Masteroppgave

«Making number relationships real»

Tallforståelse gjennom fokus på strukturerte mengder

Et kvasi-eksperiment med utgangspunkt i konkretiseringsmateriellet Numicon.

Skrevet av

Line Halland Gresdahl

Forord

Matematikk har alltid vært et fag jeg har interessert meg for, et spennende fag som har gitt meg mye glede, men samtidig også store utfordringer. Den største matematiske utfordringen møtte jeg på da jeg begynte å arbeide som spesialpedagog på småtrinn. Da jeg bestemte meg for å fullføre masterstudiet var det derfor med et ønske om å gå nærmere inn på hvordan man i begynneropplæringen kan hjelpe elever til å utvikle en større forståelse i matematikk, spesielt for de som opplever å mislykkes i faget.

Første gang jeg ble introdusert for Numicon var gjennom Elisa Ervik, en vikar på Sørborgen skole som på den tiden var i sluttfasen av sin masteroppgave om *økt tallforståelse gjennom strukturerte mengder*. Etter å ha prøvd ut konkretiseringsmateriellet i en lengre periode på 2. og 3. trinn, satt jeg igjen med gode erfaringer, samt nye tanker rundt hvordan dette konkretiseringsmateriellet kunne benyttes for å hjelpe elevene til å skape en forståelse av tall og mengder.

Denne oppgaven markerer slutten av en lang og omfattende prosess. Jeg ønsker derfor å benytte anledningen til å takke alle som har bistått meg i denne prosessen, og som har gjort det mulig for meg å gjennomføre min mastergrad i spesialpedagogikk. Jeg vil først takke min tidligere arbeidsgiver ved Sørborgen skole, for at de ga meg muligheten til å starte med siste del av masterstudiet. Videre vil jeg takke min nåværende arbeidsgiver ved PPT Levanger, for å ha lagt til rette for at jeg kan fullføre det. En stor takk også til min veileder, Per Frostad, for gode råd og tilbakemeldinger gjennom prosessen.

Videre vil jeg rette en spesiell takk til familie og venner for heiarop og gode ord. Takk til Guro for korrekturlesing og til Mamma for at du alltid har tro på meg. Til slutt vil jeg takke min samboer, Trond Erik, for alle gode klemmer og oppmuntrende ord. Takk for at du har interessert deg for oppgaven min og for at du har støttet meg hele veien inn til mål.

Innholdsfortegnelse

1. Introduksjon

I det nordiske forskernettverket har det de siste tiårene vært mye fokus på matematikk og matematikkvansker (Lunde, 2010). Det har lenge vært en bred enighet om at det er alt for mange som går ut av grunnskolen med for lave kunnskaper og ferdigheter i matematikkfaget og at noe må gjøres. Allerede i 2000 skrev Olav Lunde at mellom 10-15% av elevene på ungdomstrinnet synes å ha så store vansker i matematikkfaget at det vil være hemmende i yrkessammenheng. I dag, mer enn 15 år etter, går nesten hver fjerde elev ut fra ungdomsskolen uten å kunne regne skikkelig, og over 14000 elever går årlig ut av videregående skole med så lave matematikkferdigheter at de vil få problemer med egen økonomi og slite med å få seg utdanning og jobb (Bjørn, 2015). Man kan undre seg over hvorfor det ikke har skjedd en større endring på disse 15 årene. Hvor er det vi fortsatt feiler, og hva skal til for å skape endring?

Ser vi på resultatene fra TIMSS 2011 (*Trends in International Mathematics and Science Study*) kommer det frem at *Tall* og *Algebra* er de områdene hvor norske elever sliter mest (figur 1, vedlegg 1a). Disse to områdene i matematikk henger sammen, i den forstand at gode kunnskaper i aritmetikk er en forutsetning for å gå videre og lære algebra (Grønmo et al., 2011). Det kommer frem at nærmere førti prosent av elevene i Norge allerede i fjerde klasse ligger på lavt nivå eller under lavt nivå (figur 2, vedlegg 1a). Dette gir grunnlag for å stille spørsmål rundt hva som gjøres for å utvikle tallforståelse i norske klasserom i begynneropplæringen. Mange mener at matematikken fortsatt henger igjen ved tradisjonelle metoder, der læreren instruerer og elevene arbeider med eksempler i boka. Samtidig bærer mye av matematikkundervisningen preg av regelterping og øving, der læreboka anvendes direkte og/eller indirekte, i store deler av tiden (Johansson, 2009; Lunde, 2005; Tessem, 2009). Siden så mange elever ligger på lavt nivå i Norge, er det grunn til å tenke at en slik undervisningsform ikke er optimal med tanke på utvikling av forståelse i matematikk for alle elever.

Jeg har alltid undret meg over hvorfor det er slik at noen har lett for å forstå matematikk, mens andre stadig opplever å mislykkes i faget. Hvorfor matematikk for noen er både innlysende og selvfølgelig, mens den for andre ikke gir mening i det hele tatt. I skolen står likeverdsprinsippet sterkt. Alle skal ha et tilfredsstillende og likeverdig utbytte av opplæringen (enten ved tilpasset opplæring eller ved spesialundervisning). Jeg stiller meg likevel spørrende til om dagens matematikkundervisning gir alle en lik mulighet til å lære og til å forstå matematikk.

Regjeringen har nylig presentert stortingsmeldingen *«Fag – Fordypning – Forståelse. En fornyelse av Kunnskapsløftet»*, der de sier at de vil bedre elevenes grunnlag for læring og forståelse ved å fornye fagene i skolen (Meld. St. 28, 2016). Det er nettopp dette jeg ønsker å reflektere rundt i denne oppgaven. Som PP-rådgiver med bakgrunn som spesialpedagog, ønsker jeg å se nærmere på hva som skal til for å bedre grunnlaget for læring og forståelse i matematikkfaget. Mer spesifikt ønsker jeg å se på om et større fokus på dialogbasert undervisning, med strukturerte mengder i begynneropplæringen, vil kunne bidra til utvikling av en mer funksjonell tallforståelse og på denne måten redusere antall elever som mislykkes i matematikk. I min studie gjennomfører jeg et undervisningsopplegg med tre elever i tredje klasse, og undersøker om denne intervensjonen har ført til en endring i elevenes tallforståelse. Elevene er valgt ut med bakgrunn i at de synes matematikk er vanskelig og at de har et brudd med den jevne faglige utviklingen som forventes ut fra alder.

Oppgaven er strukturert i en form der jeg først presenterer teori knyttet til utvikling av en funksjonell tallforståelse i matematikk. Dette danner grunnlaget for problemstillingen. Deretter vil jeg gjøre rede for metode og framgangsmåte, der jeg har valgt et *kvasi-eksperimentelt pretest-posttest- design*. I den siste delen av oppgaven vil jeg presentere og sammenligne elevenes resultater fra pretest og posttest. Dette med tanke på deres strategibruk og om denne kan tilsi at det har skjedd en utvikling i retning av en mer funksjonell tallforståelse. Jeg vil også gå nærmere inn på den intervensjonen som er gjennomført, for å forsøke å få en større forståelse av *hvorfor* jeg har fått de resultatene jeg har fått. Dette med tanke på mulighetene for at lignende resultat vil kunne forekomme også hos andre elever, og dermed kunne fungere som et verktøy som skolen kan benytte i arbeidet med å øke elevenes tallforståelse.

2. Teori

I denne delen vil jeg presentere teori som danner grunnlaget for min studie. Hovedtema er utvikling av en funksjonell tallforståelse. Jeg vil først forklare hva jeg legger i begrepet matematikkvansker, deretter tar jeg for meg hvordan vi kan legge til rette for at elever utvikler en funksjonell tallforståelse i begynneropplæringen. Her vil fokus være på læringsteori og bruk av dialogbasert undervisning, hva som ligger til grunn for å utvikle en funksjonell forståelse, betydningen av strategiutvikling, samt bruk av konkreter og strukturerte mengder. Som avslutning i denne delen tar jeg for meg konkretiseringsmateriellet Numicon og betydningen av indre motivasjon og mestring for læring.

2.1 Matematikkvansker

Matematikkvansker er et sammensatt problem og dreier seg om mer enn bare regneferdigheter. Når det er snakk om matematikkvansker finnes det mange ulike forståelser av problemet, og det skilles ofte mellom spesifikke matematikkvansker (særskilte vansker for å lære matematikk på tross av normal fungering i andre skolefag) og generelle matematikkvansker (ingen klar forskjell mellom generelt evnenivå, ferdigheter i matematikk og ferdigheter i andre skolefag). Matematikkvansker kan også defineres bredt og omhandler da alle elever som mislykkes i faget. Det kan dermed ses på som et brudd med den jevne faglige utviklingen som elever uten matematikkvansker har. Grunnlaget for en slik bred definisjon er at elever som har matematikkvansker vil ha mange av de samme fellestrekkene (Lunde, 2003; Ostad, 2008; Sørlandet kompetansesenter, 2007).

Snorre Ostad viser gjennom MUM-prosjektet (**m**atematikk **u**ten **m**atematikkvansker) at disse fellestrekkene blir mer og mer gjeldende jo lengre elevene har kommet i skoleløpet. MUM-prosjektet viser at antall elever med forsinket matematikkfaglig utvikling (developemental delay model), blir redusert desto høyere opp i klassetrinnene de kommer. Elever med kvalitativ forskjellig matematikkfaglig utvikling (developemental difference model) synes derimot å ha stagnert i et ensidig og vanskelig lagringsformat. For elever med kvalitativ forskjellig utvikling synes arbeid med oppgaver i boka å være en isolert aktivitet, og oppgaveløsningen er preget av situasjonsspesifikk kunnskap med liten overføringsverdi**.** Det kommer videre frem i MUM-prosjektet at elever i matematikkvansker sklir inn i et mønster preget av strategirigiditet allerede i løpet av de første skoleårene, og at de ikke utvikler seg i særlig grad opp gjennom grunnskolegangen (Ostad, 2008).

Olav Lunde (2005) sier at det i skolen synes å ha vært en utbredt oppfatning at bare elevene trener lenge nok på en ferdighet, vil forståelsen komme etter hvert. MUM-prosjektet viser derimot at det er elevene med kvalitativ forskjellig utvikling som utgjør den største gruppen og som favner flest av de elevene som strever i matematikkfaget. Hos disse elevene vil ikke en slik tilnærming føre til videre utvikling (Ostad, 2008). Når jeg i denne oppgaven snakker om matematikkvansker viser jeg til en bred forståelse som omhandler alle elever som mislykkes i faget. Jeg ser da på matematikkvansker som et multi-faktorelt problem, som oppstår i samspillet mellom elevenes læringsmåte, matematikkens innhold og undervisningsformen (jfr. Magne, 1999 i Lunde, 2003). Videre vil jeg ta hensyn til Lunde (2010) sitt poeng om at man ikke burde snakke om eleven med matematikkvansker, men heller om eleven i matematikkvansker. På denne måten går vi bort fra et individfokus, der vanskene ses på som en del av eleven (som noe konstitusjonelt), og mot et større fokus på hvordan man kan hjelpe eleven ut av vanskene.

2.2 Å lære matematikk

For å kunne si noe om hvordan vi kan legge til rette for forståelse i matematikk, må vi først se nærmere på hvordan elever lærer matematikk. Hvordan vi tilegner oss kunnskap, har lenge vært et omdiskutert spørsmål. I en samtale mellom filosofene Sokrates og Menon, stiller Menon spørsmål om det i det hele tatt er mulig å tilegne seg ny kunnskap dersom man ikke allerede har kjennskap til den (Menons paradoks). Opphavet til Menons paradoks ligger i den oppfatning av at det eksisterer både en ytre og en indre verden. Den indre verden er individets forståelse av den ytre verden. Dermed er det forstått at det finnes en ytre kunnskap som eksisterer uavhengig av individets tolkning, altså den «riktige kunnskapen» (Frostad, 1998).

Knytter vi dette til matematikk vil de matematiske strukturene være tilgjengelige i den ytre verden uavhengig av hvordan de tolkes. Kunnskapen eksisterer som en sannhet, og det er hvor godt den indre verden korresponderer med den ytre verden som avgjør kvaliteten på elevens kunnskap. Det er dette synet som oftest reflekteres i måten matematikklærere underviser matematikk på. Lærerne forsøker gjennom å finne gode undervisningsopplegg å få elevene til å *se* idéene som ligger i den ytre verden, i håp om at dette skal gir dem den nødvendige forståelsen. I praksis viser dette seg å ikke være like vellykket, da de som allerede har kunnskapen vil kunne kjenne igjen idéen, mens de som ikke har den fra før, heller ikke vil kjenne den igjen om de møter den (Frostad, 1998).

Richard Skemp tar tak i dette problemet i sin bok, *The Psychology of Learning Mathematics*, ved at han lister opp to prinsipp som må følges for å lære matematiske begreper:

> 1. Begreper av en høyere orden enn de en person allerede har, kan ikke kommuniseres til han eller henne ved hjelp av en definisjon, men bare ved å presentere han eller henne for en passende samling av eksempler.
>
> 2. Siden disse eksemplene nesten alltid vil være andre begreper, må man først forsikre seg om at disse allerede er dannet i sinnet til den lærende (Skemp 1986, s.30, min oversettelse).

Skemp sier altså at det ikke nytter å starte med selve begrepet når elevene skal presenteres for noe nytt. Elevene må heller introduseres for eksempler de kjenner til, slik at de kan skape det nye begrepet ut i fra disse. På denne måten vil elevene kunne konstruere gode skjema ved å utvide eksisterende skjema (Skemp, 1986). Dersom vi beveger oss bort fra tanken om at det finnes en ytre sannhet som elevene skal streve etter å forstå, vil vi lettere åpne opp for å utnytte den kunnskapen som elevene allerede besitter. På denne måten vil vi ikke se på kunnskap som noe som skal tilegnes, men som noe som skal skapes hos den enkelte.

Prinsippene som Skemp (1986) beskriver som nødvendige for å lære matematiske begreper kan i stor grad knyttes til et *kognitivt konstruktivistisk* syn, der læring er noe som skjer inne i hodet på den enkelte og dermed er et individuelt anliggende. Jean Piaget sier at eleven selv må være aktiv i læringsprosessen for å kunne endre skjema gjennom assimilasjon og akkomodasjon. Kognitiv konstruktivisme kritiseres for å ikke legge nok vekt på det sosiale aspektet ved læring. Skemp sine prinsipper kan også knyttes til *sosialkonstruktivismen* og Lev Vygotskij sine tanker rundt begreper av 1. og 2. ordensspråk, der språk av 1.orden fungerer som et oversettelsesledd til det språket som ikke står i dirkete kontakt med begrepsinnholdet (språk av 2.orden). Sosialkonstruktivismen legger vekt på at kunnskap blir konstruert gjennom interaksjon med andre mennesker der språket, spesielt det muntlige, er av stor betydning i tilnærming til kunnskap og læring (Ernest, 1998; Høines, 1998; Imsen, 2005).

Sosialkonstruktivismen har sprunget ut fra både Piaget og Vigotskijs tanker og fokuserer på å forene to ulike forståelsessfærer; den private, subjektive forståelsen og den allment aksepterte. Dette skjer i en vekselvirkning hvor de matematiske begrepene konstrueres og rekonstrueres i begge sfærene. Det er den samme mekanismen som pågår i klasserommets sosiale interaksjoner. De ulike aktørene påvirker hverandre med sin kunnskap, og undervisningen karakteriseres dermed som dialektisk (Ernest, 1998; Holm, 2002; Imsen, 2005). Selv om den sosiale konstruktivismen i større grad vektlegger samarbeid og kommunikasjon i opplæringen, er det ikke nødvendigvis noen motsetning mellom disse to retningene. Det vil være vesentlig å ta hensyn til både kognitiv konstruktivisme og sosialkonstruktivisme for å kunne forstå hvordan elever best lærer. I den videre bruken av begrepet konstruktivisme henviser jeg derfor til begge retningene.

Ved undervisningsmetoder som bygger på et konstruktivistisk syn er pedagogens rolle å stimulere elevene til å gjøre selvstendige matematiske erfaringer ved å være en veileder, idéskaper, instruktør, leder og inspirator til faglige diskusjoner. Det er dette som gir grunnlaget for mitt fokus på en dialogbasert undervisning. Kjernepunktene i dialogbasert undervisning er at elevene skal bruke nysgjerrigheten og kreativiteten sin og lære gjennom samtaler, samhandling og praktiske aktiviteter. Dialogbasert undervisning bygger på en forståelse av at mening oppstår og blir utviklet gjennom interaksjon med andre mennesker. Kommunikasjon og bruk av språk står derfor sentralt i dialogbasert undervisning. Språket hjelper til med å støtte tenkningen og sortere tanker i læringsprosessen, og er av stor betydning i utvikling av begreper og forståelse av kunnskap (Dysthe, Bernhardt & Esbjørn, 2012; Holm, 2002).

Den russiske språkfilosofen Mikhail Bakhtin, sier at det er dialogen som gjør det mulig å samhandle med andre mennesker gjennom refleksjon og respons. Det er dialogen som skaper utgangspunktet for de mentale prosessene som fører til læring. Ved dialogbasert undervisning fokuseres det på å benytte de mulighetene man har til å lære gjennom å samtale og reflektere rundt egen og andres oppfattelse av et fenomen eller begrep. I matematikk har vi gjennom språket mulighet til å samtale rundt ulike fenomen/konsepter, som for eksempel addisjon og subtraksjon. Ved å sette et navn på dette, har vi muligheten til å diskutere og utvikle vår forståelse av dets innhold. På denne måten kan vi skape kunnskap gjennom å utvikle nye kognitive strukturer basert på eksisterende kunnskapsstrukturer. Språket gjør det mulig å snakke om og reflektere rundt bruk av ulike prosedyrer for å løse en oppgave. På denne måten kan også prosedyrene etter hvert utvikle seg til å bli matematiske konsepter (Dysthe et al., 2012; Imsen, 2005; Tall, 2013).

En forskningstradisjon som er sentral i hvordan elever lærer matematikk, er *fenomenografi*. Ved en fenomenografisk forståelse er man opptatt av individets forståelse og antar at individet ikke har tilgang til noe annet enn oppfattet verden. Ulike personer kan erfare og tolke verden på ulike måter, dermed finnes det også ulike oppfatninger. Fenomenografien trekker frem at noen oppfatninger er bedre enn andre med tanke på utvikling i matematikk. De har på lik linje med konstruktivismen et didaktisk perspektiv, men er i større grad opptatt av å beskrive elevenes forståelse og oppfatning, der konstruktivismen har fokus på å beskrive kognitiv vekst. Forskere innen de to retningene har derfor en ulik oppfatning om hva som gir indikasjoner på en utviklet tallforståelse, blant annet når det kommer til dobbeltelling i addisjon. Dagmar Neuman (forsker innen fenomenografisk retning) sier at telling generelt skal unngås og hevder at dobbeltelling (eks 5+4, løst som 6 er 1, 7 er 2, 8 er 3 og 9 er 4), er en blindvei som fører til matematikkvansker. Neuman hevder at veien til tallforståelse går gjennom å lære seg alle del-del-helhetsrelasjonene innen tallområdet 1-10. Ved et fenomenografisk syn vil utvikling av tallforståelse skje ved fokus på en funksjonell relasjon mellom eleven og fenomenet. Konstruktivister som Steffe, Glasersfeld, Richards og Cobb, hevder derimot at dobbeltelling viser til elevens evne til å tenke og resonnere på et abstrakt plan (jfr. det Piaget kaller «reflective abstraction»). Ved et konstruktivistisk syn vil dermed dobbeltelling være en indikasjon på utviklet tallforståelse (Frostad, 1998; Neuman, 1993; Steffe et al., 1983 i Frostad, 1998).

2.3 Utvikling av funksjonell forståelse

Begrepet forståelse kan defineres som: «*To appreciate the deep meaning of a thing or a process*» (Reber, 1995 i Holm, 2002 s.70). Engström (2000 i Lunde, 2005) sier at læring er å skape mening i det en gjør. Korrekt utførelse er ikke nok, man må ha en hensikt med utførelsen – en forståelse. I det å ha kunnskap om et fenomen inngår både det å vite *hva* man gjør og *hvorfor* man gjør det (Holm, 2002). I skolematematikken skiller vi mellom to kunnskapskvaliteter: *ferdighet* (prosedyrekunnskap) og *innsikt* (konseptuell kunnskap). Dersom kunnskap sees på som en ferdighet, vil kunnskapen om hvordan noe gjøres være i fokus, dvs. kunnskap om algoritmer og regler og annen faktakunnskap. Beskrives kunnskap som innsikt, vil fokuset være på forståelsen av begrepet, altså å kunne se strukturer og sammenhenger i matematikken (Hiebert & Lefevre, 1986). McShane poengterer at elevene kan lære prosedyrer uten å forstå dem, men dersom begrepene ikke har en mening for dem, vil denne kunnskapen være unyttig for elevenes videre tenkning. Det vil være umulig å memorere alle svar på utregninger som faktakunnskap. For å kunne anvende prosedyrene i utregning på rett måte og i rett sammenheng, må elevene få en forståelse av hvordan og hvorfor prosedyrene fungerer (McShane, 1991 i Holm, 2002).

Å lære elevene ferdigheter i faget vil altså ikke uten videre føre til at de utvikler innsikt i faget. Dersom undervisningen ikke tar utgangspunkt elevens eksisterende kunnskap, er sannsynligheten størst for å utvikle en kunnskap basert på ferdigheter, altså kunnskap om prosedyrer og regler. Dette handler om en mekanisk handling uten videre refleksjon. For at elever skal kunne utvikle en grunnleggende tallforståelse, må det være en balanse mellom kunnskap som ferdighet og kunnskap som innsikt. Å koble sammen ferdighet og innsikt gir mening til tallsymbolene som brukes i prosedyrene. Dette gjør at prosedyrene kan huskes bedre og brukes mer effektivt (Frostad, 2005; Hiebert & Lefevre, 1986).

Dette kan knyttes til det Gray og Tall (1994) kaller for *procept* (herfra oversatt til proseptuell forståelse). Å ha en proseptuell forståelse innebærer å fleksibelt kunne bevege seg mellom kunnskap om prosessen (*prosess*) og kunnskap om konseptet (*concept*). Gray og Tall mener at det er dette som skiller elever med og uten suksess i matematikk. En avklaring av begrepenes innhold vil være nødvendig her. Prosess er for eksempel prosessen addisjon eller subtraksjon. Prosess er ikke det samme som en prosedyre, da en prosedyre forteller hvilken framgangsmåte eleven velger ut i fra hvilken prosess som skal utføres. Å telle videre fra største tall er en prosedyre i prosessen addisjon. En prosedyre handler om hva eleven *gjør* og kan knyttes til kunnskap som ferdighet. Konsept derimot, handler om hva eleven *vet*, og kan ses på som kunnskap som innsikt. Et eksempel på dette er at eleven ved å se mengden 5, ser den som en helhet, samtidig som at han ser at den består av delmengdene 2 og 3, samt 5 enkeltelementer. En slik oppfattelse av antallet i ulike mengder og forståelse av strukturen i disse, er den mest grunnleggende konseptuelle kunnskapen i begynneropplæringen. En elev viser en *proseptuell forståelse* når han klarer å koble meningsfulle prosesser (som addisjon og subtraksjon) til den konseptuelle kunnskapen. Gray og Tall karakteriserer den proseptuelle tenkningen som evnen til å tolke symboler som tvetydige, slik at de representerer både konseptet og prosessen samtidig. Å skape om en prosess til et begrep (innkapsling) vil være en forutsetning for å utvikle tallforståelse. Frostad sier at en indikator på den konseptuelle kunnskapen er utviklingen av strategibruk over tid (Frostad, 2005; Gray & Tall, 1994). Pedagogens kompetanse rundt strategiutvikling, vil dermed være en betydningsfull faktor for utvikling av funksjonell tallforståelse (Holm, 2002).

2.4 Strategiutvikling og den proseptuelle kløften

I følge Ostad vil en god strategiutvikling i matematikk vise til en gradvis overgang fra *backupstrategier* til økt bruk av *retrievalstrategie*r. Retrievalstrategier er hukommelsesbaserte strategier som eleven henter frem fra et kunnskapslager. Dette kan blant annet vise seg ved at eleven *bare vet* svaret, eller at han benytter andre kjente tallkombinasjoner til å komme frem til svaret. Backupstrategiene kan sies å være prosedyremessige strategier som for eksempel telling (Ostad, 2008). Carpenter og Moser deler backupstrategiene inn i to nivå. Det første nivået er *tellestrategier med konkreter*. Elevene er på dette nivået avhengig av å bruke konkreter som for eksempel klosser eller fingre når de teller for å ha kontroll på prosessen. På dette nivået brukes konkretene i alle ledd av prosedyren. Det andre nivået kaller de for *tellestrategier*. Det er hovedsakelig tre tellestrategier; *Telle alle* (ved 4+6, teller de først til 4 enten høyt eller i hodet og bruker så konkreter til å telle de seks neste). T*elle videre fra første* (starter på tallet 4 og teller seks videre). T*elle videre fra største* (starter på tallet 6 og teller 4 videre). Moser og Carpenter har også et tredje nivå som omhandler evnen til å benytte seg av *tallfaktastrategier*. Her skiller de mellom *kjent tallfakta* og *utledet svar*. Ved kjent tallfakta, vet eleven svaret automatisk uten å bruke noen strategier. Ved utledet svar benytter eleven kunnskap, som for eksempel kombinasjoner av mengder, til å resonnere seg frem til et logisk svar. Ved oppgaven 8+4 kan eleven benytte sin kunnskap om at 8 + 2 = 10, og at 10 + 2 = 12 (Carpenter & Moser, 1982 i Frostad, 2005). Det er først når elevene kan utnytte tallfaktastrategier at elevene har utviklet det Ostad (2008) refererer til som retrievalstrategier.

Utviklingsforløpet til elever med normal matematikkfaglig utvikling kalles *strategibrukinternalisering*. Dette handler om en forflytning mot stadig mer avanserte strategikategorier til de når det høyeste nivået (nivå 3: tallfaktastrategier/ retrievalstrategier). Strategiene byttes ikke ut, men sameksisterer med de foreliggende strategiene. Elevene utvikler på denne måten en *strategifleksibilitet,* der de gjennom aktiv seleksjon og bedømmelse, kan fremkalle hensiktsmessige strategier. En slik fleksibilitet finner vi derimot ikke hos elever i matematikkvansker. De har ofte kun en eller to primitive strategier å velge mellom. Dette kalles *strategirigiditet* og er ifølge MUM-prosjektet noe som preger elever i matematikkvansker allerede fra de første skoleårene (Ostad, 2008).

En elev i matematikkvansker vil altså fortsette å benytte seg av de samme backupstrategiene år etter år og mengden spesifikke strategikunnskaper vil ikke utvikle seg i særlig grad opp gjennom grunnskolegangen. Dette vil være en kritisk faktor for normal utvikling (Ostad, 2008).

Prinsippet om *functional fixedness* kan også ha betydning for manglende utvikling. Functional fixedness går ut på at eleven ved å løse en oppgave med samme løsningsstrategi gjentatte ganger, etter hvert blir så låst til denne strategien at andre løsningsstrategier ikke slipper inn (Wertheimer, 1959 i Ostad, 2008). Videre sier Gray og Tall (1994) at matematikksvake ofte opplever et press mot å bruke mer avanserte strategier, selv om de ikke mestrer disse. Dette gjør at disse elevene i større grad vil feile.

Elevenes strategibruk (prosedyrer) sier noe om kvaliteten på tankegangen (Frostad, 2005). Prosedyremessige kunnskaper kan læres som en prosess eller som en prosess og et begrep samtidig (proseptuell forståelse). Matematikksterke vil karakteriseres ved deres evne til å dekomponere og re-komponere symboler på en effektiv måte. De benytter seg av proseptuell tenkning der de tar utgangspunkt i de tallkombinasjoner de kjenner fra før, til å skape nye kombinasjoner i møte med nye problem. Matematikksvake har ofte et rent prosessfokus. De er opptatt av å gjennomføre riktig telleprosedyre, som å telle videre fra største ved addisjon og å telle ned ved subtraksjon. Et så stort fokus på å telle riktig kan skape et utydelig forhold mellom input (6+3) og output (svaret: 9). Når disse elevene arbeider med å bli bedre i matematikk, er det deres kompetanse i tellestrategier som er i fokus. Å gjennomføre prosedyren og komme frem til riktig svar raskere, er deres mål på om de har blitt bedre i matematikk. Dette resulterer i at elevene blir enda flinkere til å gjennomføre telleprosedyrer, uten at de har kommet noe nærmere en funksjonell forståelse (Gray & Tall, 1994).

Skillet mellom sterke og svake elever i matematikk kan beskrives som den *proseptuelle kløften***.** Jo mer elever i matematikkvansker får utviklet sin kompetanse i tellestrategier, uten å utvikle en innsikt i strukturen og helheten i mengder (konseptuell forståelse), jo vanskeligere vil det bli å komme seg fra et ensidig prosessfokus og over kløften til en proseptuell forståelse (Gray & Tall, 1994). Tanken om den proseptuelle kløften samsvarer med Ostad sine funn i MUM-prosjektet, der resultatene indikerer at ineffektive strategibruk er med på å hindre et normalt utviklingsforløp og dermed til opprettholdelse av matematikkvansker (Ostad, 2008).

Elever i matematikkvansker har lettest for å løse oppgaver med lineær semantisk struktur (a±b=□). Dette kan komme av at det er denne typen de oftest møter i begynneropplæringen. Ginsburg (1997 i Ostad, 2008) mener at skolens undervisningsopplegg er den mest sannsynlige forklaringen på at elever i matematikkvansker mislykkes i faget. Begynneropplæringen gir liten kunnskap om de alternative strategiene som kan være aktuelle under oppgaveløsningen, samtidig som undervisningsmetodene ofte inviterer til bruk av tellestrategier. I følge Ostad (2008) vil elever i matematikkvansker allerede i 1.trinn begynne å gli inn i et utviklingsmønster preget av primitive backupstrategier, strategifattigdom og strategirigiditet.

For å imøtekomme disse elevenes opplæringsbehov sier Ostad at undervisningsmetodene bør «forandre fokus fra det å lære mer matematikk, til det å lære matematikk ved hjelp av hensiktsmessige læremåter» (Ostad, 2008 s. 34). I praksis kan dette for eksempel være å sette et større fokus på strategiutvikling som en del av matematikkundervisninga. Undersøkelser viser derimot at generaliserings- og langtidseffekten i stor grad uteblir hvis man ensidig fokuserer på å øke mengden strategikunnskaper (Goldman, 1989 i Ostad, 2008). Studier viser at hvis elevene ikke blir direkte påminnet hvilke strategier som kan brukes, vil de etter hvert slutte å benytte seg av disse. Resultatet blir at kunnskaper om alternative strategier økes, uten at det har noen signifikant innflytelse på funksjonaliteten i strategibruken. De vil dermed ha begrenset verdi. Det er derfor viktig at strategiundervisningen baserer seg på elevenes kunnskapsbase, slik at både kunnskap om prosessen og begrepet utvikles samtidig. Spesielt viktig er det at dette skjer i begynneropplæringen, da den proseptuelle kløften er lettest å passere (Ostad, 2008).

2.5 Konkreter og strukturerte mengder

Pioneerer som Piaget og Bruner hevder at matematikk læres best gjennom aktiv manipulering med konkrete gjenstander. Å bruke fysiske representasjoner til å visualisere et abstrakt fenomen, vil gi en bedre forutsetning for å forstå fenomenet enn ved kun å benytte symboler. Manipulerbare gjenstander som klosser, pinner, tierstaver, o.l., hjelper elevene ved å overføre problemet til en annen dimensjon. På denne måten kan elevene benytte seg av flere sanser samtidig, både visuelle, taktile og kinestetiske, som hjelp til å skape forståelse av begrepet, prinsippet eller prosedyren. Ved å bruke konkretiseringsmateriell, ønsker vi å tydeliggjøre sammenhengene i den symbolske matematikken, på en slik måte at det blir mindre symbolsk og lettere å forstå (Frostad, 1995; Holm, 2002).

Når lærere ser på konkretiseringsmateriell ser de begrepene eller den matematiske idéen gjennom konkretene. Dette på grunn av at idéen allerede er dannet i lærerens sinn og fordi konkreter er laget nettopp med tanke på å representere disse matematiske ideene. For de som er kjent med begrepet/idéen vil materiellet tydeliggjøre dette, og det virker som idéen springer ut av materiellet. Av denne grunn kan man tenke at elevene kun med bakgrunn i materiellet skal kunne oppdage begrepet. Frostad påpeker at det ikke er gitt at dette skjer, da den matematiske idéen ikke er en egenskap ved materiellet, men må konstrueres hos hver enkelt elev. For mange elever vil konkretiseringsmateriell trolig kun fungere som et manipuleringsverktøy som hjelper dem med å gjøre utregninger de ikke har noen begrepsmessig forståelse for (Frostad, 1995; 1998; 2005). Snorre Ostad har drevet forskning på hvilken effekt konkretiseringsmateriell har på elevenes faglige utvikling. Hans resultater viser at elevene ble flinkere til å løse matematikkoppgaver ved hjelp av konkreter, men at overføringsverdien til arbeid med tallsymboler var minimal og i enkelte tilfeller negativ (Ostad, 2009).

Selv om det er varierende resultater på bruk av konkreter, betyr ikke det at konkreter ikke har nytteverdi. Det betyr at konkreter i seg selv ikke nødvendigvis er løsningen. Resultatet av bruk av konkretiseringsmateriell avhenger av hvordan en ser på læring, både på hva det er og hvordan det tilegnes. Dette vil prege måten det blir brukt på, hvordan undervisningen legges opp og hva som er i fokus (om fokuset har vært på ferdighet eller innsikt). Fokus bør rettes mot elevenes tolkning av materiellet (jfr. konstruktivismen). Denne tolkningen gjør elevene ut fra formen på materiellet, instruksjon, sosiale konvensjoner, sine kognitive strukturer osv. Læreren må ikke bli låst til en tolkning av materiellet som læreren selv ser på som innlysende, men som en kilde til mange ulike idéer som elevene selv kan danne egne tolkninger ut i fra. Ideen som materiellet er laget for å tydeliggjøre blir da bare en av flere måter å tolke det på. Materiellets nytteverdi er altså avhengig av lærerens kunnskap om hvordan elever best lærer og hvordan læreren velger å benytte materiellet med bakgrunn i denne kunnskapen (Frostad,1995).

Strukturerte mengder

Målet ved å bruke konkretiseringsmateriell er at kunnskapen etter hvert skal kunne videreføres fra konkret og semikonkret nivå, slik at elevene kan oppnå kunnskap på et abstrakt plan uten bruk av sensorisk hjelpemateriell. Dette skjer ved at elevene utvikler gode indre bilder (mentale forestillinger) av begrepene og prinsippene og kan tenke matematisk ved hjelp av disse (Holm, 2002). De fleste konkreter som benyttes i begynneropplæringen er enkeltstående elementer (perler, centikuber, steiner, kronestykker osv.). Hver av disse representerer mengden *en*, og det er sluttsummen av antall enere som gir et bilde på den samlede mengden. Problemet med slike konkreter er at de oppfordrer til bruk av tellestrategier (nivå 1 og 2 hos Carpenter og Moser). Her er det i tillegg det siste tallordet eleven sier som viser til svaret, ikke mengden i seg selv.

For at eleven skal utvikle en god mengdeforståelse mener Brissiaud (1992) at eleven må oppfatte to aspekter ved mengden samtidig: enkeltelementene, og enkeltelementene som en samlet enhet. Dette kan gjøres blant annet ved å benytte seg av *strukturerte mengder*. I sin forskning søker Brissiaud etter å finne en alternativ måte å lære barn å oppfatte antallet i mengder på. Ved å forske på sin sønn, beskriver han hvordan barn kan representere antall kun ved å vise samme antall med fingrene (eks: tar opp tre fingre uten å telle for å vise til mengden 3). Han kaller dette for *fingersymbol*. Tanken er at barna ikke skal starte med å lære tallordene, men først lære å benytte fingrene til å representere antall. På denne måten vil barnets assosiasjon til antallet knyttes til fingersymbolene og barnet vil lettere kunne se mengden både som en helhet, som enkeltelementer og som de ulike delmengder som det består av (dette forutsatt at elevene har utviklet en-til-en korrespondanse). Når tallordene innføres vil de bli «merkelapper» på fingersymbolene (Brissiaud, 1992). Kjernen i Brissiauds forskning er at han betegner fingrene som analoge representasjoner av antall. Ved at barna benytter fingersymbol som strukturerte mengder, representeres mengden både som en helhet (som et bilde) og som de enkeltelementene de er satt sammen av.

I følge Piaget er det i hovedsak to typer kunnskap som er avgjørende for at barn skal lære å tenke matematisk: den *fysiske* og den *logisk-matematiske kunnskapen*. Fysisk kunnskap omhandler farge, form og vekt, og er noe elevene tilegner seg empirisk gjennom observasjon og refleksjon. Logisk-matematisk kunnskap består av mentale relasjoner som eleven skaper mellom objekter. Dette kan for eksempel være å finne likheter og forskjeller. Disse to kunnskapstypene er avhengig av hverandre i den forstand at den ene ikke gir mening uten den andre. I begynnelsen er disse to uatskillelige, siden elevene er avhengig av konkreter for å bruke tall. Etter hvert som elevene blir eldre og deres skjema utvikles, vil den logiskmatematiske kunnskapen bli mer og mer uavhengig av den fysiske. Det er når dette skjer at elevene kan forstå tall som noe abstrakt (Kamii, Lewis & Kirkland, 2001).

Piaget har også laget et skille mellom *empirisk abstraksjon* (simple abstraction) og *konstruktiv abstraksjon* (reflective abstraction). For å utvikle matematisk forståelse sier Piaget at elevene må kunne abstrahere på begge plan. *Empirisk abstraksjon* er knyttet til den fysiske kunnskapen, der elevene fokuserer på en eller flere egenskaper ved objektet (som farge eller form) og ignorerer andre egenskaper (som for eksempel at den er laget av plastikk). *Konstruktiv abstraksjon* knyttes til den logisk-matematiske kunnskapen ved at hver elev skal skape (konstruere) mentale relasjoner i og mellom objekter. Det er den konstruktive abstraksjonen vi refererer til når vi snakker om tenking eller resonnering (Kamii et al., 2001).

Piaget sier at forskjellen mellom fysisk og logisk-matematisk kunnskap, samt mellom empirisk og konstruktiv abstraksjon, viser til forskjellen mellom konkreter der elever *kan* lære og konkreter der elever *forventes* å lære (Kamii et al., 2001). Læring er et resultat av hva mennesket gjør med stimuleringen og ikke omvendt (jfr. Piaget). For at undervisningsmateriellet som skal hjelpe elevene å utvikle et begrep skal være nyttig, må det være lett å oppdage/skape idéen (Frostad, 1995). Konkretiseringsmateriellet som er brukt i denne studien er strukturerte mengder som kan knyttes til Brissiauds tanke om å benytte konkreter som analoge representasjoner av antall. I tillegg samsvarer konkretiseringsmateriellet godt med Piagets teori om abstraksjonsnivå for å utvikle matematisk forståelse. De strukturerte mengdene jeg har tatt for meg i denne studien er knyttet til konkretiseringsmateriellet *Numicon.*

2.6 Numicon

Numicon er et konkretiseringsmateriell som er utviklet med tanke på at barn skal få utnytte tre av sine sterke sider for å få en forståelse av antall; deres evne til å lære gjennom visualisering, lære gjennom handling og deres sterke sans til å se mønster. Numicon-materiellet består av tallbrikker som viser mengdene 1-10 i ulike sterke farger, to grunnbrett som tallbrikkene kan festes på og en pose med plugger i ulike farger, som passer inn i hullene på tallbrikkene og som kan settes på grunnbrettet (se figurer fra Numicon, vedlegg 1b). Posen disse pluggene ligger i kan benyttes som «følepose». Det legges opp til en multi-sensorisk tilnærming, der elevene kan ta og føle på tallene, flytte på dem, sette de sammen, sammenligne dem og eksperimentere med dem i regning (Atkinson, Tacon & Wing, 2005; 2009).

Numicon-materiellet inkluderer en lærerveiledning og aktivitetskort med gode idéer til undervisningsopplegg som hjelper lærerne med å planlegge og strukturere undervisningen. Aktivitetskortene er designet med tanke på å bygge opp elevenes ferdigheter i små steg og inneholder klare læringsmål, samt begreper det kan jobbes med parallelt. Dette vil i større grad sikre at grunnleggende ferdigheter er til stede før man går videre til neste del. Numicon kan videre hjelpe pedagogen til å finne ut hvor i løpet elevene ligger. Ved at elevene bruker tallbrikkene, viser de samtidig hvordan de tenker, og det kan være lettere å få tak i hva elevene forstår og hvilke misforståelser de har. De fleste aktivitetene legger til rette for turtaking, samarbeid og modellering. Dette gir gode muligheter for tilpasset opplæring (Atkinson, Tacon & Wing, 2009; Wing & Tacon, 2007).

Formålet med å bruke konkreter i begynneropplæringen er å utvikle den matematiske kunnskapen fra det konkrete til det abstrakte. En av hovedtankene med Numicon er at tallbrikkene skal bli en del av elevenes mentale bilder, og at når disse bildene er etablert vil det ikke lengre være behov for å benytte tallbrikkene. På denne måten skal elevene kunne gå fra å være avhengig av konkreter og over til mer abstrakt tallbehandling (jfr. Piagets utvikling av konstruktiv abstraksjon). For å komme dit er det vesentlig at elevene forstår at tall ikke er tilfeldig, men organisert i et system av mønster. Ved å jobbe med Numicon er målet at elevenes mentale bilder inkluderer disse systematiske mønstrene. På denne måten vil elevene kunne se sammenhengen mellom tallene. Numicon oppmuntrer til å bruke konkreter på en slik måte at relasjonen mellom mengder blir synlig. Elevene må gå fra å bare tenke på «fem» som en-to-tre-fire-fem, til å se sammenhengen mellom at tallformen til tallet fem er en mer en tallformen til fire, en mindre enn tallformen til seks, halvparten av tallformen til ti, en sammensetting av tallformen til tre og to osv. Tanken er at de skal se tall som et eget begrep, som en helhet, satt sammen av flere delmengder (Atkinson, Tacon & Wing, 2009). Som Tony Wing selv sier; «*the thing about Numicon is that not only does it make the numbers real (...), it also make number-relationships real*» (Daland, Dalvang, Davidsen, Andersen & Wischmann 2012).

2.7 Indre motivasjon og mestring

Motivasjon er et viktig begrep innen all pedagogikk da det viser til sammenhengen mellom innsats og læring. Forskning skiller mellom indre og ytre motivasjon. Ved en indre motivasjon er interessen for aktiviteten genuin og gleden ligger i selve aktiviteten som utføres. Ved ytre motivasjon vil aktiviteten utføres eller opprettholdes for å oppnå en ytre belønning (som for eksempel ros) eller for å unngå straff (Deci & Ryan, 2002). Verdien av læring er større når den knyttes opp mot indre motivasjon. En større grad av indre motivasjon vil kunne føre til større egeninnsats og initiativtaking, samt større tankemessig fleksibilitet. Dette vil igjen øke elevens kreativitet, innovasjon og skaperevne (Deci, 1996).

For at en elev skal bli indre motivert beskrives det av Deci og Ryan (2002) tre basisbehov. *Behov for tilhørighet* handler om å føle seg inkludert, likt og godtatt av andre. Å kunne dele egne tanker og meninger i et trygt miljø gir en følelse av tilhørighet. *Behov for autonomistøtte og selvbestemmelse* går ut på at elevene trenger en større følelse av medbestemmelse på de oppgavene som skal utføres for å opprettholde indre motivasjon. Ved å la elevene være med å bestemme, får de en følelse av å ha større kontroll og ansvar i egen læring, noe som kan øke deres nysgjerrighet og ønske om nye utfordringer. *Behov for kompetanse* omhandler elevens selvsikkerhet og tro på egne evner. Disse forsterkes ved en følelse av å selv være ansvarlig for den handlingen som fører til at de lykkes.

Glasersfeld støtter dette ved å legge vekt på at elevene må ha tillit til at de kan mestre oppgaven ved egen arbeidsinnsats. Dersom de ikke har tro på at de vil mestre, vil motivasjonen for nye arbeidsoppgaver være tilsvarende redusert. «If students do not think their own way through problems and acquire the confidence that they *can* solve them, they can hardly be expected to be motivated to tackle more" (Glasersfeld, 1995. s. 181). Gleden ved å mestre en oppgave er mye større dersom eleven selv oppdager løsningen, utarbeider den og produserer et resultat som han forstår og godkjenner. Når eleven forstår logikken bak oppgaven og skaffer seg innsikt i hvorfor et svar er riktig vil eleven få en følelse av kompetanse og evne. Dette gir en tro på egne ferdigheter som er mye sterkere og mer motiverende enn ved en ytre forsterking (Glasersfeld, 1995; Holm, 2002).

Det er vesentlig at læringsmiljøet og læringsaktivitetene i matematikkundervisningen ikke truer de forestillingene elevene har om egne muligheter for å lykkes i faget. Matematikkfaget er fortsatt preget av tradisjonell undervisning, der elevene bruker mye tid på å sitte med oppgaveløsning på egenhånd og det er lite variasjon i undervisningsmetoder (Tessem, 2009). For en elev som ikke mestrer matematikk vil en slik undervisningsmåte kunne fungere som en selvoppfyllende profeti, der både lærelyst og forventninger til å lykkes blir vanskelig å oppdrive. Motivasjon er nært knyttet sammen med hvor godt vi lykkes og våre forventninger om å kunne lykkes. Det vi er gode på, ønsker vi å gjøre mer av; områder der vi føler oss mislykkede, prøver vi å unngå. Forventning om mestring har betydning for aktivitet og innsats. Gode erfaringer øker forventningene til å lykkes, som igjen øker innsatsviljen (Akselsdotter, 2009; Holm, 2002).

Elever som har forventninger om å lykkes har større utholdenhet og prøver lengre før de gir opp. En elev som har liten tro på egen dyktighet vil lettere gi opp og redusere innsatsen. Dette vil gi dårligere resultat og enda lavere forventning om å lykkes neste gang, samt enda mindre innsatsvilje. Ved gjentatte mislykkede erfaringer med matematikk, vil negative holdninger og følelser kunne knyttes til faget. Dette vil igjen føre til forsøk på å unngå eller slippe unna aktiviteter relatert til matematikk. Fravær av aktivitet vil videre vanskeliggjøre opparbeiding av ny kunnskap og elevene vil komme inn i en selvdestruerende sirkel med tanke på å utvikle forståelse i matematikk (Akselsdotter, 2009; Holm, 2002). En indre lyst til å lære skapes gjennom å konstruere egen kunnskap og oppdage nye elementer i matematikken (Glasersfeld, 1995). Herland (2007) påpeker derfor at det må være rom for lek og eksperimentering i undervisningen. Den engelske matematikkpedagogen Edith Biggs, støtter dette ved å si at det er slike oppdagende arbeidsmåter som gir elevene mulighet til å tenke selv, og at de bare på denne måten kan bli klar over sine evner og muligheter (Biggs, 1972 i Breiteig & Venheim, 2003).

Matematikk som aktivitet dreier seg i stor grad om løsningsstrategier. Det er derfor viktig at elevene deltar i den prosessen det er å oppdage, finne frem til og utvikle slike strategier. Her er det arbeidsprosessen, og ikke det endelige svaret, som vektlegges (jfr. Bruner, i Breiteig & Venheim, 2003). En langsom progresjon med god tid til innøving av grunnleggende innsikt og ferdigheter, er viktig når nye og ukjente momenter presenteres. Dersom elevene får tid nok til å konsolidere og automatisere kunnskapen, vil elevene ha større mulighet for å oppnå en følelse av mestring, som videre skaper en plattform for ny læring (Holm, 2002). Pedagogens oppgave blir å legge opp til en undervisning som fremmer indre motivasjon og glede. Dette vil være verdifullt for elevenes holdninger og mestring i matematikkfaget.

Problemstilling

Med utgangspunkt i presentert teori vil jeg i denne studien undersøke om en intervensjon med bruk av dialogbasert undervisning og Numicons strukturerte mengder, vil bidra til at tallforståelsen til tre elever i tredje klasse blir mer funksjonell. Kjernepunkter ved denne undervisningen er at elevene gjennom praktiske aktiviteter som stimulerer til nysgjerrighet, kreativitet, refleksjon og samtale, skal benytte iboende idéer til å skape forståelse. Min problemstilling i denne oppgaven er dermed:

Hvordan kan en dialogbasert undervisning på ti økter, med fokus på Numicons strukturerte mengder, bidra til utvikling av en funksjonell tallforståelse?

3. Metode

Hvilken forskningsmetode som er mest hensiktsmessig når man skal innhente informasjon (data), avhenger av problemstillingen. Min problemstilling er *kausal*, dvs. basert på et forhold mellom *årsak* og *effekt*. I en kausal relasjon er det en variabel (årsaken), som produserer en forandring i et gitt fenomen (effekten). Jeg ønsker å se om en dialogbasert undervisning med fokus på Numicons strukturerte mengder (årsak) vil utvikle elevenes tallforståelse (effekt). Valg av metode er det som danner rammene for hvordan forskningen blir utført. Med tanke på min problemstilling vil det derfor være naturlig for meg å ta utgangspunkt i en kvalitativ forskningsmetode, med deltakende observasjon. Jeg tar derfor utgangspunkt i et begrenset forskningsfelt og går i dybden av dette (Lund & Haugen, 2006).

Designet jeg har valgt for å måle kausale effekter, er et såkalt *kvasi-eksperimentelt pretest-posttest- desing uten kontrollgruppe* (Lund & Haugen, 2006). I motsetning til et ekte eksperiment, er ikke utvalget i et kvasi-eksperiment tilfeldig. Elevene jeg plukket ut, var valgt ut i fra at de innfridde bestemte kriterier. Et ekte eksperiment vil i tillegg ha en kontrollgruppe, der effekten av intervensjonen vil være en sammenligning av disse to gruppene ved en felles posttest. Grunnen til at jeg har valgt å ikke ha kontrollgruppe er at jeg er mest interessert i å se hvordan elevenes tankegang har endret seg fra før intervensjon til etter intervensjon. Denne informasjonen vil jeg best få tilgang til ved å sammenligne resultatet til hver enkelt elev opp mot det som var utgangspunktet for denne eleven før intervensjon. For å kunne si noe om hvordan elevenes tallforståelse har endret seg, var det derfor nødvendig med en pretest og posttest. Endringer fra pretesten er grunnlaget for de slutninger jeg tar etter posttest. Hvilke muligheter og begrensninger jeg har som forsker til å trekke disse slutningene er viktig å drøfte med tanke på studiens *validitet*, altså med hvor stor sikkerhet vi kan si at resultatene er reelle. For å kunne si noe om studiens validitet, vil jeg først gi en beskrivelse av studien og hvordan jeg har gått frem ved innhenting av data.

3.1 Datainnsamling og beskrivelse av studien

Studien startet med et ønske om å prøve ut et alternativt undervisningsopplegg for å se hvilken påvirkning det kan ha på måten elever tenker og forstår matematikk på. Jeg ønsket å fokusere på tre elever fra tredjetrinn som skulle arbeide i en gruppe, og valgte å bruke konkretiseringsmateriellet Numicon til prosjektet. Grunnen til at jeg valgte tredjetrinn, er at det etter min erfaring ofte er her elever i matematikkvansker faller av, mye på grunn av manglende grunnleggende tall- og mengdeforståelse, samt dårlige utviklede strategier. Før prosjektstart tok jeg kontakt med rektor på en skole i Midt-Norge, og fikk sammen med spes.ped.koordinator og lærere på tredjetrinn plukket ut tre elever til prosjektet. Kriterier for valget av elever var at de alle hadde vansker med skolematematikken og at de ikke hadde store atferdsvansker. For å se hvilken eventuell påvirkning arbeidet med Numicon har på elvenes måte å tenke og forstå matematikk på, valgte jeg å dele studien inn i tre deler:

1. Pretest (kartlegging av strategier)
2. Undervisningsøkter i gruppe (intervensjon)
3. Posttest (ny kartlegging av strategier)

3.1.1 Pretest

Før gruppeøktene ønsket jeg å få en oversikt over hvilke strategier elevene benyttet seg av når de løste enkle addisjons- og subtraksjonsoppgaver. Jeg valgte derfor å gjennomføre en pretest. Siden pretesten var det første møtet jeg hadde med disse elevene, var det viktig for meg at de fikk en god opplevelse og at de følte seg trygge før vi kom i gang med oppgavene. Jeg brukte derfor litt tid i begynnelsen til å spørre om hobbyer, interesser, familie o.l. Videre forklarte jeg litt om Numicon og viste frem brikkene. Jeg presiserte at jeg ikke var opptatt av om de fikk rett eller feil svar, men at jeg ønsket å finne ut hvordan elever tenker når de arbeider med matematikk og at det derfor var viktig at de hele tiden prøvde å «tenke høyt». Videre forklarte jeg hva vi skulle gjøre i disse gruppeøktene, og takket de for at de ville være med meg å være forskere på et så spennende tema. Før vi startet selve pretesten forklarte jeg hvorfor jeg ønsket å filme alle øktene, at de skulle late som at kameraet ikke var der og presiserte at det kun var jeg som skulle se filmene etterpå.

I pretesten tok jeg utgangspunkt i Ostads bok *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring* (Ostad, 2008). Regnestykkene jeg valgte var ikke tilfeldige, men plukket ut med tanke på å få frem mest mulig informasjon om elevenes kunnskap i tallområdet 0-20.

Tallområdet 0-10: 6+4, 2+7, 4+6, 7+3, 10-3, 5-2, 5-3, 6-6, 7-3, 8-4

Tallområdet 0-20: 6+6, 7+5, 8+5, 3+8, 14-4, 12-3, 13-9, 7+9, 9+8, 18-12

Det var viktig for meg å finne ut hvordan elevene tenkte og hvilke strategier elevene valgte å benytte seg av i de ulike oppgavene. Det ble lagt frem papir og blyant og konkreter i form av pluggene i Numicon som elevene kunne benytte som hjelpemiddel. De kunne også benytte fingrene eller eventuelt andre strategier som de var mer komfortable med. Jeg oppfordret elevene til å «tenke høyt» og forsøke å forklare så godt som mulig hvordan de kom frem til svaret. Pretesten ble gjennomført med en og en elev, og tok cirka 15-20 minutter.

3.1.2 Gruppeøkter

Da jeg skulle legge opp innholdet i de ulike gruppeøktene var det vesentlig å tenke på hvordan jeg kunne legge til rette for at elevene selv skulle oppdage/skape idéene. Det ble derfor nødvendig å lage oppgaver som oppfordret til samhandling og eksperimentering med Numiconbrikkene. For at dette skulle skje måtte oppgavene spille på elevenes nysgjerrighet, samt oppleves som både utfordrende og lystbetonte. Videre var det viktig at det var elevenes tanker og løsningsforslag som var i fokus i disse øktene. Jeg var derfor innstilt på at øktene ville formes ut i fra hva som ble sagt og gjort av elevene, og at øktene derfor trolig ikke ville gå akkurat som planlagt. Min rolle i disse øktene ville være som oppgavegiver, veileder, kommentator og motivator. Inspirasjon til innholdet for hver gruppeøkt ble hentet fra aktivitetskortene som fulgte med Numicon, samt fra egne tanker og erfaringer som spesialpedagog. For hvert deltema var det flere ulike oppgaver/aktiviteter, dette med tanke på at elevene skulle få flest mulig knagger å henge kunnskapen på.

Gruppeøkt 1

Hovedfokus i den første gruppeøkten var at elevene skulle bli kjent med Numicons tallbrikker. Elevene fikk starte med å se og ta på dem og eksperimentere med dem selvstendig. Deretter skulle de snakke sammen om hva det var de så. Dette kunne være om alt fra form, farge, likheter, forskjeller, mønster e.l. Elevene fikk videre ulike oppgaver som skulle stimulere til utforsking, samhandling og undring; De fikk blant annet i oppgave å legge tallbrikkene i rekkefølge og forklare for hverandre hva de så. Vi hadde Kims lek, der en elev skulle ta bort en brikke fra rekka, og de andre skulle finne ut hvilken brikke som var borte. Denne ble også gjort med variasjonen der to brikker byttet plass. Tanken bak dette var at elevene lettere skulle oppdage det mønsteret/systemet som tallbrikkene var satt i, og at de kunne se at det ble «tull i systemet» når to tallbrikker flyttet plass.

Elevene fikk videre i oppgave å se for seg en brikke og lage mønsteret med pluggene. De andre måtte samarbeide og bli enige om hvilken brikke som best passet. Her ble elevene oppfordret til å se på mønsteret og ikke la seg friste til å telle. Etter noen runder ble elevene utfordret til å finne to tallbrikker som til sammen passet perfekt til pluggene. Den neste oppgaven gikk ut på å føle seg frem til riktig form. Vi puttet da tallbrikkene i «føleposen». Elevene skulle etter tur finne formen som de andre pekte på i posen uten å se. Også her var det fokus på å forklare hvordan de tenkte, hva de kjente etter, om de telte hull eller kjente etter mønster, hvorfor ble det riktig/feil o.l. Etter noen runder ble elevene utfordret til å finne to ulike brikker som til sammen var lik den brikken som ble pekt på. Vi avsluttet første økt med at elevene, så raskt som mulig, skulle si hvilken verdi brikken hadde (flash-card teknikk).

Gruppeøkt 2-5

I gruppeøkt 2-5 hadde vi fokus på mengdeforståelse og tallrelasjoner i tallområdet 0-10. Vi startet med å knytte mengde til tallsymbol. Den første oppgaven gikk ut på å legge tallbrikkene i rekkefølge og å legge tilhørende tallkort under hver tallbrikke. Deretter skulle elevene blande tallkortene, trekke et tall og finne tallbrikken som hørte til i føleposen. En videreføring av denne oppgaven var å finne to tallbrikker som til sammen ville bli lik det tallet de spinnet. Neste oppgave gikk ut på å velge to brikker hver og forklare for de andre hva som er likt og hva som er forskjellig. Denne oppgaven munnet ut i en samtale om hva det betyr at noe er likt, og hvorfor = kalles for et likhetstegn.

Videre tok vi systematisk for oss en og en mengde fra tallmengden 5 og opp til 10 (fordelt på flere økter). Jeg valgte å legge opp til de samme aktivitetene for hver tallbrikke, med noen små variasjoner. Disse aktivitetene var hovedsakelig:

a) Finn to tallbrikker som tilsvarer mengden til tallbrikken vi arbeider med.
b) Bygg tårn og snakk om de ulike delene av tårnet.
c) Se på sammenhengen. Velg to tallbrikker som til sammen blir lik tallbrikken vi jobber med. Hva skjer hvis vi tar bort den ene tallbrikken?
d) Finn forskjellen mellom tallbrikken vi arbeider med og en valgfri brikke.
e) Trekk et tallkort og forklar hva du må gjøre for at det skal bli likt som tallbrikken vi arbeider med. La de andre gjette hvilket tallkort.
f) Flash av tallkombinasjoner med tanke på automatisering. Hvilken tallbrikke mangler for at den vilkårlige tallbrikken jeg holder opp skal være lik den vi arbeider med.

Gruppeøkt 5-10

Første del av økt 5 handlet om hvilke tallmengder tallet 10 består av. Etter uttalelsen til en av elevene i pausen *(10 er egentlig 0. 9 er det høyeste tallet i verden, for etter det starter vi på 0* *igjen. Så 10 er egentlig bare et ett-tall, for null er ingenting)* ble fokuset for resten av økta plassverdi og nullens betydning. I gruppeøkt 5-10 arbeidet vi med:

a) Å bli kjent med tallet 10 og dets betydning i posisjonssystemet (ener og tierplass).
b) Addisjon og subtraksjon i tallområdet 10-20 (uten tierovergang).
c) Samtale om begrepene pluss og minus, sum og differanse.
d) Samarbeide om å trekke ut relevant informasjon fra tekstoppgaver og diskuter fremgangsmåter.
e) Delmengder til tall i tallområdet 10-20.
f) Addisjon og subtraksjon i tallområdet 0-20 (med tierovergang).
g) Hvordan gjøre regnestykket lettere.
h) Strategier – hvor mange forskjellige måter kan vi løse oppgaven på.

Jeg valgte å gradvis innføre mer og mer tallsymboler og aritmetikk etter hvert som elevene begynte å bli kjent med tallbrikkene og med måten vi arbeidet på. Samtidig som jeg gradvis utfordret elevene til å se for seg brikkene i stedet for å ta på de. For eksempler på oppgaver i de ulike øktene, se *utvalgte oppgaver og situasjoner fra økt 1-10* (vedlegg 4).

3.1.3 Posttest

Posttesten ble gjennomført en uke etter gjennomført intervensjon. Elevene fikk de samme oppgavene som ved pretest. De ble oppfordret til å si svaret med en gang dersom de visste det. I tillegg ble de utfordret på hver oppgave til å tenke høyt og forklare hvordan de kom frem til svaret. Elevene hadde også ved pretesten muligheten til å benytte seg av konkretiseringsmateriell dersom de ønsket det (på lik linje som ved pretesten). Forskjellen fra pretest til posttest var at elevene ved posttesten også hadde mulighet til å benytte seg av Numiconbrikkene. Grunnen til at jeg valgte å ha med Numicon på posttesten selv om de ikke var med på pretesten, var at mitt hovedfokus lå på å få frem hvordan elevene tenkte. Erfaringen etter undervisningsøktene var at det var lettere for elevene å sette ord på hvordan de tenkte når de i tillegg fikk muligheten til å fysisk vise det. Det var flere som valgte å benytte seg av Numiconbrikkene når de skulle forklare hvordan de hadde tenkt, selv om de klarte å løse oppgaven først uten hjelpemidler. Etter gjennomført opplegg hadde vi en time med kake, tegnefilm og diplomutdeling som takk for innsatsen.

3.2 Dataanalyse

Jeg valgte å filme alle øktene jeg hadde med elevene.

Varighet og intensitet: Det ble i alt 10 økter på cirka 1,5 klokketime, 1-2 ganger i uka fordelt på 6 uker. Intervensjonen varte fra uke 9 til uke 16. Inkludert pretest og posttest på 15-20 min per elev, endte mitt datamateriell på til sammen 17 timer med film som skulle analyseres.

Analysering underveis: Selv om hver økt var nøye planlagt, gikk ingen økter helt etter planen. Det var stadig nødvendig med justeringer, og jeg oppdaget etter hvert flere «hull» og misforståelser som måtte tas tak i før vi gikk videre. I tillegg var det vanskelig, om ikke umulig, å planlegge på forhånd hvor fort elevene ville oppdage de ulike sammenhengene. For at prosjektet skulle innfri de kriteriene jeg hadde satt, måtte elevene få den tiden de trengte til å skape kunnskapen selv. Jeg gjorde meg notater etter hver økt, der jeg tok stilling til om de var klare til å gå videre, hva de trengte lengre tid på og hva som kunne vært gjort annerledes av meg som veileder/lærer. Jeg brukte også tid på å tenke ut hvordan jeg kunne tilpasse de oppgavene vi skulle ha neste økt, slik at alle hadde noe å strekke seg etter innenfor deres utviklingssone. Selve transkriberingen av data ble gjort etter avsluttet prosjekt.

Systematisering av resultater fra pretest til posttest: For å måle effekten, er det viktig at skåringene gis i henhold til klare skåringskriterier. Jeg har derfor valgt å kategorisere elevenes strategibruk i tabeller etter inndelingen til Carpenter og Moser (1982 i Frostad, 2005). Dette gjør jeg både ved pretest og posttest. Dermed blir elevenes strategier satt inn i et system, der det er mer gjennomsiktig for leseren å se hvilken utvikling elevene har hatt i sine strategivalg.

3.3 Kvalitet i data og validitet i slutninger

Dette forskningsprosjektet baserer seg på filosofien om *kritisk realisme.* Kort sagt vil dette si at jeg er innforstått med at det ikke er mulig å oppdage en eksakt og fullt ut reel kunnskap om det fenomenet som studeres, og at jeg må være bevisst de usikkerhetsmomenter som kan true forskningens validitet. Dette innebærer å ha en kritisk holdning til mine observasjoner og tolkninger av dem. Målet med forskningen er likevel at resultatene skal være så nær virkeligheten som mulig. Lund og Haugen (2006) sier at forskeren ved å ta høyde for de momenter som kan true tolkningen av et fenomen, vil styrke troverdigheten av de slutningene hun tar.

Troverdighet er en indikator på forskningsprosjektets kvalitet. I denne oppgaven tilsvarer høy kvalitet stor grad av sikkerhet rundt årsakssammenhenger (kausalitet), altså med hvor stor sikkerhet (validitet) jeg kan dra konklusjoner (slutninger) av interaksjonens effekt. Det forskeren gjør for å øke validiteten, kalles validering. For å sikre høy kvalitet i min forskning har jeg tatt utgangspunkt i validitetssystemet, utviklet av Campbell og medarbeidere (2002 i Lund & Haugen, 2006). Systemet består av fire typer *slutninger* og deres *validitetskrav*. Metodens funksjon er å eliminere mulige trusler, slik at validiteten blir best mulig. Det må understrekes at metode for innsamling, analyse av data, samt dataresultatene, ikke har validitet i seg selv, men at det er de slutningene vi tar med bakgrunn i disse som har validitet. Validitet er et spørsmål om grad og vil variere. Man vil aldri oppnå en perfekt validitet i empirisk forskning. De fire validitetskrav jeg vil ta hensyn til er *indre validitet, begrepsvaliditet, ytre validitet* og *statistisk validitet* (Kleven, 2008; Lund & Haugen, 2006).

3.3.1 Indre validitet

Indre validitet handler om sammenhengen mellom årsak og effekt, jo mer sikker vi er på at det er årsaken som har ført til effekten, jo større er den indre validiteten. I mitt tilfelle handler det om hvor sikker jeg kan være på at det er undervisningen med de strukturerte mengdene som har produsert forandringene, og ikke andre faktorer. Jeg må ta hensyn til at elevene har hatt annen matematikkundervisning i samme periode og at tiden i seg selv fra pretest til posttest kan være en påvirkende faktor i forhold til elevenes modning. Det er derfor ikke mulig å garantere at det kun er min interaksjon som har ført til endringen. For å øke den indre validiteten har jeg hentet informasjon om hvilken matematikkundervisning elevene har hatt i denne perioden, samtidig som jeg fikk observert mens de arbeidet i matematikkboka. Ved at jeg valgte å ha en pretest og posttest med samme oppgaver, må jeg også ta i betraktning at en mulig *retest-effekt* vil være en trussel for den indre validiteten. Sjansen for disse feilkildene reduseres derimot betraktelig ved at elevene måtte forklare hvordan de tenkte. Dermed er det ikke svaret i seg selv som måles, men deres tankemåte (Kleven 2008; Lund & Haugen, 2006).

3.3.2 Begrepsvaliditet

Begrepsvaliditet handler om hvor godt en indikator samsvarer med det begrepet den skal representere. Å bruke indikatorer som ikke er med på å måle det begrepet vi ønsker å måle, er en trussel mot begrepsvaliditeten. I min oppgave er det elevenes tallforståelse jeg ønsker å måle. For å øke begrepsvaliditeten har jeg derfor skrevet en grundig teoridel der jeg tydeliggjør hva som legges i begrepet tallforståelse, samt hvilke indikatorer som kan bidra til å måle utviklingen av elevenes tallforståelse. Disse indikatorene er valgt på grunnlag av teori, tidligere forskning og samtaler med min veileder. En trussel ved begrepsvaliditeten i denne oppgaven, er at indikatorene på elevenes tallforståelse tolkes gjennom elevenes forklaringer på hvordan de tenker når de løser oppgaver. Elevenes tanker er vanskelig å observere i seg selv og dermed vil deres kompetanse i å sette ord på det de tenker være en påvirkende faktor. Jeg vil likevel argumentere for at elevenes beskrivelse av fremgangsmåte både ved pretest og posttest ga gode indikatorer på kvaliteten av tenkningen (Kleven 2008; Lund & Haugen, 2006).

3.3.3 Ytre validitet

Ytre validitet handler om i hvor stor grad resultatene i studien er overførbare. Den sier noe om sikkerheten av en generalisering, altså med hvor stor sikkerhet vi kan si at en årsak og dens effekt vil være gjeldende utover det utvalget som ble undersøkt. I min oppgave undersøker jeg utvikling av tallforståelse hos tre elever. Resultatet av denne forskningen er lite interessant dersom dette kun gjelder for disse tre elevene. Ønsket er selvsagt at disse resultatene også vil være gjeldende for andre elever, med lignende utfordringer, ved en lignende intervensjon. Den største trusselen til en slik slutning i min oppgave, er at jeg har et lite og forholdsvis homogent utvalg. Hadde jeg hatt et større utvalg elever med samme resultat, ville den ytre validiteten økt. For å øke den ytre validiteten i denne oppgaven har jeg derfor satt meg inn i annen forskning på samme område, som viser til flere av de samme resultatene. I tillegg er oppgaven godt forankret i teori. Teorien jeg benytter er generalisert, i form av at den gjelder utvikling av tallforståelse generelt hos alle elever. I min forskning er jeg ikke ute etter å beskrive en absolutt sannhet, men søker etter mest mulig gyldige konklusjoner. Hvor generaliserbare mine resultater er for resten av populasjonen, er vanskelig å si da det også er flere faktorer som spiller inn her. Jeg vil likevel argumentere for at det er en viss generaliseringseffekt ved mine resultater (Kleven 2008; Lund & Haugen, 2006).

3.3.4 Statistisk validitet

Lund og Haugen hevder at begrepet statistisk validitet ofte er misvisende i den forstand at den definisjonsmessig knyttes til statistikk og statistiske metoder (kvantitativ metode). De mener statistisk validitet burde reformuleres til *resultatvaliditet.* Det er nettopp dette statistisk validitet dreier seg om; å avgjøre om resultatene er systematiske (ikke tilfeldige), og om den målte effekten er av rimelig størrelse. Statistisk validitet kan betraktes som en nødvendig forutsetning for de tre nevnte validitetstypene. Dersom den statistiske validiteten ikke er tilfredsstillende i forbindelse med et resultat, er det meningsløst å se på årsakssammenhenger (indre validitet), tolke resultatet begrepsmessig (begrepsvaliditet) eller generalisere resultatet (ytre validitet). For å sikre statistisk validitet i min oppgave undersøker jeg om resultatene (sammenligning av elevenes måte å tenke på når de løser oppgavene ved pretest og posttest) er av en reell størrelse og at de endringene som har skjedd ikke er tilfeldige. Disse slutningene vil jeg trekke med bakgrunn i min fagkompetanse og tilegnede kunnskap om tallforståelse, samt hvordan denne kan måles og utvikles (Kleven, 2008; Lund & Haugen, 2006).

3.4 Forskningsetiske retningslinjer og krav

Som forsker er det en del retningslinjer og krav man må følge for å ivareta forskningsobjektenes rettigheter og menneskeverd. Retningslinjene er også et hjelpemiddel for forskerne selv. De peker på relevante faktorer som forskere skal eller bør ta hensyn til. NESH (*den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora*) stiller flere krav til forskere ved bruk av personer som forskningsobjekt. De to viktigste i min studie er *krav om respekt for menneskeverdet* og *barns krav på beskyttelse.* Dette handler om å vise respekt for de som deltar, både i møte med dem og ved formidling av forskningsresultatene. Det er viktig at forskeren tar hensyn til at barn er individer i utvikling. Forskeren må ha tilstrekkelig kunnskap om barn, slik at hun kan tilpasse både metode og innhold av forskningen til den aldersgruppen som skal delta (NESH, u.d.).

For å kunne analysere prosjektet, ønsket jeg å benytte meg av filmkamera på alle møtene med elevene. Det ble sendt ut et informasjonsskriv og samtykkeskjema til de utvalgte elevene med foresatte (se vedlegg 2), med hensyn til *krav om å informere dem som skal utforskes* og *krav om informert og fritt samtykke* (NESH, u.d.). I dette skrivet ble de videre informert om at alle personopplysninger ville bli behandlet konfidensielt, at elevene og skolen anonymiseres i oppgaven og at filmene kun ville bli sett av undertegnede og slettes etter ferdigskrevet oppgave. De fikk også informasjon om at studien var meldt til *Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS* (NSD). Dette med tanke på retningslinjene rundt *krav til lagring av opplysninger som kan identifisere enkeltpersoner,* samt krav om *konsensjon og meldeplikt* (NESH, u.d.). Både elever og foreldre samtykket til deltakelse i studien. Elevene er i denne oppgaven anonymisert til *Emma*, *Sebastian* og *Lars.*

4. Resultater og drøfting

I denne delen ønsker jeg å se på om min studie med fokus på konkretiseringsmateriellet Numicon og dialogbasert undervisning, har påvirket elevene i retning av å utvikle en mer funksjonell tallforståelse. Jeg vil starte med å presentere resultater fra pretesten, som var utgangspunktet for de ti undervisningsøktene. Her vil jeg ta for meg hver enkelt elev og vise til hvilke strategier elevene hadde før de begynte å arbeide med Numicon. For å se hvilken effekt arbeidet med Numicon har hatt på elevenes tallforståelse, vil jeg sammenligne resultatene fra pretest og posttest til de tre elevene som deltok på studien. Jeg vil se på om deres strategivalg og måte å tenke på har endret seg i løpet av de ti øktene vi har hatt sammen, og om det er noen likhetstrekk eller forskjeller mellom elevenes utvikling. Til slutt vil jeg se nærmere på *hvorfor* jeg har fått de resultatene jeg har fått. Dette med tanke på bruk av konkretiseringsmateriellet Numicon og måten undervisningen har foregått på.

4.1 Strategikartlegging

4.1.1 Resultater ved pretest - Emma

<u>Addisjon</u>

Emma benytter seg stort sett av den samme strategien i alle oppgaver der svaret ikke er større enn 10. Hun forklarer at hun alltid starter med det høyeste tallet, siden det går raskere. Hun tar opp like mange fingre som det antallet hun skal starte med, uten å telle, noe som gir indikasjoner på god kunnskap om hvor mange fingre som representerer en gitt mengde (i tallområdet 0-10). Hun teller så en og en finger videre til hun kommer frem til svaret. Denne strategien benytter hun også ved tierovergang. Forskjellen er at hun starter med å legge frem riktig antall fingre, for så å ta bort den hånda med færrest fingre og teller videre på den. På oppgaven 7+9 blir det tull i tellinga. Hun legger frem 9 fingre, tar bort den ene hånden og begynner å telle fra 11. Svaret hennes blir da 17. Emma benytter konsekvent strategien om å telle videre fra største tall på alle oppgaver foruten 6+6 som virker automatisert.

<u>Subtraksjon</u>

Ved subtraksjonsoppgavene viser Emma forskjellige tellestrategier. På de letteste oppgavene (tallområdet 0-5) tar hun opp riktig antall fingre med en gang. Hun sier at hun vet at det er 5 fingre på en hånd, og da trenger hun ikke å ta opp alle fingrene. I tallområdet 0-10 (7-3 og 10-3) tar hun opp det første antallet fingre samtidig og tar bort det andre antallet fingre samtidig (uten å telle). På 8-4, finner hun først frem 8 fingre og teller så ned en og en. Ved tierovergang blir det straks mye vanskeligere, og Emma benytter seg av mer primitive strategier. På oppgaven 14-4 ser hun først på hendene sine før hun sier at hun ikke forstår hva hun skal gjøre. Hun velger å bruke pluggene og flytteteller. Når hun kommer til 11 stopper hun opp og sier at hun må starte på nytt igjen. Teller så opp til 14 ved ny flyttetelling. Deretter spør hun hvor mange hun skal ta bort. Det virker som prosessen har krevd så mye energi av Emma at hun ikke husker hva oppgaven gikk ut på. Emma tar så bort 4, nok en gang ved flyttetelling, før hun til slutt bruker peketelling til å finne ut hvor mange som er igjen. Denne strategien brukes også ved 12-3, 13-9 og 18-12. Eneste forskjell er måten hun teller de gjenværende pluggene på. På 13-9 trenger hun ikke å telle de 4 pluggene, men forklarer at hun ser at det er 4 ved å tenke 2+2. På 18-12 teller hun 2 og 2 plugger, og sier at hun tenkte 4+2.

4.1.2 Resultater ved pretest - Lars

Addisjon

Det virker som om Lars har automatisert de regnestykkene som blir 10 til sammen. Han forteller at han kan tiervennsangen og at han bruker den. På 6+6 forklarer han at han tenkte at en halvtime er 30min, og så blir det 30min til og da har vi en time, som er 12. Lars har problemer med å forklare hvordan han tenker på alle oppgavene og bruker lang tid på å komme frem til svaret. På oppgave 2+7, 7+5 og 3+8 teller Lars inni seg. På 7+5 prøver han først å benytte fingrene, ved at han tar opp 5 og 2 fingre. Han virker usikker på hva han skal gjøre videre og går bort fra å telle på fingrene. Det virker som at Lars bruker fingrene til å visualisere tallet 7, men når han ikke har nok fingre til å vise tallet 5 samtidig, går han bort fra fremgangsmåten og over til å telle inni seg. Etter ei stund svarer han 11. På spørsmål om hvordan han tenkte svarer han at «vi har 7 og legger på 5».

Jeg prøver ved flere oppgaver å få han til å forklare/vise hvordan han tenkte for å se hvilke strategier han benytter. På oppgaven 3+8, hører jeg at han først sier 8, før det blir stille en lang stund og han svarer 11. Jeg spør hvilket tall han startet med og han svarer at han teller 2,4,6,8 og så videre. Jeg er usikker på hvordan jeg skal tolke hvilke strategier han bruker her. Det virker som at han vet at han skal starte med det største tallet. Likevel teller han seg opp til det største tallet og teller videre inni seg. På oppgavene 8+5, 7+9 og 9+8 velger Lars å bruke konkretene til å telle. Han lager først en haug med det største tallet, så en haug med det minste, deretter legger han alle brikkene i samme haug og teller alle på nytt igjen. Han teller en og en, ved flyttetelling. På 9+8 teller han opp til 13 før han kommer på at han skulle stoppe på 9. Han starter så helt på nytt igjen.

Subtraksjon

Første oppgave er 10-3. Lars tenker ei stund før han svarer 7. Han har også her vanskelig for å forklare hvordan han tenkte, men sier at han visste at det var en tiervenn og at han tenkte «vi har 10 og skal ta bort 3». Han bruker også lang tid på 5-2, noe som tyder på at han enten prøver å huske svaret eller at han teller ned i hodet (jeg godkjenner derfor ikke strategien som kjent tallfakta). Lars velger å bruke konkretene på 14-4, 12-3, 13-9, 7-3 og 18-12. Han flytteteller en og en og lager en haug med det største tallet og en haug med det minste tallet. Deretter legger han haugene sammen og teller alle på nytt. På 14-4 teller han først opp til 15, før han stopper opp og starter helt på nytt igjen. På 5-3 og 6-6 svarer han automatisk. Forklaringen hans på 6-6 er; «vi har 12, så tar vi bort 6 og så tar vi bort 6 til». På oppgaven 8-4 bruker han tallfaktastrategien utledet svar, ved at han sier at 4+4 er 8, så da er 8-4 lik 4.

4.1.3 Resultater ved pretest - Sebastian

Addisjon

På de fire første oppgavene (tallområdet 0-10) benytter Sebastian seg av fingersymbol. Han trenger altså ikke å telle, men bruker fingrene til å representere de to mengdene og ser deretter hvilken mengde de blir til sammen. Denne strategien fungerer så lenge han har nok fingre. I oppgaver der svaret blir større enn 10 velger han å benytte seg av tellestrategier for å komme videre fra største tall. Dette gjelder for øvrig ikke 3+8, som er nærme nok 10 til at han kan benytte fingersymbolene. Her benytter han seg i tillegg av et utledet svar, ved at han ser at 8 og 2 er 10, og en mer blir 11. På oppgaven 8+5 benytter han seg av tellestrategier på lavt nivå. Sebastian tar først opp 8 fingre og teller 5 videre på denne måten; 1-2-3-4-5. Han har da opp tre fingre på den ene handa og begynner å telle fra 1 og opp til 3, teller videre på den andre hånda og går over til å telle på den første hånda igjen, før han faller ut på 12. Han sier at han ikke helt skjønner hva han skal gjøre, og velger å heller bruke pluggene. Sebastian legger først fire i en bunke (uten å telle) og så en til. Deretter teller han 8 i en ny bunke, og starter å telle alle på nytt igjen når han skal legge de sammen.

Subtraksjon

På subtraksjonsoppgavene klarer ikke Sebastian å benytte seg av fingersymbol på samme måte som ved addisjon. Det er kun på oppgavene 5-2 og 6-6 at han ikke trenger å telle. På 5-3, 10-3 og 12-3, teller han ned fra største. På oppgave 7-3 og 8-4, tar han bort hele mengder i stedet for å telle. Dette resulterer i at han har igjen noen fingre på hver hånd. Han klarer ikke å se hvor mye det blir til sammen, og velger å telle fingrene ved å presse en og en finger imot panna. Han starter altså med å benytte seg av fingersymbol, men ender opp med å måtte telle de resterende. Dette kan tolkes som et mellomstadium der han benytter strukturerte mengder til å støtte en tanke, men fortsatt er avhengig av å benytte tellestrategi i sluttfasen (i tabellen under velger jeg å plassere denne under kategorien tellestrategi, N2c). Oppgaver i tallområdet 10-20 blir vanskelig for han. På 14-4 tar Sebastian først opp 10 fingre, ser at det ikke er nok og går over til å telle høyt. Han teller først 14-12-11, før han gjør om til 14-13-12-11-10, stopper opp og spør hvor mange han skulle ta bort. Jeg sier at det var 14-4. Han starter på nytt tar opp en finger på 14, en på 13 og videre til han har 4 fingre opp. Da har han kommet til 11, som er svaret hans.

4.1.4 Diskusjon etter pretest

Jeg ønsker å fremstille resultatene på pretest gjennom å strukturere elevenes strategier etter Carpenter og Moser sin inndeling (Carpenter & Moser, 1982 i Frostad, 2005).

Forklaring av forkortelser: ***Nivå 1:*** *N1: Tellestrategier med konkreter i alle ledd.* ***Nivå 2 – Tellestrategier:*** *N2a: Telle alle. N2b: Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon. N2c: Telle videre fra største ved addisjon eller telle opp ved subtraksjon. N2: Eleven teller inni seg, uten at jeg får tak på hvilken tellestrategi som benyttes.* ***Nivå 3:*** *KT: kjent tallfakta. US: Utledet svar.* ***Andre strategier som tilsvarer nivå 3:*** *FS: Fingersymbol.* ***Symbol:*** **: fikk hjelp. f: feil svar*

Addisjon

Oppgave	**6+4**	**2+7**	**4+6**	**7+3**	**6+6**	**7+5**	**8+5**	**3+8**	**7+9**	**9+8**
Emma	N2c	N2c	N2c	N2c	KT	N2c	N2c	N2c	N2c (f)	N2c
Lars	KT	N2	KT	KT	KT	N2	N1	N2	N1	N1
Sebastian	FS	FS	FS	FS	KT	N2b	N1	FS/US	N2b	N2b

Subtraksjon

Oppgave	**10-3**	**5-2**	**14-4**	**5-3**	**6-6**	**12-3**	**13-9**	**7-3**	**8-4**	**18-12**
Emma	N2b	FS	N1	FS	KT	N1	N1	FS	N2b	N1
Lars	N2b	N2	N1	KT	KT	N1	N1	N1	US	N1
Sebastian	N2b	FS	N2b (f)	N2b	KT	N2b	N2b (f)	N2c	N2c	N1

Emma

Pretesten viser at Emma på dette tidspunktet har en ensidig og lite velutviklet strategibank. Både ved addisjon og subtraksjon benytter hun seg av enkle tellestrategier. Ved addisjon har hun funnet en fremgangsmåte som stort sett gir henne riktig svar og hun følger denne med svært få variasjoner. Dette er strategien om å telle videre fra største (N2c), som også knyttes til begrepet dobbeltelling (eks 5+4, løst som 6 er 1, 7 er 2, 8 er 3 og 9 er 4). Dagmar Neuman (1993) hevder at dobbeltelling er en blindvei som fører til matematikkvansker, mens Steffe, Glasersfeld, Richards og Cobb derimot, hevder at dobbeltelling viser til elevens evne til å tenke og resonnere på et abstrakt plan (Steffe et al., 1983, i Frostad 1998). Med bakgrunn i at dobbeltelling er en tellestrategi og at overvekt av tellestrategier hindrer elevene til å passere den proseptelle kløften, vil jeg si meg enig i at dobbeltelling ikke er en indikasjon på utviklet tallforståelse. Jeg vil likevel ikke si meg enig i at det er en blindvei som fører til matematikkvansker, da jeg mener telling er en vesentlig del i elevenes utvikling og forståelse av tallenes hierarkiske system.

Ved subtraksjonsoppgavene er det større variasjon i bruk av strategier. Her benytter hun seg av fingrene både som strukturerte mengder (FS) og som konkreter til å telle ned fra første (N2b). Hun har også automatisert oppgaven 6-6 (KT). På oppgaver i tallområdet over 10 må hun gå tilbake til en den mest primitive tellestrategien, å telle alt og forfra igjen. Dette gjør hun ved å flyttetelle konkreter. Selv om hun på de letteste oppgavene (tallområdet 0-5) klarer å benytte seg av kunnskap knyttet til strukturerte mengder, vil Emma sin strategibruk indikere at hun har en lavt utviklet mengdeforståelse og at hun er fastlåst i sine tellestrategier.

Lars

Lars har automatisert enkelte regnestykker i tallområdet 0-10 (tiervenner), men klarer ikke å forklare hvorfor det blir slik, annet enn at han kan tiervennsangen. Dette tolker jeg som pugget kunnskap uten videre forståelse av begrepet, altså kunnskap kun som ferdighet. Lars viser også at han kan benytte seg av utledet svar på oppgaven 8-4, ved at han bruker kunnskap om dobling (4+4=8, derfor er 8-4=4). Dette er en strategi som vitner om kunnskap som innsikt. Lars har store problemer med å forklare hvordan han tenker på alle oppgaver. Det er likevel tydelig at han benytter seg av enkle tellestrategier, enten det er å telle inni seg eller å telle konkreter. Når han benytter seg av konkreter teller han ikke fra største, men teller seg opp til hvert tall og legger alle konkretene sammen før han teller fra starten. Slik jeg tolker det er det en variant av denne strategien han også benytter når han teller inni seg. Siden han ikke benytter seg av konkreter tilsvarer dette en tellestrategi på nivå 2.

Totalt sett indikerer dette at Lars sine strategier er ineffektive og lite funksjonelle. Lars viser et tydelig prosessfokus. Han har lært seg at pluss betyr at vi har et tall (det største) og legger til det andre tallet, og at minus betyr at vi tar bort noe fra det største tallet. Han klarer derimot ikke å benytte denne kunnskapen i praksis. Han bruker ikke kunnskapen om at han kan telle videre fra største, hverken når han teller med konkreter eller med fingrene, og da trolig heller ikke når han teller inni seg. At Lars må starte helt på nytt igjen når han teller 15 konkreter i stedet for 14, tyder på at han har en svakt utviklet mengdeforståelse. Det kan også gi indikasjoner på at han er så låst i den fremgangsmåten han skal bruke, at han ikke klarer å se at han bare trenger å ta bort en for at det skal bli 14.

Sebastian

På addisjonsoppgavene viser Sebastian at han allerede har utviklet noen mentale bilder for tallene i tallområdet 0-10. Både ved at han vet hvor mange fingre som representerer en gitt mengde uten å telle, og at han finner frem fire plugger uten å telle. Han ser ikke bare på tallene som symboler i en rekkefølge, men som en mengde. Dette er et godt utgangspunkt. Likevel er han fortsatt avhengig av tellestrategier når svaret blir over 10 (større enn antall fingre). På oppgaver i tallområdet 10-20 går han også tilbake til bruk av tellestrategier på nivå 1, ved å telle alt og forfra igjen med konkreter. At han klarer å benytte fingersymbol i tallområdet 0-10, tyder på at han kan klare å se på tall som strukturerte mengder. En oppfatning av mengder som strukturerte (del-del-hel) burde da også vise seg ved subtraksjonsoppgaver. Sebastian viser derimot at han fortsatt er avhengig av tellestrategier ved minusoppgavene (også på oppgaver i tallområdet 0-10), noe som vil indikere at mengdeforståelsen fortsatt ikke er helt utviklet.

Det viser seg videre at han ikke mestrer disse tellestrategiene, siden han får feil på 2 av 5 oppgaver der han benytter seg av strategien om å telle ned (N2b). At Sebastian må ta i bruk panna for å finne ut hvor mye han har igjen når han sitter med to fingre på hver hånd, tror jeg delvis kan forklares med at han er så opptatt av prosedyren sin at han glemmer å tenke. Sebastian er fullt klar over at 2+2 er 4, men klarer ikke å dra nytte av denne kunnskapen midt i en prosedyre. Hadde han derimot hatt 4 fingre igjen på bare den ene hånda, ville han trolig ha sett at det var 4. Dette kan komme av at hans mentale bilder ikke består av de ulike delmengdene, men kun et bilde på den hele mengden. Sebastian trenger en dypere forståelse av del-del-helhetsrelasjonene.

Tanker etter pretest

Ifølge Gray og Tall (1994) bruker matematikksvake elever så og si kun tellestrategier for å løse pluss- og minusoppgaver og har ofte et ensidig fokus på å gjennomføre riktig tellestrategi (prosessorientert). Ved pretesten benytter elevene tellestrategier (nivå 1 og 2) på til sammen 2/3 (66,7%) av alle addisjons- og subtraksjonsoppgavene. Dette viser til at de har en overvekt av prosessorientert kunnskap. Flere av elevene benytter seg av fingersymbol. Jeg vil argumentere for at bruk av fingersymbol kvalifiseres til strategi på nivå 3 hos Carpenter og Moser. Selv om elevene ved bruk av fingersymbol fortsatt er avhengig av konkreter for å kunne se løsningen, vil bruk av denne strategien være bedre og mer funksjonell enn tellestrategiene som er beskrevet ved nivå 2. En slik strategi gir et bedre grunnlag for å utvikle en konseptuell kunnskap, siden elevene benytter sin kunnskap om kombinasjoner av mengder, samt viser en større oppfattelse av sammenhengen mellom del-del-hel-relasjonene.

Med utgangspunkt i dette vil hele 1/3 (33,3%) av oppgavene ha blitt løst med strategier som tilsvarer nivå 3. Det er derfor lett å tenke at elevene er på riktig vei, og at de kun trenger litt mer trening for å utvikle gode strategier. Dette viser hvor viktig det er at læreren sitter med kunnskap om hva som tilsvarer en funksjonell tallforståelse. Dersom man tenker at elevene er på riktig vei, men bare trenger mer trening, vil det bli trening i å videreutvikle en prosessorientert kunnskap. Gray og Tall (1994) poengterer at matematikksvake elever med en overvekt av prosessorientert kunnskap blir veldig gode på telleprosedyrer, men klarer blant annet ikke å se strukturen og helheten i mengder.

I min studie ønsker jeg å undersøke om intervensjonen vil hjelpe elevene til å utvikle en funksjonell tallforståelse. I teoridelen har jeg gått inn på og forklart hva jeg legger i dette begrepet. Elevene viser en funksjonell tallforståelse når de kan benytte seg av kunnskap både om prosessen og om konseptet samtidig. Selv om både kjent tallfakta og utledet svar tilsvarer nivå 3 hos Carpenter og Moser, mener jeg et utledet svar gir et bedre mål på den proseptuelle forståelsen, da eleven må vise forståelse for hvordan man kan dele opp og sette sammen mengder på en slik måte at prosessen blir forenklet. Ved kjent tallfakta er det fortsatt en viss sannsynlighet for at eleven benytter seg av kunnskap som ferdighet for eksempel ved pugging. Mestrer derimot eleven å benytte seg av denne kunnskapen i andre oppgaver (eks vet at 5+5=10, så 5+6 må bli 11) viser han innsikt. Disse strategiene har jeg i denne oppgaven klassifisert under kategorien utledet svar. Jeg vil derfor argumentere for at en utvikling i retning av en mer funksjonell tallforståelse, vil vise seg gjennom elevens bruk av utledet svar. Ser vi nærmere på hvilke strategier innen nivå 3 som benyttes i pretesten, er det en stor overvekt av kjent tallfakta (KT). Ved at jeg velger å se på både kjent tallfakta og tellestrategier som kunnskap som ferdighet, vil hele 83,3% av alle oppgaver være løst av strategier som bygger på kunnskap som ferdighet, mens bare 3,3% viser til bruk av utledet svar (kunnskap som innsikt). Jeg vil dermed argumentere for at elevene i tillegg til å ha en overvekt av prosessorientert kunnskap, nesten utelukkende benytter seg av strategier knyttet til kunnskap som ferdighet.

En overvekt av prosessorientert kunnskap er et kjennetegn ved elever i matematikkvansker. Elevene står fast på feil side av den proseptuelle kløften, og vil ha store vansker med å komme over den på egenhånd. Samtidig vil mulighetene for å kunne passere reduseres etter hvert som elevene blir mer fastlåste i sine tellestrategier. Etter all sannsynlighet har ingen av elevene utviklet en konseptuell forståelse av mengdene (jfr. Gray og Tall, 1994). De mangler dermed den ene ingrediensen til å utvikle en funksjonell tallforståelse (proseptuell forståelse). Neuman (1993) sier at hovedutfordringen for elever i matematikkvansker nettopp er å se hvordan mengdene opp til ti består av to mengder og variasjonene av disse. For å hjelpe elevene til å utvikle strategier som også inneholder kunnskap som innsikt (konseptuell forståelse), ble derfor dette et av hovedfokusene i undervisningsopplegget (making number relationships real).

4.2 Kartlegging av strategiutvikling

For å se hvordan dette undervisningsopplegget har påvirket elevenes forståelse vil jeg se nærmere på testen etter gjennomført undervisningsopplegg (posttest). Resultatene fremstilles på samme måte som ved pretesten, gjennom å strukturere elevenes strategier etter Carpenter og Moser sin nivåinndeling (Carpenter & Moser, 1982 i Frostad, 2005).

4.2.1 Resultater fra posttest og utvikling av strategier - Emma

Resultater fra posttest

Addisjon: Ved posttesten starter Emma med å bruke fingrene som sist. Forskjellen er at hun benytter seg av fingersymbol på de fire første oppgavene. Ved oppgaven 6+6, som virket automatisert ved pretest, forsøker hun seg på en ny fremgangsmåte. Hun tar først opp 6 fingre og sier at hun tar 4 til, slik at det blir 10. Hun sier at hun da mangler 1 og at det blir 11. Hun forklarer videre at det er akkurat som å tenke 5+5+1. Jeg spør om Emma kan vise hvordan hun tenkte med tallbrikkene. Emma finner frem tallbrikkene og ser at det blir 2 mer enn 10. På oppgaven 7+5 svarer Emma raskt 12. Hun forklarer at hun så for seg brikkene og da visste hun med en gang at det var det samme som 6+6. På oppgaven 8+5, forklarer Emma at hun så for seg at det ble en 10er og en 3er. Denne strategien bruker hun også ved neste oppgave (3+8), ved at hun tenker 8+2 og 1 mer. På oppgaven 7+9 velger Emma å ta i bruk pluggene. Hun teller først 9, så 7, legger de sammen og teller alle. På spørsmål om hvorfor hun velger pluggene, svarer hun at det var så store tall. Her går Emma tilbake til den mest primitive backupstrategien fordi hun på forhånd tror at hun ikke vil klare oppgaven (jfr. forventning om mestring). Jeg utfordrer henne ved å spørre hvordan det går an å tenke om man bare får bruke hodet. Emma forklarer at hun da kan tenke at hun tar en i fra 7ern, slik at det blir 10, så har hun 6 igjen og det blir 16. Ved neste oppgave (9+8) benytter Emma samme strategi, og svarer uten tenketid at det blir 17. Hun sier at hun kunne se det med en gang, siden hun visste at 7 var en mindre enn 8.

<u>Subtraksjon:</u> Emma viser stor fremgang i valg av strategier ved subtraksjonsoppgavene. På oppgaven 10-3 svarer hun 7, kun ved å se ned på hendene (uten å røre på fingrene). På 7-3 sier hun at hun så for seg fingrene i hodet. Emma forklarer at hun først tar bort 2 fra den ene hånda og så en til. Det samme gjør hun på 8-4 (her viser hun med fingersymbol). På 12-3 svarer hun raskt 9. Forklaringen hennes viser at hun benytter hun seg av en avledet variant (utledet svar), der hun først tar bort 2 slik at det blir 10, og så tar bort en til. Ved 13-9 går Emma tilbake til å bruke fingrene. Hun ser lenge på fingrene sine og ber tilslutt om å få låne tre av mine. Hun legger selv begge hendene på bordet, tar bort ei hånd og en finger og sier at hun har igjen 6 (det er da 8 fingre igjen på bordet). Jeg ber Emma forklare hvordan hun tenkte ved å bruke Numiconbrikkene. Emma tar da frem 10 og 3, legger 9er brikken oppå og sier at svaret er 4, ikke 6. Hun sier videre at det blir litt tull noen ganger når hun bruker fingrene. Når jeg spør hvorfor hun da brukte fingrene, svarer hun at det var så høyt tall og at hun pleier å bruke fingrene da. På oppgaven 18-12 tenker Emma lenge før hun spør om hun kan få bruke brikkene. Hun legger ned 18 og 12 og svarer med en gang at det blir 6. Hun forklarer at hun ser at den ene har 6 mer. Jeg spør hva hun ville gjort om hun ikke fikk bruke brikkene. Emma svarer at hun da ville brukt pluggene, men at det tar så mye lengre tid. *Når jeg bruker brikkene kan jeg se hva som er forskjellen mellom dem og da trenger jeg ikke å telle hvor mange det er.*

Utvikling av strategier fra pretest til posttest

Addisjon	**6+4**	**2+7**	**4+6**	**7+3**	**6+6**	**7+5**	**8+5**	**3+8**	**7+9**	**9+8**
Pretest Posttest	N2c FS	N2c FS	N2c FS	N2c FS	KT US (f)	N2c US	N2c US	N2c US	N2c (f) 1.N1 2. US	N2c US
Subtraksjon	**10-3**	**5-2**	**14-4**	**5-3**	**6-6**	**12-3**	**13-9**	**7-3**	**8-4**	**18-12**
Pretest Posttest	N2b FS	FS MBfs	N1 US	FS FS	KT KT	N1 US	N1 FS (f)	FS US	N2b US	N1 NB

Forklaring av forkortelser: ***Nivå 1:*** *N1: Tellestrategier med konkreter i alle ledd.* ***Nivå 2 – Tellestrategier:*** *N2a: Telle alle. N2b: Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon. N2c: Telle videre fra største ved addisjon eller telle opp ved subtraksjon. N2: Eleven teller inni seg, uten at jeg får tak på hvilken tellestrategi som benyttes.* ***Nivå 3:*** *KT: kjent tallfakta. US: Utledet svar.* ***Andre strategier som tilsvarer nivå 3:*** *FS: Fingersymbol. NB: Numiconbrikker. MBn: Mentale bilder av Numiconbrikkene. MBfs: Mentale bilder av fingersymbol.* ***Symbol:*** **: fikk hjelp. f: feil svar*

Emma trenger fortsatt å benytte seg av fingrene som konkreter på de fleste addisjonsoppgavene. Forskjellen er at hun nå klarer å dra nytte av kunnskapen om mengder. Ved pretesten startet hun på 6 og telte 4 videre, ved posttesten er det nok for henne å se ned på hendene, lage en 6er og 4er og svare 10. Prosessen skjer på under ett sekund, noe som viser at hun ser på mengden som en helhet uten at det er telling inn i bildet. Tallsymbolene er fortsatt for abstrakt for Emma og hun trenger konkretene, enten fingrene eller Numiconbrikkene, for å visualisere og få en oversikt over hva oppgaven går ut på. Ved oppgaver som Emma anser som vanskelige, går hun raskt tilbake til de gamle tellestrategiene. Dette viser seg spesielt på oppgaven 7+9. Her velger hun strategien «å telle alt og forfra igjen» med konkreter (nivå 1). Det som er interessant her, er svaret hun gir når hun blir oppfordret til å bruke en annen strategi. Hun svarer med en gang at det går an å låne en fra 7ern slik at det blir 10+6. Her viser Emma en konseptuell forståelse. Spørsmålet er hvorfor hun velger å benytte seg av den ineffektive framgangsmåten med pluggene, når hun egentlig har en mye mer effektiv måte å løse oppgaven på.

Goldman (referert i Ostad, 2008) belyser dette problemet ved å vise til studier der elevene slutter å bruke de lærte strategiene når de ikke lengre blir direkte påminnet hvilke strategier som kan brukes. Det er først når Emma oppfordres til å benytte seg av andre strategier at hun viser hva hun egentlig kan. På oppgaven 6+6 prøver Emma seg på en avledet strategi, men prosessen med å gjøre om 6+6 til 6+4=10 og så finne ut hvor mange som er igjen av den siste 6ern blir trolig for krevende for henne. Samtidig ser vi at Emma stoler blindt på svaret hun får ved å bruke en lært fremgangsmåte. Hun stiller ingen spørsmålstegn ved at 6+6=11. Videre er det verdt å poengtere at når hun prøver å løse regnestykket med Numiconbrikkene, ser hun med en gang at det ikke kan stemme, nettopp fordi det ikke er tallbrikkene til 11 som ligger på bordet.

Det er på subtraksjonsoppgavene Emma har størst fremgang. Her begynner hun å ta i bruk mentale bilder av mengdene, benytte seg av kjente tallfakta og bruke utledet svar. Men også ved subtraksjonsoppgaver blir det vanskelig når tallene blir større, og hun går tilbake til sin backupstrategi. Emma forklarer at hun pleier å bruke fingrene når det er høye tall. Hun er vant til å løse vanskelige regnestykker på denne måten, for da vet hun at hun kommer frem til riktig svar. Sjansen for å gjøre feil er mindre når hun får benytte seg av konkreter, enten det er fingre eller plugger. Emma spør på den siste oppgaven om hun kan få bruke Numiconbrikkene. Når hun bruker disse, har hun ikke lengre behov for å benytte seg av backupstrategien, selv om det er høye tall (18-12). Så lenge hun har konkretene foran seg klarer hun å se at forskjellen mellom disse to tallene er 6. Hun tenker altså ikke på prosessen til pluss eller minus, men ser hva som skal til for at de skal være like. Ved å lære å tenke på denne måten, legges det til rette for at elevene oppfatter antallet i ulike mengder og forstår strukturen i disse. Dette er med på å utvikle elevenes forståelse av matematiske begreper og hjelper til med å danner koblinger og relasjoner mellom kunnskapsenhetene, for eksempel ved å se sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon.

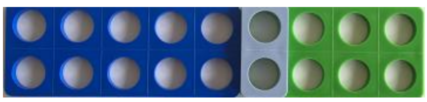
Strategiutvikling: Når det gjelder Emmas strategiutvikling fra pretest til posttest har hun på de fire første addisjonoppgavene gått fra tellestrategi på nivå 2 til å benytte seg av fingersymbol, som jeg tidligere har argumentert for at tilsvarer nivå 3. Bruk av fingersymbol er en måte å representere mengder på som er lik måten Numiconbrikkene er representert på. Dette viser at Emma er på vei bort fra å være låst til tellestrategier og på vei mot å se på tall som strukturerte mengder. Videre har Emma gått fra bruk av tellestrategier på nivå 2, til utledet svar på de fire siste oppgavene. Ved subtraksjonsoppgavene har Emma gått fra å ikke benytte seg av utledet svar på noen oppgaver, til å benytte utledet svar på fire av oppgavene. Tre av disse oppgavene gikk fra laveste nivå (nivå 1). På fire av oppgavene går hun fra tellestrategier (nivå 1 og 2) til bruk av strukturerte mengder (fingersymbol og Numiconbrikker). På de to resterende oppgavene benytter Emma seg av kjent tallkunnskap. Forklaringene hennes her viser til at hun benytter seg av mentale bilder. Dette betyr at alle addisjonsoppgavene og alle subtraksjonsoppgavene ved posttesten blir løst ved bruk av strategier på nivå 3, altså helt uten bruk av tellestrategier.

4.2.2 Resultater fra posttest og utvikling av strategier - Lars

Resultater fra posttest

Addisjon: I tallområdet 0-10 benytter Lars seg av kjent tallfakta på lik linje som ved pretesten. Den ene oppgaven som ble løst ved hjelp av tellestrategier i dette tallområdet, løser han nå med kjent tallfakta. Lars har fortsatt vanskelig for å forklare hvordan han tenker i dette tallområdet. Han sier at han bare vet svaret. Siden svaret kommer raskt (under ett sekund) vil jeg gå ut i fra at dette er automatisert eller pugget kunnskap. I tallområdet opp til 20 har Lars hatt større fremgang. Selv om Lars forteller at han gjettet på oppgaven 7+5, klarer Lars å benytte seg av denne kunnskapen i neste oppgave (8+5). Lars forklarer at det må bli en mer, siden 8 er en mer enn 7 (utledet svar ved bruk av kjent tallfakta). Det samme gjør han på 7+9 og 9+8. Han forteller i tillegg at han så svaret i hodet på 7+9, siden vi har jobbet så mye med Numiconbrikkene. På oppgaven 3+8 svarer han først 10, men gjør om til 11. Han forklarer at 3+7 er 10 og at 2+8 er 10, derfor må 3+8 være 11.

Subtraksjon: Også på subtraksjon har Lars hatt fremgang. Han forklarer at 5-2 og 5-3 hører sammen; tar du bort 2 blir det 3 igjen, og tar du bort 3 blir det 2 igjen. Videre forteller han at 14-4 er 10 fordi han tar bort firetallet. På oppgaven 12-3 bruker han lang tid og svarer 11. Når han skal forklare, endrer han svaret sitt til 10. Jeg spør om han kan vise meg hvordan han tenkte. Forklaringen hans tolker jeg som et forsøk på et utledet svar, der han først tar bort 2, slik at det ble 10, men er usikker på om han skal legge på eller trekke fra den siste. Når han kommer på at han skulle trekke fra, trekker han fra svaret han først ga, og det nye svaret blir 10. Det er først når han bruker brikkene at han ser hvor det blir feil. På oppgaven 13-9 trekker Lars på skuldrene og sier at han ikke vet. Han får tilbud om å bruke hjelpemiddel og velger Numiconbrikkene. Han finner frem 13 og 9 og svarer 4 før han rekker å legge ned siste brikken. På oppgaven 7-3 velger han å bruke fingrene. Han tar først opp 7, tar bort 3 (ved telling) og ser at det er 4 igjen. På oppgaven 18-12 står han fast og ønsker å bruke Numiconbrikkene. Han tar opp tallbrikkene til 10, 8 og 2, og svarer raskt 6. Måten han legger brikkene på er interessant:



Disse tre brikkene representerer her både 18, 12 og 6.

Utvikling av strategier fra pretest til posttest

Addisjon	**6+4**	**2+7**	**4+6**	**7+3**	**6+6**	**7+5**	**8+5**	**3+8**	**7+9**	**9+8**
Pretest Posttest	KT KT	N2 KT	KT KT	KT KT	KT KT	N2 KT (gjettet)	N1 US	N2 US	N1 MBn	N1 US
Subtraksjon	**10-3**	**5-2**	**14-4**	**5-3**	**6-6**	**12-3**	**13-9**	**7-3**	**8-4**	**18-12**
Pretest Posttest	N2b N2b	N2 KT	N1 US	KT KT	KT KT	N1 US (f)	N1 NB	N1 N2b	US KT	N1 NB

Forklaring av forkortelser: ***Nivå 1:*** *N1: Tellestrategier med konkreter i alle ledd.* ***Nivå 2 – Tellestrategier:*** *N2a: Telle alle. N2b: Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon. N2c: Telle videre fra største ved addisjon eller telle opp ved subtraksjon. N2: Eleven teller inni seg, uten at jeg får tak på hvilken tellestrategi som benyttes.* ***Nivå 3:*** *KT: kjent tallfakta. US: Utledet svar.* ***Andre strategier som tilsvarer nivå 3:*** *FS: Fingersymbol. NB: Numiconbrikker. MBn: Mentale bilder av Numiconbrikkene. MBfs: Mentale bilder av fingersymbol.* ***Symbol:*** **: fikk hjelp. f: feil svar*

Lars viser stor fremgang ved addisjonsoppgavene i tallområdet over 10. Han klarer i stor grad å benytte seg av kjent tallfakta ved nye oppgaver. Ved at han på oppgaven 8+5 forklarer at det må bli en mer enn 7+5, siden 8 er en mer enn 7, viser han også en større forståelse for hvordan tall og mengde henger sammen i et hierarkisk system. På pretesten måtte han starte å telle på nytt igjen da han kom til 15 når han bare skulle ha 14 (oppgaven 14-4). Ved posttesten viser han en bedre forståelse for sammenhengen mellom delmengder og helhet. Dersom en av delmengdene blir større, vil også helheten bli tilsvarende større. Videre viser Lars en større evne til å se sammenhenger ved at han sier at 3+8 ikke kan være 10, siden 3+7 og 2+8 er 10.

På fire av subtraksjonsoppgavene i tallområdet 0-10 svarer Lars raskt, noe som vitner om automatisert kunnskap (KT). Likevel er jeg usikker på Lars sine strategier i dette tallområdet. Her virker han ikke i like stor grad i stand til å benytte seg av kjent tallfakta i andre kombinasjoner. Lars har full kontroll på alle «tiervenner», og vet at 7+3 er 10, men klarer ikke å dra denne kunnskapen med seg videre i oppgaven 10-3. Her kommer det frem at han ikke klarer å se sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon enda, noe som vil tilsi at han fortsatt har en overvekt av prosessorientert fokus når han skal løse oppgaver. Det er *en* prosess ved addisjonsoppgaver og *en* prosess ved subtraksjonsoppgaver. Lars sin største fremgang i subtraksjon er, på lik linje som ved addisjonsoppgavene, på oppgaver i tallområdet over 10. Her var han ved pretesten låst til tellestrategier på nivå 1 på alle fire oppgavene. Ved posttesten benytter Lars seg stort sett av strukturerte mengder på de samme oppgavene og trenger dermed ikke å telle. Selv om Lars fortsatt er avhengig av å bruke konkreter, klarer han i mye større grad å benytte seg av kunnskap om mengder når han får bruke Numiconbrikkene, og mestrer da oppgavene på svært kort tid sammenlignet med pretesten.

Det er mye lettere for Lars å vise hvordan han tenker når han kan få benytte seg av Numiconbrikkene. Da trenger han ikke å sette ord på tankene. Dette var også noe jeg la merke til i undervisningsøktene. I disse øktene ble ikke hans vansker med å forklare seg oppfattet som et problem. Tvert imot var han flink til å forklare de andre hvordan han hadde tenkt ved å vise det med Numiconbrikkene. Videre ser vi av posttesten at Lars også har blitt mye flinkere til å forklare hvordan han tenker uten å bruke tallbrikkene (spesielt ved addisjon i tallområdet over 10). Dette kan komme av at han har fått mye trening i å forklare hva han tenker i de undervisningsøktene vi har hatt, samtidig som han også har fått høre hvordan de andre setter ord på sine tanker og sin forståelse. Dette er i tråd med det Vygotskij sier om at utvikling av metakognitiv kompetanse foregår i verbal samhandling med en kompetent annen person (Ostad, 2008).

<u>Strategiutvikling:</u> Lars har utviklet sine strategier til nivå 3 på seks av addisjonsoppgavene (tre fra nivå 1 og tre fra nivå 2), noe som tilsier at alle ti addisjonsoppgaver blir løst ved hjelp av strategier på nivå 3. Det er verdt å merke seg at de tre oppgavene som var på nivå 1 ved pretest, ble løst ved hjelp av utledet svar ved posttesten og at de alle befinner seg i tallområdet over 10. Dette viser seg også ved de fire subtraksjonsoppgavene i tallområdet over 10, som ble løst ved hjelp av tellestrategier på nivå 1 i pretesten. Ved posttesten blir halvparten av disse løst ved utledet svar, mens han på de resterende benytter seg Numiconbrikkenes strukturerte mengder. Lars har på seks av subtraksjonsoppgavene benyttet seg av strategier på et høyere nivå enn ved pretesten. Kun to av disse er utledet svar. Lars bruker fortsatt tellestrategi på en av oppgavene i tallområdet 0-10 (oppg. 7-3).

Hele ti av tjue oppgaver er løst ved bruk av kjent tallfakta ved posttesten. I tillegg benytter han kjent tallfakta som ledd i utledet svar i fire av oppgavene. Ved diskusjon etter pretest argumenterte jeg for at kjent tallfakta knyttes til kunnskap som ferdighet. Selv om kjent tallfakta ikke viser til en konseptuell kunnskap, viser Lars ved posttesten at han kan benytte kjent tallfakta som ledd i en utledet strategi. Gray og Tall (1994) sier at et kjennetegn på elever som mestrer matematikken, er at de bruker kombinasjonene de allerede kan for å skape flere kombinasjoner. Lars viser dermed her at han mestrer addisjonsoppgaver i mye større grad enn ved pretesten. Likevel betyr dette at hele 70% av Lars sine strategier krever automatisert kunnskap av tallkombinasjoner som er lik eller som ligger nært opp mot den oppgaven som skal løses.

Det viser seg ved flere oppgaver både i pretest og posttest at Lars i stor grad prøver å huske hva svaret blir. McShane (1991, i Holm, 2002) poengterer at det vil være umulig å memorere alle svar på utregninger som faktakunnskap. Uten en større forståelse for hvordan han kan dekomponere og re-komponere mengder vil denne strategien ikke hjelpe Lars særlig langt i sin utvikling av tallforståelse. For at Lars skal få en funksjonell tallforståelse må han jobbe enda mer med å utvikle sin konseptuelle kunnskap. Lars sier at han ser for seg Numiconbrikkene på en av oppgavene. Likevel er det lite som tilsier at Lars er på vei til å danne seg gode mentale bilder. Lars har hatt en god framgang, men har fortsatt en vei å gå i arbeidet med å utvikle en tallforståelse som i større grad balanserer mellom kunnskap som ferdighet og kunnskap som innsikt.

4.2.3 Resultater fra posttest og utvikling av strategier - Sebastian

Resultater ved posttest

Addisjon: Sebastian regner ut 6+4 ved å si at han tar en over fra 4 til 6, slik at det blir 5+5. Han ser at 4+6 er det samme som 6+4, bare at tallene sies i forskjellig rekkefølge. Han bruker også utledet svar på oppgavene 7+5, 8+5, 7+9 og 9+8, ved at han går om tier. På oppgaven 7+9 forklarer han at nieren har en bit som kan høre til sjueren slik at det blir likt. Jeg spør om han kan vise meg det med brikkene. Da endrer Sebastian strategi, og sier at hvis vi tar en fra sjueren over til nieren, blir det 10+6 og det er litt lettere. Han forklarer at det går an å ta både 10+6 og 8+8, siden begge blir 16. På oppgaven 2+7 svarer Sebastian først 10. Han forklarer at han først tenkte på 7+3, og så ble det en mindre. Jeg spør hva 7+3 er, og Sebastian svarer 11. Jeg ber han vise hvordan han tenker ved å bruke Numiconbrikkene. Han tar opp en toer og en sjuer og svarer raskt 9. Han forklarer at det ikke kan bli 10, siden den siste *durten* ikke blir dekt. På oppgaven 7+3 benytter han kunnskapen om at 2+7 var 9, og legger til en mer.

Subtraksjon: På den første oppgaven (10-3) tenker Sebastian lenge før han svarer 8. Han sier at han så for seg tallbrikkene i hodet og da var det 8 igjen. Når han fysisk bruker tallbrikkene ser han med en gang at svaret er 7. Det samme gjelder oppgaven 13-9. Han tenker lenge før han svarer at det blir 7. Jeg forstår lite av resonnementet hans og spør om han kan vise med tallbrikkene. Da ser han med en gang av det er 4. Han sier at vi tar først bort 10, slik at det er igjen 3, men siden det bare var 9 som egentlig skulle bort, må vi legge igjen en fra niern og da blir det 4. Sebastian benytter seg av mentale bilder av Numiconbrikkene på sju av oppgavene, der to av oppgavene blir feil svar (10-3 og 13-9). På oppgaven 18-12, svarer han etter kort tid 6. Han forklarer det med at tieren i 12 tar bort tieren i 18, og toeren som er igjen tar bort 2 fra 8. Da er det bare 6 igjen.

Utvikling av strategier fra pretest til posttest

Addisjon	**6+4**	**2+7**	**4+6**	**7+3**	**6+6**	**7+5**	**8+5**	**3+8**	**7+9**	**9+8**
Pretest Posttest	FS US	FS US (f)	FS KT	FS US	KT KT	N2b US	N1 US	FS/US N2b	N2b US	N2b US
Subtraksjon	**10-3**	**5-2**	**14-4**	**5-3**	**6-6**	**12-3**	**13-9**	**7-3**	**8-4**	**18-12**
Pretest Posttest	N2b MBn (f)	FS MBn	N2b (f) MBn	N2b MBn	KT KT	N2b US	N2b (f) MBn (f)	N2c MBn	N2c MBn	N1 US

Forklaring av forkortelser: ***Nivå 1:*** *N1: Tellestrategier med konkreter i alle ledd.* ***Nivå 2 – Tellestrategier:*** *N2a: Telle alle. N2b: Telle videre fra første ved addisjon eller telle ned ved subtraksjon. N2c: Telle videre fra største ved addisjon eller telle opp ved subtraksjon. N2: Eleven teller inni seg, uten at jeg får tak på hvilken tellestrategi som benyttes.* ***Nivå 3:*** *KT: kjent tallfakta. US: Utledet svar.* ***Andre strategier som tilsvarer nivå 3:*** *FS: Fingersymbol. NB: Numiconbrikker. MBn: Mentale bilder av Numiconbrikkene. MBfs: Mentale bilder av fingersymbol.* ***Symbol:*** **: fikk hjelp. f: feil svar*

Ved posttesten går Sebastian helt bort fra å bruke fingrene, både ved telling og som fingersymbol. Dette resulterer blant annet i at han på en av oppgavene benytter strategier på et lavere nivå enn han gjorde på pretesten (3+8). Sett bort i fra denne oppgaven har Sebastian hatt en svært god utvikling av sine strategier, spesielt i tallområdet 10-20 der han ved pretesten benyttet seg av tellestrategier. På pretesten måtte Sebastian ta i bruk pluggene og telle en og en for å komme frem til riktig svar på oppgaven 8+5. Svaret 13 representerte da det siste tallet han telte. På posttesten viser Sebastian at han ikke bare ser på 13 som et tall i rekken, men som en mengde sammensatt av en tier og en treer. Her viser han en større begrepsmessig forståelse. Ved posttesten benytter Sebastian utledet svar på syv av addisjonsoppgavene (en feil). Forklaringene hans vitner om at han benytter seg av mentale bilder av Numiconbrikkene til å se for seg hvordan mengdene kan deles opp og settes sammen i lettere kombinasjoner. Sebastian viser ved posttesten at han mestrer å dekomponere og re-komponere mengder og kan finne mange forskjellige tallkombinasjoner i samme regnestykke. Han viser dermed stor strategifleksibilitet. Ostad (2008) beskriver dette som et kjennetegn ved elever som mestrer matematikk.

Tidsbruken til Sebastian på posttesten viser til at det fortsatt er krevende for han å frigjøre seg fra konkretene, spesielt ved subtraksjonsoppgavene. Han forsøker å benytte seg av mentale strategier, noe som og fører til at han bruker mye lengre tid på å svare enn han gjorde ved pretesten. På to av oppgavene (10-3 og 13-9) er hans mentale strategier mer til forvirring enn til nytte. Dette tyder på at de mentale bildene ikke er godt nok etablert til at han klarer å benytte de fullt ut enda. Selv om det tar lengre tid, og strategiene ikke er like innarbeidet enda, viser Sebastian stor fremgang ved både addisjon og subtraksjon. Sebastian imponerer med sin forklaring på oppgaven 18-12, der han også benytter seg av mentale bilder av Numiconbrikkene. Her ser han for seg at han tar bort tiermengden fra 12 og 18, for deretter å tenke at han tar 2 fra 8 og får 6 til svar. Sebastian viser her en god forståelse for både mengder og posisjonssystemet.

<u>Strategiutvikling:</u> Sebastian kunne allerede ved pretesten benytte seg av strategier på nivå 3 i tallområdet 0-10 (bruk av fingersymbol). I tallområdet 10-20 hadde han en overvekt av tellestrategier. Ved posttesten velger han i stor grad å ta i bruk strategier på nivå 3 på alle addisjonsoppgaver. I tillegg har han gått bort fra bruk av fingersymbol og over til større bruk av utledet svar og mentale bilder. Ved subtraksjonsoppgavene i pretesten ble kun to av oppgavene løst ved strategier på nivå 3. Sebastian var da i stor grad avhengig av å benytte konkreter i tellestrategier både på nivå 1 og nivå 2. På posttesten har han derimot gått helt bort fra bruk av konkreter og benytter seg stort sett av mentale bilder av Numiconbrikkene og utledet svar. Sebastian bruker strategier på nivå 3 på alle subtraksjonsoppgaver ved posttesten.

Den eneste oppgaven Sebastian ikke benytter strategi på nivå 3, er også den eneste han delvis benyttet utledet svar på ved pretesten. Dette kan være tilfeldig, men det kan også være et resultat av at han har lært seg en ny måte å tenke på og dermed fokuserer mer på hvordan han skal benytte denne kunnskapen, enn å se på hvilken kunnskap han allerede innehar. Sebastian låser seg ikke fast i tellestrategier, men låser seg litt fast i at han skal benytte Numiconbrikkene. Det er trolig for å vise meg hvor mye han har lært, noe som av erfaring er et kjent problem i matematikk. Elevene er ofte mer opptatt av å løse oppgaver på den måten som de tror læreren ønsker, enn å benytte sin egen kunnskap i problemløsning. Likevel viser Sebastian at han har hatt stort utbytte av arbeidet med Numicon, og at han mestrer å benytte denne kunnskapen i mange av oppgavene der han tidligere var avhengig av fingrene eller pluggene. Dette viser at Sebastian har utviklet sine mentale bilder for tallene til å også inkludere Numiconbrikkene. Sebastian har hatt en veldig god utvikling i sine strategier og er på god vei mot en funksjonell tallforståelse.

4.3 Diskusjon etter gjennomført opplegg

Jeg vil her drøfte om intervensjonen har hatt en positiv effekt på tallforståelsen i tallområdet 0-20 hos elevene, og om undervisningsopplegget med Numicons strukturerte mengder har ført elevene i riktig retning i forhold til å utvikle en funksjonell tallforståelse. Jeg vil også drøfte eventuell overføringsverdi når elevene går tilbake til vanlig skolehverdag.

Siden elevene ved pretesten hadde en overvekt av prosessorientert kunnskap, ble fokus i undervisningsøktene å utvikle elevenes tallforståelse i form av mer kunnskap som innsikt. Dette i håp om at det ville hjelpe elevene til å utvikle strategier som bygger på kunnskap både om prosessen og konseptet. En større konseptuell forståelse fører til at symbolene som brukes ved oppgaveløsningen får mening (Hiebert & Lefevre, 1986). Dette gir videre et større meningsinnhold knyttet til strategiene, noe som gjør at de kan huskes bedre og brukes mer effektivt, samt gi en større fleksibilitet i elevenes strategibruk. Gjennom disse ti øktene kommer elevene stadig frem til nye framgangsmåter og løsningsstrategier. Forklaringene de kommer med viser at deres konseptuelle kunnskap utvikles.

Frostad (2005) sier at utviklingen av strategibruken over tid er en indikator på den konseptuelle kunnskapen. Fra pretest til posttest ser vi at det har skjedd store endringer i elevenes strategibruk. Ved pretesten hadde elevene en overvekt av prosessorientert kunnskap der de hovedsakelig benyttet tellestrategier på nivå 1 og 2 ved addisjons og subtraksjonsoppgaver i tallområdet 0-20. Posttesten gir derimot et helt annet bilde. Emma har gått fra å bruke tellestrategier på 75% av oppgavene, til å ikke benytte seg av tellestrategier i det hele tatt ved posttesten. Lars brukte tellestrategier på 65% av oppgavene ved pretesten, og på bare 10% ved posttesten (2 oppgaver). Mens Sebastian har gått fra å benytte tellestrategier på 60% av oppgavene ved pretest, til å benytte tellestrategi på kun 1 oppgave (5%). Resultatene viser at alle elevene mer eller mindre har gått bort fra bruk av tellestrategier. Det som er interessant her er hvilke strategier som har erstattet disse tellestrategiene. Hos Emma ser vi at nærmere 47% av tellestrategiene (7 av 15) har blitt byttet ut med strukturerte mengder (fingersymbol og

Numiconbrikker), og hele 53% har blitt byttet ut med utledet svar. Hos Lars ble 15% byttet ut med strukturerte mengder, 23% ble byttet ut med kjent tallfakta og omlag 38% med utledet svar. Hos Sebastian ble nærmere 50% av tellestrategiene byttet ut med utledet svar, mens de resterende 50% viser til bruk av mentale strategier der han forestiller seg de strukturerte mengdene til Numicon.

Vi ser av posttesten at det har skjedd en stor utvikling i strategibruken til elevene. Dette kalles *strategibrukinternalisering*, og dreier seg om forflytningen mot stadig mer avanserte strategibruk-kategorier til de når det høyeste nivået (nivå 3). Ved posttesten blir hele 95% av oppgavene løst ved bruk av strategier på nivå 3, til sammenligning med pretestens 33,3%. Jeg vil likevel trekke frem at det ikke er alle strategier på nivå 3 som indikerer utvikling mot en mer funksjonell tallforståelse. Gray og Tall (1994) sier at det som kjennetegner elever med proseptuell tallforståelse er bruken av utledet svar der svaret ikke kommer automatisk. I pretesten skrev jeg at elevene i gjennomsnitt benyttet seg av utledet svar på 3,3% av oppgavene. Ved posttesten benytter elevene i gjennomsnitt utledet svar på 40%, noe som er en betydelig framgang. Likevel gir dette et litt misvisende bilde, da det viser seg å være relative forskjeller i elevenes utvikling. Emma og Sebastian har en bedre utvikling enn Lars. Emma går fra å ikke benytte utledet svar i det hele tatt ved pretest, til å benytte denne strategien på 50% av oppgavene ved posttest, og Sebastian går fra 5% til 45% ved posttest. Emma og Sebastian har dermed en overvekt av strategier som utledet svar. Lars går fra å benytte seg av utledet svar på 5% til 25% ved posttest. Selv om Lars har utviklet en større innsikt sammenlignet med pretest, har han fortsatt en overvekt av bruk av kjent tallfakta (50%), og sannsynligvis også en overvekt av kunnskap som ferdighet. Lars er den som er lengst unna å utvikle en konseptuell forståelse, da han i mye større grad enn de andre er opptatt av at han skal huske svaret.

For å bruke utledet svar må elevene ha innsikt i tallsymbolers struktur, og på en fleksibel måte kunne dekomponere og komponere symbolene (Gray & Tall, 1994). Jeg mener en naturlig vei til utledet svar går gjennom bruk av strukturerte mengder og deretter mentale bilder av strukturerte mengder. Ved posttesten ble både fingersymbol og Numiconbrikkene benyttet som strukturerte mengder. Fingersymbol er nyttig i den forstand at fingrene alltid er tilgjengelige. De fungerer derimot dårlig i tallområdet over 10. Dette er et stort problem for elever som er avhengig av konkreter til å visualisere mengder. Selv om elevene klarer å utvikle sin konseptuelle tallforståelse i tallområdet 0-10 ved bruk av fingersymbol, vil de bli tvunget tilbake til tellestrategier når de går videre til oppgaver med høyere tall. Konkretiseringsmateriell som Numicon tilbyr de elevene som trenger mer tid til å danne seg funksjonelle mentale bilder en mulighet til å benytte strukturerte mengder også i tallområdet over 10. På denne måten kan elevene fortsette sin utvikling av konseptuell kunnskap i arbeid med de ulike prosessene og prosedyrene, slik at sjansen for at de utvikler en funksjonell tallforståelse øker.

Et steg videre i riktig retning mot bruk av utledet svar er altså å kunne benytte disse strukturerte mengdene som mentale bilder når de løser oppgaver. Ved å jobbe med Numicon er målet at elevenes mentale bilder inkluderer systematiske visuelle mønster (Atkinson, Tacon & Wing, 2009). Dette vil kunne hjelpe dem til å skape en større forståelse av tallsymbolene, som ikke bare støtter en prosess, men også et begrep. Numicon dreier seg ikke om å lære og repetere ulike prosedyrer, men å oppdage de ulike sammenhenger/relasjoner mellom tallene og bruke denne kunnskapen til å kunne benytte flere ulike fremgangsmåter. Ut i fra resultatene, samt observasjon fra undervisningsøktene, vil jeg si at dette i stor grad har fungert. Elevene har gått bort fra enkle tellestrategier og viser til en større fleksibilitet i sin strategibruk. Selv om ikke alle tre har hatt en like god utvikling, benytter de alle en mye større andel utledet svar ved posttest enn ved pretest. De har fortsatt en vei å gå før de har utviklet en funksjonell tallforståelse, men jeg vil ut i fra resultatene kunne si at undervisningsopplegget med Numicons strukturerte mengder har hjulpet elevene godt på vei i denne utviklingen.

Overføringsverdi

Etter endt undervisning hadde jeg en formening om at elevene hadde lært mye og hadde fått en mye bedre forståelse for både mengder, tallrelasjoner og ulike fremgangsmåter. Da jeg fikk høre at elevene fortsatt benyttet seg av tellestrategier når de arbeidet med oppgaver i boka, tenkte jeg at Numicon var nok et konkretiseringsmateriell der overføringsverdien til arbeid med tallsymboler var minimal (jfr. Ostad sine resultater ved forskning på konkreter). Jeg satte meg ned sammen med elevene og så på at de regnet i boka. Da fikk jeg noen tanker om opprettholdende faktorer:

For det første hadde elevene i gruppeøktene fått oppgaver som krever at de reflekterer og vurderer hvilken fremgangsmåte de skal benytte. Oppgavene i boka var oppstilte regnestykker som elevene allerede hadde en innlært strategi på. Ostad (2008) poengterer at arbeid med oppgaver i boka synes å være en isolert aktivitet for elever i matematikkvansker. Slike oppgaver kan i stor grad basere seg på en mekanisk utførelse uten refleksjon og dermed bidra til instrumentell forståelse. En oppgave som blir løst på samme måte gjentatte ganger, vil ikke gi rom for andre løsningsstrategier. Dette beskrives som functional fixedness og fører til strategirigiditet, der de samme backupstrategiene blir brukt opp gjennom hele grunnskolen. Av denne grunn vil elevenes matematikkforståelse mest sannsynlig hverken utfordres eller utvikles ved å fortsette å jobbe med oppstilte regnestykker i boka.

Det neste jeg la merke til var at elevene arbeidet med oppgaver i tallområdet 0-1000. Disse elevene har fortsatt vansker med å arbeide i tallområdet 0-20, de har ikke en velutviklet forståelse for posisjonssystemet og har etter min mening ingen forutsetning for å kunne løse disse oppgavene på en annen måte enn ved å slavisk følge en lært prosedyre. Videre vil jeg trekke frem at ti økter med fokus på mengdeforståelse og tallrelasjoner ved bruk av konkreter, ikke automatisk vil føre til at elevene mestrer å løse matematiske regnestykker uten å få benytte seg av konkretene. Målet med Numicon er at elevene skal kunne danne seg indre mentale bilder av mengdene som blant annet inkluderer Numiconbrikkene. Det kan ikke forventes at disse mentale bildene er på plass etter ti økter, og det er ambisiøst å tro at elevene kan løsrive seg fra sine innlærte strategier når de igjen blir møtt med oppgaver med abstrakte tallsymbol i boka, spesielt når de ikke har tilgang på konkretene.

Erfaringen fra dette blir at elever i matematikkvansker vil trenge tid før de kan frigjøre seg fra konkretene, og benytte tenkningen i mer abstrakte oppgaver. Samtidig er det viktig å poengtere at elevene uansett må få oppgaver innenfor deres proksimale utviklingssone. Dersom de presses videre uten at forståelsen er på plass, vil de bli tvunget tilbake til mer primitive backupstrategier. Gray og Tall (1994) poengterer at matematikksvake som opplever et press mot å bruke mer avanserte strategier enn de mestrer, i større grad vil feile. Det er altså flere faktorer som har påvirkning på overføringsverdien. Dersom Numicon hadde blitt en naturlig del av undervisninga, ville elevene hatt mulighet til å bruke den tiden de trenger til å bli trygge på sine mentale bilder, slik at de senere ikke ville trenge konkretene i arbeid med abstrakte tallsymbol. I et slikt tilfelle ville overføringsverdien trolig vært større.

4.4 Utvikling av tallforståelse ved bruk av Numicon

Sammenligning av pretest og posttest viser at elevene har hatt en positiv utvikling av sine strategier og at de har utviklet en større begrepsmessig forståelse. At disse tre elevene har utviklet bedre forståelse i form av innsikt, dog i ulik grad, er svært spennende informasjon. Siden jeg i utgangspunktet er interessert i hvordan denne informasjonen kan være til hjelp for alle elever, er det for meg interessant å se nærmere på *hvorfor* dette har fungert. Jeg er ute etter en viss generaliseringseffekt, og vil derfor forsøke å finne frem til de aspekter ved bruken av dette konkretiseringsmateriellet som jeg tror har hatt en betydning for elevenes utvikling. Dette vil jeg gjøre gjennom bruk av eksempler som har oppstått i disse øktene, sett i lys av teori for å utvikle en god tallforståelse i matematikk.

Forskning (jfr. Frostad, 1995) poengterer at et konkretiseringsmateriell ikke har stor nytteverdi i seg selv, men er avhengig av hvordan det blir brukt. I disse øktene er konkretiseringsmateriellet brukt på en slik måte at elevene selv (med veiledning fra lærer) skal kunne utvikle sin forståelse fra en overvekt av kunnskap om prosessen til å også benytte kunnskap om begrepet, altså en forståelse basert på innsikt. Tanken er at elevene skal eksperimentere og utvikle sin forståelse gjennom å bygge på iboende idéer og utnytte deres grunnleggende sans til å se mønster, til å lære gjennom handling/visualisering og til å lære gjennom språk. Jeg vil også trekke frem betydningen av mestring og indre motivasjon, samt pedagogens rolle for et vellykket undervisningsopplegg.

4.4.1 Betydning av mønster

Mønster er det som gjør matematikken forutsigbar og overkommelig. Mange elever som mislykkes i matematikk har vanskelig for å se mønstret som tallene er systematisert i. Ved å hjelpe elevene til å oppdage matematikken som et mønster satt i system, vil vi hjelpe dem til å forstå selve grunnelementene i matematikk. Brissiaud (1992) mener at eleven må oppfatte to aspekter ved mengden samtidig for å kunne utvikle en god mengdeforståelse: enkeltelementene (krever evnen til en-til-en-korrespondanse) og enkeltelementene som en samlet enhet. Mønsteret til Numiconbrikkene viser mengden både som en helhet, og som de enkeltdeler mengden er bygd opp av. Siden hvert tall har et mønster satt i et system kan man også finne igjen mønsteret til de ulike tallbrikkene i andre tallbrikker. Man kan for eksempel finne igjen tallbrikkene til 3 og 2 i tallbrikken til 5. På denne måten blir relasjonene mellom tallene mer synlig. Dette er noe Emma oppdager allerede i økt 3 (se vedlegg 4), når hun får i oppgave å finne ut hva som skal til for at 4 blir lik 6;

> Jeg har *4 og så tar jeg pluss to, det blir 6. Og så går det også an å ta 2 pluss 4, det er også 6. Og hvis vi tar bort 4 så blir det 2, og hvis vi tar bort 2 så blir det 4. (…) De er tallpar sjø.*

Dette er et godt eksempel på det Tony Wing kaller å «*make number relationships real*» (Daland et al., 2012). Ved å bruke tallbrikkene klarer Emma å se at disse tre tallene har en relasjon, de hører sammen. Hun viser også en større forståelse for sammenhengen mellom prosessene addisjon og subtraksjon. På denne måten benytter Emma tallbrikkene til å utvide sine eksisterende skjema knyttet til disse tallene.

Jean Piaget snakker i hovedsak om to typer kunnskap som er avgjørende for at barn skal lære å tenke matematisk. Fysisk kunnskap og logisk-matematisk kunnskap (Kamii et al., 2001). I begynneropplæringen er det viktig at disse to eksisterer samtidig, slik at elevene kan benytte konkreter til å utvikle sine skjema knyttet til det abstrakte. Jeg vil vise til et eksempel i andre gruppeøkt, der elevene skal trekke et kort med et tallsymbol på og finne tilsvarende tallbrikke i føleposen:

> Lars trekker tallet 10. Han sier at *10* er lett å finne, fordi det er den største og lengste i posen. Sebastian skal finne tallet 8. Han putter hånda i posen, leter litt rundt. Plukker først opp tallbrikken til 6, men legger den tilbake før den er helt opp av posen og finner den riktige tallbrikken. Sebastian sier at han først trakk opp 6er brikken, men at han så at det ble feil, siden den var lyseblå og ikke grønn. Han sa videre at han tenkte at 8er brikken var litt lik 6er brikken, bare at 8 er litt mer. Emma trekker tallet 8*: Jeg må kjenne etter om det er en «durt» på den eller ikke. For det skal ikke være en durt på 8ern.* Etter elevene har trukket hver sin tallbrikke, legger jeg tallbrikkene ved siden av hverandre på grunnplata og spør hva de ser. Emma*: Ingen har durt. Sebastian: Ja, det er akkurat som ei trapp, bare at det blir to mer. Lars: Alle er partall.* (…) *Ingen av partallene har sånn durt.*

I dette eksemplet ser vi at elevene benytter seg av de fysiske egenskapene til tallbrikkene som et hjelpemiddel til å skape mentale relasjoner mellom objektene. Numicons organisering av tallformene gjør det dermed lettere for elevene å finne likheter, forskjeller og sammenhenger mellom tallene, noe som er med på å øke elevenes mulighet til å benytte konstruktiv abstraksjon.

Ved å ha fokus på tallbrikkenes form og relasjoner, kan elevene utføre kompliserte regnestykker uten store problemer. Et eksempel på dette er oppgaven der elevene skal trekke et tall og forklare til de andre hva de har, kun ved å si hva de mangler.

> Emma trekker tallet 2. Hun ser lenge på kortet og spør om å få en 8er brikke. Så sier hun: *Hvis jeg skal få like mange som 8, mangler jeg tre 2er brikker.* Lars prøver seg på 8. Sebastian svarer 6. Emma forteller på nytt at hun mangler tre 2er brikker for at det skal bli 8. Jeg legger frem tallbrikken til 8 og Sebastian og Lars roper i kor at hun må ha 2! Emma svarer at det er helt riktig mens hun ler og virker svært fornøyd. Guttene syntes det var en bra oppgave. Sebastian forklarer i ettertid at det måtte være 2, siden 8er brikken har fire 2ere og Emma manglet tre 2ere.

Det at elevene skal si hva de mangler for å få et annet tall, utfordrer blant annet evnen til problemløsning og konstruktiv abstraksjon. Denne type aktivitet utfordrer også elevene til å legge opp til oppgaver som ikke har en lineær semantisk struktur (a±b=□), noe Ostad (2008) sier er vanskelig for elever i matematikkvansker. Hadde oppgaven i dette eksemplet vært satt opp som et regnestykke kunne det sett slik ut: __ + 2+2+2 = 8. Det er i første omgang vanskelig for både Sebastian og Lars å løse denne oppgaven, de prøver seg på både 8 og 6. Men med en gang tallbrikken kommer frem og de har mulighet til å se på oppbyggingen av tallet 8, ser de begge at Emma må sitte med tallet 2.

Å benytte Numicons tallbrikker som et oversettelsesledd til økt konstruktiv abstraksjon vil hjelpe elevene med å utvide sine eksisterende skjema om tall. Når deres skjema utvikles, vil den logiskmatematiske kunnskapen bli mer og mer uavhengig av den fysiske. Det er når dette skjer at elevene kan begynne å frigjøre seg fra konkretene og forstå tall som noe abstrakt. De utvikler mentale bilder av konkretene. En av hovedtankene bak Numicon er at elevene skal kunne se mønstrene i disse tallbrikkene som en del av sine mentale bilder. De skal være så trygge på tallbrikkene at de kan se både brikkenes fysiske form og relasjonene mellom dem når de regner, tenker eller snakker om mengde og tall:

> Emma løser 6-1 og forklarer det slik: *Jeg lukka øynene og så for meg 6er brikken og så reiv jeg bort en og da ble det en 5er brikke.* Lars lager 10-3, ved at han legger 3 oppå 10er brikken. Sebastian svarer 7 med en gang. Sebastian sier at han så det med en gang *«fordi jeg har fått brikkene der inni hjernen min!»*

Utsagnene til Emma og Sebastian kan vi tolke som at de er på vei til å danne seg mentale bilder av tallbrikkene. Sebastian er fortsatt avhengig av å se brikkene, men formen til tallbrikkene begynner å bli automatisk knyttet til både mengde og symbol, og han klarer å bruke det i enkel regning. Når de mentale bildene er godt etablert vil det ikke lengre være behov for å benytte tallbrikkene. På denne måten skal elevene kunne gå fra det konkrete og over i mer abstrakt tenkning, noe vi har sett at både Sebastian og Emma i stor grad mestrer etter endt intervensjon (posttest).

4.4.2 Språk og samhandling

I følge Ostad (2008) vil en betydningsfull faktor for å oppnå større fleksibilitet i strategibruken være økning i verbaliseringsevne. Dette vil være viktig for at disse elevene skal kunne bevege seg bort fra de mest primitive backupstrategiene. David Tall (2013) trekker frem språkets betydning for å kunne diskutere og utvikle vår oppfatning av et fenomen (f. eks. addisjon og subtraksjon), slik at disse etter hvert utvikler seg til å inneholde matematiske konsepter. Ved å samtale rundt konseptet, kan vi utvikle kognitive strukturer som kan kobles til andre eksisterende kunnskapsstrukturer. Et eksempel på dette er elevenes bruk av ordet «durt», til å beskrive de tallbrikkene som hadde en ensom firkant på toppen (oddetallene). Ved å sette et eget ord som ga fenomenet mening, kunne elevene benytte dette i sine resonnement og forklaringer. Å finne ut at å legge sammen to tallbrikker med durt, alltid vil bli lik en tallbrikke uten durt, er en viktig internalisering av et matematisk faktum.

Det fremheves i konstruktivistisk teori at hvert individ konstruerer sin egen kunnskap. Dette betyr likevel ikke at elevene hovedsakelig bør arbeide individuelt og at de lærer best når de får sitte for seg selv. Ernest (1998) mener at det er nødvendig med en vekselvirkning, hvor matematikkbegrepene rekonstrueres både individuelt og sosialt for å utvikle en god forståelse av begrepet. Dialogbasert undervisning handler om at elevene tar utgangspunkt i egen språkkompetanse, og utleder regler fra dette. Elevene får utforske, samhandle og reflektere sammen med andre, og på denne måten oppdage nye sammenhenger og endre misforståelser. Tanken bak å bruke Numicon som dialogbasert undervisning er at elevene må samarbeide med andre og forklare det de tror de forstår. Dette vil sette elevenes egen forståelse på prøve ved at de må tenke over og stille spørsmål rundt det de selv mener å forstå. Dette dreier seg om individets bevissthet og evne til refleksjon over egne tankemessige prosesser og aktiviteter.

Forskning viser at en slik metakognitiv kompetanse er et mangelområde for elever i matematikkvansker (Ostad, 2008). Utviklingen av metakognitiv kompetanse foregår ifølge Vygotskij gjennom verbal samhandling med en kompetent annen person. Erfaringsvis trenger ikke den kompetente personen å være læreren. Elevene kan godt fungere som kompetente personer for hverandre.

> I økt 2 (vedlegg 4) er Emma og Sebastian litt usikker på hva partall er. Jeg utfordrer derfor Lars forklare for de andre. Lars: *partall er 2,4,6,8 og sånn. Ingen av partallene har sånn durt.* Her bruker Lars et begrep som Emma tidligere har gitt den ene firkanten som stikker opp på noen av tallbrikkene. Han forklarer på et språk som Emma forstår. Sebastian: *Hvis det for eksempel er tallet 6 da, så kan jeg og Lars dele det sånn at det blir 3 på hver.* Sebastian viser frem 6er brikken og later som han skjærer den i to. *Lars: Ja, og da blir det like mange på begge.* Sebastian bruker tallbrikkenes fysiske form til å visualisere at partall kan deles på to. Lars bekrefter poenget til Sebastian ved å si at det blir like mange på hver. Jeg spør Emma om 8 er et partall. *Emma: Ja, den har jo ikke durt.* Jeg tar frem tallbrikken til 9 og spør om dette er et partall. *Emma: Nei. Fordi den har durt, og da vil den som får durten få mer, og da blir det ikke rettferdig.* Lars: *Alle med durt kalles for oddetall. Emma: Ja. Den og den og den er oddetall.* Hun peker på

> tallbrikkene til 3, 5 og 7. Sebastian: *Ja, og ni også da.* Han ser på Lars og spør om eneren også er et oddetall? Lars trekker på skuldrene. Emma: *Den har jo durt…* Elevene blir enige om at 1, 3, 5, 7 og 9 er oddetall og at resten av tallbrikkene opp til 10 er partall.

For å kunne forklare for andre må elevene både tenke igjennom og sette ord på hva de gjør, og hvorfor de gjør det. For mange elever er dette svært utfordrende. Å benytte konkreter vil kunne lette denne dialogen og hjelpe elevene når de skal forklare til hverandre hva de tenker og hva de ser. Uten Numiconbrikkene ville det vært vanskeligere for elevene å forklare og sammen resonnere seg frem til hva et partall og et oddetall er. I økt 2 (se vedlegg 4) kan vi se hvordan elevene utfordrer sin forståelse av begrepet og tegnet = (er lik), og utvider sine skjema. Gjennom å se på og prøve ut begrepet fysisk, går de fra en forståelse om at *er lik* betyr nå kommer svaret, til at er lik betyr at noe er likt/like stort som, det betyr det samme som og det betyr ikke bare at svaret kommer. Her har elevene utvidet sine eksisterende skjema rundt et begrep gjennom dialog og refleksjon.

Det kan i mange tilfeller være en fordel at elevene skal forklare hva de tenker til medelever på samme nivå og ikke til læreren. Elevene får på denne måten i større grad benyttet seg av det språket og de begreper som ligger mest naturlig for dem, altså deres 1.ordensspråk (jfr. Vygotskij). 1.ordensspråk er språk som ikke trenger oversetting, men som står i direkte kontakt med begrepsinnholdet. Som vi ser av eksemplet over, benytter elevene ordet durt (begrep av 1.ordensspråk) som et oversettelsesledd til å forklare og finne karakteristiske trekk ved oddetall og partall (begrep av 2.ordensspråk). De finner ut at oddetallene har *durt* og at det vil bli urettferdig når de deler et oddetall på to siden den som får durten får en mer. Partall er dermed alle tall som ikke har durt, og som derfor på rettferdig vis kan deles på to. Når elevene forklarer til hverandre ved å benytte det språket som ligger nærmest dem, vil det være en større sannsynlighet for at forklaringen ligger innenfor elevens proksimale utviklingssone. En slik språkutveksling vil kunne føre til en større språklig bevissthet og større kognitiv slutningsevne, noe som ofte er svakt representert hos mange i matematikkvansker. Samtidig vil det ikke bare fremme det matematiske språket, men også språklig utvikling generelt. Et funksjonelt språk er en viktig faktor i utviklingen av konstruktiv abstraksjon i matematikk.

4.4.3 Motivasjon og mestring

Elever i matematikkvansker har ofte en svak tro på seg selv og sine evner i matematikk. Ved gjentatte opplevelser av å mislykkes får eleven bekreftet for seg selv at han ikke er god nok, og vil etter hvert utvikle dette til å bli en sannhet. Dette vil gå utover både elevens motivasjon og holdninger til faget. Bakgrunnen for å bruke Numicon i dialogbasert undervisning, er å bygge opp elevens tro på egne ferdigheter, og gjennom dette skape en holdningsendring til matematikkfaget samt et større utbytte av fremtidig undervisning. Fokus var på at elevene skulle få ha det gøy med matematikken, undre seg over den og prøve ut nye tanker og idéer. Herland (2007) presiserer at det i undervisningen skal være rom for lek og eksperimentering.

Elevene syntes det var spennende og artig å arbeide med tallbrikkene. En viss faktor må selvsagt tillegges nyhetens interesse. Innsatsviljen var uansett stor i undervisningsøktene. En viktig faktor her mener jeg er forventningen om å lykkes. Forventning om mestring har betydning for aktivitet og innsats. Gode erfaringer øker forventningene til å lykkes, som igjen øker innsatsviljen. Ved å bruke Numiconbrikkene hadde elevene større mulighet til å lykkes enn de opplever til vanlig i arbeid med matematikken. Fokus var ikke å finne ut hvordan to abstrakte tallsymbol skulle bli et tredje tallsymbol, gjennom telling med eller uten konkreter. Med de strukturerte mengdene kunne elevene i større grad benytte seg av tallrelasjonene og konsentrere seg om *hvorfor* de fikk det svaret de fikk, i stedet for å bruke all energien på å telle seg frem til et svar.

I gruppeøktene var det i tillegg hvordan elevene tenkte som var interessant, ikke hvilket svar de kom med. Her er det arbeidsprosessen, og ikke det endelige svaret, som vektlegges (jfr. Bruner). Elevene søkte derfor etter å komme frem til forskjellige måter å tenke på. De fikk ros for å tørre å tenke på nye måter. I tillegg fremhevet jeg at det var store muligheter for at de kom frem til en smart måte som jeg ikke engang hadde tenkt på. Lista ble lagt lavt, det var ingen svar som var dumme.

Elevene var genuint interessert når vi arbeidet med Numicon. Utsagn som «*hva!? er dette matematikk*», «*jeg elsker dette*» og «*jeg skal bli matteproff når jeg blir stor*» sier litt om deres tanker rundt å bruke Numicon-materiellet. Jeg vil trekke frem et par gullkorn i denne forbindelsen:

> **Gullkorn 1:** Det er pause og jeg har gått ut av rommet. Kamera står fortsatt på. Elevene leker seg og bygger med Numiconbrikkene, slik som de alltid får gjøre når det er pause. Lars: *Jeg vil bli matteproff når jeg blir stor.* Emma: *Skulle ikke du bli detektiv da?* Lars: *Jo. Men de må jo lære seg å telle de og! Du må være god til å telle hvis du skal bli en god detektiv*.
> **Gullkorn 2**: Jeg: *Da har vi bare ei lita tid igjen før friminutt.* Sebastian: *What? Går det så fort?* Jeg: *Det går fort sjø.* Sebastian: *Okey, jeg <u>elsker</u> dette*! Lars: *Jeg og! Har lyst til å holde på med dette hver eneste dag.*

Ved en indre motivasjon er interessen for aktiviteten genuin og gleden ligger i selve aktiviteten som utføres. For at en elev skal bli indre motivert beskrives det av Deci og Ryan (2002) tre basisbehov. *Behov for tilhørighet* handler om å føle seg inkludert, likt og godtatt. For å skape tilhørighet ga vi først forskningsgruppa et navn; *Numiconklubben*. Vi innførte også et rop som vi gjennomførte etter hver økt, der alle la hendene oppå hverandre og ropte «ååå Numiconklubben!». Deretter takket vi hverandre for innsatsen ved å ta en «high five». Jeg mener dette var med på å gi elevene en følelse av å være delaktig i noe spesielt. De var de tre heldige utvalgte som fikk være med på forskningsprosjektet, noe som ga motivasjon i seg selv.

For å føle tilhørighet til gruppa, er det like viktig at elevene føler seg trygge, både på hverandre og på meg som voksenperson. Det var viktig for forskningen at alle ville bidra med sine tanker og refleksjoner i gruppa. I undervisningsøktene ble det derfor sterkt vektlagt at ingen skulle bli avbrutt når de forklarte hvordan de hadde tenkt og at alle skulle få positiv respons uansett hvor mye eller lite de hadde å komme med. Dette mener jeg vil være med på å skape en trygghetsramme, der terskelen for å komme med egne tanker omkring oppgaven vil være lav. Dersom elevene føler seg trygge i læringsmiljøet, er sannsynligheten desto større for at de faktisk lærer.

Behov for autonomistøtte og selvbestemmelse handler om elevenes ønske om medbestemmelse på de oppgavene som skal utføres, for å opprettholde indre motivasjon. I gruppeøktene var det stort sett jeg som bestemte hvilke aktiviteter som skulle gjennomføres, og det var liten åpning for medbestemmelse. Jeg ser i etterkant at jeg godt kunne gitt elevene enda friere tøyler til å eksperimentere med Numiconbrikkene på deres eget initiativ. Selvbestemmelse trenger ikke nødvendigvis å bety at elevene skal få være med på å bestemme alt, men at de skal ha en viss fornemmelse av at deres meninger og ønsker blir tatt med i betraktningen. Selv om det var jeg som bestemte hvilke aktiviteter/oppgaver som skulle gjøres, var måten elevene utførte det på, helt opp til dem. Elevene ble oppfordret til å selv komme frem til gode løsninger. De hadde dermed en viss form for selvbestemmelse og kontroll. Deci og Ryan (2002) sier at elevene får en følelse av å ha større kontroll og ansvar i egen læring når de får være med å bestemme, noe som kan øke deres nysgjerrighet og ønske om nye utfordringer.

Behov for kompetanse handler om elevenes selvsikkerhet og tro på egne evner. Glasersfeld (1995) poengterer at gleden ved å mestre en oppgave er mye større dersom eleven selv oppdager løsningen, utarbeider den og produserer et resultat som hun forstår og godkjenner. Når eleven forstår logikken bak oppgaven og skaffer seg innsikt i hvorfor et svar er riktig, vil eleven få en følelse av kompetanse og evne. Eksemplet nedenfor viser hvordan Emma prøver seg frem for å konstruere en forståelse av tierens størrelse og funksjon.

> Emma: *10 er egentlig 0. 9 er det høyeste tallet i verden, for etter det starter vi på 0 igjen. Så 10 er egentlig bare et ett-tall, for null er ingenting.* Jeg forklarer henne at ett-tallet foran null ikke betyr 1, men en tiermengde. Det betyr det samme som en blå brikke, en 10er brikke. Jeg sier videre at vi kan ha 2 tiere, 3 tiere osv. Emma: *Ett tallet betyr egentlig en tier og null tallet betyr ingen.* Jeg: *Ja, det betyr at det er 1 på tierplassen og 0 på enerplassen* (viser på tallkortet til 10) Emma: *så hvis jeg tar pluss 8, kan jeg da bytte ut 0 med 8*? Jeg: *Ja, og da blir det?* Emma: *18*? Det går opp et lys for henne. Emma*: å da kommer vi nesten til… hvis det står et 2 tall der så blir det 20. og hvis vi plusser på 8 der…* Jeg: *Ja, hva blir det?* Emma tenker litt, før hun nærmest roper ut 28. Jeg: *Flott*! Emma: *Jeg synes dette var artig!*

Her ligger gleden i det å oppdage sammenhengen selv. Emma gir uttrykk for at hun oppriktig føler at hun har lært seg noe viktig her, og at det var hun selv som oppdaget denne sammenhengen (med litt veiledning). Glasersfeld (1995) sier at dette gir en tro på egne ferdigheter som er mye sterkere og mer motiverende enn ved en ytre forsterking.

Pedagogen bør legge til rette for indre motivasjon og glede der elevene får bygge opp sin egen forståelse. Dette vil være verdifull for holdningene til matematikkfaget, samtidig som det vil gi en større mulighet for å oppnå en følelse av mestring, noe som videre skaper en plattform for ny læring (Holm, 2002). Som Glasersfeld (1995) poengterer, skapes en indre lyst til å lære gjennom å konstruere egen kunnskap og oppdage nye elementer i matematikken, noe som er selve kjernen i det jeg beskriver som en dialogbasert undervisning med Numicons strukturerte mengder.

4.4.4 Pedagogens rolle

Kvaliteten ved innlæringa og pedagogens kompetanse rundt strategiutvikling, vil være en betydelig faktor for utvikling av funksjonell tallforståelse. Ved en dialogbasert undervisningsstil er pedagogen et av de viktigste redskapene. Dermed er det også her den største utfordringen ligger. Pedagogen skal ha oversikt over hvilke utfordringer elevene står overfor og fungere som et støttende stillas, der hun ved å stille assisterende spørsmål skal veilede elevene uten at hun kommer i veien for deres tankeprosess og refleksjon. Det kommer frem i Djupedals-utvalget at overflatelæringen i den norske skolen delvis skyldes pedagogenes måte å stille spørsmål på. Det stilles ofte enkle fakta-spørsmål som kan besvares uten videre refleksjon (NOU 2015:8, 2015). Assisterende spørsmålsformulering er ment som en hjelp for å få elevene til å tenke videre når de står fast. En slik spørsmålsformulering stimulerer til refleksjon, samtidig som elevene selv kommer frem til ulike måter å løse oppgaven på. Det å kunne stille slike spørsmål effektivt og uten større overveielser vil stille krav til pedagogisk erfaring.

Å vite når du kan bryte inn og hva man kan si uten å ødelegge prosessen, er noe jeg fant spesielt utfordrende i deler av undervisningsopplegget. Spesielt vanskelig var dette i økt 6, da jeg begynte å bli stresset for alt vi skulle rekke. Etter å ha analysert video av økten ser jeg hvordan dette påvirket undervisningen. Mitt jag etter å komme videre skapte forvirring og stresset elevene, samtidig som jeg ikke ga de nok tid til å oppdage sammenhengene selv. Jeg var mye raskere til å komme med hint og forslag enn jeg var i begynnelsen. Jeg mener dette er en viktig observasjon. Mye av utfordringene til lærerne er nettopp dette stresset og jaget om at man skal komme videre. Et press på at elevene skal ha lært en viss mengde innen et bestemt tidsrom. Dette kan føre til at man gjør elevene noen bjørnetjenester, i beste mening, men dog ikke til elevenes beste med hensyn på forståelse. Dette er med på å forsterke denne overflatelæringa som dagens matematikkopplæring bærer preg av og står i strid med det Djupedals-utvalget nå har sagt om viktigheten med dybdelæring (NOU 2015:8, 2015).

Med Numicon-materiellet følger det med mange «ferdiglagede» undervisningsøkter ved de medfølgende aktivitetskortene. Disse øktene er laget med tanke på elevenes naturlige progresjon og er designet for å bygge opp elevenes ferdigheter i små steg, og dermed redusere sannsynligheten for overflatelæring ved å gå for raskt frem. Jeg vil likevel poengtere at disse aktivitetskortene ikke skal følges slavisk, men være til inspirasjon. Pedagogen må selv komme opp med gode oppgaver som hun mener kan stimulere til økt tallforståelse gjennom refleksjon og diskusjon. Dette er både tidkrevende og faglig utfordrende. For at pedagogen skal kunne legge til rette for utvikling av tallforståelse trenger hun først en god faglig innsikt i hva det innebærer å ha en funksjonell tallforståelse. Hun bør også ha kunnskap om ulike strategier, og hva som gjør disse anvendbare eller ikke anvendbare med tanke på den proseptuelle kløften. Videre bør hun ha god kjennskap til generelle læringsteorier og matematikkdidaktikk, samt god kunnskap om elever i matematikkvansker, og en oversikt over hva som er spesielt utfordrende for disse elevene. Generelt har pedagogen en viktig rolle med tanke på å legge til rette for eksperimentering og oppdagelse i samhandling med andre, som vil stimulere elevene til både korrigering og utvikling av egen tallforståelse.

5. Oppsummerende drøfting

Utgangspunktet for denne studien var et ønske om å finne ut hvordan vi kan hjelpe elever som mislykkes med matematikk til å utvikle en bedre og mer funksjonell tallforståelse. Ginsburg (1997 i Ostad, 2008) hevder at den mest sannsynlige forklaringen på at elever i matematikkvansker mislykkes i faget, kommer som resultat av skolens undervisningsopplegg. Det er derfor mulig å tenke at undervisningsopplegget også kan være den faktoren som får elevene ut av matematikkvansker. Jeg har gjennomført et undervisningsopplegg med fokus på bruk av strukturerte mengder i en dialogbasert undervisning. Forskningsobjektene har vært tre elever i tredje klasse som syntes matematikk var vanskelig og som har hatt et brudd med den jevne faglige utviklingen som forventes ut i fra alder. Resultatene fra pretesten indikerte at ingen av elevene hadde utviklet en konseptuell forståelse av mengdene.

Ved å sammenligne resultatene fra pretest og posttest ser vi at elevene har gått fra å ha en overvekt av prosessorientert kunnskap, der de stort sett benytter seg av tellestrategier på nivå 1 og 2, til å benytte strategier som viser til en større begrepsmessig forståelse og innsikt (bruk av utledet svar). To av elevene er på god vei mot å utvikle en funksjonell tallforståelse i tallområdet 0-20. Dette viser seg blant annet ved elevenes bruk av utledet svar og bruk av strukturerte mengder, både som konkreter og som mentale bilder. Den tredje eleven viser ikke den samme begrepsmessige innsikten som de andre og benytter seg fortsatt av en overvekt av strategien kjent tallfakta. Jeg vil likevel poengtere at denne eleven også har hatt fremgang i sin strategibruk. Ved posttesten benytter alle elevene en betydelig større andel utledet svar enn ved pretesten. Med disse resultatene vil jeg si at et dialogbasert undervisningsopplegg med Numicons strukturerte mengder har hatt en positiv effekt på elevenes tallforståelse.

I min problemstilling ønsker jeg å finne ut *hvordan* en dialogbasert undervisning på ti økter, med fokus på Numicons strukturerte mengder, kan bidra til utvikling av en funksjonell tallforståelse. Det er derfor nødvendig å se på *hvorfor* jeg har fått de resultatene jeg har fått. Først vil det være viktig å poengtere at det ikke er Numicon i seg selv som har ført til utvikling. Numicon er kun et konkretiseringsmateriell, et verktøy som på lik linje med all annen læring avhenger av hvor godt det legges til rette for at eleven kan konstruere og rekonstruere egen forståelse. Elevene må være aktive deltakere i egen læringsprosess. Det er når de forstår sammenhengen mellom handlingen og resultatet, at de lærer noe. Det vil likevel ikke være nok å la elevene bruke konkretiseringsmateriellet på egenhånd. Dersom man plasserer elevene på hver sin pult med disse brikkene er sannsynligheten stor for at Numicon kun vil fungere som et manipuleringsverktøy som hjelper dem med å gjøre utregninger de ikke har noen begrepsmessig forståelse for. En slik bruk av Numicon vil kunne være både hemmende og negativ med tanke på elevens muligheter til å utvikle gode strategier bygget på en godt utviklet tallforståelse.

De faktorene jeg har lagt til grunn for *hvorfor* dette undervisningopplegget har fungert, er elevenes evne til å gjenkjenne og benytte seg av mønster, bruk av språk og samhandling, betydningen av indre motivasjon og mestring, samt pedagogens rolle og betydning i dette arbeidet. For å hjelpe elevene over den proseptuelle kløften er det viktig at deres strategier bygger på en balanse mellom kunnskap om prosess og konsept. Mange elever i matematikkvansker mangler kunnskap om konseptet. Mønsteret i Numiconbrikkene kan hjelpe elevene å oppdage hvilke delmengder et tall består av, samt bygge opp kunnskapen om del-del-hel relasjon, som fører til en økt konseptuell kunnskap. Mønsteret i Numiconbrikkene gjør det også lettere å finne sammenhenger, likheter og forskjeller mellom tallene og bruke denne kunnskapen i oppgaveløsning. Som Emma poengterer ved posttesten; *Når jeg bruker brikkene kan jeg se hva som er forskjellen mellom dem og da trenger jeg ikke å telle hvor mange det er.*

En dialogbasert undervisning med Numicon vil virke positivt både på elevenes matematikkforståelse og på holdninger til faget. Samtidig bygger den opp rundt felleskapslæring og tar på denne måten et oppgjør med den individpregede undervisningen som matematikkfaget i stor grad preges av. Ved samhandling må elevene i større grad kunne sette ord på hva de tenker og forstår, noe som øker deres metakognitive og språklige egenskaper, samtidig som det øker muligheten for større forståelse rundt strategibruken. Videre vil elevene oppleve at det er ulike måter man kan tenke på for å komme frem til samme svar. Dette vil i større grad oppfordre til fleksibilitet i valg av strategier, samtidig som det vil bidra til å endre oppfatningen av at det kun finnes en riktig fremgangsmåte. Dialogbasert undervisning med Numicon kan dermed knyttes til John Deweys velkjente teori om *learning by doing, and reflecting*.

Snorre Ostad (2008) sier at elever i matematikkvansker er i ferd med å skli inn i et mønster preget av primitive strategier og strategirigiditet allerede i løpet av første skoleår. Det vil derfor være viktig å komme tidlig i gang med tiltak som kan redusere muligheten for at dette skjer. Jeg mener skolen bør ha et større fokus på strukturerte mengder i arbeid med tallforståelse i begynneropplæringen. Dette vil kunne hjelpe flere elever til å skape en forståelse av konseptet, slik at deres strategivalg baserer seg både på kunnskap som ferdighet og innsikt. Jeg mener en dialogbasert undervisning med Numicons strukturerte mengder kan fungere som et systemrettet tiltak i matematikk. Vi må bryte med den monologiske formidlingstradisjonen som matematikkundervisningen lenge har vært preget av, og heller engasjere elevene til eksperimentering, drøfting og resonnering sammen med andre. Tanken er ikke at den skal ta over for all annen matematikkundervisning, men være en variasjon som blant annet tar sikte på å utvikle en rikere strategi-tenkning og tallforståelse, og på denne måten redusere antall elever som blir sittende igjen på feil side av den proseptuelle kløften.

Referanseliste

- Akselsdotter, M. (2009). Hvordan bidra til økt motivasjon i matematikkfaget?: Elever med særskilte opplæringsbehov i matematikk. *Spesialpedagogikk* (7), 30-33.
- Atkinson, R., Tacon, R. & Wing, T. (2005). *Numicon. Sett 1: Lærerveiledning*. Søgne: Numicon Ltd.
- Atkinson, R., Tacon, R. & Wing, T. (2009). *Numicon. Sett 2: Lærerveiledning*. Søgne: Numicon Ltd.
- Bjørn. C. (2015). *Den umulige matteoppgaven.* Hentet 08.10.15, fra http://www.vg.no/nyheter/meninger/skole-og-utdanning/den-umulige-matteoppgaven/a/23500087/
- Breiteig, T. & Venheim, R. (2003). *Matematikk for lærere 2.* Oslo: Universitetsforlaget.
- Brissiaud, R. (1992). A tool for number construction: Finger symbol set. I J. Bideaud, C. Meljac & J. Fischer (red.), *Pathways to number. Children's developing numerical abilities* (s. 41–65). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Daland, E., Dalvang, T. Davidsen, H. S., Andersen, S.W., & Wischmann, H. (2012). *Visuell og konkret matematikk: Numicon i matematiske læringssituasjoner* [DVD]. Kristiansand: Sørlandet kompetansesenter.
- Deci, E.L. (1996). Self-determined motivation and educational achievement. I Gjesme, T. & Nygård, R. (red.) *Advances in motivation*. Oslo: Scandinavian University Press.
- Deci, E.L. & Ryan, R. M. (2002). *Handbook of Self-Determination Research.* New York: The University of Rochester Press.
- Dysthe, O., Bernhardt, N., & Esbjørn, L. (2012). *Dialogbasert undervisning: kunstmuseet som læringsrom.* Bergen: Fagbokforlaget.
- Ernest, P. (1998). Vad er konstruktivism? I Engstrøm, A. (red.), *Matematik och reflektion: en introduktion till konstruktivismen inom matematikdidaktiken* (s. 21-33). Lund: Studentlitteratur.
- Frostad, P. (1995). Konkretiseringsmateriell – veien til matematikkinnsikt? I *Tangenten 6* (2), 9-18.
- Frostad, P. (1998). *Matematikkprestasjoner og matematikkinnsikt hos hørselshemmede grunnskoleelever* (Dr.Polit.-avhandling, Pedagogisk institutt, Fakultet for samfunnsvitenskap og teknologiledelse ved Norges-Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet). Trondheim: NTNU.

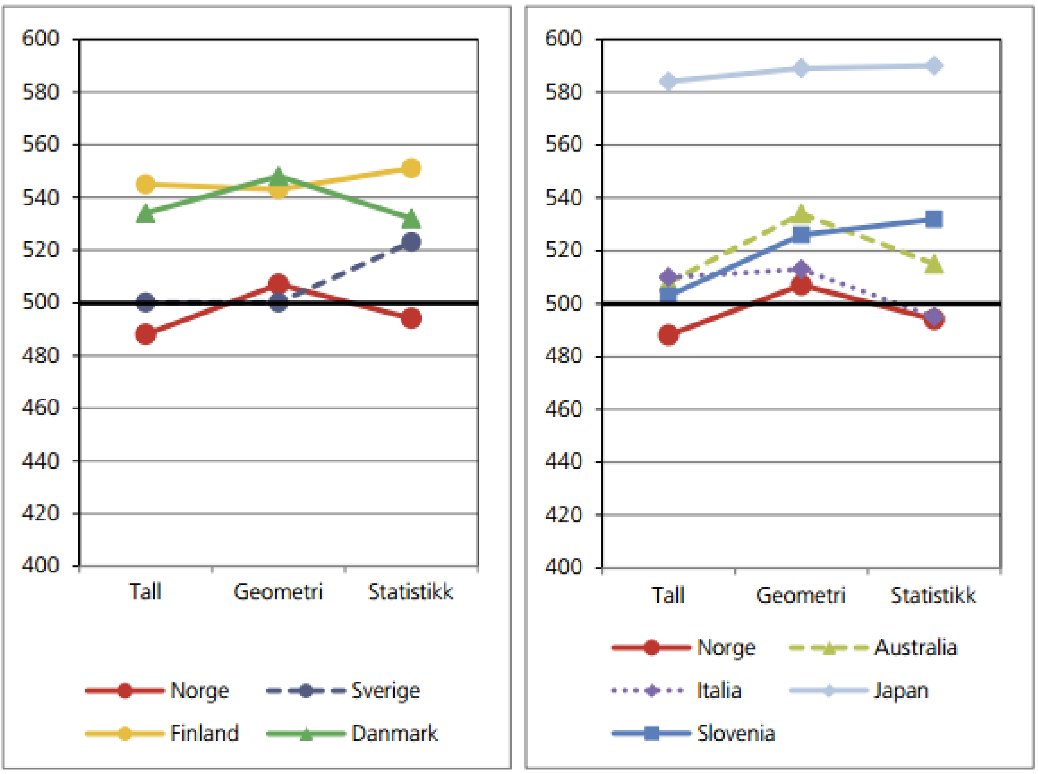
- Frostad, P. (2005). Grunnleggende ferdigheter i matematikk. I H. Sigmindsson & M. Haga (red.), *Ferdighetsutvikling: Utvikling av grunnleggende ferdigheter hos barn.* (s. 118–141). Oslo: Universitetsforlaget.
- Glasersfeld, E. V. (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning.* London: Falmer Press.
- Gray, E. & Tall, D. O. (1994). *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic.* Hentet 04.12.15, fra http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf
- Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen T., Hole, A., Aslaksen H. & Borge, I.C. (2011) *Framgang, men langt fram: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011.* Hentet 22.02.16, fra http://www.timss.no/timss_2011_web.pdf
- Herland, E. (2007). Mestringsbasert tilrettelegging i matematikk for elever med sosioemosjonelle vansker og matematikkengstelse. I Johansen, L.Ø. (red.). *Mathematics teaching and inclusion: proceeding of the 3rd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics* (s. 149 – 157). Aalborg: Department of Admission Courses, Aalborg University.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I j. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1–23). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Holm, M. (2002). *Opplæring i matematikk: For elever med matematikkvansker og andre elever.* Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.
- Høines, M., J. (1998). *Begynneropplæringen: Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning* (2.utg.). Landås: Caspar Forlag AS.
- Imsen, G. (2005). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi.* Oslo: Universitetsforlaget.
- Johansson, M. (2009). Om lärorböcker och matematikundervisning. I Brandell, G., Grevholm, B., Wallby, K., Wallin, H. (red.) *Matematikdidaktiska frågor: - resultat från en forskarskola* (s. 56-72). Göteborg: Nationell Centum för Matematikutbildning vid Göteborg universitet.
- Kamii, C., Lewis, B.A. & Kirkland, L. (2001). Manipulatives: when are they useful? *Journal of Mathematical Behavior* (20), 21–31.

- Kleven, T.A. (2008). Validity and validation in qualitative and quantitative research. *Nordisk Pedagogik*, *28* (3), 219–233.
- Lund, T. & Haugen, R. (2006). *Forskningprosessen*. Oslo: Unipub AS.
- Lunde, O. (2000). Det multifunksjonelle læremidelet – en utopi eller en mulighet for elever med matematikkvansker? *Spesialpedagogikk* (9), 26-34.
- Lunde, O. (2003) Matematikkvansker som spesialpedagogisk tema. I *Nordisk tidsskrift for spesialpedagogikk*, *81* (3), 245-260.
- Lunde, O. (2005) Har eleven matematikkvansker – og hva skal vi gjøre for å oppnå mestring? *Artikkelsamling matematikkvansker: Læringsnettverk i matematikkvansker for skoler og PP-tjeneste i Trøndelag 2011-12*. Hentet 20.05.15, fra http://www.acm5.com/kompendier/artikkelsamling-matematikkvansker.pdf
- Lunde, O. (2010). *Hvorfor går tall i ball: matematikkvansker i et spesialpedagogisk fokus*. Bryne: Info Vest Forlag.
- Meld. St. 28 (2015–2016). (2016). *Fag – Fordypning – Forståelse — En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Hentet 20.04.16 fra: https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf
- NESH (u.d.). *De nasjonale forskningsetiske komiteene*. Hentet 25.03.16 fra: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/B-Hensyn-til-personer-5---19/
- Neuman, D. (1993). *Räknefärdighetens rötter*. Helsingborg: Schmidts Boktryckeri AB.
- NOU 2015: 8 *Fremtidens skole - Fornyelse av fag og kompetanser*. Oslo: Departementenes sikkerhets- og serviceorganisasjon, Informasjonsforvaltning.
- Ostad, S. A. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring* : *med fokus på elever med matematikkvansker.* Trondheim: Læreboka Forlag AS.
- Ostad, S. A. (2009). Matematikkvansker i lys av kognitive dimensjoner. *Spesialpedagogikk* (7), 4-13.
- Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematic.* Harmondsworth, Penguin
- Sørlandet kompetansesenter (2007). *Definisjon av matematikkvansker.* Hentet 10.10.15 fra http://www.matematikk.org/artikkel/vis.html?tid=65340&within_tid=65339
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (learning in doing: Social, cognitive and computational perspectives)* (Utkast 2008 utg.). University of Cambridge: Cambridge University Press.

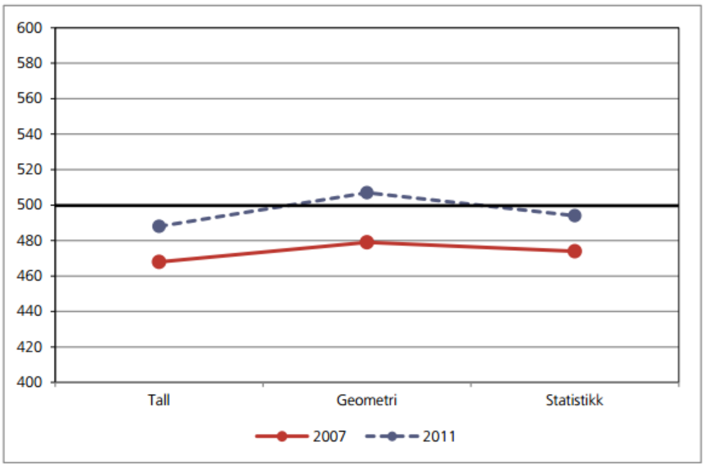
- Tessem, L. B. (2009) *Fulgte lærere med spionkamera.* Hentet 20.03.16 fra: http://www.aftenposten.no/nyheter/iriks/Fulgte-mattelarere-med-spionkamera-5558830.html
- Wing, T. & Tacon, R. (2007). *Teaching number skills and concepts with Numicon materials*. Hentet 04.10.15, fra https://www.down-syndrome.org/practice/2018/practice-2018.pdf

VEDLEGG 1A – FIGURER FRA TIMSS

Figur 1, hentet fra TIMSS 2011

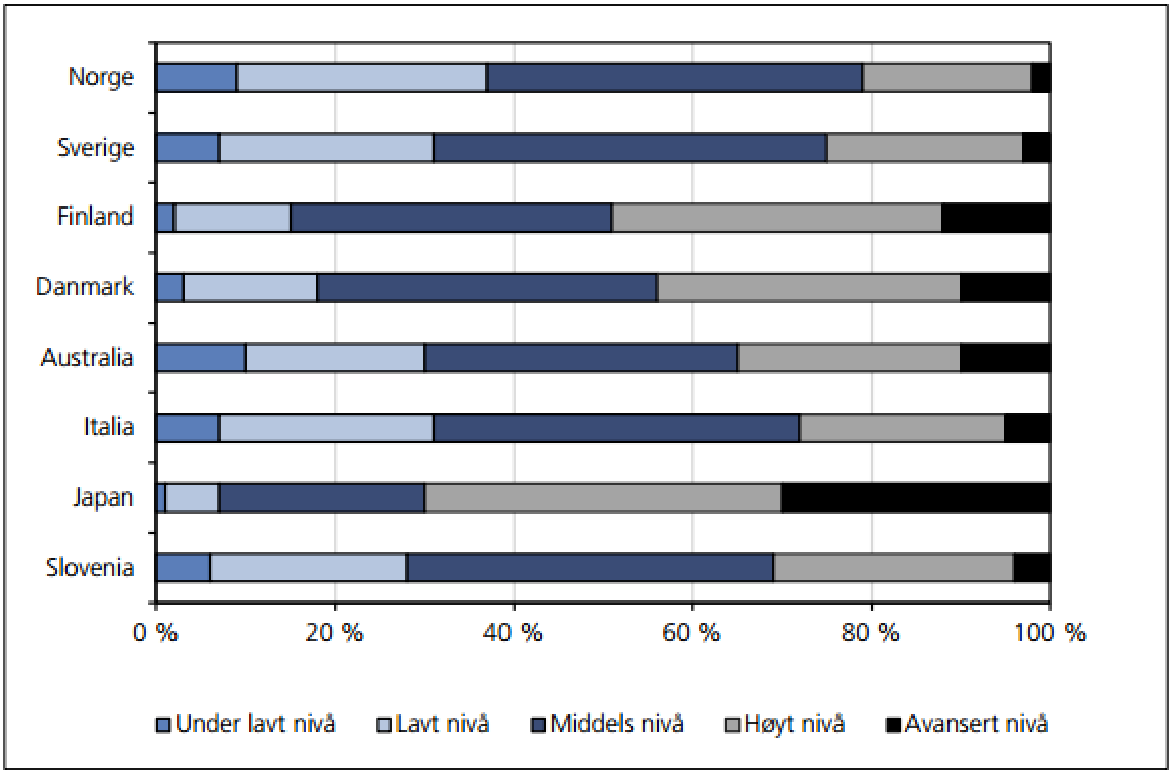


Figur 3.3 Norges prestasjoner i emneområder i matematikk på 4. trinn i 2011 sammenlignet med henholdsvis nordiske land og referanseland. Skalamidtpunktet på 500 er markert i figuren.



Figur 3.4 Trender i emneområder i matematikk på 4. trinn for norske elever. Skalamidtpunktet på 500 er markert i figuren.

Figur 2, hentet fra TIMSS 2011

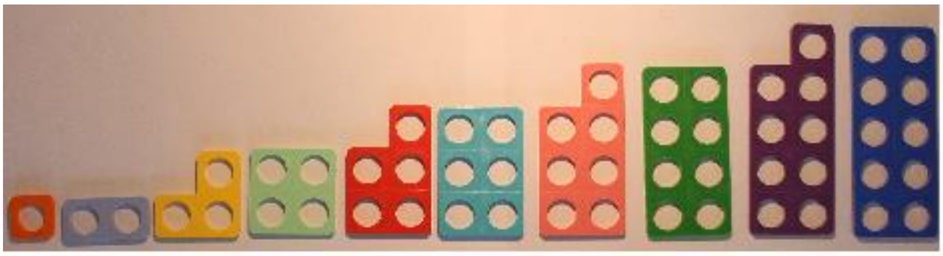


Figur 3.7 Fordeling av elever på kompetansenivåer i matematikk på 4. trinn i 2011 for Norge, nordiske land og referanseland.

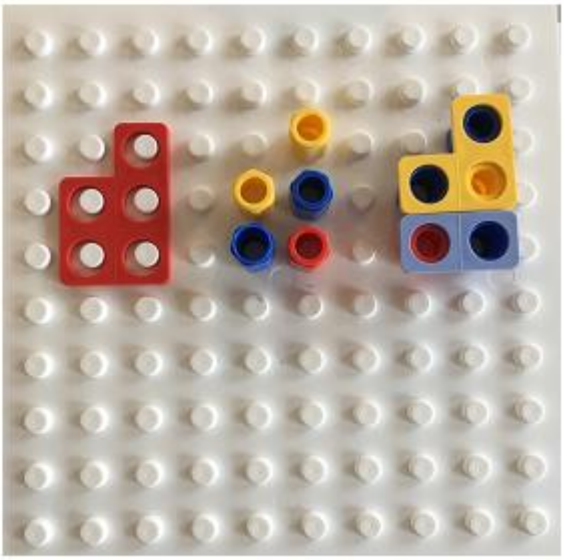
Figurer er hentet 22.02.16, fra http://www.timss.no/timss_2011_web.pdf

VEDLEGG 1B – FIGURER FRA NUMICON

Figurer fra Numicon



Numiconbrikkene



Grunnbrett med numiconbrikker og plugger

Følepose med plugger

Tallkort

Spinnere

VEDLEGG 2 – INFORMASJONSSKRIV OG SAMTYKKESKJEMA

Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Til elev og foresatte

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Tallforståelse gjennom fokus på strukturerte mengder.
- En studie om bruk av Numicon som veiledet matematikk.»

Jeg er en masterstudent ved NTNU som skal prøve ut et nytt materiale i matematikk og trenger i denne forbindelse hjelp fra noen flittige elever som ønsker å lære seg matematikk på en ny og spennende måte. Jeg er tidligere spesialpedagog og arbeider nå i PP-tjenesten på Levanger. Materialet jeg tenker å bruke heter Numicon og er et anerkjent konkretiseringsmateriale som opprinnelig kommer fra England. Numicon består av brikker i ulike størrelser og farger. Det jeg ønsker å undersøke er om dette materiale vil hjelpe elevene med den grunnleggende mengde- og tallforståelsen og samtidig legge til rette for strategiutvikling i addisjon og subtraksjon.

Hva innebærer deltakelse i denne studien?

Prosjektet vil gjennomføres på et grupperom på *anonymisert* skole, 1-2 dobbeltimer per uke på tilsammen ti økter. For å kunne analysere prosjektet må det filmes. Filmen vil kun bli sett av meg, og vil slettes etter masteroppgaven er ferdigskrevet, i tråd med forskningsetiske retningslinjer. Både elever og skole vil bli anonymisert i oppgaven og alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Deltagelse i studien er frivillig, og samtykket kan trekkes tilbake når som helst. Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS.

Jeg håper at du/ditt barn ønsker å være med å prøve noe nytt og spennende sammen med meg. Dersom det skulle være noen spørsmål, ta gjerne kontakt med meg på telefon 98.....4, eller via mail; line.halland.gresdahl@levanger.kommune.no

Med vennlig hilsen
Line Halland Gresdahl

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og jeg vet at jeg når som helt kan trekke meg. Jeg er villig til å delta

(Signert av eleven, dato)

Jeg har lest informasjon om studien, og samtykker herved i at mitt barn kan delta i studien.

(Signert av foresatt, dato)

VEDLEGG 3 – OPPGAVER VED PRETEST OG POSTEST

Addisjon:	Telle alt og forfra igjen	Telle alt	Telle videre	Min-variant	Tegne varianten	Tellepunk i tallsymbol	Andre telle-varianter	Verbal telling	Vet svaret	Avledet variant 1	Avledet variant 2	Merknad
6+4												
2+7												
4+6												
7+3												
6+6												
7+5												
8+5												
3+8												
7+9												
9+8												

Subtraksjon:	Telle alt og forfra igjen	Tilvekst-variant	Minking - variant	Tilvekst/ Minking	Tegnevariant	Tellepunkt i tallsymbol	Andre telle-varianter	Verbal telling	Vet svaret	Avledet variant 1	Avledet variant 2	Merknad
10-3												
5-2												
14-4												
5-3												
6-6												
12-3												
13-9												
7-3												
8-4												
18-12												

VEDLEGG 4 – UTVALGTE OPPGAVER OG SITUASJONER FRA GRUPPEØKT 1-10

Utvalgte oppgaver og situasjoner fra gruppeøkt 1-10

ØKT 1

Oppgave: Se og ta på brikkene. Snakk med hverandre om hva dere ser dere?

Sebastian*: Oi, det var fine farger*. Lars: *Kult!* Emma: *Dette ser artig ut!* Lars: *Jeg vil bygge tårn*. Emma: *Vi kaller dette for et rektangel, der er en 2er brikke og der er en 4er brikke*. Lars tar opp den blå brikken og teller hullene; *denne er 10*. Emma teller hullene på den lilla brikken: *Her er 9er brikken*. Elevene begynner å gi navn på alle brikkene.

Oppgave: Hent en av hver brikke. Legg de i rekkefølge, den minste først og den største til slutt.

Emma legger den minste nederst og legger de andre brikkene i stigende rekkefølge oppå. Emma: *Jeg ble ferdig først*. Emma får beskjed om å legge de i rekkefølge etter hverandre slik som de andre to har gjort. Jeg: *Hva ser dere?* Emma: *Det er litt bølgete*. Sebastian: *Det er noe som stikker opp.* Emma: *Det er forskjellige farger.* Jeg: *Hva er det som skjer fra den første til den andre*? Sebastian: *Tallene blir større*. Lars: *De blir en mer større hele veien*. Emma: *Hvis vi legger de oppå hverandre så ser vi at det blir en mer. (…) De dekker hullene til alle bortsett fra en*. Sebastian: *Hvis vi legger den oppå den* (3 på 5) *så kan vi legge 2ern på også. Da dekker vi alle hullene.*

Oppgave: Kims lek

Sebastian tar bort 6er brikken til Emma mens Emma lukker øynene. Han skyver så alle brikkene sammen slik at hun ikke ser hvor brikke som ble tatt bort var. Emma har vanskelig for å finne ut hvem som mangler og ser over på guttenes brikker. Guttene dekker til brikkene sine. Jeg sier at hun må prøve å se det på sine egne brikker. Emma begynner så å telle hullene til alle brikkene fra første brikke. Det er først når hun teller 7 etter å ha telt 5 at hun vet hvilken brikke som mangler. Jeg: Hvordan kan vi se dette uten å telle? Sebastian: *Ja, hvis vi legger to og to brikker oppå hverandre. Legger vi den på den* (3 på 4) *blir det en igjen. Men legger vi den på den* (5 på 7) *blir det 2 hull igjen. Da ser vi at 6ern mangler.* Jeg: *Andre måter vi kan se det på da?* Emma: *Jeg så det på fargene.* Lars: *Jeg ser det på tallene*. Sebastian: *Jeg så det på høyden*.

Oppgave: Velg en brikke og finn «nabotallene»

Sebastian velger tallet 10. Sebastian: *Har vi noe tall som er større enn 10 her da?* Jeg: *Du får ta det som en utfordring.* Sebastian starter med en 9er og legger en 2er over, før han bytter det ut med en 10er og en 1er. (…) Sebastian legger 9, 2 og 9 sammen; Dette blir 20. Jeg: Hvordan ser du det? Sebastian: Jeg bare deler den i to (2er brikken) så er det 10 på hver. Emma: Ja fordi 20 er jo halvparten til 10.

Oppgave: Se for deg en brikke og lag mønsteret med pluggene. La de andre gjette hvilken brikke som passer (prøv å ikke tell)

Emma lager mønsteret til 7er brikken. Lars: Den er lett. Det er 7. (…) Vi ser at det er 6 der og en mer er 7.

Utfordring: Gjør det samme, men nå må det brukes to brikker.

Lars lagde tallet 9. Sebastian: *Vi kan ta 4+4+1*. Jeg: *Bra forslag, men prøv med bare to brikker*. Emma: *Vi kan ta 5 og 2. Nei 6 og 4 og 1.* Sebastian: *Vi kan bruke 7 og 2*. Sebastian setter på 2er brikken. Emma: *Men da får vi ikke plass til denne*. Sebastian snur brikken hennes og setter den på. Emma: *Å ja*.

VEDLEGG 4 – UTVALGTE OPPGAVER OG SITUASJONER FRA GRUPPEØKT 1-10

ØKT 2

Oppgave: Trekk et tall fra kortstokken (1-10) og finn tallbrikken i føleposen.

Lars trekker tallet 10. *10 er lett å finne, den er den største og lengste i posen.* Sebastian skal finne tallet 8. Han putter hånda i posen, leter litt rundt. Plukker først opp tallbrikken til 6, men legger den tilbake før den er helt opp av posen og finner den riktige tallbrikken. Sebastian: *jeg trakk egentlig 6, men den var lyseblå, så da la jeg den tilbake. Og så tenkte jeg at 8 var litt lik 6, bare at 8 er litt mer.* Emma trekker tallet 8. *Jeg må kjenne etter om det er en «durt» på den eller ikke. For det skal ikke være en durt på 8ern.* Etter elevene har trukket hver sin tallbrikke, legger jeg tallbrikkene ved siden av hverandre på grunnplata og spør hva de ser. Emma: *ingen har durt.* Sebastian: *Ja, det er akkurat som ei trapp, bare at det blir to mer.* Lars: *Alle er partall.* Jeg spør om de andre vet hva partall er. Emma og Sebastian er litt usikre. Jeg ber Lars forklare for de andre hva partall er. Lars: *partall er 2,4,6,8 og sånn. Ingen av partallene har sånn durt. Jeg: hva kan vi gjøre med partallene som vi ikke kan gjøre med oddetallene?* Sebastian*: Hvis det for eksempel er tallet 6 da, så kan jeg og Lars dele det sånn at det blir 3 på hver.* Sebastian viser frem 6er brikken og later som han skjærer den i to. Lars*: Ja, og da blir det like mange på begge.* Jeg spør Emma om 8 er et partall. Emma: *Ja, den har jo ikke durt.* Jeg tar frem tallbrikken til 9 og spør om dette er et partall. Emma: *Nei.* Jeg: *Hvorfor ikke?* Emma: *Fordi den har durt, og da vil den som får durten få mer, og da blir det ikke rettferdig.* Lars: *Alle med durt kalles for oddetall.* Emma: *Ja. Den og den og den er oddetall.* Hun peker på tallbrikkene til 3, 5 og 7. Sebastian: *Ja, og så ni også da.* Han ser på Lars og spør om enern også er et oddetall? Lars trekker på skuldrene. Emma: *Den har jo durt…*

Oppgave: Trekk et kort. Finn to brikker i føleposen som til sammen blir lik tallbrikken til det kortet (Tallbrikkene ligger i tillegg framfor elevene i rekkefølge, med tallkort under).

Sebastian trekker tallet 5 fra kortstokken. Han tar opp 5 fingre. Tar bort 3 fingre og sier 2 og 3. Finner så frem tallbrikken til 2 og 3*.* Lars skal finne to tallbrikker som til sammen blir 9. Han trekker 3er brikken og legger den tilbake igjen. Jeg spør om han kan bruk *3er brikken*? Lars henter en 9er brikke og legger 3er brikken oppå. Lars: *Nå mangler jeg bare 6*. Jeg: *Hvordan vet du det?* Lars: *Det ser jeg jo her,* han henter en 6er brikke og legger på 9er brikken. Emma trekker også tallet 5. Emma: *Ehm, hvor mange skal jeg ha?* De andre kommer med forslag 3 og 2 eller 4 og 1. Emma finner tallbrikken 3 i føleposen. Hun ser på den en stund, før hun spør om å få en 5er brikke. Hun legger 3er brikken på 5er brikken og ser med en gang at hun mangler 2.

Samtale og utforsking i gruppen: Hva betyr det at noe er likt?

Jeg starter med å spørre hva det betyr at noe er likt. Emma svarer at vi har lik farge på håret. Lars og Sebastian har lik bukse på seg. Jeg spør videre hva tegnet = betyr? Sebastian: *Den heter erlik.* Jeg: *Hva betyr erlik?* Sebastian: *Det betyr svaret.* De andre er enige i dette. Jeg legger frem tallbrikkene til 2, 3 og 5 og spør hvordan vi kan se at 2 og 3 er lik 5? Sebastian: *2+3 er jo 5.* Lars: *Vi ser jo at de blir like store da.* Han legger tallbrikken til 2 og 3 oppå tallbrikken til 5. *Jeg: JA, 2 og 3 er tilsammen lik som 5.* Sebastian vil prøve med 5 og 4 og legger tallbrikkene på plata. Sebastian: *4 og 5 er lik som…* (Han prøver først med tallbrikken til 7.) *Nei, det må bli 9*. Sebastian legger tallbrikken til 9 ved siden av og sier*; 4 og 5 er lik 9, og hvis jeg legger på en ener på 9, så er det likt som 10.* Lars velger 7 og 8 og legger de oppå hverandre. *7 og 8 er lik…* Han begynner å telle hullene i brikkene. Jeg stopper han og spør om det er andre måter å finne svaret enn å telle hullene? Sebastian gir han en 10er brikke og sier at han kan starte med den. Lars legger tallbrikken til 10 ved siden av. Han strekker seg mot tallbrikken til 3. Sebastian peker forsiktig på 5. Lars prøver med 5, men synes ikke den passer og legger den tilbake. Sebastian: *Joda, den går den sjø.* Han forklarer at 10ern er med på de to nederste brikkene på 7ern, så da mangler det bare 5. Lars prøver en gang til, men denne gangen legger han brikkene oppå i stedet for ved siden av og ser at det stemmer. *Jeg: Hva er 7 og 8 lik da?* Lars: *15.* Sebastian: *Bestandig når noe er større enn 10, så må vi ha med 10, for da blir det lettere.* På slutten av oppgaven spør jeg hva de ble enige om at *er lik* betydde? Sebastian: *Det samme som.* Lars: *At noe er lik som noe annet. Like stort.* Emma: *Det betyr ikke bare svaret.*

Gullkorn: Det er pause og jeg har gått ut av rommet. Kamera står fortsatt på. Elevene leker seg og bygger med Numiconbrikkene, slik som de alltid får gjøre når det er pause. Lars: *Jeg vil bli matteproff når jeg blir stor*. Emma: *Skulle ikke du bli detektiv da?* Lars: *Jo. Men de må jo lære seg å telle de og! Du må være god til å telle hvis du skal bli en god detektiv*.

Samtale om pluss og minus: Jeg spør Emma hva 2 pluss 3 er. Emma: *eh, 2 pluss 3. Altså skal jeg ta bort?* Jeg spør hva pluss betyr og Emma svarer at hun tror det betyr at vi skal ta på. Jeg spør deretter hva 3 og 2 er. Da svarer Emma automatisk 5, uten å tenke seg om. Jeg: *Ja, så hva er 3 pluss 2 da?* Emma tenker seg om lenge, før hun tar opp fingrene og begynner å telle. Hun teller først til 5 og så videre til 8, som er svaret hennes. Vi fortsetter å arbeide med pluss og minus i gruppen med tallene 2, 3 og 5. Etter 10 min får Emma samme oppgave, 3 pluss 2. Jeg: *Hva er 3 pluss 2?* Emma: *2.* Jeg: Hvordan tenkte du? Emma: *At jeg skal ta bort 3?* Jeg: *Husker du hva pluss betyr?* Emma: *Er det dette tegnet (*lager et pluss tegn med to plugger*) eller et slikt tegn (*lager et minus tegn av en plugg*)?* Jeg: *Hva tror du selv?* Emma: *Eh… At vi tar på. Skal vi ta på 3 igjen da*? Jeg ser at Emma begynner å bli forvirret og jeg finner frem tallbrikkene for henne. Jeg: *Dette er to og tre. Kan vi si det på en annen måte?* Emma: *Ja, det er 5.* Jeg: *2 og 3 er 5 ja. Så hvis jeg sier pluss i stedet for og. Hva blir 3 pluss 2 da?* Emma: *Eh, 5?* Jeg: *Bra! Synes du det er vanskeligere når jeg sier pluss?* Emma: *Ja. For jeg blir litt usikker på hvordan pluss ser ut.*

ØKT 3

Oppgave: Legger tallbrikkene 6-10 på rekke. Trekk en brikke. Hva skal til for at denne brikken skal bli lik 6? Sebastian: *Nå må det bli minus. Jeg: Hvorfor det? Sebastian For når noe stort skal bli mindre, bruker vi minus.*

Oppgave: Trekk en tallbrikke (1-10) Hva skal til for at den blir lik 6?

Emma trekker 4. Emma: *Jeg har 4 og så tar jeg pluss to, det blir 6. Og så går det også an å ta 2 pluss 4, det er også 6. Og hvis vi tar bort 4 så blir det 2, og hvis vi tar bort 2 så blir det 4. (…) De er tallpar sjø.*

Oppgave: Trekk kort 1-10. Ikke si hva du har, men hva som skal til for at det blir likt 6.

Sebastian: *For at det skal bli likt 6, må jeg skjære av en durt.* Emma svarer uten nøling*: Han har 7!*

Oppgave: samarbeid om to tallbrikker som til sammen blir 7.

Elevene samarbeider godt denne gangen. De fordeler oppgaver, snakker sammen og gir positive tilbakemeldinger til hverandre. Sebastian hjelper Emma når hun skal skrive ned regnestykkene. Sebastian*: Da kan du ta minus, det er sånn strek som dette* (Sebastian lager tegnet for minus med hånda). *Det betyr at vi tar bort 7.*

Emma: *skal vi se om vi finner flere med sånn (*lager minustegn med hånda*)?* Lars*: Minus?* Emma: *Ja. Da kan vi jo bruke 5 og 2 da. 5 minus 2.* Sebastian: *Men 5 minus 2 er jo 3.* Lars: *Vi må ha 7 minus noe.* Sebastian: *7 minus 2 kanskje?* Emma: *Det blir 5.*

Sebastian*: Jeg tenker bestandig på Numiconbrikkene når jeg arbeider og holder på med matte. For de er mye enklere, og så tenker jeg sånn at jeg ser… Når jeg lukker øynene så ser jeg alle brikkene for meg, og da blir det lettere å få til oppgaven, selv om jeg ikke har med meg brikkene.*

Emma løser 6-1 og forklarer slik: *Jeg lukka øynene og så for meg 6er brikken og så reiv jeg bort en og da ble det en 5er brikke.*

VEDLEGG 4 – UTVALGTE OPPGAVER OG SITUASJONER FRA GRUPPEØKT 1-10

ØKT 4

Oppgave: Trekk et kort, uten å si hva du har. Hva må til for at dette tallet skal bli lik 8?

Gullkorn: *Jeg forklarer oppgaven.* Emma: *Ja! Den her liker jeg. Det er jo som en lek.*

Emma trekker tallet 2. Hun ser lenge på kortet og spør om å få en 8er brikke. Så sier hun: *Hvis jeg skal få like mange som 8, mangler jeg tre 2er brikker.* Lars: *Eh, du har 8?* Emma*: Nei.* Sebastian: *Du har 6.* Emma: *Jeg må ha tre 2er brikker for at det skal bli 8.* Sebastian og Lars i kor: *Du må ha 2!.* Emma svarer at det er helt riktig mens hun ler og virker svært fornøyd. Guttene syntes også det var en bra oppgave. Jeg: *Hvordan fant dere ut at det ble 2?* Sebastian*: 8er brikken har fire 2ere og Emma manglet tre 2ere, så den siste 2er brikken har hun på handa.*

Oppgave: Se på sammenhengen mellom 7+1=8 og 8-7=1

Sebastian: *Det er jo de samme tallbrikkene. Der starter vi med 7 og 1 og de blir 8 hvis vi legger de oppå hverandre. Og der er det 8, og hvis vi tar bort 7 så blir d 1, og vis vi tar bort 1 så blir det 7. De hører liksom sammen.*

Oppgave: Addisjon og subtraksjon med tallbrikker. Elevene får utdelt tallbrikkene til 2, 6 og 8 og lapper med pluss, minus og *er lik*. De skal prøve å lage regnestykker der alle tre tallbrikkene brukes.

Emma lager først regnestykket 8-6=2. Emma*: Å så kan jeg bare bytte ut minus med pluss.* Jeg: *Ja, men da må du se om tallbrikkene er på riktig plass. Nå står det 8+6=2.* Emma flytter plass på tallbrikken til 2 og 6, men ser selv at dette ikke kan stemme. Emma: *Nå skjønner jeg ikke helt hva jeg tenkte. 8 og 2 blir jo mer enn 6.* Jeg: *Får du til å flytte på tallbrikkene slik at de to på den ene siden av erlik er like store som den på andre siden? Emma: Åja.* Hun flytter slik at regnestykket blir 6+2=8.

Oppgave: Lag regnestykker til hverandre

Sebastian lager regnestykket 5+10-4 med tallbrikkene. Lars legger 5 og 4 på 10er brikken og sier at svaret blir 9. Jeg spør om de andre er enige. Både Emma og Sebastian nøler. Jeg foreslår at de ser en gang til på regnestykket. Sebastian: *Vi starter med 5.* Lars: *Så plusser vi på 10. Det blir 15.* Sebastian: *Ja, og så tar vi bort 4.* Sebastian legger 4 oppå 10er brikken, og Lars legger 5 oppå 10er brikken. Emma er tydelig ikke med på det guttene gjør. Hun har fått en ide og leter etter en 4er og 5er brikke. Hun rører så vidt 5er brikken, hvisker 1 og roper at det blir 11. Hun klapper og jubler og er svært fornøyd. Jeg: *Flott, dette var dagens vanskeligste og du klarte den*! *Hva tenkte du?* Emma: *Det var 15 og så skal vi ta bort 4. Så jeg tenkte at hvis jeg la 4ern oppå 5ern, så var det bare 1 igjen. Og 10 og 1 er jo 11.*

Gullkorn: Lars lager 2-6=8. Jeg*: Hvis man har 2 sjokolader, kan man da spise opp 6 sjokolader?* Lars: *Nei.* Jeg: *Nei, for man kan ikke spise flere enn man har.* Lars flytter om på brikkene, slik at det står 8-6=2. Lars: *Nå kan jeg spise 6 sjokolader.* Jeg: *Ja, og hvor mange sjokolader har du igjen da?* Lars: *2. Jeg kan også gjøre slik (*Lars bytter plass på 6 og 2*) Da har jeg spist 2 sjokkiser og har igjen 6 til senere. De kan jeg dele med Sebastian.* Jeg: *Hvor mange blir det på hver da?* Lars: *3.* Jeg: *Enn om Emma også skal få da?* Lars: (ser på brikken og later som han deler den opp) *Da får vi 2 hver. (…) Jeg: Hva om også jeg vil ha sjokolade?* Lars ser grundig på brikken før han svarer; *Da får du kjøpe deg din egen.*

Gullkorn: Jeg*: Da har vi bare ei lita tid igjen før friminutt*. Sebastian: *What? Går det så fort?* Jeg: *Det går fort sjø.* Sebastian: *Okey, jeg <u>elsker</u> dette!* Lars: *Jeg og! Har lyst til å holde på med dette hver eneste dag.*

Gullkorn: Elevene lager regnestykker til hverandre. Sebastian lager 8+9-8. Lars: *Å det er lett, det blir 1.* Sebastian: *Nei, det blir 9, for du tar bare bort 8er brikken.* Lars: *Åja, jeg glemte å tenke.* Sebastian: *Ja, å tenke er det viktigste vi gjør i matematikk.*

VEDLEGG 4 – UTVALGTE OPPGAVER OG SITUASJONER FRA GRUPPEØKT 1-10

Gullkorn: Lars lager 10-3, ved at han legger 3 oppå 10er brikken. Sebastian svarer 7 med en gang. Emma: *Jaa, det var lett.* Sebastian: *Ja, jeg så det med en gang for jeg har fått brikkene der inni hjernen min!*

ØKT 5

Oppgave: Plukk ut to mengder som til sammen blir 10

Lars tar 5 og 5, Sebastian tar 9 og 1, Emma tar 8 og 2. Emma: *Oi, jeg ser et trisk*. Emma forklarer at alle brikkene som ligger ved siden av hverandre i boksen blir 10 til sammen.

Oppgave: Lag et regnestykke med pluss og et med minus ved å bruke de brikkene du har. Regnestykket skal inneholde tallet 10.

Lars har brikkene 7 og 3. Han lager 10-7. Jeg spør hva 10-7 er. Lars tenker lenge. Emma prøver å hjelpe han ved å si at han kan se det hvis han bruker brikkene sine. Lars spør om han kan få låne 10er brikken til Emma. Han legger tallbrikken til 7 oppå 10 og svarer automatisk 3. Lars sier at det var lett når han fikk bruke brikkene og at han kan lage flere hvis han får låne tallbrikkene til 9 og 1. Denne gangen legger han 9 og 1 ved siden av 10 og sier*: Regnestykket blir 10-9 og det er 1.*

Oppgave: Trekk et kort (1-10) og lag to regnestykker som inneholder det tallet og tallet 10.

Lars trekker 8. Han sier at 8+2 er 10 og 10-8 er 2. Han bruker ikke brikkene denne gangen, men ser bort på kassa der brikkene ligger. Lars virker svært fornøyd med seg selv og begynner å synge. Sebastian trekker tallet 3. Han lager 3 + 7 = 10. Han sliter med å lage et regnestykke med minus som inneholder både 10 og 3 og blir frustrert. Jeg sier at han har lov til å spørre de andre om hjelp. Sebastian spør Lars. Lars sier 10-3=7. Lars: *Du kan se det i kassa. Kameratene ligger ved siden av hverandre.* Emma trekker 5 og 4. Hun legger de under hverandre og svarer med en gang 9. Jeg spør hvordan hun tenkte. Hun sier at det var akkurat som 4+4, bare at det var en durt til og da blir det 9.

Samtale med Emma i en pause i økt 5**:** Emma*: 10 er egentlig 0. 9 er det høyeste tallet i verden, for etter det starter vi på 0 igjen. Så 10 er egentlig bare et ett-tall, for null er ingenting.* Jeg forklarer henne at ett-tallet foran null ikke betyr 1, men en tiermengde. Det betyr det samme som en blå brikke, <u>en</u> 10er brikke. Jeg sier videre at vi kan ha 2 tiere, 3 tiere osv. Emma: *Ett tallet betyr egentlig en tier og null tallet betyr ingen*. Jeg: *Ja, det betyr at det er 1 på tierplassen og 0 på enerplassen* (viser på tallkortet til 10) Emma: *så hvis jeg tar pluss 8, kan jeg da bytte ut 0 med 8?* Jeg: *Ja, og da blir det?* Emma: *18.* Det går opp et lys for Emma. Emma: *å da kommer vi nesten til… Eh hvis det står et 2 tall der så blir det 20. og hvis vi plusser på 8 der…* Jeg*: Ja, hva blir det?* Emma tenker litt før hun svarer 28. Jeg: *Flott!* Emma: *Jeg synes dette var artig!*

Oppgave: Jeg peker på en brikke mellom 1 og 10. Hva er 10 + brikken? Tallbrikkene opp til 20 er allerede lagt på bordet og vi har jobbet noen minutter med disse.

Lars får 10+3 og svarer raskt 13. Sebastian Får 10+8 og svarer først 16, men retter seg til 18. Emma får 10+6. Emma spør om hun skal ta bort 6. Hun tar 6er brikken, legger den oppå 10er brikken og svarer 4. Jeg spør henne hva pluss var igjen. Emma lager tegnet med hånda, ser på hendene sine og sier; *Åja* Hun legger brikken ved siden av 10 og svarer 16.

Utfordring: Samarbeid om å finne ut hva 13 + 14 er ved å bruke Numiconbrikkene.

Emma spør om de skal ta bort. Lars sier at de skal sette på og lager et plusstegn med hendene. De sorterer slik at 10ere ligger i lag og 4 og 3 ligger i lag. Guttene svarer automatisk 27. Emma begynner å telle hullene i tallbrikkene. Jeg spør hvorfor de la 10er brikkene for seg selv og 3 og 4 for seg selv.

Guttene svarte at det var mye lettere å plusse sammen 10+10, og så ta 20 + 7, siden de vet at 3 og 4 er 7.

Oppgave: Jeg legger frem tallbrikkene 3 og 4. Elevene ser med en gang at det blir 7. Jeg legger frem tallbrikkene 10 og 3, og elevene ser med en gang at det blir 13. Så legger jeg til tallbrikken til 4 og spør hva 13+4 er. De legger automatisk 3 og 4 sammen. Emma Svarer først 7, men retter seg til 17 etter ei lita stund. Jeg spør hvordan hun tenkte. Emma sier at hun så med en gang at det var 10 og 7 og så telte hun oppover fra 10 slik; 11,12,13,14,15,16,17. Hun viser med fingrene. Lars sier at han så at 3 og 4 var 7 og at 10+7 er 17. Emma sier at det så hun også. Men hun måtte telle fordi hun ikke husket hva 17 heter. Emma: *Jeg måtte telle på fingrene for å høre lyden til 17.*

Oppgave: Spinn spinneren (1-5) pluss på det tallet jeg peker på. Emma spinner tallet 4 og får oppgaven 4 + 12. Emma trekker pusten dypt før hun plutselig roper*; Det blir 16, det blir 16!* Hun forklarer at hun tenkte at 2+4 er 6, og da ble det 16, siden vi også må ha med tiern. Emma bruker ikke brikkene i denne oppgaven.

ØKT 6

Oppgave: Spinn 2 tall. Hva blir de til sammen? Emma får 8 og 4. Hun legger tallbrikkene over hverandre og svarer 12. Jeg spør om hun også vet hva 8-4 er. Hun sier først nei. Men så tar hun brikkene, legger 4 oppå 8 og svarer 4. 8-4 er 4.

Sum og differanse. Hva betyr det når jeg spør hva summen av noe er? Guttene virker usikre. Emma sier at hun vet at summen betyr hvor mye det er til sammen. Videre spør jeg hva differansen mellom to tall er. Emma forteller at differansen betyr forskjellen. Emma får tallene 10 og 1. Jeg spør hva summen er, og hun svarer 11. Jeg spør hva differansen er og hun svarer automatisk 9. Jeg blir imponert og tenker at hun begynner å forstå forskjellen mellom pluss og minus. Så jeg spør hva 10-1 er. Emma: *Eh, skal jeg ta på 1, eller ta bort*? Jeg spør hva hun tror, og hun sier at hun tipper at det betyr å ta på. Jeg sier at minus betyr det samme som differansen. Emma svarer automatisk 9.

Oppgave: Hvordan ser 17 ut? Kan Emma lage den? Emma tar automatisk en 10er brikke. Så blir hun stille en lang stund. Jeg ser på leppene hennes at hun teller inni seg, og så henter hun en 7er brikke. Oppgaven videre går ut på å lage tall (10-20), finne riktig tallkort og forklare hvorfor de hører sammen. Sebastian trekker 19: *Ett tallet betyr en tier og 9 tallet betyr bare* 9. Emma: *Det er 9 enere.* Sebastian: *Ja, 9 på enerplassen*.

Oppgave: Lag regnestykker til hverandre. 10 + noe. Emma sier 10+100. Lars svarer ti hundre. Sebastian sier at det ikke er noe som heter ti hundre. Sebastian: *Det er hundre og ti. Ti hundre er det samme som 1000.* Lars sier at han tenkte egentlig ikke feil, det bare ble den andre veien. Jeg ser at han synes det er ubehagelig og sier at det er lov til å svare feil av og til, det er det vi lærer av. Emma sier at hun har svart veldig mye feil. Jeg sier at det er helt greit og at hun også har svart veldig mye rett. Emma sier at hun ikke liker å svare feil i klasserommet.

Oppgave: Hva er 15-5 uten å bruke brikker? Emma svarer etter kort tid at det blir 10. Hun forklarer at hun så for seg 15 i hodet som en tierbrikke og 5er brikke. Så skar hun bort 5er brikken og da var det bare 10 igjen.

VEDLEGG 4 – UTVALGTE OPPGAVER OG SITUASJONER FRA GRUPPEØKT 1-10

ØKT 7

Oppgave: Samarbeid om tekstoppgavene og forklar hvordan dere kom frem til svaret. Skriv ned regnestykkene.

1: ***Per har 5 epler, han spiser 4. Hvor mange har han igjen****?* Emma tar opp 4er brikken og 5er brikken og svarer raskt 1. Sebastian skriver 5 + på arket. Emma hjelper til og sier at det skal være 4 og 1. Sebastian skriver da 5+4=1. Emma og Sebastian er enig i at dette blir riktig. Lars sier at det må være minus og forklarer hvorfor ved å vise med brikkene.

2: ***Kari har 4 drops. Ole har noen flere. Til sammen har de 10 drops. Hvor mange har Ole?*** Elevene løser denne oppgaven raskt ved å finne frem en 4er brikke og en 10er brikke. Emma legger 4er brikken på 10er brikken og svarer; *6! Ole har 6.* Hun skriver regnestykket 4+6=10.

3: 6 barn gikk på tur. 4 hadde grønne øyne, resten hadde blå øyne. Hvor mange hadde blå øyne? Lars leser oppgaven for de andre. Han må lese den flere ganger. Sebastian finner frem tallbrikken til 4 og deretter tallbrikken til 2 og svarer 6. Lars: *Det blir ikke 6 nei*. Emma sier at det må være 2 som har blå øyne, siden de var 6 til sammen. Hun viser med tallbrikkene til Sebastian. De andre er enige. Når de skal skrive ned regnestykket blir det vanskeligere. Jeg spør hva som er den første informasjonen de får? Lars: *De er 6 elever. Skriv 6, Emma.* Sebastian: *og så blir det pluss 4.* Jeg: *Ble svaret større eller mindre enn 6?* Sebastian: *Det bli mindre. Skriv en strek Emma.* Emma: *Da blir det 6 minus 4, og det er 2. Det stemmer.*

4: Lars er 7 år, Kari er 3 år. Hvor mye eldre er Lars enn Kari? Sebastian begynner med en gang å telle på fingrene. Emma lurer på om han bare kan lese opp tallene. Lars: *7 og 3.* Sebastian: *6 mer*. Lars: *hmm.* Emma finner frem tallbrikken til 7 og 3. Emma: *Da blir det 4 mer da. Siden det mangler 4 for at den (*hun peker på 3er brikken*) skal bli 7.* Også på denne oppgaven har elevene vanskelig for å skrive ned regnestykket. De skriver 7+3=4. Jeg: *7+3=4. Er alle enig?* Sebastian*: Nei, det blir 10. Det skal være minus*. Jeg: *Hvorfor er det viktig at den er minus og ikke pluss*? Emma: *Fordi den* (peker på 4er brikken) *er mindre enn de to (peker på 7 og 3).* Sebastian: *Erlik betyr jo at det skal være like mange på begge sidene.* Lars: *Ja, for* vi *har 7, og så tar vi bort den her (*3er brikken*). Når vi tar bort noe så er det minus, for da blir det mindre. Minus betyr mindre.*

5: Sebastian har 3 kroner, Emma har 2 kroner mer enn Sebastian. Til sammen har Numiconklubben 10 kroner. Hvor mye har Lars? Elevene syntes denne oppgaven var veldig artig. Sebastian sier at han har mest kroner. Emma retter han og sier at hun har to mer enn han. Lars sier at de må ha en 3er og en 5er. Emma finner frem tallbrikkene og sier at det blir en 8er. Lars: *Til sammen har numiconklubben 10 kroner. Hvor mye har jeg?* Emma legger begge brikkene på en 10er brikke. Emma og Sebastian svarer; *Du har 2 Lars.* Elevene begynner å skrive ned regnestykket. Emma: 5 pluss… Sebastian: Det der er ikke pluss det er minus. Emma skriver 5-3=2. Jeg godkjenner ikke regnestykket siden det ikke viser til tekstoppgaven. Emma: *Det skal hvertfall stå 2 her.* Hun peker på plassen bak likhetstegnet og skriver 5+3=2. Jeg godkjenner fortsatt ikke svaret. Emma: *Det må vel være minus her da?* Hun skriver 5-3=2 igjen. Jeg sier at de kan starte med hvor mye Numiconklubben har til sammen. Emma: *Da starter vi med 10 og så tar vi pluss 5* (hun legger 5er brikken på 10er brikken), *da er det igjen 5*. Lars: *Dere finner jo ikke svaret.* Emma: *Du må også hjelpe til*. Lars: *Dere hører jo ikke uansett*. Sebastian: *Joda. Det er lurt å si hva du tenker. For det er ikke sikkert at vi har tenkt på det samme som du. Kanskje du tenker lurere enn oss på den her.* Lars deltar videre i samarbeidet om å finne det riktige regnestykket.

Tanker etter tekstoppgavene: Elevene klarer fint å løse tekstoppgavene. Det er når de skal gjøre om dette til et regnestykke med abstrakte tallsymbol, og selv finne ut om de har brukt pluss eller minus at det blir vanskelig og forvirrende for dem.

VEDLEGG 4 – UTVALGTE OPPGAVER OG SITUASJONER FRA GRUPPEØKT 1-10

ØKT 8

Delmengder i tallområdet 0-20.

Oppgave: Velg et tall mellom 10 og 20 og lag tårn. Forklar for de andre hvilke to mengder tallet ditt består av.

Lars velger tallet 20. Før vi starter sier Lars: *Jeg tror jeg får det høyeste tårnet*. Jeg: *Hvorfor det*? Lars: *Fordi 20 er det største tallet vi kan velge*. Lars starter med 10+10, men sitter fast etter det. Jeg spør om det er vanskelig. Lars: *Det er ikke flere som går*. Jeg: *Er det ingen flere tall som blir 20 til sammen*? Lars: *Nei. Tar jeg 10+9 så blir det bare 19*. Jeg: *Kan du bruke tall over 10 da? Som for eksempel 18 pluss noe?* Lars*: Men da må jeg bruke flere brikker*. Jeg: *Det må du*. Lars*: OK. 18 og så mangler jeg 2*. Han finner flere kombinasjoner etter litt prøving og feiling.

Emma: *Jeg har valgt 12. Det kan være to 6ere, en 10er og en 2er, en 5er og en 7er, 8 og 4, og 9 og 3. Jeg tror jeg fant alle*. Jeg: *Kan du bruke tallet 11*? Emma: *hmm. Jeg kan ta 11 og 1. Men det blir jo som 10 og to 1ere.* Jeg: *Er det også 12?* Emma: *Ja.*

Sebastian: *Her har jeg 14. 10+4 er 14, 7+7 er 14, 8+6 er 14. Å så kom jeg ikke lengre. (…) Jo 12+2 er 14.* Jeg: *Flott! Noen som ser flere*? Sebastian*: Hvem mangler jeg da?* Lars: *Du mangler 9*. Sebastian: *9 pluss* (han legger på 9er brikken) *5!*

Oppgave: Legg frem tallbrikkene til et tall over 10. Trekk så et tallkort og forklar for de andre hva du mangler/må legge til for at det skal være like stort som tallbrikkene.

Sebastian legger frem tallet 14 og trekker et tallkort. For at jeg skal ha 14 må jeg ha 2 mer. Lars: *Du har 16.* Sebastian: *Nei.* Emma: *Kan jeg bruke tallbrikkene*? Hun finner frem tallbrikkene til 14 og 2 og svarer etter ei stund 12. Emma: *Jeg tenkte at det var best å se hva han manglet og forskjellen mellom dem er 12.*

Emma legger frem tallet 20 og trekker et kort. Emma: *For at jeg skal ha 20 er forskjellen 5*. Lars: *Du må si om vi skal ta pluss eller minus da*. Sebastian: *Det er bedre om du sier at du mangler 5*. Emma: *Hvis jeg skal ha 20 så mangler jeg 5*. Sebastian henter 5er brikken og legger den oppå den ene 10er brikken. Lars svarer 15.

Oppgave: Hvordan kan vi tenke for at dette skal bli et lettere regnestykke? (addisjon med tierovergang)

6+7: Emma sier at det er det samme som 9+4. Sebastian synes det er lettest å gjøre det som til 10+3. Lars vil helst bruke oppgaven han nettopp hadde løst (8+4) og sier 8+4+1.

9+5: Sebastian*: Kan jeg får en 10er? Nei, forresten jeg ser det selv. Det blir 14, for vi har en 10er og 4er.* Emma: *Jeg tenkte å si det på akkurat samme måte!*

8+3: Sebastian: *Det ser vi jo her. 8 og 2 er 10.* Emma: *Ja og da blir det 11 for det er en mer.*

7+5: Sebastian: *Jeg har en idé. Her har vi en sjuer, og nå ha vi 8* (han legger 5 inntil og holder over de resterende 4). *8+2 er 10 og så blir det 12.* Jeg: *Flott! Noen flere måter*? Emma: *Jeg tenkte først 7 og 3, så har jeg 10. og så tar jeg bort to og da blir det 12.* Jeg: *Veldig bra! Sa du at du tar bort to?* Emma: *Nei, jeg tar <u>på</u> to. Pluss!* Jeg*: Du tenkte på tiervenner du?* Emma: *Ja, for det gjør til at jeg regner mye fortere.* Jeg: *Hvordan tenkte du Lars*? Lars: *Aller først tenkte jeg feil. Da fikk jeg til 13. Jeg tenkte 5+7 hva er det? 13. Og så tenkte jeg 7+5, oi det er 12.*

6+8: Emma legger ned tallbrikken til 6 og 8, legger tallbrikken til 10 over og svarer 14. Jeg spør om hun klarer å se det uten å legge på 10er brikken. Emma: *Ja, det er jo like lett. Her er det 10 og der er det igjen 4. 14.*

9+5: Elevene blir utfordret til å ikke ta i tallbrikkene, men bare se på dem i boksen. Sebastian svarer med en gang 14. Sebastian: *Den var for lett*. Jeg: *Hva med 8+9*? Sebastian tenker litt før han svarer 17. Sebastian: *Jeg tror jeg har skjønt det*. Emma: *Jeg og! Når vi har 9 så kan vi bare ta på en for at det blir 10.* Sebastian: *Ja. For eksempel når det er 9+4 da, så kan vi ta 10+4 og så en mindre, siden 9 er en mindre.* Emma*: blir ikke det det samme da?* Sebastian: *Jo, men du sa det bare litt annerledes.*

ØKT 9

Repetisjon av subtraksjon i tallområdet 10-20 (uten tierovergang)

13-2: Lars: *Det blir 11*. Emma: *Hvis vi har 13 og skal ta bort 2. Så får 3ern sparken, bortsett fra enern og da er det igjen 11.*

16-6: Sebastian: *10. Fordi du tar bort 6er brikken og da er det bare 10 igjen.*

17-5: Emma: *Da ser vi jo at det bare blir igjen 2 av 7ern og da blir det 12.*

Subtraksjon med tierovergang

Oppgave: Trekk et tallkort over 10 og et under 10 og finn differansen (ligger i to ulike rekker med tallet ned) Hvordan kan vi tenke for at dette skal bli et lettere regnestykke?

12-4: Emma roper: *Det er 8, det er 8!* Jeg: *Det er riktig, men nå vil jeg høre hva dere mener er en lur måte å tenke på. Snakk sammen om hvordan man kan tenke.* Lars: *Hør på meg da, jeg har en god måte*. *Få hit en 8er og en 4er.* Lars sier at han tenker at han har 12 klinkekuler og så skal han ta bort 4. Hvis han ikke hadde hatt de fire klinkekulene ville han bare hatt 8, siden 8 + 4 er 12. Sebastian: *Jeg vil heller bytte ut en 4er med to 2ere*. *Så tar jeg bort en 2er og da blir det 10-2 som er lettere, for det er 8.*

14-5: Sebastian: *Først så gjør jeg om 5 til 2, 2 og 1. Så tar jeg bort 2 fra 4ern, og så 2 til. Da er 4ern borte. Da er det bare den siste igjen og da blir det10-1 som er 9.* Jeg: *Bra! Trengte du å dele den opp i to 2ere denne gangen*? Sebastian tenker litt før han svarer: *Nei, jeg kunne bare tatt bort 4 med en gang og så den siste durten fra 5ern. Da ser vi at det er 9.*

14-6: Emma: *Det blir 8. Jeg ser det lett! Du tar først bort 4, så er det to igjen og det blir 8.* Jeg: *Flott! Finnes det andre måter*? Emma: *Ja. Jeg skal vise dere. Nå har jeg laget 14-5 som vi hadde i stad. Det ser vi at blir 9. Men i stedet skulle vi ta bort en mer, og da blir det 8. Så det blir en mindre enn 9 fordi vi skal ta bort en til.*

14-7: Sebastian: *Den her ser jeg faktisk hva er*. Jeg: *Hva ser du da?* Sebastian: *Hvis jeg legger en 7er oppå her, så er det akkurat plass til enda en 7er. 7 pluss 7 er 14, og 14 ta bort 7 er 7.*

Utfordring: Trekk to tall over 10:

20-12: Emma: Jeg har 20 og skal ta bort 12. Da legger jeg 10ern til 12 opp 20, for da går de bort. Da har jeg igjen 10 minus 2. Da ser jeg at det er igjen 4 der og 4 der og det er 8.

14-12: Sebastian: *Akkurat det samme som 4-2 jo. Fordi når 10er brikkene er borte ser vi at det er 4 og 2 som er igjen.*

17-16: Lars: *Jeg tar bort 10ern og så legger jeg 6 på 7 og da blir det 1.* Jeg: *Bra. Kunne dere sett det uten brikkene?* Elevene tenker lengde for Sebastian sier: *17 er jo bare en mer enn 16 da. Så da må jo svaret være 1 å*. Emma: *Ja, for vi ser jo at det bare mangler en durt for at de skal være like store.*

VEDLEGG 4 – UTVALGTE OPPGAVER OG SITUASJONER FRA GRUPPEØKT 1-10

ØKT 10

Repetisjons økt

Samtale med elevene

Hva synes dere er det viktigste med matematikk? Emma: *Å ikke regne med fingrene men å regne oppgaver i hodet*. Lars: *Fingrene er ulovlig å bruke*. Jeg: *Fingrene er ikke ulovlig å bruke. Noen ganger kan det være lurt å bruke fingrene.* Lars: *Men det er bedre å bare tenke på svaret. Hvis jeg for eksempel skal ta 8+6, så tenker jeg først 8…* Han tenker i stund før han begynner å telle på fingrene og svarer 13. Jeg: *Sebastian bruker noen ganger fingrene på en veldig lur måte*. Sebastian: *Ja, jeg bare tar opp tallet. Hvis det er 6+3 så tar jeg opp fingrene og ser at det er 9.* Emma: *Det gjør jeg også noen ganger. Det tar litt kortere tid enn å telle*. (…) Sebastian: *Det viktigste med matematikk er at man tenker med hodet. Jeg har fått Numiconbrikkene i hodet, så nå kan jeg tenke med dem.* Jeg: *Synes du det er lettere*? Sebastian: *Ja, mye. Hvert fall når jeg bare ser for meg brikkene og ser hva svaret blir.* Jeg: *Skal jeg si hva jeg synes er viktigst med matematikk? Jeg synes det er viktigst at man tar seg tida til å forstå.* Emma: *Det var akkurat det jeg skulle si. Det viktigste er ikke å si rett svar. Det viktigste er å regne rett.* Jeg: *Ja, det er viktigere at man har tenkt rett enn at man får rett svar.* Sebastian: *Det er viktig å ikke bare gjette for da forstår vi det egentlig ikke.*

Hva er pluss? Emma: *Pluss er sånn… Eh, skal jeg ta bort eller ta på?* Jeg: *Det er du som skal forklare det til meg.* Emma: *Ok. Hvis du har en 10er og en 9er, så blir det 19.* Jeg: *Hva gjorde du med brikkene*? Emma: *Jeg la dem sammen.* Jeg: *Ja, når det er pluss så legger vi dem sammen*. Lars: *Pluss er det samme som addisjon. Vi legger til.* Sebastian: *Det blir alltid større når det er pluss.*

Hva betyr erlik? Lars: *Det betyr svaret*. Jeg: *Betyr det noe mer enn bare svaret*? Det virker som elevene har glemt det vi jobbet med i økt 2. Jeg legger et stort ark på bordet og tegner = på det. Jeg legger så en 5er brikke på den ene siden og en 9er brikke på den andre og spør; *Hva skal til for at det 5 blir lik 9?* Sebastian: *Det mangler 4 for at det skal bli likt*. Jeg legger 4 sammen med 5. Jeg*: 5 og 4 er lik 9. Hva betyr erlik*? Emma*: At det er like mange.* Lars*: 5+4 er 9, så da er det 9 på begge sidene*. Sebastian: *Ja, for når vi legger brikkene i lag er de like. 5 og 4 ser jo ut som en 9er når vi legger dem sammen, bare at de ikke har samme farge.* Jeg: *Er fargen viktig*? Sebastian: *Nei, det er lett å se at det er 9.* Emma: *Ja, og så er det like mange hull til sammen.*