolet alene, som vanskeliggjør videre manipulasjon av uttrykket. Et slikt begrepsbilde kan være en følge av de erfaringene elevene har med formler, for eksempel med tanke på å gjenkjenne ulike representasjonsformer, slik Steinbring (2006) skriver om. Dersom elevene kun har sett eksempler på formler hvor symbolet står på venstre side, påvirker dette begrepsbildet, og elevene vil etterstrebe et liknende uttrykk når de selv skal produsere en formel. Dette er i tråd med Tall og Vinner som sier at begrepsbildet utvikles gjennom erfaringene med begrepet.

Det begrensede begrepsbildet elevene har av formler kommer også til syne gjennom deres utsagn om formler og likninger. Elevene skiller mellom formler og likninger for eksempel ved å gi uttrykk for, eller å stille spørsmål om, at det er forskjell på hvilke operasjoner som er lovlige i henholdsvis formler og likninger. Samtalen med Mona og Ingrid om uttrykket de arbeider med i Oppgave 1c som er gjengitt i 4.2.1.1 er et eksempel på dette.

Jeg vil imidlertid påpeke at elevene i denne studien er klare på at de benytter ulike symboler med tanke på om de oppfatter et uttrykk som en formel eller som en likning, noe som samsvarer med Radford (1996) som skriver at det er vanlig å velge representasjonsform ut ifra formålet. Elevene bruker *x* når de skal finne en ukjent, mens de bruker de vanlige symbolene for de geometriske størrelsene som inngår, for eksempel *r* for radius, når de skal lage en formel. Også dette kan skyldes elevenes tidligere erfaringer med likninger og formler, i likhet med plassering av bokstav og andre bidrag til begrepsbildet som beskrevet over.

5.4 Vurdering av kvaliteten til studien

I dette avsnittet vil jeg gjøre en vurdering av kvaliteten til studien. Som verktøy bruker jeg Gubas (1981) fire kriterier for kvalitet i kvalitativ forskning. Kriteriene er kredibilitet, overførbarhet, avhengighet og bekreftbarhet. I det følgende beskriver jeg de ulike kriteriene, og redegjør for hvilke grep jeg har gjort for å oppfylle disse i størst mulig grad. Til slutt i avsnittet drøfter jeg hvordan jeg kunne ha hevet kvaliteten til studien.

Studiens *kredibilitet* stiller spørsmål om hvor tillitvekkende eller sannsynlig studien er (Guba, 1981). Kredibiliteten styrkes av å forske på naturalistiske situasjoner. I min studie har jeg i stor grad etterstrebet å holde situasjonene naturalistiske, gjennom å la elevene sitte som de pleier i klasserommet under oppgaveløsning, ha de samme personene i rommet som ellers i matematikkundervisning, og la den samme læreren lede undervisningen. Under oppgaveløsningen grep jeg ikke inn dersom jeg ikke fikk spørsmål fra elevene, noe som også styrker kredibiliteten. Guba anbefaler at forskeren har en relasjon til deltakerne, for å sikre en naturalistisk situasjon. Selv om jeg ikke kjente elevene fra før, har jeg hatt praksis ved skolen, så det er mulig at ansiktet mitt var kjent for elevene. I tillegg fikk jeg møte elevene under oppgaveløsningen før jeg gjennomførte intervjuene, og elevene visste nøyaktig hva vi skulle prate om, noe som kan ha gjort det mindre skummelt å delta i intervju. At jeg har brukt to datainnsamlingsmetoder, og dermed sørget for metodologisk triangulering, er i tråd med Robsons (2011) anbefaling. Videre har jeg, som analyse- og diskusjonskapitlene viser, fått resultater som stemmer godt med etablert teori på feltet. På grunn av dette vil jeg argumentere for at teorien jeg har valgt som rammeverk er relevant for dataene jeg har samlet inn, gjennom at det er mulig å sammenlikne mine resultater med de tidligere funnene som teorien viser.

Denne sammenhengen mellom mine data og det teoretiske rammeverket er med på å styrke studiens kredibilitet.

Med *overførbarheten* til studien menes hvorvidt studien kan gjennomføres i andre omgivelser med andre deltakere (Guba, 1981). Denne studien er en kvalitativ studie, en instrumentell, kollektiv casestudie, og baserer seg slik på mine generaliseringer ut ifra datamaterialet jeg har samlet inn. Det kan derfor være utfordrende å gjennomføre den samme studien på nytt, i motsetning til i kvantitative studier, hvor Yin (2009) sier at det er enkelt å gjennomføre en lik studie på nytt på grunn av de statistiske generaliseringene som gjøres i kvantitativ forskning. For å styrke overførbarheten i studien har jeg sørget for å gi en grundig beskrivelse av konteksten for studien, slik at denne kan gjøres så lik som mulig i eventuelle senere gjennomføringer av en liknende studie, slik Firestone (1993) anbefaler. Etter Firestones retningslinjer har jeg i tillegg benyttet meg av relevant teori med etablerte, veldefinerte matematikkdidaktiske begreper i analyseprosessen.

Avhengigheten til studien avgjør om andre forskere ville oppnådd de samme resultatene dersom de gjennomførte studien med de samme eller liknende deltakere. For å styrke studiens avhengighet har jeg inkludert datautdrag som underbygger fortolkningene mine. Jeg har tatt med flere eksempler fra ulike kilder i datamaterialet som viser mine funn. I tillegg har jeg beskrevet datainnsamlingsmetodene og analysemetoden grundig. I tråd med Robsons (2011) anbefaling har jeg gjennom hele studien ført logg over mine aktiviteter, tanker og ideer rundt datainnsamling og analyse, en *audit trail.* All tekst jeg har skrevet har jeg lagret og tatt vare på for å kunne gå tilbake senere.

Studiens *bekreftbarhet* stiller spørsmål ved om en gjentakelse av studien i tilsvarende kontekst med tilsvarende deltakere ville gitt de samme resultatene på nytt. Dette skal sørge for at resultatene ikke kommer fra forskeren, men fra deltakerne og konteksten (Guba, 1981). Dette styrkes for eksempel ved å være nøytral som forsker, og å frigjøre seg fra fordommer. I min studie har jeg redegjort for mine hypoteser om at algebra er utfordrende for elever, og men vært åpen for, og redegjort grundig for andre funn. I tillegg har jeg brukt teori for å analysere datamaterialet, slik at analysearbeidet baserer seg på mine tolkninger av dataene *sett i lys av teori*.

Til nå har jeg i dette avsnittet redegjort for flere grep som styrker kvaliteten i denne studien. Det er likevel slik at jeg i ettertid ser aspekter ved gjennomføringen av studien som kunne vært gjort annerledes for å heve kvaliteten ytterligere. Eksempelvis etterstreber jeg å holde situasjonene naturalistiske. I ettertid har jeg tenkt på at situasjonen for oppgaveløsning kunne oppleves som en prøvesituasjon for elevene, noe som kanskje medførte at de kun skrev svarene sine, og ikke tanker eller metoder, som jeg gjerne ønsket. Dette kan være en følge av elevenes oppfatninger eller erfaringer om at kun riktig svar gir uttelling på prøver. En slik oppfatning av situasjonen kan også ha virket stressende på elevene, slik at de ikke fikk vist sitt fulle potensiale. Ved en ny gjennomføring av en liknende studie ville jeg vurdert en annen tilnærmingsmetode for å samle inn elevenes besvarelser på slike oppgaver. En mulig tilnærmingsmetode er å kalle opplegget en «individuell arbeidsøkt», og omtale oppgavene som «arbeidsoppgaver», for så å samle inn arbeidet etterpå. Denne metoden krever imidlertid muligens en tettere relasjon til elevene.

Jeg har også argumentert for at å beholde læreren og assistenten i klasserommet gir en naturalistisk situasjon. Samtidig ser jeg at han eller assistenten kan ha mottatt spørsmål fra elevene under oppgaveregningen, som kanskje kunne vært verdifulle data i studien. Dataene kunne vært sikret, for eksempel ved at jeg hadde tatt en samtale med læreren kort tid etterpå, hvor han hadde fortalt om sine erfaringer, eller at jeg hadde filmet. Å filme hadde på sin side krevd mer organisering, med tanke på at alle elevene i klassen skulle gjøre oppgavene, mens bare 17 av dem skulle delta i studien.

Til sist vil jeg kommentere at gjennomføringen av fire intervjuer med diskusjon av store deler av besvarelsene til de enkelte elevene var tidkrevende. Jeg har ikke brukt noen data som framkom fra Oppgave 4 i oppgavesettet. Denne ble ikke diskutert i alle intervjuene. Dette skyldes at varigheten på hvert intervju ble så lang, at jeg valgte å ikke gå videre til å diskutere denne oppgaven selv om jeg hadde forberedt spørsmål. Ved en ny gjennomføring ville jeg derfor ha vurdert å ta bort denne. På denne måten kunne jeg også ha forberedt meg enda bedre til å snakke om de andre oppgavene i settet.

6 Konklusjon

Målet med denne studien har vært å finne ut hva som er med på å gjøre algebra utfordrende for elever, med fokus på formler i geometrioppgaver. I dette kapitlet oppsummerer jeg først forskningsresultatene fra studien, før jeg gir mine didaktiske refleksjoner. Til slutt i kapitlet kommer jeg med noen synspunkter om videre forskning.

6.1 Oppsummering av forskningsresultater

De 17 oppgavebesvarelsene gav i noen grad svar på spørsmålet om hvordan elevene bruker formler i denne type geometrioppgaver. Mange elever bruker formlene som en oppskrift, ved å sette inn tallverdier for å finne en verdi. Denne type oppgaver er elevene mer tilbøyelige til å løse enn oppgaver hvor tallverdier ikke inngår. Færre elever mestrer å bruke formlene ved å manipulere dem eller sette dem sammen for å komme til nye uttrykk.

Til tross for disse funnene, viste intervjuene at den skriftlige besvarelsen ikke nødvendigvis samsvarer med elevenes tankeprosess rundt oppgaven. Jeg har dermed funnet at besvarelser som leseren tolker som en type bruk av formler, kan være basert på en annen bruk hos eleven. Jeg mener derfor at elevenes bruk og oppfatning av formler bør illustreres både av deres oppgavebesvarelser og av deres utsagn om formler.

I denne studien har jeg funnet at blant de fem elevene jeg intervjuet, innehar noen av elevene en prosessoppfatning av formler, mens andre har en objektoppfatning av formler. En prosessoppfatning av formler viser seg for eksempel ved at elevene vil sette inn tallverdier i en formel og regne ut et svar, eller at elevene ser på en formel som en mal. En objektoppfatning av formler viser seg for eksempel ved at elevene kan bruke og manipulere formelen i en likning som viser en større sammenheng mellom ulike geometriske objekter. Sammenlikning av funn fra intervjuene og besvarelsene, viser at elevene jeg har funnet at har en prosessoppfatning av formler blir forhindret i å løse de mest komplekse oppgavene, hvor det kreves at flere formler kombineres for å komme til en endelig konklusjon. Slik har jeg funnet at en prosessoppfatning av formler utgjør en hindring når elevene arbeider med oppgaver om areal, omkrets og volum.

Studien viser videre at elevenes begrepsbilde av formler kan utgjøre en hindring i løsningen av oppgaver med areal, omkrets og volum. Blant elevene framkommer deres definisjoner av formler, men hvordan de prater om formler, og hvordan de skiller, eller ikke greier å skille, mellom formler og likninger, viser at de ikke alltid mestrer å anvende sin egen definisjon. I tillegg viser det seg at formulering av oppgavene er en hindring for elevene, da den ikke samsvarer med elevenes begrepsbilde av formel. Bruken av ordet *uttrykk* i oppgavene i denne studien har medført at elevene har vært i tvil om det er formler eller tall som er svarene på oppgavene.

Jeg har i tillegg sett på hvilke konkrete aspekter ved formeluttrykk som utgjør hindringer for elevene når de skal løse oppgaver om areal, omkrets og volum. Studien viser at de aspektene *brøk* og *parenteser* utgjør hindringer for elevene. Brøk som hindring viser seg gjennom et ønske om å komme til formeluttrykk uten brøk gjennom forkorting eller omskriving til desimaltall, og gjennom usikkerhet rundt hvilke operasjoner som er tillatt. At parenteser er en hindring har jeg funnet at kan ha en sammenheng med at elevene har et behov for å avslutte operasjonen som står i parentesen. Dette kan ha en sammenheng med regler for regnerekkefølge som elevene har lært i aritmetikk. Dersom parentesen inneholder bokstavuttrykk, er ikke regnereglene direkte overførbare til algebra, og blir dermed hindringer for elevene. Dette viser seg gjennom at elevene blir usikre på hvilke operasjoner som kan brukes for å manipulere formelen parentesen inngår i.

Elevenes behov for å avslutte operasjoner kan ses i sammenheng med at studien viser at elevene har et behov for å sette inn tall i formler. Dette gjøres både for å kontrollere formler og som hjelpemiddel for generalisering. Studien viser imidlertid at behovet for innsetting av tall utgjør en hindring for elevene, da de ofte generaliserer ut ifra ett sett med tallverdier, noe som i mange tilfeller medfører feil formel. Til sammenlikning viser studien at elevene som ikke har dette behovet, kommer til riktig konklusjon ved å betrakte formlene uten tallverdier.

6.2 Didaktiske refleksjoner

Gjennomføringen av denne studien har gitt meg mye som jeg vil ta med meg inn i min framtidige jobb som lærer. Jeg håper også at funnene kan være til hjelp og inspirasjon for andre lærere. Lav skår på undersøkelser som for eksempel TIMSS viser at algebra er en utfordring for norske elever på 9. trinn. Studien har imidlertid søkt å gi en dypere innsikt i hvordan elever bruker og oppfatter formler, og hvilke aspekter ved formler som kan være hindringer for elevene. Denne innsikten kan forhåpentligvis bidra til å forklare hvorfor algebra er en utfordring for mange elever. Å ta utgangspunkt i elevenes synspunkter kan være til hjelp i algebraundervisning, med fokus på formler for areal, volum og omkrets.

Med bakgrunn i forskningsfunnene mine vil det være gunstig å legge opp undervisningen slik at den bidrar til at elevene får et rikt begrepsbilde. Dette kan gjøres ved å være bevisst på hvilke ord som brukes i oppgaver og eksempler, slik at elevene lærer å assosiere flere ord til det samme matematiske begrepet. Det samme gjelder å vise elevene begreper representert på ulike måter. Gjennom et rikt begrepsbilde tror jeg at elevene vil være bedre rustet til å gripe an problemer av ulikt slag. I denne studien har jeg undersøkt elevenes begrepsbilde av formler, men funnene om at blant annet ordlyd spiller inn mener jeg er overførbare til andre matematikkemner.

Studien gir indikasjoner på at det kan lønne seg å være bevisst på å kartlegge elevenes kunnskaper i aritmetikk før man som lærer begynner undervisningen i algebra. At brøk og parenteser er hindringer for elevene med tanke på å håndtere formler, viser at elevene har mangelfull kunnskap i regneteknikk fra tidligere trinn. Dette gir indikasjoner på at innsatsen bør settes inn på lavere trinn, og kanskje øke fokuset på dette emnet ytterligere. Et forslag kan være et større fokus på relasjonell forståelse, for å sikre en mer varig læring. Et slikt fokus mener jeg vil bidra til å styrke elevenes evne til å ta egne beslutninger i matematikk. Denne studien har vist at elevene er usikre på hvilke operasjoner de kan bruke med tanke på målet sitt, og at innlærte regler kan være til hinder i situasjoner hvor elevene ønsker å overføre dem fra aritmetikk til algebra. Studien viser også at elevene søker bekreftelse fra lærer eller andre før de kan gå videre. Gjennom en relasjonell forståelse i faget mener jeg at elevene kan bli mer selvstendige, og tryggere på å ta slike avgjørelser uten andres bekreftelse.

6.3 Videre forskning

I denne studien har jeg tatt for meg formler knyttet til areal, omkrets og volum i oppgaver for 10.-trinn, og sett på hvordan elever bruker og oppfatter disse. Som tidligere nevnt har TIMSS-undersøkelsen vist at norske elever skårer lavt på algebra. Min studie gir i noen grad svar på hvilke aspekter ved formler i geometri som er med på å hindre elevers mestring, og som kan være med på å forklare lav skår på algebrafeltet. Jeg mener det kunne ha vært interessant å undersøke hindringer fra andre deler av matematikkfaget som også inkluderer bruk av formler. Et eksempel kan være statistikk, hvor norske elever skårer best. Også dette emnet inkluderer bruk av formler, og man kan stille spørsmål ved hvorfor elevene mestrer disse heller enn formler i geometri. Alternativt synes jeg det hadde vært interessant å undersøke elevers begrepsbilder av formler nærmere, og fokusere mer på ord som brukes. Gjennom dette kunne jeg tenke meg å undersøke hvordan man som lærer kan bidra til å berike elevenes begrepsbilde gjennom variert ordbruk i undervisning og oppgavetekster.

7 Referanser

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2007). *Grunntall: Matematikk for ungdomstrinnet: 10.* Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein, & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015.* (s. 22-43). Oslo: Universitetsforlaget.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy (Structure of the observed learning outcome).* New York: Academic Press.

Brekke, G. (2001). School algebra: Primarily manipulations of empty symbols on a piece of paper? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Vol.1 (s. 96-102). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Læringssenteret.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory* (3. utg.). Los Angeles, CA: SAGE Publications.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Firestone, W. A. (1993). Alternative arguments for generalizing from data as applied to qualitative research. *Educational Researcher*, *22*(4), 16-23.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational communication and technology journal*, *29*, 75-91.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics. 27*, 59-78.

IEA. (2017). TIMSS. Trends in International Mathematics and Science Study. Hentet fra: http://www.iea.nl/timss

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 225-236). Dordrecht, Nederland: Kluwer.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 65-86). Dordrecht, Nederland: Kluwer.

Norsk senter for forskningsdata (2016). *Må prosjektet meldes?* Hentet fra: http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt

OECD. (2016). What is PISA? Hentet 6. desember 2016, fra: https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 107-111). Dordrecht, Nederland: Kluwer.

Regnerekkefølge. (2016). I matematikk.net. Hentet fra: http://matematikk.net/side/Regnerekkef%C3%B8lge

Robson, C. (2011). *Real world research: a resource for users of social research methods in applied settings* (3. utg.). Chichester, England: Wiley.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*, 1- 36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching. 77*, 20-26

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *Handbook of qualitative research* (3. utg.) (s. 443-466). Thousand Oaks, CA: Sage.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Eksamen. MAT0010 Matematikk Våren 2013*. Hentet fra: http://matematikk.net/res/eksamen/10-kl/V13_Del1.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2016). *Hva er nasjonale prøver?* Hentet fra: http://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/om-nasjonale-prover/

Yin, R. (2014). *Case study research: design and methods* (5. utg.). Thousand Oaks, CA: Sage.

8 Vedlegg

Vedlegg A – Samtykkeskjema

Vedlegg B – Oppgaver brukt til datainnsamling

Vedlegg C – Transkripsjonsnøkkel

Vedlegg D – Eksempel på intervjuguide

Vedlegg E – Tabell med kategorier for svar og løsningsprosesser

Vedlegg A

Samtykkeskjema

Til foresatte for elever på 10. trinn ved [redacted] ungdomsskole

Anmodning om tillatelse til innsamling av elevers oppgavebesvarelser og lydopptak av samtaler.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. Høsten 2016 arbeider jeg med mastergraden min innen matematikkdidaktikk. Jeg undersøker hvordan elever håndterer en bestemt type matematikkoppgaver, hvilke problemer som kan oppstå i møte med slike oppgaver, og hva elevene gjør for å eventuelt takle slike problemer. Dette gjør jeg for å få best mulig innsikt i elevenes arbeidsprosess og forståelse i matematikkfaget, noe jeg tror jeg vil få god bruk for i mitt framtidige virke som lærer.

For å undersøke dette, ønsker jeg å la elevene arbeide med noen matematikkoppgaver som jeg gir dem, og deretter ha samtale med elevene om hvordan de tenker rundt oppgavene. Jeg ønsker å ta lydopptak av samtalen for best mulig dokumentasjon. I tillegg ønsker jeg å få med meg elevenes besvarelser på oppgavene, for videre analyse av disse. Jeg ber derfor om tillatelse fra dere til å kunne samle inn skriftlige besvarelser fra elever, samtale med dem om matematikkoppgaver og å ta lydopptak av samtalene i 10. trinn ved [redacted] ungdomsskole. Det er snakk om noen få oppgaver (3-5 stk) og en kort samtale omkring dette. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Hensikten med oppgavene er å undersøke hvordan elevene håndterer denne type matematikkoppgaver. Samtalen vil dreie seg om hvordan elevene tenker når de løser slike oppgaver. Dette vil foregå en gang i løpet av oktober 2016. Elevene blir først bedt om å løse oppgavene, og jeg vil deretter komme tilbake etter å ha sett på besvarelsene for å gjennomføre samtalene. Lydopptak og innsamlet skriftlig materiale vil kun bli hørt og sett av meg og min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest i slutten av februar 2017.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å la deres barn være med på prosjektet i klassen.

På forhånd takk!
Vennlig hilsen
Kari Hovstad

Tillatelse

Som del av forskningsprosjekt om matematikkundervisning ber jeg om tillatelse til å samle inn skriftlig besvarelse og ta lydopptak av samtale med barnet ditt/deres.

Forutsetningen for tillatelsen er at innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg/vi gir tillatelse. Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

☐ Jeg/vi gir ikke tillatelse.

Dato: ………………………

Elevens fornavn og etternavn: ……………….…………………. …………………..

Underskrift av foresatt(e): ……………………………………………………………..

Vennligst returner svarslippen til lærer [redacted] innen fredag 7. oktober 2016.

Vedlegg B

Oppgaver brukt til datainnsamling

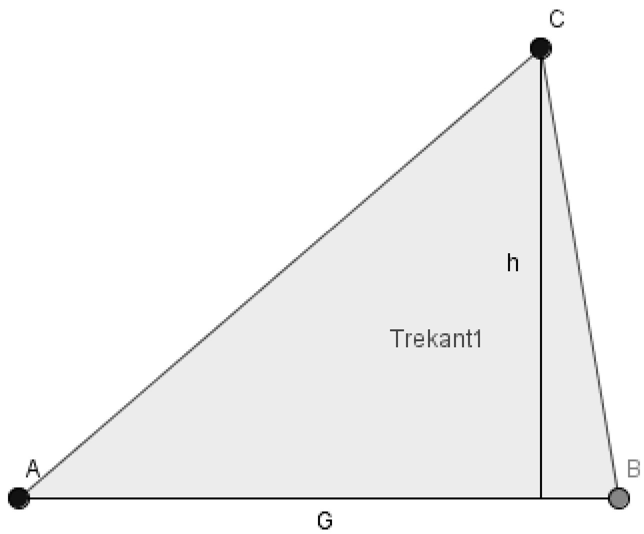
Navn: ___________________________________

Løs oppgavene. Vis utregning! Skriv ned hva du tenker om oppgaven hvis du ikke kommer helt «i mål».

Lykke til og takk for innsatsen!

Oppgave 1)

a) Regn ut arealet av trekanten ABC, når h = 3 og G = 4.



b) Omkretsen i en sirkel er gitt ved $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

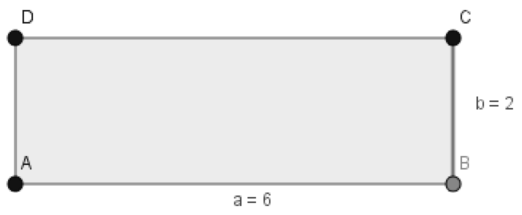
Hva er radiusen i en sirkel med omkrets 8 π?

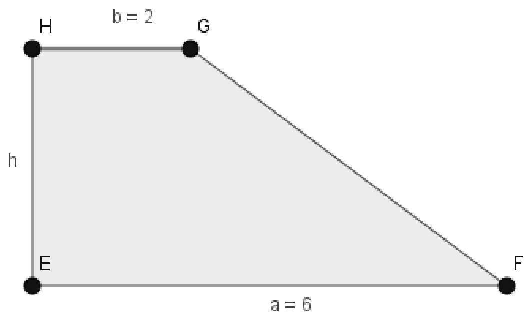
c) Finn et uttrykk for radiusen i en sirkel når du vet at formelen for arealet i sirkelen er $A = \pi \cdot r^2$.

Oppgave 2)

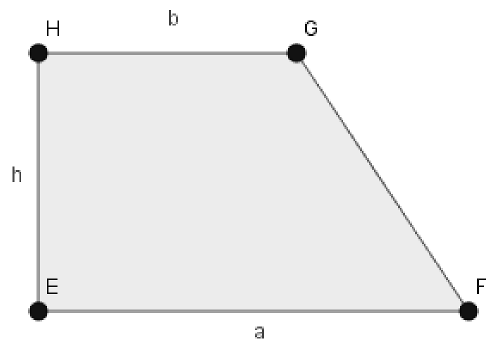
Formelen for arealet av et trapes er: $A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

a) Arealet av trapeset EFGH er like stort som arealet av rektangelet ABCD i figurene under. Hva er høyden *h* i trapeset EFGH?





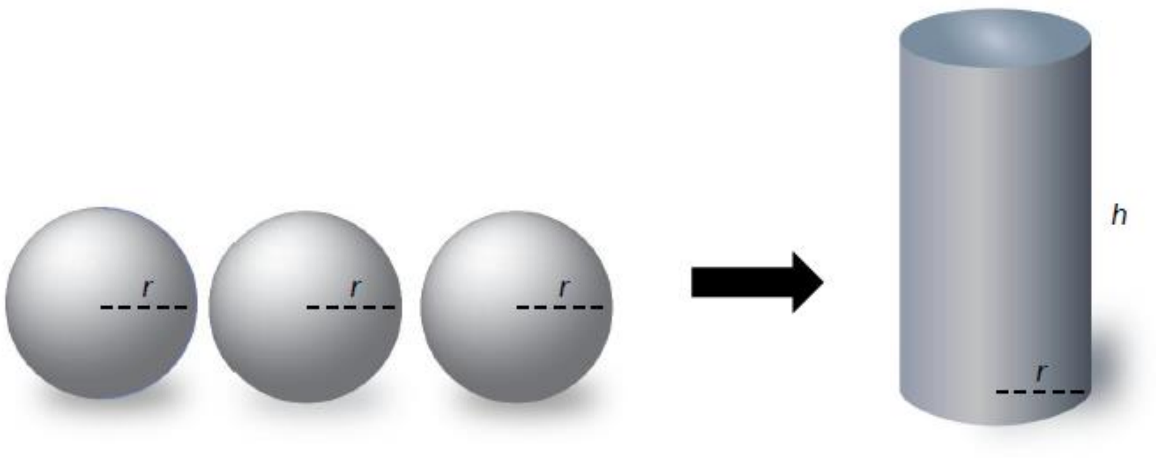
b) I figurene under er sidene *a* og *b* like lange i rektangelet ABCD som i trapeset EFGH. Arealet av trapeset skal være like stort som arealet av rektangelet.
Finn et uttrykk for høyden *h* i trapeset uttrykt ved sidelengdene *a* og *b*.



Oppgave 3)

Tre like store kuler har alle radius r. En sylinder har samme radius r som kulene og høyde h. Sylinderen skal ha like stort volum som de tre kulene til sammen.

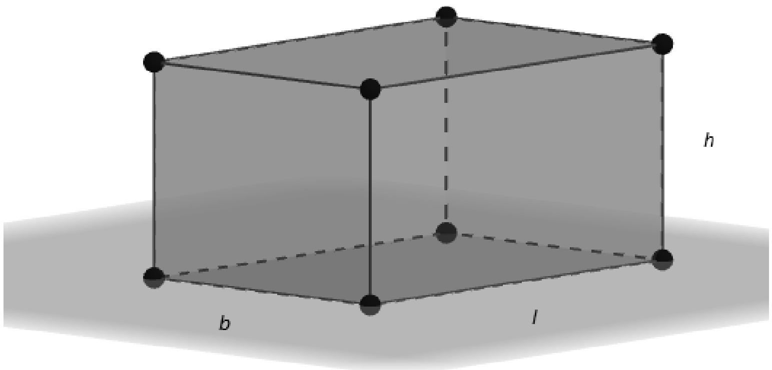
Formelen for volumet av en kule er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Bruk formler og bestem høyden h i sylinderen uttrykt ved r.

Oppgave 4)

Volumet i et prisme med bredde b, lengde l og høyde h er gitt ved formelen $V = b \cdot l \cdot h$.



I prismet i figuren er volumet $V = 72\ cm^3$ og høyden h = 3 cm. Lengden l og bredden b er hele tall.

- **a)** Hvilke tall kan l og b være? Finn så mange muligheter for l og b som du kan.
- **b)** Kan du finne et uttrykk for lengden l i prismet ved hjelp av bredden b?

Vedlegg C

Transkripsjonsnøkkel

[..] = noe mer blir sagt, men er ikke tatt med i gjengivelsen

(Kari «tekst») = Kari gjør det som står i «tekst», for eksempel peker på noe

Vedlegg D

Eksempel på intervjuguide

Fokus for intervju: metode for å finne uttrykk. Kule-sylinder-oppgaven.

Introduksjon

Fortelle kort om prosjektet. Planen for samtalen er at vi sammen går gjennom løsningene dine på oppgavene og snakker om dem. Jeg har noen spørsmål, men du må gjerne komme med kommentarer underveis. Før vi starter kan du få se raskt igjennom oppgavene og løsningen din.

Er det greit at jeg tar lydopptak?

Spørsmål 1: Hvordan var det å jobbe med oppgavene? Var noe lett eller vanskelig? Hvorfor?

Oppgave 1

1a) Her har du kommet fram til svaret 6. Kommentar på framgangsmåte?

1b) Kan du forklare løsningen din? På hvilken måte brukte du formelen? (Denne står oppgitt)

1c) Her har du skrevet $\sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{r^2}$. Er dette et uttrykk for radiusen? Hvorfor?

Oppgave 2

2a) Kan du fortelle meg om løsningen din? Hva betyr store A i uttrykket ditt?

2b) Du har først skrevet at du ikke forstår oppgaven, men strøket dette og skrevet et uttrykk. Kan du fortelle om dette?

Du har tatt kvadratroten av uttrykket. Kan du fortelle om dette?

Oppgave 3)

Hva handler oppgaven om? Hva skal man finne ut?

Kan du fortelle meg om det du har skrevet?

Kan du fortelle meg om uttrykket du kom fram til for h? Hva er dette et uttrykk for?

Hva tror du gjør at mange elever ikke svarer eller kommer i mål med denne oppgaven?

Oppgave 4)

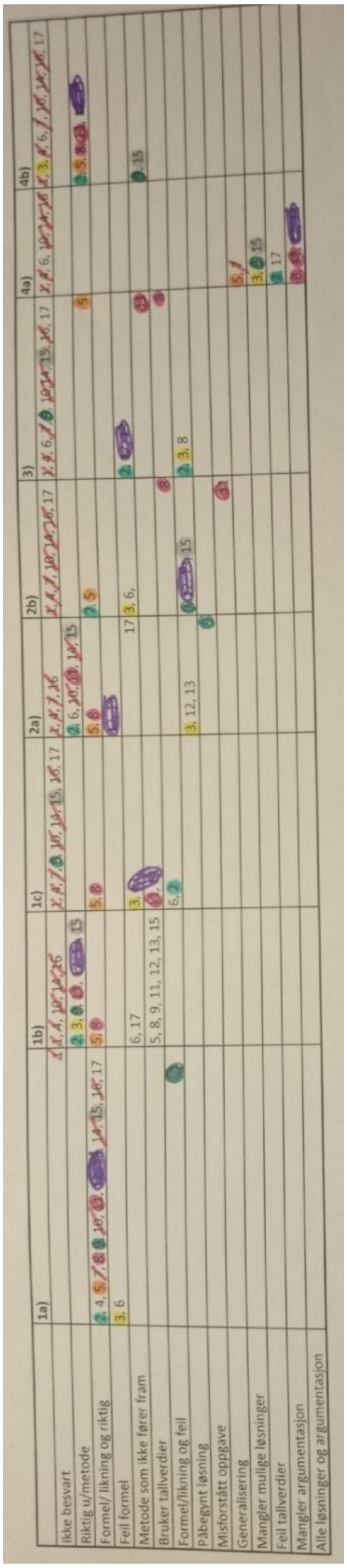
4a) Det ser ut som du har begynt med formelen her. Kan du forklare?

Hvordan kom du fram til de tallene du har skrevet opp? Tror du det finnes enda flere?

4b) Her har du laget et uttrykk(formel) for l. Hva betyr det uttrykket?

Vedlegg E

Tabell med kategorier for svar og løsningsprosesser



	1a)	1b)	1c)	2a)	2b)	3)	4a)	4b)
Ikke besvart		1, 2, 4, 10, 14, 16	1, 4, 7, 9, 10, 14, 15, 16, 17	1, 4, 7, 16	1, 4, 7, 10, 14, 16, 17	1, 4, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 16, 17	1, 4, 6, 10, 14, 16	1, 3, 4, 6, 7, 10, 14, 16, 17
Riktig u/metode		2, 3, 9, 13, 15		2, 6, 10, 13, 14, 15			5	2, 5, 8, 13
Formel/ likning og riktig	2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17	5, 8	5, 8	5, 8	2, 5			
Feil formel	3, 6					2		
Metode som ikke fører fram		6, 17	3		17, 3, 6,		13	9, 15
Bruker tallverdier		5, 8, 9, 11, 12, 13, 15	13			8	8	
Formel/likning og feil	9		6, 2	3, 12, 13	9, 15	2, 3, 8		
Påbegynt løsning					9			
Misforstått oppgave						13		
Generalisering							5, 7	
Mangler mulige løsninger							3, 9, 15	
Feil tallverdier							2, 17	
Mangler argumentasjon							8, 13	
Alle løsninger og argumentasjon								