

D-regioner i betongkonstruksjoner

Mari Løvik

Torgrim Soleng

Kjell Henrik Waage

Bygg- og miljøteknikk (2-årig)

Innlevert: juni 2016

Hovedveileder: Terje Kanstad, KT

Medveileder: Håvard Johansen, SW

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk



MASTEROPPGAVE 2016

FAGOMRÅDE: Betongkonstruksjoner	DATO: 10. juni 2016	ANTALL SIDER: 234 + 72 (vedlegg)
------------------------------------	------------------------	-------------------------------------

TITTEL:

D-regioner i betongkonstruksjoner

D-regions in Concrete Structures

UTFØRT AV:

Kjell Henrik Waage
Mari Løvik
Torggrim Soleng



SAMMENDRAG:

Opgaven omhandler D-regioner i betongkonstruksjoner. I oppgaven har hovedfokus vært etablering av stavmodeller med lineær elastiske FEM-analyser, samt rissberegning av D-regioner.

Stavmodellene etablert med utgangspunkt i FEM-analyser viser seg å bli ulik stavmodellene etablert fra forenklete metoder i for eksempel NS-EN 1992-1-1. Dette gjenspeiles i at beregnet spaltestrekket blir ulikt.

De tilgjengelige metodene for å beregne riss i dag, kommer fra rent strekkpåkjennte legemer. Spenningstilstanden i en D-region har blitt belyst med lineær elastiske FEM-analyser. Det viser seg at spenningstilstanden i en D-region er komplisert, og at rissformler som alene tar hensyn til et legeme utsatt for rent strekk vil være vanskelig å benytte for å beregne riss i en D-region.

Lineær elastiske spenningsstrømmer fra FEM-analyser er et godt verktøy for å etablere stavmodeller.

FAGLÆRER: Terje Kanstad

VEILEDERE: Terje Kanstad, Håvard Johansen

UTFØRT VED: Institutt for konstruksjonsteknikk, NTNU

Forord

Denne masteroppgaven er en avslutning på en 2-årig mastergrad ved institutt for konstruksjonsteknikk (KT) ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU). Oppgaven ble skrevet over 20 uker våren 2016.

Problemstillingen er gitt av Statens vegvesen ved Håvard Johansen. De ønsker å vite mer om D-regioner i betongbroer og har gitt oss to oppgaver:

- Verifikasjon av stavmodeller med lineær elastiske FEM-analyser.
- Rissberegninger av D-regioner.

Som analyseeksempel har vi benyttet Dolmsundbrua som strekker seg mellom Hitra og Dolmøya i Trøndelag. Broen ferdigstilles sommeren 2016 og er prosjektert av Statens vegvesen.

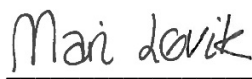
Oppgaven er skrevet i samarbeid mellom Mari Løvik, Torgrim Soleng og Kjell Henrik Waage. Intern veileder for oppgaven var professor Terje Kanstad ved NTNU. Ekstern samarbeidspartner og oppgaveformulerer er Statens vegvesen, med Håvard Johansen ved Vegdirektoratet i Trondheim som veileder.

Vi vil rette en stor takk til professor Terje Kanstad for god veiledning, råd og oppfølging. Vi vil også takke Håvard Johansen for gode diskusjoner og veiledning.

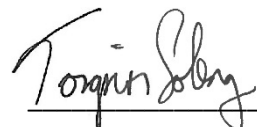
Trondheim, juni 2016



Kjell Henrik Waage



Mari Løvik



Torgrim Soleng

Sammendrag

I konstruksjoner hvor det skjer plutselige endringer i tverrsnitt eller lastpåføring oppstår det diskontinuerlige spenningsstrømmer. Med diskontinuerlig menes en spenningsfordeling som ikke kan analyseres med bjelketeori. I betongteori er det vanlig å kalle disse områdene for D-regioner. I denne oppgaven er det studert hvordan D-regioner i betong kan analyseres med stavmodeller. Det som vektlegges er etablering av stavmodellen ved bruk av lineær elastiske spenningsstrømmer utviklet fra FEM-analyser og dimensjonering i bruksgrensetilstand.

Metoden med stavmodeller bygger på plastisitetsteoriens nedre grenseteorem. Det etableres et statisk bestemt system innenfor D-regionen formet som et enkelt fagverk, med trykkstaver i betong og strekkstaver av armering. Systemet utgjør en mekanisme som i sin helhet utgjør stavmodellen. Denne må tilfredsstillende likevekt mellom indre og ytre krefter.

Stavmodellen kan etableres med utgangspunkt i kraft-sti metoden og lineær elastiske FEM-analyser. Det en ønsker å ha kontroll på er hvor det vil oppstå strekk og trykk, og størrelsen og retningen på dette. Dersom stavene i stavmodellen følger tyngdepunktet til de lineær elastiske spenningsstrømmene, sier en at stavmodellen er kompatibel med de faktiske spenningene. Dersom stavmodellen er kompatibel, viser erfaring at D-regionens kapasitet mot brudd ikke vil overestimeres.

Strekkets og trykkets størrelse bestemmes av vinkelen mellom trykkstavene og strekkstavene i stavmodellen. Dersom stavmodellen etableres ved hjelp av kraft-sti metoden, kan det være vanskelig å fastsette vinklene. For de mest vanlige betongkonstruksjonene finner en i ulik teori konkrete anbefalinger til hvordan stavmodellen bør etableres for at stavmodellen skal være kompatibel. Vinklene varierer fra $53,13^\circ$ til $72,23^\circ$ i høye bjelker, og fra $63,43^\circ$ til 90° i for eksempel søyletopper. Ved 90° vil det ikke lengre oppstå spaltestrekk.

For analyser i bruksgrensetilstanden dreier det seg i D-regioner om å ha kontroll på rissing innenfor D-regionen. Dette for å sikre bestandigheten til konstruksjonen. Metoden er i utgangspunktet en plastisk analysemetode, men Eurokode 2, del 1-1 (EK2-1-1) åpner for å benytte stavmodeller for å beregne riss innenfor D-regionen. Betingelsen for dette er at stavmodellen er kompatibel med de lineær elastiske spenningsstrømmene. Den eneste konkrete metoden EK2-1-1 gir for å kontrollere riss i en D-region er ved å gi en anbefaling til maks strekkspenning i armeringen som skal oppta strekket. Det er derimot ikke gitt

begrensninger mot å benytte de øvrige metodene i EK2-1-1 for å beregne riss. Da spenningsfordelingen i en D-region er kompleks er det derimot ikke rett frem å benytte disse metodene. I denne oppgaven benyttes lineær elastiske FEM-analyser for å studere spenningsfordelingen nærmere. Formålet har vært å se om det er mulig å betrakte spenningsfordelingen i en D-region på en slik måte at metodene i EK2-1-1, eller andre kjente metoder, kan benyttes for å beregne riss mer nøyaktig. Oppgaven lykkes ikke med å foreslå en slik løsning og det blir foreslått å studere riss i D-regioner ved hjelp av ikke-lineære FEM-analyser. Studiene gir likevel en interessant fremstilling av hvordan spenningen i en D-region utarter seg.

Det har blitt benyttet lineær elastiske FEM-analyser for å utvikle spenningsstrømmene i ett utvalg av D-regionene i Dolmsundbrua. Spenningsstrømmene har blitt benyttet til å etablere stavmodeller for disse. Analysene viser at stavmodellene blir ulik de stavmodellene en etablerer med kraft-sti metoden eller andre forenklete metoder. Som en følge av dette blir spaltestrekket som oppstår fra de påførte lastene ulik fra de forenklete metodene.

Abstract

For structures with sudden changes in cross section or loading, there will appear a region where the distribution of stresses will be non-linear or discontinuous. Discontinuous means that beam theory no longer applies. In theory of concrete, such regions are referred to as D-regions and are commonly analyzed with strut-and-tie models. In this master thesis, the establishment of strut-and-tie models based on a linear elastic stress distribution from FEM (Finite Element Method), and cracking in serviceability limit state (SLS) are the main focus.

Strut-and-tie models are based on the lower bond theorem of plasticity. Compression struts of concrete and tension ties of reinforcement form an inner mechanism. The mechanism has to satisfy equilibrium between external and internal forces.

The strut-and-tie model should be established from a linear elastic stress distribution based on the load path method or FEM-analysis. The aim is to pinpoint the size and direction of tension and compression in the D-region. If the struts and ties follows the stress distributions center of gravity, the strut-and-tie model is compatible. Experience shows that the capacity will not be overestimated if the strut-and-tie model is compatible.

The angles between the struts and ties decide the size of the forces in the system. If the strut-and-tie model is based on the load path method it can be difficult to secure that the strut-and-tie model is compatible. In this sentence the angles between the struts and ties is an important factor. In literature there are given recommendations for angles in the most common D-regions, which should ensure compatibility. The angles varies from $53,13^\circ$ to $72,23^\circ$ for deep beams, and from $63,43^\circ$ to 90° in for example a column top. When the angle is 90° there will be no bursting force.

For analysis in SLS the cracking has to be controlled to ensure durability of the structure. Analysis with strut-and-ties is a plastic method but the Eurocode 2, part 1-1 (EC2-1-1) allow the method to be used for crack controls. This applies if the strut-and-tie model is compatible with the stress distribution from elastic analysis. EC2-1-1 defines only one direct method for control of cracking in D-regions. This is by limiting the tensile stress in reinforcement dimensioned to prevent cracking. EC2-1-1 gives no limitations by use of more accurate methods to control cracking. Because of the complexity of stress distribution within the D-regions, there are no easy way to use a more accurate method. In this thesis the stress distribution from a FEM-analysis have been studied, in means of finding a

method to use the ordinary formulas for cracking to calculate cracking within a D-region more accurate. We have not succeeded in finding a solution to the problem and therefore recommend non-linear FEM-analysis of the problem in search for a solution. Anyway, the studies gives a good presentation of how the stress distribution looks like in a D-region.

We have analyzed some of the D-regions in Dolmsundbrua. An elastic FEM-analysis have been used to develop the stress distributions. The stress distribution have been used to establish strut-and-tie models for the D-regions. The results shows that strut-and-tie models established from elastic FEM-analysis, are different from the strut-and-tie models established with simplified methods such as the load path method. Therefore, the bursting force becomes different.

1 Innholdsfortegnelse

Forord	III
Sammendrag	V
Abstract	VII
Indeksliste.....	XIII
2 Innledning.....	1
3 Teoretisk grunnlag.....	3
3.1 Historie	3
3.2 B- og D-regioner	4
3.3 Hva er en stavmodell?.....	6
3.3.1 Generelt.....	6
3.3.2 Stavmodellens komponenter	7
3.3.3 Plastisitetsteoriens nedre grenseteorem	7
3.4 Etablering av stavmodell	9
3.4.1 Generelt.....	9
3.4.2 Stavmodell etablert med lineærelastisk FEM-analyse	12
3.4.3 Stavmodell utviklet med kraft-sti metoden	15
3.4.4 Lokal og generell sone	21
3.5 Vinkel mellom trykk- og strekkstaver	24
3.5.1 Generelt.....	24
3.5.2 Vinkelens betydning	25
3.5.3 Vinkler i litteratur	26
4 Regelverk for D-områder i norske broer	41
4.1 Håndbok N400 Bruprosjektering.....	41
4.2 Eurokode 2	44
4.2.1 Generelt.....	46
4.2.2 Grunnlag for prosjektering	47
4.2.3 Materialer.....	47
4.2.4 Bestandighet og overdekning for armering	49

4.2.5	Konstruksjonsanalyse	55
4.2.6	Bruddgrensetilstander.....	58
4.2.7	Bruksgrensetilstand.....	67
4.2.8	Armeringsregler for armering og spennarmering	67
4.2.9	Konstruksjonsregler.....	68
4.2.10	J.104 Partielt belastede flater	68
4.3	ETA.....	73
4.3.1	Tre sentrale leverandører.....	73
4.3.2	BBR: ETA-09/0286 (2013-2018).....	75
5	D-regioner i bruksgrensetilstand.....	78
5.1	Kontroll i SLS.....	78
5.1.1	Gyldighet	78
5.1.2	Spenningsbegrensninger	79
5.1.3	Beregning av rissvidde.....	81
6	Diskusjon	91
6.1	Spenningstilstand	93
6.2	Stivhet til omkringliggende betong	102
6.3	Kommentar.....	106
7	Fremgangsmåte for stavmodeller etablert fra FEM-analyser	107
8	Forsøk	109
8.1	Forsøk 1, stivhet av omkringliggende betong	109
8.2	Forsøk 2, fordeling av horisontale spenninger	115
8.3	Konklusjon riss.....	143
9	Analyse Dolmsundbrua	145
9.1	Søyletopp akse 4.....	145
9.1.1	Presentasjon av D-region	145
9.1.2	FEM-analysen	147
9.1.3	Etablering av stavmodell	149
9.2	Spennkabelforankring i broplate/steg	163

9.2.1	Presentasjon av D-region	163
9.2.2	FEM-analysen	164
9.2.3	Etablering av stavmodell	167
9.3	Spennkabel forankring i voute	188
9.3.1	Presentasjon av D-region	188
9.3.2	FEM-analysen	191
9.3.3	Etablering av stavmodell	194
10	Konklusjon	211
11	Forslag til videre arbeid	213
12	Referanseliste	215

Indeksliste

Store latinske bokstaver

A_c	Betongareal av et tverrsnitt
A_{c0}	Belastningsflate
A_{c1}	Største beregningsmessige fordelingsflate med en tilsvarende form som A_{c0}
$A_{c,eff}$	Effektivt areal av betongstrekksone som omgir armeringen eller spennkablene
A_p	Arealet av etteroppspente kabler
$A_{p'}$	Arealet av før- eller etteroppspente kabler
A_r	Armering som er nødvendig for å hindre kantutglidning
A_s	Tverrsnittsareal av armering i strekksonen
$A_{s,min}$	Tverrsnittsarealet av minimumsarmering i strekksonen
$A_{s,nødvendig}$	Nødvendig armeringsmengde
B	Minimumsstørrelse på lukkebøyle
C	Kraft i trykkstav (compression)
E	Avstand fra overside av ankerplate til start av spiral
E_{cm}	Betongens elastisitetsmodul
E_s	Armeringsstålets elastisitetsmodul
F	Påført kraft
F_i	Kraft i strekkstav eller trykkstav i
F_0	Utvendig kraft på element
F_{Rdu}	Maks tillatt trykkraft på opplager
H	Horisontalkraft
KP	Knutepunkt
L	Lengde, spennvidde
L_i	Lengde av stav i
M	Moment
N	Aksialkraft
P	Forspenningskraft
P_k	Påført karakteristisk punktlast
P_0	Initiell kraft i den aktive enden av spennarmeringen
P_{max}	Maks oppspenningskraft
SLS	Bruksgrensetilstand
$S_{r,max}$	Største rissavstand
T	Kraft i strekkstav (tension)

T_H	Kraft i høyre strekkstav
T_V	Kraft i venstre strekkstav
ULS	Bruddgrensetilstand
V	Vertikal sentrisk last i opplager
V_1	Kraft i venstre opplager
V_2	Kraft i høyre opplager
W	Elastisk motstandsmoment

Små latinske bokstaver

a, a'	Bredde og høyde på forankringsplate
a_c	Horisontal senteravstand mellom spennkabelforankringer
b_{ef}	Effektiv bredde
b	Tverrsnittets totale bredde
b_c	Vertikal senteravstand mellom spennkabelforankringer
b_0	Elementbredde
c	Overdekning
c, c'	Bredde og høyde på lokal forankringssone
c_{min}	Minste overdekning
$c_{min,b}$	Overdekning med hensyn på heft
$c_{min,dur}$	Krav til minste overdekning med hensyn på bestandighet
c_{nom}	Nominell overdekning til armering
f_{cd}	Dimensjonerende trykkfasthet ved 28 døgn
f_{ck}	Karakteristisk trykkfasthet ved 28 døgn
$f_{ck(t)}$	Karakteristisk trykkfasthet ved belastning
f_{cm}	Middelverdi av betongtrykkfasthet
$f_{cm,0}$	Middelverdi av betongtrykkfasthet ved oppspenning
$f_{cm(t)}$	Middelverdi av betongtrykkfasthet ved en alder av t døgn
$f_{ct,eff}$	Middelverdi for betongens strekkfasthet på det tidspunkt opprissing forventes
f_{ctm}	Middelverdi av betongens aksialtrekkfasthet
$f_{ctm,fl}$	Middelverdi av betongens bøyestrekfasthet
$f_{ctm(t)}$	Middelverdi av betongens aksialtrekkfasthet etter t døgn

$f_{p0,1k}$	Spennstålets karakteristiske 0,1 % strekkgrense
f_{pd}	Spennstålets dimensjonerende strekkfasthet
f_{pk}	Spennstålets karakteristiske strekkfasthet
f_{yd}	Dimensjonerende flytegrense for slakkarmering
$f_{yd'}$	Gjennomsnittlig dimensjonerende armeringsspenning
f_{yk}	Karakteristisk flytegrense for slakkarmering
k	Koeffisient som tar hensyn til reduksjon av fastholdingskrefter ved ujevn spenningsfordeling i tverrsnitt med indre likevekt
k_1	Koeffisient som tar hensyn til armeringens heftegenskaper
k_2	Koeffisient som tar hensyn til tøyingsfordeling
k_{1-5}	Faktorer for spenningsbegrensning
k_c	Faktor som tar hensyn til større overdekning ved fastsettelse av rissviddekrav
k_c	Koeffisient som tar hensyn til spenningsfordeling innenfor tverrsnittet rett før opprissing og endring i indre momentarm
k_t	Faktor som avhenger av lastens varighet
$s_{r,max}$	Største rissavstand
t	Tykkelse tverrsnitt
w_k	Beregningsmessig rissvidde
w_{max}	Grenseverdi for tillatt rissvidde
z	Momentarm
\emptyset	Vinkel, diameter
\emptyset_s	Diameter av slakkarmeringen
\emptyset_p	Ekvivalent diameter av spennkabel

Små greske bokstaver

α	Vinkel
α_{cc}	Koeffisient som tar hensyn til virkninger av langtidslast på trykkfastheten
α_e	Forholdet mellom E_s og E_{cm}
β	Åpningsvinkel på lastspredning etter EK2
$\beta_{cc(t)}$	Koeffisient som avhenger av betongens alder t
ΔC_{dev}	Tillegg til minste overdekning

γ_c	Materialfaktor for betong
$\gamma_{p,unfav}$	Lastfaktor for forspenning der forspenningen har en ugunstig effekt
$\gamma_{p,fav}$	Lastfaktor for forspenning der forspenningen har en gunstig effekt
γ_s	Materialfaktor stål
ϵ_{cm}	Midlere tøyning i betongen mellom riss
ϵ_{mi}	Gjennomsnittlig tøyning av stav i
ϵ_{sm}	Midlere tøyning i armeringen for den aktuelle lastkombinasjonen
μ	Friksjonskoeffisient
ν'	Reduksjonsfaktor for betong
ξ	Forhold mellom heftfasthet for armeringsstål og spennstål
ξ_1	Justert heftfasthetsforhold som tar hensyn til ulike diameterer for spennstål og armeringsstål
$\rho_{p,eff}$	Forholdet mellom summen av slakkarmering pluss eventuell spennarmering og det effektive arealet av betongstrekksonen som omgir armeringen eller spennkablene
σ_c	Maksimal trykkspenning ved oppspenning eller ved overføring av forspenning
$\sigma_{p,max}$	Største spenning påført spennkabelen
$\sigma_{Rd,max}$	Største tillat trykkspenning
σ_M	Spenning fra bøyning
σ_N	Spenning fra aksiallast
σ_H	Totalspenning på høyre side
σ_V	Totalspenning på venstre side
σ_s	Spenning i strekkarmering under forutsetning av et opprisset tverrsnitt
σ_z	Vertikal trykkspenning
φ	Armeringsdiameter

2 Innledning

Ved prosjektering og dimensjonering av en konstruksjon som Dolmsundbrua, vil spesifikke områder i broen kategoriseres som D-regioner. D-regionene kan dimensjoneres ved bruk av stavmodeller, som er en anerkjent metode både for små og store konstruksjonsdeler. Metoden har de siste tiårene blitt veletablert blant ingeniører verden over, og er en del av Eurokodene for prosjektering av betongkonstruksjoner. Dimensjonering ved bruk av stavmodeller går ut på å etablere et indre statisk system av trykkstaver i betong og strekkstaver av armering. Spenningen i stavene og knutepunktene må deretter kontrolleres opp mot sin kapasitet.

Temaet for oppgaven var en av flere forslag fra Statens vegvesen. Oppgaven fanget raskt vår interesse og motivasjon for å lære mer om metoden og bruk av FEM-analyser. Masteroppgaven *D-regioner i betongbruer* skrevet av Bjørnar Fuglaamoen Hagen og Magnus Berntzen Nordlid våren 2015, er bakgrunnen for arbeidet i denne oppgaven. De etablerte stavmodeller for D-regioner basert på gjeldende teori og kontrollerte riss ved hjelp av reglene om spenningsbegrensning i Eurokoden. Vår oppgave har vært å verifisere stavmodeller basert på en lineær elastisk spenningsstrøm fra FEM-analyser, samt å utføre rissberegninger i D-regioner mer eksakt enn ved spenningsbegrensning.

Oppgaven er bygd opp av tre deler. Første del er en gjennomgang av litteratur som omhandler D-regioner, hvor både generell litteratur og regelverk er grundig gjennomgått. Hensikten med den første delen er å gi en helhetlig forståelse av D-regioner, og bør ses på som et litteraturstudie. Litteraturstudiet avsluttes med et diskusjonskapittel som er en kritisk gjennomgang av teorien. Deretter utføres to forsøk for å studere teori og analyseresultater satt opp mot hverandre. Det første forsøket er formulert og utført med den hensikt å bestemme betongens stivhet rundt spaltestrekket som oppstår i et kvadratisk tverrsnitt belastet av en sentrisk plassert punktlast. Det andre forsøket har som hensikt å finne en tendens for spaltestrekkets størrelse, utbredelse og fordeling ved varierende dybder inn og ut av stavmodellens plan. Analysen av Dolmsundbrua er den siste delen av oppgaven, og har som formål å belyse om stavmodeller etablert ved bruk av lineær elastiske spenningsstrømmer samsvarer med teorien. Spaltestrekket som beregnes fra stavmodellene etablert med spenningsstrømmer, sammenlignes med spaltestrekket beregnet etter NS-EN 1992-1-1.

3 Teoretisk grunnlag

3.1 Historie

Dimensjoneringsregler, metoder og modeller er og har vært under stadig utvikling. Ulike konstruksjonspraksiser kan dateres helt tilbake til oldtiden. Byggmestrene, designerne og konstruktørene som bygde de egyptiske pyramidene og de gotiske katedralene brukte intuisjon og erfaring til å utvikle dimensjoneringsregler. Reglene var basert på enkel kraftlikevekt og materialene ble behandlet som helt stive. Løsningen er ekvivalent med det som i dag kalles plastisitetsteoriens nedre grenseteorem. Bevis utledet i senere tid viser at oldtidens ingeniørpraksis var pålitelig og den brukes derfor nå som hjelp ved utvikling av moderne metoder (Chen mfl., 2011, side 1).

Mot slutten av 1800-tallet introduserte Hennebique en ny dimensjoneringsmetode for armert betong. Metoden var basert på å legge armering der det er strekk og å anta at betongen hadde god nok trykkapasitet (McBeth, 1998, side 88). Ved starten av 1900-tallet introduserte Ritter og Morsch en ny beregningsmetode basert på Hennebique sin tankegang, men nå ved bruk av den tradisjonelle fagverksmodellen. Metoden ble så utvidet og videreutviklet av blant annet Leonhardt, Rusch og Kupfer. De alle publiserte bidrag som banet vei for videre bearbeiding av teorien om armert betong. Inntil Thürlimann, Marti og Mueller skapte et vitenskapelig grunnlag for anvendelse av metoden basert på plastisitetsteorien (Schlaich mfl., 1987, side 76). Dette medførte at stavmodellen som en generalisering av fagverksmodellen kunne brukes til å dimensjonere diskontinuitetsområder i armert betong. Rapporten skrevet av Schlaich mfl. utgitt i 1987, la frem en metode for bruk av stavmodeller ved dimensjonering av D-regioner.

Hvem som først fremla metoden om bruk av stavmodellen for dimensjonering av D-regioner er vanskelig å konstatere. Mye tyder på at flere av datidens forskere på området har oppdaget den samme muligheten og dermed arbeidet parallelt med denne. Rapporten *Toward a Consistent Design of Structural Concrete* (Schlaich mfl., 1987) legger frem metoden som om de var de første til å systematisere den. Læreboken *Forelesninger på Betong* (Leonhardt, 1975) og veiledningsdokumentet *CIRIA Guide 1* (1976) omtaler de samme prinsippene som Schlaich mfl. Merkelig nok er læreboken ikke en del av Schlaich mfl. sin referanseliste. Det er likevel ingen tvil om at rapporten skrevet av Schlaich mfl. har spilt en sentral rolle i arbeidet med å implementere metoden blant verdens konstruktører. Litteratur av nyere dato som omhandler bruk av stavmodellen refererer uten unntak til rapporten av Schlaich mfl.

Utviklingen av stavmodellen har skapt et stort gjennombrudd innen arbeidet med å etablere et konsistent dimensjoneringskonsept for både B- og D-regioner. Konseptene og metoden ble presentert for ASCE-ACI (American Society of Civil Engineers-American Concrete Institute) komité 445 i 1998. ACI komité 318 introduserte metoden ved bruk av stavmodellen i sin ACI kode utgitt i 2002. ACI kode er det amerikanske regelverket for analyse og dimensjonering av betong, og danner grunnlaget for andre regelverk rundt om i verden. Dette var en viktig milepæl i arbeidet med utviklingen av et konsistent dimensjoneringskonsept for armert betong. Metoden utviklet aksept blant konstruktører verden over og en hyppig bruk av stavmodellen (Chen mfl., 2011, side 196).

Norsk Standard (NS) omtalte ikke stavmodellen spesifikt før i 3. utgave av NS 3473 utgitt i 1989. I april 2010 ble NS 3473 historie og erstattet av Eurokode 2 (EK2). Ved utarbeidelse av EK2 etablerte CEN (Comité européen de normalisation) en arbeidsgruppe bestående av eksperter fra ulike medlemsland. Utgangspunktet for arbeidet var bestemmelser i eksisterende nasjonale standarder og *CEB-FIP Model Code for Concrete Structures* som var utarbeidet av en annen ekspertgruppe utgitt i 1978. Stavmodellen har helt fra starten vært en del av EK2, da gjeldende utgave av EK2 er den første (Vivian Meløysund, prosjektleder hos Standard Norge, e-post, 5. januar 2016).

Stavmodellen anses i dag som et rasjonelt og hensiktsmessig verktøy ved dimensjonering av armert betong og er mye benyttet.

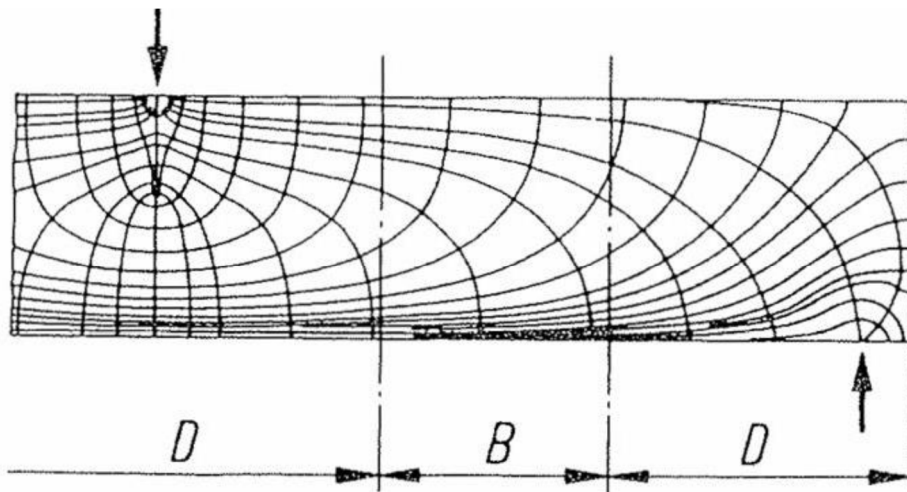
3.2 B- og D-regioner

Armerte betongkonstruksjoner dimensjoneres i hovedsak for å motstå aksial-, skjær- og bøyingskrefter. Beregning av snittkrefter baseres vanligvis på lineær elastisitetsteori, lineær tøyingsfordeling over tverrsnittshøyden og at plane tverrsnitt forblir plane under bøyning. Dette refereres til som Bernoullis hypotese, og er innen klassisk bjelketeori en viktig antagelse (Tuchscherer mfl., 2011, side 155).

En betongkonstruksjon kan deles inn i to typer regioner, B- og/eller D-regioner. Inndelingen baseres på tøyingsfordelingen over tverrsnittshøyden, som er en viktig faktor ved videre dimensjonering av betongkonstruksjonen. En region der Bernoullis hypotese antas gyldig kalles en Bernoulli-region, eller enklere en B-region. For B-regioner er moment ofte den dimensjonerende kraften, og dimensjoneringen baseres vanligvis på bjelketeori. Dimensjoneringen for skjærkrefter er basert på empiriske formler hvis det ikke er behov for

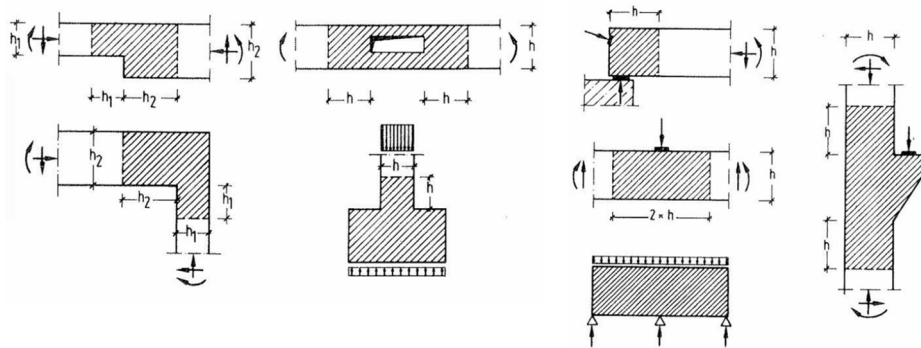
skjærarmoring. En region der Bernoullis hypotese ikke er anvendbar kalles en D-region. Bokstaven *D* kommer av det engelske ordet *disturbed* eller *discontinuity*. For D-regioner avviker tøyningene fra Bernoullis hypotese og bjelketeori kan derfor ikke benyttes for bestemmelse av områdets indre spenningstilstand. D-regioner kan isteden dimensjoneres ved bruk av stavmodeller.

Figur 3-1 viser spenningsstrømmene for en konstruksjonsdel delt inn i B- og D-regioner. Spenningsintensiteten avtar raskt ved økt avstand fra D-regionens utgangspunkt. Den karakteristiske endringen av spenningstrajektoriene gjør identifiseringen av overgang fra en B- til D-region tydelig.



Figur 3-1: Spenningsstrømmer B- og D-regioner (Schlaich mfl., 1987, side 79)

D-regioner er ofte av de mest kritiske områdene i en betongkonstruksjon. Dette på grunn av den ikke-lineære tøyningfordelingen over tverrsnittshøyden med tilhørende spenningskonsentrasjoner, som kan oppstå på grunn av diskontinuiteter ved konstruksjonen. Diskontinuiteter kan oppstå på grunn av brå endring av geometri, konsentrerte laster eller opplagg. Eksempler på D-regioner er; bjelke med endret tverrsnittshøyde, bjelkeneser, høye bjelker, bjelke med utsparinger, forankringssoner, rammehjørner, konsoller, områder med punktlaster og konsentrerte opplager. Noen av disse tilfellene er vist i Figur 3-2, hvor de skraverte områdene illustrerer D-regionene.



Figur 3-2: Ulike D-regioner (Vik, 2005, side 2)

For å bestemme en D-regions utbredelse kan St. Venants prinsipp benyttes. Etter dette prinsippet kan det antas at de ikke-lineære spenningene er neglisjerbare i en avstand lik tverrsnittshøyden h fra diskontinuitetens opprinnelse. I noen tilfeller er St. Venants prinsipp ikke anvendbart og hele konstruksjonen kan karakteriseres som en D-region (Schlaich mfl., 1987, side 77-83). Dette er illustrert i Figur 3-2 for veggen på tre opplegg.

3.3 Hva er en stavmodell?

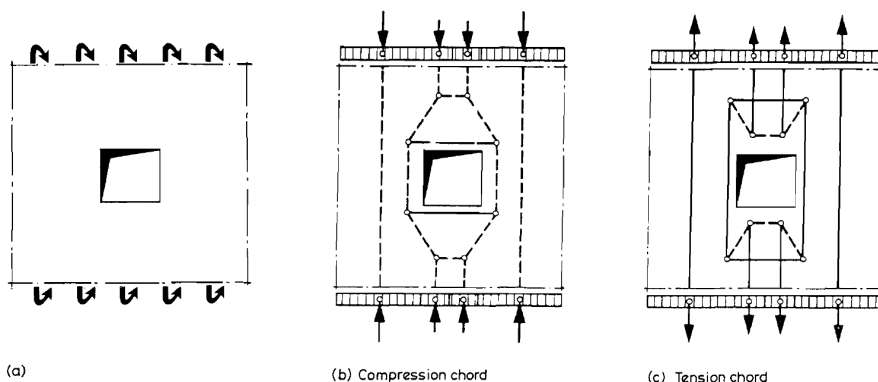
3.3.1 Generelt

Stavmodellen er en modifisering av den generelle fagverksmodellen, og er en anvendelig metode ved dimensjonering av D-regioner. Stavmodellen representerer kraftstrømmen for hele eller et område av konstruksjonen, og består av strekkstaver, trykkstaver og knutepunkt. Metoden tar i bruk antagelsen om at betongen kun har trykkapasitet og at armeringen tar opp alle strekkrefter. Analyse ved bruk av stavmodellen er en metode basert på plastisitetsteoriens nedre grenseteorem, som kommenteres nærmere i kapittel 3.3.3. Hele konstruksjonen eller området betraktes som et likevektsystem der ytre og indre krefter må være i likevekt. Det indre statiske systemet som etableres skal representere den ugunstigste mekanismen. Det vil si den mekanismen som gir lavest bruddlast.

Bruk av stavmodellen er en oversiktlig, relativt enkel og pålitelig metode, hvor det indre statiske bæresystemet i konstruksjonen etableres. Dette gir konstruktøren god innsikt og forståelse av konstruksjonens krefter og virkemåte.

3.3.2 Stavmodellens komponenter

Trykkstavene representerer betongtrykkfelt og strekkstavene representerer ett eller flere lag av armering. Trykk- og strekkstavene møtes i regioner idealisert som noder eller knutepunkt. Et knutepunkt utgjør møtepunktet for tre eller flere staver og er en forenkling av virkeligheten. Knutepunktene navngis av staverne som møtes, og deles inn i de fire ulike typene; CCC, CCT, CTT og TTT. Hvor *C* kommer av det engelske ordet *compression* og *T* av *tension*. Strekkstavene, trykkstavene og knutepunktene må dimensjoneres for å motstå påført kraft (Tuchscherer mfl., 2011, side 156). Komponentenes kapasitet kommenteres senere i kapittel 4.2.6. *Figur 3-3* viser et typisk eksempel på stavmodellen for et momentpåkjent dekke med utsparing.



Figur 3-3: Stavmodellen for et momentpåkjent dekke med utsparing (Schlaich og Schäfer, 1991, side 122)

3.3.3 Plastisitetsteoriens nedre grenseteorem

For plastisk analyse refereres det til nedre og øvre grenseteorem, også omtalt som det statiske og det kinematiske grenseteorem. Teoremene benyttes for å finne øvre og nedre grense av bruddlast for et lasttilfelle i bruddgrensetilstanden (ULS). Plastisitetsteoriens nedre grenseteorem defineres slik:

En valgt (antatt) fordeling av spenninger innen en konstruksjon som tilfredsstiller likevekt mellom indre og ytre krefter og som ikke noe sted overskrider den plastiske kapasitet, vil gi en kapasitet som er mindre eller lik den korrekte verdi (Larsen, 2010, side 25).

Med plastisk kapasitet menes konstruksjonens plastiske deformasjonskapasitet. En må med andre ord sikre at konstruksjonen har tilstrekkelig duktilitet for at teoremet skal være gyldig.

Betong har begrenset kapasitet til å utvikle plastiske tøyninger og er derfor ikke et perfekt plastisk materiale. Perfekt plastisk vil si at materialet antas å ikke ha en elastisk sone og at flytforløpet illustreres horisontalt i et spennings-tøynings diagram. Dersom plastisitetsteoriens nedre grenseteorem skal benyttes, må en derfor sikre at den plastiske deformasjonskapasiteten til betongen ikke overstiges noe sted i konstruksjonen. Er dette sikret kan en anta at betongen oppfører seg perfekt plastisk og det nedre grenseteoremet er dermed gyldig.

Denne antagelsen kan resultere i en overestimering av kapasiteten i D-regioner. Dette kompenseres for ved å kontrollere at duktilitetskravet, som leder til kompatibilitetskravet er overholdt, og ved å innføre en reduksjonsfaktor for betongtrykkfastheten (Schlaich mfl., 1987, side 88). Duktilitetskravet og kompatibilitetskravet kommenteres nærmere i kapittel 3.4, mens reduksjonsfaktoren kommenteres nærmere i kapittel 4.2.6.

Tatt plastisitetsteoriens nedre grenseteori i betraktning, vil kapasiteten til en stavmodell i ULS alltid være lavere enn den faktiske kapasiteten til konstruksjonen dersom følgende punkter overholdes (Tuchscherer mfl., 2011, side 156-157):

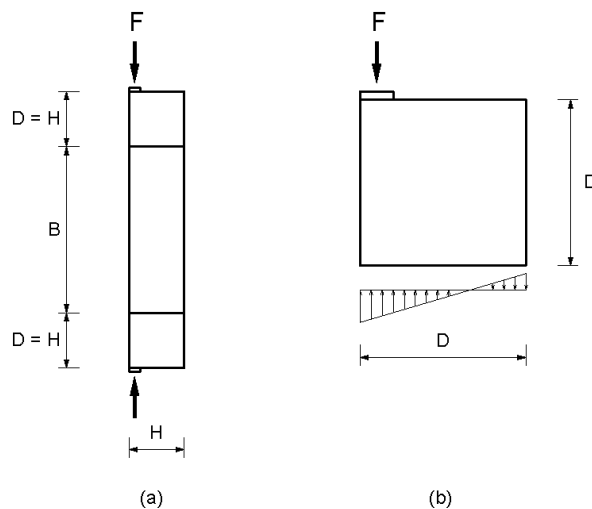
- Likevekt mellom ytre og indre krefter.
- Tilstrekkelig deformasjonskapasitet av antatt stavmodell til å fordele kreftene.
- Spenningene ikke overskrider elementenes kapasitet.

Plastisitetsteoriens øvre grenseteorem benyttes vanligvis for flyteledd- og flytelinjeberegninger av bjelker og rammer, samt bruddlinjeteori for plater (Larsen, 2010, side 25). Det vil derfor ikke kommenteres videre i oppgaven.

3.4 Etablering av stavmodell

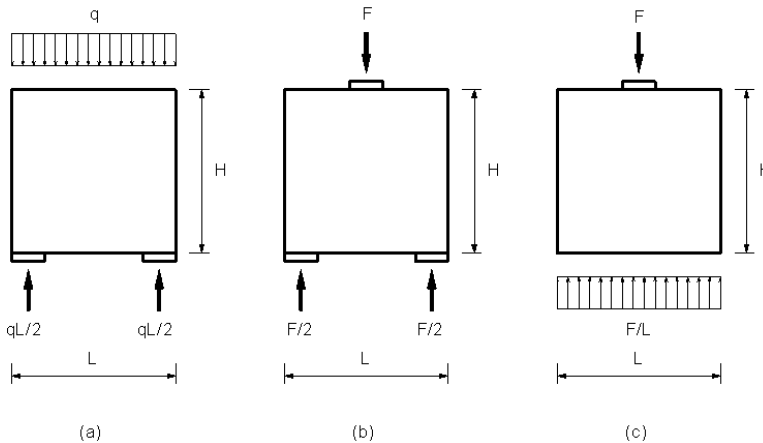
3.4.1 Generelt

Som nevnt tidligere kan D-regioner i betongkonstruksjoner dimensjoneres ved bruk av stavmodeller. Når grensesnittet mellom B- og D-regionene er bestemt kan snittkreftene i grensesnittet beregnes etter vanlig bjelketeori. D-regionen må deretter beregnes for alle kreftene som virker på den, se Figur 3-4. Kraftene er representert av snittkreftene i grensesnittet mellom B- og D-regionen beregnet etter vanlig bjelketeori, andre ytre krefter og oppleggskrefter.



Figur 3-4: (a) Oppdeling i B- og D-regioner; (b) D-region med alle ytre krefter påtegnet

I andre tilfeller kan konstruksjonen i sin helhet utgjøre en D-region, for eksempel høye bjelker som vist i Figur 3-5. Fremgangsmåten er fortsatt den samme hvor en begynner med å tegne D-regionen med alle de ytre kreftene som virker på den.



Figur 3-5: Høye bjelker. (a) Fritt opplagt vegg med jevnt fordelt last; (b) fritt opplagt vegg med punktlast; (c) vegg med jevnt fordelt linjeopplegg og punktlast

Videre etableres et indre statisk system som best mulig representerer den faktiske spenningsstrømmen i D-regionen. Det statiske systemet består av trykkstaver av betong og strekkstaver av armering som til sammen utgjør en stavmodell. Stavmodellen utgjør med dette et indre «fagverk», hvor de ytre kreftene på D-regionen angriper i fagverkets (stavmodellens) knutepunkter. Kraftene i stavmodellen kan bestemmes ved å kreve likevekt mellom indre og ytre krefter. Deretter kan stavene og knutepunktene dimensjoneres. Kravet om at trykk- og strekkstavene bør representere den faktiske spenningsstrømmen er blant annet formulert av Schlaich mfl., (1987), hvor det på side 88 står:

Metoden innebærer at konstruksjonen er beregnet etter plastisitetsteoriens nedre grenseteorem. Siden den plastiske deformasjonskapasiteten til betong er begrenset, må det indre statiske systemet (stavmodellen) velges slik at deformasjonskapasiteten ikke overstiges noe sted i konstruksjonen før den antatte spenningstilstanden er oppnådd i resten av konstruksjonen.

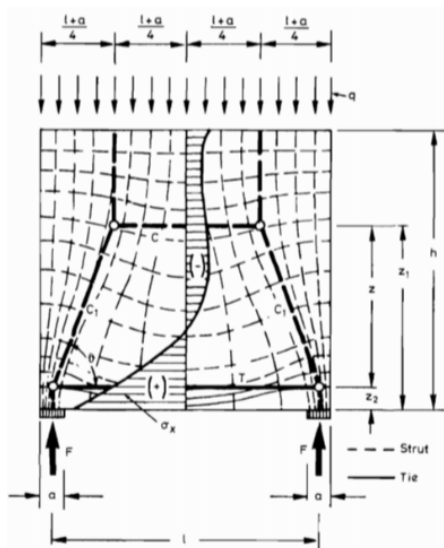
Dette kan betegnes som duktilitetskravet og er spesielt viktig for konstruksjoner utsatt for høye spenninger. Kravet kan antas tilfredsstilt dersom trykk- og strekkstavene følger en lineært elastisk spenningsstrøm i retning og intensitet. Duktilitetskravet leder dermed videre til det som i rapporter av nyere dato omtales som et kompatibilitetskrav. Med dette menes kompatibilitet mellom stavmodellen og den lineær elastiske spenningsstrømmens retning og intensitet. For at stavmodellen skal oppnå kompatibilitet sier referansene at vinkelen

mellom trykk- og strekkstavene som et minimum bør være 45° og helst 60° (Schlaich og Schäfer, 1991, side 114, Hendy og Smith, 2007, side 58).

For konstruksjoner med normale eller små spenninger kan kompatibilitetskravet modereres. Strekkstavene (armeringen) plasseres der det praktisk er mest hensiktsmessig og konstruksjonen vil tilpasse seg den valgte stavmodellen. Det anbefales likevel at det i hvert tilfelle utføres en analyse og kontroll av valgt stavmodell.

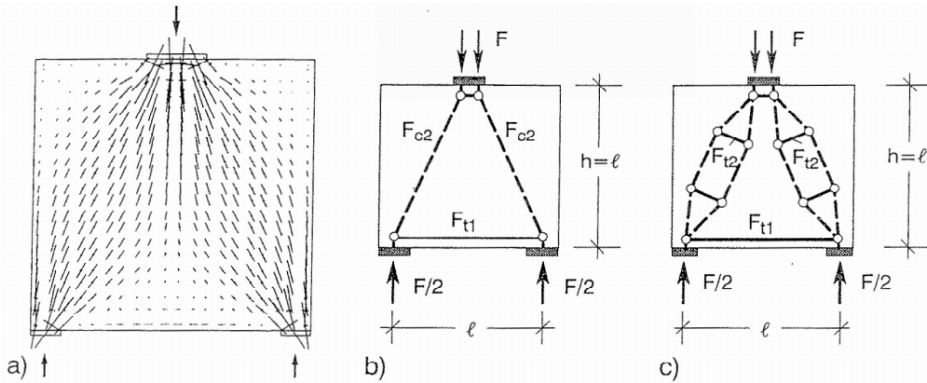
For D-regioner må stavmodellen utvikles for hvert individuelle tilfelle. Etter noe trening er de i prinsippet enkle å etablere. Å etablere stavmodeller kan sammenlignes med å velge et indre statisk system for konstruksjonen. Det er betydelig enklere å etablere stavmodeller når en har tilgang til den lineærelastiske spenningsstrømmen. Spenningsstrømmene kan etableres ved hjelp av en FEM-analyse eller med kraft-sti metoden. Kraft-sti metoden kommenteres nærmere i kapittel 3.4.3 og viser seg å være en intuitiv og effektiv metode for etablering av stavmodellen. Når konstruksjonens eller lastens geometri blir komplisert kan det være utfordrende å etablere spenningsstrømmen ved hjelp av kraft-sti metoden. Selv for den relativt enkle konstruksjonen i *Figur 3-4*, viser det seg at det ikke er rett frem å etablere kraftstiene.

3.4.2 Stavmodell etablert med lineærelastisk FEM-analyse



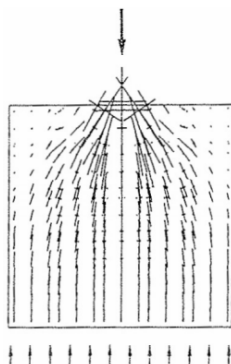
Figur 3-6: Lineær elastisk FEM-analyse av fritt opplagt vegg med jevnt fordelt last (Schlaich og Schäfer, 1991, side 114)

Et lineært elastisk spenningsfelt for konstruksjonen i *Figur 3-5(a)* er fremstilt i *Figur 3-6*. De tynne stiplede linjene kalles spenningsstrajektorier og indikerer retningen på spenningsstrømmen. Det horisontale spenningsforløpet er vist over et vertikalt snitt ved feltmidte. Figuren viser videre hvordan stavene kan plasseres og orienteres etter spenningsenes tyngdepunkt. De tykke stiplede linjene indikerer trykkstaver og de tykke heltrukne linjene indikerer strekkstaver. Ut fra det horisontale spenningsforløpet ved feltmidte plasseres en horisontal trykkstav i trykkspenningens tyngdepunkt og en horisontal strekkstav i strekkspenningens tyngdepunkt. Deretter plasseres noder over senter av hvert opplegg, i krysningpunktet mellom strekkarmen og resultanten av den vertikale trykkspenningen over oppleggene. Med dette er strekkstavens lengde fastsatt. Den jevnt fordelte lasten på øvre rand deles i to og fordeles likt på hvert opplegg ut fra momentlikevekt. Stavmodellens geometri er dermed bestemt basert på, og i samsvar med de lineær elastiske spenningsstrømmene.



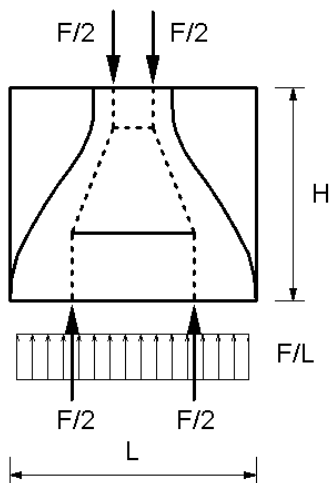
Figur 3-7: Lineær elastisk FEM-analyse av fritt opplagt vegg med punktlast (Vik, 2005, side 3)

En lineær elastisk FEM-analyse for konstruksjonen i Figur 3-5(b) er fremstilt i Figur 3-7(a). Den illustrerer retninger og intensitet for hovedspenningene. Fra figuren synes det opplagt at kraftresultanten i hovedsak følger en rett linje fra den påførte punktlasten til oppleggene. Kun rett ved den påførte punktlasten og nær oppleggene er det en retningsendring der spenningsstrømmen går fra skrå til vertikal. Figur 3-7(b) viser stavmodellen som er etablert med utgangspunkt i dette. Spenningsstrømmene i (a) avslører også en annen effekt; fra den påførte punktlasten på veggens øvre rand fordeler trykket seg ut i konstruksjonen før det ved oppleggene innsnevres igjen. Figur 3-7(c) viser den videre utviklede stavmodellen hvor denne effekten er tatt i betraktning. Effekten henviser til et viktig prinsipp for spenningsstrømmer; flaskeformet spenningsutbredelse. Denne effekten ser en igjen i trykkfeltene i Figur 3-7(a). Når spenningstrajektoriene/hovedspenningene avbøyes følger tverrstrekk, også kalt spaltstrekk, som vanligvis krever særskilt armering, kalt spaltstrekkarmering. Figur 3-7(c) viser hvordan hver trykkstav fra Figur 3-7(b) er omgjort til en ny stavmodell med seks trykkstaver og to strekkstaver. Strekkstavene indikerer dermed spaltstrekkarmeringen.



Figur 3-8: Lineær elastisk FEM-analyse av vegg med jevnt fordelt linjeopplegg og punktlast (Vik, 2005, side 6)

Resultatene fra en lineær elastisk FEM-analyse av Figur 3-5(c) er fremstilt i Figur 3-8. Den illustrerer retninger og intensitet for hovedspenningene. Punktlasten fordeler seg ut i konstruksjonen i en jevn S-kurvet spenningsstrøm, før den etter en avstand fra punktlasten går over til å være jevnt fordelt over veggens bredde.



Figur 3-9: Omriss av idealisert spenningsstrøm og tilhørende stavmodell

Figur 3-9 er en idealisering av Figur 3-8. Punktlasten på øvre rand er først gjort om til en jevnt fordelt last, fordelt over en bredde tilsvarende lastflatens bredde. Deretter er lasten delt opp i to like store punktlaster. Det samme er gjort med den jevnt fordelte oppleggsreaksjonen ved veggens nedre rand. Stavmodellen er deretter etablert mellom punktlastene og følger med dette spenningsstrømmen. Dette fremstiller prinsippet om at punktlaster fordeler seg i konstruksjonen via en flaskeformet spenningsstrøm (Schlaich mfl., 1987, side 97-107).

Figur 3-6, Figur 3-7 og Figur 3-8/Figur 3-9 utgjør (sammen med stavmodeller for bjelkeneser og konsoller som ikke omtales her) de grunnleggende mest brukte stavmodellene. Med forståelse for disse modellene kan en etablere stavmodeller for de fleste D-regioner der en lineær elastisk analyse av spenningsstrømmen foreligger. Den mest eksakte metoden for å finne en lineær elastisk spenningsstrøm i dag, er ved å bruke FEM-analyse, som er en relativt energikrevende metode. Det er derfor ønskelig med en mer effektiv og ingeniørmessig metode for å etablere D-området spenningsstrøm. Kraft-sti metoden er da et kjent og mye brukt alternativ.

3.4.3 Stavmodell utviklet med kraft-sti metoden

Kraft-sti metoden er en «manuell» måte å bestemme spenningsstrømmen i en konstruksjon på. Utgangspunktet er også nå D-regionen med de ytre kreftene. Jevnt fordelte krefter gjøres om til punktlaster og en studerer deretter hvordan kreftene beveger seg gjennom D-regionen mellom de ytre punktlastene. Veien kreftene går skisseres på D-regionen og utgjør dermed kraftstiene. Kraftstiene dannes ved at kreftene på den ene siden av D-regionen finner sin motpart på den andre siden, uten at de krysser hverandre. De begynner og ender ved sentrum av korresponderende ytre kraft og har samme retning som de indre spenningsstrømmene. Når en tegner kraftstiene er det viktig å huske at kurvaturer/retningsendringer oppstår nærmere det som skaper diskontinuiteten enn grensesnittet mot B-regionen (*Schlaich mfl., 1987, side 92-93*). Dessuten ønsker kreftene å gå den korteste og mest strømlinjeformede veien med minst motstand og deformasjon etter energiprinsippet. Dette kan uttrykkes med formel (3-1).

$$\sum F_i L_i \varepsilon_{mi} = \text{Minimum} \quad (3-1)$$

F_i Kraft i strekk eller trykkstav i

L_i Lengde av stav i

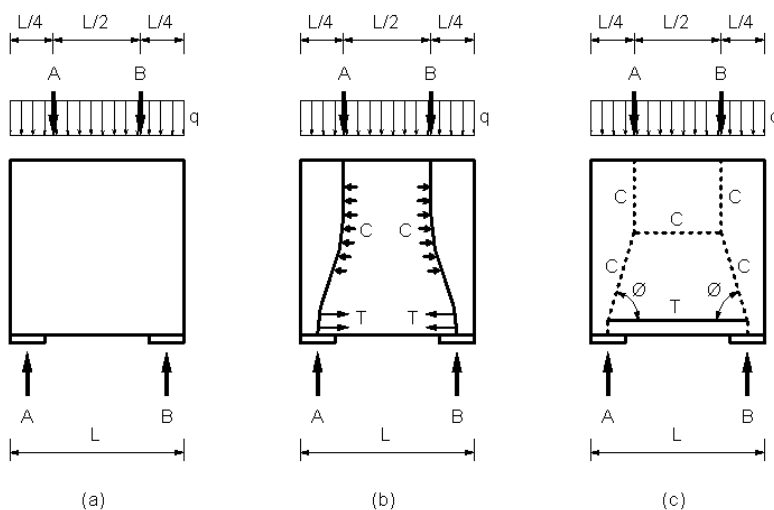
ε_{mi} Gjennomsnitts tøyning av stav i

Formel (3-1) er utledet fra prinsippet om minste tøyningenergi for lineær elastisk oppførsel av trykk- og strekkstaver (*Schlaich mfl., 1987, s. 84-96*). Tøyningenergien for trykkstavene kan neglisjeres og det er kun tøyningenergien i strekkstavene som vurderes. Dette fordi armeringen er mer

deformerbare enn betongen. Stavmodellen med færrest og kortest strekkstaver er dermed den beste.

Det kreves en viss grad av konstruksjonsforståelse for å utvikle kraftstiene og det kan være nyttig å sitte flere sammen å diskutere seg frem til den mest riktige kraft-sti modellen. Noen konstruksjoner er så like de grunnleggende konstruksjonene (*Figur 3-6, Figur 3-7, Figur 3-8/Figur 3-9*) at kraftstiene kan utvikles direkte fra disse. Andre konstruksjoner er mer kompliserte og en må utarbeide flere kraft-sti modeller før en kan bestemme den mest riktige. Den grunnleggende regelen er at det må være kompatibilitet mellom den eksakte lineær elastiske spenningsstrømmen og spenningsstrømmen utviklet med kraft-sti metoden. Dette er som tidligere nevnt spesielt viktig for konstruksjoner utsatt for høye spenninger, mens det for konstruksjoner med normale eller små spenninger ikke har like stor betydning. I disse tilfellene vil konstruksjonen tilpasse seg det valgte statiske systemet.

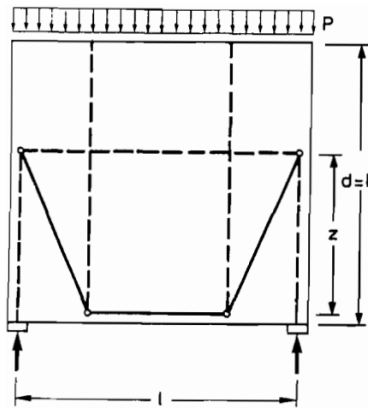
Eksempel på bruk av kraft-sti metoden



Figur 3-10: Kraft-sti metoden på fritt opplagt vegg med jevnt fordelt last

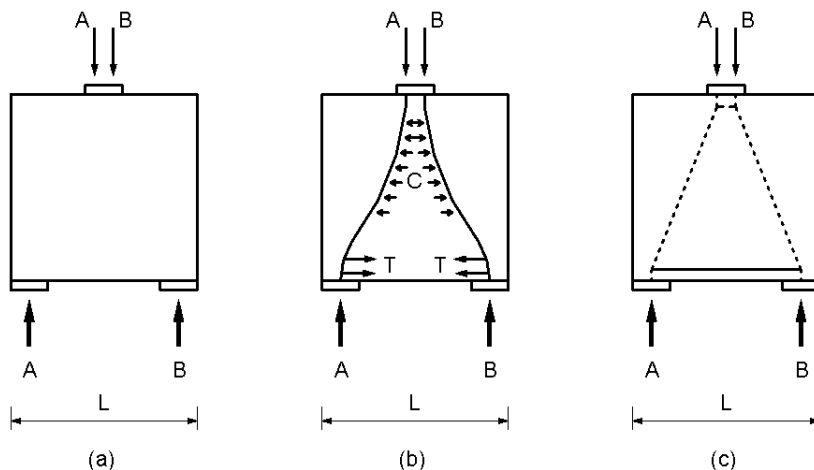
I *Figur 3-10* er konstruksjonen i *Figur 3-5(a)* analysert med kraft-sti metoden. Først deles den jevnt fordelte lasten opp i to punktlaster som plasseres etter superposisjonsprinsippet. I dette tilfellet er $A = B = qL/2$ som betyr at A og B på veggens øvre rand plasseres i fjerdedelspunktene. En S-kurve skisseres mellom

de påførte punktlastene og oppleggsreaksjonene. Der kurven bøyer av utvikles horisontale krefter. Hvor C indikerer trykk *compression* og T indikerer strekk *tension*. Deretter erstattes kraftstiene med trykk- og strekkstaver. Stavmodellen (det indre statiske systemet) er dermed etablert og stavene og knutepunktene kan dimensjoneres. I noen tilfeller kan en bli usikker på om en har utviklet den mest riktige stavmodellen. Dette kan belyses med *Figur 3-11* som er et alternativ til *Figur 3-10(c)*.



Figur 3-11: Alternativ stavmodell for fritt opplagt vegg med jevnt fordelt last (Schlaich og Schäfer, 1991, side 115)

For denne konstruksjonen vil energiprinsippet fra formel (3-1) utelukke *Figur 3-11* til fordel for *Figur 3-10(c)*, da strekkstavene i denne modellen er kortere.



Figur 3-12: Kraft-sti metoden på fritt opplagt vegg med punktlast

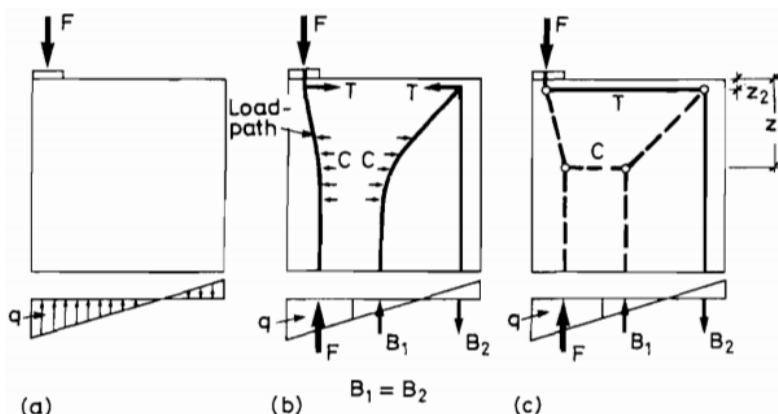
I Figur 3-12 er konstruksjonselementet Figur 3-5(b) analysert med kraft-sti metoden. Først gjøres punktlasten om til en jevnt fordelt last fordelt over bredden på lastflaten. Deretter deles lasten opp i to like store punktlaste. Nå kan kraftstiene skisseres som en S-kurve mellom de påførte lastene og oppleggsreaksjonene. Der kurven bøyer av utvikles horisontale krefter. Til slutt erstattes kraft-stiene med staver og stavmodellen er etablert. Tilsvarende metode kan benyttes på Figur 3-5(c). Punktlasten gjøres om til to punktlaste, det samme gjør en med den jevnt fordelte oppleggsreaksjonen, kraftstiene etableres mellom punktlastene og erstattes med trykk- og strekkstaver.

Det kan nå settes opp en fremgangsmåte for etablering av stavmodeller med kraft-sti metoden:

1. Tegn opp diskontinuitetsområdet med de ytre kreftene.
2. Gjør om jevnt fordelte laster til punktlaste og plasser dem etter superposisjonsprinsippet.
3. Tegn linjer (kraftstier) mellom kreftene etter følgende prinsipp:
 - a. Hver kraft har en motkraft på motsatt side av D-regionen.
 - b. Kraftstiene skal ikke krysse hverandre.
 - c. Kraften går den korteste og mest strømlinjeformede vei.
 - d. Trykkspenninger beveger seg langs S-kurvede stier.
 - e. Spenningsforstyrrelsen er størst der den oppstår og går gradvis over til spenningsstilstander der bjelketeori kan benyttes (B-regioner). Dette medfører at kurvaturene er størst nærmest spenningsforstyrrelsen.

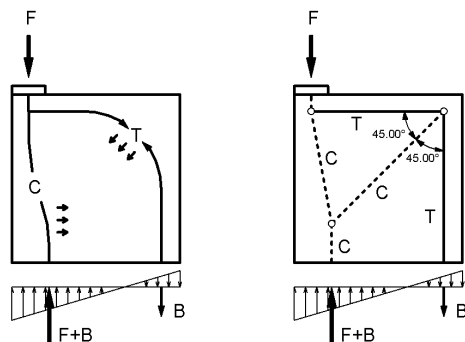
- f. Der kraftstiene bøyer av utvikles horisontale krefter.
 - g. Vinkel mellom trykk- og strekkresultanter bør være minimum 45° og helst 60° .
4. Erstatt kraftstiene med trykk- og strekkstaver. Husk at alle knutepunkt i D-området må være i likevekt, det vil si ha tilstrekkelig antall trykk- og strekkstaver til å sikre likevekt.

Går en nå tilbake til *Figur 3-4* og ser hvordan stavmodellen for dette konstruksjonselementet kan utvikles, kan det bli som følgende:



Figur 3-13: Eksempel på kraft-sti metoden for eksentrisk belastet tverrsnitt (Schlaich og Schäfer, 1991, side 114)

Dersom en først ser på kraftstiene i *Figur 3-13(b)*, er disse etablert på følgende måte: Punktlasten B_2 representerer strekkspenningen i snittet mellom B- og D-regionen. Det kan tenkes at B_2 følger randen opp til øvre høyre hjørne hvor den møter sin motpart. Motparten kommer av at trykkraften under F fordeler seg som en S-krue inn mot senter av D-området. Når randstrekket gjør en retningsendring i det øvre høyre hjørnet utvikles trykkrefter inn mot senter av D-området. Skal en tilfredsstillende kompatibilitetskravet må resultanten av dette trykket ha en vinkel til sine tilhørende strekkresultanter på minimum 45° . Dersom en alternativt lar dette trykket fortsette helt frem til det treffer kraftstien fra F , kan modellen se ut som vist i *Figur 3-14*.



Figur 3-14: Alternativ stavmodell

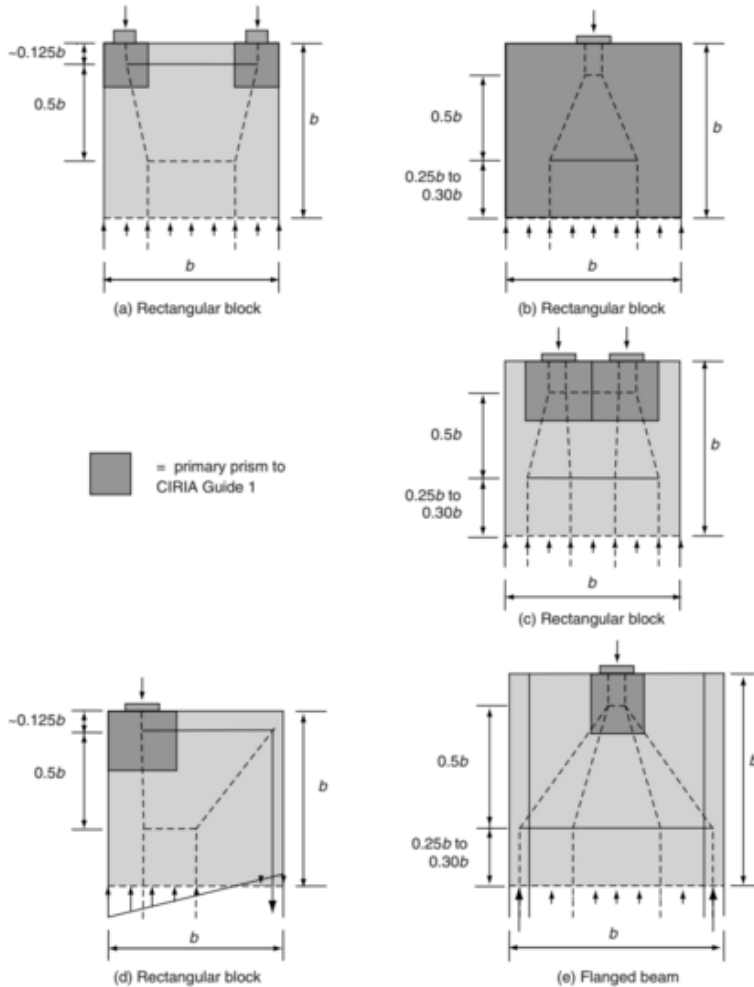
Problemet med denne løsningen er at den medfører at den S-kurvede kraftstien til punktlasten F fordeler seg over en relativt stor høyde av vegg, nesten ned til overgangen fra D- til B-regionen. Dette strider mot prinsippet om at spenningsforstyrrelser og dermed kurvaturer er størst nært spenningsforstyrrelsen som i dette tilfellet er punktlasten F . Modellen i Figur 3-13 er derfor bedre da den konsentrerer kurvaturene nærmere forstyrrelsen. Det kan derfor tenkes at trykket som kommer fra øvre høyre hjørne gjør en sving før den møter kraftstien til F . Den møter dermed sin motpart i bunnen av konstruksjonen i den motsatt vendte kraften B_1 , der $B_1 = B_2$ (Figur 3-13(b)). Når kraftstiene (spenningsstrømmen) er utviklet, erstattes de av trykk- og strekkstaver som vist i Figur 3-13(c), og kreftene i systemet kan beregnes.

Som eksempelet understreker er det ikke alltid rett frem å etablere spenningsstrømmer med kraft-sti metoden. Selv det relativt enkle D-området i Figur 3-4 åpner for flere tolkninger. Metoden krever derfor en del ingeniørmessig forståelse, og det er vanskelig å lage konsistente regler for etablering av kraftstier som gjelder for alle tilfeller. Punkt én til fire nevnt over definerer generelle prinsipper og åpner for tolkning, for eksempel hvilken vinkel mellom 45° og 60° som skal benyttes mellom trykk- og strekkstavene. I kapittel 3.5 kommenteres hvilke vinkler ulike litteratur og regelverk anbefaler.

Konstruksjoner får som regel et tredimensjonalt spenningsforløp. I praksis kan en normalt regne med plane krafttilstander i to retninger. Spaltestrekkarmering dimensjoneres ut fra den retningen som gir størst spaltestrekk (Vik, 2005, side 4).

3.4.4 Lokal og generell sone

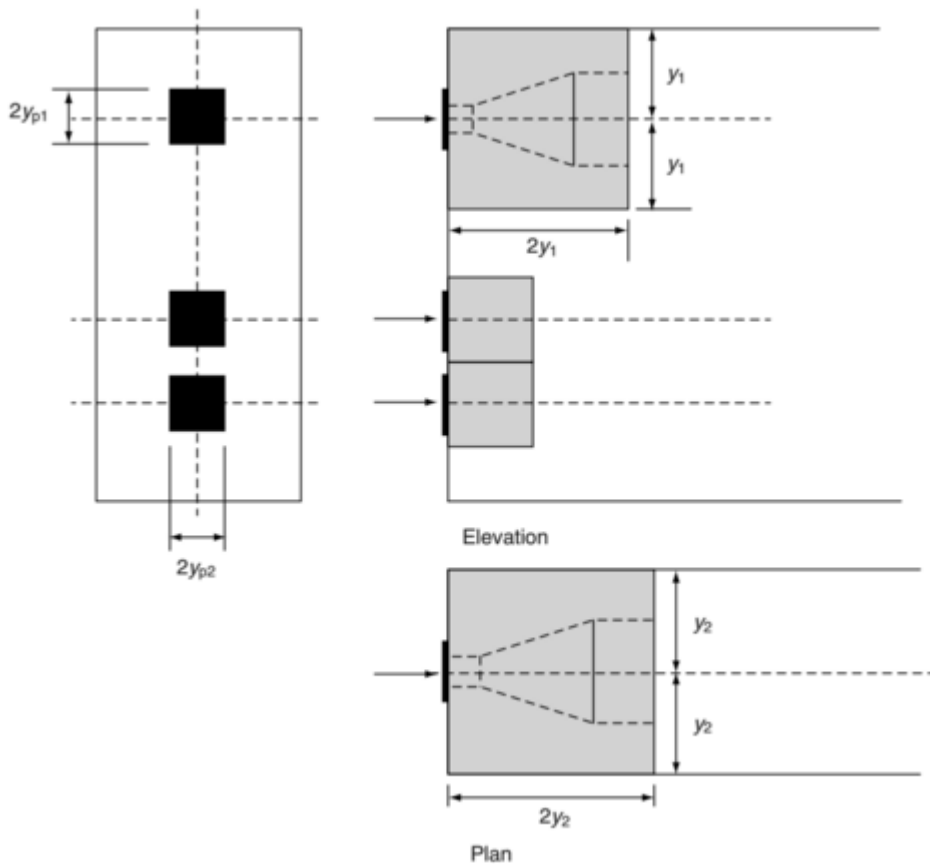
Til nå har hovedfokuset vært en global betraktning av hele D-regionen. Det er drøftet ulike stavmodeller som sikrer at kreftene beveger seg gjennom D-regionen på fornuftig vis. For D-regioner med påførte punktlaster kan det oppstå en lokal virkning som må tas hensyn til. D-regionen deles dermed inn i to typer soner; lokal og generell sone.



Figur 3-15: Lokal og generell sone for ulike lasttilfeller (Hendy og Smith, 2007, side 266)

Hendy og Smith viser hvordan den lokale og generelle sonen overlapper hverandre. Først etableres stavmodell for den lokale sonen, hvor de konsentrerte kreftene rett etter kraftinnføring ivaretas. Deretter etableres

stavmodell for generell sone med samme fremgangsmåte som tidligere beskrevet. Stavmodeller for sonene er vist i *Figur 3-15*.

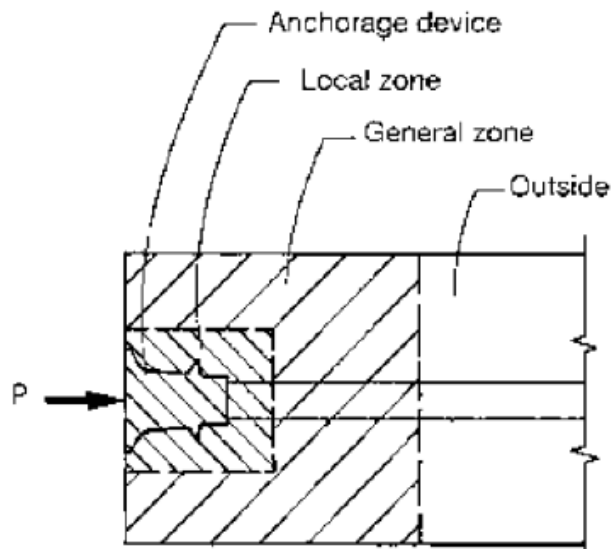


Figur 3-16: Definisjon av lokal sone. Grå sone viser lokale soner (Hendy og Smith, 2007, side 265)

Det fremkommer av *Figur 3-16* i det vertikale snittet, betegnet *Elevation*, at lokal sone begrenses av punktlastens plassering. Høyde og bredde på lokal sone bestemmes som; den minste av nærliggende sidekant eller avstanden mellom punktlastenes senterlinjer (Hendy og Smith 2007, side 264). Samme prinsipp gjelder det horisontale snittet, betegnet *Plan*. Geometrien til det horisontale og vertikale snittet trenger ikke å være identisk, men skal være symmetrisk om senterlinjen til punktlasten. Hvert snitt må kontrolleres, og begge må tas hensyn til ved beregning av nødvendig armering.

Når punktlasten påføres gjennom sirkulære bæreplater, kan de ved dimensjonering betraktes som firkantede bæreplater (CIRIA Guide 1, 1984, side 14).

For konstruksjoner med normale eller små punktlaster vil tverrstrekk i lokal sone ivaretas av innlagt armering fra global betraktning av generell sone. For konstruksjoner med store punktlaster må tverrstrekket i lokal sone armeres for i tillegg. Etteroppspent betong er et typisk eksempel hvor dette er tilfelle. Spennkraften utgjør her en stor punktlast påført konstruksjonen gjennom relativt små ankre. Dette forårsaker høy spenning rett bak forankringsplaten. Som nevnt tidligere vil den lokale spenningen reduseres når kraften fordeles ut i tverrsnittet. D-regionens inndeling i lokal og generell sone bak forankringsplaten er illustrert i *Figur 3-17* (Rogowsky og Marti, 1991, side 7).



Figur 3-17: Forankringssone i en betongkonstruksjon (Rogowsky og Marti, 1991, side 7)

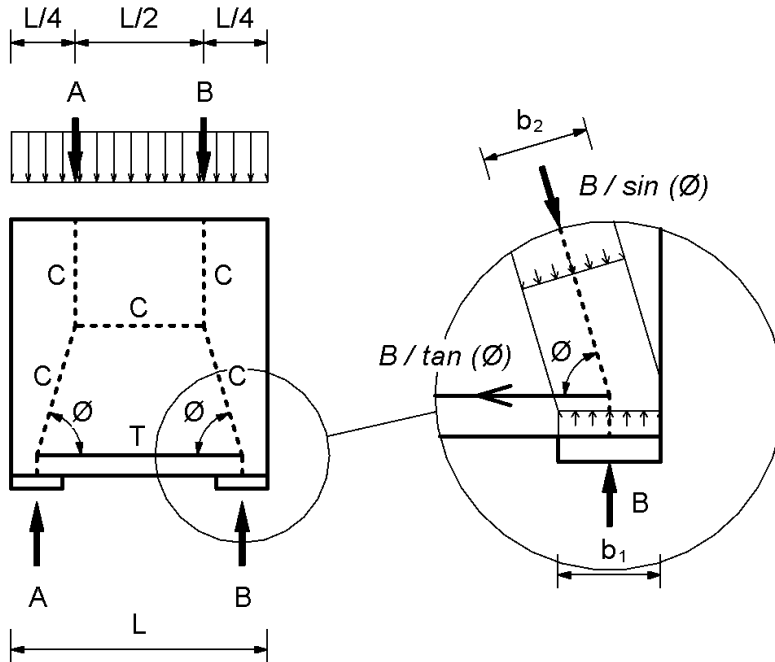
3.5 Vinkel mellom trykk- og strekkstaver

3.5.1 Generelt

Det har tidligere vært vist hvordan en ved å studere spenningsstrømmen i et diskontinuitetsområde utviklet ved en lineær elastisk analyse, kan plassere noder og staver i spenningsstrømmens tyngdepunkt. Når spenningsstrømmen er identifisert, enten ved bruk av kraft-sti metoden eller en lineær elastisk FEM-analyse, kan stavmodellens geometri bestemmes ut fra prinsippene kommentert i kapittel 3.4.3. Sammenlignet med en FEM-analyse er kraft-sti metoden intuitiv og effektiv, og er derfor å foretrekke. I mange tilfeller er det likevel utfordrende å fastlegge spenningsstrømmen så presist at en har tilstrekkelig informasjon til å bestemme stavmodellens geometri nøyaktig. Dette gjelder i hovedsak den eksakte plasseringen av tyngdepunktet til de horisontale trykk- og strekkspenningene. Som en følge av dette vet en ikke hvor de tilhørende trykk- og strekkstavene eksakt bør plasseres for å sikre kompatibilitet. Dette gjelder for eksempel for høye bjelker med jevnt fordelt linjelast, lagt opp på ett eller flere punktopplegg (*Figur 3-10, Figur 3-12 og Figur 3-18*). Det generelle prinsippet om at vinkelen mellom trykk- og strekkstavene ikke bør være mindre enn 45° og helst 60° (Schlaich og Schäfer, 1991, side 114, Hendy og Smith, 2007, side 58) er ikke presist nok. Har en mer definerte retningslinjer for valg av vinkel eller avstand mellom horisontal trykk og strekkstav, vil dette utgjøre et sentralt hjelpemiddel for etablering av stavmodell ved bruk av kraft-sti metoden.

3.5.2 Vinkelens betydning

Vinkelen mellom trykk- og strekkstaven er som tidligere forklart først og fremst avgjørende for å tilfredsstille kompatibilitet mellom stavmodellen og den lineær elastiske spenningsstrømmen. I det følgende illustreres prinsipielt vinkelens betydning i den praktiske dimensjoneringen av stavmodellen.



Figur 3-18: Bestemmelse av knutepunktets geometri i en stavmodell

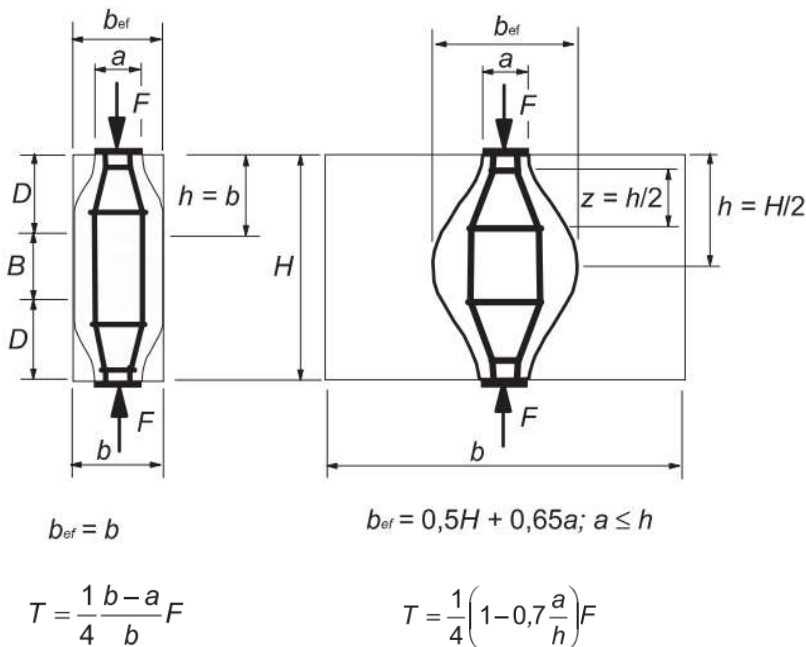
Figur 3-18 viser at en lavere verdi for vinkelen \varnothing resulterer i at b_2 blir større. Selv om b_2 alltid vil være større enn b_1 , vil likevel ikke b_1 alltid være dimensjonerende for trykkkapasiteten til knutepunktet. Dette fordi den skrå trykkstaven med bredde b_2 ofte må beregnes med redusert trykkkapasitet på grunn av tverrstrekk. Dette kommenteres nærmere i kapittel 4.2.6, hvor trykkkapasiteten til knutepunkt kommenteres. Kort sagt vil lave vinkler kunne være heldig for trykkkapasiteten til knutepunktet, men uheldig for strekkstavene (armeringen). Her vil lave vinkler resultere i større strekkraft og derfor et økt armeringsbehov. Det kan derfor ikke fastsettes generelt om det er for høy eller lav vinkel som vil overestimere kapasiteten.

3.5.3 Vinkler i litteratur

Som nevnt i kapittel 3.1 er dimensjonering med stavmodeller godt implementert i dagens metoder for analyser av D-regioner. Eurokodene har innført metoden og den er en del av undervisningen i betongfag rundt om i verden. En finner derfor konkrete anbefalinger til hvordan stavmodellen kan etableres både i regelverk og litteratur.

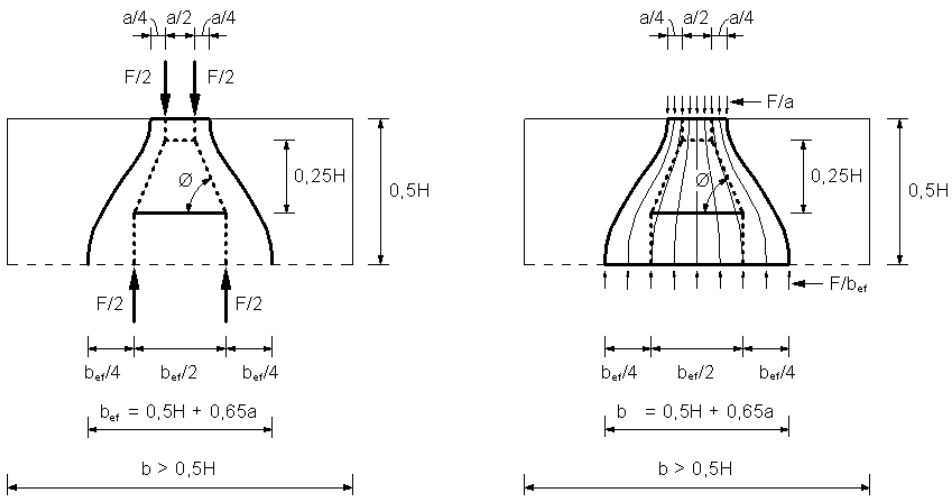
Eurokode 2, Del 1-1

Kapittel 6.5 *Dimensjonering med stavmodeller* beskriver regler og anbefalinger for bruk av stavmodeller i EK2. Punkt 6.5.3 (3) angir strekkraften T , strekkstaven kan dimensjoneres for områder med fullstendig eller delvis diskontinuitet. Med fullstendig diskontinuitet menes tilfeller der konstruksjonens geometri ikke setter begrensninger for spenningsutbredelsen og er definert gjeldende dersom $b > H/2$, der b er bredden på konstruksjonsdelen og H er høyden på konstruksjonsdelen. Delvis diskontinuitet gjelder for konstruksjoner der konstruksjonens geometri begrenser diskontinuitetsområdet og er definert for konstruksjoner der $b \leq H/2$. Regelen bygger på St. Venants prinsipp og flaskeformet spenningsutbredelse omtalt av Schlaich mfl. (1987).



Figur 3-19: (t.v) Delvis og (t.h) fullstendig diskontinuitet med flaskeformet spenningsutbredelse og tilhørende formler for strekkraften T i strekkstaven (EK2-1-1, Figur 6.25)

For delvis diskontinuitet begrenses diskontinuitetens utbredelse i bredden av tverrsnittbredden b . For fullstendig diskontinuitet begrenses diskontinuitetens utbredelse i bredden av minimumsverdien av b_{ef} som er $H/2$ og maksimumsverdien på $H/2 + 0,65a$. Diskontinuitetens utbredelse forblir uendret ved $b > H/2$. *Figur 3-19* gir ikke stavmodellens geometri direkte. Dersom en bruker figuren for fullstendig diskontinuitet sammen med en figur av flaskeformet spenningsutbredelse (Schlaich og Schäfer, 1991, Figur 7, side 115) og de generelle prinsippene for stavmodeller, kan geometrien utledes på følgende måte:



Figur 3-20: Stavmodellens geometri slik den indirekte er beskrevet i EK2-1-1. Kraften F fordeles likt i hver trykkstav og trykkstavene plasseres følgelig i fjerdedekspunktene

Av *Figur 3-20* kan horisontalkomponenten x til de skrå trykkstavene beregnes på følgende måte:

$$x = \frac{\frac{b_{ef}}{2} - \frac{a}{2}}{2} = \frac{b_{ef} - a}{4} \quad (3-2)$$

$b_{ef} = 0,5H + 0,65a$ som definert i EK2-1-1 settes inn i formel (3-2), dette gir:

$$x = \frac{0,5H + 0,65a - a}{4} = \frac{0,5H - 0,35a}{4} \quad (3-3)$$

Vinkelen \emptyset kan dermed beregnes:

$$\tan \emptyset = \frac{0,25H}{x} = \frac{\frac{H}{4}}{\frac{0,5H - 0,35a}{4}} = \frac{H}{\frac{H}{2} - 0,35a} = \frac{2H}{H - 0,7a} \quad (3-4)$$

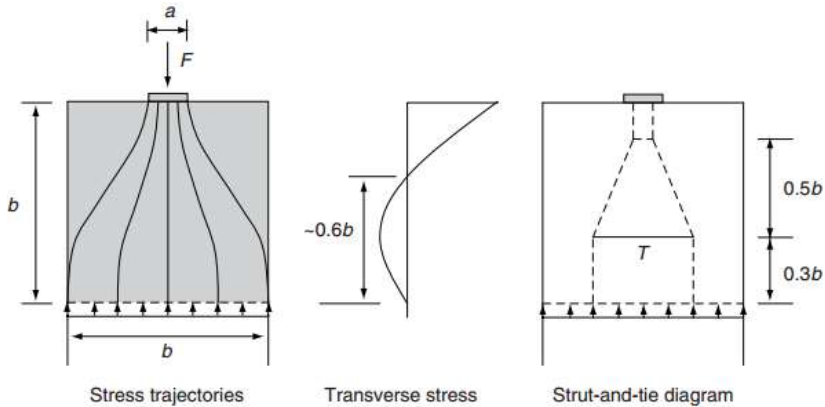
Setter en oppleggsbredden $a = 0$ finner en den laveste vinkelen: $\emptyset = \arctan(2) = 63,43^\circ$. Setter en oppleggsbredden a lik maksimalbegrensningen på $H/2$ finner en den høyeste vinkelen: $\emptyset = \arctan[2 / (1 - 0,7 \times 0,5)] = 72^\circ$. Ser en på uttrykket for strekkraften T både for delvis og fullstendig diskontinuitet og setter oppleggsbredden $a = 0$ inn i uttrykkene, finner en igjen den samme minimumsvinkelen:

$$\tan \emptyset = \frac{F/2}{T} = \frac{F/2}{F/4} = 2 \Rightarrow \arctan(2) = 63,43^\circ$$

For fullstendig diskontinuitet uttrykkes strekkraften T , ved forholdet mellom høyden H i *Figur 3-19* og oppleggsbredden a . I realiteten er det forholdet mellom den effektive bredden b_{ef} og oppleggsbredden a som utvikler strekkraften. Kravet $b > H/2$ sørger for at trykkutbredelsen ikke overestimeres i forhold til den faktiske tverrsnittsbredden b . Det som i hovedsak er poenget med metoden er å sette begrensninger for utbredelsen av kraften parallelt med kraftretningen når b blir stor. Effektiv bredde b_{ef} og strekkraften T uttrykkes derfor som et forhold mellom oppleggsbredden a og høyden H . For delvis diskontinuitet der $b \leq H/2$ ser en av *Figur 3-19* at $h = H/2$ er erstattet av $h = b$. Som følge av dette er formelen for T for delvis diskontinuitet et uttrykk av forholdet mellom den tilgjengelige bredden $b_{ef} = b$ og oppleggsbredden a .

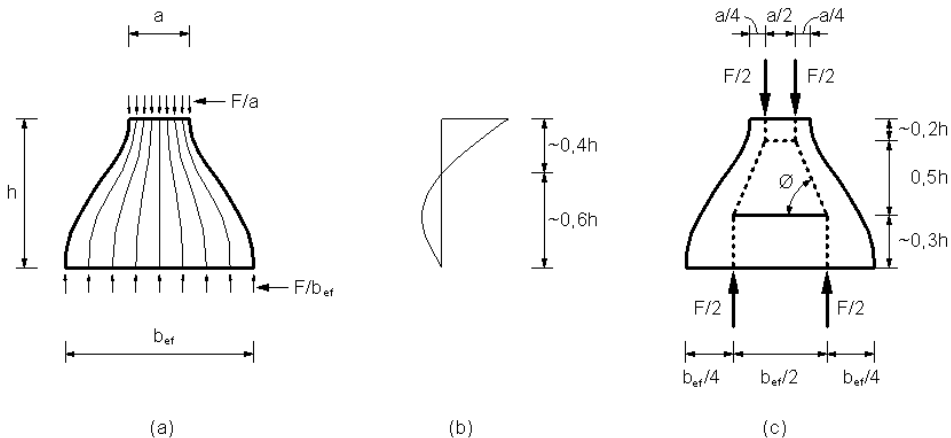
En viktig verdi i *Figur 3-19* gjenstår å definere, hvor strekkraften T virker og dermed hvor armeringen skal plasseres. For enkelte tilfeller, for eksempel høye bjelker, plasseres armeringen i underkant. Konstruksjonen tilpasser seg det valgte indre statiske systemet (stavmodellen) og strekkraftene vil gå der armeringen er plassert. For andre tilfeller, for eksempel ved innføring av forspenningskrefter eller andre store punktlaster er det ikke like enkelt å se hvor strekkarmeringen skal plasseres. Dersom armeringen plasseres feil risikerer en at kapasiteten overestimeres. EK2-1-1 gir ingen eksakt beskrivelse av strekkstavens plassering annet enn *Figur 3-19* og punkt 6.5.3 (3), der det står at armeringen bør fordeles i området der trykkspenningene avbøyes. Dette må forstås som at en kan bruke *Figur 3-19* til å grafisk bestemme plasseringen av armeringen. Med andre ord vil armeringen bli plassert omtrentlig.

Designers Guide to EN 1992-2, Eurocode 2: Design of concrete structures, Part 2: Concrete bridges (Hendy og Smith, 2007) gir utfyllende anbefalinger om plasseringen av spaltstrekking. NS-EN 1992-2 omhandler prosjektering av betongbruer. Den bygger på EK2-1-1 og har samme kapittelinnledning. Den henviser i stor grad til EK2-1-1 og der det er aktuelt kommer den med tilleggsanbefalinger. Guiden skrevet av Hendy og Smith er derfor i praksis også en gjennomgang av EK2-1-1.



Figur 3-21: Utforming av diskontinuitetsområde (Hendy og Smith, 2007, Figur 6.5-1., side 196)

Guidens kapittel 6.5.3 og Figur 3-21 utfyller Figur 3-19. Den inneholder all informasjon en trenger for å etablere stavmodellen eksakt. Samler en informasjonen som så langt er nevnt i en figur, vil den bli som Figur 3-22.



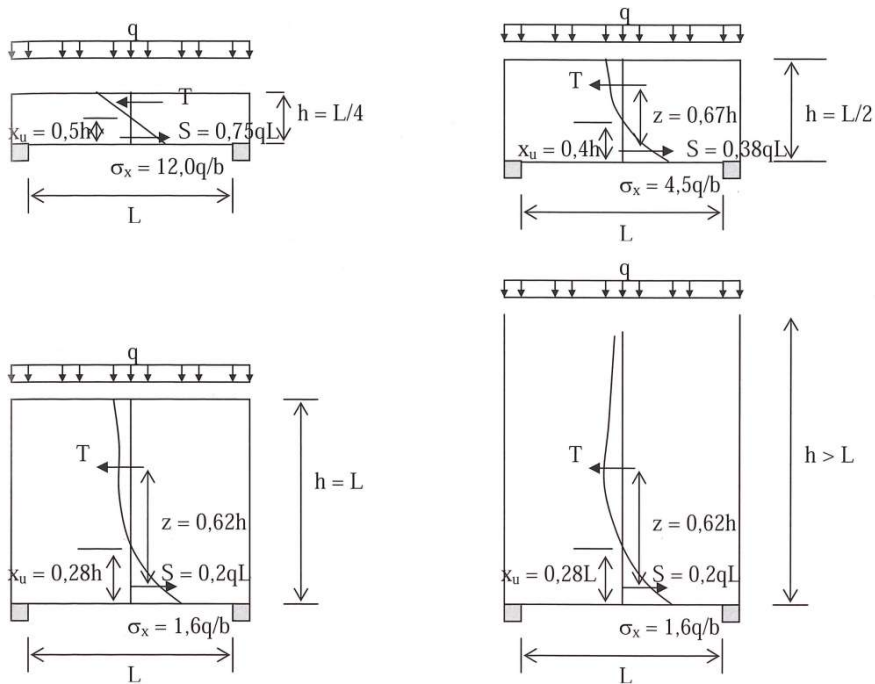
Figur 3-22: (a) Trykkspenningsstrøm; (b) tverrspanninger; (c) korresponderende stavmodell

Definisjonen på b_{ef} og h i Figur 3-22 vil variere avhengig av om det er fullstendig eller delvis diskontinuitet, se Figur 3-19. Figur 3-22(c) viser hvordan en etablerer

stavmodellen og bestemmer strekkraften T . Figur 3-22(b) viser høyden en fordeler strekkarmeringen over.

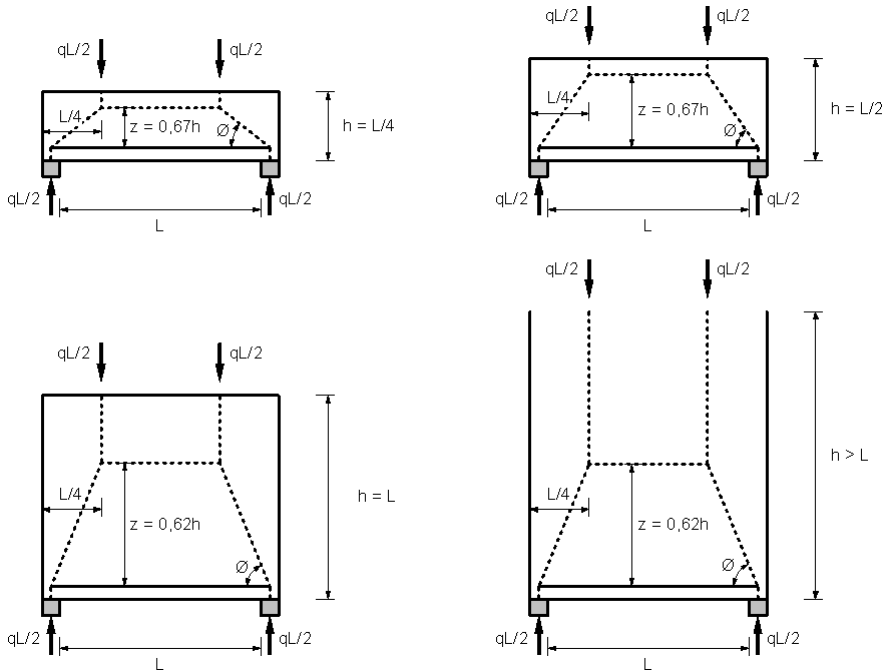
S.I. Sørensen 2013

Figur 3-23 viser avstanden mellom horisontal trykk- og strekkresultant for bjelker med ulikt lengde/høyde-forhold og av homogent materiale. Resultantene plasseres i tyngdepunktene til de horisontale trykk- og strekkspenningene som fremkommer av et vertikalt snitt ved feltmidte. Spenningsforløpet og tilhørende verdier er utviklet ved en lineær elastisk analyse. Spenningsresultantene danner grunnlag for hvor de horisontale trykk- og strekkstavene plasseres.



Figur 3-23: Spenninger, krefter og indre momentarm i midtsnitt for fritt opplagte høye bjelker med ulikt lengde/høyde- forhold (Sørensen, 2013, side 301, Figur 1.1.3)

For bjelken med $h = L/4$ er ikke momentarmen oppgitt. Denne regnes ikke som en høy bjelke, da den har lineær spenningsfordeling over tverrsnittet og dermed følger vanlig bjelketeori. Momentarmen kan derfor finnes fra geometrisk betraktning. Resultantene ligger $h/6$ fra henholdsvis overkant og underkant og avstanden mellom dem blir $z = 4h/6 = 0,67h$. Stavmodellene og vinklene til konstruksjonen i Figur 3-23 blir som vist i Figur 3-24.



Figur 3-24: Stavmodeller for fritt opplagte høye bjelker med ulikt lengde/høyde-forhold

Stavmodellen for bjelken med $h = L/4$ er også tegnet selv om den ikke beregnes ved bruk av stavmodell. Den er vist for å illustrere hvordan vinkelen ϕ endres ved ulike lengde/høyde forhold. De ulike vinklene ϕ er vist i Tabell 3-1.

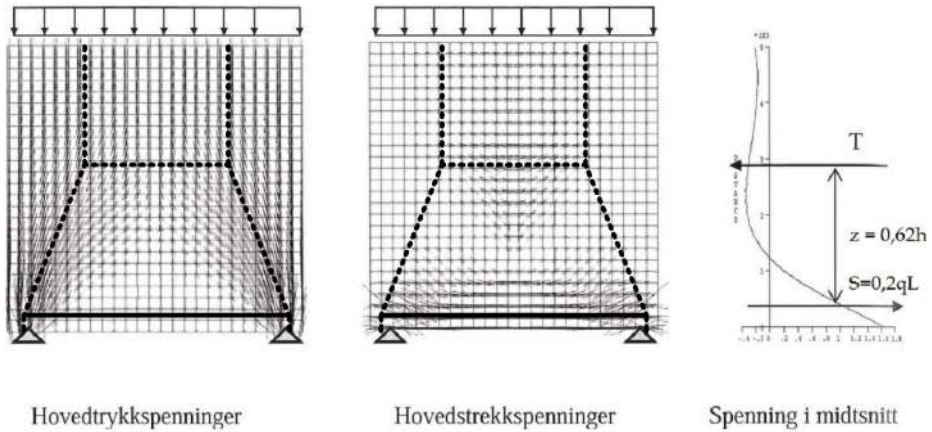
Tabell 3-1: Vinkler mellom trykk- og strekkstav for ulike lengde/høyde-forhold

Lengde/høyde-forhold	Momentarm z	h	$\phi = \arctan\left(\frac{z}{L/4}\right)$
4	0,67h	L/4	33,82°
2	0,67h	L/2	53,13°
1	0,62h	L	68,04°
<1	0,62h til 0,87h	>L	68,04° til 72,23°

For $h > L$ er momentarmen z begrenset til 0,87h (Leonhardt, 1975, side 19).

Figur 3-25 viser stavmodellen for den høye bjelken med $h/L = 1$ fra Figur 3-23/Figur 3-24, hvor den er lagt over resultatene fra en lineær elastisk FEM-analyse for et tilsvarende tilfelle. Analysen er utført i programmet DIANA (Sørensen, 2013, side 302, Figur 1.1.4). Fra FEM-analysen vises både hovedtrykk- og hovedstrekkspenningene. Stavmodellen ser ut til å følge de elastiske

spenningsstrømmene fra FEM-analysen, og kompatibiliteten er dermed tilfredsstillt.

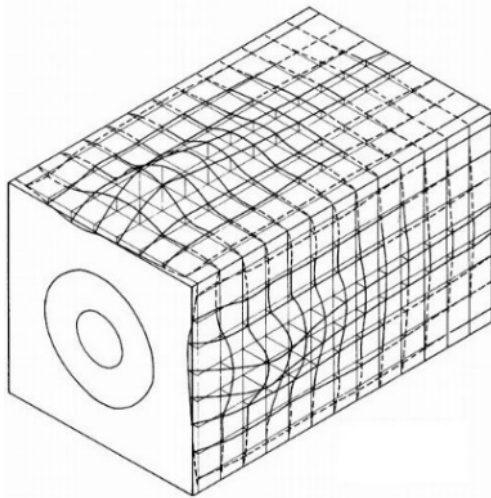


Figur 3-25: Fra venstre til høyre: Hovedtrykkspenninger, hovedtrekkspenninger og horisontalspenningsforløp i vertikalt snitt ved feltmidte for høy en bjelke (Sørensen, 2013, side 302)

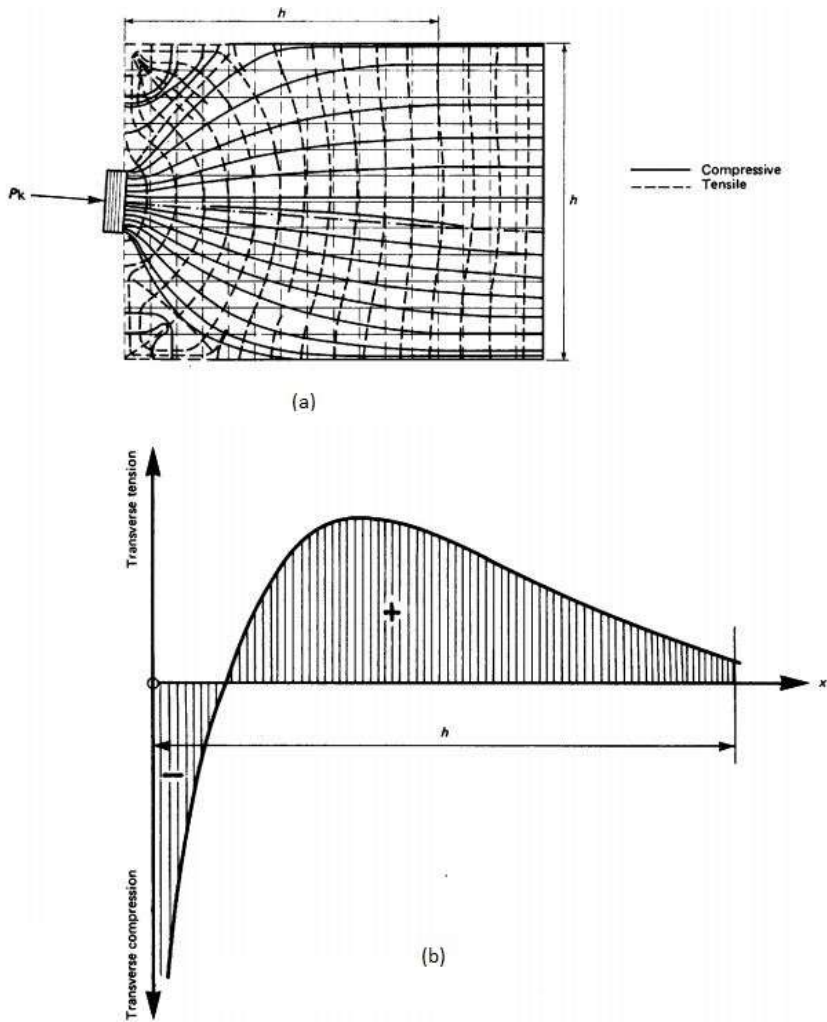
CIRIA Guide 1

CIRIA (The Construction Industry Research and Information Association) er en organisasjon i Storbritannia som ikke arbeider for økonomisk vinning. Siden 60-tallet har de arbeidet med å identifisere og utvikle løsninger for ulike problemstillinger i byggebransjen. Dette gjør de ved å etablere samarbeid mellom ulike organisasjoner med samme interesser slik at erfaringer kan samles og deles. De gjør også eget forskningsarbeid. Dette publiseres i håndbøker/guider og gjøres tilgjengelig for medlemmer av CIRIA.

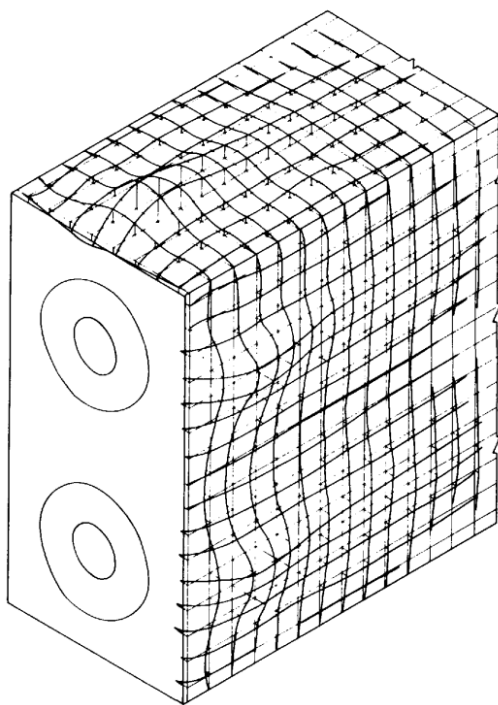
CIRIA Guide 1; A Guide to the Design of Anchor Blocks for Post-Tensioned Prestressed Concrete Members, 1976, er en tilbaketrukket guide. Den kan derfor ikke henvises til og legges til grunn ved dimensjonering i dagens konstruksjoner. En finner den likevel i referanselister for eksempel hos Hendy og Smith, 2007. Ett kapittel om CIRIA Guide 1 er tatt med i oppgaven, da den fremstiller spaltestrekk med gode figurer og en forklarende tekst.



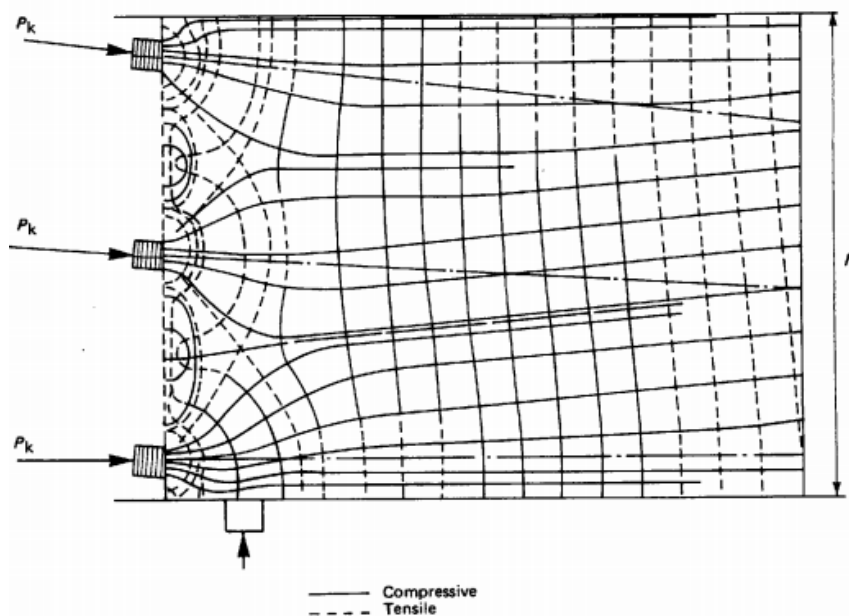
Figur 3-26: Målte tverrtøyninger på overflaten av et prisme utsatt for én aksiallast (CIRIA Guide 1, 1976, side 9, Figur 3)



Figur 3-27: Spenningsfordeling ved punktlast; (a) hovedspenningsretninger; (b) tverrstrekk i midtsnitt ved feltmidte (CIRIA Guide 1, 1976, side 8, Figur 1)

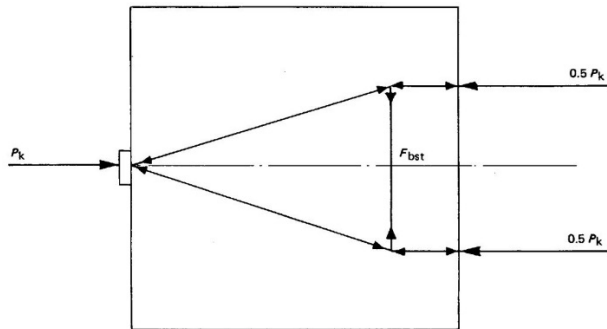


Figur 3-28: Teoretiske overflatedøyninger for et prisme utsatt for to aksiallaster (CIRIA Guide 1, 1976, side 11, Figur 5)



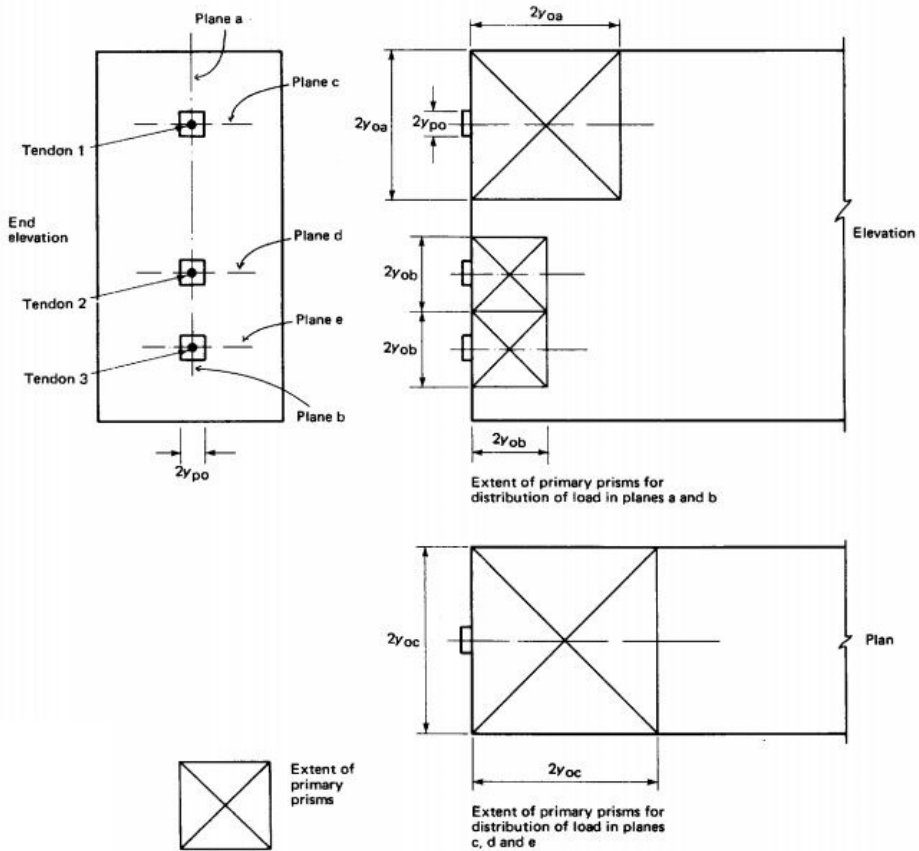
Figur 3-29: Hovedspenningsretninger ved tre aksiallaster (CIRIA Guide 1, 1976, side 10, Figur 4)

I dag blir tilfellene i figurene over stort sett betraktet ved bruk av stavmodeller. I CIRIA Guide 1 fra 1976 kalles ikke metoden *stavmodeller* og det etableres heller ikke analytiske beregningsmetoder ved bruk av stavmodeller. De presenterer grunnteorien basert på arbeid av den tids forskere, samt britiske og franske standarder. Selv om de ikke nevner stavmodellen eksplisitt, etablerer de et prinsipp om et indre statisk system som minner om det som i dag kalles en stavmodell.



Figur 3-30: Forenklet statisk system (CIRIA Guide 1, 1976, side 9, Figur 2)

De kaller området kreftene oppstår i for et *primærprisme* som har $h = b$. Innenfor prismet går spenningene fra høye til normale. Det er tidligere kommentert hvordan Hendy og Smith beskriver prismets geometri basert på CIRIA Guide 1.



Figur 3-31: Primærprismets geometri (CIRIA Guide 1, 1976, side 13, Figur 7)

CIRIA Guide 1 presenterer en tabell som viser hvor stor strekkraft (spaltestrek) som vil oppstå i primærprismet avhengig av forholdet mellom bredden kraften påføres over og bredden på prismet.

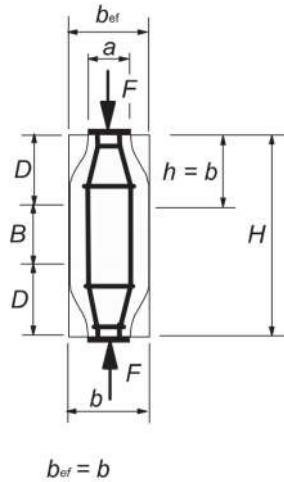
Tabell 3-2: Spaltestrek for ulike forhold mellom y_{po} og y_0 (CIRIA Guide 1, 1976, side 14)

y_{po}/y_0	≤ 0.3	0.4	0.5	0.6	≥ 0.7
F_{bst}/P_k	0.23	0.20	0.17	0.14	0.11

y_{po} er halve oppleggsbredden lasten påføres over. y_0 er henholdsvis y_{0a} og y_{0b} avhengig av hvilken situasjon fra Figur 3-31 en betrakter. F_{bst} er det opptredende spaltestrekket og P_k er påført karakteristisk punktlast.

Dersom dette overføres til dagens beregningsregler i EK2-1-1, ser en at det tilsvarer tilfellet for delvis diskontinuitet der $h = b$ (EK2-1-1, 6.5). CIRIA Guide 1

bruker $2y_{p0}$ der EK2-1-1 bruker a for bredden på lastflaten. Videre bruker CIRIA Guide 1 $2y_0 = b = h$ der EK2-1-1 bruker $b_{ef} = b = h$, F_{bst} der EK2-1-1 bruker T , og P_k der EK2-1-1 bruker F .



Figur 3-32: Definisjon av geometri ved delvis diskontinuitet i EK2-1-1 (Kapittel 6.5, Figur 6.25)

EK2-1-1 pkt. 6.5.3 (3a) definerer spaltestrekket tilhørende Figur 3-32 med formel 6.58:

$$T = \frac{1}{4} \frac{b - a}{b} F$$

Metodene kan sammenlignes ved å sette $y_{p0}/y_0 = a/b = x$ som gir $a = xb$. Settes dette inn i formel 6.58 fra EK2-1-1 og får en:

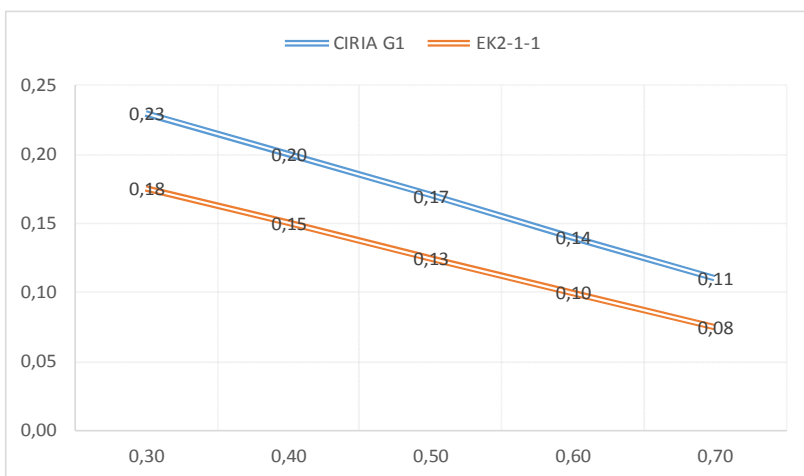
$$\frac{T}{F} = \frac{1}{4} \frac{b - a}{b} = \frac{1}{4} \frac{b - xb}{b} = \frac{1 - x}{4}$$

Sammenlignet på tabellform gir dette:

Tabell 3-3: Sammenligning av spaltestrekk ved bruk av CIRIA Guide 1 og EK2-1-1

$y_{p0}/y_0 = a/b$	F_{bst}/P_k (CIRIA G1)	T/F (EK2-1-1)	γ
0,30	0,23	0,18	1,31
0,40	0,20	0,15	1,33
0,50	0,17	0,13	1,36
0,60	0,14	0,10	1,40
0,70	0,11	0,08	1,47

Som *Tabell 3-3* belyser gir CIRIA Guide 1 høyere spaltestrekk enn EK2-1-1. Differansen γ er fremstilt som forholdet mellom verdiene (F_{bst}/P_k) og (T/F) . Fremstilt i et diagram ser en at verdien av spaltestrekk fra de to metodene har en mer eller mindre parallell sammenheng, der den vertikale avstanden mellom linjene utgjør γ . Dette kan tyde på at *Tabell 3-2* er utviklet fra beregninger med stavmodell.



Figur 3-33: Sammenligning av spaltestrekk fra CIRIA Guide 1 og EK2-1-1

Metoden i CIRIA Guide 1 gir høyere spaltestrekk enn EK2-1-1, noe betyr at CIRIA Guide 1 vil gi lavere vinkler mellom trykk- og strekkstaver enn EK2-1-1. Innledningsvis i CIRIA Guide 1 er det imidlertid kommentert at alle oppgitte tallverdier er konservative. Det kan virke som at CIRIA Guide 1 har brukt en sikkerhetsfaktor γ ved beregning av spaltestrekk. Kanskje har dette sammenheng med at de sier at spaltestrekkarmeringen bør fordeles over hele høyden på primærprismet, mens det tidligere har vist seg at spaltestrekket vil være konsentrert i en høyde av prismet på 0,5h. Oppgaven beskriver tidligere hvordan vinkelendringer har ulik betydning avhengig av om en ser på spaltestrekk eller trykkapasitet i knutepunktene. CIRIA Guide 1 fremstiller kun spaltestrekk og det er i den sammenheng konservativt å benytte lave vinkler. Metoden i CIRIA Guide 1 vil ikke benyttes videre i denne oppgaven. Metoden bærer preg av å være beskrevet i en tidlig fase av utviklingen av beregningsmetoder for D-områder. Dagens metoder for bruk av stavmodeller er mer komplett beskrevet. Det er likevel interessant å se at metoden som benyttes i dag 40 år senere, ikke har store avvik fra den gang. Hva som teoretisk skjer i et D-område med hensyn på lokal sone og total likevekt i et D-område, er svært godt beskrevet i CIRIA Guide

1. Kanskje bedre enn litteratur av nyere dato. Det er derfor anbefalt at CIRIA Guide 1 benyttes som et hjelpemiddel for alle som ønsker å oppnå større forståelse av D-regioner.

4 Regelverk for D-områder i norske broer

Ved dimensjonering av etteroppspente broer i Norge er det flere regelverk en må forholde seg til. Planlegging, bygging, drift og vedlikehold av alle norske riks- og fylkesveier er underlagt Statens vegvesen. Statens vegvesen har sitt eget håndbokhierarki som består av normaler, retningslinjer og veiledninger. Normalene og retningslinjene er kravdokumenter og utgjør de viktigste håndbøkene. Normaler er hjemlet i lovverk og gjelder all offentlig veg/gate. Veiledninger er hjelpedokumenter som understøtter normalene og retningslinjene.

Statens vegvesens håndbøker bygger i stor grad på Eurokodene, men kommer med enkelte tilleggsanbefalinger og skjerpene krav. Både håndbøkene og Eurokodene henviser til ETA-systemet der det er relevant. ETA (European Technical Assessment) er et dokument som gir informasjon om ytelser for produkter i bygg- og anleggsbransjen. Produsenter bruker dokumentet til å CE-merke sine produkter, slik at de kan selges på det europeiske markedet. Formålet er å sikre at produktenes egenskaper er som spesifisert, og innehar tilstrekkelig kvalitet for tiltenkt bruksområde.

I det følgende vil overnevnte regelverk bli gjennomgått med fokus på regler som påvirker D-områder i broer. Det er naturlig å starte med N400 da rapporten dreier seg om en bro, deretter EK2, og til slutt ETA for utvalgte spennkabelsystemer.

4.1 Håndbok N400 Bruprosjektering

Håndbok N400 Bruprosjektering utgave 2015 (Håndbok N400), tar for seg prosjektering av ferjekaier, broer, og andre bærende konstruksjoner. Håndboken inneholder overordnede krav, og supplerer Eurokodene. Den er sentral for ingeniører som arbeider innenfor prosjektering av overnevnte konstruksjoner. I dette kapitlet rettes hovedfokus mot håndbokens innhold som er relevant for D-regioner, og skjerpene krav belyses. Grunnet for prosjektering av betongkonstruksjoner er fremdeles EK2-1-1 og EK2-2.

D-regioner

Håndbok N400 kapittel 7.6.3 som omhandler bruddgrensetilstand, stiller krav til at D-regioner dimensjoneres etter kapittel 5.6.4 og 6.5 i EK2-1-1. Håndbok N400 kapittel 7.7.1 påpeker at kontroll av rissvidder og dimensjonering av

spaltestekkarmering for D-regioner, kan gjøres etter EK2-1-1 kapittel 7.3.3 og tabell 7.2N. Rissvidder skal dessuten kontrolleres for lastvirkninger i begge hovedretningene.

Spennarmering

For dimensjonering av spennarmerte konstruksjoner viser Håndbok N400 kapittel 7.9.8 til Norsk Betongforening publikasjon 14: *Spennarmeringsarbeider*. Publikasjonen omhandler i hovedsak gode retningslinjer for produksjon og utførelse av både slakk- og spennarmerte betongkonstruksjoner. Spesifikke regler for dimensjonering av D-regioner omtales ikke i publikasjonen.

Overdekning

Armering skal prosjekteres med nominell overdekning:

$$C_{nom} = C_{min} + \Delta C_{dev}$$

C_{nom} Den verdi av overdekning som skal være angitt på tegningene ifølge EK2-1-1 punkt 4.4.1.1 2(P).

C_{min} Minste overdekning.

ΔC_{dev} Et avvik som skal tas hensyn til ved dimensjonering.

Krav til overdekning står oppført i kapittel 7.4.2. Der gis skjerpene krav i forhold til Eurokodene:

$$C_{min} = \max(C_{min,b}, C_{min,dur})$$

$C_{min,b}$ Overdekning med hensyn på heft.

$C_{min,dur}$ Overdekning med hensyn på bestandighet.

Dette gir en mer direkte bestemmelse for minste tillatt overdekning i forhold til EK2-1-1.

$C_{min,b}$ er uendret og bestemmes fra tabell NA.4.2 i EK2-1-1.

Tabell 4-1 gjengir tabell 7.2 i Håndbok N400, og viser tillatte verdier av $C_{min,dur}$. Ved å sammenligne tabell 7.2 mot tabell NA.4.4N (for slakkarmering) i EK2-1-1, fremkommer konservative verdier i forhold til Eurokoden.

Etter kapittel 7.4.2 i Håndbok N400 skal verdien av $C_{min,dur}$ økes med 10 mm for spennarmering. Dermed kan tabell 7.2 sammenlignes med NA.4.5N. 10 mm er for øvrig også forskjellen mellom NA.4.4N og NA.4.5N.

Tabell 4-1: Minste overdekning for bestandighet, $C_{min,dur}$ (Håndbok N400, 2015, side 86)

Eksponeeringsforhold og funksjonskrav	$C_{min,dur}$
- Oversiden av brudekker med fuktisolering	60
- Konstruksjonsdeler der tilgjengeligheten for inspeksjon og vedlikehold er vanskelig, for eksempel i og ved fuger	
- Utstøpte peler, utført som tørrstøp eller undervannsstøp	
- Konstruksjonsdeler som kan bli eksponert for avisingsmiddel («salt»): <ul style="list-style-type: none"> • Pilarer, støttemurer etc nær saltet vegbane utsatt for saltsprut/-føyke (inklusive konstruksjonsdeler under terreng) • Konstruksjonsdeler utsatt for saltsprut og fuktighet hvor avvasking fra regnvær normalt ikke finner sted (for eksempel nedre del av vegger i kulverter, tunnelportaler, miljøtunneler osv. fra 2 m over vegbanen til underkant fundament) • Innerkant kantdragere og betongrekkverk • Sidekant brudekke og ytterste 2 m av underkant bruplate for bruer uten kantdrager/betongrekkverk • Innside av vinger og bakside frontvegger på landkar • Endebjelker og innside vinger på fugefrie bruer • Arealer under fugekonstruksjon som vil bli utsatt for saltholdig lekkasjevann 	
- Mot tørre og tilgjengelige hulrom, for eksempel i kassetversnitt og søyler	35
- Underkant fundamenter: <ul style="list-style-type: none"> • Mot betongavretting • Mot berg 	60 100
- Undervannsstøp	100
- Konstruksjonsdeler i marint miljø: <ul style="list-style-type: none"> • Til en høyde på minst 12 m over høyeste astronomiske tidevann (HAT) i værharde kyststrøk • Til en høyde på minst 6 m over HAT i lite værharde kyststrøk 	
- Alle øvrige flater	50

ΔC_{dev} er i EK2-1-1 satt til 10 mm. Håndboken tillater høyere avvik, og er dermed konservativ. Følgende avvik skal brukes:

$$C_{min} < 70 \text{ mm}: \Delta C_{dev} = \pm 15 \text{ mm}$$

$$C_{min} \geq 70 \text{ mm}: \Delta C_{dev} = \pm 20 \text{ mm}$$

Håndbok N400 kapittel 7.9.8 stiller krav til at endeforankringer skal beskyttes med armert påstøp med *tykkelse* $\geq 200 \text{ mm}$.

4.2 Eurokode 2

Eurokode 2 del 1-1 (EK2-1-1) er bygd opp av 12 hovedkapittel. Hvert kapittel belyser samme temaer ulikt. Dette betyr at når en skal prosjektere for eksempel spennarmering, må en inn i hvert hovedkapittel å sjekke hvilke prinsipper og anvendelsesregler som defineres der. For eksempel angir kapittel 3 *Materialer*, prinsipper og anvendelsesregler knyttet til materialer i bruk ved spennarmering, mens kapittel 5 *Konstruksjonsanalyse* angir prinsipper og anvendelsesregler knyttet til konstruksjonsanalyse i spennarmerte konstruksjoner. Med andre ord kan en ikke slå opp i ett kapittel og få angitt alle prinsipper og anvendelsesregler knyttet til ett tema. Dette gjør standarden noe uoversiktlig og betyr at en må påse at en har tatt hensyn til alle prinsipper og anvendelsesregler som er angitt under hvert hovedkapittel.

I det følgende gjennomgås derfor EK2-1-1 kronologisk for å belyse alle dens relevante prinsipper og anvendelsesregler som påvirker D-regioner. De aktuelle kapitlene og punktene vil i noen tilfeller bli gjengitt ordrett for å unngå at informasjon går tapt ved omformulering. Tekst som gjengis ordrett skrives i kursiv. Der hele kapittel eller punkt er gjengitt ordrett med tilhørende formler og figurer er formlenes og figurenes originale nummerering fra EK2 beholdt. I andre tilfeller vil kun de delene av kapittelet eller punktet som er relevant gjengis, ordrett eller omformulert. Dette betyr at en for den totale forståelsen av kapittelet bør lese det i sin helhet i Eurokoden. Der det er nødvendig vil det være utfyllende kommenterer om hva som menes med kapitlene og punktene.

Mange av punktene har en rund formulering som i utgangspunktet ikke gir mening dersom en ikke ser punktet i sammenheng med kapittelet det står oppført under. Kapitlene punktet hører til er derfor oppført før selve punktet kommenteres. For å skille disse kapitlene fra kapitlene i denne oppgaven markeres de med EK2 foran.

Eurokode 2 del 2 (EK2-2) omhandler brospesifikke prinsipper og anvendelsesregler for betongbroer. Den bygger på og henviser i stor grad til EK2-1-1, men kommer med enkelte tillegg til prinsippene og anvendelsesreglene i EK2-1-1. Begge standardene blir derfor gjennomgått parallelt. Der EK2-2 kommer med tillegg til konkrete punkt i EK2-1-1, bruker den nummerering; (punktnummer fra EK2-1-1) + 100. Dersom EK2-2 kommer med tillegg til for eksempel punkt (1) fra et kapittel i EK2-1-1, blir nummereringen i EK2-2; (101). Videre i oppgaven benyttes EK2 som en samlebetegnelse for EK2-1-1 og EK2-2.

Kun kapittel 6 *Bruddgrensetilstander* omtaler D-regioner direkte i kapittel 6.5 *Dimensjonering med stavmodeller*. Kapittel 6.5 er henvist til i mange av de andre kapitlene og etablerer de grunnleggende prinsippene og anvendelsesreglene for dimensjonering med stavmodeller. I noen av de andre hovedkapitlene angis imidlertid andre prinsipper og anvendelsesregler som må tas hensyn til når en dimensjonerer ulike D-regioner. Da oppgaven omhandler D-områder i en etteroppspent bro, er det forsøkt i å gjengi alle regler gitt i EK2 knyttet til D-regioner i etteroppspente konstruksjoner, i tillegg til de reglene som omhandler D-regioner og stavmodeller spesifikt.

Under listes opp inndeling av hovedkapitlene i EK2. De som ikke omtales i det følgende er angitt i kursiv.

- 1 Generelt
- 2 Grunnlag for prosjektering
- 3 Materialer
- 4 Bestandighet og overdekning for armering
- 5 Konstruksjonsanalyse
- 6 Bruddgrensetilstander
- 7 Bruksgrensetilstander
- 8 Armeringsregler for armering og spennarmering
- 9 Konstruksjonsregler
- 10 Tilleggsregler for prefabrikkerte betongelementer og konstruksjoner av elementer*
- 11 Konstruksjoner av betong med lett tilslag*
- 12 Uarmerte og lett armerte konstruksjoner*

Aktuelle tillegg vil også bli gjennomgått. Anbefalingene gitt i disse er i alle tilfeller under kategorien *bør*. Det vil si at en kan fravike disse uten at prinsippene i standarden fravikes.

4.2.1 Generelt

EK2 1.4 Forskjell mellom prinsipper og anvendelsesregler

Punkt 1.4 (1)P henviser til NS-EN 1990. I NS-EN 1990 kapittel 1.4 står det:

(1) I denne delen skilles det mellom prinsipper og anvendelsesregler, avhengig av de enkelte punktenes art.

(2) Prinsippene omfatter:

- generelle krav og definisjoner som det ikke finnes alternativer til, samt;*
- krav og anvendelsesmodeller der ingen alternativer er tillatt med mindre annet er spesielt angitt.*

(3) Prinsippene er angitt med bokstaven P etter avsnittsnummereringen.

(4) Anvendelsesreglene er allment anerkjente regler som samsvarer med prinsippene og oppfyller kravene de setter.

(5) Det er tillatt å bruke andre beregnings- og konstruksjonsregler enn anvendelsesreglene gitt i NS-EN 1990 for byggverk, forutsatt at det fremgår at de alternative reglene samsvarer med de relevante prinsippene, og at resultatene hva angår bærende konstruksjoners sikkerhet, brukbarhet og bestandighet, minst tilsvare dem som ville forventes ved bruk av Eurokodene.

MERKNAD Hvis en alternativ beregnings- og konstruksjonsregel erstatter en anvendelsesregel, kan ikke prosjekteringen den avstedkommer hevdes å være fullstendig i samsvar med NS-EN 1990 selv om prosjekteringen vil være i samsvar med prinsippene i NS-EN 1990. Når NS-EN 1990 brukes i forbindelse med en egenskap oppført i tillegg Z i en produksjonsstandard eller retningslinjer om europeisk teknisk forskrift godkjenning, kan bruk av en alternativ beregnings- og konstruksjonsregel være uakseptabel i forhold til CE-merkingen.

(6) I denne delen er anvendelsesreglene angitt med et tall i parentes, som f.eks. i dette punktet.

Dette er ordrett gjengitt fra NS-EN 1990 etter at kapittelet er henvist til i EK2-1-1 (NS-EN 1992-1-1). De stedene det i teksten står NS-EN 1990 må dette derfor leses som NS-EN 1992-1-1/NS-EN 1992-2 (EK2). Kapittelet åpner for bruk av andre anvendelsesregler. En bør imidlertid merke seg det som står i merknaden

til punkt (5). Her advares det om at CE-merking kan betinge at anvendelsesreglene i Eurokodene er fulgt for at ETA skal gjelde.

4.2.2 Grunnlag for prosjektering

EK2 2.3 Grunnleggende variabler

EK2 2.3.1 Last- og miljøpåvirkninger

EK2 2.3.1.4 Forspenning

Kapittel 2.3.1.4 definerer *forspenning* som et samlebegrep på både før oppspente og etter oppspente konstruksjoner. Forspenning omfatter også spennarmering som er plassert helt utenfor konstruksjonen.

EK2 2.4 Påvisning ved hjelp av partialfaktormetoden

EK2 2.4.2 Dimensjonerende verdier

EK2 2.4.2.2 Lastfaktorer for forspenning

Kapittel 2.4.2.2 gir lastfaktorer til bruk ved spennarmering. Det defineres to ulike lastfaktorer for forspenning i bruddgrensetilstanden. Der forspenningen har en gunstig effekt benyttes $\gamma_{p,fav}$ og der den har en ugunstig effekt benyttes $\gamma_{p,unfav}$. Lastfaktorene fra EK2 er gjengitt i Tabell 4-2.

Tabell 4-2: Lastfaktorer for forspenning

Situasjon	$\gamma_{p,fav}$	$\gamma_{p,unfav}$
Bruddgrensetilstander	0,9	1,1*
Ekstern forspenning		1,3
Lokale virkninger		1,1

*NA.2.4.2.2(1) fastsetter $\gamma_{p,fav}$ som henholdsvis 0,9 eller 1,1 avhengig av hva som er mest ugunstig. Her er dette gjengitt som henholdsvis $\gamma_{p,fav}$ og $\gamma_{p,unfav}$.

4.2.3 Materialer

EK2 3.4 Spennsystemer

EK2 3.4.1 Endeforankringer og skjøtekoblinger

EK2 3.4.1.1 Generelt

I punkt 3.4.1.1 (2)P står det at forankringer og skjøter må være i overensstemmelse med aktuell ETA. I punkt 3.4.1.1 (3)P står det at utforming av forankringssoner skal være i overensstemmelse med kapittel 5.10, 8.10.3 og 8.10.4.

Kapittel 5.10 gir regler angående *konstruksjonsanalyse* av spennarmerte konstruksjonsdeler og konstruksjoner. Dette kapittelet vil bli gjennomgått senere. Kapittel 8.10.3 gir *armeringsregler* for forankringssoner i etter oppspente

konstruksjonsdeler og vil bli gjennomgått senere. Kapittel 8.10.4 gir *armeringsregler* for forankringer og skjøtekoblinger for spennkabler og vil bli gjennomgått senere.

EK2 3.4.1.2 Mekaniske egenskaper

EK2 3.4.1.2.1 Endeforankrede kabler

I punkt 3.4.1.2.1 (1)*P* står det:

Forankringssystemer for spennkabler og skjøtekoblinger for spennkabler skal ha egenskaper i form av fasthet, forlengelse og utmatting som er tilstrekkelige til å oppfylle kravene i prosjekteringen.

Videre står det i punkt 3.4.1.2.1 (2):

Dette kan antas forutsatt følgende forhold:

(iv) Forankringene ikke er plassert i områder med spenningskonsentrasjoner.

Merk at punktet har til sammen fem underpunkter, kun underpunkt (iv) er gjengitt her.

Her må *forankringssystemer* leses som forankringen i sin helhet, fra kabelen festes til ankeret til forankringskraften er overført til konstruksjonen. Dette betyr at *forankringssystemer* omfatter hele eller deler av D-området. Punkt 3.4.1.2.1 (2) er en anvendelsesregel da den ikke er merket *P*. Denne sier i underpunkt (iv) at spenningskonsentrasjoner ikke bør overlappe hverandre. I denne rapporten vil D-regioner deles i lokale og generelle soner slik de er beskrevet av Hendy og Smith, og antas med dette å være tatt hensyn til.

I punkt 3.4.1.2.2 (1)*P* står det:

Forankringer og forankringssoner skal ha tilstrekkelig styrke for overføring av spennarmeringskraften til betongen. Rissdannelse i forankringssonen skal ikke ha skadelig innvirkning på forankringens funksjon.

Det antas at punktet er tilfredsstillt dersom forankringssonen har tilstrekkelig kapasitet i bruddgrensetilstand og i bruksgrensetilstand ved bruk av stavmodeller slik de er beskrevet i EK2.

4.2.4 Bestandighet og overdekning for armering

Inntil midten av 70-tallet var ikke bestandighet sett på som et stort problem innen betong. CEB-FIP 1978 *Model Code*, som var med å forme EK2, bærer ikke preg av å inneholde bestandighet. På 70-tallet ble store skader observert på flere betongkonstruksjoner som resulterte i holdningsendringer. Som resultat ble bestandighet og spesielt korrosjon av armering det største feltet innen forskning på konstruksjoner gjennom 80-tallet. Komiteene som utformet regelverk var nødt til å behandle dette mer fullstendig (Beeby og Narayanan, 2005, side 173-174).

Tilstrekkelig armeringsoverdekning er en av de viktigste faktorene for å sikre at betongkonstruksjoner oppnår anslått levetid. Overdekningen sikrer beskyttelse av armeringsjernet mot korrosjon og brann. Tykkelsen avhenger blant annet av miljøpåvirkninger, anslått levetid og hvilke type konstruksjon som betraktes. Videre i kapittelet belyses kravene til overdekning gitt i Eurokoden med komplimenterende tekst fra annen relevant litteratur, der det vurderes nødvendig.

EK2 4.1 Generelt

4.1 (1)P:

En bestandig konstruksjon skal oppfylle kravene til brukbarhet, styrke og stabilitet gjennom konstruksjonens dimensjonerende brukstid, uten at det oppstår vesentlig reduksjon av bruksverdi eller behov for omfattende uforutsett vedlikehold (for generelle krav se også NS-EN 1990).

4.1 (2)P:

Nødvendig beskyttelsestiltak for en konstruksjon skal fastlegges ut fra den tiltenkte bruken, dimensjonerende brukstid (se NS-EN 1990), vedlikeholdsprogram og påvirkninger.

4.1 (3)P:

Mulig betydning av direkte og indirekte påvirkninger, miljøpåvirkninger (4.2) og virkninger som følger disse, skal det tas hensyn til.

EK2 4.2 Miljøpåvirkninger

4.2 (1)P:

Miljøpåvirkninger er de kjemiske og fysiske forhold som konstruksjonen eksponeres for i tillegg til de mekaniske påvirkninger.

De vanligste miljøpåvirkningene som fører til skade på betongbroer, og som må tas hensyn til ved dimensjonering er (Hendy og Smith, 2007, side 32):

- Kloridinntrengning
- Karbonisering
- Frostskafer
- Alkali-silika reaksjoner
- Sulfatangrep
- Syreangrep
- Utvasking
- Slitasje

Dette fører til ulike eksponeringsklasser som utgjør grunnlag for beregning av overdekning. Definisjon av eksponeringsklasser knyttet til miljøforhold er gitt i tabell 4.1, i EK2-1-1.

NA.4.2 (105):

Betongoverflater beskyttet med brumembran kan regnes i eksponeringsklasse XD1.

EK2 4.3 Krav til bestandighet

4.3 (1)P:

For at konstruksjonen skal oppnå den forutsatte dimensjonerende brukstiden, skal det treffes egnede tiltak for å beskytte de ulike konstruksjonsdelene mot de aktuelle miljøpåvirkningene.

4.3 (2)P:

Det skal i prosjekteringen tas hensyn til kravene til bestandighet, ved:

- *Konstruktiv utforming*
- *Materialvalg*
- *Konstruksjonsdeltaljer*
- *Utførelse*

- *Kvalitetskontroll*
- *Inspeksjon*
- *Dokumentasjon*
- *Spesielle tiltak (f. eks. bruk av rustfritt stål, belegg, katodisk beskyttelse).*

EK2 4.4 Metode for påvisning

EK2 4.4.1 Betongoverdekning

EK2 4.4.1.1 Generelt

4.4.1.1 (1)P:

Betongoverdekningen er avstanden mellom overflaten av armeringen som ligger nærmest betongoverflaten (medregnet kroker, bøyer og overflatearmering der det er aktuelt), og den nærmeste betongoverflaten.

4.4.1.1 (2)P:

Nominell overdekning skal være angitt på tegningene. Den er definert som en minste overdekning c_{min} (se 4.4.1.2) pluss et avvik Δc_{dev} (se 4.4.1.3) som det skal tas hensyn til ved dimensjoneringen:

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev} \quad (4.1)$$

EK2 4.4.1.2 Minste overdekning c_{min}

4.4.1.2 (1)P:

Det skal benyttes en minste betongoverdekning c_{min} som skal sikre følgende:

- *Sikker overføring av krefter ved hjelp av heft (se også kapittel 7 og 8)*
- *Beskyttelse av stål mot korrosjon (bestandighet)*
- *Tilfredsstillende brannmotstand (se NS-EN 1992-1-2)*

4.4.1.2 (2)P:

Den største verdien av c_{min} som tilfredsstiller kravene til både heft og miljøpåvirkninger skal benyttes.

$$c_{min} = \max(c_{min,b}; c_{min,dur} + \Delta c_{dur,\gamma} - \Delta c_{dur,st} - \Delta c_{dur,add}; 10 \text{ mm}) \quad (4.2)$$

$c_{min,b}$	minste overdekning som følge av kravene til heft, se 4.4.1.2 (3)
$c_{min,dur}$	minste overdekning som følge av miljøpåvirkninger, se 4.4.1.2 (5)
$\Delta c_{dur,\gamma}$	tillegg for sikkerhet, se 4.4.1.2 (6)
$\Delta c_{dur,st}$	reduksjon av minste overdekning ved bruk av rustfritt stål, se 4.4.1.2 (7)
$\Delta c_{dur,add}$	reduksjon av minste overdekning ved bruk av tilleggsbeskyttelse, se 4.4.1.2 (8)

$c_{min,b}$ er en verdi som etter EK2 punkt 4.4.1.2 (3) sikrer at heftspenninger blir overført og at betongen oppnår tilfredsstillende komprimering. Anbefalte verdier for $c_{min,b}$ er gitt i tabell 4.2 i Eurokoden, og er her gjengitt som Tabell 3-2.

Tabell 4-3: Krav til minste overdekning $c_{min,b}$ av hensyn til heft (EK2-1-1, tabell 4.2)

Krav av hensyn til heft	
Arrangement av stenger	Minste overdekning $c_{min,b}$ *
Enkeltstenger	Stangdiameter
Bunter	Ekvivalent diameter (ϕ_h) (se 8.9.1)
* Hvis største nominelle tilslagsstørrelse er større enn 32 mm, bør $c_{min,b}$ økes med 5 mm.	

4.4.1.2 (4):

For spennarmering bør overdekningen minst være i overensstemmelse med den relevante europeiske tekniske godkjenningen.

I følge nettsiden «www.sintefcertification.no» er tidlige navn på ETA nettopp europeisk teknisk godkjenning. Navnet er endret til europeisk teknisk bedømmelse.

4.4.1.2 (5):

Minste overdekning for armering og spennarmering i normalbetong når en tar hensyn til eksponeringsklasser og konstruksjonsklasser, er gitt ved

$c_{min,dur}$.

Anbefalte verdier for $c_{\min,dur}$ er gitt i Tabell 4.4N og Tabell 4.5N i EK2, for henholdsvis armeringsstål og spennstål. Nasjonalt tillegg kommer med anbefalte justeringer, og Tabell NA.4.4N og Tabell NA.4.5N skal derfor heller benyttes. Felles for tabellene både i den generelle delen og nasjonalt tillegg er at eksponeringsklasse og dimensjonerende brukstid legges til grunn ved valg av verdi.

I nasjonalt tillegg avhenger $c_{\min,dur}$ av bestandighetsklasse. Krav til vann/sementforholdet, luftinnhold, type sement og minimum masse av bindemiddel danner skille mellom de seks bestandighetsklassene. Klassene merkes M og et nummer, hvor nummeret er hundre ganger masseforholdet. Og klassene denoteres derfor også som masseforhold (Jacobsen, 2016, kapittel 2, side 17). Laveste kvalitet for bestandighet i tabellene er dermed M90 og den beste er M40.

Kravene for minste overdekning c_{\min} forenkles noe av følgende anbefalinger:

NA.4.4.1.2 (6):

Verdien av $\Delta c_{dur,\gamma}$ settes normalt lik 0 mm. Større verdi kan vurderes i spesielle tilfeller der det foreligger et særlig behov for å redusere sannsynligheten for korrosjonsskade på armeringen.

NA.4.4.1.2 (7):

Verdien av $\Delta c_{dur,st}$ settes normalt lik 0 mm. Avhengig av stålets edelhet kan det benyttes høyere verdier basert på metoder gitt i spesiallitteratur, men ikke større enn 15 mm.

NA.4.4.1.2 (8):

Verdien av $\Delta c_{dur,add}$ settes normalt lik 0 mm. Større verdi kan vurderes basert på beskyttelsestiltakene i hvert enkelt tilfelle.

4.4.1.2 (9):

Der plasstøpt betong støpes mot andre konstruksjonsdeler av betong (prefabrikkerte eller plasstøpte), kan armeringens minste overdekning til kontaktflaten reduseres til en verdi tilsvarende heftkravet (se (3) ovenfor) under følgende forutsetninger:

- *Betongens fasthetsklasse er minst C25/C30*
- *Tiden betongoverflaten blir eksponert for et utendørs miljø er kort (<28 døgn)*
- *Kontaktflaten er gjort ru*

NA.4.4.1.2 (109):

Bestemmelsene i NS-EN 1992-1-1:2004 punkt 4.4.1.2 (9) gjelder, se også tabell NA.4.2, armeringens minste betongoverdekning til kontaktflaten skal imidlertid ikke velges mindre enn 20 mm. Ved støp mot magerbetong skal overdekningen minst tilfredsstille kravene for eksponeringsklasse XD1.

4.4.1.2 (10):

For spennarmering uten heft bestemmes overdekningen i overensstemmelse med den relevante europeiske godkjenningen.

EK2 4.4.1.3 Tillatte avvik, hensyn ved prosjektering

4.4.1.3 (1)P:

For å beregne nominell overdekning c_{nom} skal det gjøres et tillegg til minste overdekning i prosjekteringen ved å ta hensyn til avviket (Δc_{dev}). Krevd minste overdekning skal økes med den absolutte verdien av tillatt negativt avvik.

MERKNAD Verdien av Δc_{dev} som skal brukes i det enkelte land, finnes i det nasjonale tillegget. Den anbefalte verdien er 10 mm.

Nasjonalt tillegg åpner imidlertid for å kunne velge en større verdi for Δc_{dev} enn anbefalt.

NA.4.4.1.3 (3):

Største tillatte negative avvik Δc_{dev} kan reduseres til 5 mm dersom følgende forutsetninger er oppfylt:

- Utførelsen er underlagt et kvalitetssikringssystem der kontrollen av utførelsen inkluderer måling av oppnådd betongoverdekning.*
- Nøyaktige målemetoder benyttes, og alle deler som ikke oppfyller kravene, blir forkastet/utbedret.*

4.4.1.3 (4):

For betong som støpes mot ujevne overflater, bør nominell betongoverdekning vanligvis økes ved å tillate større avvik i prosjekteringen. Økningen bør tilsvare differansen av ujevnheten, men minste betongoverdekning bør være minst k_1 mm for betong støpt mot

avrettet grunn (eller avretningslag) og k_2 mm for betong støpt direkte mot grunnen. Overdekning av armeringen mot enhver type overflate, f.eks. riflete overflater eller synlig tilslag, bør også økes for å ta hensyn til ujevnheter i overflaten (se 4.4.1.2 (11)).

MERKNAD Verdierne av k_1 og k_2 som skal brukes i det enkelte land, finnes i det nasjonale tillegget. De anbefalte verdiene er 40 mm og 75 mm.

Dette er det eneste punktet i EK2 som gir direkte anbefaling for nominell overdekning C_{nom} .

4.2.5 Konstruksjonsanalyse

EK2 5.1 Generelt

EK2 5.1.1 Generelle krav

I punkt 5.1.1 (2) står det at lokale analyser kan være nødvendig der en antagelse om lineær tøyingsfordeling ikke gjelder. For eksempel i nærheten av opplagg, i nærheten av konsentrerte laster, i knutepunkt mellom bjelker og søyler, i forankringssoner og ved endringer i tverrsnittet. Med dette menes implisitt områder der D-regioner vil oppstå.

EK2 5.6 Plastiske analysemetoder

EK2 5.6.1 Generelt

I punkt 5.6.1 (1)*P* står det at beregningsmetoder basert på plastisitetsteori kun skal brukes for påvisning i bruddgrensetilstand. Punkt 5.6.1 (101)*P* (EK2-2) har utvidet prinsippet. Der står det at beregningsmetoder basert på plastisitetsteori kun skal brukes for påvisning i bruddgrensetilstanden og kun dersom det er tillatt av myndighetene. Videre sier kapittelet at konstruksjonen må ha tilstrekkelig duktilitet til at de forutsatte mekanismene kan dannes. Den plastiske analysen baseres på øvre og nedre grenseteorem. Alt dette er angitt med *P* som vil si at det er ufravikelige prinsipper.

EK2 5.6.4 Beregninger basert på stavmodeller

I kapittel 5.6.4 står det:

(1) Modeller med trykk- og strekkstaver kan benyttes ved dimensjonering i bruddgrensetilstanden for områder med kontinuitet (risset tilstand for bjelker og plater, se 6.1 til 6.4) og ved dimensjonering og detaljering av områder med diskontinuitet i bruddgrensetilstanden (se 6.5). Vanligvis omfatter diskontinuitetsområdet en avstand opptil h (tverrsnittets høyde) fra diskontinuiteten. Stavmodeller kan også benyttes for konstruksjonsdeler der det forutsettes en lineær tøyingsfordeling innenfor tverrsnittet, f.eks. plan tøyning.

Punktet sier at stavmodeller kan brukes for dimensjonering av B-regioner (bjelketeori) og D-regioner. Videre står det:

(2) Påvisninger i bruksgrensetilstander kan også utføres ved hjelp av stavmodeller, f.eks. beregning av stålspenninger og rissvidder, forutsatt at trykk- og strekkstavene har en tilstrekkelig kompatibilitet (spesielt bør plassering og retning for viktige trykkstaver tilpasses etter lineær elastisitetsteori).

Som tidligere sett baserer metoden med stavmodeller seg på plastisitetsteoriens nedre grenseteorem. Punkt 5.6.4 (2) og punkt 5.6.1 (1)P er derfor i utgangspunktet motstridene. Punkt 5.6.4 (2) sier at bruk av stavmodeller i bruksgrensetilstand betinger at en har sikret kompatibilitet mellom den etablerte stavmodellen og den faktiske lineær elastiske spenningsstrømmen. Dette betyr at det for etablering av stavmodell for kompliserte konstruksjoner der rissvidden er kritisk, bør utarbeides en så nøyaktig lineær elastisk spenningsstrøm som mulig. Med andre ord vil kraft-sti metoden i slike tilfeller ikke være å foretrekke, men stavmodellen bør vurderes utviklet fra eksempelvis lineær elastiske FEM-analyser. Det antas at EK2 anser en stavmodell i bruksgrense, der en har sikret kompatibilitet, til å tilnærme seg eksakt teori og dermed ikke lengre være en plastisk analysemetode. Dette betyr at prinsippet gitt i punkt 5.6.1 (1)P kan fravikes i disse tilfellene. Punkt 5.6.1 (1)P skaper likevel forvirring og er kommentert av denne gruppen i e-post til leder for Eurokodene i Norge, Steinar Leivestad. Det skal senere i oppgaven ses nærmere på hvordan D-områder og stavmodeller behandles i bruksgrensetilstanden. I neste punkt står det:

(3) Stavmodeller består av trykkstaver som representerer trykkspenningsfelt, strekkstaver som representerer armering, og

knutepunktsområder. Kreftene i de enkelte delene av stavmodellen bestemmes ut fra kravet om likevekt med de påførte laster i bruddgrensetilstanden. De ulike områder i stavmodeller dimensjoneres etter reglene gitt i 6.5.

(4) Strekkstavene i en stavmodell antas med plassering og retning sammenfallende med den tilsvarende armeringen.

(5) Valg av stavmodeller kan baseres på spenningsfelt og fordeling etter lineær-elastisk teori eller modeller for lastbæring/lastvandring. Alle stavmodeller kan optimaliseres ved hjelp av energimetoder.

Punkt (3) – (5) oppsummerer med dette denne oppgavens tidligere kapittel; *Hva er en stavmodell.*

EK2 5.10 Spennarmerte konstruksjonsdeler og konstruksjoner

EK2 5.10.2 Spennkraft under oppspenning

EK2 5.10.2.2 Begrensning av betongspenninger

I kapittel 5.10.2.2 står det:

(1)P Lokal knusing eller spalting av betong i enden av før- og etteroppspente konstruksjonsdeler skal unngås.

(2) Lokal knusing eller spalting bak spennankre for etteroppspente kabler bør forhindres i overensstemmelse med anvisninger i den aktuelle europeiske tekniske godkjenningen.

(3) Betongens fasthet ved påføring eller overføring av spennkraft bør ikke være mindre enn minste verdi tillatt i den aktuelle europeiske tekniske godkjenningen.

(4) Hvis spennkraften i en enkel spennkabel påføres trinnvis, kan kravet til betongens fasthet reduseres. Minste fasthet $f_{cm}(t)$ på tidspunkt t bør være k_4 [%] av kravet til betongens fasthet ved forspenning til full kraft, som angitt i den europeiske tekniske godkjenningen. Ved betongfastheter fra minste betongfasthet opp til betongfastheten krevd for full forspenningskraft kan oppspenningen bestemmes ved interpolasjon mellom k_5 [%] og 100% av full forspenningskraft.

(NA: $k_4 = 50$ og $k_5 = 30$)

(5) *Betongens trykkspenning i konstruksjonen som følge av forspenningskraften og andre belastninger som virker på tidspunktet for oppspenningen eller overføring av forspenning, bør begrenses til følgende:*

$$\sigma_c = 0,6f_{ck}(t) \quad (5.42)$$

der

$f_{ck}(t)$ er karakteristisk trykkfasthet for betongen på tidspunkt t når forspenningskraften påføres.

For fjørøppspente elementer kan spenningen på tidspunktet for overføring av forspenning økes til $k_6 \cdot f_{ck}(t)$, hvis forsøk eller erfaring viser at opprissingen i lengderetningen unngås.

(NA: $K_6 = 0,7$)

Hvis trykkspenningen overskrider $0,45 f_{ck}(t)$ på permanent basis, bør det tas hensyn til krypets ikke-linearitet.

Kapittelet belyser at en må ta hensyn til betongens tidsavhengige trykkfasthet ved betongens alder < 28 døgn i tillegg til de krav som er gitt i ETA.

4.2.6 Bruddgrensetilstander

EK2 6.5 Dimensjonering med stavmodeller

EK2 6.5.1 Generelt

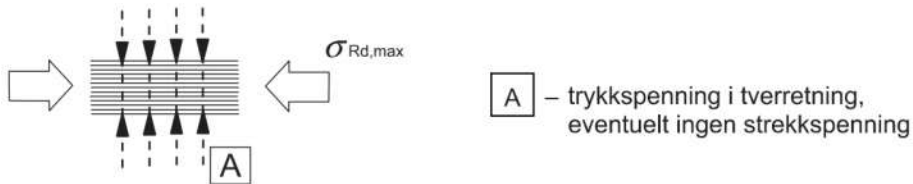
I punkt 6.5.1 (1)P står det:

(1)P I områder med ikke-lineær tøyingsfordeling (f.eks. opplegg ved konsentrerte laster eller konstant spenning) kan stavmodeller med trykk- og strekkstaver brukes (se også 5.6.4).

Kapittel 5.6.4 omhandler plastisk analyse med stavmodeller generelt og er gjennomgått tidligere.

EK2 6.5.2 Trykkfelt

(1) Dimensjonerende kapasitet for et trykkfelt i betong i et område med trykkspenning eller uten strekkspenning i tverretningen kan beregnes ut fra uttrykk (6.55) (se figur 6.23).



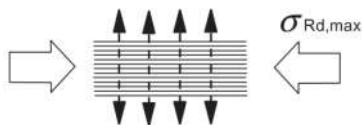
Figur 6.23 – Dimensjonerende kapasitet for trykkfelt i betong uten strekk i tverretning

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} \quad (6.55)$$

Det kan være aktuelt å anta en høyere dimensjonerende trykkfasthet i områder med fleraksialt trykk.

I siste setning åpnes det for høyere dimensjonerende trykkfasthet ved fleraksialt trykk. Det skal senere ses på hvordan dette kan tas hensyn til.

(2) Dimensjonerende fasthet for betongtrykkstaver bør reduseres i opprissede trykksoner og kan, med mindre en mer nøyaktig framgangsmåte brukes, beregnes ut fra uttrykk (6.56) (se figur 6.24).



Figur 6.24 – Dimensjonerende fasthet for trykkfelt i betong med strekk i tverretning

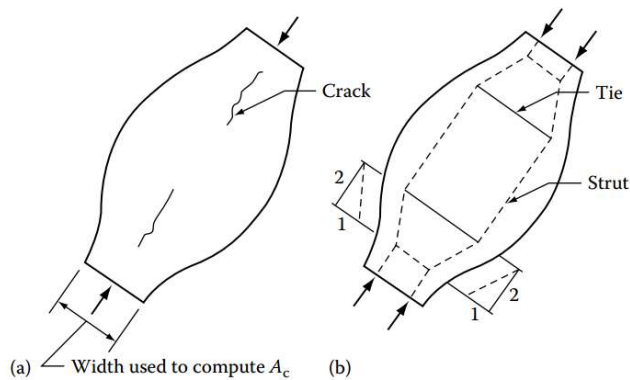
$$\sigma_{Rd,max} = 0,6\nu' f_{cd} \quad (6.56)$$

$$\nu' = 1 - f_{ck}/250 \quad (6.57N)$$

ν' er en parameter i formel (6.56) som gir den minste spenningen hvor riss parallelt med trykkretningen vil oppstå i et uarmert tverrsnitt som følge av flaskeformet spenningsutbredelse, se Figur 4-1 (Hendy og Smith, 2007, side 204). Med andre ord tar parameteren hensyn til tverrstrekket som kommer fra påført trykk. Som tidligere nevnt vil størrelsen på tverrstrekket ved flaskeformet

spenningsutbredelse variere med ulike forhold mellom lastflatens størrelse og den effektive bredden tilgjengelig for spenningsutbredelsen. Parameteren ν' vil mee andre ord i realiteten variere for ulike tverrsnitt. Den omtales av noen som en effektivitetsfaktor (Foster og Malik, 2002). Uttrykket for ν' , formel (6.57N), uttrykt ved betongens sylindrefasthet fremstår som en empirisk formel. ν' er omdiskutert og det finnes mye litteratur som beskriver denne på ulike måter. EK2-1-1 åpner for å benytte andre verdier av denne da uttrykket er gitt i en anvendelsesregel. Det anbefales likevel at uttrykket fra EK2-1-1 formel (6.57N) benyttes så fremt ikke annet er gitt i ETA til spennkabelsystemene. Dette for å hindre konflikt med CE-merkingen til spennkabelsystemene. Forøvrig skal det senere ses på hvordan ulik geometri tas hensyn til av EK2.

Faktoren $0,6$ i formel (6.56) er en konstant. Denne faktoren tar hensyn til riss som oppstår med en vinkel til trykkraftens retning og dermed også effekter fra påførte strekkrefter. Effekten kan sammenlignes med riss som oppstår i et bjelkesteg utsatt for skjær, hvor skjærarmeringen tar strekkrefter og trykkstaver i betong overfører trykkreftene mellom skjærbøylene (Hendy og Smith, 2007, side 194). Faktoren $0,6$ tar ikke hensyn til størrelsen på de påførte strekkrefter og er derfor gitt som en relativt lav verdi. Det skal senere ses på hvordan ulike situasjoner med strekk tas hensyn til ved å definere ulike k -verdier.



Figur 4-1: Flaskeformet trykkstav: (a) rissing som følge av tverrstrekk; (b) stavmodell for tverrstrekkarmoring (spaltestrekkarmoring) (Chen og El-Metwally, side 124, Figur 3.47)

EK2 6.5.3 Strekkstaver

For strekkstavens dimensjonerende fasthet henviser kapittel 6.5.3 til kapittel 3.2 som omhandler materialspesifikke prinsipper og anvendelsesregler for armeringsstål og kapittel 3.3 som omhandler materialspesifikke prinsipper og anvendelsesregler for spennstål. Kapittelet beskriver også en metode for å beregne spaltestrekket som vil oppstå i D-regioner med flaskeformet trykkutbredelse. Dette er tidligere omtalt og vil ikke bli gjennomgått her. Hele kapittelet består av anvendelsesregler og kan derfor erstattes av andre metoder i henhold til kapittel 1.4.

EK2 6.5.4 Knutepunkt

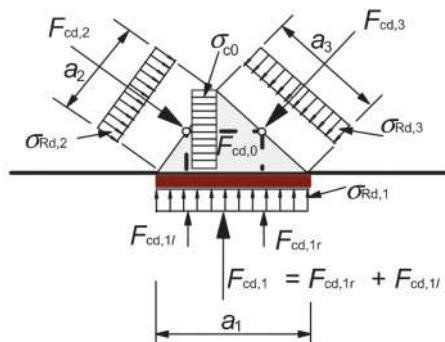
Kapittelet tar for seg tre ulike knutepunkt; a) C-C-C, b) C-C-T og c) C-T-T (C står for *compression*, T står for *tension*). Den største trykkspenningen som kan tillates på knutepunktens grenseflater uttrykkes som:

$$\sigma_{Rd,max} = k_i \nu' f_{cd} \quad (6.60)$$

der $i = 1, 2, \text{ og } 3$ og referer til henholdsvis a, b og c.

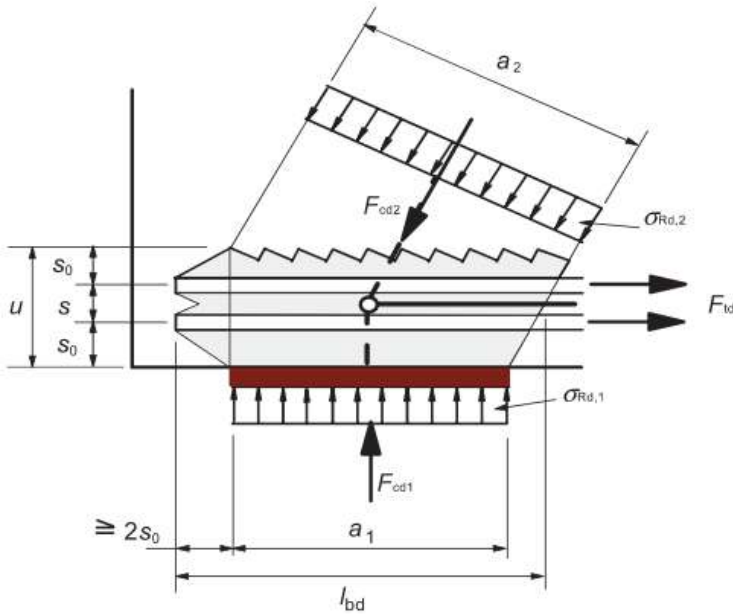
Formel (6.60) tilsvarer med dette formel (6-60), (6.61) og (6.62) fra EK2 og en gjenkjenner formel (6.56) der k er gitt som konstanten 0,6. For alle tre knutepunktene vil det utvikles tverrstrekk som følge av påført trykk og følgelig må parameteren ν' involveres. k_i er som tidligere nevnt faktoren som tar hensyn til påført strekk. Det som skiller de tre ulike knutepunktene er i hvilken grad påført strekk opptrer i knutepunktene. Dette gir følgelig ulike k -verdier:

a) C-C-C knutepunkt, $k_1 = 1,0$



Figur 4-2: Knutepunkt med trykk uten strekkstaver (EK2-1-1, side 107, Figur 6.26)

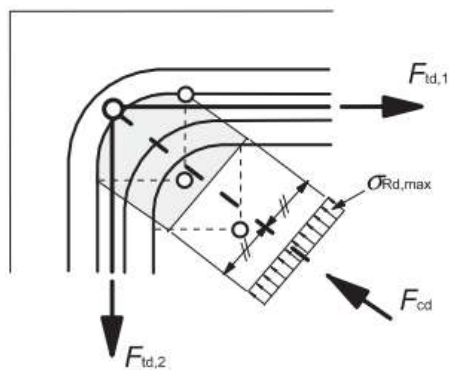
b) C-C-T knutepunkt, $k_2 = 0,85$



Figur 4-3: Knutepunkt utsatt for trykk og strekk med forankring av armering i én retning (EK2-1-1, side 107, Figur 6.27)

Både $\sigma_{Rd,1}$ og $\sigma_{Rd,2}$ i Figur 4-3 må ta hensyn til faktoren k_2 .

c) C-T-T knutepunkt, $k_3 = 0,75$



Figur 4-4: Knutepunkt utsatt for trykk og strekk med armering i to retninger (EK2-1-1, side 108, Figur 6.28)

I punkt 6.5.4 (5) åpnes det for å øke trykkapasiteten i knutepunkt. Her står det:

Ved betingelsene som er oppført nedenfor, kan de dimensjonerende trykkspenningene i 6.5.4 (4) økes med opptil 10% dersom minst ett av følgende forhold er oppfylt:

- *det er påvist treaksial trykkspenningstilstand;*
- *alle vinkler mellom trykkstaver og strekkstaver er $\geq 55^\circ$;*
- *spenningene påført ved opplegg eller i punktlaster er jevnt fordelt, og knutepunktet er omsluttet av bøylor;*
- *armeringen er fordelt i flere lag;*
- *knutepunktet er tilstrekkelig omsnørt ved hjelp av utforming av lager eller friksjon.*

Det første punktet som omhandler treaksial trykkspenningstilstand beskriver en situasjon der en flaskeformet spenningsutbredelse kan betraktes i tre dimensjoner. Trykkfeltet vil i en slik situasjon være relativt lite sammenlignet med betongtverrsnittet. Her vil tverrstrekk forårsaket av trykkspenninger langs en akse motvirkes av trykkspenninger langs de to andre aksene. Det vil si at riss parallelt med trykkspenningen langs den første akse begrenses i begge retninger. Det motvirkende trykket kommer enten fra partielt belastede flater som det ses på senere (EK2, kapittel 6.7), fra omsnørende armering, eller fra andre ytre påførte trykkspenninger. De to sistnevnte effektene skal det ses nærmere på ved gjennomgangen av punkt 6.5.4 (6). Dette betyr at punktet tar hensyn til både knutepunktets geometri og påførte strekkrefter, dermed både ν og k .

Det andre punktet som omtaler vinkler $\geq 55^\circ$ tar hensyn til knutepunktets geometri og dermed faktoren ν' .

Det tredje punktet omhandler utformingen av den påførte lasten. Dersom den er jevnt fordelt over lastbredden vil det oppstå en symmetrisk flaskeformet spenningsutbredelse bak den påførte lasten. Tverrstrekk kan dermed beregnes etter punkt 6.5.3 (3) a) og b). Punktet omtaler også innlagt armering uten nærmere beskrivelse av hvilken armering det henvises til. Det antas at det gjelder armeringen for å oppta tverrstrekk fra spenningsutbredelsen og at dersom mengden er beregnet etter 6.5.3 (3) a) eller b) er tilfredsstillt.

Det fjerde punktet omtaler nok en gang armering uten å henvise til hvilken armering. Det antas at det fortsatt refereres til armering for tverrstrekk. Dersom denne er jevnt fordelt vil også tverrstrekkspenningen bli mer fordelt eller

utflytende over knutepunktet. Spenningene i knutepunktet vil da i større grad ligne på spenningene fra den lineær elastiske spenningsanalysen der spenningene i knutepunktet er utflytende (Schlaich mfl., 1987, side 103-105).

Det femte punktet er vagt formulert og vil ikke benyttes i denne oppgaven.

Punkt 6.5.4 (6) gir en metode for å øke trykkapasiteten ved treaksiale trykktilstander dersom trykkspenningene fra de tre retningene er kjent. Punktet henviser til formel (3.24) og (3.25) i EK2 med en øvre begrensning på $\sigma_{Rd,max} \leq k_4 \nu' f_{cd}$, der $k_4 = 3,0$.

I punkt 3.1.9 (2) står det:

I mangel av mer nøyaktige data kan spennings- tøyningssammenheng vist på figur 3.6 legges til grunn (trykktøyning er vist som positive verdier), med økt karakteristisk fasthet og tøyninger i henhold til følgende uttrykk:

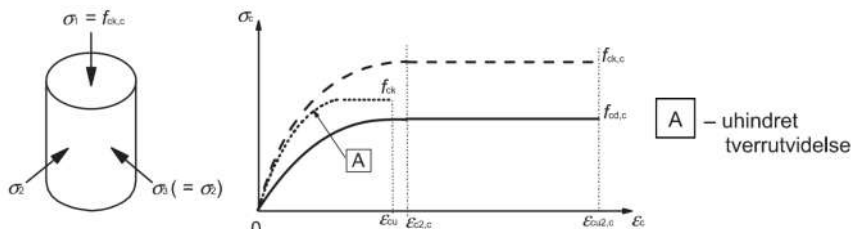
$$f_{ck,c} = f_{ck}(1,000 + 5,0 \sigma_2 / f_{ck} \quad \text{for } \sigma_2 \leq 0,05 f_{ck} \quad (3.24)$$

$$f_{ck,c} = f_{ck}(1,125 + 2,50 \sigma_2 / f_{ck} \quad \text{for } \sigma_2 > 0,05 f_{ck} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_{c2,c} = \varepsilon_{c2} (f_{ck,c} / f_{ck})^2 \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{cu2,c} = \varepsilon_{cu2} + 0,2 \sigma_2 / f_{ck} \quad (3.27)$$

der σ_2 ($= \sigma_3$) er effektiv trykkspenning i tverretningene i bruddgrensetilstand på grunn av omsnørende armering, og ε_{c2} og ε_{cu2} er som gitt i tabell 3.1. Treaksial trykkspenningstilstand kan oppnås med tilstrekkelig med lukkede bøyler eller kroker som kan nå plastisk tilstand på grunn av betongens utvidelse i tverretning.

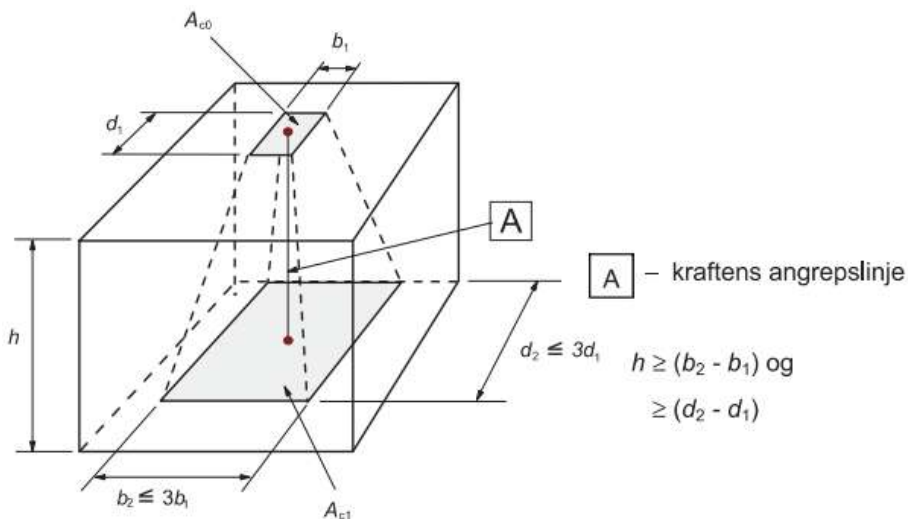


Figur 3.6 – Spennings- tøyningssammenheng for betong med forhindret tverrutvidelse (treaksial trykkspenningstilstand)

Punktet omtaler trykkspenningene i den treaksiale trykkspenningstilstanden som påført av omsnørende armering i form av bøyer eller kroker, men antas også gyldig dersom den treaksiale trykkspenningstilstanden kommer fra påførte trykkspenninger. Fordelen med punktet er at det gir en metode for å øke trykkapasiteten hvor som helst, for eksempel i en flaskeformet spenningsutbredelse. Dette uavhengig av om en betrakter området hvor trykkraften påføres, området hvor trykkspenningene avbøyes og utvikler tverrstrekk, eller området hvor trykkspenningene er fordelt over tverrsnittet. Det vil i neste kapittel kommenteres hvordan EK2 gir en metode for å øke trykkapasiteten på flaten hvor trykkraftene påføres.

EK2 6.7 Partielt belastede flater

Kapittel 6.7 *Partielt belastede flater* gir en formel for økt trykkapasitet F_{Rdu} som kan antas for arealet A_{c0} (se Figur 4-5). Metoden beskriver en treaksial spenningstilstand på arealet A_{c0} , der tilstanden oppstår som følge av en tredimensjonal flaskeformet spenningsutbredelse.



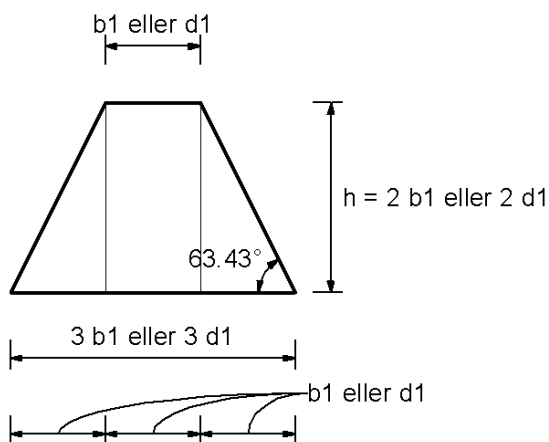
Figur 4-5: Partielt belastede flater (EK2-1-1, side 109, Figur 6.29)

Kapasiteten uttrykkes med formel (6.63) som:

$$F_{Rdu} = A_{c0} \cdot f_{cd} \cdot \sqrt{A_{c1}/A_{c0}} \leq 3,0 \cdot f_{cd} \cdot A_{c0}$$

Dersom betongens tverrsnitt ikke begrenser A_{c1} slik at den kan beregnes som $3b_1 \times 3d_1$ blir F_{Rdu} lik maksimalbegrensningen på $3f_{cd}A_{c0}$.

Når $A_{c1} = 3b_1 \times 3d_1$ kan en også kjenne igjen minimumsvinklen fra kapittel 6.5 EK2-1-1 utledet tidligere:



Figur 4-6: Minimumsvinkelen for metoden blir den samme som beskrevet i kapittel 6.5; $\cotan(2) = 63,43^\circ$

Følgende betingelser gjelder for metoden:

- formen på A_{c1} tilsvarer formen på A_{c0} . Med dette menes at hver sidekant er skalert med samme faktor.
- avstanden h mellom flatene A_{c0} og A_{c1} følger de retningslinjene som er gitt i punktet.
- begge flatene har symmetri om lastens angrepsakse.
- ved påføring av flere punktlaster skal de ulike flatene A_{c1} tilhørende hver punktlast ikke overlape hverandre.
- Tverrstrekk beregnes i henhold til kapittel 6.5 og at det om nødvendig legges inn armering for dette.

Kapittelet viser at betongspenningen på flaten der lasten påføres kan tillates å være opp til $3,0 f_{cd}$ og tilsvarer maksimalbegrensningen for $\sigma_{Rd,max}$ fra punkt 6.5.4(6). På denne flaten vil ikke tverrstrekk opptre og parameteren ν som følge av flaskeformet spenningsutbredelse trenger ikke tas hensyn til. Betongtrykkspenningen på flaten A_{c1} må fortsatt kontrolleres opp mot kapittel 6.5.

4.2.7 Bruksgrensetilstand

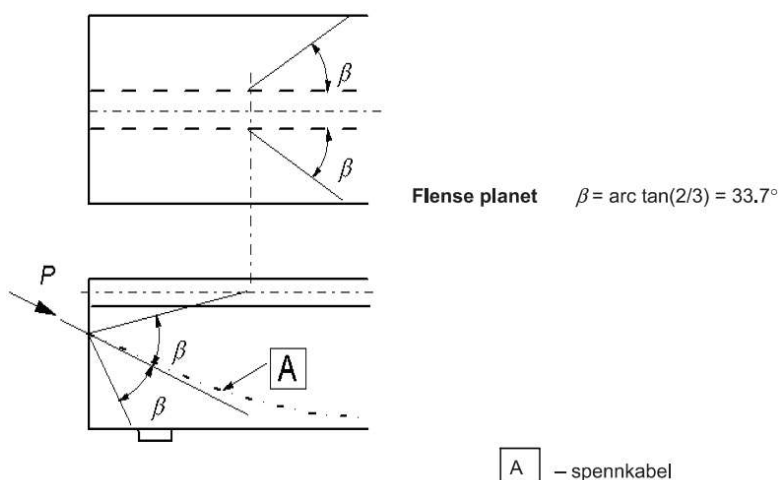
D-regioner og stavmodeller i bruksgrensetilstand kommenteres i kapittel 5.

4.2.8 Armeringsregler for armering og spennarmering

EK2 8.10 Spennarmering

EK2 8.10.3 Forankringssoner for etteroppspente konstruksjonsdeler

I kapittel 8.10.3 står det at forankringssoner bør være i overensstemmelse med anvendelsesreglene gitt i kapittelet, samt reglene gitt i kapittel 6.5.3 *Strekkestaver*. Spenningene bak forankringsplatene bør kontrolleres mot den aktuelle ETA. Videre står det at spaltstrekkekrefter som følge av innføringen av konsentrerte krefter bør bestemmes ved hjelp av stavmodell eller annen egnet modell med henvisning til kapittel 6.5. Dersom spenningen i armeringen lagt inn for å oppta spaltstrekkekreftene ikke overstiger 250 MPa, er det ikke nødvendig med kontroll av rissvidder. Forenklet kan en anta at forspenningskraften fordeles med en åpningsvinkel på 2β og at β kan antas å være $\arctan(2/3)$, se *Figur 4-7*.



Figur 4-7: Fordeling av forspenningskraft (EK2-1-1, side 148, Figur 8.18)

Da dette er en forenklet antagelse kan den forventes å være konservativ. Den gir en vinkel mellom trykk- og strekkstav på $56,3^\circ$. Til sammenligning gir kapittel 6.5 en minimumsvinkel på $63,43^\circ$. Dette betyr at den forenklede antagelsen i punkt 8.10.3 (5) gir et høyere tverrstrekk enn kapittel 6.5.

Kapittelet sier også at særskilt vurdering må gjøres i konstruksjoner med to eller flere spennkabelforankringer og henviser til *Tillegg J* som blir gjennomgått senere i oppgaven.

EK2 8.10.4 Forankringer og skjøtekoblinger for spennkabler

I punkt 8.10.4 (3) står det at beregninger av lokale virkninger i betongen og tverrarmeringen kan utføres i henhold til kapittel 6.5 *Dimensjonering med stavmodeller* og kapittel 8.10.3 *Forankringssoner for etteroppspente konstruksjonsdeler*.

4.2.9 Konstruksjonsregler

Kapittel 9 innfører ingenting nytt hva angår anvendelsesregler for dimensjonering av stavmodeller i etteroppspente konstruksjoner. I kapittel 9.9 *Områder med diskontinuitet i geometri eller last* står det:

- (1) *D-områder bør normalt dimensjoneres med stavmodeller i overensstemmelse med 6.5 og utformes i henhold til reglene gitt i kapittel 8.*

Merknad Ytterligere veiledning er gitt i tillegg J.

4.2.10 J.104 Partielt belastede flater

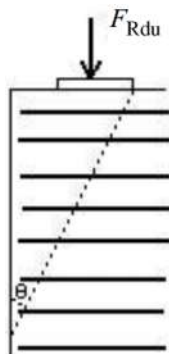
J.104.1 Bærende soner i bruer

I punkt *J.104.1 (101)* står det at bærende soner i bruer bør dimensjoneres i henhold til reglene gitt i dette punktet, kapittel 6.5 og 6.7 (*EK2*) som er gjennomgått tidligere. I punkt *J.104.1 (102)* står det at den minste avstanden fra kanten til den belastede flaten til nærmeste betongkant ikke bør være mindre enn 1/6 av den belastede flatens utstrekning i samme retning. Avstanden bør ikke være mindre enn 50 mm. I punkt *J.104.1 (103)* står det at for betongklasser lik eller høyere enn C55/67 bør formel (6.63) erstattes av

$$\frac{0,46 \cdot f_{ck}^{2/3}}{1+0,1 \cdot f_{ck}} \cdot f_{cd}$$

Formel (6.63) er formelen for økt betongtrykkapasitet på belastningens flate fra kapittel 6.7 *Partielt belastede flater*. I punkt *J.104.1 (104)* står det at det innenfor området hvor trykkspenningen fordeles i tverrsnittet bør legges inn armering for

å forhindre avskalling. Armeringen bør legges parallelt med lastflaten, være jevnt fordelt og tilstrekkelig forankret. Området armeringen skal fordeles over kan bestemmes fra *Figur 4-8*. Vinkelen θ settes til 30° .



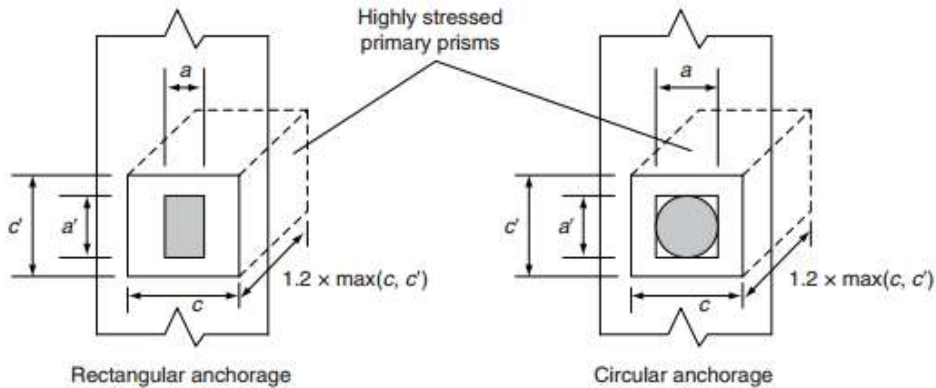
Figur 4-8: Mekanisme for avskalling (EK2-2, side 60, Figur J.107)

Punkt *J.104.1 (105)* angir minimumsarmering for avskalling:

$$A_r \cdot f_{yd} \geq F_{Rdu}/2$$

J.104.2 Forankringssoner i etteroppspente konstruksjoner

Kapittelet er et tillegg til kapittel 8.10.3 *Forankringssoner for etteroppspente konstruksjonsdeler* som er gjennomgått tidligere. Kapittelet er ment for situasjoner der to eller flere kabler er forankret i samme betongtverrsnitt. Her beskrives en lokal sone bak hvert anker. Den lokale sonen betraktes som et rektangulært prisme som vist i *Figur 4-9*. Prismet har som formål å tilnærmet representere området i betongen hvor spenningene rett bak forankringsplaten går fra svært høye til kontrollerte/normale trykkspenninger. Prismet er dobbelsymmetrisk om senterlinjen for spennkraften og har samme retning som spennkraften/spennkabelen. Avstanden mellom senterlinjene til forankringene og avstanden til betongkanten bør ikke være mindre enn verdier angitt i aktuell ETA.



Figur 4-9: Lokal sone etter EK2-2 tillegg J.104 (Hendy og Smith, 2007, side 264)

Målene a og a' defineres av størrelsen på forankringsplaten, dybden på prismet er definert som $1,2 \times \max(c, c')$, og for c og c' gjelder formel (J101) i EK2-2:

$$\frac{P_{\max}}{c \cdot c'} \leq 0,6f_{ck}(t)$$

P_{\max} er maksimal kraft i kabelen i henhold til 5.10.2.1 i EK.2-1-1

c, c' er dimensjonene på prismets plan normalt på P_{\max}

$f_{ck}(t)$ er trykkapasiteten i betongen på tidspunktet etterspenningen påføres

Formel (J.101) setter med dette et minimumskrav for hvor stort arealet $c \cdot c'$ bør være.

Videre gjelder det for flere ankre plassert i samme tverrsnitt at prismene ikke skal overlape hverandre og de skal være innenfor det fysiske betongvolumet. Det vil si at c og c' er den minste av senteravstanden mellom spennkablene og kantavstanden til betongtverrsnittet. Ett unntak gjelder: Dersom spennkablene har ulik retning kan prismene overlape hverandre. Dette antas gyldig dersom spennkablene representert ved de lokale sonene peker bort fra hverandre og at vinkelen og avstanden mellom dem ikke overlapper stavmodellen som etableres inne i de lokale sonene.

Formen på arealet $c \cdot c'$ skal ha tilnærmet lik form som arealet $a \cdot a'$ og følgende begrensning er gitt:

$$\frac{c}{a} \text{ og } \frac{c'}{a'} \leq 1,25 \cdot \sqrt{\frac{c \cdot c'}{a \cdot a'}}$$

a og a' er kjente størrelser definert av forankringsplaten. Løses ligningen med hensyn på c fremkommer:

$$c \leq 1,25^2 \cdot \frac{c' \cdot a}{a'}$$

Tilsvarende for c' :

$$c' \leq 1,25^2 \cdot \frac{c \cdot a'}{a}$$

Dersom forankringsplaten er kvadratisk, det vil si $a = a'$ får en:

$$c \leq 1,25^2 \cdot c' = 1,5625 \cdot c'$$

Tilsvarende for c'

$$c' \leq 1,25^2 \cdot c = 1,5625 \cdot c$$

Med dette ser en at forankringsplaten kan være kvadratisk, mens arealet $c \cdot c'$ kan være rektangulært med begrensningene gitt over. Formelen begrenser ikke størrelsen på $c \cdot c'$ i forhold til $a \cdot a'$, den setter kun begrensning for hvor ulik formen på de to flatene kan være. Det er heller ikke gitt begrensninger for hva dybden på prismet kan være, annet enn at dette avhenger av c og c' . Det står imidlertid innledningsvis at reglene må betraktes som supplerende til *EK2-1-1 punkt 8.10.3*, og at armeringen skal beregnes i henhold til geometrien utviklet med dette prismet. Kapittel 8.10.3 henviser videre til kapittel 6.5 som er gjennomgått tidligere.

Til slutt står det at armering for å hindre sprenging og avskalling av betongen skal fordeles over lengden på prismet. Minimumsarmeringen for begge effektene gis ved formel (J.102):

$$A_s = 0,15 \frac{P_{max}}{f_{yd}} \gamma_{p,unfav}$$

der

$$\gamma_{p,unfav} \geq 1,20$$

P_{max} i henhold til kapittel 5.10.2.1 og formel (5.41).

Armeringen bør fordeles i hver retning av prismet. Mengden av overflatearmering bør ikke være mindre i hver retning enn:

$$0,03 \frac{P_{max}}{f_{yd}} \gamma_{p,unfav}$$

I punkt *J.104.1 (104)* står det at armeringen beregnet fra ETA til det aktuelle forspenningssystemet bør legges til. Armeringen bør modifieres slik at den har kapasitet til å ta tverrstrekk beregnet etter punkt *8.10.3 (4)*.

Det er vanskelig å se hvilken praktisk konsekvens og betydning kapittel *J.104.2* har. Det foreligger ingen forklaring på hva som ligger bak formel (*J.101*) eller formelen som angir formlikheten mellom flaten *a·a'* og *c·c'*. I formel (*J.101*) forekommer faktoren 0,6 som $f_{ck}(t)$ multipliseres med og kan minne om $\alpha_{cc} \cdot \gamma_c = 0,85/1,5 = 0,57$. Dessuten gir kapittel 6.7 EK2-1-1 strengere regler til formlikhet mellom flaten *a·a'* og *c·c'*. I kapittel 6.7 skal flatene være formlike og skal ikke overlape andre flater. Kapittel *J.104.2* fremstår empirisk og virker basert på forenklinger. Det er vanskelig å se sammenhengen den har til kapittel 6.5 og 6.7, annet enn at det indirekte henvises dit ved å henvise til kapittel *8.10.3*. I denne oppgaven vil derfor lokale soner slik Hendy og Smith definerer dem benyttes, da disse har en klar sammenheng til kapittel 6.5 og 6.7. Hvordan Hendy og Smith betrakter lokale soner basert på CIRIA Guide 1 er tidligere gjennomgått. Punkt *J.104.1 (104)* kommer derimot med en viktig påminnelse. En kan ikke uten videre anta at armeringsmengdene i de lokale sonene er tilfredsstilt av armering beregnet fra aktuell ETA. Mengden bør kontrolleres med reglene i EK2 og om nødvendig justeres.

Anbefalingene gitt i kapittel *J.104.1 Bærende soner i broer* som omhandler avskalling er derimot verdt å ta hensyn til, da dette ikke er omtalt andre steder, verken i EK2-1-1 eller EK2-2.

4.3 ETA

ETA ble introdusert gjennom regulering EU/305/2011 som trådte i kraft 1. juli 2013, og gjelder for medlemsland av Den Europeiske Union (EU) og Europeisk Økonomisk Samarbeidsområde (EØS). I tillegg gjelder bestemmelsene for Sveits og Tyrkia.

I Norge er SINTEF Byggforsk oppnevnt som teknisk bedømmelsesorgan, og kan utarbeide ETA innen de fleste områder for produkter til byggverk.

4.3.1 Tre sentrale leverandører

Fra *Praktisk prosjektering av spennarmerte betongkonstruksjoner* av Håvard Johansen fra Bruseksjonen i Statens vegvesen, er ETA for tre sentrale leverandører av spennsystem nevnt:

- BBR: ETA-09/0286 (2013-2018)
- DSI: ETA-13/0815 (2013-2018)
- CCL: ETA-07/0035 (2012-2017)

Tallene i parentes indikerer tidsperioden for ETA-enes gyldighet. Gjennomgang av disse gjøres med fokus på regler som påvirker forankringssonen.

De tre ETA-ene angir kapasitet for ulike spennkabler, og forutsetninger som må tilfredstilles for å oppnå den. Innledningsvis gis generelle forklaringer og regler for bruk av systemet. Deretter følger forutsetningene gitt på tabellform i egne vedlegg (*Annex*). Forutsetningene omfatter betongfasthet, senteravstand mellom forankringer, kantavstand, og armering i forankringssonen. Forankringssonens størrelse defineres av senter- og kantavstander. Avstandene og definisjon av dem legges derfor vekt på i dette kapittelet.

ETA-ene angir nødvendig armeringsmengde for valgt system. Armeringen består av en spiral og tilleggsarmering. Spiralen legges inn rundt forankringene for å oppnå en tredimensjonal spenningstilstand, mens tilleggsarmeringen brukes for å oppta spaltestrekk. Tilleggsarmeringen har form som en lukket bøyde, og blir av den grunn videre omtalt som lukkebøyde.

Utarbeidelsen av ETA for spennkabelsystemene er gjort med utgangspunkt i guiden til europeisk teknisk godkjenning *Post-Tensioning for Prestressing of Structures*, ETAG 013, juni 2002. ETAG 013 beskriver; hvordan godkjenningen

baseres på Eurokodene, hvilke komponenter som er testet, og prosedyrer med forutsetninger som settes ved hver test.

BBR og DSI referer ikke til stavmodeller eller lokal- og generell sone direkte, noe CCL gjør. I følge terminologilisten til ETAG 013, plasseres spaltestrekkarmering i en såkalt lokal sone. Om dette er den samme lokale sonen som er definert av Hendy og Smith, kan en ikke med sikkerhet bekrefte. Dette fordi lokal sone i ETAG 013 og CCL ikke beskrives presist nok. Armeringen definert av ETA bør derfor kontrolleres slik at kapasiteten til lokal og generell sone, definert av Hendy og Smith overholdes.

Fellestrekk for de tre ETA-ene:

- Oppbygningen av kapitlene følger samme form.
- Hvert ETA blad inneholder flere ulike systemer.
- Spennsystemene forutsetter at gjeldene Eurokoder og nasjonale reguleringer følges.
- Gir beskrivelse av det komplette systemet, dets komponenter og nødvendig utførelse.
- Baseres på et standard sett av verdier for antall tau, elastisitet, vaier, diameter på tau, maksimal spennkraft, og dimensjonerende parametere.
- Betongfastheten som brukes er $f_{cm,0}$, og indikerer trykkapasiteten til betongen ved tidspunktet for oppspenning.
- Med $f_{cm,0}$ og antall tau (med dets arrangement) kan en bestemme spiral, tilleggsarmering og geometrisk utforming av forankring.
- Armering oppgis slik at overføring av spennkraft til betongen sikres, samtidig som det påpekes at områdene utenfor de lokale sonene må kontrolleres.
- Utforming som legger til rette for god utstøpning og komprimering må sikres.
- Overdekning gis av andre gjeldende bestemmelser, som Eurokoden. BBR og DSI setter i tillegg et minste krav til 20 mm overdekning.

4.3.2 BBR: ETA-09/0286 (2013-2018)

BBR 2 Spennkablens egenskaper og metoder for verifikasjon

BBR 2.9 Senter- og kantavstand for forankringer

Generelt må reglene for avstander gitt i *Annex 20 - 27* brukes. Senteravstanden mellom forankringene kan reduseres med opptil 15%, men skal ikke være mindre enn den ytre diameteren av spiralen og plassering av lukkebøyler skal være mulig. En eventuell reduksjon i senteravstand skal gjøres i begge retninger. Avstand fra senter av forankringene til ytterkant av betongen i vertikal og horisontal retning er gitt ved formel (4-1) og (4-2), se *Figur 4-11*.

$$a_e = \frac{a_c}{2} - 10 \text{ mm} + c \quad (4-1)$$

$$b_e = \frac{b_c}{2} - 10 \text{ mm} + c \quad (4-2)$$

Parameterne defineres senere i kapitlet.

BBR 4 Forutsetninger for kapasiteten til spennkabelsystemet

BBR 4.2 Prosjektering

BBR 4.2.1 Generelt

Utforming av konstruksjonen skal tilpasses slik at montering og oppspenning av armeringen kan utføres på praktisk vis. Det må i tillegg tas hensyn til støpevibrator og at betongen skal komprimeres.

BBR 4.2.3 Armering i forankringssoner

Overføring av oppspenningskraft fra anker til betong antas tilfredsstillt dersom senter- og kantavstand, dimensjon og armering av forankringene er i henhold til *Annex 20-27*. Ved tilfeller der det brukes forankringsgrupper kan lukkebøyler for hvert individuelle anker kombineres såfremt tilstrekkelig forankring sikres. Imidlertid bør mengden armering, tverrsnittet og plasseringen til forankringssonen beholdes.

Kapasiteten til konstruksjonen utenfor forankringssonen må verifiseres og håndteres av separat armering. Armering i konstruksjonen for øvrig skal ikke erstatte lukkebøylene. Dersom det påvises større behov for lukkebøyler enn det som er beskrevet, kan mengden økes.

Det tillattes endringer av armeringsmengdene gitt i *Annex 20 - 27* dersom lik strukturell ytelse sikres. Det forutsetter godkjenning fra leverandør og lokale myndigheter.

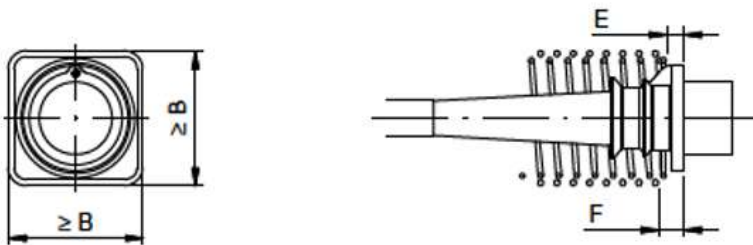
BBR 4.2.6 Maksimal førøppspenningskraft

Annex 18 gir verdiene for maksimal oppspenning og overoppspenning. I denne oppgaven er disse verdiene gitt av Statens vegvesen.

Annex 20-27

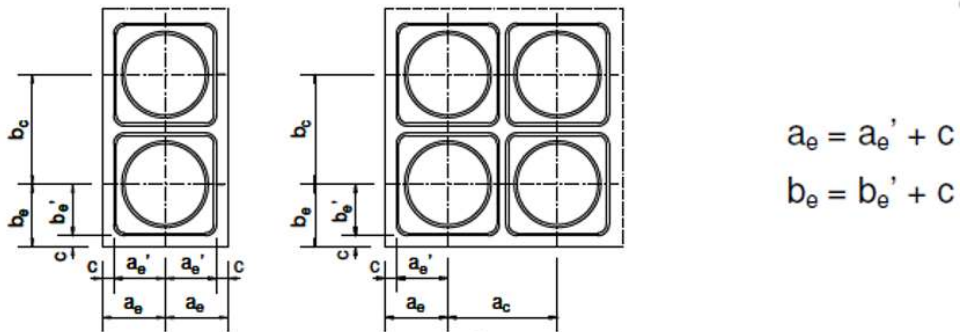
Her gis maksimal førøppspenningskraft med tilhørende forutsetninger for hver variant av spennkabler. Forutsetningene omfatter form og mengde av spiraler og lukkebøyler, og avstander mellom forankringsenhetene. Dataene er gitt på tabulert form med tilhørende figurer.

Figur 4-10 og *Figur 4-11* viser avstandene som i *Annex 20-27* brukes for å begrense avstander mellom forankringsgrupper. Tilsvarende figurer finnes i DSI og CCL, men med annen geometri og dimensjoner.



Figur 4-10: Tverr og lengdesnitt av ett anker (BBR, 2013, side 46)

Sirkelen i *Figur 4-10* indikerer ankerplate og spiral. Ankerplaten bidrar til å overføre kreftene fra spennarmeringen til betongen. Variabler med tilhørende forklaring er gitt i kapittel 2.9 i BBR.



Figur 4-11: Definisjon av tabulerte verdier for senter- og kantavstand for forankringsgrupper etter anneksene 20 til 27 (BBR, 2013, side 46)

Rektangelet representerer lukkebøylen som kommer i tillegg til spiralen.

Definisjon av verdier knyttet til utforming av forankringer:

- a_c Horizontal senteravstand mellom ankre.
- b_c Vertikal senteravstand mellom ankre.
- a_e Horizontal avstand fra senter anker til nærmeste betongkant.
- b_e Vertikal avstand fra senter anker til nærmeste betongkant.
- c Overdekning, det vil si avstand fra lukkebøylen til betongkanten.
- a_e' Horizontal avstand fra senter av anker til ytterkant lukkebøyle.
- b_e' Vertikal avstand fra senter av anker til ytterkant lukkebøyle.
- B Minimumsstørrelse på lukkebøylen.
- E Avstand fra overside av ankerplaten til start av spiral.
- F Avstand fra overside av ankerplaten til start av lukkebøyle.

DSI og CCL er bygd opp etter samme prinsipp som BBR. De alle inneholder ulike systemer, dets geometri, forutsetninger og kapasitetsegenskaper. Systemenes bruksområde, metode å overføre spennkraften til betongen på, og utforming varierer noe. Hvordan en bruker de ulike ETA-ene er likevel etter den samme prosedyren. Det gis tabulerte verdier for kapasiteter med tilhørende forutsetninger for armering og utforming av forankringssoner som må overholdes. DSI og CCL kommenteres derfor ikke nærmere i denne oppgaven.

5 D-regioner i bruksgrensetilstand

5.1 Kontroll i SLS

For kontroll i bruksgrensetilstand (SLS) legges det i denne oppgaven i hovedsak vekt på kontroll av spenninger og riss i D-regioner. Dette fordi deformasjoner i konstruksjonen i liten grad påvirkes av D-regionene, da deres utstrekning er relativt liten og deformasjonene som oppstår innenfor D-regionene hovedsakelig kommer fra skjær. Kapittelet presenterer beregningsreglene som finnes i dag, med henvisning til de viktigste punktene i EK2-1-1 og EK2-2. Punktene kommenteres også nærmere der det er nødvendig med en tydeligere utdypning og/eller presisering av punktets formål. Regler for riss inngår i flere av EK2 (EK2-1-1 og EK2-2) sine kapitler. Gjennomgangen av reglene for riss er derfor bygd opp slik at det for hvert tema ses på reglene som gis de ulike stedene i EK2. Tekst skrevet i kursiv er direkte sitering fra EK2.

5.1.1 Gyldighet

I EK2-1-1 punkt 7.3.1 (1)P står det at opprissing skal begrenses slik at ikke konstruksjonens egentlige funksjon eller bestandighet skades eller gir den et uakseptabelt utseende. Det skal også etter punkt 5.4 (3) tas hensyn til en gradvis utvikling av riss. Rissene kan føre til redusert bestandighet og dermed brudd på et tidligere tidspunkt enn forventet. EK2-1-1 tillater bruk av stavmodellen for beregningsgrunnlag til overholdelse av overnevnt prinsipp. I punkt 5.6.4 (2) står det:

Påvisninger i bruksgrensetilstanden kan også utføres ved hjelp av stavmodeller, f.eks. beregning av stålspenninger og rissvidder, forutsatt at trykk- og strekkstavene har en tilstrekkelig kompatibilitet (spesielt bør plassering og retning for viktige trykkstaver tilpasses etter lineær elastisitetsteori).

I punkt 7.3.1 (8) står det videre at det er mulig å bruke kreftene i strekkstavene for å beregne tilhørende stålspenninger og derav estimere rissvidden, dersom overnevnte forutsetninger er tilfredstilt. Metoden ved bruk av stavmodellen baserer seg på plastisitetsteorien og dets nedre grenseteorem, mens EK2-2 krever en elastisk tilnærming. Årsaken til dette er som følger; når trykkstavene orienteres etter de lineær elastiske spenningstrajektoriene minimaliseres omfordelingen av krefter etter opprissing. Dersom omfordelingen ikke minimaliseres kan det resultere i overtredelse av bruksgrensekrav og/eller tidlig brudd. Hvis omfordelingen av kreftene minimaliseres kan den samme

stavmodellen benyttes for både bruks- og bruddgrensetilstanden (fib, 2010, side 199).

5.1.2 Spenningsbegrensninger

Strekkspenninger i betong

For bruksgrensetilstanden settes det begrensninger for strekkspenninger i betong og stål, samt trykkspenninger i betong. I punkt 7.1 (2) står det

Ved beregning av spenninger og nedbøyninger bør tverrsnittene forutsettes å være uopprissede forutsatt at bøyestrekkspenningen ikke overskrider $f_{ct,eff}$. Verdien av $f_{ct,eff}$ kan settes lik f_{ctm} eller $f_{ctm,fl}$ forutsatt at beregningen av minimumsarmeringen er basert på samme verdi. Ved beregning av rissvidde og stivhetseffekten av betongens strekkfasthet mellom rissene benyttes f_{ctm} .

$f_{ct,eff}$	Middelverdien av betongens strekkfasthet på det tidspunktet da det kan forventes at opprissingen først oppstår.
f_{ctm}	Midlere aksialtrekkfasthet.
$f_{ctm,fl}$	Midlere bøyestrekfasthet.

Dersom en betrakter et tverrsnitt som uopprisset, kan tverrsnittet analyseres lineær elastisk, mens det vil bli en ikke-lineær spenningsfordeling ved opprissing. For mange tilfeller vil strekkapasiteten til betongen være overskredet også i SLS og tverrsnittene må derfor regnes som opprissede. I hvilken grad betongen risser opp som følge av strekkspenninger fra for eksempel bøyning omtales av noe litteratur som Stadium I – uopprisset og Stadium II - opprisset (Schlaich mfl., 1987, side 85). Annen litteratur deler graden av opprissing i tre stadier; Stadium I – uopprisset, Stadium II – mellomting mellom uopprisset og opprisset, og Stadium III – opprisset. For Stadium II kan det fortsatt antas en lineær elastisk spenningsfordeling (Sørensen, 2013, side 124). Punkt 7.1 (2) definerer hvor grensen mellom uopprisset og opprisset går ved innføring av strekkspenningsbegrensning for betongen.

Trykkspenninger i betong

Begrensningene for trykkspenningene i betongen, har som formål å unngå for vidtgående trykkspenninger som produserer irreversible tøyninger og riss parallelt med trykkspenningene. I punkt 7.2 (1)P står det at trykkspenningen i

betongen skal begrenses for å unngå riss i lengderetningen, mikroriss eller store krypdeformasjoner dersom det kan medføre uakseptable virkninger på konstruksjonens funksjon. I punkt 7.2 (2) står det at riss i lengderetningen kan oppstå hvis spenningsnivået for den karakteristiske lastkombinasjonen overskrider en kritisk verdi, og at det vil kunne redusere bestandigheten. Dersom det ikke utføres tiltak som å øke armeringens overdekning i trykksonen eller å omslutte trykksonen med tværrarmering, bør trykkspenningen begrenses til en verdi $k_{1f_{ck}}$. Nasjonalt tillegg NA 7.2 (2) anbefaler k_1 lik 0,6. Punktet gjelder for områder utsatt for miljø tilsvarende eksponeringsklassene XD, XF og XS. Maksimal anbefalt økning over spenningsbegrensningen $k_{1f_{ck}}$ er 10 %. Etter punkt EK2-2 NA.7.2 (102) kan verdien økes til 0,66 ved bruk av omsluttende tværrarmering.

For å hindre lokal knusing og spalting av betongen i enden av før- og etteroppspente konstruksjonsdeler samt bak spennankre for etteroppspente kabler, bør en etter punkt 5.10.2.2 (1)P og 5.10.2.2 (2) følge anvisninger i den aktuelle europeiske tekniske godkjenningen (ETA). For føroppspente elementer kan betongtrykkspenningen etter punkt 5.10.2.2 (5), som følge av forspenningskraften eller andre belastninger som virker på tidspunktet for oppspenning, begrenses til $0,6f_{ck}(t)$. Dette for å unngå langsgående riss som er uønsket tatt bestandighet i betraktning. Hvis forsøk eller erfaring viser at opprissing i lengderetningen unngås kan begrensningen økes til $k_6f_{ck}(t)$. Nasjonalt tillegg anbefaler faktoren k_6 lik 0,7. Dersom belastningen påføres betongen før den har herdet i 28 døgn, må karakteristisk trykkfasthet på oppspenningstidspunktet benyttes.

Strekkspenninger i armering

Strekkspenninger i armering bør begrenses ved en passende sikkerhetsmargin lavere enn flytespenning. Dette for å unngå ukontrollert in-elastic rissing som både kan gjøre beregninger av riss og deformasjoner ugyldig, da de bygger på at armeringen oppfører seg elastisk, samt føre til permanent store og åpne riss. Dette er spesielt kritisk for områder utsatt for hyppig og varierende belastning (Beeby og Narayanan, 2005, side 130). EK2 punkt 7.2 (4)P tar hensyn til dette ved å påpeke at strekkspenninger i armeringen skal begrenses for å unngå in-elastic tøyning, uakseptabel opprissing eller deformasjon.

For spennarmering er kravet til korrosjonsskader mye strengere enn for slakkarmering. Dette er i hovedsak på grunn av spennarmeringens diameter og

konstant høye spenningstilstand. En førroppsant kabel har en konstant spenning på opp mot 70% av flytespenningen, mens en armeringsstang kun belastes opp til 50% av flytspenningen i områder med maks moment. For områder utsatt for forurensning (klorider og lignende) må riss derfor unngås. For å unngå dette står det i punkt 7.3.1 (5) at ekstra sikkerhet mot opprissing oppnås ved å kreve at kabelen er omgitt av i hvert fall 25 mm urisset betong (Beeby og Narayanan, 2005, side 130).

Punkt 7.2 (5)P sier at uakseptabel opprissing eller deformasjon, av hensyn til utseendet, kan antas unngått hvis strekkspenningen i armeringen ikke overskrider $k_3 f_{yk}$ for den karakteristiske lastkombinasjonen. Dersom spenningen er forårsaket av en påført deformasjon, bør strekkspenningen ikke overskride $k_4 f_{yk}$. Middelverdien av spenning i spennkabler bør ikke overskride $k_5 f_{pk}$. Nasjonalt tillegg anbefaler følgende verdier; $k_3=0,8$, $k_4=1,0$, og $k_5=0,75$.

Punktet over vil resultere i en spenningsbegrensning på 400 N/mm^2 for B500NC. For beregning av riss er dette en relativt høy verdi og dermed lite konservativ. Beregning av riss kommenteres nærmere i kapittel 5.1.3.

Strekkspenninger i forankringssoner

I punkt 8.4.1 (1)P står det at armeringsstenger, armeringstau eller sveiste armeringsnett skal være forankret slik at kreftene blir sikkert overført til betongen, og at langsgående riss eller avskalling unngås. Armering i tverretning skal foreskrives om nødvendig. Videre står det i punkt 8.10.3 (4) at strekkrefter som skyldes innføring av konsentrerte krefter, bør bestemmes ved hjelp av en stavmodell eller en annen egnet modell med henvisning til kapittel 6.5. Armeringen bør bestemmes ut fra at den konsentrerte kraften virker med sin dimensjonerende verdi. Hvis spenningen i armeringen er begrenset til 300 MPa, er det ikke nødvendig med kontroll av rissvidder. I EK2-2 punkt 8.10.3 (104) står det at hvis spenningen er begrenset til 250 MPa, er det ikke nødvendig med kontroll av rissvidder. Det er ikke presisert i EK2 om spenningsbegrensningen skal overholdes ved spenninger av ULS belastning eller ikke. Det er likevel åpenbart konservativt at kravet overholdes ved bruk av lastfaktor for ULS (Hendy og Smith, 2007, side 263).

5.1.3 Beregning av rissvidde

I EK2-1-1 punkt 7.3.1 (8) står det,

Ved bruk av stavmodeller der trykkstavene har retning etter trykkspenningsfeltet for den urissede tilstanden, er det mulig å bruke kreftene i strekkstavene for å beregne de tilhørende stålspenningene for å estimere rissvidden (se 5.6.4 (2)).

EK2 sier videre i punkt 7.3.1 (9) at rissviddene kan beregnes etter punkt 7.3.4, eller alternativt en forenklet kontroll ved å begrense stangstørrelsen eller senteravstanden i henhold til 7.3.3.

I Hendy og Smith, side 232, står det at forenklet beregning etter 7.3.3 er lettest å bruke ved beregning av D-regioner. Dette begrunnes med at formel (7.9) i punkt 7.3.4 inneholder mange parametere relatert til bjelkegeometri og dermed en mindre komplisert geometri enn det en typisk D-region har. Formel (7.9) som benyttes ved beregning av rissvidde bygger på forsøk og testing av et strekkpåkjent prisme og sylinder. Mens *Tabell 7.2N* og *Tabell 7.3N* bygger både på formel (7.9) og parameterstudier av et armert rektangulært betongtverrsnitt utsatt for bøyning og rent strekk. Dersom en klarer å bestemme fornuftige parametere i formelen for beregning av rissvidde for en kompleks D-region, vil resultatet muligens være mer riktig enn ved bruk av forenklet metode.

Rissviddebegrensning

Det er flere grunner til at rissvidder bør begrenses ved en relativt lav verdi. Blant de viktigste er (Beeby og Narayanan, 2005, side 148):

- For å unngå korrosjon av armeringen på grunn av skadelig forurensning som trenger inn til armeringen gjennom riss.
- For å unngå eller begrense lekkasje gjennom en konstruksjon.
- For å unngå et stygt utseende. Dette både med tanke på det estetiske, men også fordi riss av betydelig størrelse skaper engstelse blant folk som ferdes i nærheten av, på eller i konstruksjonen.

Disse punktene er det tatt hensyn til i EK2-1-1 punkt 7.3.1 (1)P der det står;

Opprissing skal begrenses slik at ikke konstruksjonens egentlige funksjon eller bestandighet skades eller gir den et uakseptabelt utseende.

Det kan etter punkt 7.3.1 (4) tillates riss uten krav til begrensning av rissvidden forutsatt at de ikke reduserer konstruksjonens funksjon.

Etter punkt 7.3.1 (5) er grenseverdien w_{\max} for den beregningsmessige rissvidden w_k fastsatt ut fra hensyn til konstruksjonens planlagte funksjon og type, og kostnadene ved å beregne rissvidden. Grenseverdien avhenger av eksponeringsklasse og armeringstype, og er oversiktlig fremstilt i *Tabell 5-1*. Faktoren k_c tar hensyn til virkningen av en større overdekning ved beregning av rissvidde.

$$k_c = \frac{c_{nom}}{c_{min,dur}} \leq 1,3$$

c_{nom} Nominell overdekning til armeringen

$c_{min,dur}$ Krav til minste overdekning

Tabell 5-1: Grenseverdier av rissvidden (NA EK2-1-1, side 12, Tabell NA.7.1N)

Eksponeringsklasse	Armede konstruksjonsdeler og forspente konstruksjonsdeler med spennarmering uten kontinuerlig samvirke		Forspente konstruksjonsdeler med spennarmering med kontinuerlig samvirke ³⁾	
	Lastkombinasjon	Grenseverdi	Lastkombinasjon	Grenseverdi
X0	Tilnærmet permanent	0,40 ¹⁾	Ofte forekommende	0,30 k_c
XC1, XC2, XC3, XC4	Tilnærmet permanent	0,30 k_c	Ofte forekommende	0,20 k_c
XD1, XD2, XS1, XS2	Tilnærmet permanent	0,30 k_c	Ofte forekommende	0,20 k_c
			Tilnærmet permanent	Trykkavlastning ²⁾
XD3, XS3	Ofte forekommende	0,30 k_c	Ofte forekommende	Trykkavlastning ²⁾
XSA	Vurderes særskilt ⁴⁾		Vurderes særskilt ⁴⁾	

¹⁾ For eksponeringsklasse X0 har rissvidden ikke påvirkning på bestandigheten, og denne grensen er satt for å gi akseptabelt utseende. Der det ikke er begrensninger av hensyn til utseende, kan verdien økes.

²⁾ Ved påvisning av at det ikke oppstår trykkavlastning forutsettes at hele tverrsnittet av spennarmeringen, eventuelt kabelkanalen for etteroppspente forspenningskabler, ligger minst Δc_{sp} inn i trykksonen.

³⁾ Ligger spennarmeringen innenfor et lag av ordinær armering påvises beregningsmessig rissvidde både mot kravet for ordinær armering og mot kravet for spennarmering. Ved påvisning mot kravet for spennarmeringen benyttes ofte forekommende lastkombinasjon, den beregningsmessige rissvidden kan justeres med uttrykket $w_{2k} = w_k (\epsilon_{s2} / \epsilon_{s1})$ der ϵ_{s1} er strekkøyningen i armeringen på siden med størst tøying, ϵ_{s2} er strekkøyningen i nivå med spennarmeringen og w_{2k} er en justert beregningsmessig rissvidde som sammenlignes med grenseverdiene i tabellen.

⁴⁾ En totalvurdering er nødvendig i disse tilfeller for å komme frem til en hensiktsmessig kombinasjon av konstruktiv utforming, materialsammensetning, overdekning, rissviddebegrensning og andre beskyttende tiltak.

Fotnote 3 er verdt å legge merke til. Den kommenterer beregningsregler for rissvidde ved tilfellet der spennarmering ligger innenfor et lag med slakkarmering. Rissvidde kontrolleres da både mot kravet for spennarmering og slakkarmering. Ved påvisning mot kravet for spennarmeringen benyttes en justert beregningsmessig rissvidde som sammenlignes med verdiene i tabellen.

For broer står det i EK2-2 nasjonalt tillegg punkt NA.7.3.1 (5) at:

Bestemmelsene i NS-EN 1992-1-1:2004/NA:2008 punkt NA.7.3.1(5) og tabell NA.7.1N gjelder.

Eksponeeringsklasse for alle broens overflater bestemmes og tabell NA.7.1N (her gjengitt i Tabell 5-1) gir tilhørende SLS-krav. Rissvidder skal kontrolleres for all armering i begge retninger og reglene gjelder riss i overflaten. Det er viktig at kontrollene relateres til aktuell armering (Johansen, 2016, side 55).

Håndbok N400 Bruprosjektering krever rissviddeberegning for byggefaser med største rissvidde 0,60k_c.

Minimumsarmering

En vesentlig forutsetning som har betydning for gyldigheten av formlene i EK2-1-1 ved beregning av rissvidde, er at armeringen forblir elastisk. Hvis armeringen flyter vil deformasjonen konsentrere seg om risset der armeringen flyter, som ikke er den antatte forutsetning ved utledning av formlene. Det er av den grunn utarbeidet formler for bestemmelse av minimum nødvendig armeringsareal for å oppnå kontrollert rissing (Beeby og Narayanan, 2005, side 150).

I EK2-1-1 punkt 7.3.2 (1)P står det:

Der det er krav om begrensning av rissvidden, kreves en minste mengde av armering med heft for å begrense opprissingen i områder der det kan oppstå strekk. Mengden kan beregnes ut fra likevekt mellom stavkraften i betongen umiddelbart før opprissing og strekkraften i armeringen ved flytning, eventuelt ved en lavere spenning hvis det er nødvendig for å begrense rissvidden.

Det står videre i punkt 7.3.2 (2) at dersom det ikke med en mer nøyaktig beregning viser at et mindre armeringsareal er tilstrekkelig, kan den nødvendige minimumsarmeringen beregnes etter formel (7.1).

$$A_{s,min} = \frac{k_c k_{f_{ct,eff}} A_{ct}}{\sigma_s}$$

$A_{s,min}$ Tverrsnittsarealet av minimumsarmering i strekksonen.

A_{ct} Betongarealet i strekksonen umiddelbart før det første risset dannes.

σ_s Absoluttverdien av største tillatte spenning i armeringen umiddelbart etter at risset er dannet. Spenningskravet kan antas lik armeringens flytegrense f_{yk} . Det kan imidlertid være nødvendig å benytte en lavere

verdi for å overholde rissviddegrensene i henhold til største stangdiameter eller senteravstand (se 7.3.3(2)).

- $f_{ct,eff}$ Middelverdien av betongens strekkfasthet på et tidspunkt da det forventes at opprissingen først oppstår. Dersom opprissing forventes tidligere enn 28 døgn benyttes $f_{ctm}(t)$.
- k Koeffisient som tar hensyn til virkningen av ujevn spenningsfordeling i tverrsnitt med indre likevekt, som fører til reduksjon av fastholdingskrefter. 1,0 kan brukes som en konservativ verdi.
- k_c Koeffisient som tar hensyn til spenningsfordelingen innenfor tverrsnittet umiddelbart før opprissing og endring i indre momentarm.

Punkt 7.3.2 (3) påpeker videre at spennkabler med heft kan antas å bidra til å begrense rissdannelse innenfor en avstand på ≤ 150 mm fra senter av kabelen. Dette kan det tas hensyn til ved at uttrykket $\xi_1 A_p' \Delta \sigma_p$ legges til på venstre side av formel (7.1).

Når rissvidder kontrolleres for alle overflater i alle deler av en bro er det ikke nødvendig å kontrollere minimumsarmeringen etter 7.3.2 (Johansen, 2016, side 55). Minimumsarmeringen kan kun utelates for forspente konstruksjonsdeler, gitt tilfredsstillende spenningstilstand og karakteristisk belastning.

Rissviddebegrensning uten direkte beregning

Under forutsetning av tilstrekkelig minimumsarmering, kan rissvidder avgrenses til akseptabelt lave verdier ved valg av hensiktsmessig armeringsdiameter og senteravstand. Forenklet kontroll er presentert i EK2-1-1 kapittel 7.3.3. Håndbok N400 sier i utgangspunktet at rissvidder skal beregnes etter 7.3.4, men i D-regioner kan punkt 7.3.3 benyttes. Forenklet kontroll innebærer å tilfredsstillere grenseverdier oppgitt på tabellform. Tabellene tar for seg armeringsspenning ut fra valgt armeringsdiameter og senteravstand. Tabellene er utledet fra parameterstudier ved bruk av beregningsreglene gitt i 7.3.4. Riss som følge av bøyning eller ren strekkbelastning kontrolleres ved bruk av forenklet metode i 7.3.3. Det er ikke nødvendig å tilfredsstillere begge tabellene. Det er verdt å legge merke til at tabellene ikke kan benyttes for lastindusert rissdannelse. For riss som følge av fastholdingskrefter bør tabell 7.2N benyttes (Beeby og Narayanan, 2005, side 157).

Siden tabellene er basert på et rektangulært armert betongtverrsnitt utsatt for bøyning, setter de noen begrensninger. Bruken av disse tabellene for broer har vært mye diskutert. Dette fordi tabellene er utledet for elementer med overdekning mer typisk for elementer brukt i bygninger (typisk 25 mm), når overdekning for broer er mye større. Da overdekning har en stor innvirkning på rissavstanden og dermed rissvidden har dette mye å si. Dette vil dermed føre til større beregnede rissvidder for broer (Hendy og Smith, 2007, side 234-235). For elementer med geometrisk tverrsnitt, last eller betongkvalitet annen enn antagelsene brukt ved utledning av tabellene, bør maksimum stangdiameter redigeres etter likning 7.6N eller 7.7N (Hendy og Smith, 2007, side 234). Justering av stangdiameter er ikke praktisk når stavmodellen er benyttet for å bestemme armeringsspenninger. Dette er fordi alle parameterne bygger på bjelkens egenskaper. Direkte bruk av tabell 7.2N og 7.3N vil muligens derfor være det mest hensiktsmessige verktøyet for en D-region. Endring i overdekning tas det ikke hensyn til ved bruk av justeringsformlene. Dette er noe rart da overdekningen er den faktoren som har størst betydning. For betongbjelker og dekker er den forenklete metoden konservativ i forhold til beregning etter 7.3.4 opp til en overdekning på 35 mm. For økende overdekning blir den forenklete metoden mindre og mindre konservativ. Tabellene anses likevel som akseptable å bruke for større overdekninger, da det ikke er presisert noen øvre grense for overdekning ved bruk av forenklet metode i EK2-1-1 (Hendy og Smith, 2007, side 235).

For fØroppspent betong der rissbegrensningen hovedsakelig oppnås ved spennkabler med direkte heft, kan *Tabell 5-2* og *Tabell 5-3* brukes med en spenning lik den totale spenningen minus forspenningen. For etteroppspent betong der rissbegrensningen hovedsakelig oppnås med vanlig armering, kan tabellene brukes der spenningen i armeringen beregnes under hensyn til virkningen av forspenningskreftene.

D-regioner i bruksgrensetilstand

Tabell 5-2: Største stangdiameter ϕ_s^* for begrensning av rissvidde (EK2-1-1, 2004, Tabell 7.2N, side 121)

Armerings- spenning ² [MPa]	Største stangdiameter [mm]		
	$w_k=0,4$ mm	$w_k=0,3$ mm	$w_k=0,2$ mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

MERKNAD 1 Verdiene i tabellen bygger på følgende forutsetninger:
 $c = 25$ mm; $f_{ct,eff} = 2,9$ MPa; $h_{\alpha} = 0,5h$; $(h-d) = 0,1h$; $k_1 = 0,8$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,4$;
 $k = 1,0$; $k_t = 0,4$ og $k_4 = 1,0$

MERKNAD 2 For de aktuelle kombinasjonene av påvirkninger

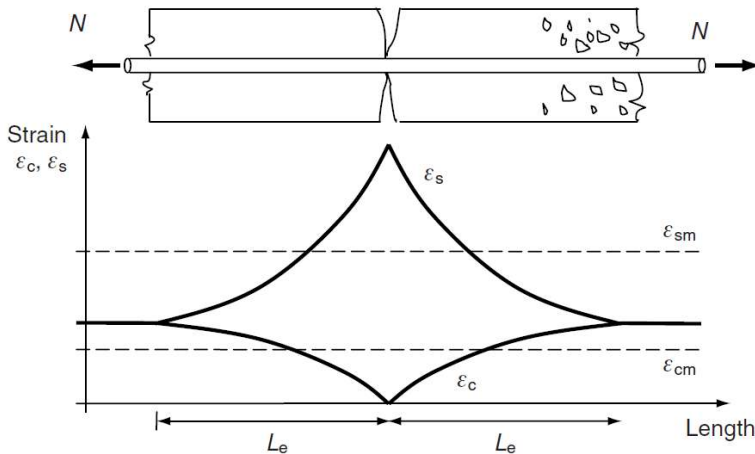
Tabell 5-3: Største senteravstand for begrensning av rissvidde (EK2-1-1, 2004, Tabell 7.3N, side 122)

Stålspenning ² [MPa]	Største senteravstand [mm]		
	$w_k=0,4$ mm	$w_k=0,3$ mm	$w_k=0,2$ mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	-
360	100	50	-

For merknader, se tabell 7.2N.

Beregning av rissvidde

Etter EK2-1-1 punkt 7.3.4 (1) kan rissvidden w_k beregnes ut fra formel (7.8)-(7.11) i EK2-1-1. Formlene nedenfor viser at beregning av rissvidder er rimelig omfattende. Det kreves også en del forenklinger og antagelser dersom geometrien har store avvik fra det enkle rektangulære tverrsnittet. Modifisering av formlenes utgangspunkt gjør også at validiteten av resultatet blir usikkert.



Figur 5-1: Spenninger nærliggende riss (Hendy og Smith, 2007, side 237)

Opprissede områder av en betongkonstruksjon består av flere enkeltriss og strekktøyninger mellom rissene som tas opp av armeringen. *Figur 5-1* illustrer ett riss og hvordan tøyningene i betongen og armeringen varierer i nærheten av det. For å beregne rissvidden settes deformasjonen i betongen lik deformasjonen i armeringen. Dette gir at rissvidden er produktet av rissavstanden og tøyningdifferansen mellom armeringen og betongen (Sørensen, 2013, side 152-153).

$$w_k + s_r \varepsilon_{cm} = s_r \varepsilon_{sm}$$

$$w_k = s_{r,max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

$$s_{r,max} = \frac{k_3 c + k_1 k_2 k_4 \phi}{\rho_{p,eff}}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s + \xi_1^2 A_p'}{A_{c,eff}}$$

$$\xi_1 = \sqrt{\xi \frac{\phi_s}{\phi_p}}$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}}$$

w_k	Rissvidde.
$s_{r,max}$	Største rissavstand.
ε_{sm}	Midlere tøyning i armeringen for den aktuelle lastkombinasjonen.
ε_{cm}	Midlere tøyning i betongen mellom riss.
k_3	3,4.
c	Lengdearmeringens overdekning.
k_1	Koeffisient som tar hensyn til armeringens heftegenskaper. 0,8 for stenger med god heft og 1,6 for stenger/kabler med tilnærmet glatt overflate.
k_2	Koeffisient som tar hensyn til tøyingsfordelingen. 0,5 for bøyning og 1,0 for rent strekk.
k_4	0,425.
ϕ	Armeringsdiameter.
$\rho_{p,eff}$	Forholdet mellom summen av slakkarmering pluss eventuell spennarmering og det effektive arealet av betongstrekksonen som omgir armeringen eller spennkablene.
σ_s	Spenning i strekkarmering under forutsetning av et opprisset tverrsnitt.
k_t	Faktor som avhenger av lastens varighet. 0,6 for kortvarig belastning og 0,4 for langvarig belastning.
$f_{ct,eff}$	Middelverdien av betongens strekkfasthet på et tidspunkt da det forventes at opprissingen først oppstår. Dersom opprissing forventes tidligere enn 28 døgn benyttes $f_{ctm}(t)$.
α_e	Forholdet mellom E_s og E_{cm} .
E_s	Armeringsstålets elastisitetsmodul.
A_s	Tverrsnittsareal av armering i strekksonen.
ξ_1	Justert forhold mellom heftfasthet for spennstål og armeringsstål.

D-regioner i bruksgrensetilstand

A_p'	Arealet av før- eller etteroppspente kabler.
$A_{c,eff}$	Det effektive arealet av betongstrekksone som omgir armeringen eller spennkablene.
ξ	Forhold mellom heftfasthet for spennstål og armeringsstål.
ϕ_s	Største stangdiameter for armeringsstål.
ϕ_p	Diameter eller ekvivalent diameter for spennstål.
E_{cm}	Betongens elastisitetsmodul.

6 Diskusjon

Metoden for å analysere D-regioner ved bruk av stavmodeller åpner for spørsmål. Som en plastisk analysemetode i bruddgrensetilstand er det greit å tenke seg hvordan mekanismen representert av stavmodellen vil forholde seg til den virkelige belastningen. Ved stor nok belastning vil betongen risse der strekkspenningene er store og strekket vil overføres til armeringen. På den måten vil konstruksjonen tilpasse seg det valgte indre statiske systemet, og kapasiteten vil ikke overestimeres så fremt stavmodellen er etablert etter metodens prinsipper. Hovedprinsippet er at kreftene finner den enkleste veien gjennom konstruksjonen fra lastpåføring til opplegg. Med litt trening er det greit å se om den valgte mekanismen er god og hvilke konsekvenser den vil ha for konstruksjonen. Et spørsmål kan en likevel stille seg. For tredimensjonale betraktninger skal en analysere konstruksjonen i to plan som står normalt på hverandre. I hvert plan skal en dimensjonere stavmodellen med full last. En tar med andre ord ikke hensyn til samvirke mellom planene. For konstruksjoner der bredden til de to planene har stor forskjell, vil riktignok kreftene fordele seg ut i konstruksjonen ved ulik høyde. For kvadratiske konstruksjoner vil derimot bredden til de to planene være like. Spenningene i de to planene vil fordele seg ut i konstruksjonen ved samme høyde og det er vanskelig å tenke seg at det ikke vil være interaksjon mellom dem. Det betyr at spaltestrekket beregnet i det enkelte plan, ikke vil endres ved ulike tykkelser inn og ut av det betraktete planet. Det er imidlertid nærliggende å tenke at en stavmodell dimensjonert med full last i hvert plan vil gi en konservativ løsning.

I bruksgrensetilstand er belastningen mindre og full opprissing er ikke oppnådd. I en slik tilstand vil strekket fordele seg mellom betong og armering og det er ikke like enkelt å tenke seg hvordan spenningene i stavmodellen fordeler seg. I EK2-1-1, 5.6.4 (2) står det at opprissing kan betraktes ved bruk av stavmodeller, så fremt modellen er kompatibel. I EK2-1-1, 7.3.1 (8) står det at det er mulig å estimere rissvidden fra spenningene i strekkstavene, så fremt trykkstavene har retning etter trykkspenningsfeltet. Dette er ikke videre utdypet i EK2-1-1 og åpner for følgende spørsmål:

- Er tanken at dersom kompatibilitet er sikret og spenningene lave, så vil mekanismen representert av stavmodellen tilnærmet representere eksakt løsning? Med andre ord; er analyser i bruksgrensetilstand utført med stavmodeller ikke lenger en plastisk analysemetode? I så tilfelle, hvor kompatibel er stavmodellen som defineres etter EK2-1-1, 6.5.3 (3) med de lineær elastiske spenningsstrømmene? Og er størrelsen på

spaltestrekket som fremkommer fra EK2-1-1 korrekt? Og ikke minst, hvilken høyde virker spaltestrekket over?

- Hvordan skal rissvidden beregnes? Formelen i 7.3.4 for beregning av rissvidde har vi tidligere sett er utledet fra et rent strekkpåkjent legeme, der hele legemets tverrsnitt er i strekk. Formelen betinger at en kjenner rissavstanden, hvor rissavstanden betinger at en definerer overdekningen. Den forenklete metoden i 7.3.3 er utviklet fra parameterstudier med formelen i 7.3.4 og et tverrsnitt utsatt for bøyning med «normal» overdekning. For det første vil spenningstilstanden for en D-region ha en del ulikheter både til et bøyepåkjent tverrsnitt og et rent strekkpåkjent tverrsnitt. For det andre vil en i broer ha en større overdekning enn normalt. For det tredje vil spaltestrekkarmeringen ofte ligge et stykke inn i konstruksjonen og med dette ha stor overdekning.

Det er nærliggende å konkludere med at den mest korrekte rissviddeberegningen vil oppnås ved å benytte formelen for rissvidde etter EK2-1-1, 7.3.4. Ser en på bakgrunnen til formelen for rissavstand i EK2-1-1, 7.3.4, viser det seg at bidraget fra overdekningen kommer fra at en i forsøk har sett at overdekningen har betydning (CEB Manual, 1985, side 2.32). Effekten kan ikke utledes analytisk og utgjør dermed en empirisk del av formelen. Det er derfor vanskelig å gjøre betraktninger der en velger en fornuftig overdekning som sikrer en god løsning. Velges for høy overdekning kan beregningene bli uforholdsmessig konservative. Ser en bort fra overdekningen kan kapasiteten bli overestimert.

Et alternativ kan være å benytte formelen for enkeltriss i NS 3473, A.15.6. Denne betinger at det betraktede tverrsnittet er lavt utnyttet og at et stabilisert rissmønster derfor ikke er oppnådd. Armering for spaltestrekk dimensjoneres for strekkreftene beregnet av stavmodellen. Hvilken utnyttelse skal en så tillate for å være innenfor grensene for lav utnyttelse?

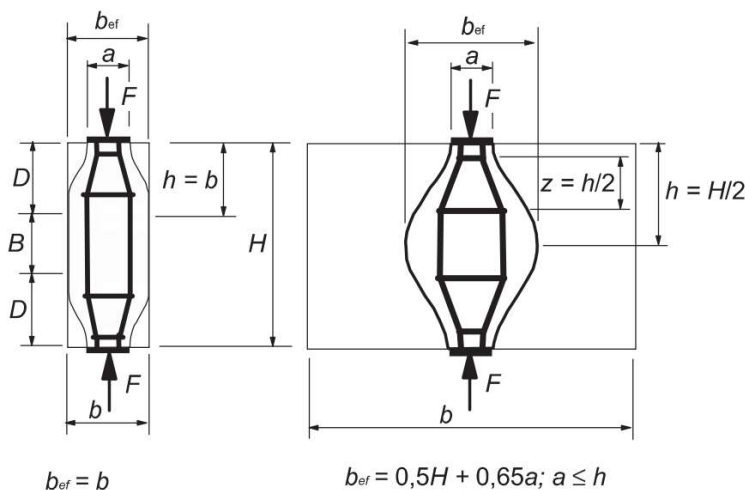
Metodene nevnt over er utledet fra tverrsnitt hvor spenningen over tverrsnittet er konstant i minst en retning. For et rent strekkpåkjent legeme er spenningen konstant over hele tverrsnittet. For et bøyepåkjent legeme er spenningen lineært varierende i en retning og konstant i den andre. Det har vært vist at spenningstilstanden ved flaskeformet spenningsutbredelse ifølge teorien, vil variere tilnærmet kvadratisk i høyderetningen av det betraktede planet. Hvordan vil den variere over tykkelsen på tverrsnittet, inn og ut av planet? En vanlig antagelse i dagens praksis er å si at spenningen er konstant over tykkelsen. For konstruksjoner med liten tykkelse er dette greit å tenke seg, men hva med

konstruksjoner med stor tykkelse? Kan det være slik at opprissing som følge av spaltetrekk i konstruksjoner med stor tykkelse er et mindre problem fordi spaltetrekket vil være omgitt av en stor betongtykkelse?

Oppsummert kan en si at formelverket som i dag er tilgjengelig for å beregne rissvidder, er vanskelig å benytte i direkte sammenheng med stavmodeller. Spesielt gjelder dette for stavmodeller som representerer flaskeformet trykkspenningsutbredelse. I det følgende er spenningstilstanden til en flaskeformet spenningsutbredelse studert. Fra dette er det forsøkt å finne en måte å benytte dagens tilgjengelige formelverk for beregninger av riss.

6.1 Spenningstilstand

For å vurdere riss i en D-region startes det her med å belyse spenningstilstanden. Dersom en ser på tverrstrekket som oppstår fra en flaskeformet spenningsutbredelse og tar utgangspunkt i *Figur 6-1*, som fremstiller *Figur 6.25* i EK2-1-1, kan den lineær elastiske spenningstilstanden fremstilles som videre beskrevet:

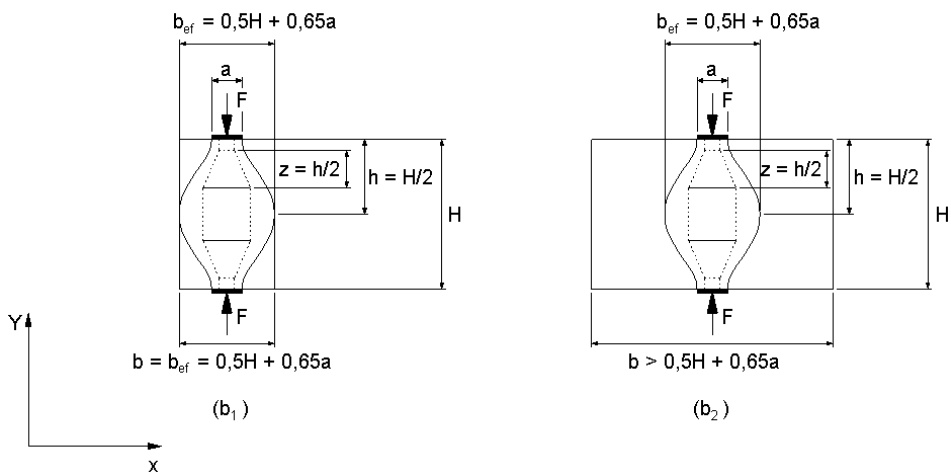


a) Delvis diskontinuitet

b) Fullstendig diskontinuitet

Figur 6-1: Delvis og full diskontinuitet (EK2-1-1, side 106, Figur 6.25)

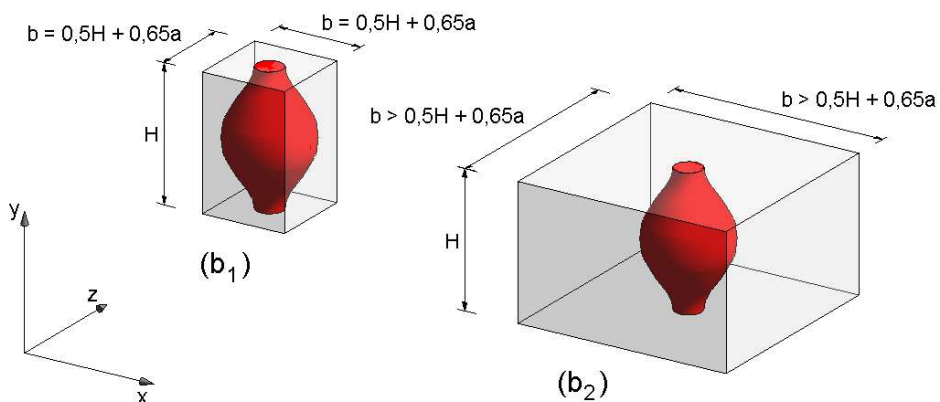
Fra *Figur 6-1(b)* som viser fullstendig diskontinuitet, kan en lage to ulike tilfeller; et der betongens bredde $b = b_{ef} = 0,5H + 0,65a$; og et der betongens bredde $b > b_{ef} = 0,5H + 0,65a$. Dette kan fremstilles på følgende måte:



Figur 6-2: Fullstendig diskontinuitet: (b₁) betongens bredde lik den effektive bredden på trykkutbredelsen; b₂) betongens bredde større enn den effektive bredden

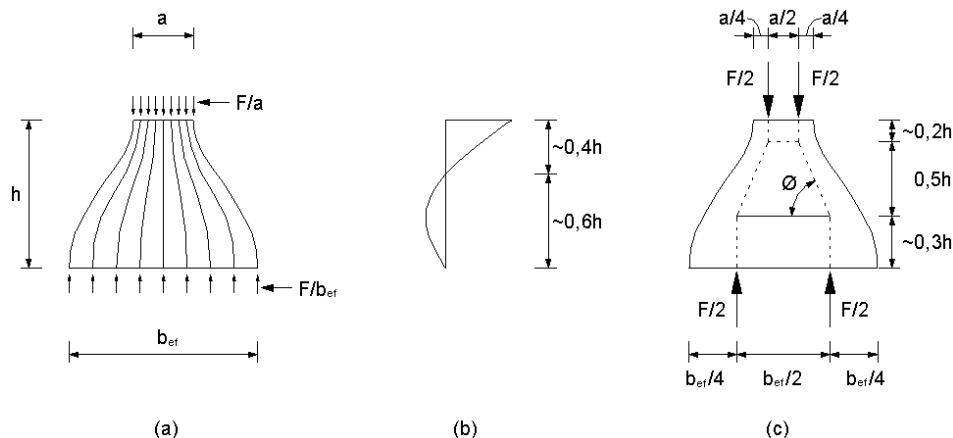
Fra Figur 6-2 ser en at geometrien til den flaskeformede trykkspenningsutbredelsen ved full diskontinuitet ikke endres for økende verdier av $b \geq 0,5H + 0,65a$.

Dersom en betrakter et tverrsnitt som er kvadratisk om akse til den påførte trykkraften, kan trykkspenningsstrømmen i Figur 6-2 fremstilles tredimensjonalt som i Figur 6-3.



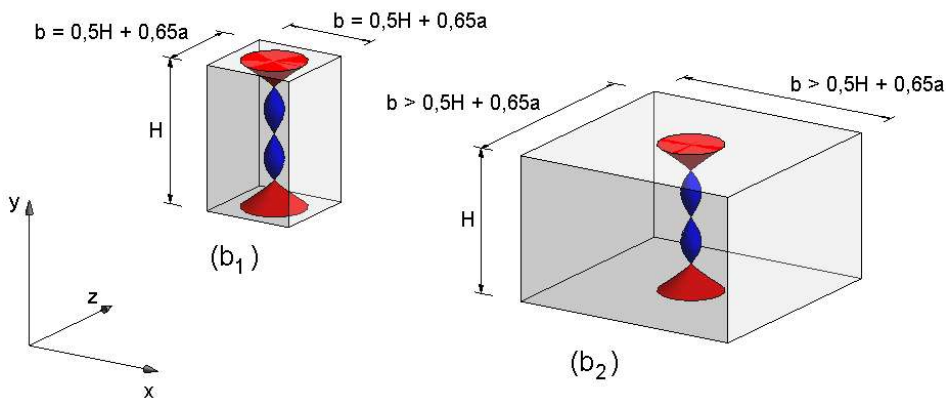
Figur 6-3: Trykkspenningsstrøm i kvadratiske tverrsnitt: (b₁) sidekanter = $0,5H + 0,65a$; (b₂) sidekanter $> 0,5H + 0,65a$

Som tidligere vist kan spenningstilstanden til Figur 6.25 i EK2-1-1 i følge Hendy og Smith, fremstilles som i Figur 6-4:



Figur 6-4: (a) Trykspenningsstrøm; (b) tverrstrekk i midtsnittet; (c) korresponderende stavmodell

Fordelingen av tverrstrekk tilhørende Figur 6-2 og Figur 6-3 kan med utgangspunkt i Figur 6-4(b), fremstilles som i Figur 6-5, hvor rødt angir trykk og blått angir strekk.



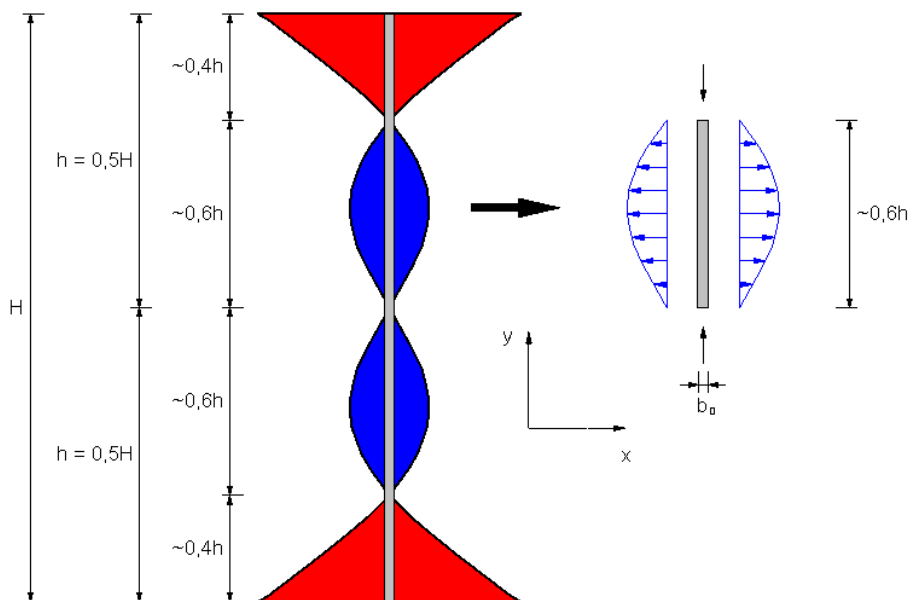
Figur 6-5: Tredimensjonal fremstilling av tverrstrekk

Figur 6-5 fremstiller tverrstrekket slik det i henhold til Hendy og Smith fordeler seg langs senteraksen til tverrsnittet. Da tverrsnittet i dette tilfellet er kvadratisk om senteraksen vil også tverrstrekket bli symmetrisk om senteraksen. Hvordan tverrstrekket i x-retningen fordeler seg langs yz-planet og tilsvarende, hvordan tverrstrekket i z-retningen fordeler seg langs xy-planet fremkommer ikke i Figur 6-5. Dette er heller ikke omtalt i EK2-1-1 eller av Hendy og Smith.

Fra de tredimensjonale figurene ser en at det for økende verdier av b , der $b > 0,5H + 0,65a$, resulterer i en større tykkelse på betongen som omgir den

flaskeformede trykkspenningstilstanden med det tilhørende tverrstrekket. Tverrstrekket størrelse endres derimot ikke ved at betongtykkelsen øker. I hvilken grad en stor tykkelse på betongen rundt spenningsutbredelsen er heldig eller uheldig for rissdannelsen er ikke entydig. Et økende betongtverrsnitt vil gi større svinntøyninger, og spenningene fra svinntøyningen vil ha samme retning som spenningen fra tverrstrekket. Dersom en ser bort fra effekten av svinntøyninger, er det naturlig å tenke at den omkringliggende betongen vil ha en stivhet som motvirker tverrstrekket og at en økende tykkelse på betongen vil være heldig. Antar en i tillegg at tverrstrekket ved store betongtykkelser opptrer som en lokal effekt inne i tverrsnittet, og at fordelingen av tverrstrekket i for eksempel x-retningen langs yz-planet er slik at det er null før det når betongranden, vil eventuelle riss oppstå inne i konstruksjonen og da være omgitt av urisset betong. Ved en slik antagelse vil ikke riss fra spaltestrekk redusere konstruksjonens bestandighet. En vet derimot lite om hvordan fordelingen av spenningene over planet normalt til tverrstrekket utarter seg, eller for hvilke konstruksjonsgeometrier antagelsen over er god. Dagens praksis er å dimensjonere for spaltestrekk uavhengig av dette.

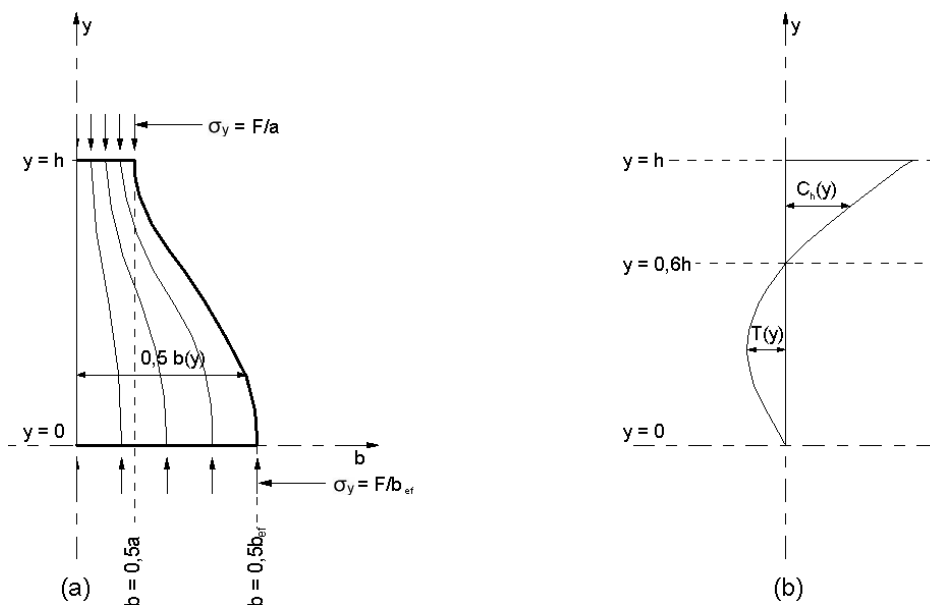
For den todimensjonale betraktningen av tilfellet kan strekkspenningstilstanden for betongen over høyden hvor tverrstrekket oppstår (innenfor $0,6h$ i *Figur 6-4(b)*) fremstilles på følgende måte:



Figur 6-6: Strekkspenningstilstand for et element med bredde b_0 i området hvor tverrstrekk oppstår som følge av flaskeformet trykkspenningsutbredelse

Merk at variasjonen i de horisontale strekkspenningene over høyden $0,6h$, i henhold til Hendy og Smith ikke varierer helt parabolisk. Formen er likevel så lik en parabel at dette vil være en god tilnærming.

Dersom en skal beskrive trykkspenningen over høyden på elementet utsatt for strekk i *Figur 6-6*, må en ta hensyn til at trykkspenningen er representert av den flaskeformede trykkspenningsutbredelsen. Trykkspenningen går fra konsentrert/høy der lasten påføres til fordelt/reduisert lengre ned i tverrsnittet. Trykk- og strekkspenningene kan uttrykkes med utgangspunkt i *Figur 6-4(a)* og *(b)*:



Figur 6-7: Varierende trykk- og strekkspenning over høyden y : (a) bredden den vertikale trykkraften F fordeles over; (b) tverrspenningens størrelse og retning.

I *Figur 6-7* ser en at den vertikale trykkspenningen i *(a)* varierer over høyden y , ettersom bredden b som den påførte trykkraften F fordeles over varierer. Dette gir følgende generelle uttrykk for den varierende vertikale trykkspenningen σ_y :

$$\sigma_y(y) = \frac{F}{b(y)} \tag{6-1}$$

Tverrspenningen varierer også over høyden y og endrer fortegn ved $y = 0,6h$. For $y < 0,6h$ er det tverrstrekk $T(y)$, og for $y > 0,6h$ er det tverrtrykk $C_h(y)$. Området med tverrtrykk er ikke kritisk for riss og vil derfor ikke bli vurdert.

Ser en på trykkspenningstilstanden for elementet i *Figur 6-6* kan den beskrives som følgende: Elementet har konstant bredde b_0 (og dybde i 3D) over hele høyden $0 < y < h$. Elementet får derfor varierende aksialkraft over høyden y som følge av at trykkspenningen varierer. Dersom ytre kraft på elementets overside uttrykkes som F_0 blir ytre kraft på elementets underside $F_0 - \Delta F_0$ der:

$$F_0 = \sigma_y(y = 0,6h) \cdot b_0 \quad (6-2)$$

$$F_0 - \Delta F_0 = \sigma_y(y = 0) \cdot b_0 \quad (6-3)$$

der

$$\sigma_y(y = 0,6h) = \frac{F}{b(y = 0,6h)} \quad (6-4)$$

$$\sigma_y(y = 0) = \frac{F}{b_{ef}} \quad (6-5)$$

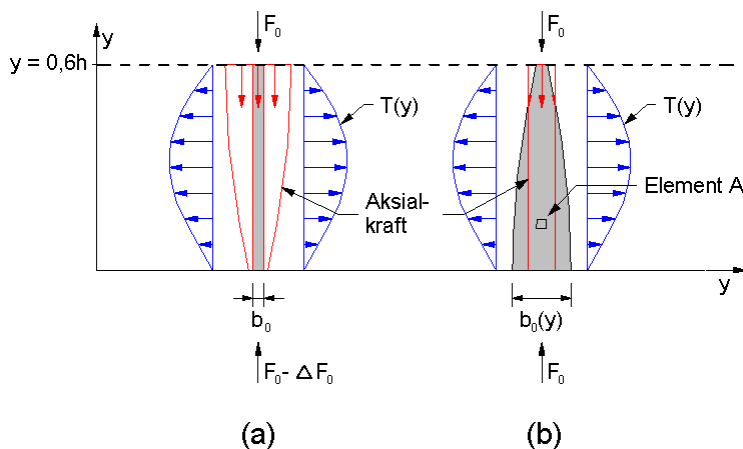
Dette gir spenningssituasjonen slik den er fremstilt i *Figur 6-8(a)*.

Da de ytre kreftene påført elementets over- og underside ikke er like, vil ikke elementet tilfredsstille likevekt. Likevekt kan oppnås ved å innføre varierende bredde på elementet over høyden y . Dette gjøres ved å benytte den varierende bredden $b(y)$ fra *Figur 6-7(a)*, slik at en oppnår konstant aksialkraft over høyden. Ytre kraft både på elementets overside og underside kan da uttrykkes som F_0 , bredden på elementet settes lik $b_0(y)$ og den vertikale trykkspenningen σ_y vil fortsatt variere over høyden:

$$\begin{aligned} F_0 &= \sigma_y(y = 0,6h) \cdot b_0(y = 0,6h) \\ &= \sigma_y(y = 0) \cdot b_0(y = 0) = \text{konstant} \end{aligned} \quad (6-6)$$

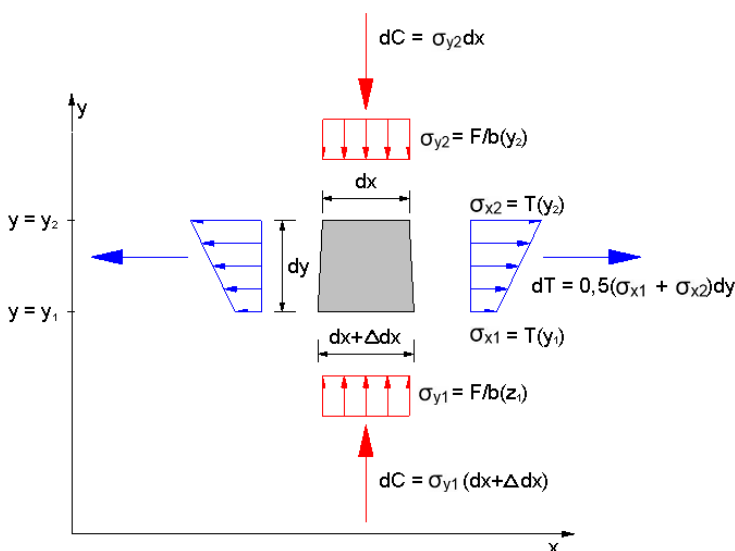
$$b_0(y) = b_0 \cdot \frac{b(y)}{b(0,6h)} \quad (6-7)$$

Der $\sigma_y(y=0,6h)$ er som definert i formel (6-4), $\sigma_y(y=0)$ er som definert i formel (6-5), og b_0 er den betraktede bredden på elementet i *Figur 6-6*. Dette gir spenningssituasjonen slik den er fremstilt i *Figur 6-8(b)*.



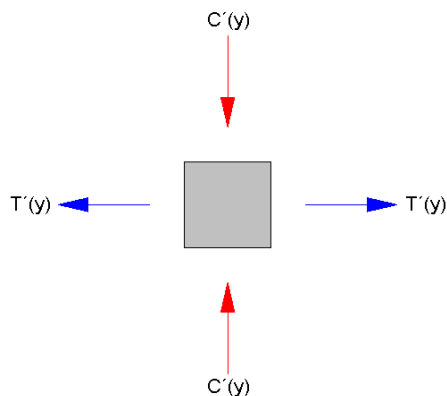
Figur 6-8: Trykk- og strekkspenningstilstand for et element med høyde $0,6h$: (a) element med konstant bredde b_0 , varierende aksialkraft, varierende vertikal trykkspenning og varierende tverrstrekk; (b) element med varierende bredde $b_0(z)$, konstant aksialkraft F_0 , varierende vertikal trykkspenning og varierende tverrstrekk.

Likevektsbetraktning av et lite element (*Element A*) i Figur 6-8(b) kan fremstilles som i Figur 6-9. dC utgjør trykkspenningsresultanten fra spenningen påført elementets over- og underside og har samme størrelse på elementets over- og underside. dT er strekkspenningsresultanten.



Figur 6-9: Trykk- og strekkspenningstilstand for Element A

Tenker en seg at elementet i *Figur 6-9* deles opp i flere mindre elementer, kan en anta at både elementets variasjon i strekkspenning og bredde over elementhøyden kan neglisjeres. En kan da se på ett kvadratisk element påført sentrisk plasserte punktlaster i x- og y-retningen, representert av forenklede uttrykk av resultatanten til trykk- og strekkspenningen slik de er uttrykt i *Figur 6-9*.



Figur 6-10: Trykk- og strekkspenningstilstand for ett lite element

Antagelsen om at elementets variasjon i strekkspenning og bredde over elementhøyden kan neglisjeres medfører at $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$ og at $b(y_1) = b(y_2)$. Det forenklede uttrykket for trykk- og strekkresultanten som virker på elementet i *Figur 6-10* blir dermed:

$$C'(y) = \frac{F}{b(y)} dx \quad (6-8)$$

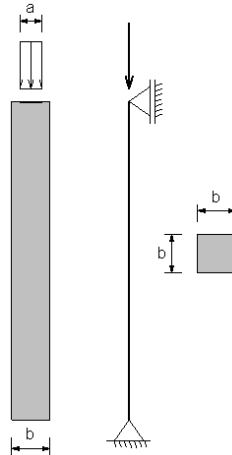
$$T'(y) = T(y) dz \quad (6-9)$$

Uttrykket for $T(y)$ og $b(y)$ kan lages med utgangspunkt i en spenningsstrøm fra en lineær FEM-analyse eller med forenklede betraktninger av *Figur 6-4*.

Formel (6-8) og (6-9) kan benyttes til å uttrykke kreftene elementet i *Figur 6-10* utsettes for. Dersom elementet gis materialegenskaper kan en beregne spenninger og tøyninger. En nærmer seg dermed en metode der en kan benytte en av formlene for riss i et tverrsnitt utsatt for rent strekk. I formelen for rissvidde etter EK2-1-1, 7.3.4, gjenstår det imidlertid å bestemme rissavstanden. I formelen for enkeltriss i NS 3473, A.15.6, gjenstår det å definere hvilken utnyttelse som skal benyttes som grenseverdi for lav utnyttelse.

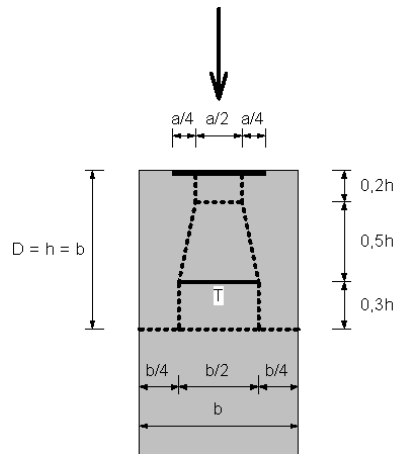
Ved horisontal likevektsbetraktning av elementet i *Figur 6-10* bør også stivheten til den omkringliggende betongen, samt spenninger fra svinn tas hensyn til. I det følgende er det forsøkt å gjøre betraktninger angående stivheten til den omkringliggende betongen.

6.2 Stivhet til omkringliggende betong



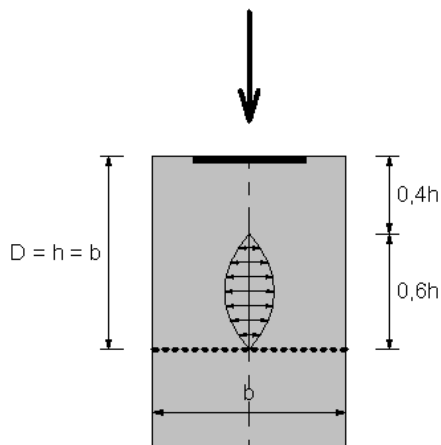
Figur 6-11: Sentrisk belastet kvadratisk søyle

Dersom en tar for seg en sentrisk belastet kvadratisk søyle slik den er fremstilt i *Figur 6-11*, kan D-regionen med tilhørende stavmodell fremstilles med utgangspunkt i *Figur 6-4*. Dette er fremstilt i *Figur 6-12*.



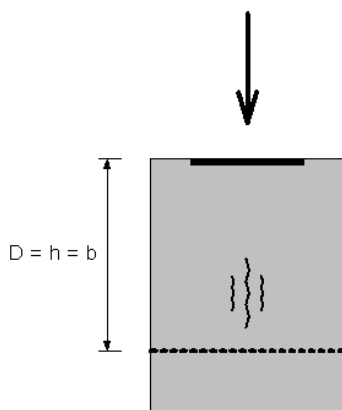
Figur 6-12: D-region med stavmodell

Fra geometrien i *Figur 6-12* kan en beregne tverrstrekket T som representerer strekkstaven. Ser en bort fra det horisontale trykket mot overkant av søylen kan tverrstrekket med utgangspunkt i *Figur 6-4* fordeles over høyden til D-regionen. Fordelingen blir som fremstilt i *Figur 6-13*.



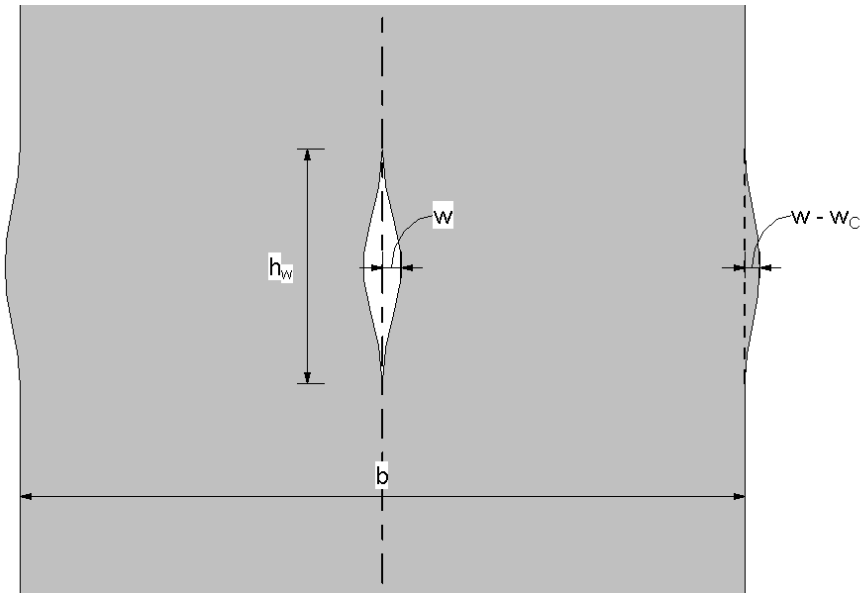
Figur 6-13: Fordeling av tverrestrekk over høyden på D-regionen

Summen av den horisontale spenningen i Figur 6-13 blir lik tverrestrekket T , beregnet etter geometrien i Figur 6-12. Et mulig opprissingsmønster som følge av spaltestrekket er fremstilt i Figur 6-14.



Figur 6-14: Opprissing som følge av tverrestrekk

Antall riss vil være avhengig av belastningen og om det oppnås et stabilisert rissmønster. I tillegg til strekkapasiteten til betongen og armeringen som er gjennomgått tidligere, kan motstanden mot riss tenkes å komme fra følgende to stivheter: stivheten betongen har mot komprimering og stivheten betongen har mot at tverrsnittet får en utbøyning fra skjær- og bøyedefomasjon. Dersom en betrakter tilstanden før et stabilisert rissmønster oppnås og antar at kun ett riss oppstår, kan deformasjonen fra tverrestrekket fremstilles som i Figur 6-15.



Figur 6-15: Deformasjon fra tverstrekk ved enkeltriss

Der

$$w = w_T + w_C + w_B$$

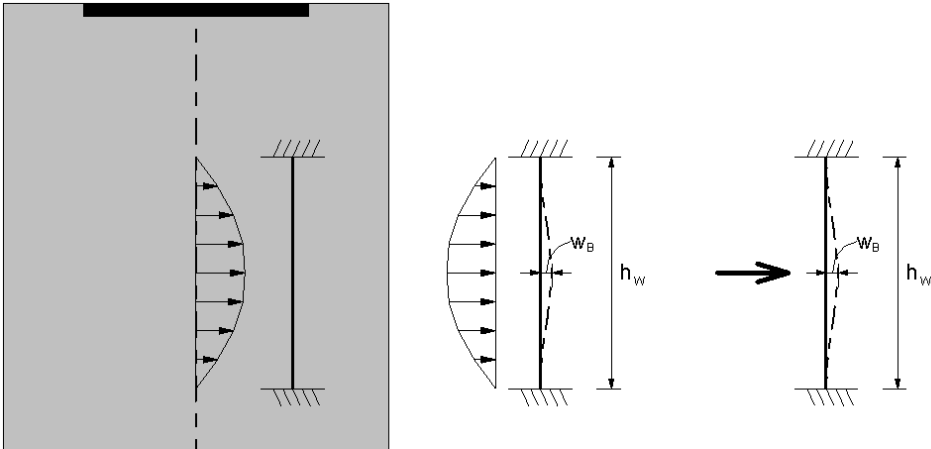
w_T Riss som følge av at betong og armering i senter av søylen strekkes i henhold til *Figur 6-10*.

w_C Riss som følge av at betong og armering ut mot sidekanten av søylen komprimeres.

w_B Riss som følge av at betongtverrsnittet bøyes ut.

h_w Høyden risset utvikles over.

For forenklede betraktninger av bidraget fra utbøyingen, kan en tenke seg et enkelt statisk system slik det er fremstilt i *Figur 6-16*.



Figur 6-16: Forenklet statisk system for beregning av utbøyning

Lengden på bjelken som utgjør det forenklede statiske systemet i *Figur 6-16*, kan til sikker side antas å være den samme høyden som tverrstrekket fordeles over. En har med dette antatt at risset vil oppstå over samme høyde som tverrstrekket fordeles over. Deformasjonen kan med dette beregnes med for eksempel enhetslastmetoden, der både bøyedeforrasjon og skjærdeformasjon tas hensyn til. Bjelken i *Figur 6-16* vil imidlertid være litt for stiv. Den vil i realiteten ikke være fast innspent i hver ende. Dersom en beregner bjelken med en punktlast som tilsvarer resultatanten til fordelingen av spaltestrekket vil deformasjonen øke. Dette kan veie opp for de litt for stive randbetingelsene.

Når deformasjonen fra de ulike tilfellene er beregnet kan en finne den tilhørende stivheten ved å benytte formelen

$$K \cdot r_i = R \Rightarrow K_i = \frac{R}{r_i}$$

$$r_i = w_i$$

w_i Deformasjonen fra de ulike tilfellene.

R Lasten representert av tverrstrekket.

Til slutt kan den totale stivheten beregnes med formelen

$$\frac{1}{K_{ef}} = \sum \frac{1}{K_i}$$

Den endelige rissvidden kan da beregnes som

$$w_{tot} = \frac{R}{K_{ef}}$$

6.3 Kommentar

En har i det foregående forsøkt og foreslå en metode for å estimere riss mer nøyaktig enn de metodene som er vanlig å bruke i dag. Like viktig som å foreslå en metode, har vært å belyse kompleksiteten rundt riss i en D-region. Det er flere spørsmål som bør besvares før en kan foreslå metoder for mer nøyaktige håndberegninger av riss:

- Tilsvarende størrelsen på spaltestrekket slik det beregnes etter EK2-1-1 det virkelige spaltestrekket?
- Tilsvarende fordelingen av spaltestrekket over høyden på D-regionen slik den er fremstilt av Hendy og Smith den virkelige fordelingen?
- Hvordan fordeler spaltestrekket seg over dybden til søylen? Dette gjelder spesielt kvadratiske søyler.
- Hvordan skal en ta hensyn til stivheten til den omkringliggende betongen? Er bjelkeløsningen i *Figur 6-16* en god nok tilnærming?
- Hvordan skal en bestemme rissavstanden i formelen for rissvidde i EK2-1-1, 7.3.4? Kan en beregne rissavstanden uten å ta hensyn til overdekningen?
- Når kan en anta lav utnyttelse slik at formelen for enkeltriss i NS 3473, A.15.6 kan benyttes?

Det er liten tvil om at spørsmålene over best kan besvares med ikke-lineære analyser og forsøk i laboratorium. Lineære analyser bør også kunne gi noen svar. Kapittel 8 presenterer to forsøk med lineær elastiske FEM-analyser, hvor det er det forsøkt å gi svar på noen av spørsmålene over.

7 Fremgangsmåte for stavmodeller etablert fra FEM-analyser

De lineære elastiske FEM-analysene har blitt utført i programmet Abaqus, med unntak av det ene forsøket der analysene har blitt utført i programmet FEM-Design 3D Structure. Beregningsmodellene i oppgaven har både enkle regulære tverrsnitt, men også mer komplekse irregulære tverrsnitt. Avhengig av hva som skal fremstilles er modellene enten utført i 2D plan spenning eller i 3D med volumelementer.

Modellene i Abaqus har blitt tilegnet materialegenskaper tilsvarende uarmert betong med betongkvalitet B45. E-modulen er i henhold til tabell 3.1 i NS-EN 1992-1-1 satt til 36 GPa og tverrkontraksjonen er satt til 0,2. Ved modellering er enhetene mm, Newton og Pascal benyttet. Egenvekten er ikke tatt med i noen av analysene.

Beregningsmodellene er for noen av tilfellene relativt store sammenlignet med området en ønsker resultater fra. I noen tilfeller blir det derfor en grov elementinndeling innenfor det relevante området. Hvilken konsekvens dette har for resultatene som benyttes i oppgaven varierer. For FEM-analysene som utføres i forsøkene benyttes faktiske spenningsverdier. Dette stiller høye krav til konvergens. Her har analysene blitt utført med flere typer elementer med ulike elementstørrelse og en har kontrollert konvergens av spenninger. De benyttede resultatene er fra modellen med den minste elementstørrelsen. For FEM-analysene som utføres for D-regionene i Dolmsundbrua er ikke selve spenningsverdiene interessant, men fordelingen av dem. Her har det i første omgang blitt sikret at forskyvningene er kontinuerlige. Deretter har en gjort grafiske studier av spenningsfordelingen fra analyser utført med ulike elementstørrelser. Når deformasjonen har vært kontinuerlig, og formen på spenningsstrømmene har sett ut til å ha konvergert, har det blitt konkludert med at en har hatt en konvergent løsning.

For alle tilfellene har det blitt benyttet elementer med formfunksjoner av kvadratisk orden i de tre dimensjonene og det er gjort analyser med full integrasjon. Dette betyr at hvert element vil gi relativt mye informasjon og at grov elementinndeling kan godtas.

For å etablere stavmodellene må tyngdepunktene til den aktuelle horisontalspenningsfordelingen bestemmes. Noen av fordelingene har så enkel form at en ut fra grafiske betraktninger kan bestemme tyngdepunktet. Andre fordelinger har for kompleks form til at tyngdepunktet kan bestemmes grafisk.

For disse tilfellene uttrykkes fordelingen med en femtegradsfunksjon $f(y)$. Dette gjøres ved å sette opp fem ligninger med fem ukjente. Samtlige fordelinger har et konstantledd lik null da en betrakter fordelingen fra punktet der horisontalspenningene er null. Fra tabellverdiene som fremstiller den horisontale spenningsfordelingen fra FEM-analysene, henter en ut fem funksjonsverdier med tilhørende plassering. Ligningene settes opp på matrisiform og konstantene kan identifiseres. Når $f(y)$ er definert kan er bruke allerede definerte metoder for å beregne tyngdepunktet. Det er laget et regneark i Excel for å utføre beregningene. Beregningene for det enkelte tyngdepunkt ligger som vedlegg til oppgaven.

8 Forsøk

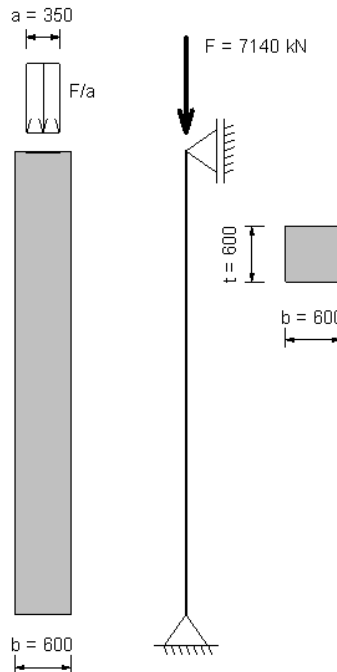
Det har blitt utført to forsøk med FEM-analyser, hvor formålet har vært å forsøke å belyse noen av spørsmålene fra diskusjonsdelen. I det første forsøket har en prøvd å etablere et statisk system av søylen etter opprissing, for å vurdere hvordan stivheten til den omkringliggende betongen påvirker rissingen. I det andre forsøket har en sett på hvordan spaltestrekk i en søyle med sentrisk belastning varierer med ulike tverrsnittstykkelser inn og ut av planet.

8.1 Forsøk 1, stivhet av omkringliggende betong

Forsøket står i sammenheng med kapittel 6 *Diskusjon* og formålet er å belyse følgende spørsmål:

- Hvordan skal en ta hensyn til stivheten til den omkringliggende betongen? Representerer bjelken i *Figur 6-16* en god tilnærming til stivheten av den omkringliggende betongen?

Analysene utføres i plan spenning med programmet FEM-design 15 3D Structure.



Figur 8-1: Geometri og last på søyle i forsøket

Figur 8-1 viser søylen som i det følgende er analysert. Størrelsen F er bestemt ved trykkapasiteten til søyletverrsnittet med betongkvalitet B35:

$$F = 0,85 \cdot \frac{35 \text{ MPa}}{1,5} \cdot (600 \text{ mm})^2 = 7140 \text{ kN}$$

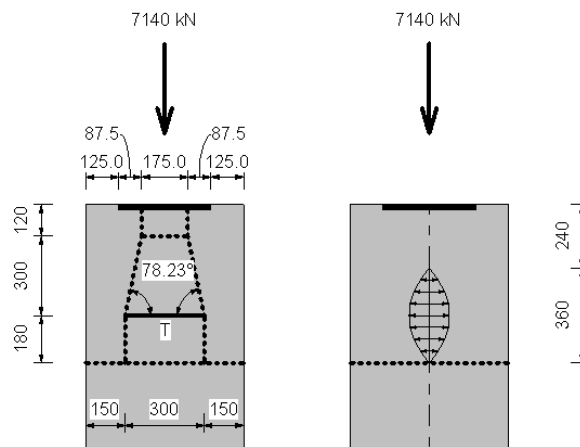
Bredden på lastflaten er bestemt med utgangspunkt i EK2-1-1, 6.7 partielt belastede flater:

$$F_{Rdu} = \frac{F}{3} = \frac{7140 \text{ kN}}{3} = 2380 \text{ kN}$$

Størrelsen på lastflaten blir dermed:

$$a = \sqrt{\frac{F_{Rdu}}{f_{cd}}} = \sqrt{\frac{2380 \text{ kN}}{19,83 \text{ MPa}}} = 346 \text{ mm} \Rightarrow \text{velger } a = 350 \text{ mm}$$

Stavmodellen med fordelingen av det tilhørende spaltestrekket etableres med utgangspunkt i reglene fra teoridelen. Dette er fremstilt i Figur 8-2.



Figur 8-2: (t.h.) stavmodell; (t.v.) fordeling av spaltestrekk

Tverrstrekket T beregnes med utgangspunkt i stavmodellen eller formel (6.58) i EK2-1-1. Resultatet blir det samme for begge metodene:

$$T = \frac{7140 \text{ kN}}{2 \cdot \tan(78,23)} = \frac{(600 - 350) \cdot 7140 \text{ kN}}{4 \cdot 600} = 743,75 \text{ kN}$$

Fordelingen av tverrstrekket kan uttrykkes med $f(y)$:

$$f(y) = c_1 y + c_2 y^2$$

Konstantene c_1 og c_2 bestemmes ved å kreve:

$$f(360) = 0$$

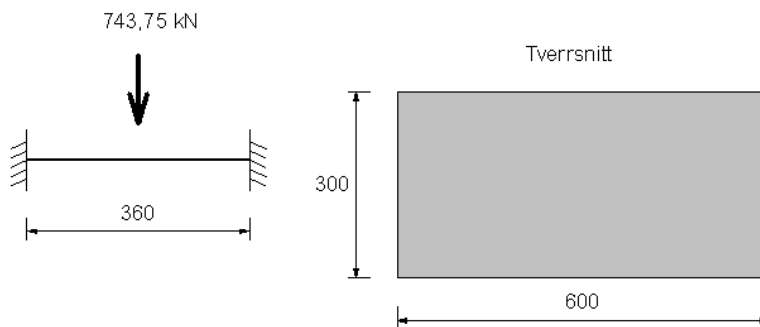
$$\int_0^{360} f(y) dy = 7140 \text{ kN}$$

Dette gir:

$$f(y) = \frac{6 \cdot 743750}{360^2} \cdot \left(y - \frac{y^2}{360} \right)$$

Der $f(y)$ uttrykker fordelingen i N og $y = 0$ ligger i overgangen fra B- til D-regionen 600 mm fra overkant søyle.

I diskusjonskapittelet ble det foreslått en metode der en etablerer et statisk system i form av en bjelke innspent i begge ender, med en punktlast påført midt på. Lengden på bjelken bestemmes av lengden på fordelingen av tverrstrekket.



Figur 8-3: Statisk system og tverrsnitt for bjelkeberegning

Riss som følge av utbøyingen i søylen, idealisert med bjelken i Figur 8-3, kan beregnes ved hjelp av enhetslastmetoden.

$$w_B = \int_L \frac{M_0 M_1}{EI} dx + \int_L \frac{V_0 V_1}{GA} dx$$

$$E = 31000 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Samme som programvare})$$

$$\nu = 0,2 \quad (\text{Samme som programvare})$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 12916,67 \text{ N/mm}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = 135 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$A = 18 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$EI = 4,185 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2 \qquad GA = 23,25 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$M_0 = \frac{PL}{8} = 33468750 \text{ Nmm} = 33,47 \text{ kNm}$$

$$M_1 = \frac{L}{8} = 45 \text{ mm}$$

$$V_0 = \frac{P}{2} = 371875 \text{ N}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

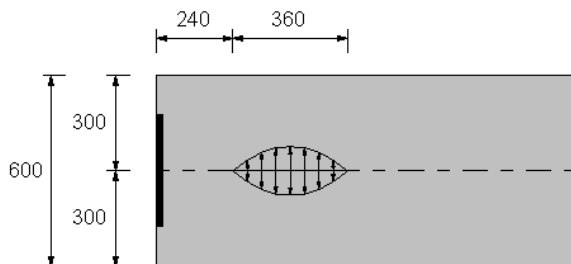
Bidraget fra momentet har fire identiske trekanter og bidraget fra skjærkraften har to identiske rektangler.

$$w_M = \frac{4L}{3EI} M_0 M_1 = 0,48 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

$$w_V = \frac{2L}{GA} V_0 V_1 = 1,60 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

$$w_B = w_M + w_V = 2,08 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = 0,0002 \text{ mm}$$

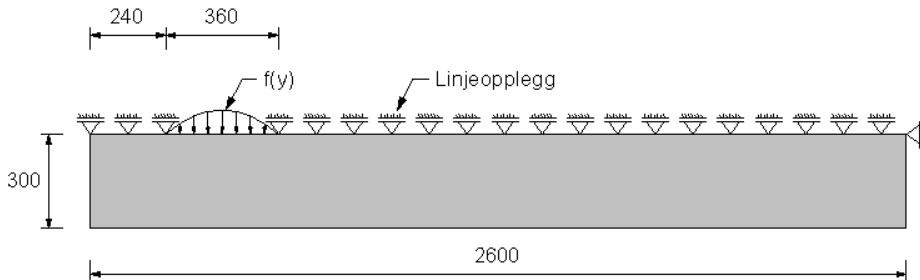
For å kontrollere verdien gjennomføres det en FEM-analyse der en forsøker å modellere søylen med tverrstrekket, slik at den tilsvarer virkeligheten så godt som mulig.



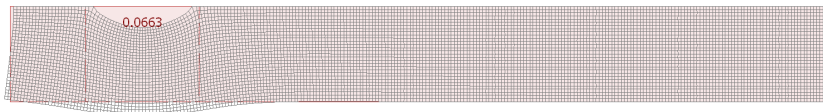
Figur 8-4: Søyle med tverrstrekk

Tverrstrekket virker som et trykk mot betongen rundt risset, symmetrisk om søylens senterakse. Dette betyr at deformasjonen langs senteraksen er null der

det ikke risser. Dersom en også i FEM-analysen antar at lengden av risset er lik lengden av tverrstrekretsfordeling 360 mm, kan søylen modelleres på følgende måte, med tverrsnitt som i *Figur 8-3*:



Figur 8-5: Beregningsmodell til FEM-analyse



Figur 8-6: Deformasjon fra FEM-analysen

Som en ser i *Figur 8-6* er deformasjonen $0,0663/0,0002 = 332$, det vil si mye større enn for bjelken i *Figur 8-3*. Dette viser at bjelken i *Figur 8-3* er alt for stiv og derfor ikke egner seg til å estimere stivheten til betongen. En bør imidlertid merke seg verdien på deformasjonen fra FEM-analysen. Selv uten spaltstrekkarmering er deformasjonen relativt liten. Ser en på spenningene fra FEM-analysen tyder verdiene på et annet problem.



Figur 8-7: Spenninger fra FEM-analysen

Spenningsverdiene der linjeoppleggene starter er langt over strekkapasiteten til betong. Dette er et typisk problem ved helt stive opplegg i lineær elastiske analyser. I realiteten vil risset utvikle seg gradvis fra stadium III til stadium I, fullt opprisset til uopprisset. Stivheten mellom de to betongdelene som trykkes fra hverandre vil derfor øke gradvis ut mot de fiktive oppleggene, noe som også gjelder spenningene. Overgangen fra ingen til full stivhet slik tilfellet er modellert her, blir derfor en feil fremstilling av virkeligheten.

Modellen kan videreutvikles til i større grad å ligne på virkeligheten. En metode kan være å legge inn et linjeopplegg rett under den påførte lasten i *Figur 8-5*. Linjeopplegget må være uavhengig av de andre linjeoppleggene slik at stivheten for akkurat det opplegget kan endres. Oppleggets stivhet reduseres gradvis inntil deformasjonen nærmer seg grenseverdien for risset. Den stivheten opplegget ender opp med, er den stivheten spaltestrekkarmeringen må ha. En har med dette simulert en ikke-lineær analyse. En annen metode for å simulere en ikke-lineær analyse er å modellere den faktiske søylen med den påførte punktlasten i overkant. I området hvor spaltestrekket vil oppstå kan en legge inn et område som gradvis gjøres mykere og som også gradvis endrer utstrekning. Fra dette kan en se på hvordan spenningene omfordeles og si noe om nødvendig stivhet til spaltestrekkarmering. Slike analyser er ikke utført her, da dette ikke er en del av forsøkets formål.

Kommentar forsøk 1

Som en har sett vil en fast innspent bjelke slik den er fremstilt i *Figur 8-3*, være for stiv til å representere stivheten til betongen utenfor risset. Som FEM-analysen viser vil imidlertid betongens stivhet være høy. Å se bort fra denne stivheten i rissberegninger vil være svært konservativt. Formen til den påførte lasten er hentet fra Hendy og Smith, og antas å være en idealisering av hvordan spaltestrekket fordeler seg. Størrelsen på spaltestrekket er fra EK2-1-1 og antas også å være en idealisert størrelse. I neste forsøk skal en se nærmere på hvordan spaltestrekket fordeler seg og hva den virkelige størrelsen på det er. I forsøk 1 har en dessuten antatt at strekket fordeler seg jevnt over hele tykkelsen på tverrsnittet. Om dette er en riktig antagelse vil også studeres i neste forsøk.

8.2 Forsøk 2, fordeling av horisontale spenninger

Forsøket står i sammenheng med kapittel 6 *Diskusjon* og formålet er å belyse følgende spørsmål:

- Er størrelsen på spaltestrekket slik det beregnes etter EK2-1-1 korrekt?
- Er fordelingen av spaltestrekket over høyden på søylen slik den er fremstilt av Hendy og Smith korrekt?
- Hvordan fordeler spaltestrekket seg over dybden på søylen?

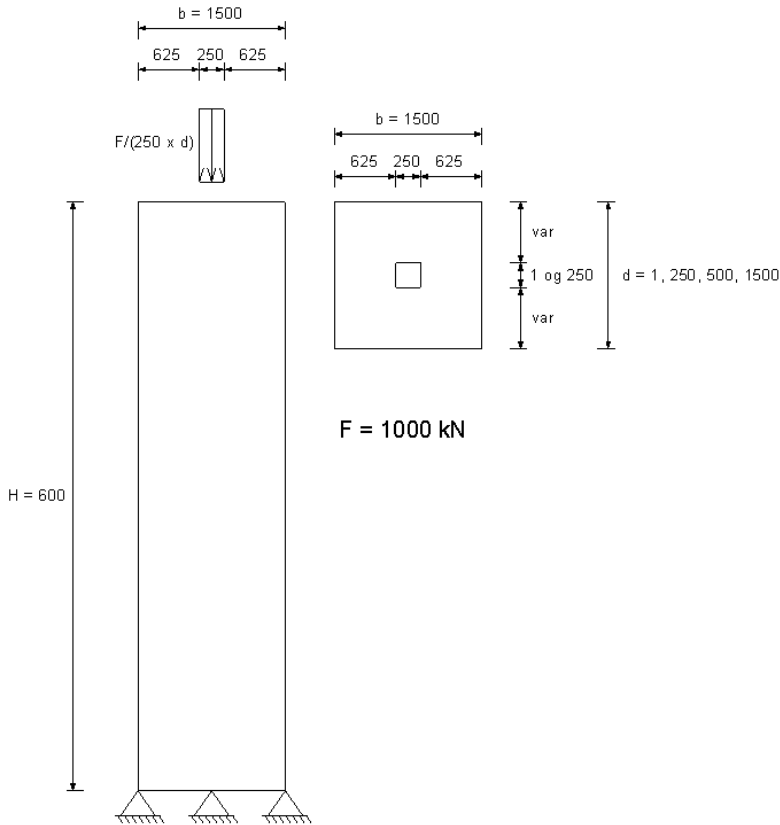
I tillegg ønsker en å se på:

- Hvordan utvikler spaltstrekket seg fra analyser i plan spenning til analyser i tre dimensjoner med ulike dybder på søylen.

Det siste punktet er interessant da metoden slik den er beskrevet i teorien, baserer seg på at en betrakter to plan som står normalt på hverandre. Hvert plan beregnes med full last og interaksjon mellom planene neglisjeres. I utgangspunktet baserer derfor metoden seg på analyser i plan spenning. I analysene av D-regionene i Dolmsundbrua vil det bli utført FEM-analyser i tre dimensjoner med volumelementer. Hvordan resultatene fra analysene utvikler seg fra plan spenning til 3D spenning der tykkelsen inn og ut av planet varierer, vil derfor være relevant å studere.

Resultatene er interessante i flere sammenhenger. For det første avhenger kvaliteten på beregningene av riss blant annet av riktig laststørrelse og dens fordeling. Deretter er det interessant å studere hva en kan forvente av en FEM-analyse sammenlignet med teorien. Det er derfor benyttet et så enkelt tilfelle som mulig (sentrisk belastet søyle), slik at resultatene skal være enkle å sammenligne med teorien.

Mye tid er brukt på å sikre at løsningene i FEM-analysen konvergerer, da en ønsker en så eksakt løsning som mulig. Faktiske spenningsverdier fra analysene kan dermed benyttes og sammenlignes med verdier beregnet etter teorien. Av høy interesse er da størrelsen på spaltestrekket for sammenligning med EK2-1-1, 6.5.

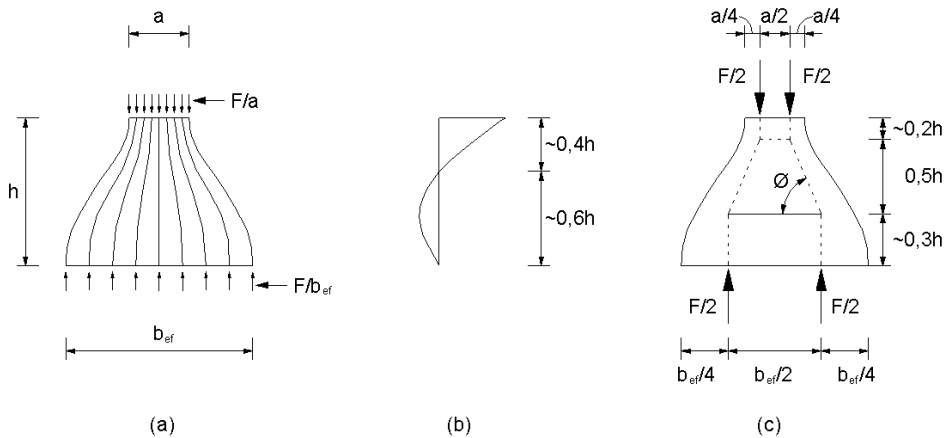


Figur 8-8: Geometri på søylen fra Forsøk 1. Tverrsnittstykkelsen d er variabelen i forsøket

Figur 8-8 viser søylen i oppriss slik den modelleres i FEM-analysen. I det følgende vil det bli sett på hvordan spaltestrekket varierer med ulike tverrsnittstykkelser d . Spaltestrekket vil bli studert i det planet søylen er vist i Figur 8-8. Spaltestrekket i planet normalt til dette planet vil ikke bli vurdert. Analysene utføres i Abaqus.

Det har blitt modellert fire varianter av søylen. Høyden og bredden av søylen, samt lastbredden og størrelsen på lastresultanten er lik for alle fire. Det som skiller variantene er dybden av søylen. Første variant har en dybde på 1 mm og er analysert i plan spenning. Andre variant med dybde 250 mm, tredje variant med dybde 500 mm, og fjerde variant med dybde 1500 mm er analysert i tre dimensjoner med volumelementer. Størrelsen på lastflaten er 250x1 mm for første variant og 250x250 mm for de tre andre variantene.

Spaltestrekk etter EK2-1-1



Figur 8-9: (a) trykkspenningsstrøm; (b) fordeling av horisontale spenninger; (c) korresponderende stavmodell

Figur 8-9 er presentert i oppgavens litteraturdel og er en sammenstilling av hvordan spaltestrekk betraktes i EK2-1-1 og av Hendy og Smith.

Bredden på søylen som betraktes i forsøket er mindre enn halve høyden på søylen. Dette er derfor et tilfelle med delvis diskontinuitet og spaltestrekket beregnes med uttrykk (6.58) fra EK2-1-1. Følgende størrelser defineres:

$$h = b = 1500 \text{ mm}$$

$$b_{ef} = b = 1500 \text{ mm}$$

$$a = 250 \text{ mm}$$

$$F = 1000 \text{ kN}$$

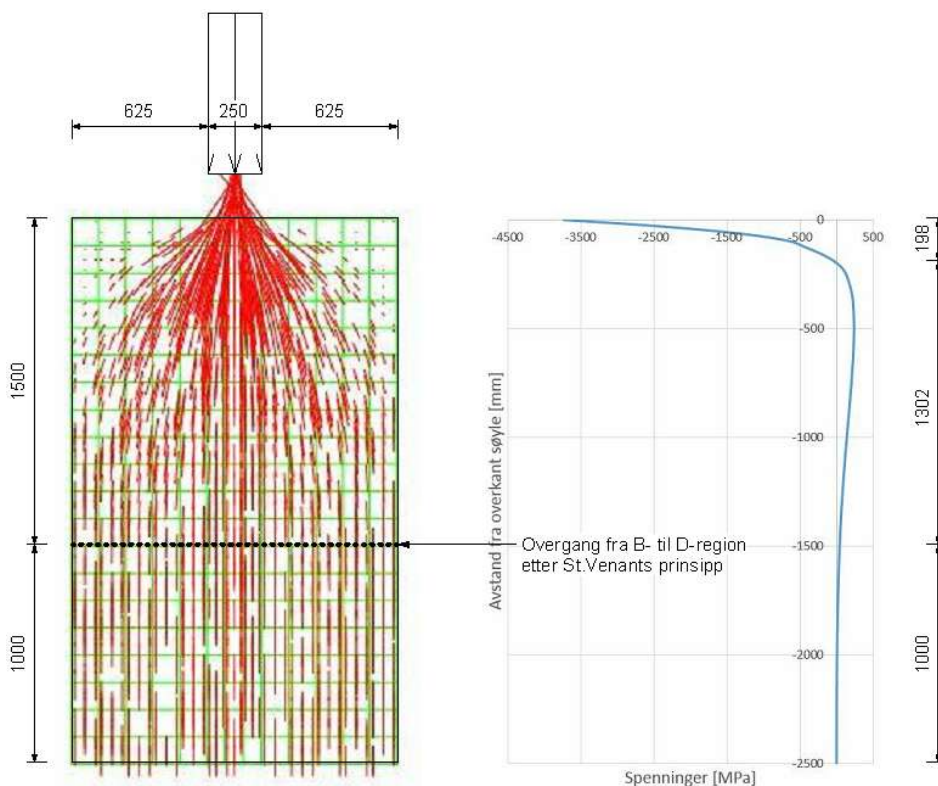
Spaltestrekket blir etter EK2-1-1:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{b-a}{b} F = \frac{1500-250}{4 \cdot 1500} \cdot 1000 \text{ kN} = 208,33 \text{ kN}$$

Vinkelen i stavmodellen fra EK2-1-1 blir:

$$\varnothing = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 1500}{1500 - 250} = 67,38^\circ$$

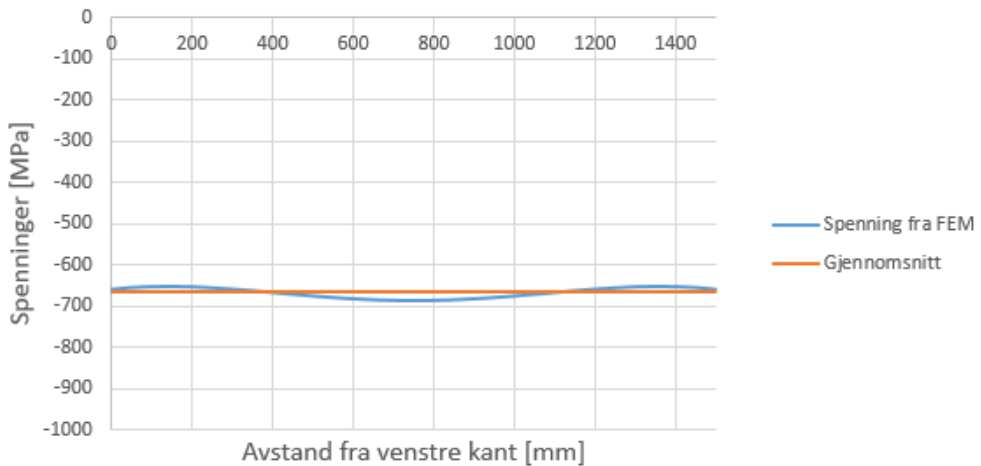
Spaltestrekket starter i henhold til Figur 8-9(b) i en avstand fra overkant søyle på $0,4h = 0,4 \cdot 1500 \text{ mm} = 600 \text{ mm}$, og fordeler seg over en høyde på $0,6h = 0,6 \cdot 1500 \text{ mm} = 900 \text{ mm}$.

Tverrsnittstykkelse $d = 1\text{ mm}$ 

Figur 8-10: Resultater fra FEM-analyse: (t.v.) hovedtrykkspenningsstrøm; (t.h.) fordeling av horisontale spenninger i midtsnittet av søylen

I Figur 8-10 kjenner en igjen den flaskeformede trykkspenningsutbredelsen slik den er fremstilt i Figur 8-9(a). Formen på fordelingen av de horisontale spenningerne er likevel ulik formen beskrevet i Figur 8-9(b). Formen på strekkspenningsfordelingen er i Figur 8-9(b) fremstilt nærmest som en parabel, mens den fra FEM-analysen fremstår som en funksjon av høyere polynomgrad enn to. Når en studerer Figur 8-10 ser en at det må være slik. Trykkspenningen har størst retningsendring ved toppen av søylen og retningsendringen avtar nedover i søylen. Dette gjenspeiler prinsippet om at spenningsforstyrrelsen er størst nærmest det som skaper forstyrrelsen, i dette tilfellet punktlasten. Ved at retningsendringen til trykkspenningene avtar, avtar også de horisontale strekkspenningene nedover i søylen. Det neste en ser er at trykkspenningene og strekkspenningene fordeler seg over andre høyder enn fremstilt i Figur 8-9(b). I stedet for at strekkspenningene starter i en avstand fra overkant søyle lik $0,4h$

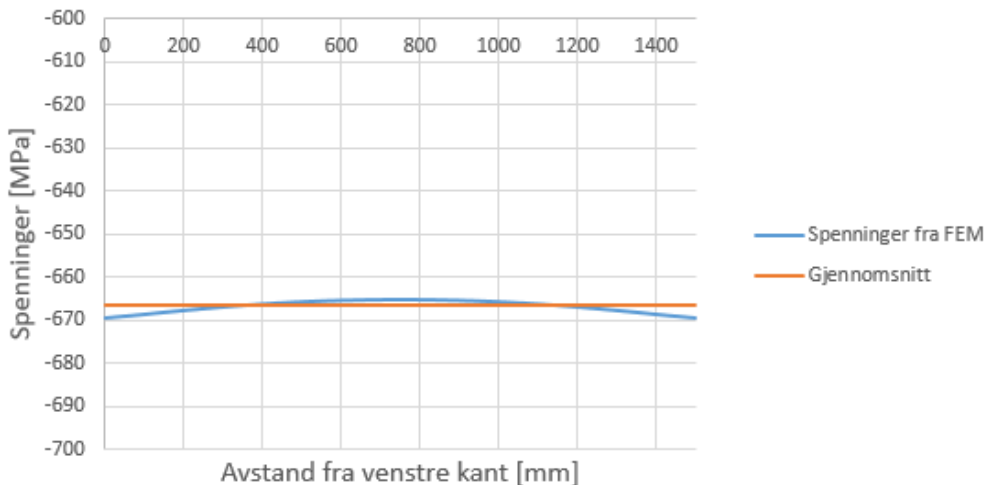
starter den fra 0,13h. Deretter fordeler strekkspenningene seg ned i søylen over en høyde på 1,54h. Med andre ord fordeler strekkspenningen seg over en større høyde enn definert ved St. Venants prinsipp. Spenningene utenfor området er riktignok relativt små og vil ikke ha stor innvirkning på resultatet. Den vertikale spenningsfordelingen ved D-regionens overgang til B-regionen definert ved St. Venants prinsipp, er fremstilt i *Figur 8-11*:



Figur 8-11: Resultater fra FEM-analyse; fordeling av vertikale spenninger over bredden på tverrsnittet 1500 mm fra overkant søyle

Den vertikale spenningen 1500 mm fra overkant søyle viser seg å være tilnærmet jevnt fordelt, med en gjennomsnittsverdi som tilsvarer spenningen av den påførte lasten fordelt over tverrsnittet; $1000 \text{ kN}/(1500\text{mm} \times 1\text{mm}) = 666,67 \text{ MPa}$. Den faktiske spenningen er bueformet, men avviket fra gjennomsnittsverdien er på 2% - 3% og regnes som neglisjerbart. Avviket kan likevel være forklaringen på at de horisontale spenningen ved denne høyden ikke er null som forventet.

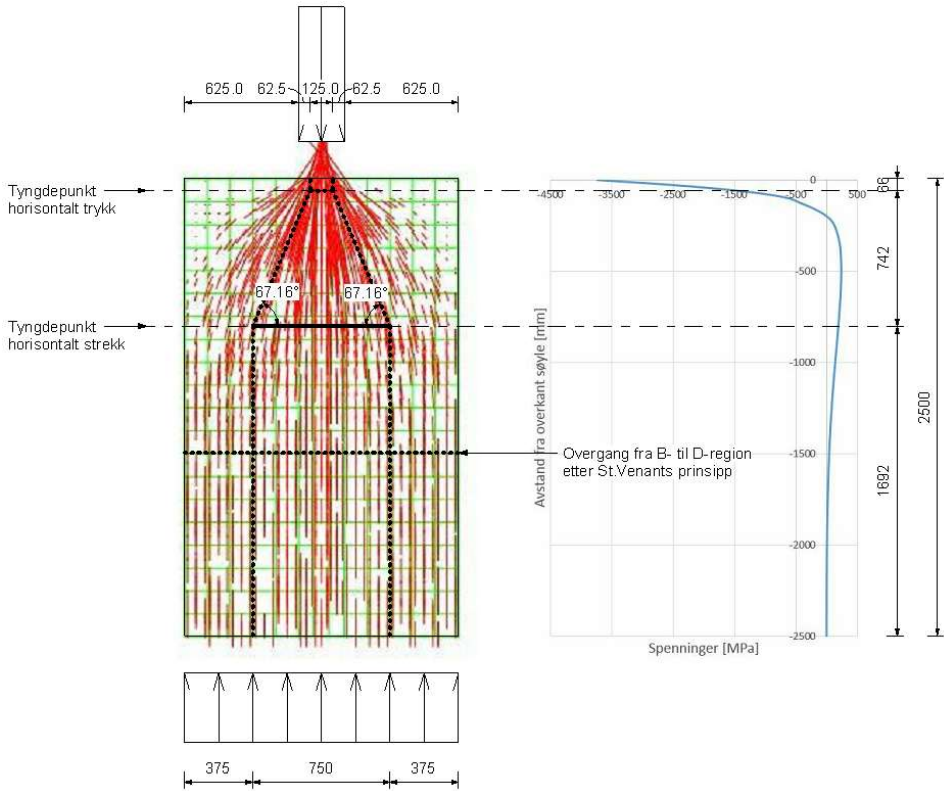
Den vertikale spenningsfordelingen i høyden der de horisontale spenningene er null, 2500 mm fra overkant søyle, er fremstilt i *Figur 8-12*.



Figur 8-12: Resultater fra FEM-analyse; fordeling av vertikale spenninger over bredden på tverrsnittet 2500 mm fra overkant søyle

Som forventet er spenningsene jevnere fordelt her sammenlignet med *Figur 8-11*. Legg merke til at skaleringen i *Figur 8-12* er ulik skaleringen i *Figur 8-11* slik at buen i spenningsfordelingen skal være synlig. Avviket fra gjennomsnittsverdien er her 0,2% - 0,6%.

For å etablere stavmodellen med utgangspunkt i FEM-analysen beregner en først tyngdepunktet til det horisontale strekket i søylen. Dette utføres slik det er beskrevet i *kapittel 7* og beregningene for strekkspenningens tyngdepunkt er utført i *Vedlegg 1*. Formen på den horisontale trykkspenningsfordelingen mot overkant søyle ligner en trekant. Tyngdepunktet til denne plasseres derfor i tredjedelspunktet. Trykket fordeler seg over en relativt liten høyde, 198 mm, noe som gjør at eventuelle avvik i plasseringen av tyngdepunktet ikke vil ha stor betydning. I tyngdepunktene til de horisontale spenningsfordelingene plasseres de horisontale trykk- og strekkstavene. De vertikale trykkstavene rett under punktlasten plasseres i lastbreddens fjerdedelspunkter. De vertikale trykkstavene som grenser mot overgangen fra D- til B-regionen plasseres i søylebreddens fjerdedelspunkter. Stavmodellen som fremkommer av dette er fremstilt i *Figur 8-13*.



Figur 8-13: Stavmodell etablert med FEM-analyser

Som Figur 8-13 viser blir vinklene i stavmodellen etablert med utgangspunkt i FEM-analysene, noe lavere enn vinklene beregnet etter reglene fra EK2-1-1. Som en følge av dette blir spaltestrekket noe større:

$$T = \frac{F}{\tan \theta} = \frac{1000 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 67,16^\circ} = 210,59 \text{ kN}$$

Til sammenligning er spaltestrekket fra EK2 -1-1, som tidligere beregnet 208,33 kN.

Ser en nærmere på resultatene fra FEM-analysen, kan en hente ut ytterligere informasjon. Den samlede horisontale strekkspenningen fra FEM-analysen er på 211,11 kN. Av dette ligger 12,3 kN det vil si 6% utenfor området definert av St. Venants prinsipp. Den maksimale strekkspenningsverdien ligger 500 mm fra overkant søyle og er på 240,90 MPa. Strekkspenningsverdien i høyden definert ved St. Venants prinsipp, 1500 mm fra overkant søyle, er på 42,85 MPa, det vil si

18% av den maksimale strekkspenningen. De relevante verdiene er samlet i *Tabell 8-1* og *Tabell 8-2*:

Tabell 8-1: Beregnet spaltestrekk for $d = 1$ mm

	EK2-1-1		Stavmodell fra FEM		Verdi fra FEM
	\emptyset	T	\emptyset	T	T
$d = 1$ mm	67,38°	208,33 kN	67,16°	210,59 kN	211,11 kN

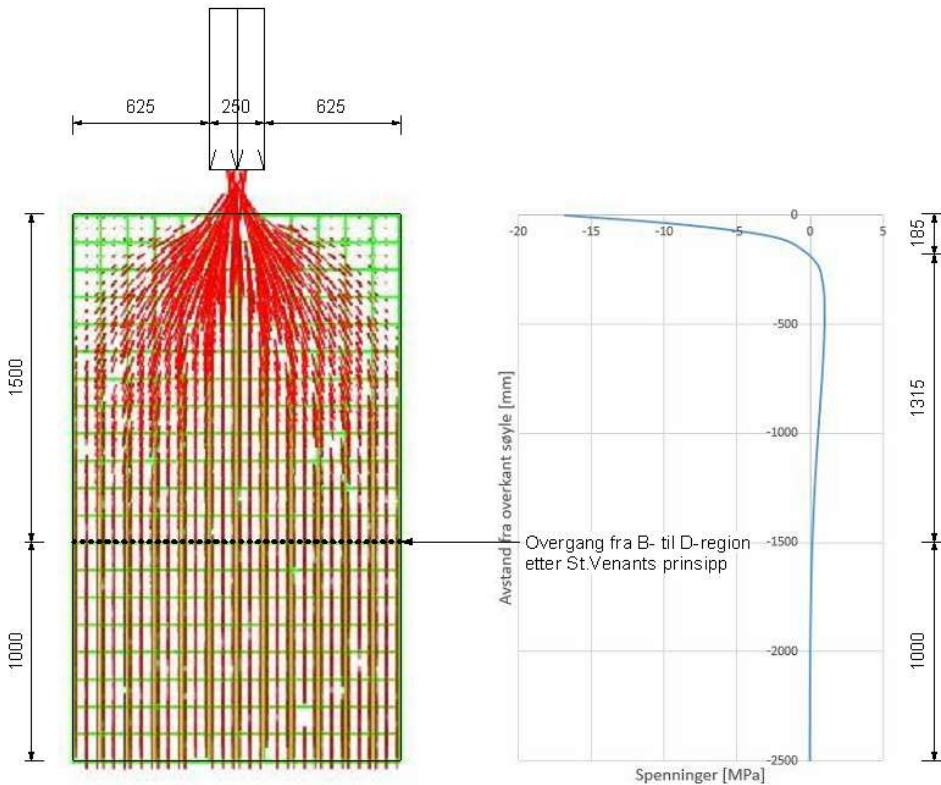
Tabell 8-2: Høydeplassing av spaltestrekk, avstander fra overkant søyle for $d = 1$ mm

	EK2-1-1		FEM-analyse	
	Start [mm]	Slutt [mm]	Start [mm]	Slutt [mm]
$d = 1$ mm	600	1500	198	2500

En analyse av søylen i plan spenning, er i henhold til metoden ved bruk av FEM-analyser slik den er beskrevet av Schlaich, mfl. (1987). En tar ikke hensyn til tverrsnittstykkelsen når en betrakter de ulike planene. I praksis medfører dette at en betrakter kreftene i stavmodellen som jevnt fordelt over tverrsnittstykkelsen. Ved beregning av spaltestrekkarmering antar en at betongen ikke har strekkapasitet og at hele spaltestrekket tas av armeringen. Ved beregning av opprissing er det også vanlig å betrakte spenningene som jevnt fordelt over tverrsnittstykkelsen.

Det har tidligere vært vist at den maksimale strekkspenningen fra FEM-analysen ligger 500 mm fra overkant av søylen og er på 240,90 MPa. Dersom denne fordeles jevnt over en tverrsnittstykkelse på for eksempel 250 mm blir spenningen på 0,96 MPa. Dette er under strekkapasiteten til de mest brukte betongkvalitetene, og spaltestrekkarmering vil derfor ikke være nødvendig.

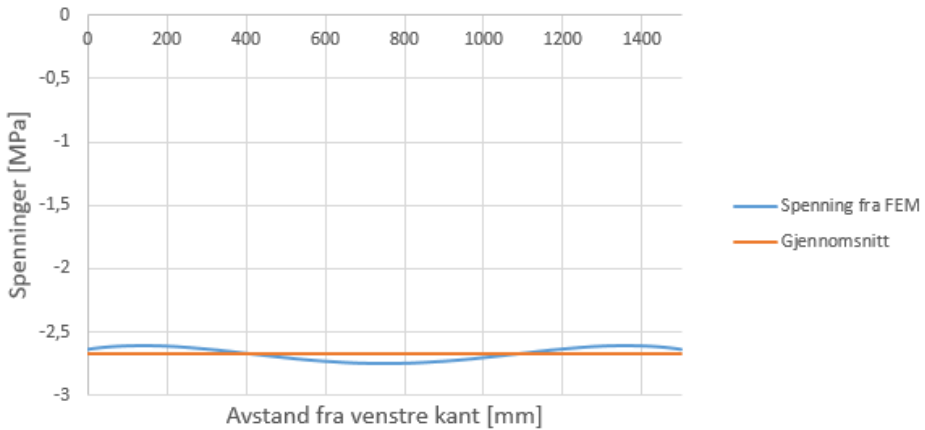
Hvorvidt det er riktig å anta at spenningene fordeler seg jevnt over tverrsnittstykkelsen, er i det følgende analysert og kommentert. Søylen er tilegnet økende tverrsnittstykkelse for de tre neste variantene av søylen.

Tverrsnittstykkelse $d = 250 \text{ mm}$ 

Figur 8-14: Resultater fra FEM-analyse: (t.v.) hovedtrykkspenningsstrøm; (t.h.) fordeling av horisontale spenninger i midtsnitt søyle

Trykkspenningsstrømmen i *Figur 8-14* er hentet fra et midtsnitt i søylen inn og ut av planet. Fordelingen av de horisontale spenningene i *Figur 8-14* er hentet fra samme plassering inn og ut av planet, og sentrisk i søylebredden. Som en ser av figuren er formen på fordelingen tilnærmet identisk fordelingen fra plan spenning fremstilt i *Figur 8-10*. Det er kun en liten endring i hvor overgangen mellom trykk og strekk er. Da denne overgangen for plan spenning var 198 mm fra overkant søyle, er den nå ved 185 mm. Spenningsverdiene i fordelingen er naturlig nok mindre, da tykkelsen er 250 mm i stedet for 1 mm.

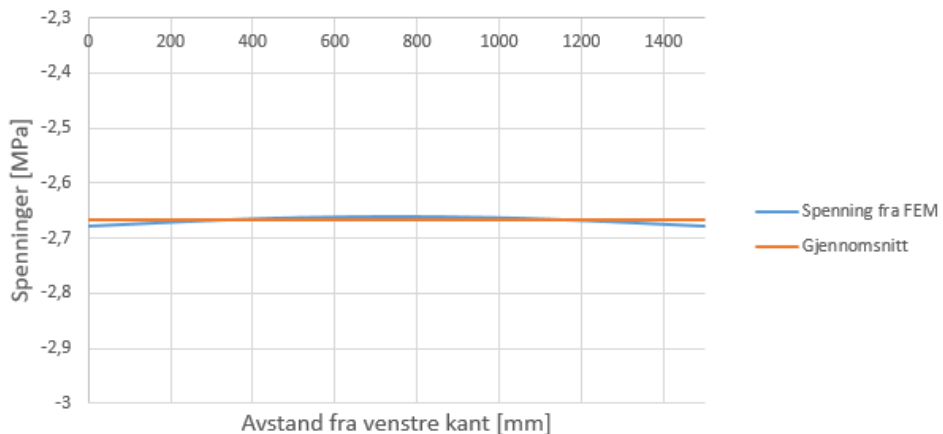
Også her fordeler de horisontale spenningene seg utenfor området definert ved St. Venants prinsipp. Den vertikale spenningsfordelingen ved D-regionens overgang til B-region definert ved St. Venants prinsipp, er fremstilt i *Figur 8-15*.



Figur 8-15: Resultater fra FEM-analyse; fordeling av vertikale spenninger over bredden på tverrsnittet 1500 mm fra overkant søyle

Den vertikale spenningsfordelingen 1500 mm fra overkant søyle, ligner den vertikale spenningsfordelingen fra plan spenning. Kraften er tilnærmet jevnt fordelt, med en gjennomsnittsverdi som tilsvarer spenningen av den påførte lasten fordelt over tverrsnittet; $1000 \text{ kN}/(1500 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}) = 2,67 \text{ MPa}$. Avviket er på 2% - 3% og regnes som neglisjerbart. Avviket kan likevel være forklaringen på at de horisontale spenningene ved denne høyden ikke er null.

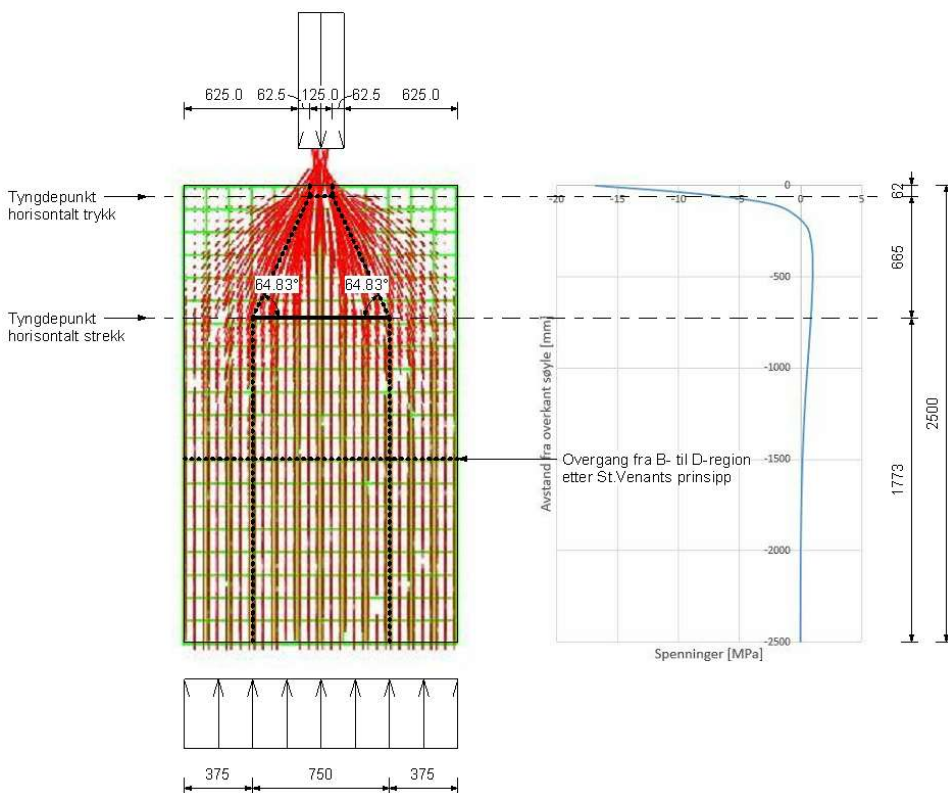
Den vertikale spenningsfordelingen i høyden der de horisontale spenningene er null, 2500 mm fra overkant søyle, er fremstilt i Figur 8-16.



Figur 8-16: Resultater fra FEM-analyse; fordeling av vertikale spenninger over bredden på tverrsnittet 2500 mm fra overkant søyle

Som forventet er spenningene jevnere fordelt her enn i høyden definert ved St. Venants prinsipp. Dette samsvarer med resultatene fra plan spenning. Legg merke til at skaleringen i *Figur 8-16* er ulik skaleringen i *Figur 8-15* slik at buen i spenningsfordelingen skal være synlig. Avviket fra gjennomsnittet er her på 0,2% - 0,4%.

Stavmodellen etableres på samme måte som tidligere beskrevet. Beregningene for tyngdepunktet til den horisontale strekkspenningsfordelingen er utført i *Vedlegg 2* og stavmodellen blir som fremstilt i *Figur 8-17*.

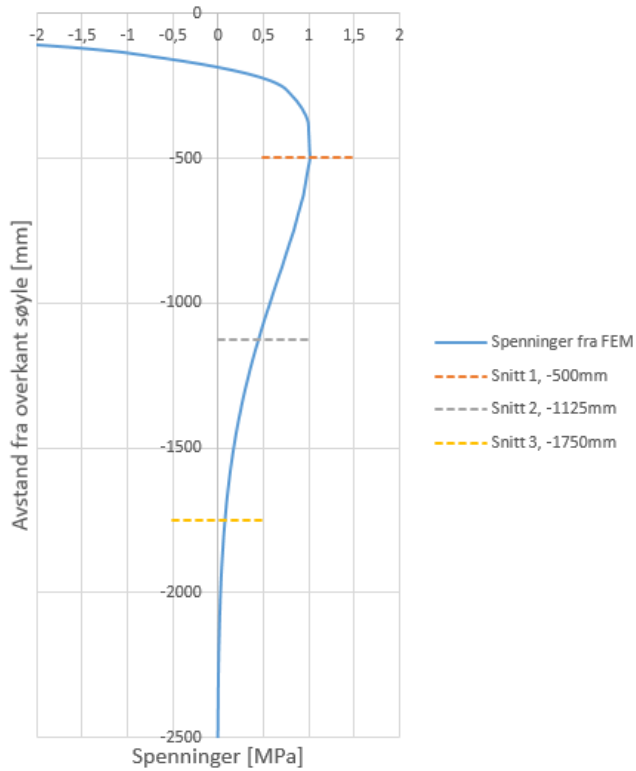


Figur 8-17: Stavmodell etablert med FEM-analyser

Som *Figur 8-17* viser blir vinklene i stavmodellen noe lavere enn vinklene etablert fra plan spenning og EK2-1-1. Som en følge av dette blir spaltestrekket også noe større:

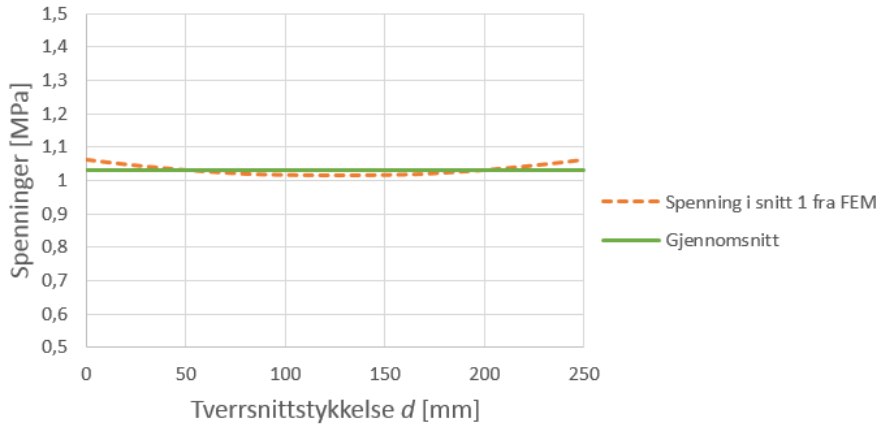
$$T = \frac{F}{\tan \theta} = \frac{1000 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 64,83^\circ} = 234,96 \text{ kN}$$

Analysen er utført med volumelementer og spenningsfordelingen over tverrsnittstykkelsen kan derfor studeres.



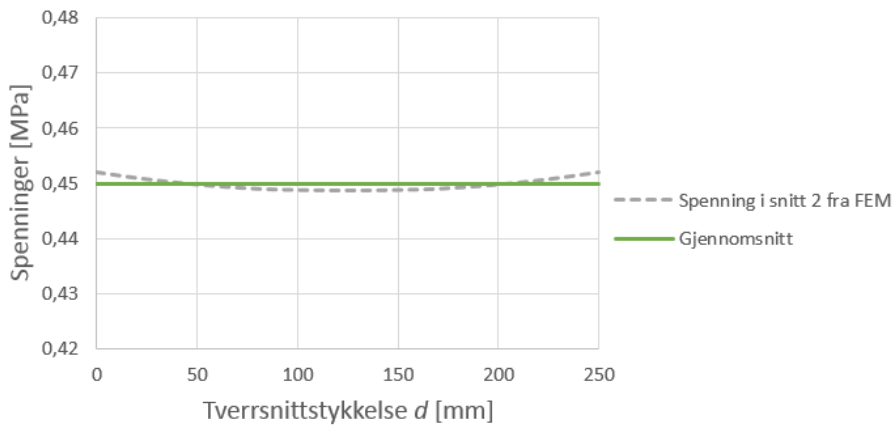
Figur 8-18: Fordeling av horisontale spenninger i høyderetningen av søylen fra FEM-analysen

I tre ulike snitt er det sett på hvordan den horisontale spenningen fordeler seg over tverrsnittstykkelsen d . Snittenes høydeplassering er vist i Figur 8-18. Fra tabellverdiene til grafen i Figur 8-18 hentes spenningsverdiene ved snittene; Snitt 1: 1,016 MPa, Snitt 2: 0,449 MPa, Snitt 3: 0,0781 MPa. Disse spenningsene virker i tverrsnittstykkelsens midtpunkt.



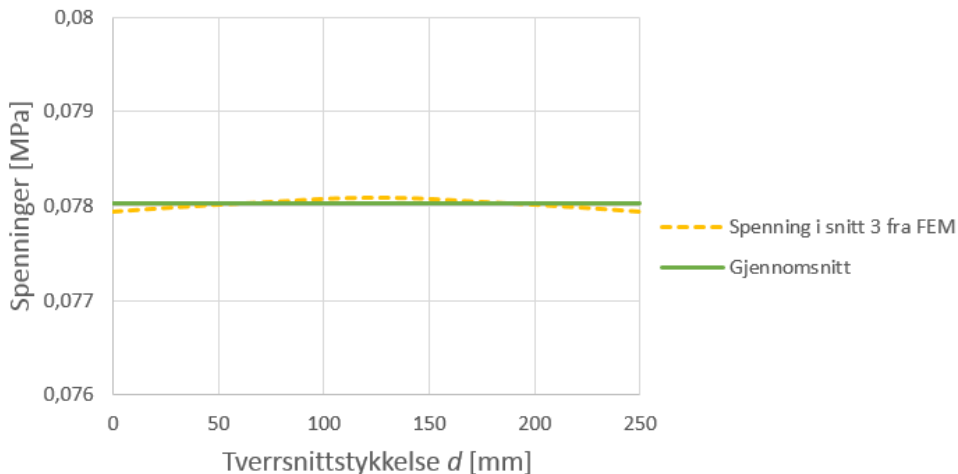
Figur 8-19: Snitt 1; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 125 mm, finner en igjen verdien fra Figur 8-18, 1,016 MPa. Ut mot sidekantene er det en økning i de horisontale spenningene på 4,6%.



Figur 8-20: Snitt 2; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 125 mm, finner en igjen verdien fra Figur 8-18, 0,449 MPa. Ut mot sidekantene er det en økning i de horisontale spenningene på 0,7%.



Figur 8-21: Snitt 3; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 125 mm, finner en igjen verdien fra *Figur 8-18*, 0,0781 MPa. Ut mot sidekantene er det en reduksjon i de horisontale spenningene på 0,2%.

For snitt 1 og 2 er den horisontale spenningen fremstilt i *Figur 8-18* minimumsverdien når en ser på fordelingen av spenningene over tverrsnittstykkelsen, mens det for snitt 3 er motsatt. Da spenningsverdiene er større i snitt 1 og 2 vil fordelingen her ha større innvirkningen på den totale strekkspenningen over tverrsnittet. Variasjonen over tykkelsen er imidlertid liten, 4,6% for snitt 1 og 0,7% for snitt 2. For dette tilfellet, med tverrsnittstykkelse $d = 250$ mm, kan det tyde på at en antagelse om jevn spenningsfordeling over tverrsnittstykkelsen stemmer bra.

Den samlede horisontale strekkspenningen i midtsnittet av søylen, slik den er fremstilt i *Figur 8-18*, er på 902,41 N/mm. Av dette ligger 153,33 N/mm, det vil si 17%, utenfor området definert av St. Venants prinsipp. Den maksimale strekkspenningsverdien ligger 500 mm fra overkant søyle og er på 1,02 MPa. Strekkspenningsverdien i høyden definert ved St. Venants prinsipp, 1500 mm fra overkant søyle, er på 0,17 MPa det vil si 17% av den maksimale strekkspenningen. Med en antagelse om at strekkspenningene i midtsnittet slik de er fremstilt i *Figur 8-18* representerer en jevn spenning over tverrsnittstykkelsen er den samlede horisontale strekkraften på $902,41 \text{ N/mm} \cdot 250 \text{ mm} = 225,60 \text{ kN}$. De relevante verdiene er samlet i *Tabell 8-3* og *Tabell 8-4*.

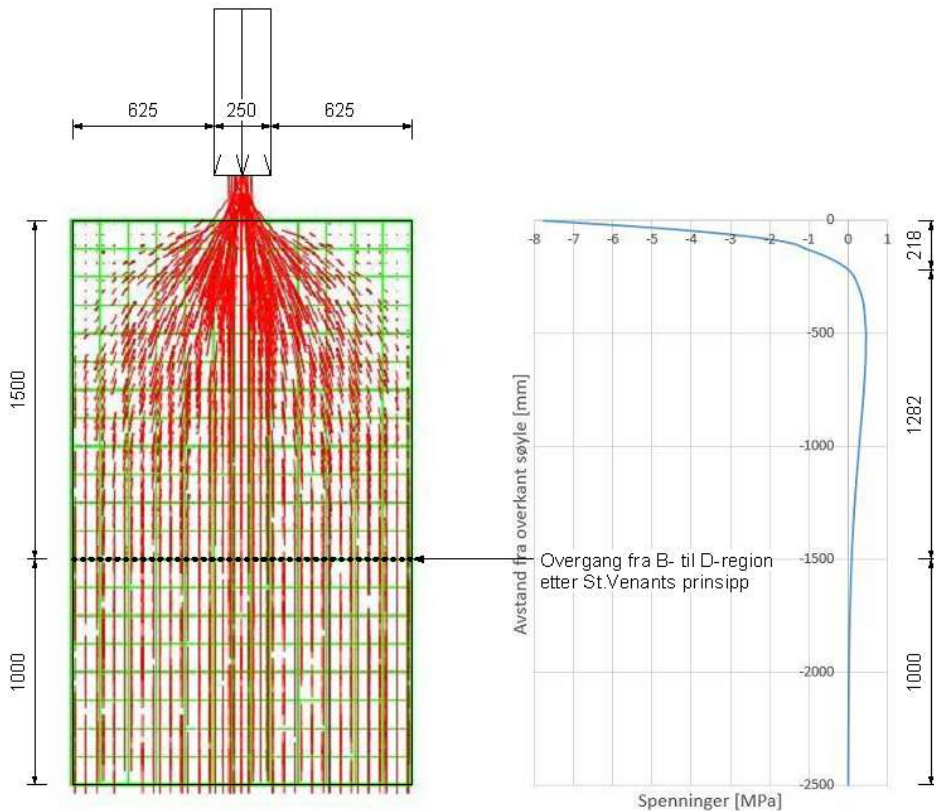
Tabell 8-3: Beregnet spaltestrekk for $d = 1 \text{ mm}$ og $d = 250 \text{ mm}$

	EK2-1-1		Stavmodell fra FEM		Verdi fra FEM
	ϕ	T	ϕ	T	T
$d = 1 \text{ mm}$	67,38°	208,33 kN	67,16°	210,59 kN	211,11 kN
$d = 250 \text{ mm}$	67,38°	208,33 kN	64,83°	234,96 kN	225,60 kN

Tabell 8-4: Høydeplassing spaltestrekk, avstander fra overkant søyle for $d = 1 \text{ mm}$ og $d=250 \text{ mm}$

	EK2-1-1		FEM-analyse	
	Start [mm]	Slutt [mm]	Start [mm]	Slutt [mm]
$d = 1 \text{ mm}$	600	1500	198	2500
$d = 250 \text{ mm}$	600	1500	185	2500

Tverrsnittstykkelse $d = 500 \text{ mm}$

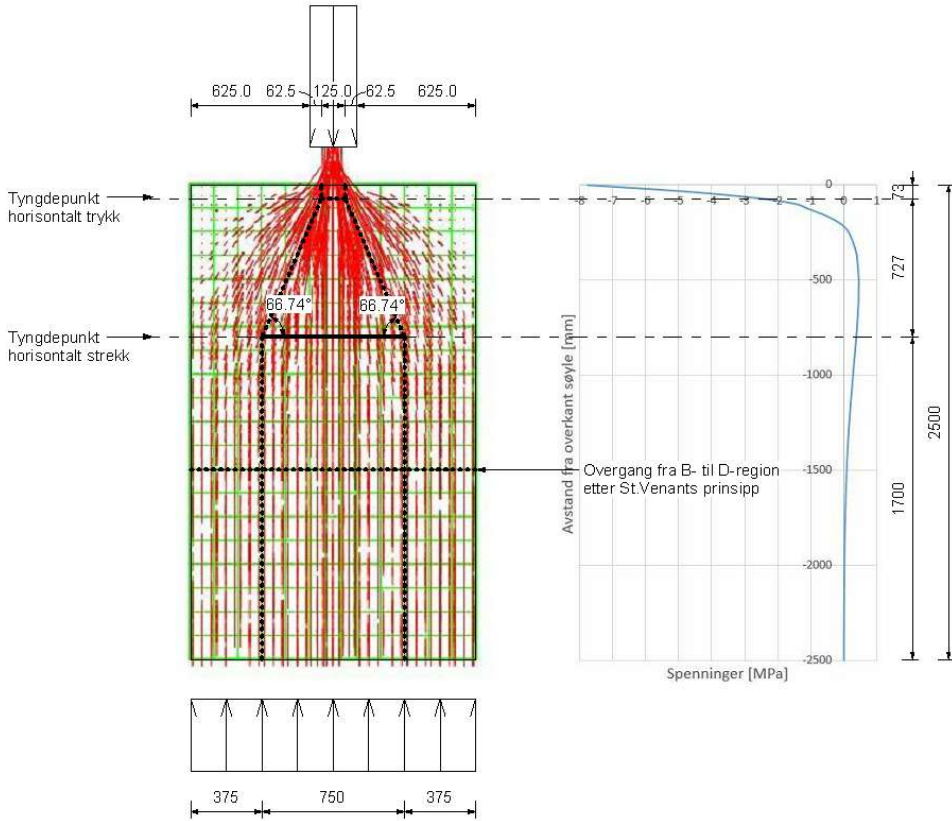


Figur 8-22: Resultater fra FEM-analyse: (t.v.) hovedtrykkspenningsstrøm; (t.h.) fordeling av horisontale spenninger

Trykkspenningsstrømmen i *Figur 8-22* er hentet fra et midtsnitt i søylen inn og ut av planet. Fordelingen av de horisontale spenningene i *Figur 8-22* er hentet fra samme plassering inn og ut av planet, og sentrisk i søylebredden. Tendensen er lik som for de to forrige tilfellene. Det som i hovedsak skiller dem er i hvilken avstand fra overkant søyle strekket starter. For plan spenning var det ved 198 mm, for $d = 250$ mm var det ved 185 mm, og for dette tilfellet ved 218 mm. Spenningsverdiene er mindre enn for $d = 250$ mm da tykkelsen her er 500 mm.

Også her fordeler de horisontale spenningene seg utenfor området definert ved St. Venants prinsipp. Ser en på den vertikale spenningsfordelingen ved D-regionens overgang til B-region, definert ved St.Venants prinsipp og ved høyden hvor de horisontale spenningene er null, er tendensen lik som for plan spenning og $d = 250$ mm. Figurer av dette er derfor ikke tatt med for dette tilfellet.

Stavmodellen etableres på samme måte som tidligere beskrevet. Beregningene for tyngdepunktet til den horisontale strekkspenningsfordelingen er utført i *Vedlegg 3* og stavmodellen blir som fremstilt i *Figur 8-23*.

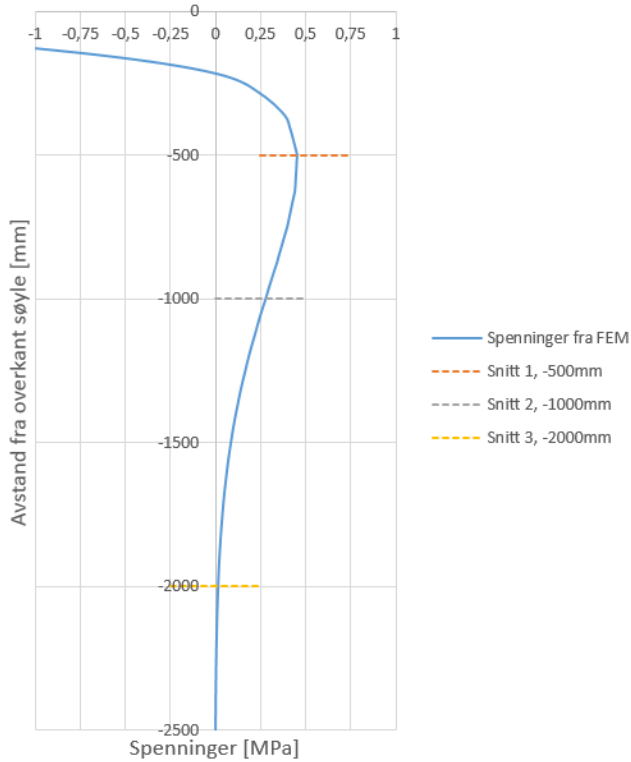


Figur 8-23: Stavmodell etablert med FEM-analyser

Som Figur 8-23 viser blir vinklene i denne stavmodellen noe høyere enn for de tidligere etablerte stavmodellene. Som en følge av dette blir også spaltstrekket noe lavere:

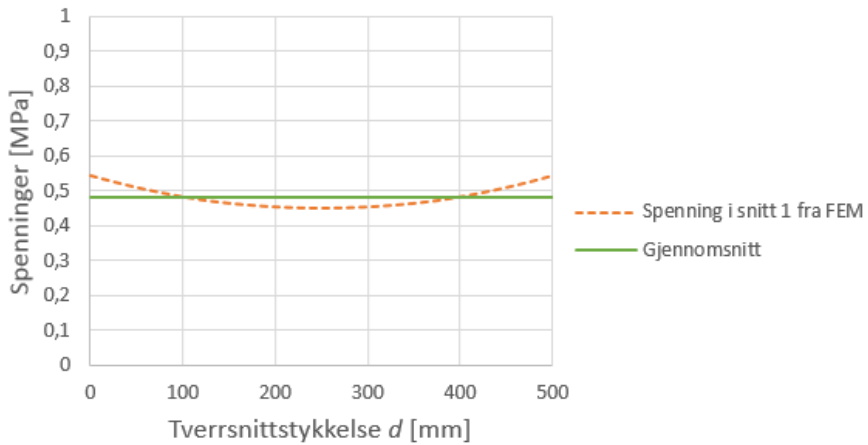
$$T = \frac{F}{\tan \theta} = \frac{1000 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 66,74^\circ} = 214,92 \text{ kN}$$

Fra FEM-analysen ser en også her på hvordan spenningene fordeler seg over tverrsnittstykkelsen.



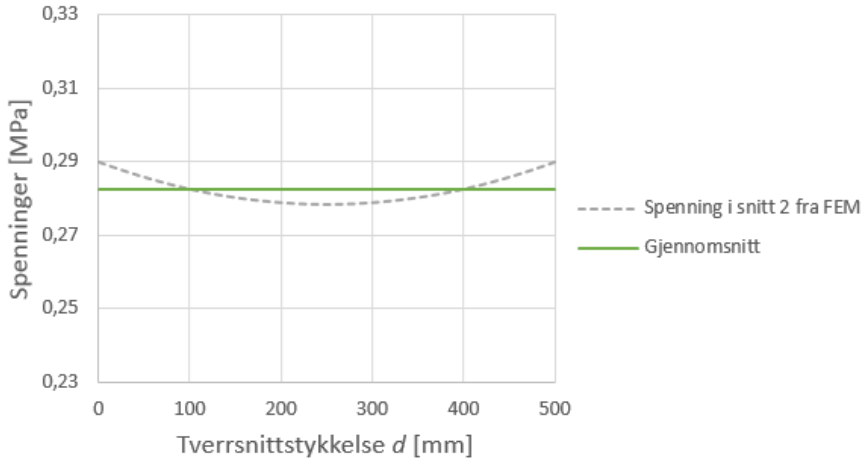
Figur 8-24: Fordeling av horisontale spenninger i høyderetningen av søylen fra FEM-analysen

Fra tabellverdiene til grafen i *Figur 8-23* hentes spenningsverdiene ved snittene; Snitt 1: 0,45 MPa, Snitt 2: 0,28 MPa, Snitt 3: 0,0145 MPa.



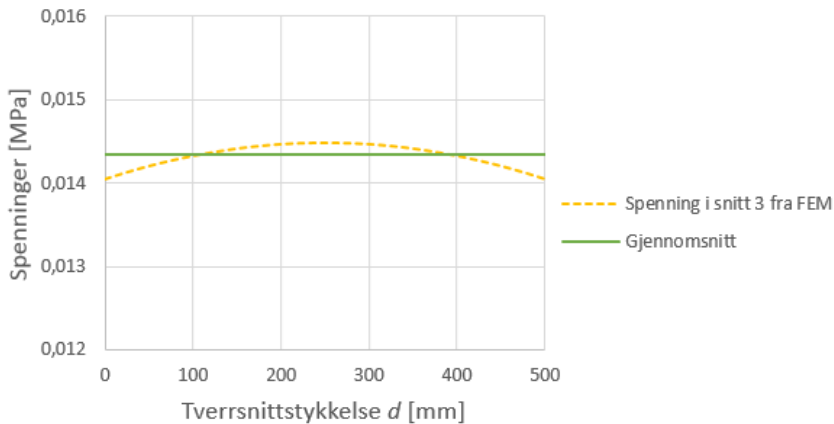
Figur 8-25: Snitt 1; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 250 mm, finner en igjen verdien fra *Figur 8-23*, 0,45 MPa. Ut mot sidekantene er det en økning i de horisontale spenningene på 20,3%.



Figur 8-26: Snitt 2; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 250 mm, finner en igjen verdien fra *Figur 8-23*, 0,28 MPa. Ut mot sidekantene er det en økning i de horisontale spenningene på 4,2%.



Figur 8-27: Snitt 2; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 250 mm, finner en igjen verdien fra *Figur 8-23*, 0,0145 MPa. Ut mot sidekantene er det en reduksjon i de horisontale spenningene på 3,0%.

Tendensen er lik som for analysen med tverrsnittstykkelse 250 mm. For snitt 1 og 2 er den horisontale spenningen fremstilt i *Figur 8-23* minimumsverdien når en ser på fordelingen av spenningene over tverrsnittstykkelsen, mens det for snitt 3 er motsatt. Da spenningsverdiene er større i snitt 1 og 2 vil fordelingen her ha større innvirkning på den totale strekkspenningen over tverrsnittet. Variasjonen i spenningen over tverrsnittstykkelsen i snitt 1 er på 20,3% og 4,2% i snitt 2. For dette tilfellet, med tverrsnittstykkelse $d = 500$ mm, vil en antagelse om jevn spenningsfordeling over tverrsnittet være en dårlig tilnærming.

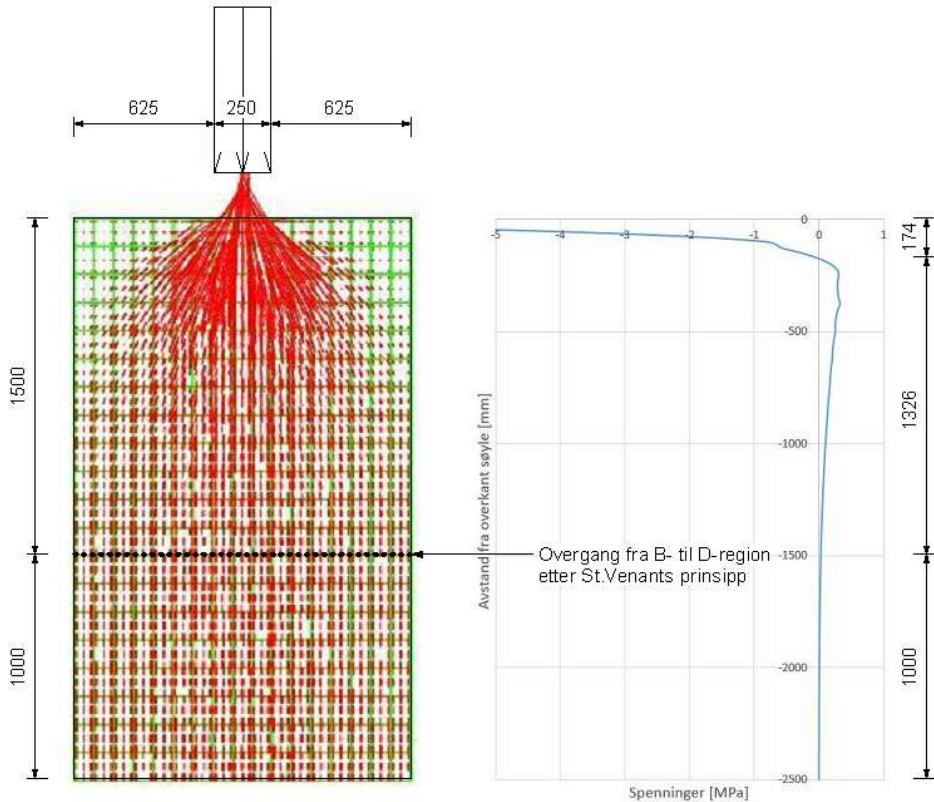
Den samlede horisontale strekkspenningen i midtsnittet av søylen slik den er fremstilt i *Figur 8-18*, er på 388,78 N/mm. Av dette ligger 74,86 N/mm det vil si 19% utenfor området definert av St. Venants prinsipp. Den maksimale strekkspenningsverdien ligger 500 mm fra overkant søyle og er på 0,45 MPa. Strekkspenningsverdien i høyden definert ved St. Venants prinsipp, 1500 mm fra overkant søyle er på 0,085 MPa, det vil si 19% av den maksimale strekkspenningen. Den samlede horisontale strekkraften i midtsnittet hentes fra FEM-analysen og viser seg å være 224,05 kN. De relevante verdiene er samlet i *Tabell 8-5* og *Tabell 8-6*.

Tabell 8-5: Beregnet spaltetrekk for $d = 1$ mm, $d = 250$ mm og $d = 500$ mm

	EK2-1-1		Stavmodell fra FEM		Verdi fra FEM
	\emptyset	T	\emptyset	T	T
$d = 1$ mm	67,38°	208,33 kN	67,16°	210,59 kN	211,11 kN
$d = 250$ mm	67,38°	208,33 kN	64,83°	234,96 kN	225,60 kN
$d = 500$ mm	67,38°	208,33 kN	66,74°	214,92 kN	224,05 kN

Tabell 8-6: Høydeplassering spaltetrekk, avstander fra overkant søyle for $d = 1$ mm, $d = 250$ mm og $d = 500$ mm

	EK2-1-1		FEM-analyse	
	Start [mm]	Slutt [mm]	Start [mm]	Slutt [mm]
$d = 1$ mm	600	1500	198	2500
$d = 250$ mm	600	1500	185	2500
$d = 500$ mm	600	1500	218	2500

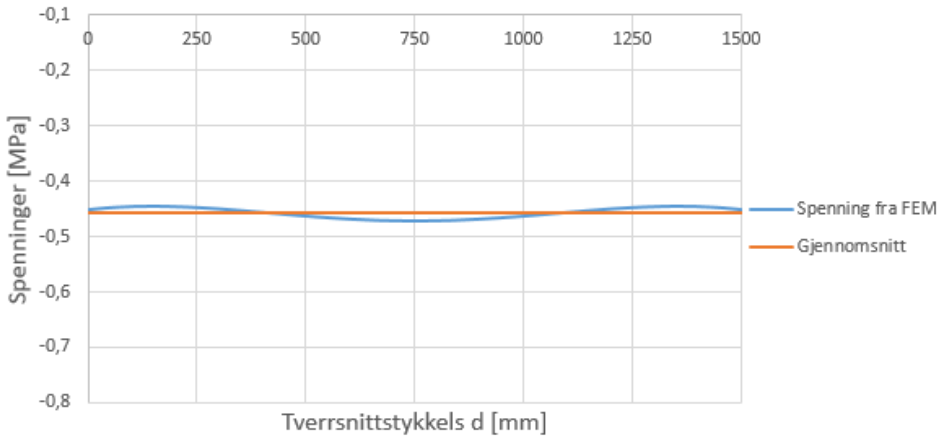
Tverrsnittstykkelse $d = 1500 \text{ mm}$ 

Figur 8-28: Resultater fra FEM-analyse: (t.v.) hovedtrykkspenningsstrøm; (t.h.) fordeling av horisontale spenninger

Trykkspenningsstrømmen i Figur 8-28 er hentet fra et midtsnitt i søylen inn og ut av planet. Fordelingen av de horisontale spenningene i Figur 8-28 er hentet fra samme plassering inn og ut av planet, og sentrisk i søylebredden. En kjenner igjen tendensen fra tilfellene med mindre tverrsnittstykkelse, både for trykkspenningsutbredelsen og fordelingen av de horisontale spenningene. Fordelingen av de horisontale spenningene er derimot ikke like jevne for dette tilfellet. Det er små diskontinuiteter i form av spenningshopp både på strekk- og trykksiden. Dette kan tyde på at FEM-analysen ikke har konverget. Det har ikke blitt prioritert og lage en modell med finere elementinndeling, da dette ville kreve stor datakraft. Det en har gjort for å kontrollere konvergens er å gjennomføre analyser med grovere elementinndeling, samt en analyse med samme elementinndeling, men med redusert integrasjon. Tendensene og spenningsverdiene blir tilsvarende som for tilfellet i Figur 8-28. Det har blitt

konkludert med at resultatene er gode nok til å studere tendenser i spenningsfordelinger, men at spenningsverdier fra analysen kan være feil.

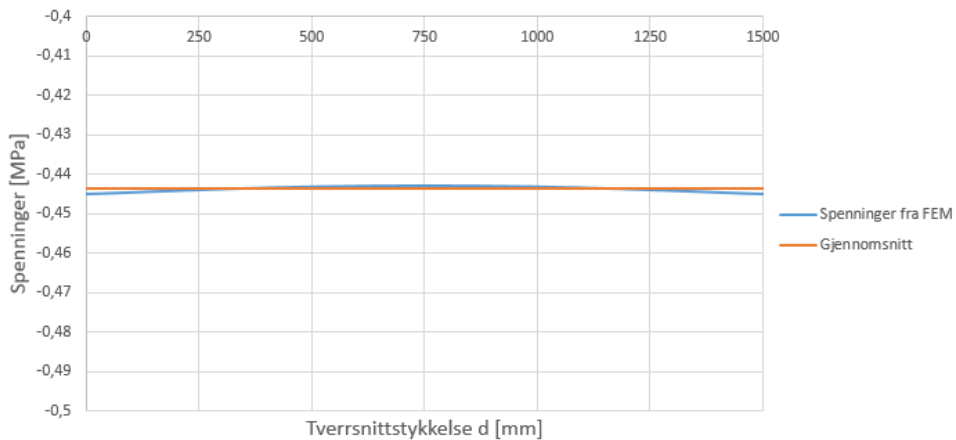
Også her fordeler de horisontale spenningene seg utenfor området definert ved St. Venants prinsipp. Den vertikale spenningsfordelingen ved D-regionens overgang til B-region definert ved St. Venants prinsipp, er fremstilt i *Figur 8-29*.



Figur 8-29: Resultater fra FEM-analyse; fordeling av vertikale spenninger over bredden på tverrsnittet 1500 mm fra overkant søyle

Avviket fra bjelketeori er på 2% - 3% og må sies å være neglisjerbart. Avviket kan likevel være forklaringen på at de horisontale spenningen på denne høyden ikke er null.

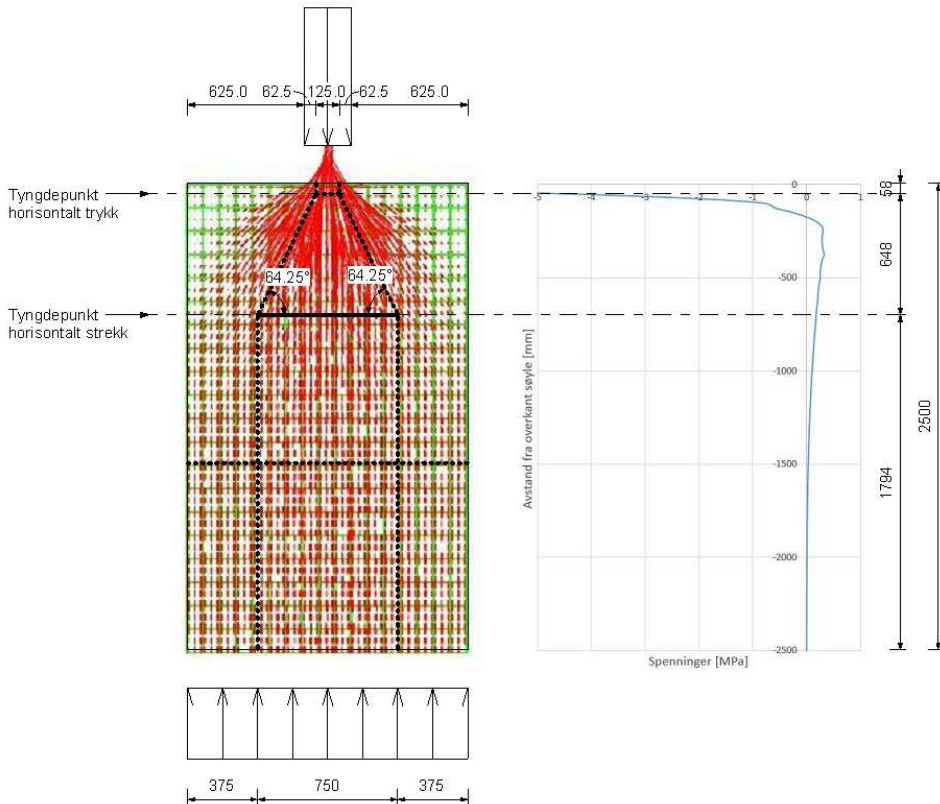
Den vertikale spenningsfordelingen i høyden der de horisontale spenningene er null, 2500 mm fra overkant søyle, er fremstilt i *Figur 8-30*.



Figur 8-30: Resultater fra FEM-analyse; fordeling av vertikale spenninger over bredden på tverrsnittet 2500 mm fra overkant søyle

Legg merke til at skaleringen i *Figur 8-30* er ulik skaleringen i *Figur 8-29* slik at buen i spenningsfordelingen skal være synlig. Avviket her er på 0,2% - 0,3% fra gjennomsnittet.

Stavmodellen etableres på samme måte som tidligere. Beregningene for tyngdepunktet til den horisontale strekkspenningsfordelingen er utført i *Vedlegg 4* og stavmodellen blir som fremstilt i *Figur 8-31*.

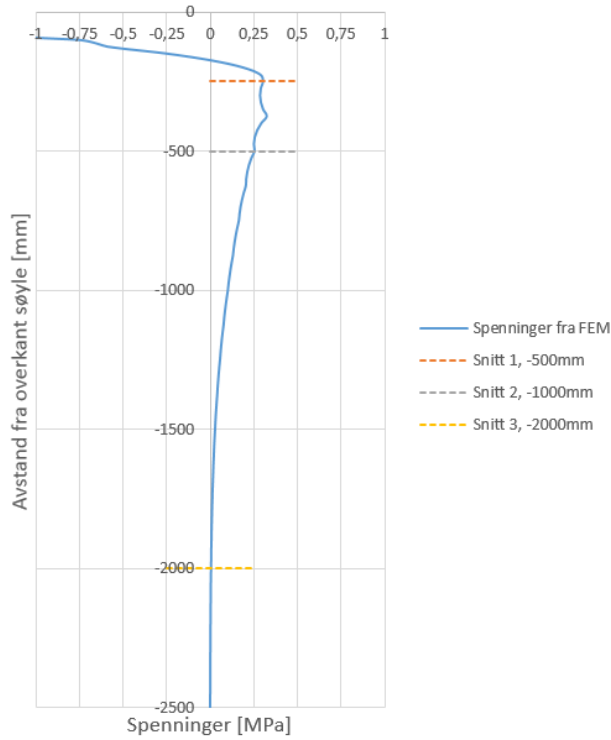


Figur 8-31: Stavmodell etablert med FEM-analyser

Som Figur 8-31 viser blir vinklene i stavmodellen lavere enn for de tidligere etablerte stavmodellene. Som en følge av dette blir også spaltstrekkingen noe høyere:

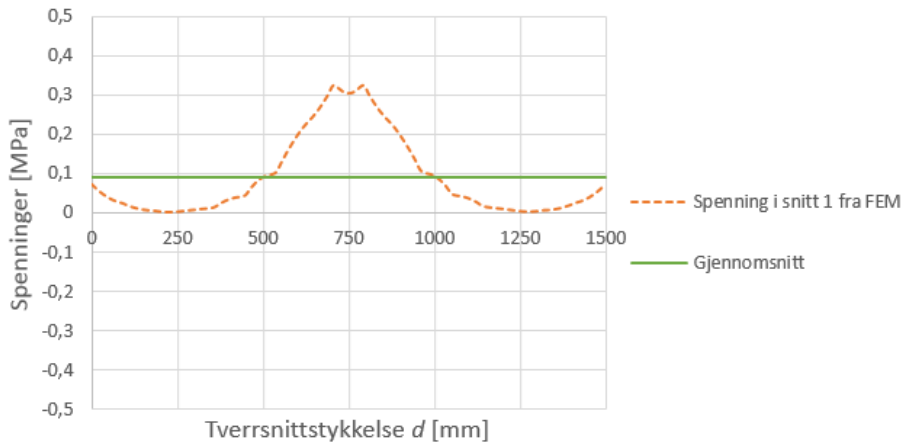
$$T = \frac{F}{\tan \theta} = \frac{1000 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 64,25^\circ} = 241,17 \text{ kN}$$

Fra FEM-analysen ser en også her på hvordan spenningene fordeler seg over tverrsnittstykkelsen.



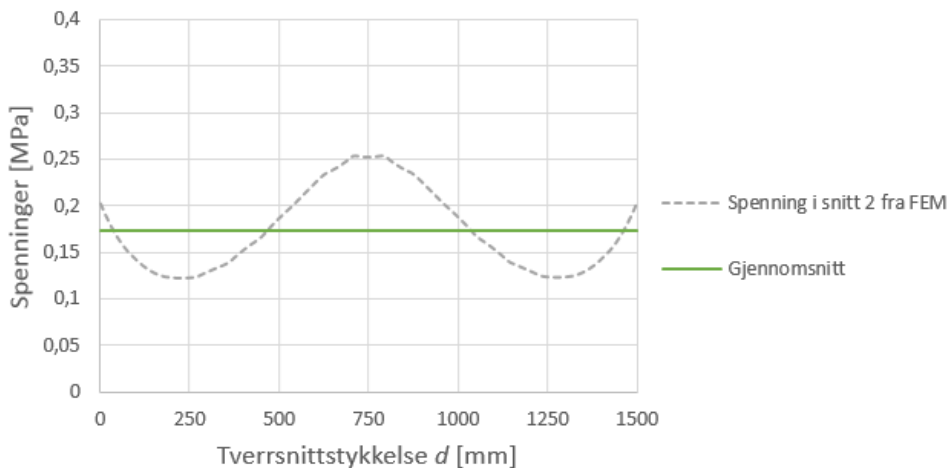
Figur 8-32: Fordeling av horisontale spenninger i høyderetningen av søylen fra FEM-analysen

Fra tabellverdiene til grafen i Figur 8-32 hentes spenningsverdier ved snittene; Snitt 1: 0,30 MPa, Snitt 2: 0,25 MPa, Snitt 3: 0,0046 MPa.



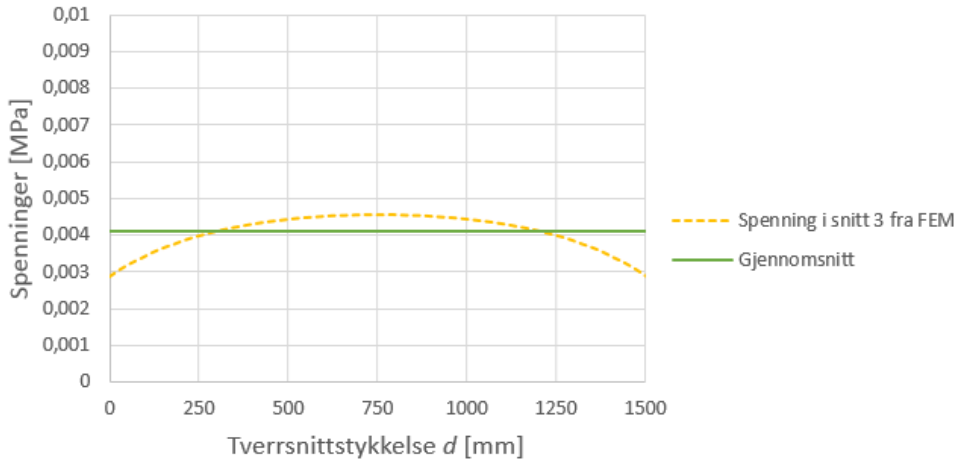
Figur 8-33: Snitt 1; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 750 mm, finner en igjen verdien fra *Figur 8-32*, 0,30 MPa. Formen på spenningsfordelingen er også her noe ujevn som kan bety at FEM-analysen ikke representerer en konvergent løsning. Som kommentert tidligere er det likevel grunn til å tro at tendensen i spenningsfordelingen kan være riktig. I motsetning til de forrige tilfellene der spenningsfordelingen slik den er fremstilt i *Figur 8-32* representerte minimumsverdien i spenningsfordelingen over tverrsnittstykkelsen, er det for dette tilfellet motsatt. Her opptrer den maksimale spenningen i senter av søylen og reduseres ut mot sidekantene, før den på nytt øker ut mot betongkanten. Spenningen i midtsnittet er 3,5 ganger større enn spenningen ved sidekanten. Verdien er noe usikker da en ikke har sikret konvergens i FEM-analysen. Det er likevel liten tvil om at det vil være en stor variasjon i spenningene over tverrsnittstykkelsen.



Figur 8-34: Snitt 2; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 750 mm, finner en igjen verdien fra *Figur 8-32*, 0,25 MPa. Tendensen er lik som for snitt 1, også her er det stor variasjon i spenningene over tverrsnittstykkelsen.



Figur 8-35: Snitt 3; fordeling av horisontale spenninger over tverrsnittstykkelsen til søylen

Midt i tverrsnittstykkelsen, ved 750 mm, finner en igjen verdien fra *Figur 8-32*, 0,0046 MPa. Tendensen er lik som for snitt 1 og 2, også her er det stor variasjon i spenningene over tverrsnittstykkelsen.

Som tidligere kommentert kan spenningsverdiene fra dette tilfellet være noe usikre, da en ikke har sikret konvergens i FEM-analysen. Den samlede horisontale strekkraften i midtplanet hentes likevel fra FEM-analysen. Denne har blitt sammenlignet med den samlede horisontalspenningene fra analyser med andre elementinndelinger og elementtyper, og ser ut til å stemme bra. Den samlede horisontale strekkraften viser seg å være 243,24 kN. De relevante verdiene er samlet i *Tabell 8-7* og *Tabell 8-8*.

Tabell 8-7: Beregnet spaltestrekk for $d = 1$ mm, $d = 250$ mm, $d = 500$ mm og $d = 1500$ mm

	EK2-1-1		Stavmodell fra FEM		Verdi fra FEM
	\emptyset	T	\emptyset	T	T
$d = 1$ mm	67,38°	208,33 kN	67,16°	210,59 kN	211,11 kN
$d = 250$ mm	67,38°	208,33 kN	64,83°	234,96 kN	225,60 kN
$d = 500$ mm	67,38°	208,33 kN	66,74°	214,92 kN	224,05 kN
$d = 1500$ mm	67,38°	208,33 kN	64,25°	241,17 kN	243,24 kN

Tabell 8-8: Høydeplassering spaltestrekk, avstander fra overkant søyle for $d = 1 \text{ mm}$, $d = 250 \text{ mm}$, $d = 500 \text{ mm}$ og $d = 1500 \text{ mm}$

	EK2-1-1		FEM-analyse	
	Start [mm]	Slutt [mm]	Start [mm]	Slutt [mm]
$d = 1 \text{ mm}$	600	1500	198	2500
$d = 250 \text{ mm}$	600	1500	185	2500
$d = 500 \text{ mm}$	600	1500	218	2500
$d = 500 \text{ mm}$	600	1500	174	2500

Kommentar forsøk 2

Den største forskjellen til EK2-1-1 i det samlede spaltestrekket er på 16% og kommer fra analysen utført med tverrsnittstykkelser $d = 1500 \text{ mm}$. Det er vanskelig å se et mønster i hvordan spaltestrekket utvikler seg med økende tverrsnittstykkelser. Analysen i plan spenning gir et spaltestrek som er bortimot identisk med verdien fra EK2-1-1. Deretter øker det for $d = 250 \text{ mm}$, det reduseres for $d = 500 \text{ mm}$, før det til slutt øker drastisk for $d = 1500 \text{ mm}$. Skulle en sett et mønster burde en analysert flere mellomliggende tverrsnittstykkelser. Det er imidlertid kan konkludere med, er at den faktiske størrelsen på spaltestrekket er noe som varierer med ulike tverrsnittstykkelser.

Fordelingen av spaltestrek over høyden er tilnærmet lik for de fire tilfellene, men ser ut til å fordeles over andre høyder enn fremstilt av Hendy og Smith. Den delen av spaltestrekket som fordeler seg under høyden definert ved St. Venants prinsipp er liten og kan nok i de fleste tilfeller neglisjeres. At spaltestrekket opptrer så nært overkanten av søylen som forsøket har vist, er noe overraskende. Dette medfører at konstruksjoner som dimensjoneres med spaltestrekkarmering som plasseres etter fordelingen slik den er fremstilt av Hendy og Smith, muligens ikke vil ha tilstrekkelig strekkapasitet langt nok opp i søylen. Når konstruksjonen risser vil spenningene dermed fordele seg etter et annet mønster enn spenningsfordelingen i en lineær elastisk analyse. Kompatibiliteten er med andre ord ikke optimal. I praksis vil en søyletopp ha relativt mye innlagt armering. Selv om ikke all armeringen er dimensjonert for spaltestrek, vil den likevel ta opp disse kreftene og spenningsfordelingen i søylen vil etter opprissing i slike tilfeller kunne tilsvare en lineær elastisk spenningsfordeling. Effekten er verdt å merke seg, og bør tas hensyn til ved dimensjonering av spaltestrekkarmering.

I fordelingen av spaltestrekk over dybden ser en muligens et mønster. For rektangulære konstruksjoner ser spaltestrekket ut til å være størst ved tverrsnittets sidekant og minst i senter av tverrsnittet. For kvadratiske konstruksjoner ser det ut til å være motsatt. Her er spaltestrekket størst i senter av tverrsnittet. Ved hvilket bredde-tykkelse forhold overgangen skjer gir ikke forsøket svar på, da et høyere antall mellomliggende verdier av tverrsnittstykkelsen ville vært nødvendig. Det er imidlertid konkludert med at fordelingen av spaltestrekk over tverrsnittstykkelsen ikke vil være konstant for konstruksjoner med stor nok tverrsnittstykkelse.

I prinsippet endrer ikke trykkspenningsstrømmen eller den horisontale spenningsfordelingen form fra analyser i plan spenning til analyser i tre dimensjoner med volumelementer. Formen endrer seg likevel nok til at stavmodellen får ulik form for hvert tilfelle og at spaltestrekket som tidligere kommentert blir forskjellig. Det er betryggende at de mest konservative verdiene oppstår for de romlige analysene. Det er avvik mellom spaltestrekket beregnet med den etablerte stavmodellen og spaltestrekket hentet fra FEM-analysen for hvert tilfelle. Det største avviket er på 4% og opptrer for analysen med tverrsnittstykkelse $d = 500$ mm. Spaltestrekket beregnet med stavmodellen er likevel større enn spaltestrekket både fra plan spenning og fra EK2-1-1. Konklusjonen er at stavmodeller for søylen i dette forsøket, etablert fra analyser i tre dimensjoner med volumelementer, vil gi konservative verdier for spaltestrekk sammenlignet med analyser i plan spenning og EK2-1-1.

8.3 Konklusjon riss

For beregning av riss ser en at det er mange faktorer som påvirker rissvidden. I forsøk 1 har en sett at den omkringliggende betongen vil ha stor innvirkning på rissvidden. Å beregne riss uten å ta hensyn til denne vil være svært konservativt. Hvordan denne stivheten skal tas hensyn til har en ikke lyktes i å gi et svar på i denne oppgaven.

I forsøk 2 har en sett at den faktiske størrelsen på spaltestrekket ikke vil samsvare med spaltestrekket beregnet etter EK2-1-1. En har også sett at fordelingen av spaltestrekk over høyden ikke vil samsvare med fordelingen slik den er fremstilt av Hendy og Smith. Videre har en sett at fordelingen over tverrsnittstykkelsen også vil variere. For små tverrsnittstykkelser vil variasjonen være liten og en antagelse om konstant spenning over tverrsnittstykkelsen vil være en bra

tilnærming. For større tverrsnittstykkelser vil det derimot være en stor variasjon i spenningen over tverrsnittstykkelsen.

Å bruke den forenklete rissviddebegrensningen i EK2-1-1, 7.3.3 for å vurdere riss i en D-region, virker som en svært usikker tilnærming. Denne bygger på parameterstudier av et bøyepåkjent tverrsnitt og vil ikke ligne spenningstilstanden slik den fremkommer i forsøk 2. Det mest nærliggende ser ut til å være å benytte formelen for rissvidde i EK2-1-1, 7.3.4 eller formelen for betraktning av enkeltriss i NS 3473, A.15.6. Dette kan muligens gjøres i sammenheng med et element utsatt for strekk slik det er fremstilt *Figur 6-10* i diskusjonskapittelet. På denne måten kan en ta hensyn til den varierende spenningen. En bør merke seg at spenningene ikke bare øker over høyden på D-regionen, men også vil kunne øke over dybden på D-regionen. For at en av disse metodene skal kunne benyttes må en i tillegg enten finne en måte å beregne rissavstanden uavhengig av overdekningen, eller finne en måte å påvise at en ikke vil oppnå et stabilisert rissmønster.

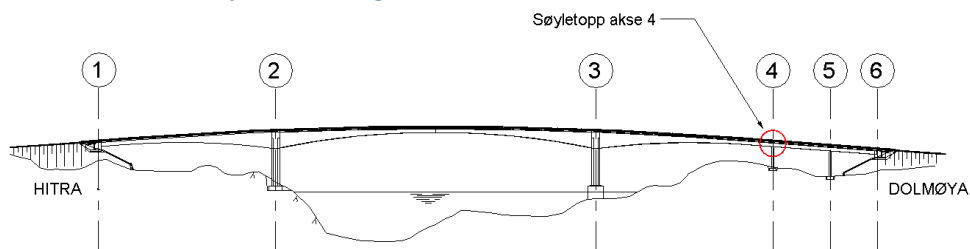
Det er vanskelig å se for seg én håndberegningsmetode for riss som vil være gyldig for alle D-regioner. Dersom en går veien om ikke-lineære elementanalyser kombinert med laboratorieforsøk, kan det tenkes at det er mulig å finne en metode. Metoden bør ta hensyn til ulike tverrsnittstykkelser inn og ut av planet, samt delvis eller full diskontinuitet.

Inntil videre anbefales det å benytte spenningsbegrensningen i spaltestrekkarmøringen på 250 MPa for broer, og 300 MPa for bygg, slik den er gitt i EK2, 8.10.3.

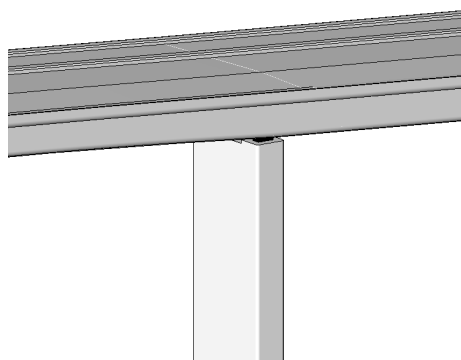
9 Analyse Dolmsundbrua

9.1 Søyletopp akse 4

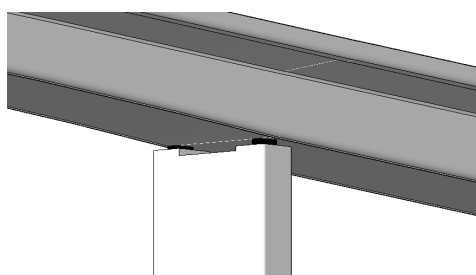
9.1.1 Presentasjon av D-region



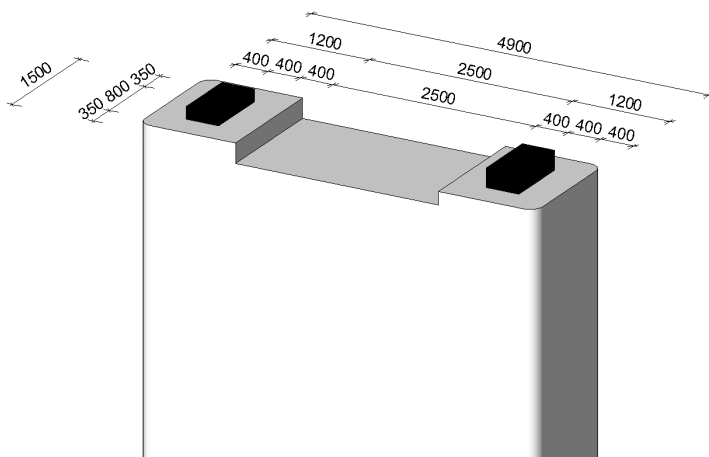
Figur 9-1: Oversikt bro



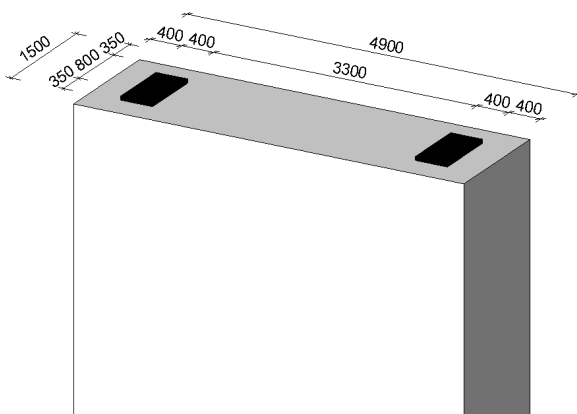
Figur 9-2: Perspektiv 1 av søyletopp



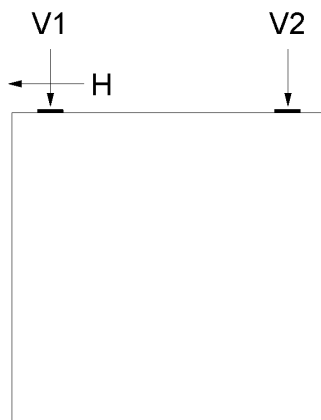
Figur 9-3: Perspektiv 2 av søyletopp



Figur 9-4: Geometri søyletopp



Figur 9-5: Idealisert søyletopp til FEM-analyse



Figur 9-6: Oppriss søyletopp med påførte laster

Tabell 9-1: Laster på søyletopp

Kombinasjon	V1 (kN)	V2 (kN)	H (kN)
ULS 1	9667	7431	48
ULS 2	4499	3224	1409
ULS 3	7962	3007	-528
SLS 1	5038	4706	7
SLS 2	4008	3530	-528
SLS 3	4162	3376	456

9.1.2 FEM-analysen

FEM-analysen skal brukes til å analysere hvordan trykk- og strekkspenningene beveger seg gjennom konstruksjonen. Det er fordelingen av spenningene som er relevant for å etablere stavmodellen, noe som betyr at spenningenes faktiske verdi i fordelingen ikke er relevante. For ordens skyld påføres likevel de største kreftene fra *Tabell 9-1* i FEM-analysen. I grensesnittet mellom B- og D-regionen beregnes størrelsen på spenningene, slik at en kan kontrollere at spenningene fordelt i tverrsnittet følger bjelketeori.

Søylen modelleres i 2D (plan spenning) i hver retning, oppriss langs side og oppriss kortside. Som tykkelse benyttes 1 mm. For oppriss langs side lages to modeller av søylen, en med de to vertikale lastene og en med den horisontale lasten. Dette for å enklere skille mellom effektene fra de to tilfellene.

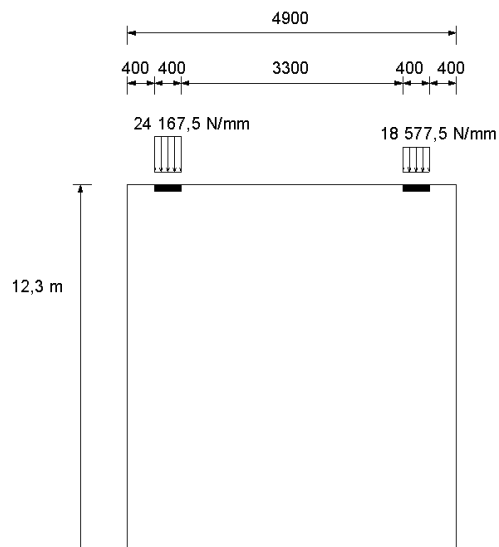
For analyser av D-regionen i denne søylen har en tre alternativer:

1. Modellere D-regionen med utbredelse etter St. Venants prinsipp. Punktlastene og spenningene i grensesnittet mellom B- og D-regionen påføres som ytre laster.
2. Modellere D-regionen med utbredelse etter St. Venants prinsipp. Punktlastene påføres som ytre laster og linjeopplegg innføres i underkant av D-regionen.
3. Modellere hele søylen og analysere D-regionen som en del av søylen.

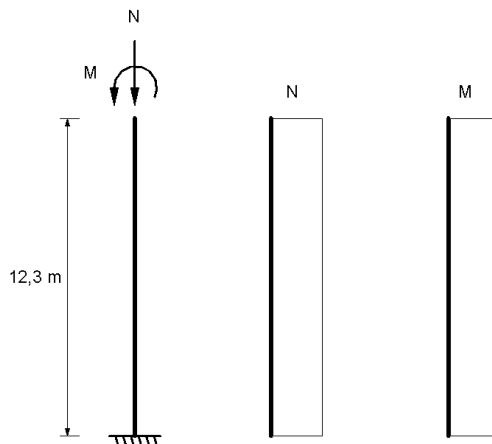
Det første problemet med alternativ 1 og 2 er at en ikke vet den faktiske utbredelsen av D-regionen. St. Venants prinsipp er nettopp det, kun et prinsipp. Den faktiske utbredelsen av D-regionen vil variere fra tilfelle til tilfelle. Alternativ 1 representerer metoden slik den er beskrevet i teoridelen. Det er derimot svært vanskelig, om ikke umulig å påføre spenningene i et FEM-program fra grensesnittet mellom B- og D-regionen så nøyaktig at en oppnår 100% likevekt med punktlastene. For alternativ 2 vil en få en tilstand der grensesnittet mellom B- og D-regionen blir helt fastholdt. Dette vil ikke tilsvare den faktiske tilstanden der betongen under D-regionen vil ha en deformasjon både i tverretningen og lengderetningen av søylen. Alternativ 3 er derfor å foretrekke. Søylen må modelleres så lang at en er sikker på at de helt stive oppleggene i bunnen ikke påvirker spenningene i D-regionen. Egenvekten til søylen tas ikke med i beregningene. På grunn av det statiske systemet til søylen vil ikke lengden av søylen påvirke spenningen fra bjelke teoriløsningen i grensesnittet mellom B- og D-regionen. Søylen modelleres i dette tilfellet med sin faktiske lengde på 12,3 m.

9.1.3 Etablering av stavmodell

Langside med vertikale laster



Figur 9-7: Søyletopp oppriss langside med påførte vertikallaster. V1 og V2 er fordelt over lengden 400mm



Figur 9-8: Statisk system for søyle. Momentet kommer fra at punktlasterne har ulik størrelse

Spenning i overgang fra B- til D-region beregnet med bjelketeori:

$$N = 9667 \text{ kN} + 7431 \text{ kN} = 17098 \text{ kN}$$

$$M = (9667 \text{ kN} - 7431 \text{ kN}) \cdot 1,85 \text{ m} = 4136,6 \text{ kNm}$$

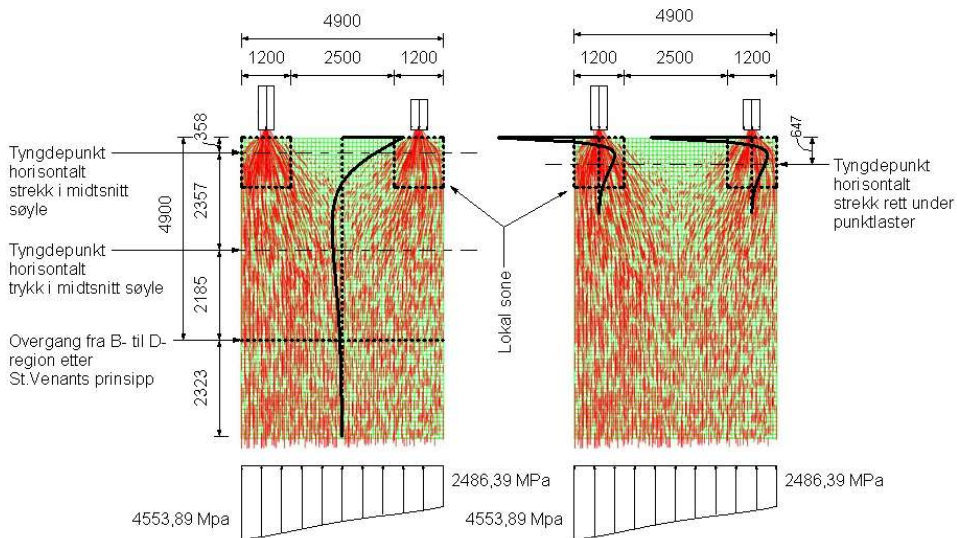
$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \text{ mm} \cdot (4900 \text{ mm})^2 = 400,167 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{17098 \cdot 10^3 \text{ N}}{1 \text{ mm} \cdot 4900 \text{ mm}} = 3489,39 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_M = \frac{M}{W} = \frac{4136,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{400,167 \cdot 10^4 \text{ mm}^3} = 1033,72 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_H = 3489,39 \text{ MPa} - 1033,72 \text{ MPa} = 2455,67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_V = 3489,39 \text{ MPa} + 1033,72 \text{ MPa} = 4523,11 \text{ MPa}$$



Figur 9-9: Hovedtrykkspenninger og fordeling av horisontale spenninger i midtsnitt søyle og i senter av hver punktlast

Figur 9-9 viser resultatet fra FEM-analysen utført i Abaqus. Som forventet oppstår det et lokalt spaltstrekk under hver punktlast. Dette området må betraktes som en egen lokal sone og vil bli sett nærmere på i beregning av lokal stavmodell. Det er også naturlig at det blir et horisontalt strekk i overkant av søylen mellom punktlastene, da spenningene søker inn mot senter av søylen. Av samme årsak oppstår et horisontalt trykk i midtsnittet lengre ned i søylen. De

horisontale spenningene fordeler seg over en større høyde enn beskrevet av St. Venants prinsipp. De horisontale spenningene utenfor dette området er imidlertid relativt små. Den vertikale spenningsfordelingen i underkant av D-regionen er tatt ved høyden beskrevet av St. Venants prinsipp, 4,9 m fra overkant søyle. Den viser en mer eller mindre lineær endring av spenningen langs tverrsnittet. Det er en bue i fordelingen, men denne er så liten at den er neglisjerbar. Avviket for vertikalspenningene mellom bjelketeori og FEM er på 1% for høyre side og 0,6% for venstre side og anses også neglisjerbar. En kan derfor si at løsningen for bjelketeori for de vertikale spenningene er oppnådd i høyden definert ved St. Venants prinsipp.

Global stavmodell

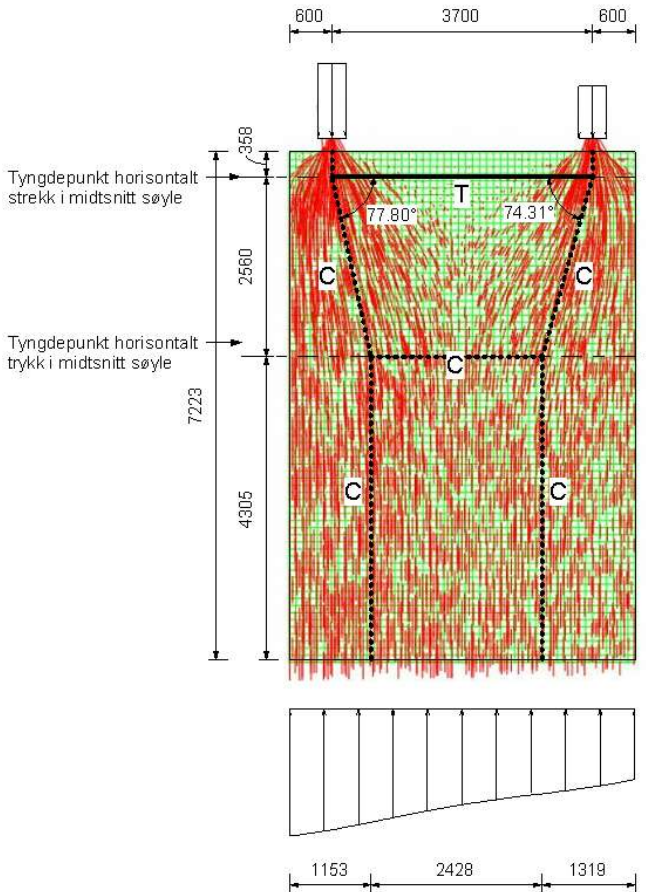
Først finner en tyngdepunktet til den horisontale spenningsfordelingen i midtsnittet av søylen. Tyngdepunktet til trykket beregnes slik det er beskrevet i metodekapittelet og beregningene er utført i *Vedlegg 5*. Tyngdepunktet til det horisontale strekket i midtsnittet er plassert i tredjedelspunktet til strekkspenningsfordelingen, da formen på denne i stor grad ligner en trekant.

De to påførte punktlastene må finne sin motpart i den motsatte rettede spenningen i underkant av D-regionen. Det må derfor være to trykkstaver som går fra hver av punktlastene til underkant av D-regionen og de skal ikke krysse hverandre. Rett under punktlasten og mot underkanten av D-regionen må trykkstavene være vertikale. Dette betyr at trykkstavene i underkant av D-regionen må ta en andel av spenningen i underkant, som tilsvarer den tilhørende punktlasten som er påført i overkant. Arealet av spenningsdiagrammet i underkant av D-regionen kan uttrykkes ved:

$$f(x) = 4523,11 \cdot x - \frac{1033,72}{4900} x^2 \quad (9-1)$$

Der x er avstanden fra venstre kant av søylen.

Dersom A_v er arealet på venstre side i den vertikale spenningsfordelingen, må dette være 9667 kN som tilsvarer den venstre punktlasten. Ved å sette dette inn i formel (9-1) kan en løse andregradsuttrykket og finne skillet mellom de to spenningsarealene. Dette viser seg å være 2408 mm fra venstre kant av søylen. Deretter beregnes tyngdepunktet til de to spenningsarealene med vanlig momentlikevekt, og trykkstavene i underkant av D-regionen plasseres i disse. Stavmodellen blir da som fremstilt i *Figur 9-10*.



Figur 9-10: Global stavmodell for vertikale laster

Ved grafisk betraktning av stavmodellen ser den ut til å følge trykkspenningsstrømmene. En ser at de vertikale stavene mot underkant av stavmodellen er skjøvet noe over mot venstre side på grunn av eksentrisitetsmomentet. De skrå stavene ser også ut til å ligge i tyngdepunktet til trykkspenningsstrømmen. Vinkelen mellom trykk- og strekkstaven på høyre side er større enn på venstre side. Dette er naturlig da horisontalkomponenten til de to punktlastene som utgjør strekket T i strekkstaven må være like store. Beregner en disse får en:

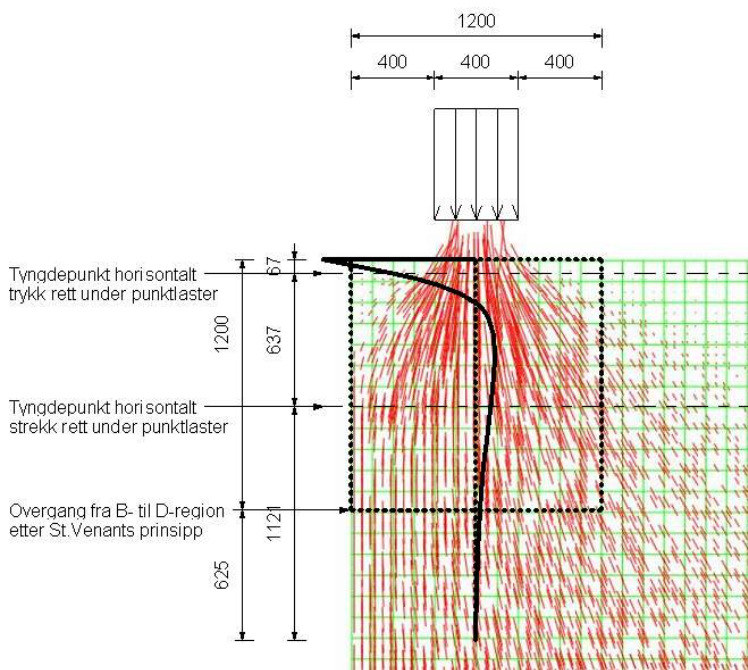
$$T_V = \frac{V_1}{\tan \theta_V} = \frac{9667 \text{ kN}}{\tan 77,80^\circ} = 2290,08 \text{ kN}$$

$$T_H = \frac{V_2}{\tan \theta_H} = \frac{7431 \text{ kN}}{\tan 74,31^\circ} = 2287,36 \text{ kN} \approx T_V$$

Dette utgjør randstrekket i overkant av søylen som kommer fra de vertikale lastene. I tillegg får en randstrekk fra den horisontale lasten som en skal se på senere.

Strekkstaven er plassert 358 mm fra overkant søyle. Armeringen kan likevel plasseres nærmere overkant av søylen i forhold til overdekningen. Dersom konstruksjonen risser vil strekkstaven da ligge lengre opp og vinkelen mellom trykk- og strekkstavene vil bli noe lavere. Randstrekket vil dermed også bli lavere. Det anbefales likevel å beregne randstrekket etter *Figur 9-10*, da dette vil gi et større og dermed mer konservativt randstrekk. I dette tilfellet vil det ikke utgjøre stor forskjell dersom en plasserer strekkstaven i forhold til overdekningen.

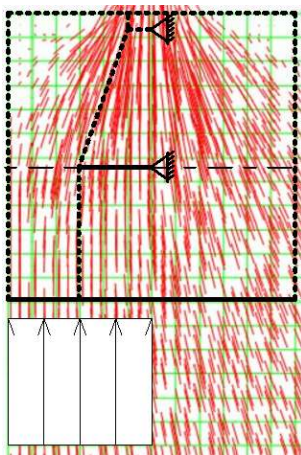
Lokal stavmodell



Figur 9-11: Hovedtrykkspenninger og fordeling av horisontale spenninger i senter av venstre punktlast

Figur 9-11 viser resultatet fra FEM-analysen utført i Abaqus. Studerer en trykkspenningsstrømmen ser en at den er ulik på høyre og venstre side av senterlinjen til punktlasten. På venstre side avbøyes trykkspenningsstrømmen når den nærmer seg venstre kant av søylen. Avbøyningen skjer innenfor området avgrenset av St. Venants prinsipp. På høyre side er det liten eller ingen avbøyning

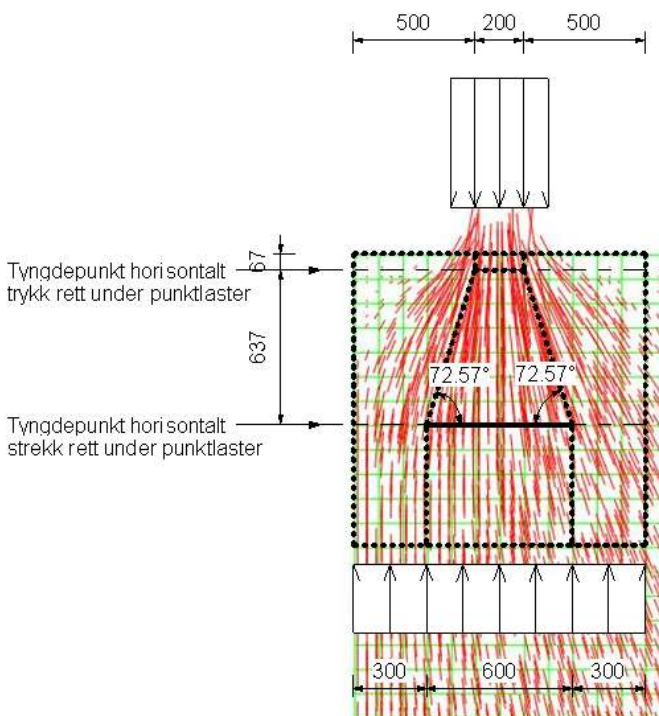
av trykkspenningsstrømmen innenfor dette området. Her fortsetter den inn mot senter av søylen til den møter trykkspenningsstrømmen fra høyre punktlast. Dette betyr at de horisontale spenningene som oppstår rett under punktlasten kommer fra avbøyningen av trykkspenningsstrømmen på venstre side av punktlasten. Dette ser en igjen i at fordelingen av de horisontale spenningene ser ut til å følge avbøyningen av trykkspenningsstrømmen til venstre. En del av spaltetrekket fortsetter under begrensningen fra St. Venants prinsipp, men hoveddelen av spaltetrekket er innenfor. Trykkspenningsstrømmen på høyre side av punktlasten bidrar til de horisontale spenningene i midtsnittet av søylen. For å fremstille spenningssituasjonen slik den faktisk er, kan en tenke seg en stavmodell kun på venstre side i den lokale sonen. En kan da etablere en halv stavmodell slik den er fremstilt i *Figur 9-12*. Strekket og trykket i oppleggene må føres inn i konstruksjonen via betongtrykk og innlagt armering. Det er også lett å tenke seg at den vertikale staven i bunnen av D-regionen motstår et jevnt fordelt trykk over halve bredden på D-regionen. Dette kan en se igjen i de vertikale trykkspenningstensorene i bunnen av D-regionen på venstre side.



Figur 9-12: Halv stavmodell i lokal sone

Det er naturlig å tenke seg en stavmodell som omfatter hele den lokale D-regionen. Stavmodellen slik den fremkommer i *Figur 9-12* speiles derfor om senteraksen til lasten. Den høyre delen av stavmodellen vil ikke være kompatibel med spenningsstrømmen, men den er nødvendig for at systemet skal være i likevekt. En må bare huske at stavmodellen i realiteten representerer spenningsstrømmen på venstre side i D-regionen. Med dette som utgangspunkt plasseres de vertikale stavene i toppen av D-regionen i fjerdedelspunktene til lastbredden, og de vertikale stavene i bunnen av D-regionen i

fjerdedelspunktene til bredden av D-regionen. Den horisontale strekkstaven plasseres i tyngdepunktet til strekkspenningene slik de fremkommer i *Figur 9-11*. Tyngdepunktet til strekket beregnes slik det er beskrevet i metodekapittelet og beregningene er utført i *Vedlegg 6*. Formen på den horisontale trykkspenningsfordelingen mot toppen av D-regionen betraktes som en trekant og trykkstaven plasseres i tredjedelspunktet til høyden av denne.



Figur 9-13: Lokal stavmodell for vertikale laster

I stavmodellen er det ikke like enkelt å se at den skrå trykkstaven på venstre side følger trykkspenningsstrømmen. Ser en nærmere på figuren ser en at spenningene er mer konsentrerte mot senter av den lokale sonen hvor den røde fargen er mer intens. Den delen av spenningsstrømmen som er lengst opp mot det venstre hjørnet er ikke like intens og påvirker formen på stavmodellen i mindre grad. Ettersom stavmodellen er basert på data fra FEM-analysen, deriblant fordeling av horisontale spenninger, er det grunn til å tro at den skrå trykkstaven på venstre side i realiteten følger resultatanten av trykkspenningsstrømmen. Den skrå trykkstaven på høyre side er en speiling av venstre side og er derfor ikke kompatibel med spenningsstrømmen på høyre side

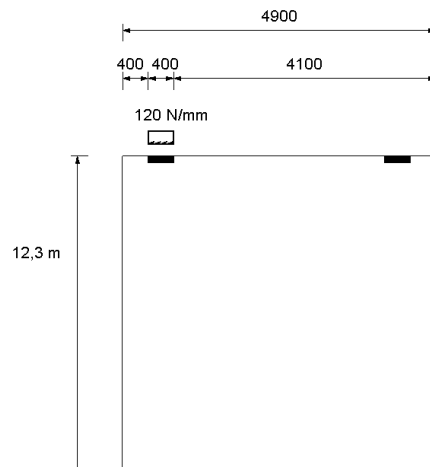
i henhold til tidligere forklaring. Beregner en spaltestrekk med venstre punktlast får en:

$$T = \frac{V1}{2 \cdot \tan \theta} = \frac{9667 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 72,57^\circ} = 1517,51 \text{ kN}$$

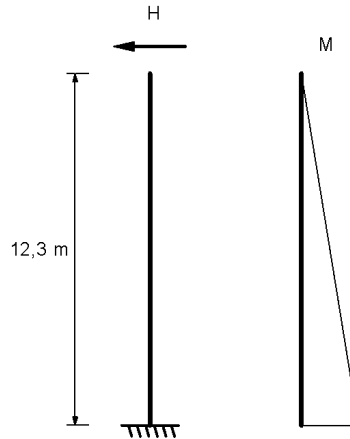
Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet får det samme spaltestrekket verdien:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{b - a}{b} F = \frac{1200 - 400}{4 \cdot 1200} \cdot 9667 \text{ kN} = 1611,17 \text{ kN}$$

Langside med horisontal last



Figur 9-14: Søyletopp oppriss langside med påført horisontallast. H fra ULS 1 er fordelt over lengden 400 mm



Figur 9-15: Statisk system for søyle

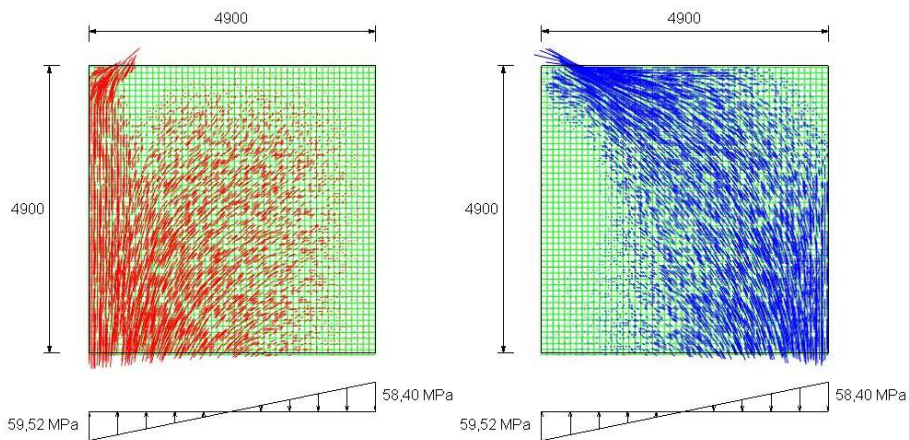
Spenning i overgang fra B- til D-region, 4900mm fra overkant søyle, beregnet med bjelketeori:

$$M_{4,9m} = 48 \text{ kN} \cdot 4,9 \text{ m} = 235,2 \text{ kNm}$$

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \text{ mm} \cdot (4900 \text{ mm})^2 = 400,167 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

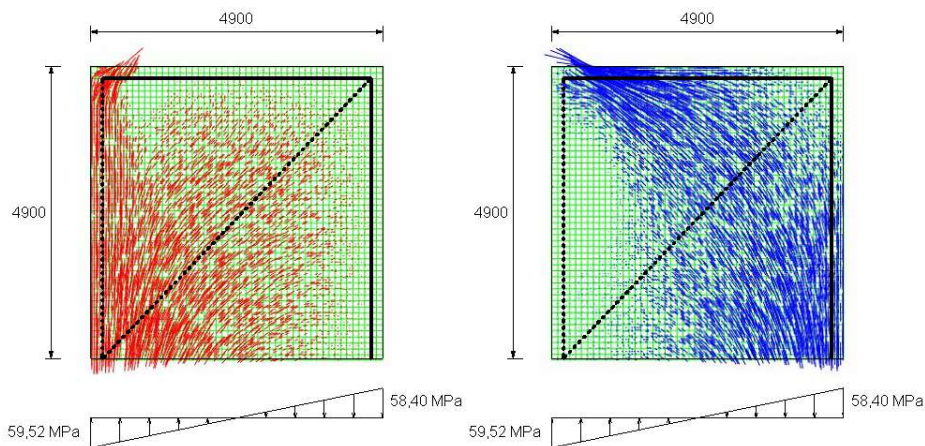
$$\sigma_H = \sigma_V = \sigma_{M,4,9m} = \frac{M}{W} = \frac{235,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{400,167 \cdot 10^4 \text{ mm}^3} = 58,78 \text{ N/mm}^2$$

Dette tilsvarer spenningene i samme snitt fra FEM-analysen ved en høyde på 4900mm fra overkant søyle.



Figur 9-16: (t.v.) Hovedtrykkspenninger; (t.h.) hovedtrekkspenninger

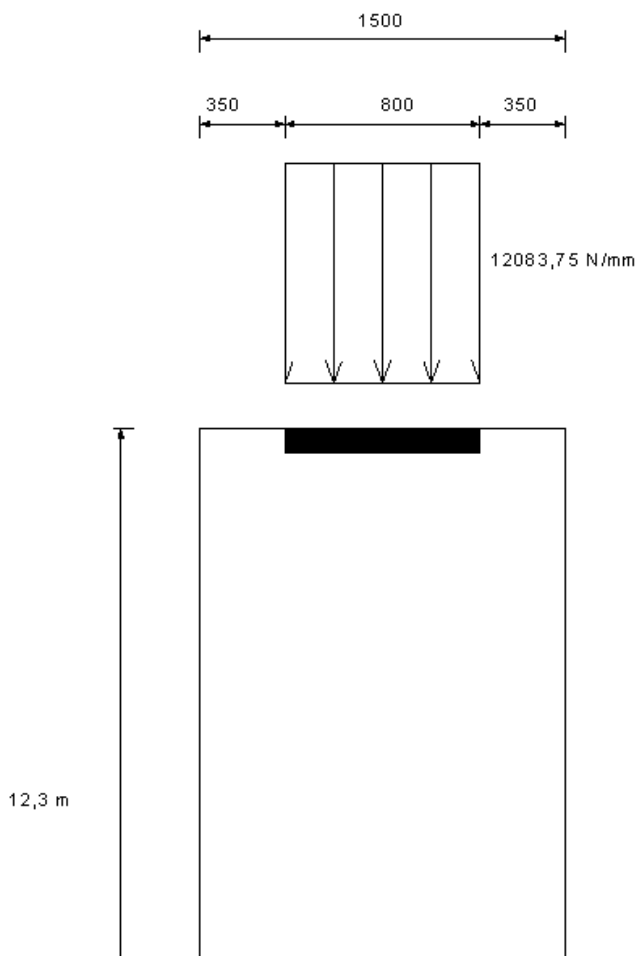
Figur 9-16 viser resultatet fra FEM-analysen utført i Abaqus. Situasjonen ligner på et vanlig skjærtillfelle, der en legger inn armering parallelt med skjærkraften og en får diagonale trykkstaver i betongen mellom skjærarmeringen. Etablerer en stavmodellen med utgangspunkt i dette vil den bli som følgende:



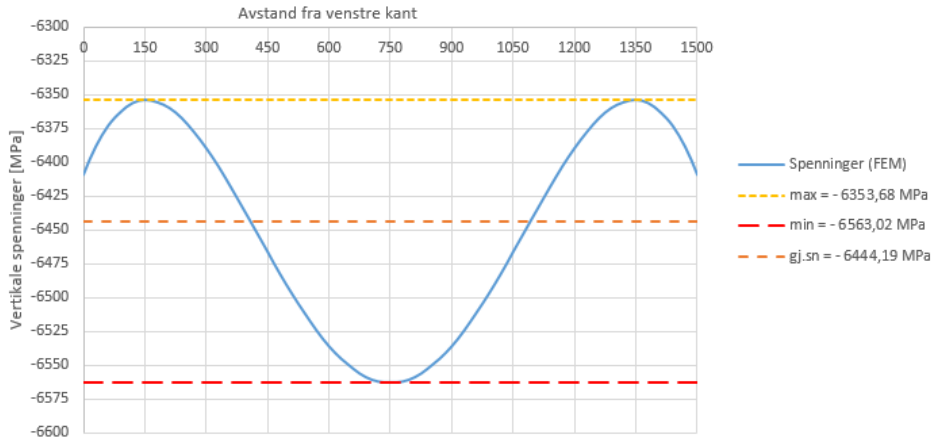
Figur 9-17: Stavmodell for horisontal last

Stavmodellen i Figur 9-17 ligner ikke på noen av de grunnleggende stavmodellene slik de fremkommer fra teorien om D-regioner. Stavene følger spenningsstrømmene kun i grove trekk. Dette ser en ved at strekkstavene ikke ser ut til å sammenfalle med tyngdepunktet til strekkspenningsstrømmene. En ser det også ved at de vertikale stavene (både i trykk og strekk) ikke er plassert i tyngdepunktene til spenningene i underkant av D-regionen. Hva som ligger bak denne stavmodellen kommer fra skjærteori og omtales ikke i denne oppgaven. Det antas at en kan betrakte lasttilfellene hver for seg etter superposisjonsprinsippet og at kapasiteten vil være tilfredsstillende så lenge en dimensjonerer for begge tilfellene. Hovedproblemet med horisontallasten er å først overføre den til strekkstaven (armeringen), og deretter ha kontroll på randstrekket som oppstår langs overkanten på søyletoppen. Når horisontallasten er overført til armeringen på venstre side, overføres den via heft fra armeringen til betongen. Den største spenningen i armeringen vil være rett ved punktlasten, deretter vil den gradvis reduseres mot høyre. Det foreslås likevel å betrakte spenningen i armeringen konstant langs hele overkanten av søylen og summere dette randstrekket med randstrekket fra vertikallastene ved dimensjonering. Ved store horisontallaster bør en være oppmerksom på at rissing nær punktlasten kan være dimensjonerende.

Kortside med vertikal last

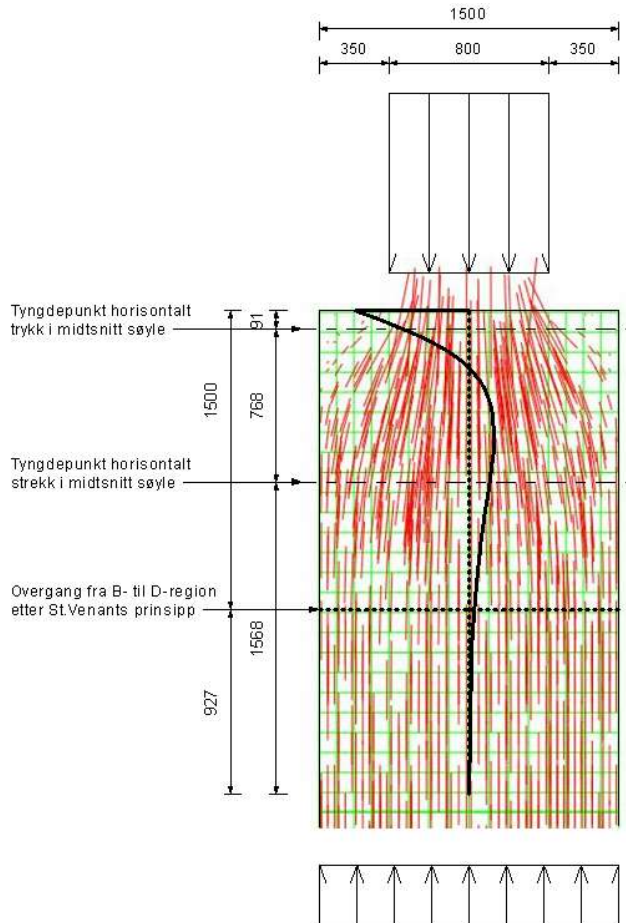


Figur 9-18: Søyletopp oppriss kortside med påført vertikal last. V1 fra ULS 1 er fordelt over lengden 800 mm



Figur 9-19: Vertikale spenninger i et snitt 1500 mm fra overkant søyle fra FEM-analyse (Abaqus).

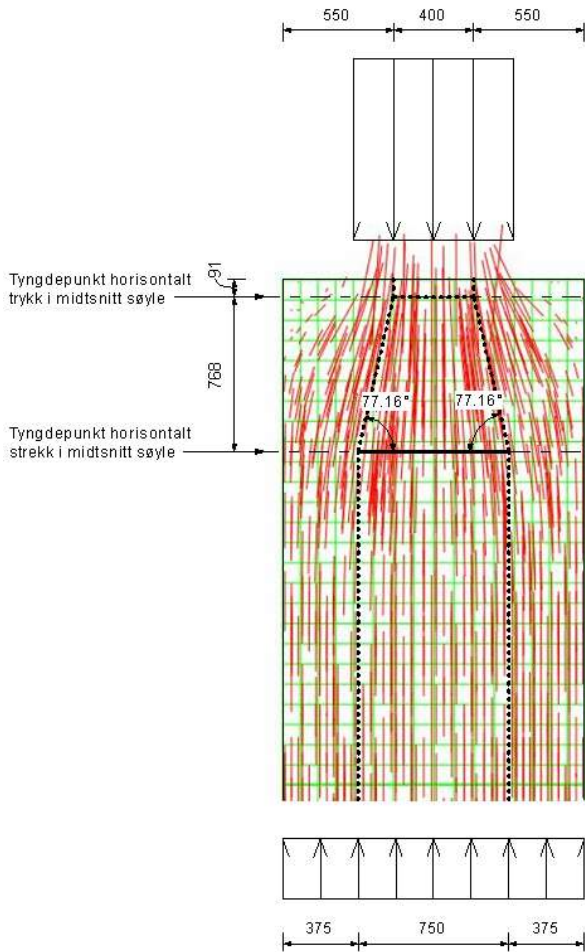
Figur 9-19 viser spenningen i et snitt tatt ved slutten av lokal sone beregnet etter St. Venants prinsipp. Spenningene her er så godt som jevnt fordelt. Avviket er 2% - 3% sammenlignet med gjennomsnittet. Bjelketeori gir løsningen 6444,67 MPa, som er tilnærmet eksakt gjennomsnittet fra FEM-analysen.



Figur 9-20: Hovedtrykkspenninger og fordeling av horisontale spenninger ved senter av punktlast

Figur 9-20 viser resultatet fra FEM-analysen utført i Abaqus. Spenningsstrømmen har en flaskeformet spenningsutbredelse, der utbredelsen er begrenset av søylens tverrsnitt. Som tidligere observert fordeler de horisontale spenningsene seg over en større høyde enn St. Venants prinsipp. Også i dette tilfellet er spenningsene utenfor dette området så små at det ikke vil ha stor innvirkning på resultatet. Stavmodellen etableres på samme måte som tidligere beskrevet. Tyngdepunktet til det horisontale strekket beregnes slik det er beskrevet i metodekapittelet og beregningene er utført i Vedlegg 7. Formen på den horisontale trykkspenningsfordelingen betraktes som en trekant og tyngdepunktet plasseres i tredjedelspunktet. De vertikale stavene i overkant plasseres i fjerdedelspunktene til den påførte lasten, og de vertikale stavene i

underkant plasseres i fjerdedelspunktene til bredden av søylen. Stavmodellen blir som vist i *Figur 9-21*.



Figur 9-21: Stavmodell for kortsida av søyle

Beregner en spaltestrekket etter *Figur 9-21* får en:

$$T = \frac{V1}{2 \cdot \tan \theta} = \frac{9667 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 77,16^\circ} = 1101,69 \text{ kN}$$

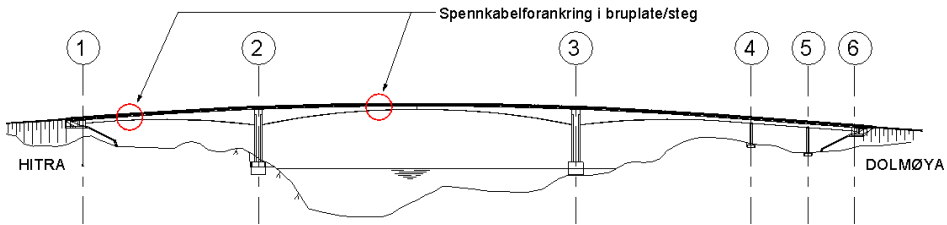
Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet får det samme spaltestrekket verdien:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{b-a}{b} F = \frac{1500-800}{4 \cdot 1500} \cdot 9667 \text{ kN} = 1127,82 \text{ kN}$$

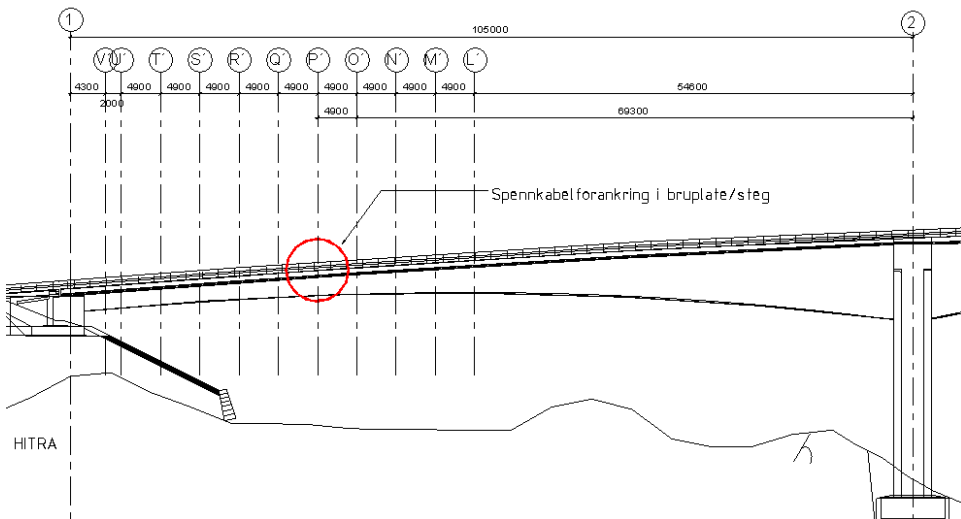
9.2 Spennkabelforankring i bruplate/steg

9.2.1 Presentasjon av D-region

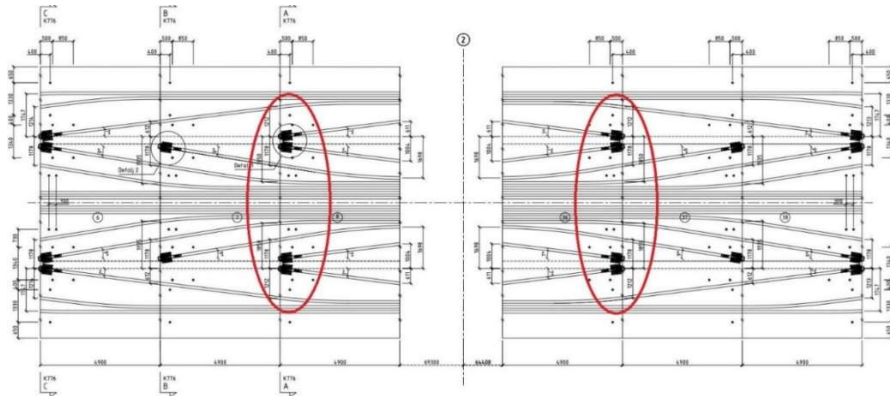
Spennkablene er plassert i bruplaten, det vil si i brotverrsnittets øvre del og skal ta støttemoment i overkant av broen over opplegget i akse 2. Tilsvarende spennkabler er plassert over opplegget i akse 3.



Figur 9-22: Oversikt bro

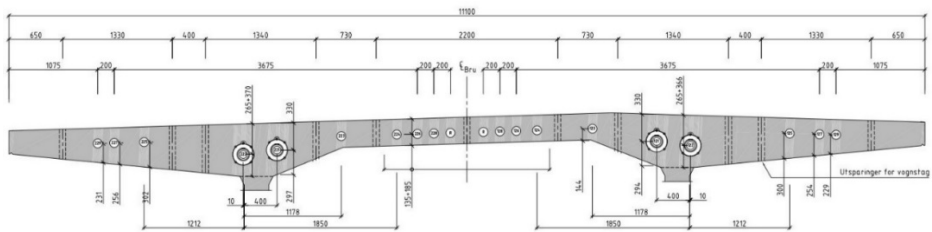


Figur 9-23: Oversikt bro mellom akse 1 og 2



Figur 9-24: Plan broplate (utklipp fra tegninger fra SVV)

Spennkabelforankringene ringet inn i rødt til venstre for akse 2 i Figur 9-24 vil bli vurdert. De har sin motpart ringet inn i rødt til høyre for akse 2.



Figur 9-25: Snitt A (utklipp fra tegninger fra SVV)

9.2.2 FEM-analysen

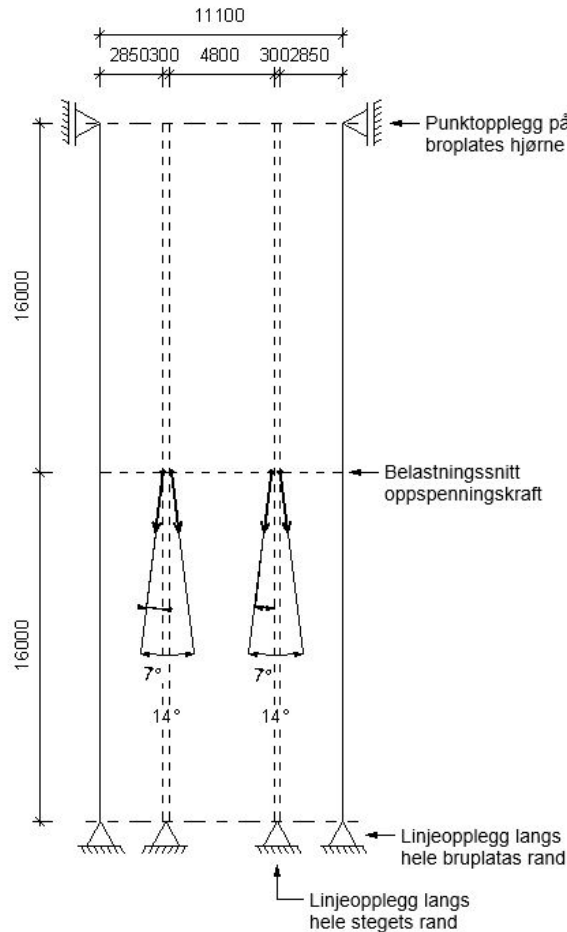
Idealiseringen er gjort i samarbeid med veileder Håvard Johansen fra SVV med utgangspunkt i hva SVV ønsker å undersøke. Følgende skal vurderes:

- Vertikalt spaltstrekk normalt på broplate.
- Horisontalt spaltstrekk parallelt med broplate.
- Horisontalt randstrekk i broplate mellom forankringer.
- Horisontalt randstrekk i broplate utenfor forankringer.
- Vertikalt randstrekk i stegene.
- Strekk fra forankringene inn i broplaten og steg.

For å kunne vurdere de lokale effektene fra spennkabelforankringene, tas kun den raden spennkabler som er ringet inn i rødt i Figur 9-24 med i FEM-analysen.

Dette betyr at effekten de ulike radene med spennkabelforankringer har på hverandre ikke vil bli vurdert.

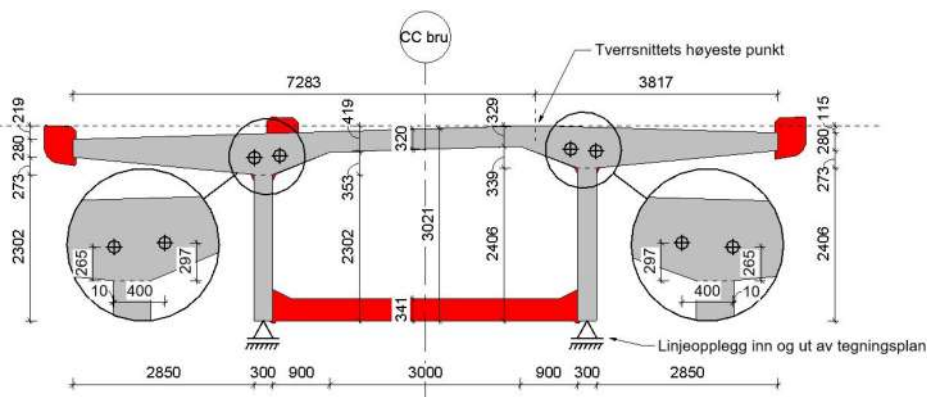
Strekket som oppstår av spennkabelforankringene bakover i broplaten og steget skyldes skivevirkninger. En må derfor modellere en tilstrekkelig lengde av broen foran og bak forankringene for å sikre skivevirkninger. Det benyttes en lengde på omtrent $1,5 \times$ broplatasens bredde $= 1,5 \times 11,1 \text{ m} \approx 16 \text{ m}$ både foran og bak forankringene. *Figur 9-26* viser planutsnitt av beregningsmodellen.



Figur 9-26: Planutsnitt av idealisert beregningsmodell

Linjeopplegget nederst i *Figur 9-26* modelleres langs hele broplatens rand og i hele høyden av stegene. Punktopleggene på broplatens hjørne modelleres i hele broplatens tykkelse.

Broplatens tverrsnitt vil bli modellert så nøyaktig som mulig, da det er grunn til å tro at endringene i tverrsnittet vil påvirke hvordan spenningsstrømmene fordeler seg i broplaten lokalt ved forankringene. Stegenes fulle høyde vil også bli modellert da en ønsker å vurdere spenningsstrømmene i disse. Undergurten vil ikke bli modellert, da det er de lokale virkningene rundt forankringene som skal vurderes og ikke den totale tverrsnittseffekten. Tverrsnittet ligger i broens delakse P', det vil si profil P1544.337. Tverrsnittets geometri er hentet fra mål- og høydetabell på tegninger fra SVV. *Figur 9-27* viser hvilke deler av tverrsnittet som modelleres og hvilke som utelates i analysen. Deler med grå skravur modelleres, mens rød skravur utelates.



Figur 9-27: Idealisert tverrsnitt til FEM-analyse

Geometrien på beregningsmodellen og valg av opplegg vil ikke gi et godt resultat av de globale tverrsnittseffektene for broen. Dette fordi verken hele tverrsnittet eller hele bro lengden modelleres. Tverrsnittet i beregningsmodellen er valgt kun for å kunne studere de lokale effektene rundt forankringene. Oppleggene er valgt slik at de ikke hindrer de lokale effektene i å oppstå.

FEM-analysen utføres for å studere hvordan trykk- og strekkspenningene fordeler seg i broplaten og steget ved belastning av oppspenningskraften. Det en trenger fra analysen er fordelingen og retningen på spenningene, spenningsverdiene i et hvert punkt er derimot ikke av interesse. For oppspenningskraften benyttes oppgitt verdi på 4207 kN.

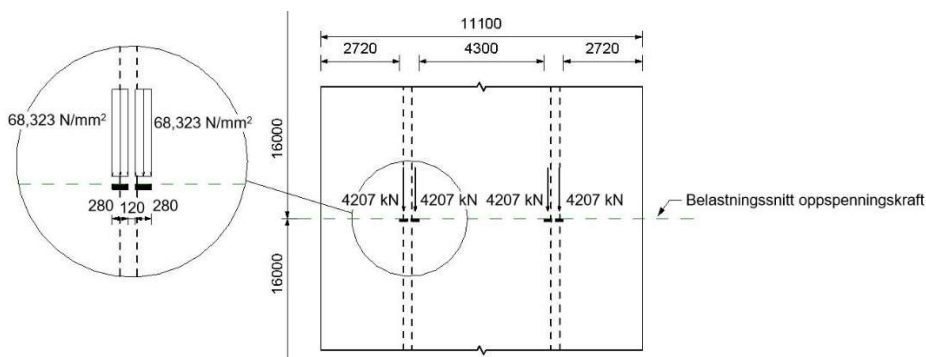
Broplaten modelleres i tre dimensjoner av volumelementer. Lengden av modellen er 1,5 ganger broplatens bredde både foran og bak forankringene. Optimalt sett, for å få konstruksjonen til å oppføre seg ideelt, burde broen modelleres i hele sin lengde og med fullstendig tverrsnitt. Det er flere årsaker til at modellen er begrenset. Modellens elementstørrelse har en klar sammenheng med beregningstid som en ønsker skal være kortes mulig. Navigering og innstillinger i programmet blir også tregere ved bruk av en større modell. Det er i tillegg, som tidligere nevnt spenningsfordelingen i en begrenset avstand etter belastningsflaten som er av interesse ved denne analysen.

Oppspenningskraften ble først påført med en vinkel på 7° i forhold til senterlinjen til belastningsflaten. Etter forsøk i Abaqus, hvor kraften med vinkel ble dekomponert i akseystemets retninger og påført belastningsflaten, ser det ut som om dette ikke har en stor innvirkning på trykk- og strekkspenningenes utbredelse. Det er av den grunn valgt å modellere broplaten belastet med vinkelrett oppspenningskraft. En har da bedre kontroll på hvilke effekter en ser i analysen. Oppspenningen fordeles med et uniformt trykk over en sirkulær belastningsflate med en diameter på 280 mm, som tilsvarer en belastningsflate på 61575 mm^2 .

9.2.3 Etablering av stavmodell

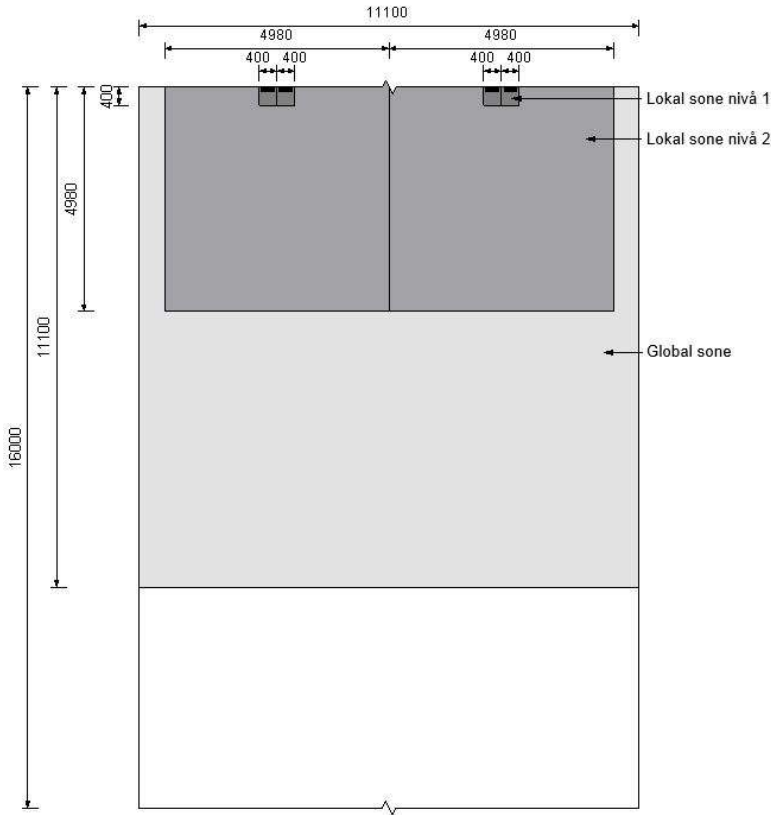
Horisontalt plan broplate

Figur 9-28 viser et planutsnitt av broplaten påført oppspenningskreftene. Spennkabelforankringene er plassert i broplaten rett over hvert steg. Belastningssnittet er illustrert ved den horisontale stiplede linjen. I de følgende figurene vil kraftpilene utelukkes for å gjøre modellen mer oversiktlig. Den stiplede linjen vil alltid være synlig, og angir at oppspenningskraften virker der.



Figur 9-28: Plan broplate med påførte oppspenningskrefter

Figur 9-29 viser global og lokale soner for broplaten ved oppspenningsbelastningene. Sonenes geometri bygger på St. Venants prinsipp. Soneinndelingen er symmetrisk om belastningssnittet.



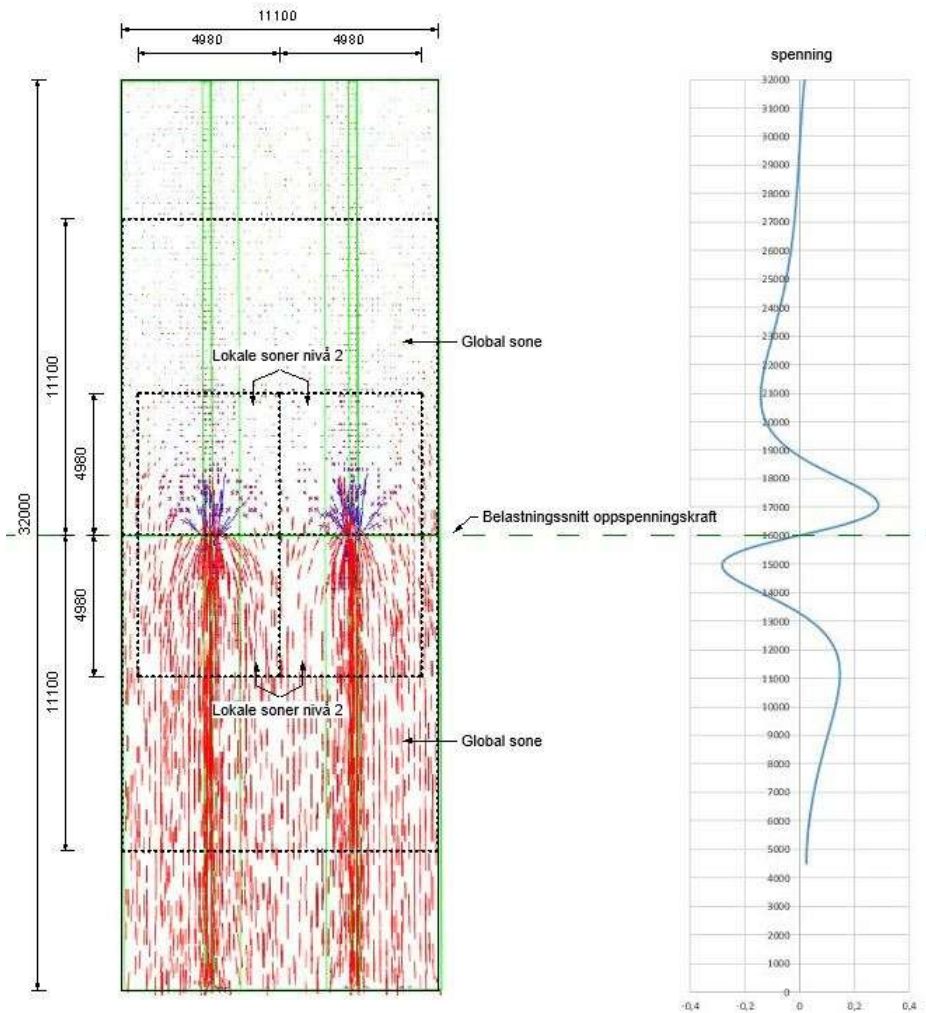
Figur 9-29: Global og lokale soner for broplaten

Global stavmodell

Figur 9-30 viser resultatet fra FEM-analysen utført i Abaqus. Den globale sonen og lokale soner nivå 2 er vist med stiplede linjer. Grafen til høyre viser horisontalspenningsfordelingen langs en senterlinje i broplaten. Av grafen fremkommer et strekk bak belastningsflaten og et trykk foran. Formen på fordelingen av spenningene er tilnærmet symmetriske om belastningssnittet, bare med motsatt fortegn.

Det er verdt å merke seg en detalj ved spenningstensorene fra resultatene. Grunnet 3D modellering vil en få med tensorer i dybden som fører til en høyere

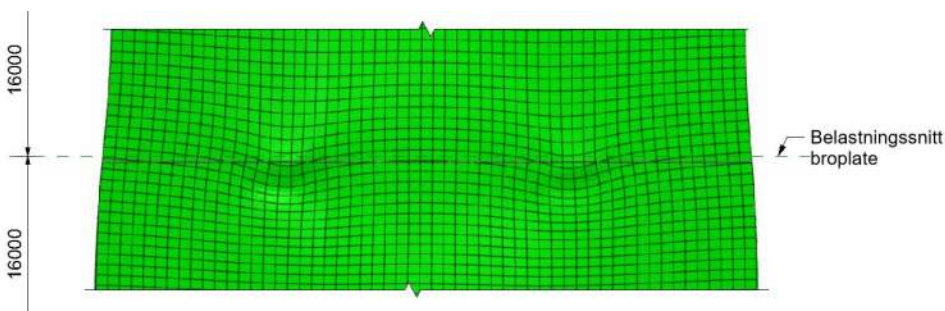
konsentrasjon av tensorer i plan ved stegene, da tverrsnittet er tykkere der. Den tydelige konsentrasjonen av tensorer over stegene er derfor ikke interessant. Tensorenes fordeling og retning er derimot av interesse.



Figur 9-30: (t.v.) hovedspenninger og soneinndeling; (t.h.) horisontalspenningsfordeling langs en senterlinje i broplaten

Ut ifra utformingen på hovedspenningene, før de horisontale spenningene ble tatt ut, var det forventet at det foran belastningssnittet skulle oppstå et strekk med et påfølgende trykk. Resultatene fra FEM-analysen viste seg å være motsatt. Av den horisontale spenningsfordelingen i Figur 9-30 ser en at det vil oppstå horisontale trykkspenninger med påfølgende strekkspenninger. Dersom en

studerer deformasjonen av broplaten i dens lengderetning i *Figur 9-31*, er formen på den horisontale spenningsfordelingen likevel ikke så utenkelig. Da utslaget fra spenningsstrømmen ser ut til å være liten, kan det se ut som om horisontalspenningfordelingen i *Figur 9-30* i hovedsak kommer av broplatenes bøyedeformasjon. Siden de to parene med oppspenningskrefter er plassert med et relativt stort mellomrom, vil området i broplaten mellom dem ligne en avgrenset bjelke utsatt for bøyning. Av denne «bjelkebøyningen» genereres de horisontale trykkspenningene foran belastningssnittet og de horisontale strekkspenningene bak.



Figur 9-31: Deformasjon ved belastningssnitt broplate

Dette kan bety at en stavmodell for dette tilfellet først og fremst ville blitt etablert med utgangspunkt i bøyningseffekter.

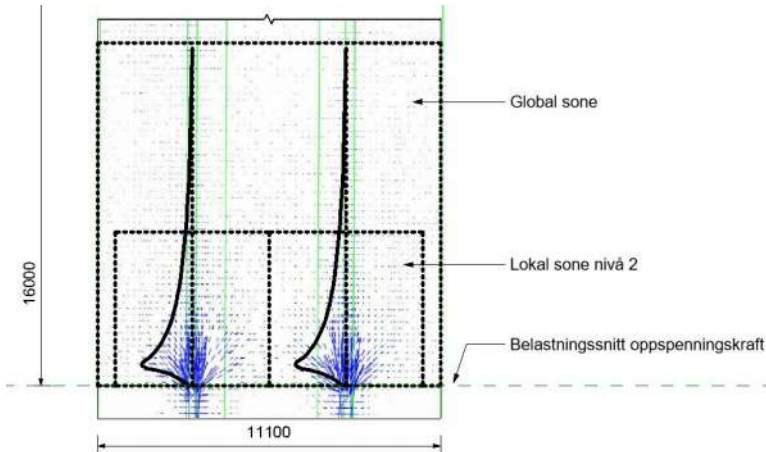
De horisontale strekkspenningene fra FEM-analysen i senter av broplaten har maksimal verdi på 0,14 MPa. Da betongens karakteristiske strekkfasthet for B45 er 2,7 MPa, er den globale stavmodellen valgt å ikke etableres.

Lokal nivå 2 stavmodell

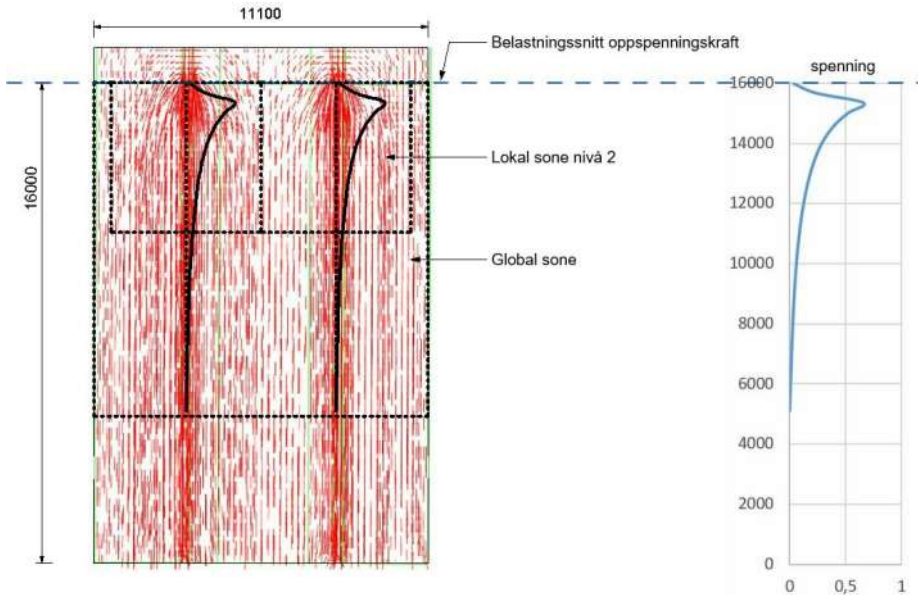
Figur 9-32 og *Figur 9-33* viser hovedtrekk- og hovedtrykkspenninger, samt fordelingen av horisontale spenninger i senter av en oppspenningskraft. Horisontalspenningfordelingen er lagt over for å illustrere dens utbredelse i lengderetningen. Formen på fordelingen av spenningene er tilnærmet symmetriske om belastningssnittet, bare med motsatt fortegn. I de videre beregningene antas full symmetri for å oppnå likevekt.

Formen på horisontalspenningfordelingen i senter av en oppspenningskraft er benyttet ved etablering av stavmodell for lokal sone nivå 2, da denne

fordelingen vil gi et høyere dimensjonerende spaltestrekk i lokal sone nivå 2. Årsaken til dette kommenteres nærmere i *Lokal nivå 1 stavmodell*. Horisontalspenningsfordelingen vist i *Figur 9-33* er utgangspunktet for etablering av stavmodellen.



Figur 9-32: Hovedtrekkspenninger i broplaten med tilhørende horisontalspenningsfordeling

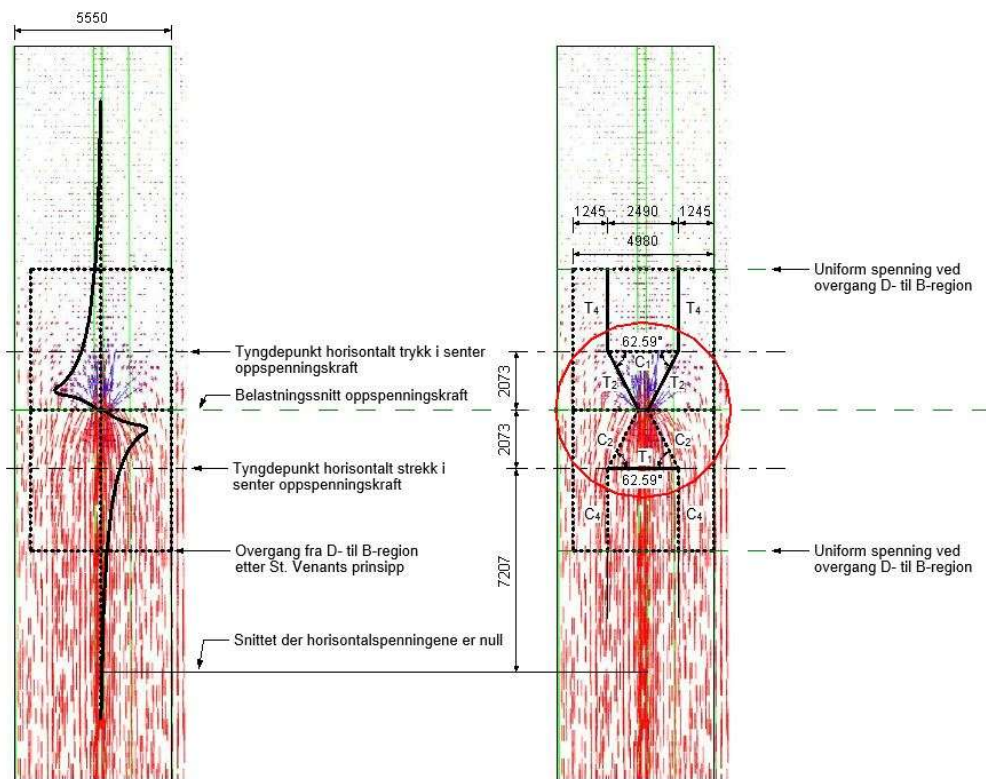


Figur 9-33: Hovedtrykkspenninger i broplaten med horisontalspenningsfordelingen i senter av en oppspenningskraft

Fordelingen av de horisontale spenningene har noen ulikheter til fordelingen slik den fremkommer fra en flaskeformet trykkspenningsutbredelse beskrevet i

teorien. I følge teorien skal det være et horisontalt trykk rett ved belastningen. Fra FEM-analysene ser en at de horisontale spenningene ved belastningssnittet er tilnærmet lik null. Dette er illustrert ved horisontalspenningsfordelingen i *Figur 9-32* og *Figur 9-33*.

Som det fremkommer av *Figur 9-32* og *Figur 9-33* vil de horisontale spenningene fordele seg over en større høyde enn beskrevet av St. Venants prinsipp. De horisontale spenningene utenfor de respektive sonene er imidlertid relativt små og vil ikke ha en betydelig påvirkning ved plasseringen av de horisontale stavene.



Figur 9-34: Hovedspenninger, fordeling av horisontale spenninger og stavmodell for lokal sone nivå 2

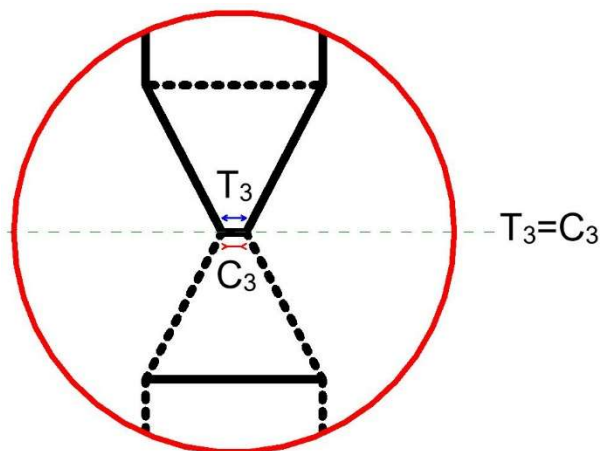
Figur 9-34 viser resultatet fra FEM-analysen for halve broplatens bredde. For stavmodellen i lokal sone nivå 2 vil de to oppspenningskreftene ses på som én oppspenningskraft som fordeles over en samlet lastflate med diameter lik 680 mm. Studerer en trykkspenningsstrømmen i *Figur 9-33* ser en at utbredelsen begrenses av avstanden til det andre par med oppspenningskrefter. Mot

venstre sidekant av broplaten avbøyes dermed spenningstrajektoriene i en avstand fra kanten. Avbøyningen av spenningsstrømmen skjer symmetrisk i forhold til lastens senterlinje og foregår innenfor området begrenset av St. Venants prinsipp. De horisontale strekkspenningene som oppstår foran lastflaten oppstår på grunn av trykkspenningens avbøyning. Ved å studere horisontalspenningsfordelingen kan en se at maksimal verdi er der avbøyningen er størst.

Stavmodellen for sonen blir noe ulikt det en har sett før og det etableres en lokal sone nivå 2 både foran og bak belastningsflaten. Dette fordi oppspenningskraften vil generere spenninger både fremover og bakover. For å håndtere disse spenningene etableres en stavmodell som kombinerer kraftens respons både foran og bak belastningssnittet.

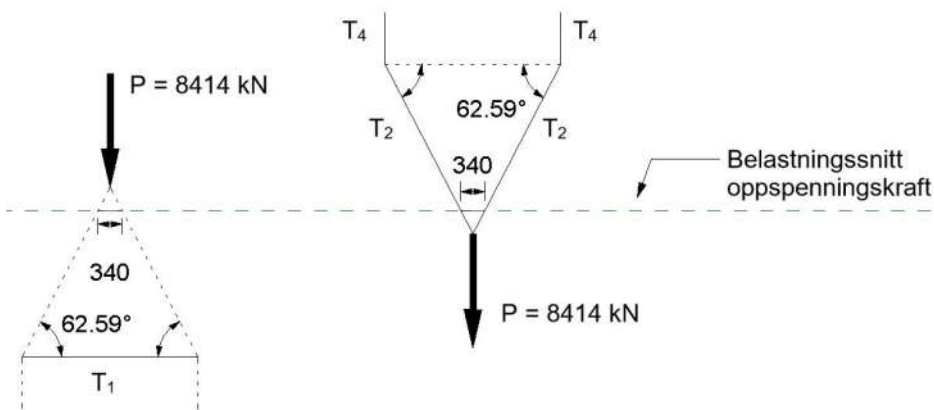
Med dette som utgangspunkt plasseres de vertikale stavene i fjerdedelspunktene til bredden av sonen, ved sonens slutt, både foran og bak belastningsflaten. Den horisontale strekkstaven plasseres i tyngdepunktet til strekkspenningene og den horisontale trykkstaven i tyngdepunktet til trykkspenningene. Tyngdepunktet til strekket beregnes slik det er beskrevet i kapittel 7 og beregningene er utført i *Vedlegg 8*. Den samme beregningen er benyttet for tyngdepunktet til trykket, da disse er antatt å ha identisk fordeling.

Den røde sirkelen på *Figur 9-34* er forstørret i *Figur 9-35*. Dette for å beskrive hvordan stavmodellen oppfører seg ved belastningsflaten. Som sagt er resultanten av strekket og trykket antatt lik. Dette resulterer i at strekk- og trykkraften som vil oppstå ved belastningsflaten er like store, men motsatt rettet. Dette er illustrert i *Figur 9-35* og vil føre til null horisontale spenninger ved belastningsflaten. De skrå stavene møter belastningsflaten i fjerdedelpunktene til den samlede lastflaten til de to oppspenningskreftene. På grunnlag av dette plasseres de skrå trykk- og strekkstavene.



Figur 9-35: Detalj stavmodell lokal sone nivå 2

I Figur 9-34 kan en se at de skrå stave følger spenningsstrømmene i modellen og en kan konkludere med at stavmodellen er kompatibel med de opp tredende spenningsene.



Figur 9-36: Beregningsmodell for stavmodell lokal sone nivå 2

Spaltestrekket som oppstår foran belastningsflaten og strekkraften som oppstår bak belastningsflaten regnes ut med utgangspunkt i Figur 9-36. Det velges konservativt å sette hele oppspenningskraften som både strekk og trykk, da fordelingen er uklar.

Spaltestrekket som oppstår foran belastningsflaten blir som følger:

$$T_1 = \frac{P}{2 \cdot \tan \theta} = \frac{4207 \text{ kN} + 4207 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 62,59^\circ} = 2181,63 \text{ kN}$$

Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet beregner en tilsvarende spaltestrekk til:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{b-a}{b} F = \frac{4980 - 680}{4 \cdot 4980} \cdot 8414 \text{ kN} = 1816,28 \text{ kN}$$

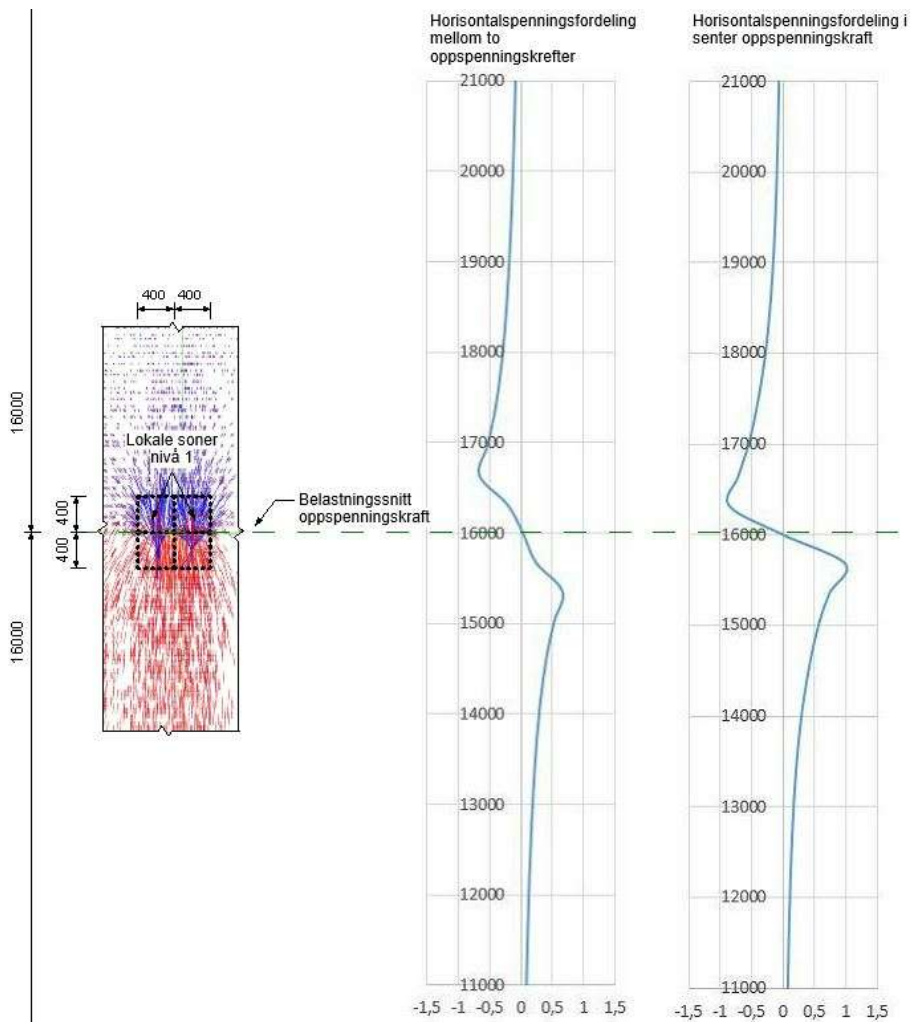
Strekket som oppstår i broplaten på skrå bak belastningsflaten blir som følger:

$$T_2 = \frac{P}{2 \cdot \sin \theta} = \frac{4207 \text{ kN} + 4207 \text{ kN}}{2 \cdot \sin 62,59^\circ} = 4739,03 \text{ kN}$$

$$T_4 = 4207 \text{ kN}$$

Strekket må tas opp av tilstrekkelig armering som forankres i og bakover i broplaten.

Lokal nivå 1 stavmodell

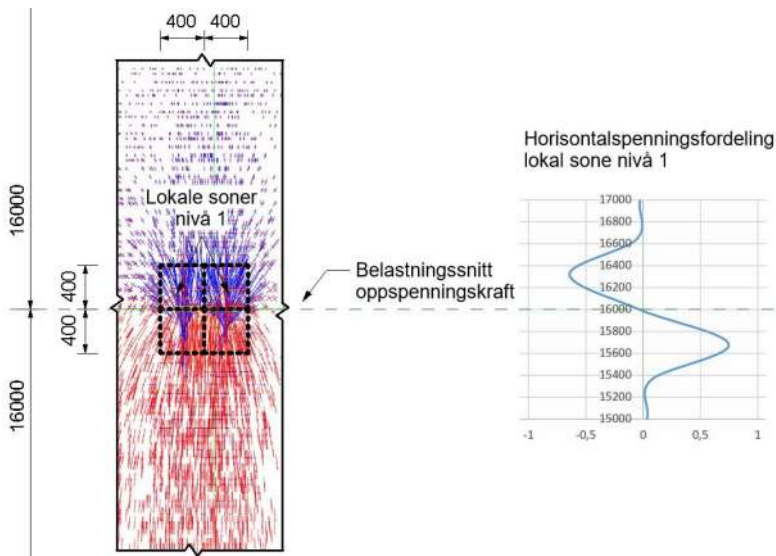


Figur 9-37: (t.v.) hovedspenninger og soneinndeling; (t.h.) horisontalspenningfordeling mellom oppspenningskrefter og i senter oppspenningskraft

Figur 9-37 viser resultatet fra FEM-analysen utført i Abaqus. De lokale sonene (lokal sone nivå 1) er illustrert med stiplede linjer. Grafene til høyre viser horisontalspenningfordelingen mellom oppspenningskrefter og i senter oppspenningskraft i broens lengderetning. Begge fordelingene viser til et spaltestrekk som vil oppstå foran belastningsflaten og et trykk bak. De to fordelingene er relativt like i både form og størrelse. Fordelingen i senter av en oppspenningskraft viser at tyngdepunktet til strekkspenningene vil ligge

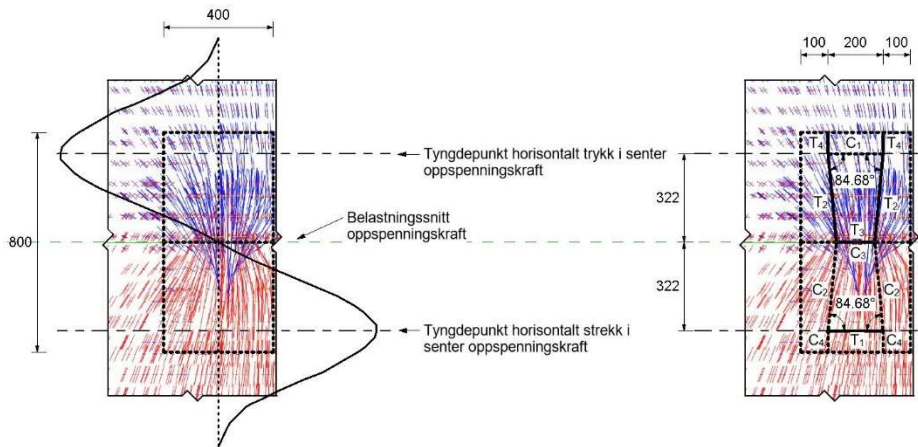
nærmere belastningssnittet enn for fordelingen midt mellom de to oppspenningskreftene. Årsaken til forskjellen er at det vil oppstå et spaltetrekk innenfor lokal sone nivå 1. For å kunne bestemme tyngdepunktet til spaltetrekket som oppstår i lokal sone nivå 1, må andelen av fordelingen som hører til lokal sone nivå 1 separeres fra resten.

For å fremstille fordelingen i lokal sone nivå 1 benyttes differansen mellom de to fordelingene i *Figur 9-37*. Dette gir spenningsfordelingen innenfor lokal sone nivå 1 foran og bak belastningssnittet, som vist i *Figur 9-38*.



Figur 9-38: (t.v.) hovedspenninger og soneinndeling; (t.h.) horisontalspenningsfordeling lokal sone nivå 1

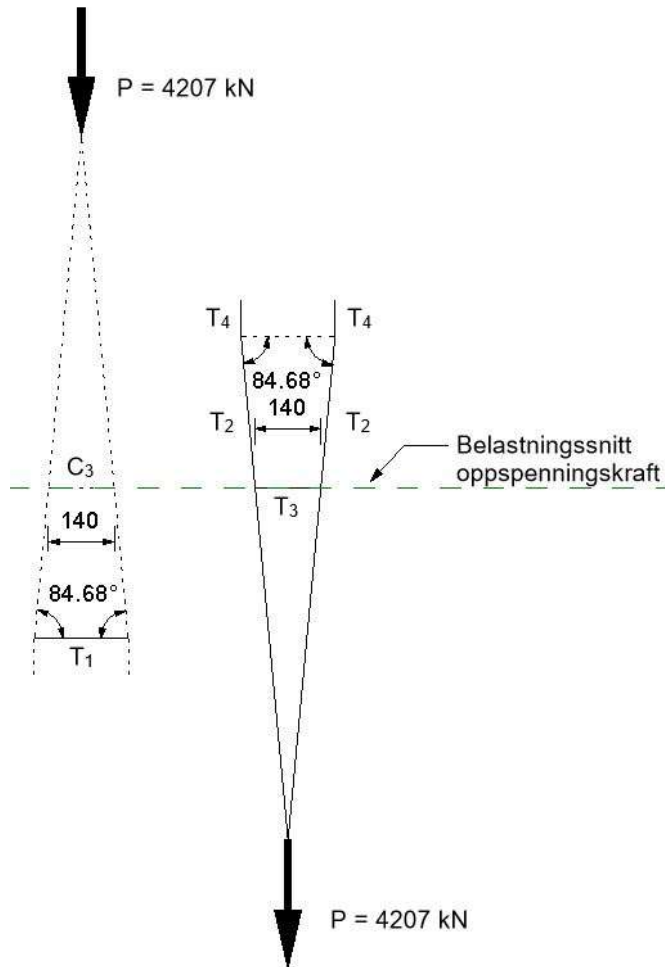
Studerer en trykkspenningsstrømmen ser en at utbredelsen begrenses av avstanden til den andre oppspenningskraften. Det er denne begrensningen og avbøyningen som følger, som skaper spaltetrekket i lokal sone nivå 1. Tensorene som brer seg utenfor lokal sone nivå 1 tilhører spaltetrekket for lokal sone nivå 2.



Figur 9-39: Hovedspenninger, horisontalspenningsfordeling og stavmodell for lokal sone nivå 1

Figur 9-39 viser resultatet fra FEM-analysen for en av oppspenningskreftene. Stavmodellen for sonen baseres på samme prinsipp som for lokal sone nivå 2.

Med dette som utgangspunkt plasseres de vertikale stavene i fjerdedelspunktene til bredden av sonen, ved sonens slutt, både foran og bak belastningsflaten. Den horisontale strekkstaven plasseres i tyngdepunktet til strekkspenningene og den horisontale trykkstaven i tyngdepunktet til trykkspenningene. Fordelingen kan foran og bak belastningssnittet synes å ha en parabelformet fordeling. Av den grunn er tyngdepunktet til både strekket og trykket plassert der krumningen til parabelen er størst.



Figur 9-40: Beregningsmodell for stavmodell lokal sone nivå 1

Spaltestrekket som oppstår foran belastningsflaten og strekkraften som oppstår bak belastningsflaten regnes ut med utgangspunkt i Figur 9-40.

Spaltestrekket som oppstår foran belastningsflaten blir som følger:

$$T_1 = \frac{P}{2 \cdot \tan \theta} = \frac{4207 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 84,68^\circ} = 195,88 \text{ kN}$$

Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet beregner en tilsvarende spaltestrekk til:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{b - a}{b} F = \frac{400 - 280}{4 \cdot 400} \cdot 4207 \text{ kN} = 315,53 \text{ kN}$$

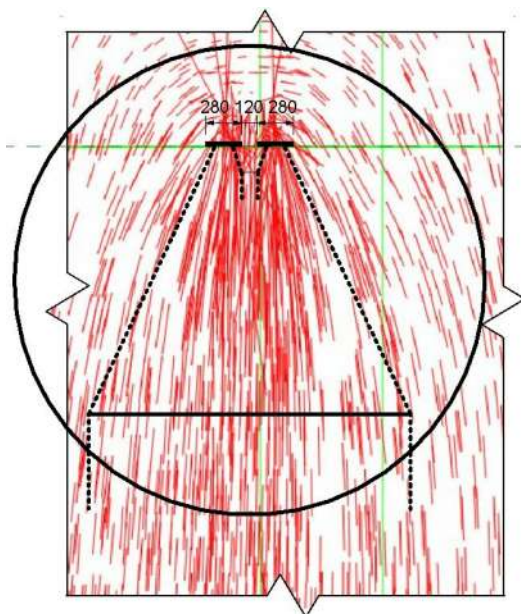
Strekket som oppstår i broplaten på skrå bak belastningsflaten blir som følger:

$$T_2 = \frac{P}{2 \cdot \sin \theta} = \frac{4207 \text{ kN}}{2 \cdot \sin 84,68^\circ} = 2112,60 \text{ kN}$$

$$T_4 = 2103,5 \text{ kN}$$

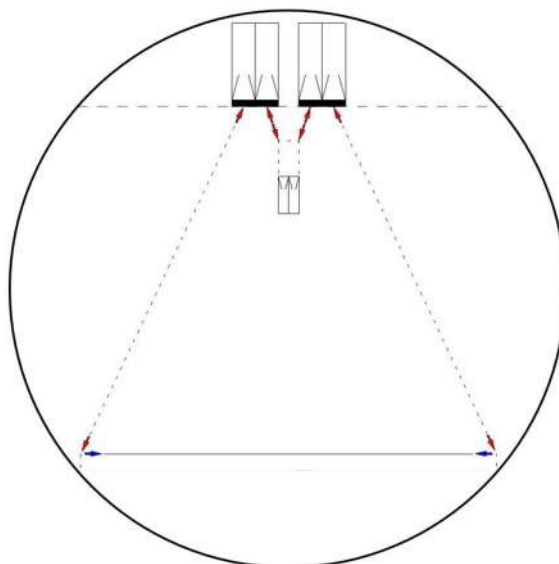
Strekket må tas opp av tilstrekkelig armering som forankres i og bakover i broplaten.

Som det fremkommer av *Figur 9-39* ser ikke stavmodellen ut til å følge de lineær elastiske trykkspenningsstrømmene på tilfredsstillende vis. Det kan se ut som at vinkelen mellom trykk- og strekkstavene skulle vært mindre. Dersom dette hadde vært tilfelle ville også spaltestrekket i lokal sone nivå 1 blitt større. Spaltestrekket i lokal sone nivå 1 skulle etter forventningene også vært nærmere belastningsflaten innenfor sonen. Studerer en spenningsstrømmene nærmere, ser en imidlertid at spaltestrekket ser ut til å komme av trykkspenningsstrømmen som brer seg utenfor sonens grenser. Avstanden mellom oppspenningskreftene er så liten at effekten av dem blir som om de er en samlet punktlast. Det genereres horisontale trykkspenninger der trykkspenningsstrømmene fra de to oppspenningskreftene møter hverandre. De horisontale trykkspenningene fordeles ut til hver side og gir et tillegg til spaltestrekk i lokal sone nivå 2. Dette ser en igjen i *Figur 9-37* der de horisontale strekkspenningene midt mellom oppspenningskreftene er mindre enn i senter av hver oppspenningskraft. Spenningene overføres til lokal sone nivå 2 etter prinsippet skissert i *Figur 9-41* og *Figur 9-42*. Denne reduksjonen og overføringen av spenninger fra midt mellom oppspenningskreftene, er årsaken til at fordelingen ved senter oppspenningskraft er benyttet for lokal sone nivå 2. Dersom en legger inn spaltestrekkarmering både fra *Figur 9-33* og *Figur 9-39*, har en med andre ord dimensjonert for spaltestrekket i *Figur 9-39* to ganger. Det en må være oppmerksom på er at effekten fra *Figur 9-39* gir høyere spaltestrekk nært opp mot belastningsflaten i lokal sone nivå 2 og at dette må tas hensyn til i den innlagte armeringen.



Figur 9-41: Prinsippskisse for overføring av spenninger

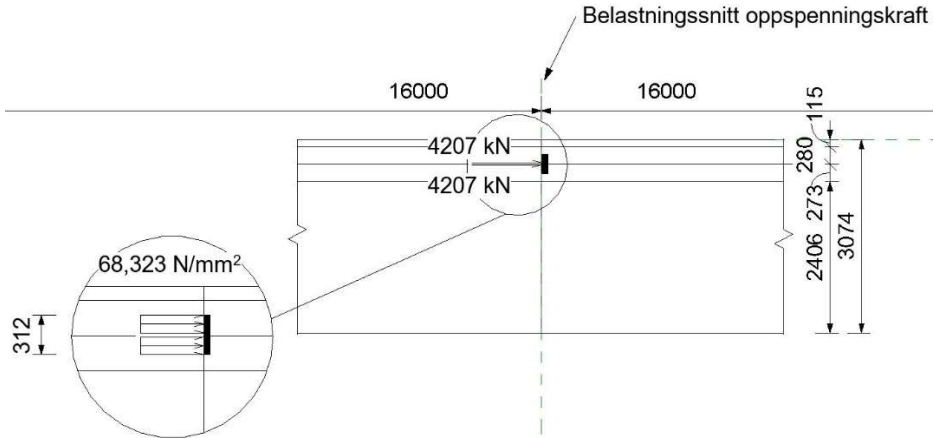
Sirkelen i Figur 9-41 er fremstilt i Figur 9-42 og illustrerer hvordan spenningene overføres.



Figur 9-42: Prinsippskisse for overføring av spenninger

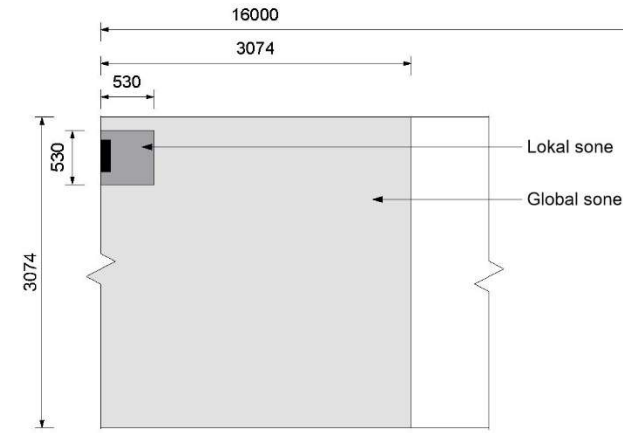
Vertikalt plan broplate/steg

Figur 9-43 viser et oppriss av broplaten og steg påført oppspenningskraft. Belastningssnittet er illustrert ved den vertikale stiplede linjen. I de følgende figurene vil kraftpilene utelukkes for å gjøre modellen mer oversiktlig. Den stiplede linjen vil alltid være synlig, og angir at oppspenningskreftene virker der.



Figur 9-43: Oppriss broplate/steg med påførte oppspenningskrefter

Figur 9-44 viser global og lokal sone for broplate/steg ved oppspenningsbelastning. Sonenes geometri bygger på St. Venants prinsipp og er symmetrisk om belastningssnittet.

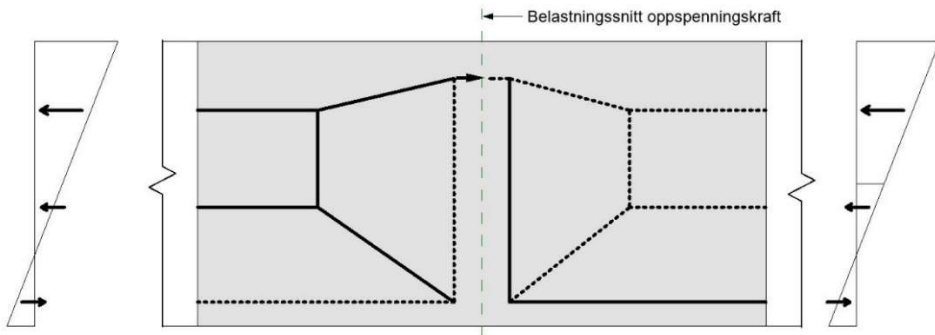


Figur 9-44: Global og lokal sone for broplate/steg i oppriss

Global stavmodell

Modellen etablert for broplaten er ikke en god modell for etablering av den globale stavmodellen. Årsaken til dette er at ved den globale sonens slutt (overgangen fra D- til B-region) har tverrsnittet en uniform spenningsfordeling. Dette fordi brosegmentet er modellert med vertikal fastholding langs stegenes lengde, som resulterer i bøyingsstive steg. Trykkspenningsstrømmen som brer seg ut over hele tverrsnittshøyden har derfor en krappere S-kurvet utbredelse enn realiteten, som resulterer i større vertikale strekkspenninger.

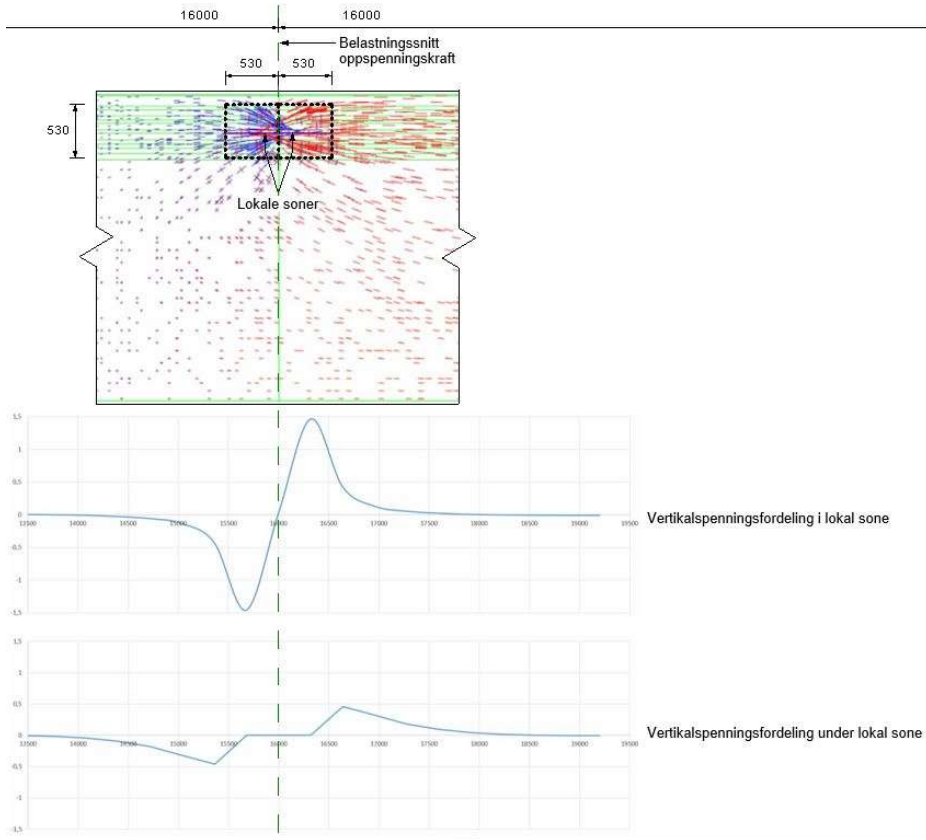
For å kunne etablere den globale stavmodellen ved hjelp av en lineær elastisk analyse, ville en modell av hele broens fysiske størrelse vært nødvendig. Broen vil da bli momentbelastet som følge av oppspenningskraften og resultere i et tverrsnitt utsatt for bøyning. De horisontale stavene ville blitt plassert etter tyngdepunktene til tverrsnittsspenningene og de vertikale stavene etter ett horisontalt snitt ved midt tverrsnittshøyde. Med dette som utgangspunkt ville stavmodellen for global sone blitt etablert etter prinsippet skissert i *Figur 9-45*.



Figur 9-45: Stavmodell global sone

Slik stavmodellen fremkommer vil det eventuelle randstrekk og randtrykket som oppstår ved belastningssnittet oppheve hverandre. Dette ville muligens resultert i en enklere stavmodell.

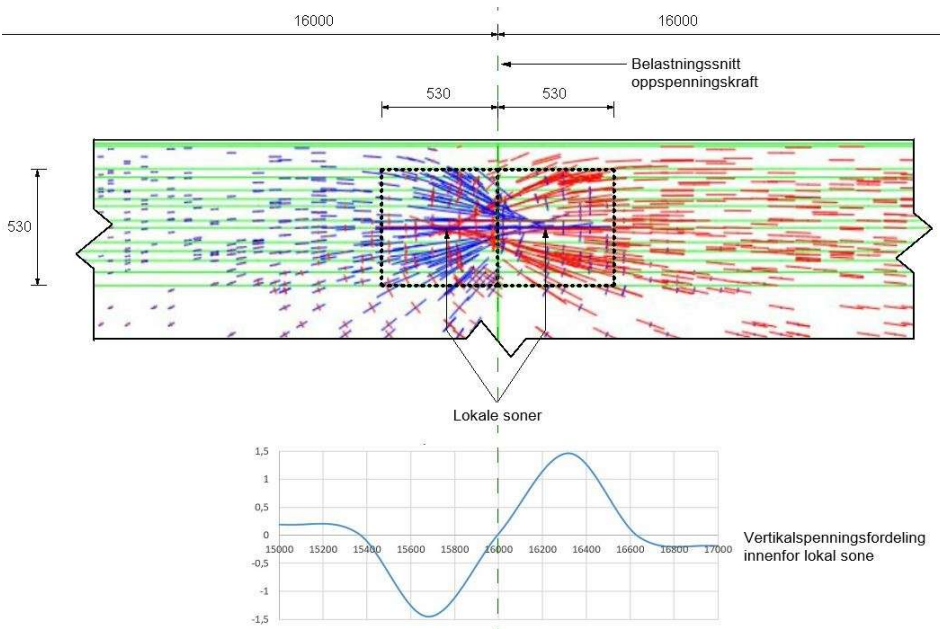
Lokal stavmodell



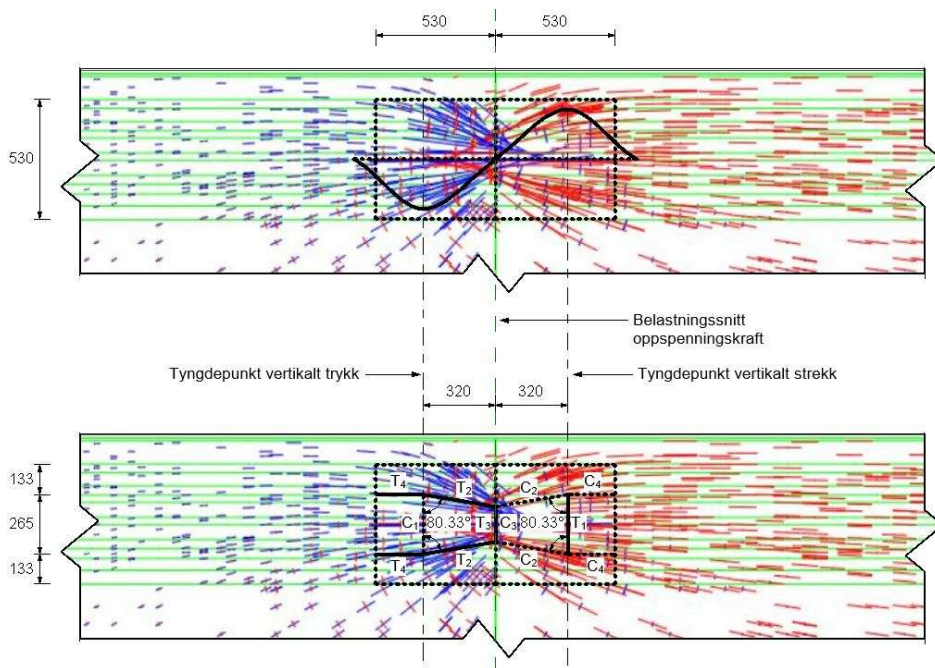
Figur 9-46: Hovedspenninger, soneinndeling og vertikalspenningsfordeling i lokal sone og rett under lokal sone

Figur 9-46 viser resultatet fra FEM-analysen utført i Abaqus. For stavmodellen i lokal sone vil oppspenningskraften fordeles over en lastflate med diameter lik 312 mm. De lokale sonene er illustrert med stiplede linjer. Grafene viser vertikalspenningsfordelingen i broplatens lengderetning. Den øverste fordelingen er hentet fra senter lokal sone og den andre rett under lokal sone ved overgangen til steget. Begge fordelingene viser et spaltetrekk som vil oppstå foran belastningsflaten og et trykk bak. Forskjellen mellom dem er at tyngdepunktet til spaltetrekket vil ligge nærmere belastningsnittet for fordelingen i lokal sone. Dette er fornuftig da trykkspenningene her brer ut og bøyer raskere av enn under lokal sone ved overgangen til steget. For å kunne bestemme tyngdepunktet til spaltetrekket som oppstår, må andelen av fordelingen som hører til lokal sone separeres fra resten.

For å fremstille fordelingen i lokal sone benyttes differansen mellom de to fordelingene i *Figur 9-46*. Dette gir spenningsfordelingen innenfor lokal sone foran og bak belastningssnittet, som vist i *Figur 9-47*. Det resterende strekket er tatt hånd om i den globale stavmodellen.



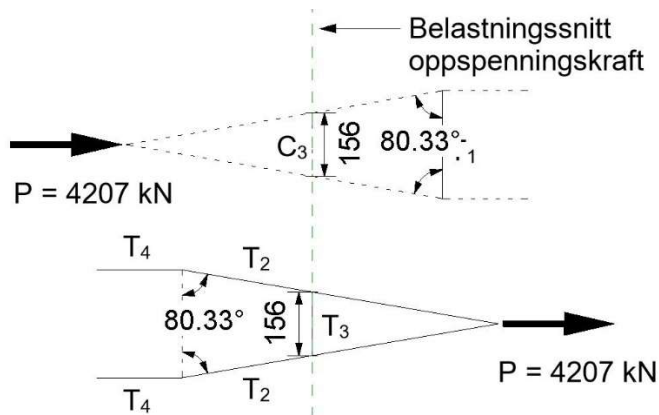
Figur 9-47: Hovedspenninger, soneinndeling og vertikalspenningsfordeling for lokal sone



Figur 9-48: Hovedspenninger, vertikalspenningsfordeling og stavmodell for lokal sone

Figur 9-48 viser resultatet fra FEM-analysen for den lokale sonen som oppstår i broplaten som følge av oppspenningskrefter. Stavmodellen for sonen baseres på samme prinsipp som for lokal sone nivå 2.

Med dette som utgangspunkt plasseres de horisontale stavene i fjerdedelspunktene til høyden av sonen, ved sonens slutt, både foran og bak belastningsflaten. Den vertikale strekkstaven plasseres i tyngdepunktet til strekkspenningene og den vertikale trykkstaven i tyngdepunktet til trykkspenningene. Fordelingen kan foran og bak belastningssnittet synes å ha en parabelformet fordeling. Av den grunn er tyngdepunktet til både strekket og trykket plassert der krumningen til parabelen er størst.



Figur 9-49: Beregningsmodell for stavmodell lokal sone

Spaltestrekket som oppstår foran belastningsflaten og strekkraften som oppstår bak belastningsflaten regnes ut med utgangspunkt i Figur 9-49.

Spaltestrekket som oppstår foran belastningsflaten blir som følger:

$$T_1 = \frac{P}{2 \cdot \tan \theta} = \frac{4207 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 80,33^\circ} = 358,42 \text{ kN}$$

Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet beregner en tilsvarende spaltestrekk til:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{b-a}{b} F = \frac{530-312}{4 \cdot 530} \cdot 4207 \text{ kN} = 432,61 \text{ kN}$$

Strekket som oppstår bak belastningsflaten blir som følger:

$$T_2 = \frac{P}{2 \cdot \sin \theta} = \frac{4207 \text{ kN}}{2 \cdot \sin 80,33^\circ} = 2133,82 \text{ kN}$$

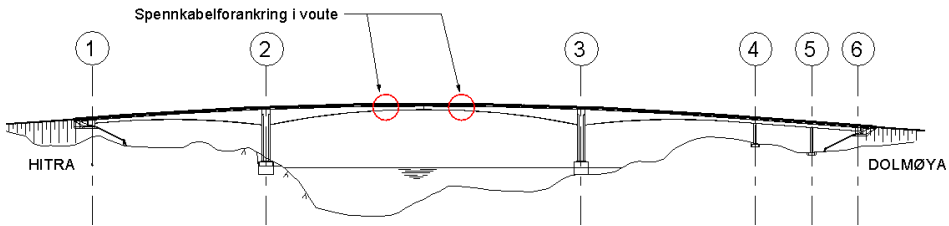
$$T_4 = 2103,5 \text{ kN}$$

Strekket må tas opp av tilstrekkelig armering som forankres i og bakover i broplaten.

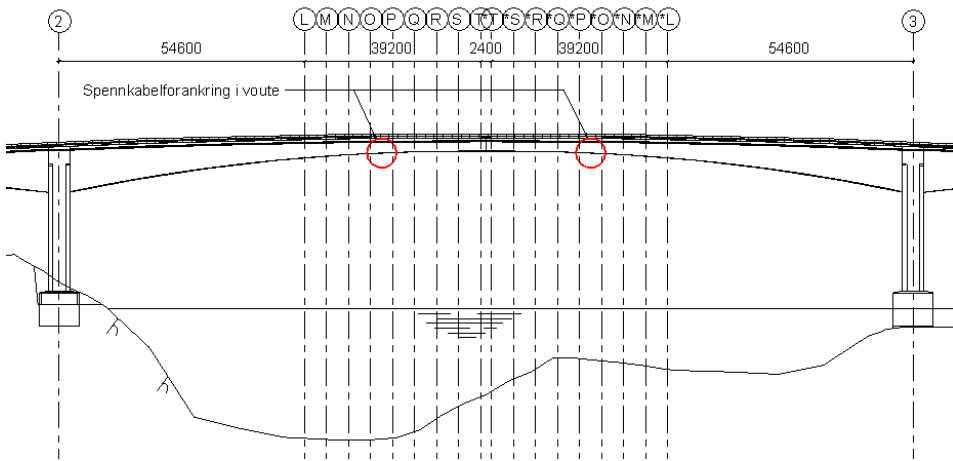
9.3 Spennkabel forankring i voute

9.3.1 Presentasjon av D-region

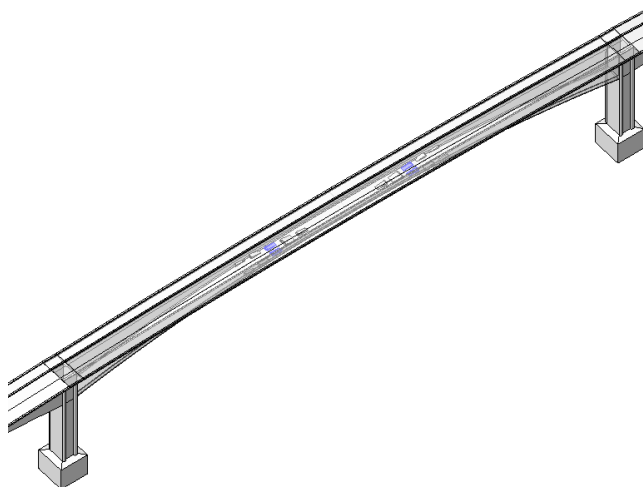
Voutene er plassert i undergurten på broen og brukes til spennkabelforankringer for spennkabler som skal ta feltmoment i broen mellom akse 2 og 3. *Figur 9-50 - Figur 9-57* har som hensikt å vise plassering og utforming av voutene som er analysert i oppgaven.



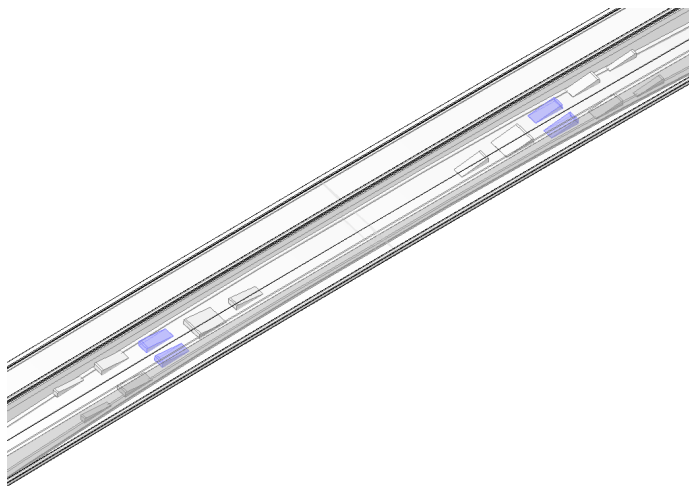
Figur 9-50: Oversikt bro



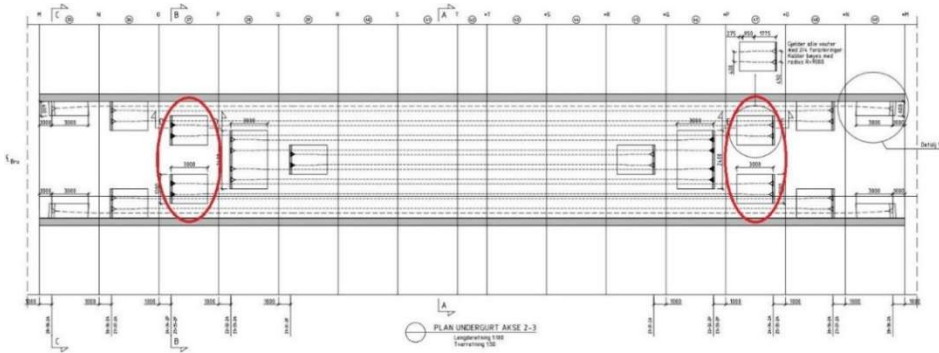
Figur 9-51: Oversikt bro mellom akse 2 og 3



Figur 9-52: Perspektiv 1, vouter som er markert blå er vurdert

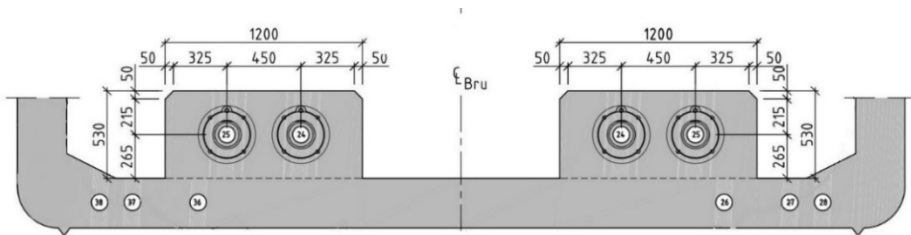


Figur 9-53: Perspektiv 2, vouter som er markert blå er vurdert

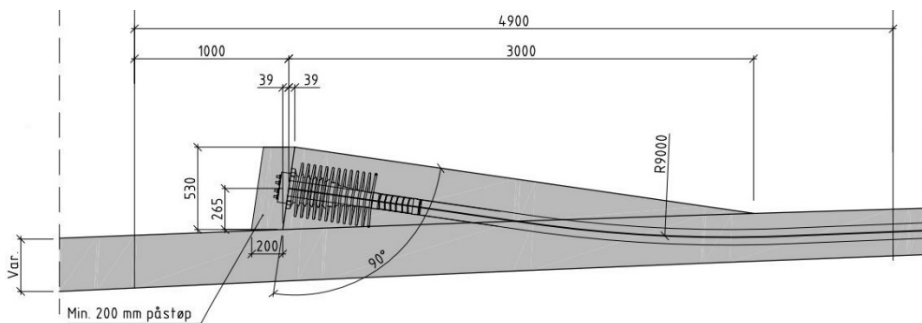


Figur 9-54: Plan undergurt akse 2-3 (utklipp av tegning fra SVV); vouter ringet inn i rødt er vurdert

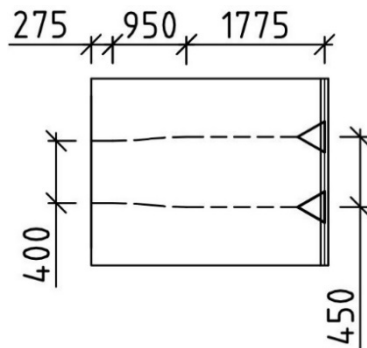
Spennkabelforankringene ringet inn i rødt mellom delakse O' og P', se Figur 9-51, har sin motpart ringet inn i rødt til høyre. Motstående par ligger mellom underakse *P og *O i samme figur. Disse er vurdert, og på grunn av symmetri betraktes kun ett par.



Figur 9-55: Snitt B: tversnitt av voutene (utklipp av tegning fra SVV)



Figur 9-56: Snitt D: vouten sett fra siden (utklipp av tegning fra SVV)



Figur 9-57: Plandetalj: avbøyning av spennkabler (utklipp av tegning fra SVV)

9.3.2 FEM-analysen

Idealiseringen er gjort i samarbeid med veileder Håvard Johansen fra SVV med utgangspunkt i hva SVV ønsker å vite fra analysen. Følgende vurderes:

Aktuelle lastvirkning i vouten:

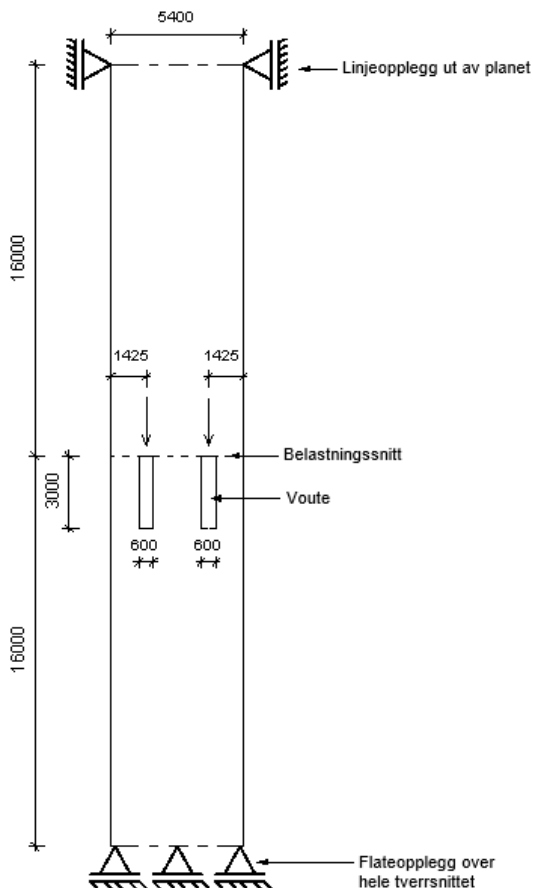
- Vertikalt spaltestrekk.
- Horisontalt spaltestrekk.
- Skrå strekkraft (fastholdning) fra forankringens bakkant ned i undergurten.

Aktuelle lastvirkninger i undergurten:

- Moment-virking i undergurten.
- Strekk fra forankringsvouten inn i undergurten, både rett bakover, på skrå bakover og i broens tverretning.

For å kunne vurdere det som skjer lokalt ved voutene tas kun raden som er markert med rødt i *Figur 9-54* med i FEM-analysen. Dette betyr at effekten de ulike radene med spennkabelforankring har på hverandre ikke er vurdert.

Strekk fra forankringene bakover i undergurten og steget skyldes skivevirkninger. En må derfor ta med en stor nok lengde av broen foran og bak voutene for å sikre skivevirkning. Det benyttes en lengde på ca. $1,5 \times \text{broplattens bredde} = 1,5 \times 11,1 \text{ m} \approx 16 \text{ m}$ både foran og bak voutene. *Figur 9-58* viser planutsnitt av beregningsmodellen. Pilene illustrer retning og plassering av spennkraften som er påført voutene.

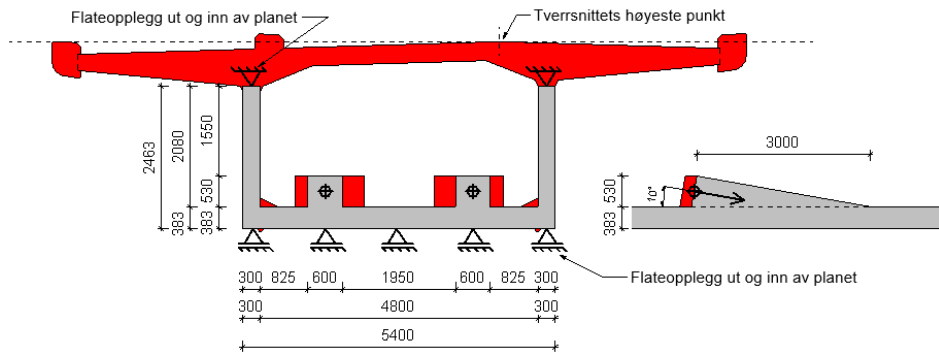


Figur 9-58: Plantutsnitt av idealisert beregningsmodell

Linjeoppleggene i øvre del av figuren modelleres fra underkant av undergurt til overkant av stegene. Flateoppleggene i nedre del av figuren modelleres over hele tverrsnittet.

Voutene er plassert i fjerdedelspunktene målt mellom senterlinjen til stegene. Dette er gjort for å få lik spenningsutbredelse til hver side av voutene. Trykkspenningsutbredelsen begrenses av sidestående steg og avstand til sideliggende voute. Tverrsnittet ligger i broens delakse O', det vil si profil P1687,837. Tverrsnittets geometri hentes fra mål- og høydetabell på tegninger fra Statens vegvesen.

Figur 9-59 viser hvilke deler av tverrsnittet som modelleres og hvilke som utelates i analysen. Grå skravur er modellert mens rød skravur er utelatt.



Figur 9-59: Idealisert tverrsnitt til FEM-analyse.

Geometrien på beregningsmodellen og valg av opplegg vil ikke gi et godt resultat av de globale tverrsnittseffektene for broen. Dette fordi verken hele tverrsnittet eller bro lengden er modellert. Tverrsnittet og opplegg i beregningsmodellen er valgt for å se på de lokale effektene rundt voutene.

For å isolere vekk effekter som kommer fra bøyning, velges det å modellere konstruksjonen med vertikal fastholdning på undersiden av undergurt. Dette er for å unngå bidraget bøyesspenningene gir horisontalt, både i lengde og tverretning av broen.

Området markert rødt, der en ser vouten fra siden, utelates i analysen. Den delen er beregnet for påstøp over endeforankring, etter krav gitt i kapittel 7.9.8 i SVV sin Håndbok N400, og anses ikke som en konstruktiv del.

FEM-analysen utføres for å analysere hvordan trykk- og strekkspenningene fordeler seg i voutene og undergurten ved belastning av spennkraft. Fordelingen av spenningene og tensorenes retning er relevant for å etablere stavmodellen, spenningsverdiene i et hvert punkt er derfor ikke av interesse. For oppspenningskraften benyttes oppgitt verdi på 4207 kN.

Konstruksjonen modelleres i 3D med en utstrekning på 1,5 ganger broplattens bredde både foran og bak voutene, høyden begrenses av stegene. Optimalt sett, for å få konstruksjonen til å oppføre seg ideelt burde broen modelleres i hele sin lengde. Grunnene til at modellen er begrenset som beskrevet er flere. Modellens elementstørrelse har en klar sammenheng med beregningstid, som en ønsker skal være kortest mulig. Navigering og innstillinger i programmet blir også tregere ved en større modell. Det er i tillegg spenningsfordelingen i en begrenset avstand etter belastningsflaten som er av interesse ved denne analysen.

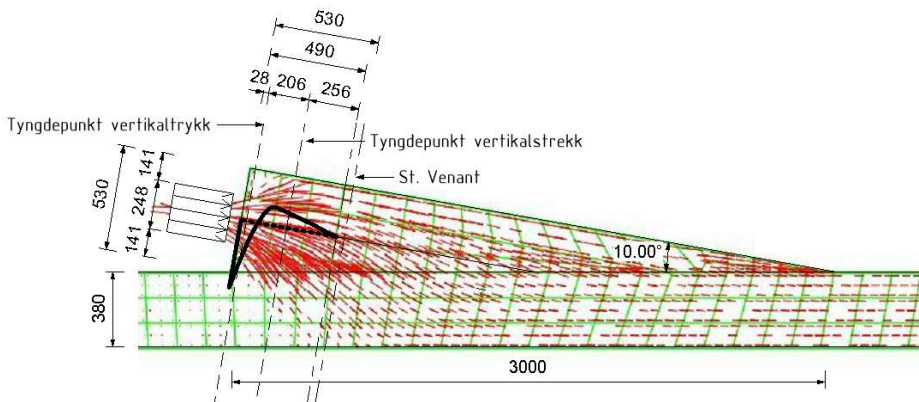
Oppspenningskraften er påført med en vinkel på 10° i forhold til broens horisontalplan, som vist på *Figur 9-59*. Oppspenningen fordeles med et uniformt trykk over en kvadratisk belastningsflate på 248 mm, dette tilsvarer et areal som en sirkulær flate med diameter på 280 mm gir. Forenklingen ble gjort for å sikre en ryddig oppdeling av elementene i voutene.

9.3.3 Etablering av stavmodell

Vertikal betraktning

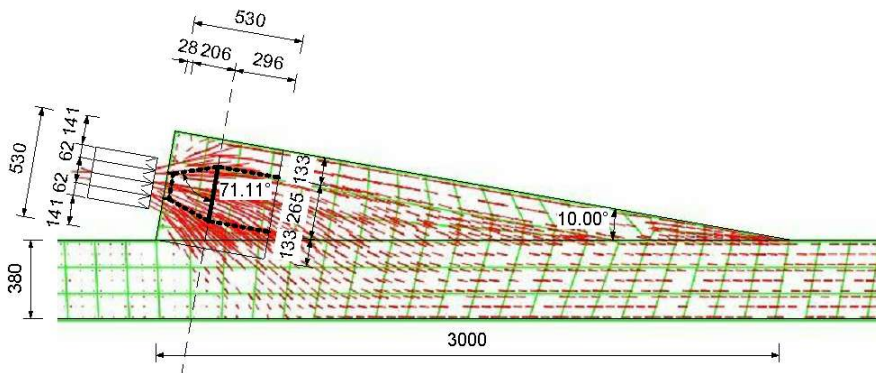
Det vertikale planet er plassert sentrisk i vouten. Spaltestrekket blir beregnet i en lokal sone og strekket som kommer fra eksentrisitetsmomentet, blir ivaretatt i den globale sonen.

Lokal sone



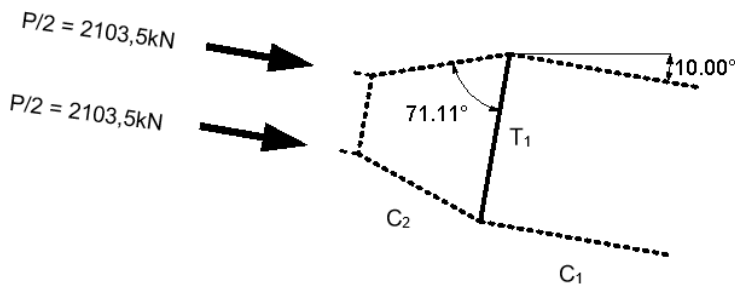
Figur 9-60: Trykkspenningsstrømmen ved voute

Figur 9-60 viser trykkspenningsstrømmen og fordelingen av vertikale spenninger langs et snitt sentrisk i vouten, slik de fremkommer fra FEM-analysen. Utstrekningen av spenningen viser seg å samsvare bra med St. Venants prinsipp, selv om vouten har en annen geometri enn det som er behandlet i teorien. Tyngdepunktet til strekkspenningene beregnes slik det er beskrevet i kapittel 7 og beregningene er utført i *Vedlegg 9*. Formen på fordelingen av trykkspenningene betraktes som en trekant, og tyngdepunktet plasseres i tredjedelspunktet. Trykkstavene som grenser mot den påførte lasten plasseres i fjerdedelspunktene til høyden av lastflaten. Trykkstavene som grenser mot snittet hvor spenningene er jevnt fordelt i vouten, plasseres i fjerdedelspunktene til voutens høyde ved belastningssnittet.



Figur 9-61: Beregningsmodell for lokal stavmodell

Figur 9-61 og Figur 9-62 viser stavmodellen til den lokale sonen, hvor kraften T_1 representerer spaltestrekket.



Figur 9-62: Beregningsmodell for lokal stavmodell

Ved knutepunktsberegning bestemmes spaltestrekket:

$$C_1 = 2103,5 \text{ kN}$$

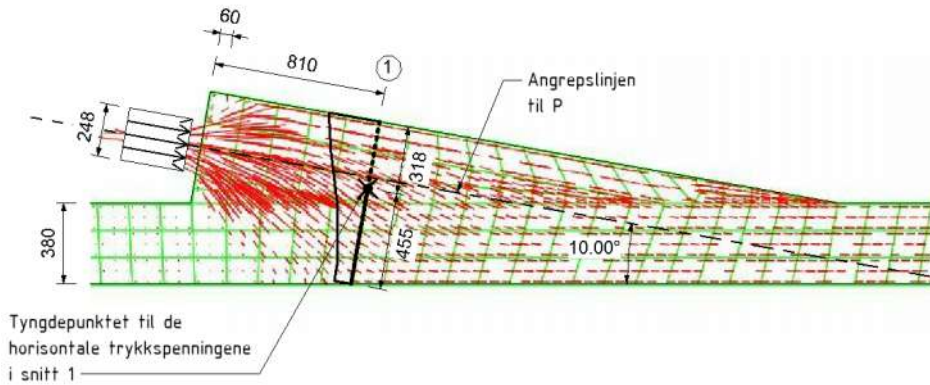
$$C_2 = \frac{2103,5 \text{ kN}}{\sin(71,11)} = 2223,24 \text{ kN}$$

$$T_1 = C_2 \cdot \cos(71,11) = 2223,24 \text{ kN} \cdot \cos(71,11) = 719,78 \text{ kN}$$

Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet beregner en tilsvarende spaltestrek til:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{(b - a)}{b} \cdot F = \frac{(0,53 \text{ m} - 0,248 \text{ m})}{4 \cdot 0,53 \text{ m}} \cdot 4207 \text{ kN} = 559,61 \text{ kN}$$

Global sone



Figur 9-63: Horisontal spenningsfordeling i snitt 1

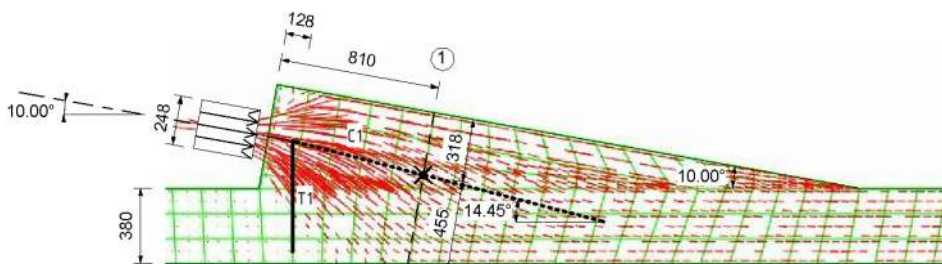
Figur 9-63 viser trykkspenningsstrømmen og fordelingen av horisontale spenninger langs Snitt 1 parallelt med lastflaten, slik det fremkommer av FEM-analysen. Snitt 1 er plassert 810mm fra lastflaten, hvor spenningene ser ut til å være fordelt.

Stavmodellen etableres med utgangspunkt i stavmodellen i EK2-1-1, J.3 Konsoller. Stavmodellens geometri bestemmes på følgende måte: Først plasseres et punkt rett ved lastflaten. I høyderetningen til vouten plasseres punktet i angrepelinjen til lasten sentrisk i lastflaten. I lengderetningen må punktet ligge i tyngdepunktet til armeringen som legges inn for å ta det vertikale strekket. For å bestemme tyngdepunktet til armeringen velges en foreløpig armeringsutforming. Denne må kontrolleres når endelig armering er beregnet. Dersom utformingen endres må stavmodellens geometri bestemmes på nytt. Det antas at tre bøyer $\varnothing 16$ med senteravstand 60mm blir tilstrekkelig. Dette gir til sammen 6 $\varnothing 16$ for opptak av strekket. Armeringen må også ha tilstrekkelig overdekning. Nominell overdekning ved lastflaten er beregnet til 60mm med utgangspunkt i SVV sin Håndbok N400 og EK2. Avstanden fra lastflaten til armeringens tyngdepunkt blir dermed $60\text{mm} + 60\text{mm} + 16\text{mm}/2 = 128\text{mm}$. I lengderetningen plasseres dermed det første punktet 128mm fra lastflaten.

Den vertikale strekkstaven går fra dette punktet og vertikalt ned i undergurten og har en vinkel til undergurtens senterlinje på 90° . Dersom armeringen legges inn normalt til lastretningen må dette tas hensyn til i dimensjoneringen.

Videre plasseres neste punkt. I lengderetningen plasseres det 810mm fra lastflaten i Snitt 1. I høyderetningen plasseres det i tyngdepunktet til den

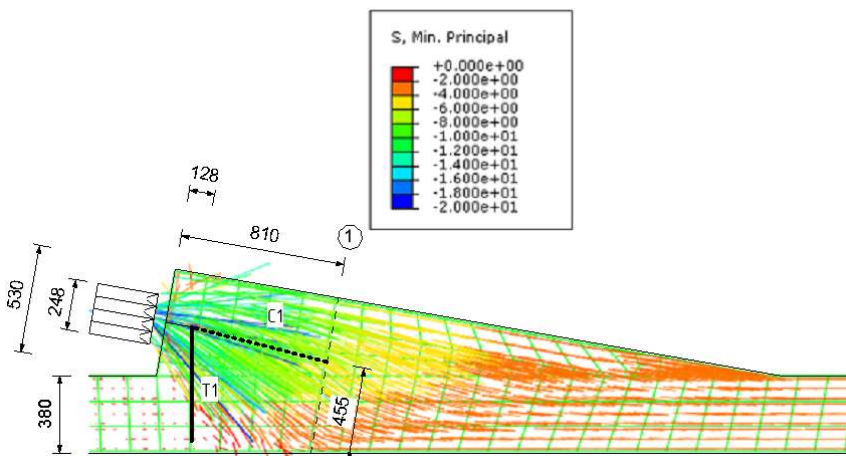
horisontale trykspenningsfordelingen i Snitt 1. Fordelingen av de horisontale trykspenningsene betraktes som en trekant og en firkant. Tyngdepunktet bestemmes med momentlikevekt. Trykkstaven må dermed gå fra det første punktet nærmest lastflaten og gjennom dette punktet. Stavmodellen blir som vist i *Figur 9-64*.



Figur 9-64: Global stavmodell

Lengde av både strekk- og trykkstaven er uvesentlig med tanke på å bestemme kreftene i stavmodellen. Fra figur J.6a) i EK2 plasseres strekkarmering ned til underkantarmoring i undergurten med tilstrekkelig forankringslengde.

Figur 9-65 viser hovedtrykspenningsene i vouten med farge etter trajektorenes intensitet. Fargekartet gir dermed et bedre bilde av hvor tyngdepunktet til trykspenningsene ligger i den globale stavmodellen.

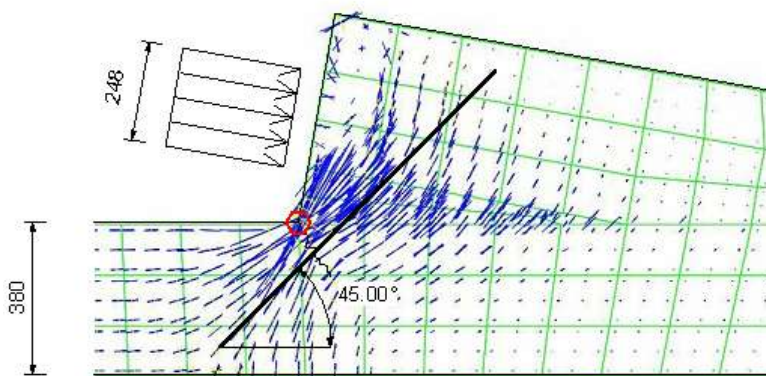


Figur 9-65: Hovedtrykspenninger i vouten med fargekart

Den globale stavmodellen slik den nå er etablert er i utgangspunktet tilstrekkelig for å overføre oppspenningskraften fra vouten til undergurten. Stavmodellen vil

overføre den horisontale oppspenningskraften via den skrå trykkstaven ned i undergurten. Undergurten vil dermed få en påført punktlast fra trykkstaven der den treffer undergurten.

Fra bakkant av vouten går det relativt store strekkrefter på skrå bakover i undergurten. Spenningene har høyest konsentrasjon på overflaten i overgang mellom voute og undergurt. Da strekkstaven i den globale stavmodellen er vertikal vil den ikke overføre strekkrefter bakover selv om armeringen plasseres parallelt med lastflaten med en vinkel til aksens nøytralakse på 10° . Dette fordi vinkelen armeringen får blir for liten til å overføre strekkrefter av denne størrelsen. Dersom det ikke legges inn egnet armering for denne effekten vil betongen risse i overgangen fra vouten til undergurten, og det vil ikke overføres strekkrefter på skrå bakover i dette området. Risset må dermed begrenses med den allerede innlagte armeringen. Da strekkspenningene i området er relativt store velges det her å legge inn tilleggsarmering for denne effekten. En stav som representerer dette er tegnet inn i *Figur 9-66*.



Figur 9-66: Hovedstrekkspenningene ve vouten

Sirkelen markerer punktet der den høyeste konsentrasjonen av strekkspenninger vil oppstå. Det er effektivt å la strekkstaven krysse vinkelrett på risset. Her antas at risset vil ha en vinkel til undergurtens nøytralakse på 45° . Strekkstaven plasseres normalt til dette så nært opp mot hjørnet som overdekningen tillater. Strekkstaven ser med dette ut til å mer eller mindre følge strekkspenningsstrømmen. Hvor store krefter strekkstaven i virkeligheten vil overføre bakover i undergurten er vanskelig å tallfeste eksakt. Trykkstaven i den opprinnelige stavmodellen vil ha en høyere stivhet enn den nye strekkstaven og en har dermed et statisk ubestemt system der en ikke kjenner stivheten til

komponentene. Det foreslås som en konservativ betraktning å dimensjonere den opprinnelige stavmodellen med full last P og den ekstra strekkstaven med $P/2$.

Beregning av global stavmodell fra *Figur 9-64*:

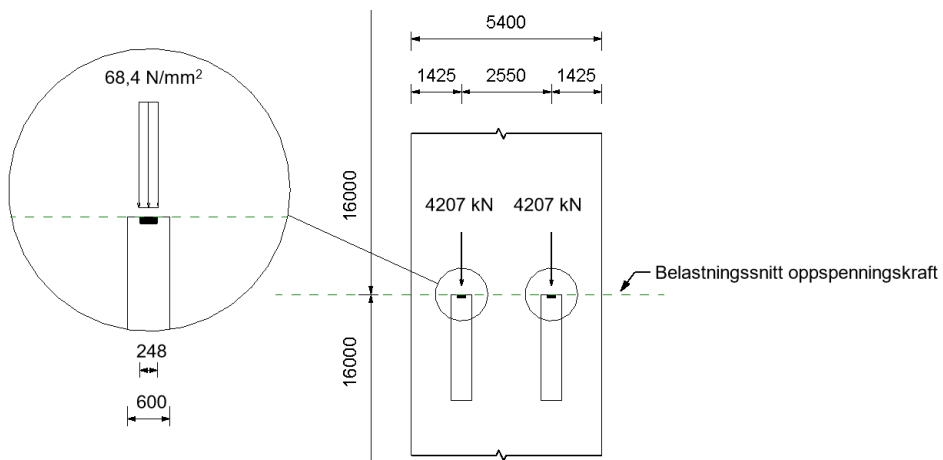
$$C1 = \frac{4207 \text{ kN} \cdot \cos(10)}{\cos(14,45)} = 4278,43 \text{ kN}$$

$$T1 = -4207 \text{ kN} \cdot \sin(10) + 4278,43 \cdot \sin(14,45) = 337,08 \text{ kN}$$

$$T1 = 337,08 \text{ kN}$$

Plan undergurt

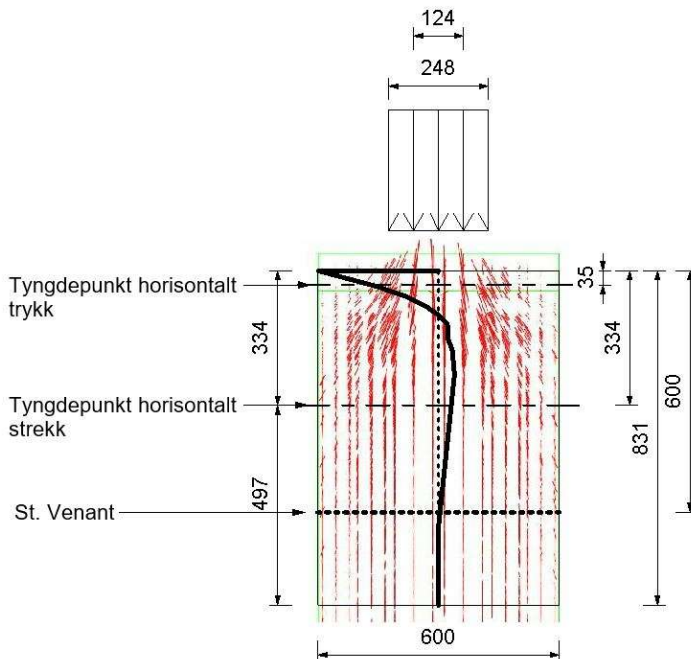
Figur 9-67 viser et planutsnitt av undergurten påført oppspenningskraft i voutene. Belastningssnittet er illustrert ved en horisontal stiplede linje. Figuren viser størrelse og fordeling av lasten som er påført voutene. Lastflaten er modellert kvadratisk med sidekanter lik 248 mm, og blir belastet av et trykk som tilsvarer oppspenningskraften, P . I noen av de følgende figurene er lasten kun representert ved den stiplede linjen for å gjøre figurene mer oversiktlig.



Figur 9-67: Planutsnitt av undergurt med oppspenningskraft påført voutene

Lokal sone nivå 1, voute

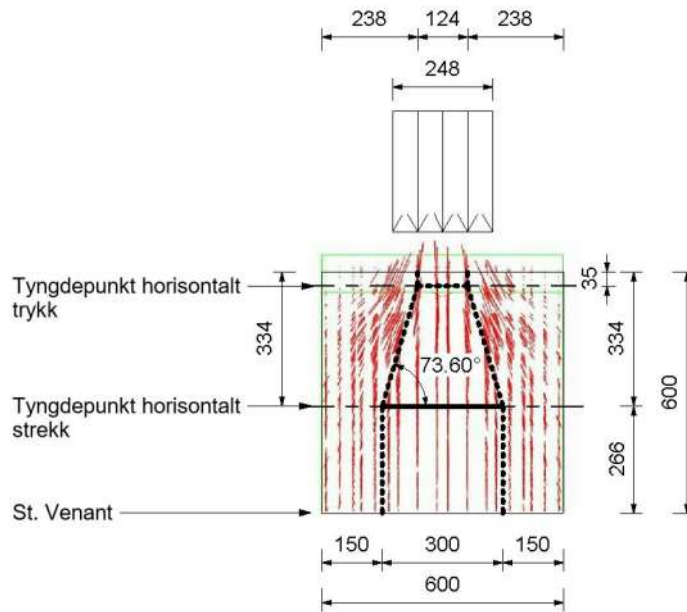
Spenningsstrømmene fra de lokale effektene er konsentrert innenfor vouten. Lokal sone nivå 1 begrenses derfor av denne.



Figur 9-68: Hovedtrykkspenninger lokal sone nivå 1, horisontalspenningsfordeling sentrisk i vouten

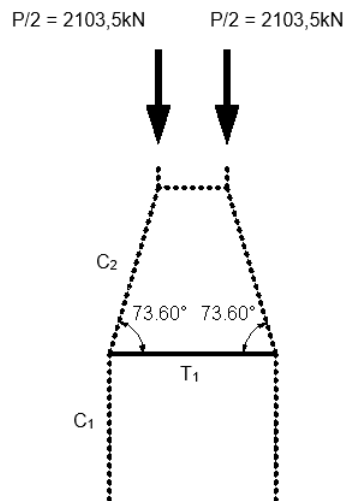
Figur 9-68 viser trykkspenningsstrømmen og fordelingen av horisontale spenninger langs et midtsnitt i vouten, slik de fremkommer fra FEM-analysen. Den horisontale spenningsfordelingen brer seg utenfor høyden definert ved St. Venants prinsipp. Spenningene utenfor området er imidlertid små og vil ikke ha stor innvirkning på resultatet.

Figur 9-68 benyttes som grunnlag for å bestemme stavmodellen illustrert i Figur 9-69. Plassering av den horisontale strekkstaven beregnes slik det er beskrevet i kapittel 7 og beregningene er utført i Vedlegg 10. Trykkstaven er plassert fra en betraktning om at fordelingen av trykket har form som en trekant. De øverste vertikale trykkstavene er plassert i fjerdedelspunktene til lastflaten sin bredde, og de nederste vertikale trykkstavene er plassert i fjerdedelspunktene til vouten sin bredde.



Figur 9-69: Stavmodell for lokal sone nivå 1

Figur 9-70 viser beregningsmodellen for stavmodell lokal sone nivå 1. Stiplede linjer indikerer trykkstaver, og heltrukne linjer indikerer strekkstaver.



Figur 9-70: Beregningsmodell for stavmodell lokal sone nivå 1. Stavmodellen heller 10° i forhold til det horisontale plan

Ved knutepunktsberegning bestemmes spaltestrekket:

$$C_1 = 2103,5 \text{ kN}$$

$$C_2 = \frac{2103,5 \text{ kN}}{\sin(73,6)} = 2192,71 \text{ kN}$$

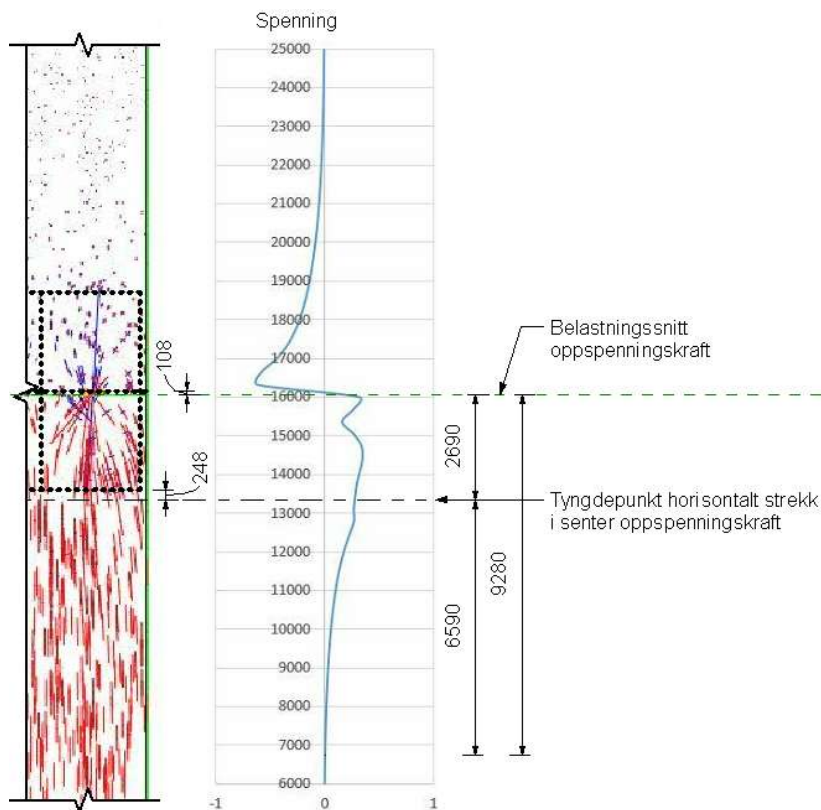
$$T_1 = 2192,72 \text{ kN} \cdot \cos(73,6) = 619,1 \text{ kN}$$

Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet beregner en tilsvarende spaltestrek til:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{(b - a)}{b} \cdot F = \frac{(0,6 \text{ m} - 0,248 \text{ m})}{4 \cdot 0,6 \text{ m}} \cdot 4207 \text{ kN} = 617 \text{ kN}$$

Lokal sone nivå 2

Lokal sone nivå 2 befinner seg i undergurten. I bredderetningen av broen er sonen plassert sentrisk i forhold til vouten. I lengderetningen er sonen på trykksiden og strekksden plassert symmetrisk om snittet der de horisontale spenningene er null. Dette snittet ligger 108mm over belastningssnittet. Grunnen til dette forklares under figuren.



Figur 9-71: Hovedspenningsstrøm og horisontalspenningfordeling i lokal sone nivå 2

Figur 9-71 viser hovedspenningsstrømmen og fordelingen av horisontale spenninger langs et snitt plassert i undergurten sin nøytralakse og i senter av oppspenningskraften, slik de fremkommer fra FEM-analysen.

Den horisontale spenningsfordelingen påvirkes av hvordan kreftene overføres fra vouten til undergurten. Fordelingen av den horisontale strekkspenningen foran belastningssnittet er ikke jevn og har to fremtredende toppverdier. Den første toppen kan forklares med at det fra vouten overføres skrå strekkspenningene bakover i undergurten. Dette er vist i den vertikale betraktningen av vouten Figur 9-66. Snittet der de horisontale spenningene er

null forskyves derfor bak belastningssnittet. Den andre toppverdien kommer fra den delen av oppspenningskraften som overføres fra vouten til undergurten via en trykkspenningstrøm, som også er vist i den vertikale betraktningen av vouten.

Hvor vidt den første toppen er reel avhenger av hvor mye strekk den innlagte tilleggsarmeringen fra vertikalbetraktningen av vouten vil være i stand til å overføre. Dersom tilleggsarmeringen ikke legges inn vil heller ikke effekten fra den første toppverdien fremkomme i undergurten. Dersom den legges inn vil det være en effekt av dette, men effekten vil mest sannsynlig ikke være så fremtredende som i den lineær elastiske analysen.

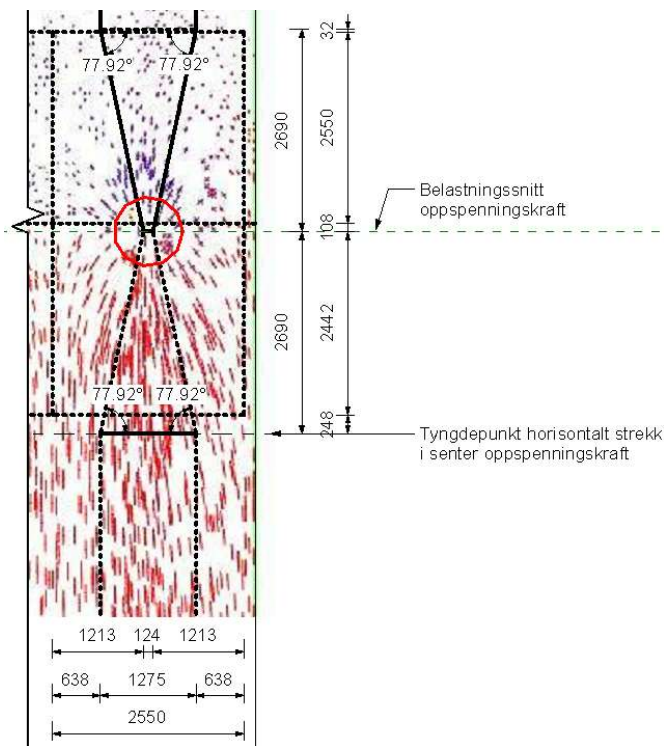
Som en følge av usikkerhetene vedrørende den horisontale spenningsfordelingen gjøres det en konservativ betraktning av stavmodellen. Stavmodellen etableres som at lokal sone nivå 2 i lengderetningen er plassert slik at sonen på trykksiden og sonen på strekksiden er symmetrisk om belastningssnittet. Tyngdepunktet til den horisontale strekkstaven beregnes imidlertid ut fra den horisontale spenningsfordelingen i *Figur 9-71*, der nullpunktet for denne ligger 108mm over belastningssnittet. Med dette vil vinklene i den etablerte stavmodellen bli lavere enn dersom stavmodellen plasseres med utgangspunkt i nullpunktet. En har da også tatt hensyn til at spenningsfordelingen kan bli slik den er fremstilt i de lineær elastiske analysene.

Som en ser av fordelingen av de horisontale spenningene over og under belastningssnittet, er de ikke symmetriske om belastningssnittet. Summen av strekkspenningene foran belastningssnittet er 20% større enn summen av trykkspenningene bak belastningssnittet. I de videre betraktningene etableres likevel en stavmodell som er symmetrisk om belastningssnittet. Begge stavmodellene etableres med utgangspunkt i den horisontale strekkspenningsfordelingen i *Figur 9-71*. Da stavmodellen som skal overføre strekk bakover i undergurten genererer et horisontalt trykk, som ikke er kritisk for konstruksjonen, antas det at avviket denne har til de lineær elastiske spenningsfordelingen ikke har stor betydning.

Studerer en trykkspenningstrømmen i *Figur 9-71* og *Figur 9-75* ser en at utbredelsen begrenses av trykkspenningstrømmen som kommer fra motsatt voute, og broens steg (undergurtens sidekanter). Trykkspenningutbredelsen ser ut til å være tilnærmet symmetrisk om senterlinjen til lasten. Dette kan skyldes at oppspenningskreftene er plassert i voutene ved undergurtens fjerdedelspunkter, der bredden av undergurten er satt til avstanden mellom stegenes senterlinjer. I broens lengderetning går trykkspenningens avbøying

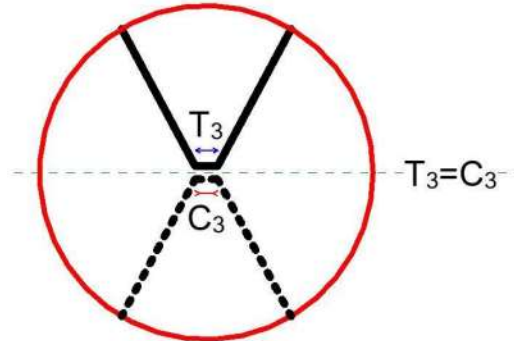
utenfor området begrenset av St. Venants prinsipp. De horisontale strekkspenningene, som oppstår på grunn av trykkspenningens avbøyning, strekker seg derfor også utenfor området begrenset av St. Venants prinsipp. Ved å studere horisontalspenningsfordelingen kan en se at maksimal verdi er der avbøyningen er størst.

Stavmodellen etableres ved at de vertikale stavene i overgangen fra D- til B-regionen, plasseres i fjerdedelspunktene til bredden av sonen, både foran og bak belastningsflaten. De vertikale stavene (som i dette tilfellet har lengde null) ved belastningsnittet plasseres i belastningsflatens fjerdedelspunkter. Dette er en konservativ betraktning da lastflaten på 248mm er i vouten og at den i senterlinjen av undergurten i realiteten har fordelt seg over en større bredde. Den horisontale strekkstaven plasseres i tyngdepunktet til strekkspenningene og den horisontale trykkstaven plasseres symmetrisk om belastningsnittet for å sikre likevekt. Tyngdepunktet til strekket beregnes slik det er beskrevet i kapittel 7 og beregningene er utført i *Vedlegg 11*. Stavmodellen blir som fremstilt i *Figur 9-72*.



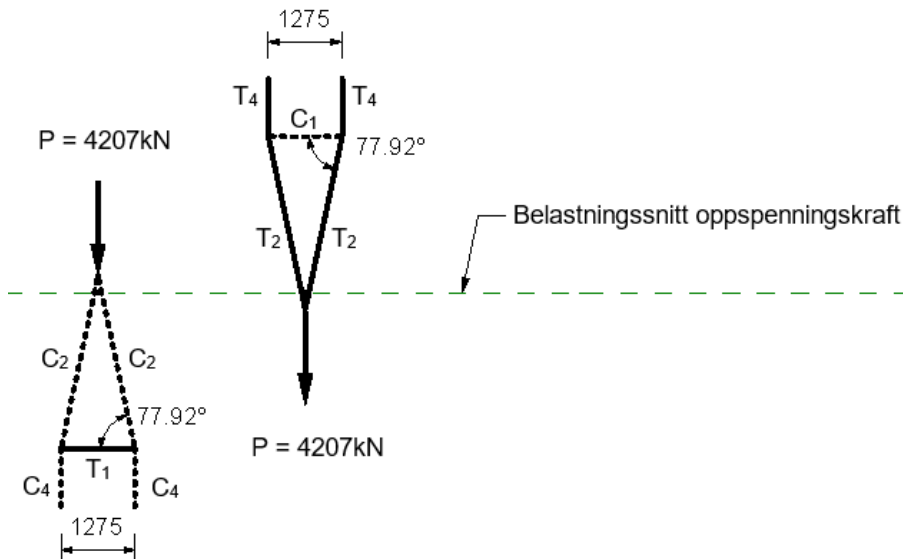
Figur 9-72: Stavmodell for lokal sone nivå 2

Den røde sirkelen på *Figur 9-72* er forstørret i *Figur 9-73*. Dette for å beskrive hvordan stavmodellen oppfører seg ved belastningsflaten. Som forklart er resultanten av strekket og trykket antatt lik. Dette resulterer i at strekk- og trykkraften som oppstår ved belastningsflaten er like store, men med motsatt rettet kraft. Dette vil føre til null horisontale spenninger ved belastningsflaten.



Figur 9-73: Detalj av stavmodell i lokal sone nivå 2

Spaltestrekket foran belastningsflaten og den skrå strekkraften bak belastningsflaten regnes ut med utgangspunkt i *Figur 9-74*. Det velges konservativt å sette hele oppspenningskraften som både strekk og trykk, da fordelingen er uklar.



Figur 9-74: Beregningsmodell for stavmodell lokal sone nivå 2

Spaltestrekket som oppstår foran belastningsflaten blir som følger:

$$T_1 = \frac{P}{2 \cdot \tan \theta} = \frac{4207 \text{ kN}}{2 \cdot \tan 77,92^\circ} = 450,18 \text{ kN}$$

Bruker en EK2, 6.5.3(3) formel (6.58) for delvis diskontinuitet beregner en tilsvarende spaltestrekk til:

$$T_{EK2} = \frac{1}{4} \frac{b - a}{b} F = \frac{2550 - 248}{4 \cdot 2550} \cdot 4207 \text{ kN} = 949,46 \text{ kN}$$

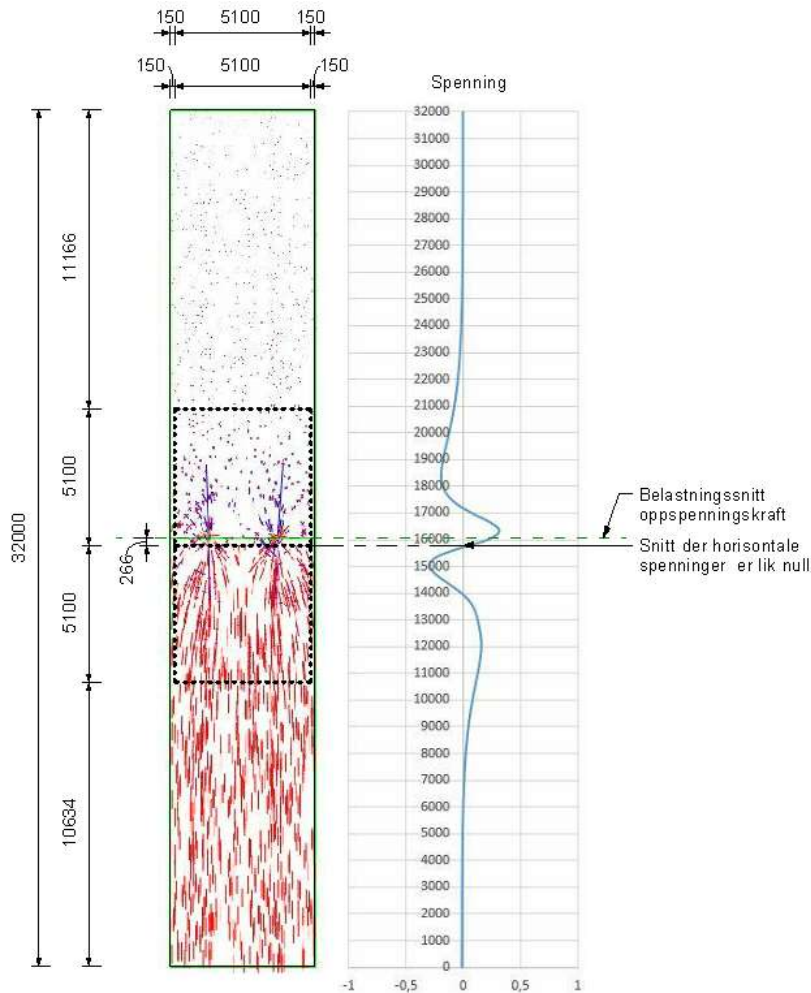
Strekket som oppstår bak belastningsflaten blir som følger:

$$T_2 = \frac{P}{2 \cdot \sin \theta} = \frac{4207 \text{ kN}}{2 \cdot \sin 77,92^\circ} = 2151,13 \text{ kN}$$

$$T_4 = 2103,5 \text{ kN}$$

Strekket må tas opp av tilstrekkelig armering som forankres i vouten og bakover i undergurten.

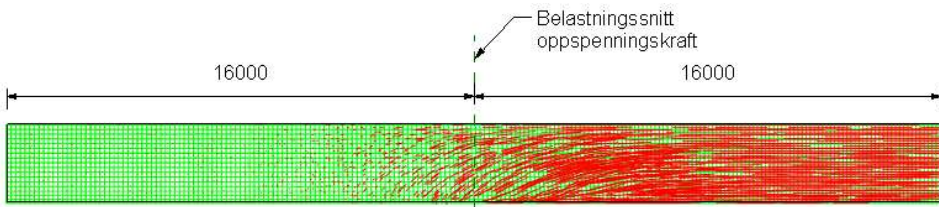
Global sone



Figur 9-75: (t.v.) Hovedspenninger og soneinndeling; (t.h.) horisontalspenningsfordeling langs undergurtens som danner grunnlag for stavmodellen i global sone

Figur 9-75 viser hovedspenninger og fordelingen av horisontale spenninger langs et midtsnitt i undergurtens, slik de fremkommer fra FEM-analysen. Også her blir soneinndelingen forskjøvet i forhold til belastningssnittet. Dette kommer fra at trykkspenningsstrømmene fra vouten treffer undergurtens nøytralakse et stykke etter belastningssnittet. Stavmodellen som etableres her vil være naturlig å plassere innenfor sonen slik den er vist i Figur 9-75. Da strekkspenningene fra FEM-analysen i undergurtens globale sone har maksimal verdi på 0,32 MPa og betongens karakteristiske strekkfasthet for B45 er 2,7 MPa, er stavmodellen for global sone valgt å ikke etableres.

Steg



Figur 9-76: Trykkspenningsstrøm i steg

Figur 9-76 viser trykkspenningsstrømmen slik den fremkommer fra FEM-analysen. Som en ser overføres trykkspenningen til steget over en lengde i undergurten som er fordelt både foran og bak belastningssnittet. Trykkspenningen fordeler seg i steget via en halv flaskeformet trykkspenningsutbredelse. Med dette vil det også utvikles vertikale strekkspenningen. Som ved betraktningen av broplaten, har også denne beregningsmodellen oppleggsbetingelser og tverrsnitt som hindrer at den eksakte spenningsfordelingen kan fremstilles. Det er likevel nærliggende å tenke at trykkspenningene vil fordeles til steget slik det er vist i Figur 9-76. Siden trykkspenningene overføres til steget over en stor lengde, vil konsentrasjonen av trykkspenningene i steget bli relativt små, og de vertikale spenningene ved at trykkspenningene avbøyes også bli små. I dette tilfellet er voutene plassert relativt langt unna stegene. Desto nærmere steget voutene plasseres, desto større vil konsentrasjonen av trykkspenningene bli i steget, og stegene vil måtte dimensjoneres for spaltestrekk.

10 Konklusjon

Lineær elastiske spenningsstrømmer viser seg å være et godt verktøy for å etablere stavmodeller. Utfordringen ligger ofte i at en i utgangspunktet har en formening om hvordan stavmodellen bør se ut, men at en ikke får denne til å stemme med spenningsstrømmen. Da må en løsrive seg fra stavmodellen en først har tenkt og la spenningsstrømmene bestemme utformingen. Noen av spenningsstrømmene må en derimot behandle med varsomhet. Dette gjelder spenningsstrømmer som representerer store strekkspenninger som overføres gjennom konstruksjonen på en slik måte at det er vanskelig å gjenskape spenningsstrømmene med armert betong. I noen tilfeller vil konstruksjonen tilpasse seg det valgte statiske systemet. I andre tilfeller kan slike strekkspenningsstrømmer påvirke spenningsstrømmer i andre deler av konstruksjonen der en annen stavmodell skal etableres. Spenningsstrømmene kan ha ulik effekt i hvert plan og de kan være vanskelige å legge merke til. Et eksempel på dette fra denne oppgaven, er forspenningskraften i vouten som skal overføres til undergurten. Stavmodellen til vouten ligger i et plan normalt til stavmodellen i undergurten. I bakkant av vouten overføres store strekkspenninger bakover i undergurten. I undergurten er spenningsstrømmen tydelig påvirket av dette.

En kan i noen tilfeller stille spørsmål ved om den etablerte stavmodellen vil gi tilsvarende tverrstrekk som FEM-analysen. Dette er ikke alltid like lett å kontrollere fordi modellen ikke alltid er god nok til å vise så detaljert informasjon. For noen tilfeller blir modellen så stor at størrelsen på elementinndelingen blir for grov til å gi detaljert informasjon om lokale effekter. I slike tilfeller kan en ikke stole på alle resultatene en henter ut. For å studere formen på spenningsstrømmen har elementstørrelsen vist seg å ha mindre betydning. En får derfor ikke kontrollert det samlede tverrstrekket beregnet fra stavmodellen med det faktiske tverrstrekket i FEM-modellen. I andre tilfeller har en irregulære tverrsnitt som gir irregulære elementer. Disse vil gi dårlige resultater hva angår spenningsverdier. I tillegg er det i praksis utfordrende å hente ut de rette verdiene fra slike områder. Dersom en lager en sti i senter av en punktlast og ut til et annet punkt i konstruksjonen, risikerer en at stien krysser elementer på ulike måter og en har ikke kontroll på hvilken informasjon som hentes ut fra hvert element.

Størrelsen på spaltestrekket fra analysene av D-regionene har blitt sammenlignet med spaltestrekk beregnet fra EK2-1-1. For alle tilfellene er de to verdiene ulike. I noen tilfeller er spaltestrekk fra FEM-analysen størst, mens det i andre tilfeller

er motsatt. I noen tilfeller er verdiene relativt like, i andre tilfeller vidt forskjellige. Ut fra disse analysene har vi ikke klart å identifisere et gjentakende mønster.

Riss i D-regioner har vist seg å være svært omfattende. Det er gjort et stort søk i litteratur og tidligere forsøk, med et ønske om å finne svar på hvordan dette kan betraktes. En har forsøkt å utnytte lineær elastiske analyser for å finne svar. Svar har blitt funnet, men med svarene har flere spørsmål dukket opp. Blant annet har det blitt vist at strekkspenningene ikke bare vil variere over høyden på D-regionen, men også i dybden inn og ut av planet til stavmodellen. Det har av den grunn blitt forsøkt å etablere en metode for å uttrykke den varierende spenningen på et lite betongelement. På dette elementet har det vært tenkt at en kan benytte en av metodene for å beregne riss i et rent strekkpåkjent legeme, slik som definert i EK2-1-1 og NS 3473. Da oppstår spørsmål som: Vil et stabilisert rissmønster oppstå i en D-region og når skjer dette? I så tilfelle, hva vil rissavstanden og rissvidden være? Og hvordan kan stivheten til betongen rundt risset ivaretas i en rissberegning? Og til slutt, vil riss for massive konstruksjoner der spaltstrekket oppstår langt inne i betongen, virkelig kunne føre til skadelige riss som når betongoverflaten?

11 Forslag til videre arbeid

En naturlig videreføring av arbeidet som er utført her er å analysere riss i D-regioner ved hjelp av ikke-lineære FEM-analyser. Det foreslås å først ta for seg et enkelt tilfelle av spaltestrek fra en flaskeformet trykkspenningsutbredelse, i et sentrisk belastet tverrsnitt. Tilsvarende Forsøk 2 som er utført i denne oppgaven. Analysen bør utføres i både plan spenning og tre dimensjoner med volumelementer og med ulike dybde/bredde forhold da spenningsstrømmen vil variere avhengig av dette.

I tillegg til en analyse som tilsvarer Forsøk 2, som er et tilfelle med delvis diskontinuitet, bør en gjennomføre et forsøk med full diskontinuitet. Også her er det interessant å se på ulike dybde/bredde forhold.

Når en har begynt å se et mønster i de elementære figurene fra de to forsøkene over, kan en ta for seg et utvalg D-regioner fra en virkelig konstruksjon. Dolmsundbrua som er studert i denne oppgaven kan varmt anbefales da den byr på mange ulike tilfeller av D-regioner. Ikke alle er analysert i denne oppgaven.

En ting en kan studere i de ikke-lineære analysene er hvor stor spenning som vil oppstå i armeringen sammenlignet med spenningen beregnet med en stavmodell. Videre kan en se på hvilket rissmønster som vil oppstå - oppnås et stabilisert rissmønster? Hva er i så tilfelle rissavstanden og rissvidden? Over hvilken høyde av modellen fordeler rissene seg over? Og er det en sammenheng mellom dette og spenningen i armeringen?

Videre kan en se på hvor stor andel av spaltestrekken som opptas av den innlagte spaltestrekkarmeringen, og hvor mye som tas av stivheten til den omkringliggende betongen.

Formålet med arbeidet bør ikke være å finne et konkret svar på hvert enkelt tilfelle, men å finne en tendens og av det kunne beskrive et mønster.

Det får være opp til vedkommende som gjennomfører det overnevnte å foreslå hvordan eventuelle laboratorieforsøk bør gjennomføres, da det ville vært interessant å se hvordan spenningene i virkeligheten utarter seg.

12 Referanseliste

B.B.R., 2010. *BBR VT CONA CMI BT: Internal Post-tensioning System with 02 to 61 strands - ETA-09/0286*. Wien: BBR VT International Ltd.

Beeby, A. W., Narayanan, R. S., 2005. *Designers' guide to EN 1992-2-1 and EN 1992-1-2 Eurocode 2: design of concrete structures*. London: Thomas Telford.

Beeby, A. W., Favre, R., 1985. *CEB design manual on cracking and deformations*. Lausanne: École polytechnique fédérale de Lausanne.

Chen, W. F., El-Metwally, S. D. E., 2011. *Understanding structural engineering: from theory to practice*. Boca Raton: CRC Press.

Clarke, J. L., 1976. *Ciria Guide 1, A guide to the design of anchor blocks for post-tensioned prestressed concrete members*. Red. 1984. London: Ciria.

C.C.L., 2013. *European Technical Approval ETA - 07/0035*. 4. red. Leeds: CCL Stressing International Ltd.

D.S.I., 2013. *European Technical Approval ETA - 13/0815*. Langenfeld: DYWIDAG-Systems International GmbH.

fib, 2010. *fib Model Code for Concrete Structures 2010*. Lausanne: Wilhelm Ernst & Sohn.

fib, 2011. *Design examples for strut-and-tie models, bulletin 61*, Lausanne: DCC Document Competance Center Siegmund Kästl e.K.

Foster, S. J., Malik, A. L., 2002. *Evaluation of Efficiency Factor Models used in Strut-and-Tie. Structural Engineering*. Red. 128(5).

Hendy, C. R., Smith, D. A., 2007. *Designers' guide to EN 1992-2: Eurocode 2: Design of concrete structures: Part 2: Concrete bridges*. London: Thomas Telford.

Jacobsen, S., Maage, M., 2016. *Concrete Technology 1 (TKT 4215)*. 4. utgave. Trondheim: Kompendium NTNU – Institutt for konstruksjonsteknikk.

- Johansen, H., 2016. *NTNU: KT6003 Prosjektering av bruer 1: Praktisk prosjektering av etteroppspente betongbruer*, s.l.: Statens vegvesen Vegdirektoratet.
- Larsen, P. K., 2010. *Dimensjonering av stålkonstruksjoner*. 2. red. Trondheim: Tapir akademiske forlag.
- Leonhardt, F., 1974. *Vorlesungen über Massivbau*. 2 red. Berlin: Springer-Verlag.
- McBeth, D., Hennbique, F., 1998. *Reinforced concrete pioneer, Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 2. Red. Vol. 126(2).
- Meløysund, V. (Prosjektleder i Standard Norge)., 5. februar – på mail.
- Kompen, R., Nordbotten, G., Myhr, B., m.fl., 2005. *Publikasjon nr. 14 Spennarmeringsarbeider*. Red. 2016. Oslo: Norsk Betongforening.
- Rogowsky, D. M. & Marti, P., 1991. *Detailing for post-tensioned*, Bern: VSL International LTD.
- Schlaich, J. & Schäfer, K., 1991. *Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models*, Stuttgart: The structural Engineer.
- Schlaich, J., Schäfer, K. & Jennewein, M., 1987. *Toward a Consistent Design of Structural Concrete. I: PCI journal*. Vol 32, No. 3.
- Standard Norge, 2008. *NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008. Eurocode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner, del 1-1: Almenne regler og regler for bygninger*.
- Standard Norge, 2010. *NS-EN 1992-2-1:2005+NA:2010. Eurocode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner, del 2: Bruer*.
- Statens vegvesen, 2013/2014. *K-tegninger for Dolmsundbrua*.
- Statens vegvesen, 2015. *Håndbok N400: Bruprosjektering*, s.l.: Statens vegvesen.
- Sørensen, S. I., 2010. *Betongkonstruksjoner 3*. Trondheim: Kompendium NTNU – Institutt for konstruksjonsteknikk.

Sørensen, S. I., 2013. *Betongkonstruksjoner*. 2. red. Trondheim: Akademika forlag.

Tuchscherer, R.G., Birrcher, D.B., Bayrak, O., 2011. *Strut-and-tie model design provisions*. 1. red.

Vik, B., 2005. *Stavmodeller*. Norge: Norconsult AS.

V.S.L., 1972. *End block design in post-tensioned concrete*. Red. 1996. Berne: Losinger Ltd, VSL International.

Vedlegg 1

Forsøk 2, med tverrsnittstykkelser $d = 1\text{mm}$

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er tatt fra OK søyle til snittet der de horisontale spenningene er null.

Snittet ligger 2500mm fra OK søyle. Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		0,0000		675		14,5380	
25		0,0928		700		15,9621	
50		0,2113		725		17,5090	
75	y_1	0,3485	$f(y_1)$	750		19,1789	
100		0,5042		775		20,8634	
125		0,6786		800		22,7085	
150		0,8656		825		24,7142	
175		1,0819		850		26,8805	
200		1,3275		875	y_2	29,2074	$f(y_2)$
225		1,6023		900		31,5338	
250		1,9065		925		34,0612	
275		2,2267		950		36,7898	
300		2,5911		975		39,7194	
325		2,9998		1000		42,8502	
350		3,4528		1025		45,9499	
375		3,9500		1050		49,2890	
400		4,4663		1075		52,8676	
425		5,0472		1100		56,6855	
450		5,6924		1125		60,7428	
475		6,4021		1150		64,7147	
500		7,1762		1175		68,9540	
525		7,9715		1200		73,4608	
550		8,8575		1225		78,2350	
575		9,8340		1250		83,2766	
600		10,9010		1275		88,1423	
625		12,0587		1300		93,2826	
650		13,2369		1325		98,6975	

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
1350		104,3870		2250		130,0609	
1375		110,3511		2275	y_5	85,9075	$f(y_5)$
1400		115,9955		2300		7,6161	
1425		121,8897		2325		-104,8134	
1450		128,0337		2350		-251,3810	
1475		134,4274		2375		-432,0867	
1500	y_3	141,0710	$f(y_3)$	2400		-616,7784	
1525		147,1726		2425		-1039,1333	
1550		153,4617		2450		-1699,1511	
1575		159,9383		2475		-2596,8323	
1600		166,6023		2500		-3732,1768	
1625		173,4539					
1650		179,4265					
1675		185,4925					
1700		191,6520					
1725		197,9050					
1750		204,2515					
1775		209,1809					
1800		214,1063					
1825		219,0279					
1850		223,9457					
1875		228,8596					
1900		231,5519					
1925		234,1031					
1950		236,5131					
1975		238,7818					
2000	y_4	240,9093	$f(y_4)$				
2025		239,0194					
2050		236,5635					
2075		233,5417					
2100		229,9539					
2125		225,8002					
2150		215,7565					
2175		201,1607					
2200		182,0128					
2225		158,3129					

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y-verdier med tilsvarende funksjonsverdi f(y) er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 75 & 5,63E+03 & 4,22E+05 & 3,16E+07 & 2,37E+09 \\ \hline 875 & 7,66E+05 & 6,70E+08 & 5,86E+11 & 5,13E+14 \\ \hline 1500 & 2,25E+06 & 3,38E+09 & 5,06E+12 & 7,59E+15 \\ \hline 2000 & 4,00E+06 & 8,00E+09 & 1,60E+13 & 3,20E+16 \\ \hline 2275 & 5,18E+06 & 1,18E+10 & 2,68E+13 & 6,09E+16 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0,35 \\ \hline 29,21 \\ \hline 141,07 \\ \hline 240,91 \\ \hline 85,91 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1,65E-02 & -7,43E-04 & 5,77E-04 & -3,76E-04 & 1,32E-04 \\ \hline -4,53E-05 & 1,11E-05 & -8,89E-06 & 5,86E-06 & -2,06E-06 \\ \hline 4,42E-08 & -1,65E-08 & 1,68E-08 & -1,19E-08 & 4,28E-09 \\ \hline -1,84E-11 & 8,49E-12 & -1,01E-11 & 7,93E-12 & -2,98E-12 \\ \hline 2,76E-15 & -1,45E-15 & 1,93E-15 & -1,68E-15 & 6,70E-16 \\ \hline \end{array}$$

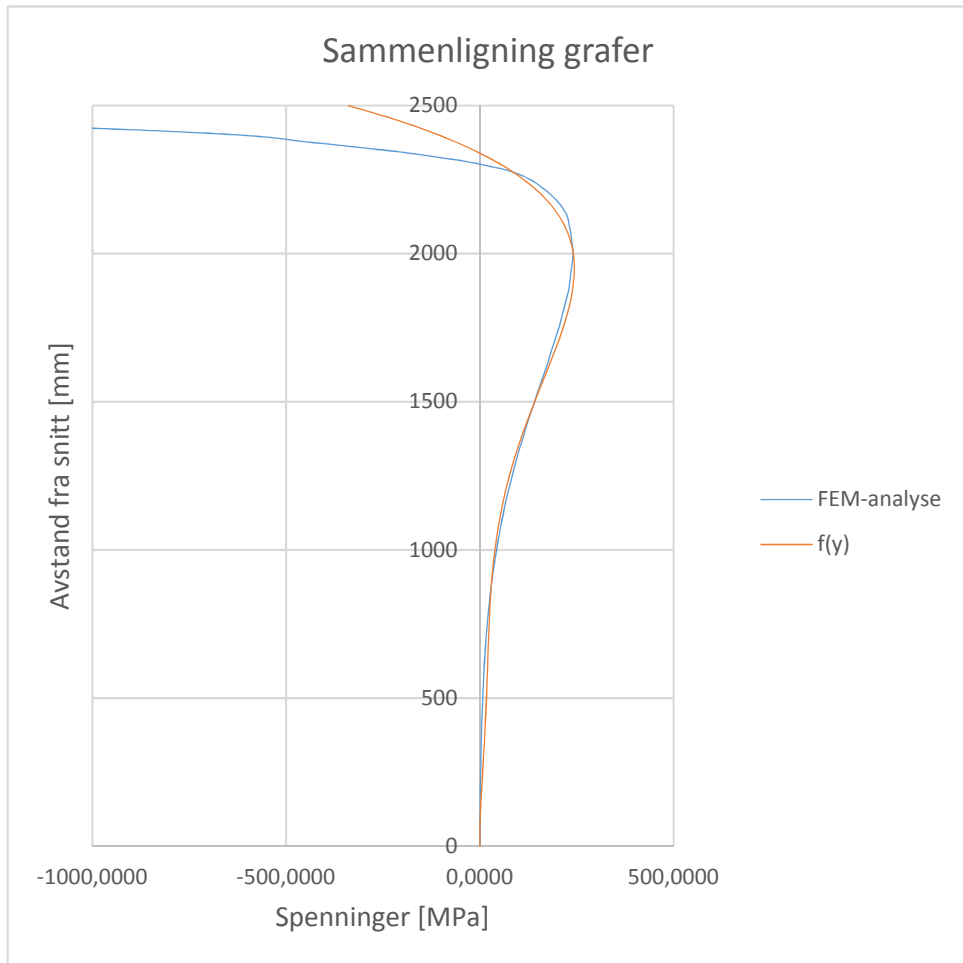
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -1,38E-02 \\ \hline 2,88E-04 \\ \hline -5,93E-07 \\ \hline 4,73E-10 \\ \hline -1,16E-13 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0,0000	1100	50,2439	2275	85,9075
50	-0,0424	1150	57,6957	2300	55,3047
75	0,3485	1200	66,3104	2350	-16,9733
100	0,9528	1250	76,1099	2400	-105,5653
150	2,6416	1300	87,0829	2450	-212,4495
200	4,7427	1350	99,1803	2500	-339,7420
250	7,0322	1400	112,3110		
300	9,3401	1450	126,3373		
350	11,5455	1500	141,0710		
400	13,5725	1550	156,2688		
450	15,3857	1600	171,6278		
500	16,9857	1650	186,7814		
550	18,4052	1700	201,2949		
600	19,7043	1750	214,6611		
650	20,9661	1800	226,2960		
700	22,2927	1850	235,5343		
750	23,8006	1900	241,6254		
800	25,6164	1950	243,7287		
850	27,8724	2000	240,9093		
875	29,2074	2050	232,1340		
900	30,7025	2100	216,2665		
950	34,2373	2150	192,0633		
1000	38,6005	2200	158,1693		
1050	43,9041	2250	113,1136		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a	=	-1,38E-02
b		2,88E-04
c		-5,93E-07
d		4,73E-10
e		-1,16E-13

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
2339,17047	0,0000

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
2339,170	214516,738	138827681	1692,00567

Vedlegg 2

Forsøk 2, tverrsnittstykkelser $d = 250\text{mm}$

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er tatt fra OK søyle til snittet der de horisontale spenningene er null.

Snittet ligger 2500mm fra OK søyle. Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		0,0000		675		0,0592	
25		0,0004		700		0,0650	
50		0,0009		725		0,0713	
75	y_1	0,0014	$f(y_1)$	750		0,0781	
100		0,0021		775		0,0849	
125		0,0028		800		0,0924	
150		0,0036		825		0,1005	
175		0,0044		850		0,1094	
200		0,0054		875		0,1189	
225		0,0066		900		0,1282	
250		0,0078		925		0,1385	
275		0,0091		950		0,1496	
300		0,0106		975		0,1615	
325		0,0122		1000		0,1743	
350		0,0141		1025		0,1868	
375		0,0161		1050		0,2003	
400		0,0182		1075		0,2149	
425		0,0206		1100		0,2304	
450		0,0232		1125		0,2470	
475		0,0261		1150		0,2630	
500	y_2	0,0293	$f(y_2)$	1175		0,2802	
525		0,0325		1200		0,2985	
550		0,0361		1225		0,3180	
575		0,0400		1250		0,3386	
600		0,0444		1275		0,3582	
625		0,0491		1300		0,3790	
650		0,0539		1325		0,4010	

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
1350		0,4243		2250		0,7071	
1375		0,4488		2275	y_5	0,5258	$f(y_5)$
1400		0,4715		2300		0,2358	
1425		0,4954		2325		-0,1629	
1450		0,5205		2350		-0,6703	
1475		0,5467		2375		-1,2865	
1500	y_3	0,5742	$f(y_3)$	2400		-2,4135	
1525		0,5988		2425		-4,5306	
1550		0,6245		2450		-7,6378	
1575		0,6511		2475		-11,7351	
1600		0,6787		2500		-16,8224	
1625		0,7073					
1650		0,7317					
1675		0,7568					
1700		0,7826					
1725		0,8092					
1750		0,8364					
1775		0,8572					
1800		0,8785					
1825		0,9003					
1850		0,9226					
1875		0,9454					
1900		0,9586					
1925		0,9722					
1950		0,9863					
1975		1,0009					
2000		1,0159					
2025		1,0123					
2050		1,0086					
2075		1,0047					
2100	y_4	1,0007	$f(y_4)$				
2125		0,9966					
2150		0,9684					
2175		0,9253					
2200		0,8674					
2225		0,7947					

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y -verdier med tilsvarende funksjonsverdi $f(y)$ er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 75 & 5,63E+03 & 4,22E+05 & 3,16E+07 & 2,37E+09 \\ \hline 500 & 2,50E+05 & 1,25E+08 & 6,25E+10 & 3,13E+13 \\ \hline 1500 & 2,25E+06 & 3,38E+09 & 5,06E+12 & 7,59E+15 \\ \hline 2100 & 4,41E+06 & 9,26E+09 & 1,94E+13 & 4,08E+16 \\ \hline 2275 & 5,18E+06 & 1,18E+10 & 2,68E+13 & 6,09E+16 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} \quad = \begin{array}{|c|} \hline 0,00 \\ \hline 0,03 \\ \hline 0,57 \\ \hline 1,00 \\ \hline 0,53 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1,77E-02 & -8,91E-04 & 1,80E-04 & -1,79E-04 & 9,80E-05 \\ \hline -6,34E-05 & 1,33E-05 & -2,93E-06 & 2,94E-06 & -1,62E-06 \\ \hline 7,06E-08 & -1,95E-08 & 7,38E-09 & -7,87E-09 & 4,36E-09 \\ \hline -3,15E-11 & 9,86E-12 & -4,98E-12 & 6,09E-12 & -3,47E-12 \\ \hline 4,94E-15 & -1,66E-15 & 1,01E-15 & -1,40E-15 & 8,30E-16 \\ \hline \end{array}$$

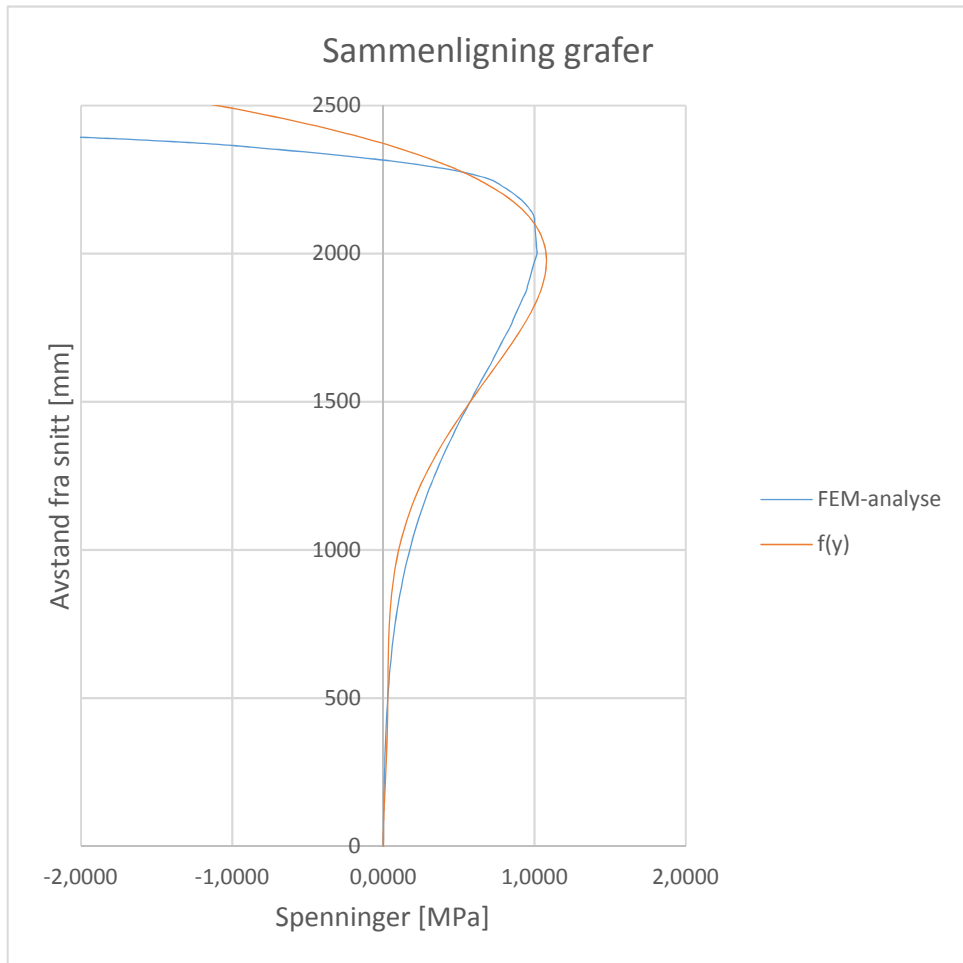
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -2,46E-05 \\ \hline 7,13E-07 \\ \hline -1,81E-09 \\ \hline 1,65E-12 \\ \hline -4,28E-16 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0,0000	1150	0,1899	2300	0,4108
50	0,0003	1200	0,2299	2350	0,1375
75	0,0014	1250	0,2752	2400	-0,1999
100	0,0030	1300	0,3259	2450	-0,6089
150	0,0070	1350	0,3816	2500	-1,0977
200	0,0116	1400	0,4420	2550	-1,6752
250	0,0161	1450	0,5065		
300	0,0202	1500	0,5742		
350	0,0235	1550	0,6441		
400	0,0261	1600	0,7149		
450	0,0280	1650	0,7852		
500	0,0293	1700	0,8532		
550	0,0303	1750	0,9168		
600	0,0313	1800	0,9737		
650	0,0329	1850	1,0212		
700	0,0354	1900	1,0564		
750	0,0395	1950	1,0758		
800	0,0456	2000	1,0757		
850	0,0544	2050	1,0522		
900	0,0663	2100	1,0007		
950	0,0819	2150	0,9164		
1000	0,1017	2200	0,7938		
1050	0,1260	2250	0,6274		
1100	0,1554	2275	0,5258		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a	=	-2,46E-05
b		7,13E-07
c		-1,81E-09
d		1,65E-12
e		-4,28E-16

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
2371,60467	0,0000

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
2371,605	896,679	536468,615	1773,32056

Vedlegg 3

Forsøk 2, tverrsnittstykkelse $d = 500\text{mm}$

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er tatt fra OK søyle til snittet der de horisontale spenningene er null. Snittet ligger 2500mm fra OK søyle. Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		0,0000		650		0,0266	
25		0,0002		675		0,0291	
50		0,0005		700		0,0320	
75	y_1	0,0008	$f(y_1)$	725		0,0351	
100		0,0011		750		0,0384	
125		0,0014		775		0,0417	
150		0,0018		800		0,0454	
175		0,0022		825		0,0494	
200		0,0027		850		0,0537	
225		0,0033		875		0,0584	
250		0,0039		900		0,0629	
275		0,0045		925		0,0679	
300		0,0053		950		0,0733	
325		0,0061		975		0,0792	
350		0,0070		1000		0,0854	
375		0,0080		1025		0,0915	
400		0,0090		1050		0,0981	
425		0,0102		1075		0,1052	
450		0,0115		1100		0,1128	
475		0,0129		1125		0,1208	
500		0,0145		1150		0,1286	
525		0,0161		1175		0,1369	
550		0,0178		1200		0,1458	
575		0,0198		1225		0,1553	
600	y_2	0,0219	$f(y_2)$	1250		0,1653	
625		0,0242		1275		0,1747	

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
1300		0,1848		2175		0,3269	
1325		0,1954		2200		0,2786	
1350		0,2066		2225		0,2217	
1375		0,2184		2250		0,1560	
1400		0,2293		2275	y_5	0,0499	$f(y_5)$
1425		0,2407		2300		-0,1257	
1450		0,2527		2325		-0,3707	
1475		0,2652		2350		-0,6853	
1500	y_3	0,2783	$f(y_3)$	2375		-1,0693	
1525		0,2898		2400		-1,4407	
1550		0,3019		2425		-2,2969	
1575		0,3143		2450		-3,6380	
1600		0,3272		2475		-5,4640	
1625		0,3405		2500		-7,7749	
1650		0,3515					
1675		0,3628					
1700		0,3743					
1725		0,3861					
1750		0,3981					
1775		0,4065					
1800		0,4149					
1825		0,4234					
1850		0,4319					
1875		0,4405					
1900		0,4432					
1925		0,4458					
1950		0,4481					
1975		0,4502					
2000	y_4	0,4522	$f(y_4)$				
2025		0,4429					
2050		0,4328					
2075		0,4218					
2100		0,4101					
2125		0,3975					
2150		0,3665					

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y-verdier med tilsvarende funksjonsverdi f(y) er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 75 & 5,63E+03 & 4,22E+05 & 3,16E+07 & 2,37E+09 \\ \hline 600 & 3,60E+05 & 2,16E+08 & 1,30E+11 & 7,78E+13 \\ \hline 1500 & 2,25E+06 & 3,38E+09 & 5,06E+12 & 7,59E+15 \\ \hline 2000 & 4,00E+06 & 8,00E+09 & 1,60E+13 & 3,20E+16 \\ \hline 2275 & 5,18E+06 & 1,18E+10 & 2,68E+13 & 6,09E+16 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} \quad = \begin{array}{|c|} \hline 0,00 \\ \hline 0,02 \\ \hline 0,28 \\ \hline 0,45 \\ \hline 0,05 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1,72E-02 & -7,70E-04 & 2,75E-04 & -2,07E-04 & 7,56E-05 \\ \hline -5,64E-05 & 1,15E-05 & -4,38E-06 & 3,34E-06 & -1,22E-06 \\ \hline 6,07E-08 & -1,71E-08 & 1,00E-08 & -8,10E-09 & 3,03E-09 \\ \hline -2,68E-11 & 8,80E-12 & -6,64E-12 & 6,00E-12 & -2,34E-12 \\ \hline 4,21E-15 & -1,50E-15 & 1,34E-15 & -1,35E-15 & 5,60E-16 \\ \hline \end{array}$$

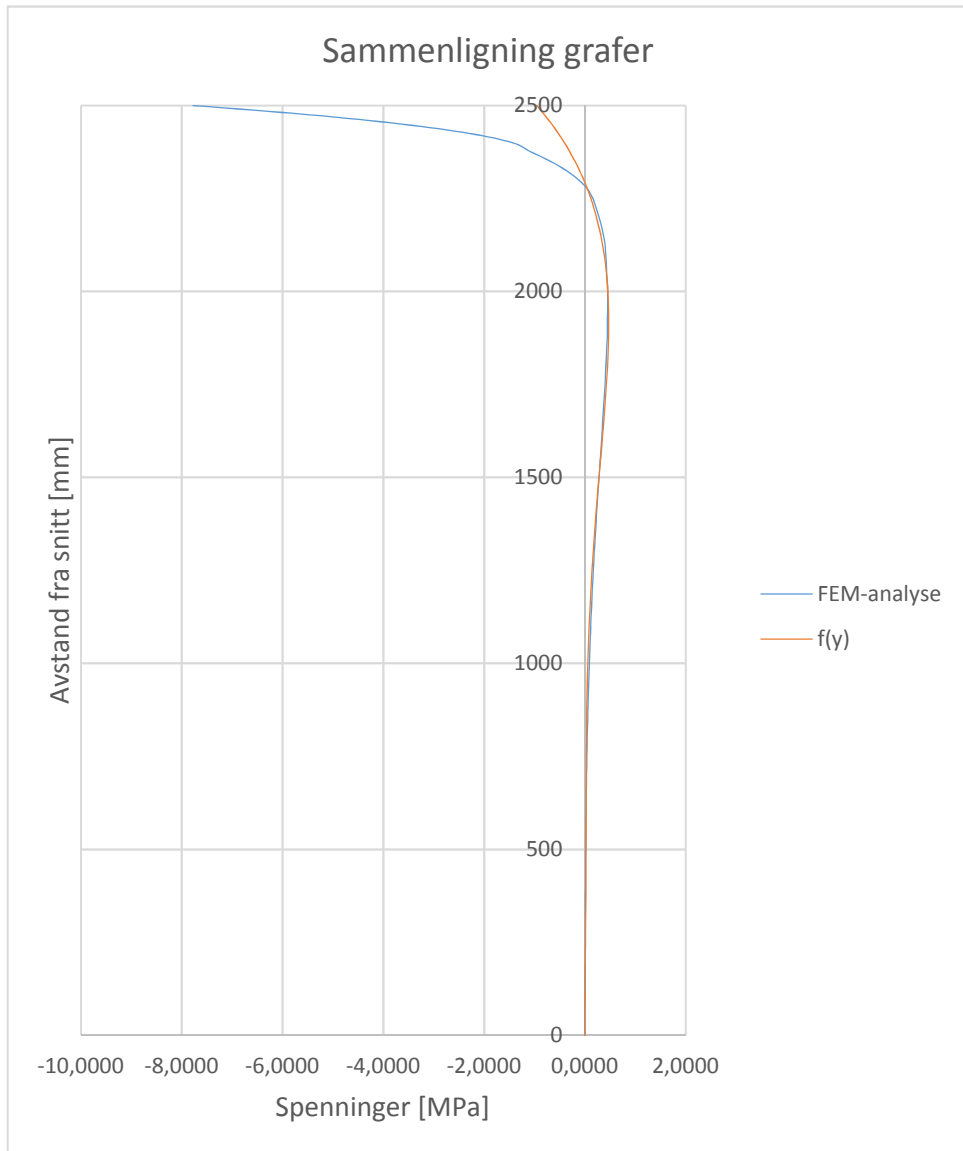
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -1,72E-05 \\ \hline 4,39E-07 \\ \hline -1,05E-09 \\ \hline 9,23E-13 \\ \hline -2,39E-16 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0,0000	1300	0,1625
50	0,0001	1350	0,1888
75	0,0008	1400	0,2171
100	0,0017	1450	0,2471
150	0,0042	1500	0,2783
200	0,0071	1550	0,3100
250	0,0101	1600	0,3416
300	0,0129	1650	0,3723
350	0,0153	1700	0,4009
400	0,0173	1750	0,4262
450	0,0189	1800	0,4471
500	0,0201	1850	0,4619
550	0,0210	1900	0,4690
600	0,0219	1950	0,4665
650	0,0229	2000	0,4522
700	0,0243	2050	0,4239
750	0,0264	2100	0,3790
800	0,0293	2150	0,3149
850	0,0335	2200	0,2285
900	0,0392	2250	0,1165
950	0,0466	2275	0,0499
1000	0,0560	2300	-0,0244
1050	0,0675	2350	-0,1981
1100	0,0815	2400	-0,4086
1150	0,0980	2450	-0,6601
1200	0,1170	2500	-0,9574
1250	0,1385		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a	=	-1,72E-05
b		4,39E-07
c		-1,05E-09
d		9,23E-13
e		-2,39E-16

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
2292,08403	0,000

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
2292,084	381,907	226257,226	1699,64358

Vedlegg 4

Forsøk 2, tverrsnittstykkelse $d = 1500\text{mm}$

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er tatt fra OK søyle til snittet der de horisontale spenningene er null. Snittet ligger 2500mm fra OK søyle. Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		0,0000		650		0,0083	
25		0,0000		675		0,0091	
50		0,0000		700		0,0100	
75	y_1	0,0003	$f(y_1)$	725		0,0111	
100		0,0004		750		0,0122	
125		0,0006		775		0,0132	
150		0,0007		800		0,0143	
175		0,0008		825		0,0156	
200		0,0009		850		0,0171	
225		0,0011		875		0,0187	
250		0,0013		900		0,0201	
275		0,0015		925		0,0217	
300		0,0017		950		0,0235	
325		0,0020		975		0,0256	
350		0,0023		1000		0,0278	
375		0,0026		1025		0,0297	
400		0,0029		1050		0,0319	
425		0,0032		1075		0,0344	
450		0,0036		1100		0,0371	
475		0,0041		1125		0,0401	
500		0,0046		1150		0,0426	
525		0,0050		1175		0,0455	
550		0,0056		1200		0,0487	
575		0,0062		1225		0,0522	
600	y_2	0,0069	$f(y_2)$	1250		0,0561	
625		0,0076		1275		0,0593	

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
1300		0,0630		2175		0,2905	
1325		0,0670		2200		0,2861	
1350		0,0715		2225		0,2900	
1375		0,0764		2250		0,3022	
1400		0,0803		2275	y_5	0,2864	$f(y_5)$
1425		0,0847		2300		0,1894	
1450		0,0896		2325		0,0113	
1475		0,0952		2350		-0,2481	
1500	y_3	0,1012	$f(y_3)$	2375		-0,5886	
1525		0,1056		2400		-0,7691	
1550		0,1106		2425		-2,0257	
1575		0,1165		2450		-4,3583	
1600		0,1231		2475		-7,7669	
1625		0,1305		2500		-12,2516	
1650		0,1350					
1675		0,1406					
1700		0,1473					
1725		0,1553					
1750		0,1643					
1775		0,1682					
1800		0,1742					
1825		0,1822					
1850		0,1923					
1875		0,2044					
1900		0,2065					
1925		0,2125					
1950		0,2224					
1975		0,2361					
2000	y_4	0,2537	$f(y_4)$				
2025		0,2503					
2050		0,2557					
2075		0,2698					
2100		0,2926					
2125		0,3242					
2150		0,3032					

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y-verdier med tilsvarende funksjonsverdi f(y) er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 75 & 5,63E+03 & 4,22E+05 & 3,16E+07 & 2,37E+09 \\ \hline 600 & 3,60E+05 & 2,16E+08 & 1,30E+11 & 7,78E+13 \\ \hline 1500 & 2,25E+06 & 3,38E+09 & 5,06E+12 & 7,59E+15 \\ \hline 2000 & 4,00E+06 & 8,00E+09 & 1,60E+13 & 3,20E+16 \\ \hline 2275 & 5,18E+06 & 1,18E+10 & 2,68E+13 & 6,09E+16 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} \quad = \begin{array}{|c|} \hline 0,00 \\ \hline 0,01 \\ \hline 0,10 \\ \hline 0,25 \\ \hline 0,29 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1,72E-02 & -7,70E-04 & 2,75E-04 & -2,07E-04 & 7,56E-05 \\ \hline -5,64E-05 & 1,15E-05 & -4,38E-06 & 3,34E-06 & -1,22E-06 \\ \hline 6,07E-08 & -1,71E-08 & 1,00E-08 & -8,10E-09 & 3,03E-09 \\ \hline -2,68E-11 & 8,80E-12 & -6,64E-12 & 6,00E-12 & -2,34E-12 \\ \hline 4,21E-15 & -1,50E-15 & 1,34E-15 & -1,35E-15 & 5,60E-16 \\ \hline \end{array}$$

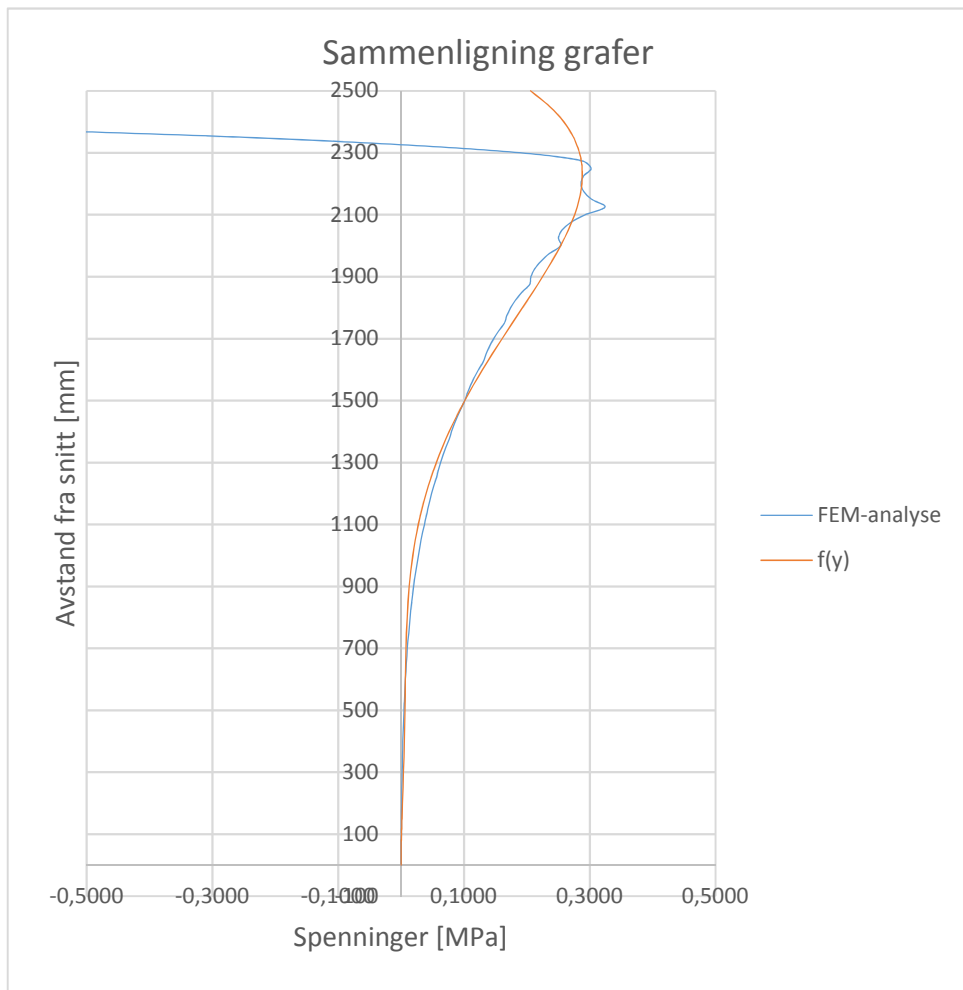
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -2,43E-06 \\ \hline 1,13E-07 \\ \hline -2,70E-10 \\ \hline 2,33E-13 \\ \hline -5,50E-17 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0,0000	1300	0,0560
50	0,0001	1350	0,0657
75	0,0003	1400	0,0765
100	0,0006	1450	0,0884
150	0,0014	1500	0,1012
200	0,0022	1550	0,1150
250	0,0031	1600	0,1296
300	0,0039	1650	0,1448
350	0,0046	1700	0,1607
400	0,0052	1750	0,1768
450	0,0057	1800	0,1931
500	0,0062	1850	0,2093
550	0,0065	1900	0,2250
600	0,0069	1950	0,2399
650	0,0073	2000	0,2537
700	0,0078	2050	0,2658
750	0,0086	2100	0,2758
800	0,0096	2150	0,2833
850	0,0111	2200	0,2875
900	0,0130	2250	0,2879
950	0,0155	2275	0,2864
1000	0,0187	2300	0,2837
1050	0,0226	2350	0,2743
1100	0,0274	2400	0,2588
1150	0,0331	2450	0,2363
1200	0,0397	2500	0,2059
1250	0,0473		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En klarer imidlertid ikke å beskrive den delen av grafen hvor spenningsene går fra strekk til trykk. For de videre betraktningene av tyngdepunktet for strekkspenningsene benyttes derfor en høyde av strekkspenningsfordelingen beskrevet av $f(y)$ slik at formen tilsvarer formen slik den er beskrevet av FEM-analysen. Høyden settes til midtpunktet mellom den maksimale strekkspenningen og punktet hvor spenningsene går fra strekk til trykk. Den maksimale strekkspenningen opptrer ved en høyde på 2125mm. Overgangen mellom strekk og trykk opptrer ved en høyde på 2326mm. Høyden $f(y)$ betraktes med settes til $2125 + (2326-2125)/2 = 2226\text{mm}$.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a	=	-2,43E-06
b		1,13E-07
c		-2,70E-10
d		2,33E-13
e		-5,50E-17

I dette tilfellet benyttes α lik høyden slik den er beskrevet under sammenligningen av grafene.

mm	$f(y)$
2226	0,288

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
2226,000	183,113	79120,5705	1793,91373

Vedlegg 5

Søyletopp akse 4

Beregning av tyngdepunkt for horisontal trykkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er hentet fra OK søyle til snittet der de horisontale spenningene er null. Snittet ligger ca. 7400mm fra OK søyle. Negative spenninger = trykk, positive spenninger = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		1		2600		-211	
96		-2		2697		-229	
193		-4		2793		-248	
289		-7		2889		-268	
385		-10		2985		-289	
482	y_1	-13	$f(y_1)$	3082		-311	
578		-17		3178		-333	
674		-20		3274		-357	
770		-25		3371		-382	
867		-29		3467		-407	
963		-34		3563		-433	
1059		-39		3660		-460	
1156		-45		3756		-487	
1252		-52		3852		-514	
1348		-58		3948		-542	
1445		-66		4045	y_3	-569	$f(y_3)$
1541	y_2	-74	$f(y_2)$	4141		-597	
1637		-82		4237		-623	
1733		-92		4334		-649	
1830		-102		4430		-673	
1926		-112		4526		-696	
2022		-124		4623		-717	
2119		-136		4719		-735	
2215		-150		4815		-750	
2311		-164		4912		-760	
2408		-179		5008		-766	
2504		-195		5104	y_4	-767	$f(y_4)$

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
5200		-760	
5297		-746	
5393		-723	
5489		-688	
5586		-641	
5682		-580	
5778		-500	
5875		-401	
5971		-278	
6067	y_5	-129	$f(y_5)$
6163		51	
6260		265	
6356		516	
6452		809	
6549		1144	
6645		1523	
6741		1944	
6838		2406	
6934		2901	
7030		3423	
7127		3962	
7223		4505	

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y-verdier med tilsvarende funksjonsverdi f(y) er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 482 & 2,32E+05 & 1,12E+08 & 5,38E+10 & 2,59E+13 \\ \hline 1541 & 2,37E+06 & 3,66E+09 & 5,64E+12 & 8,69E+15 \\ \hline 4045 & 1,64E+07 & 6,62E+10 & 2,68E+14 & 1,08E+18 \\ \hline 5104 & 2,61E+07 & 1,33E+11 & 6,79E+14 & 3,46E+18 \\ \hline 6067 & 3,68E+07 & 2,23E+11 & 1,36E+15 & 8,22E+18 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -13,03 \\ \hline -73,79 \\ \hline -569,43 \\ \hline -766,51 \\ \hline -128,96 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4,11E-03 & -9,15E-04 & 2,97E-04 & -2,12E-04 & 5,13E-05 \\ \hline -5,17E-06 & 2,46E-06 & -9,17E-07 & 6,66E-07 & -1,62E-07 \\ \hline 2,12E-09 & -1,27E-09 & 7,02E-10 & -5,33E-10 & 1,34E-10 \\ \hline -3,57E-13 & 2,38E-13 & -1,71E-13 & 1,41E-13 & -3,74E-14 \\ \hline 2,13E-17 & -1,52E-17 & 1,29E-17 & -1,17E-17 & 3,35E-18 \\ \hline \end{array}$$

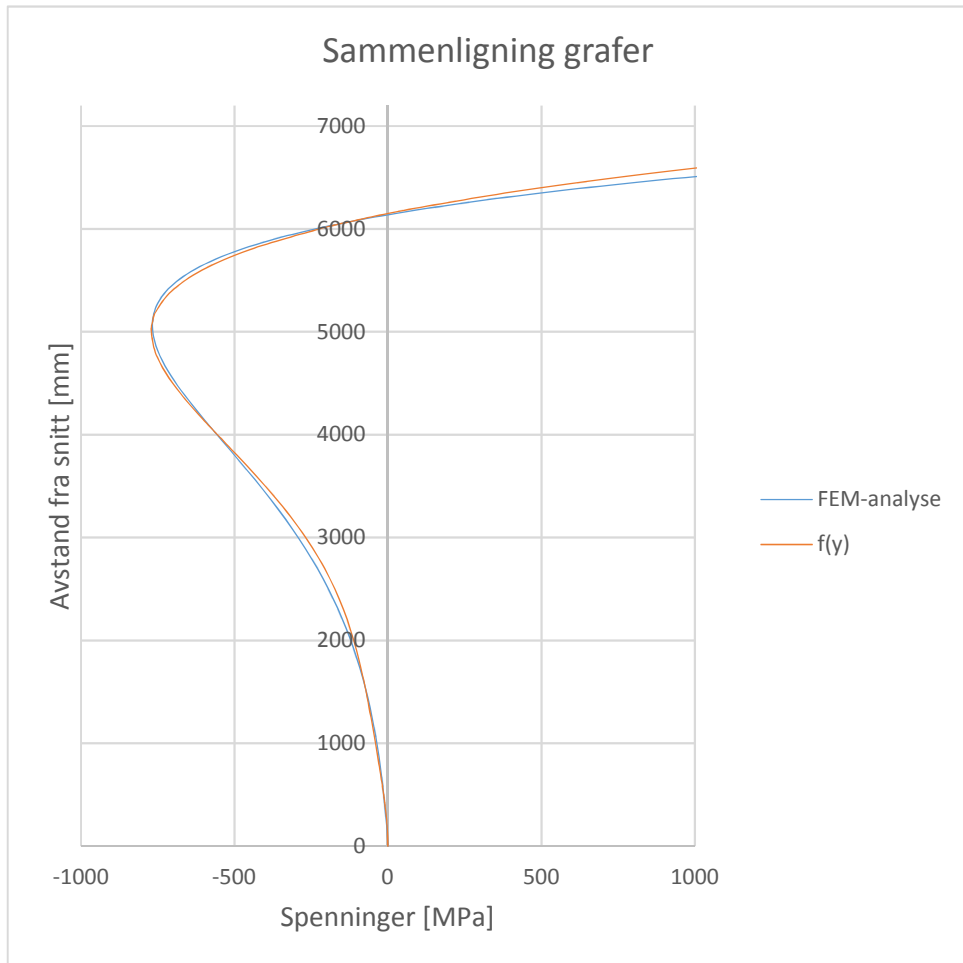
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 8,19E-04 \\ \hline -8,12E-05 \\ \hline 5,73E-08 \\ \hline -1,94E-11 \\ \hline 1,98E-15 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0	4200	-618
200	-3	4400	-675
400	-9	4600	-724
482	-13	4800	-757
600	-19	5000	-770
800	-29	5104	-767
1000	-40	5200	-755
1200	-52	5400	-703
1400	-64	5600	-605
1541	-74	5800	-449
1600	-78	6000	-223
1800	-93	6067	-129
2000	-111	6200	87
2200	-132	6400	497
2400	-158	6600	1023
2600	-189	6800	1684
2800	-225	7000	2501
3000	-268	7200	3497
3200	-316		
3400	-370		
3600	-429		
3800	-491		
4000	-555		
4045	-569		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a		8,19E-04
b		-8,12E-05
c	=	5,73E-08
d		-1,94E-11
e		1,98E-15

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
6149,49793	0,000

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
6149,498	-1981971,5	-3,656E+09	4305,08337

Vedlegg 6

Søyletopp akse 4

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er tatt fra OK søyle til snittet der de horisontale spenningene er null.

Snittet ligger ca. 1825mm fra OK søyle. Negative spenninger = trykk, positive spenninger = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		0	
59		27	
170		92	
280	y_1	180	$f(y_1)$
390		293	
501		439	
611	y_2	623	$f(y_2)$
721		850	
832		1121	
942	y_3	1434	$f(y_3)$
1052		1775	
1163		2115	
1273		2395	
1383	y_4	2499	$f(y_4)$
1494		2137	
1604	y_5	416	$f(y_5)$
1715		-5704	
1825		-19531	

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y -verdier med tilsvarende funksjonsverdi $f(y)$ er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 280 & 7,84E+04 & 2,20E+07 & 6,15E+09 & 1,72E+12 \\ \hline 611 & 3,73E+05 & 2,28E+08 & 1,39E+11 & 8,52E+13 \\ \hline 942 & 8,88E+05 & 8,36E+08 & 7,88E+11 & 7,42E+14 \\ \hline 1383 & 1,91E+06 & 2,65E+09 & 3,66E+12 & 5,07E+15 \\ \hline 1604 & 2,57E+06 & 4,13E+09 & 6,62E+12 & 1,06E+16 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} \quad = \begin{array}{|c|} \hline 179,56 \\ \hline 623,09 \\ \hline 1433,89 \\ \hline 2498,88 \\ \hline 415,86 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1,42E-02 & -1,14E-02 & 6,29E-03 & -2,25E-03 & 7,23E-04 \\ \hline -5,76E-05 & 6,81E-05 & -4,12E-05 & 1,55E-05 & -5,06E-06 \\ \hline 8,29E-08 & -1,19E-07 & 8,37E-08 & -3,44E-08 & 1,15E-08 \\ \hline -5,06E-11 & 8,19E-11 & -6,43E-11 & 2,99E-11 & -1,04E-11 \\ \hline 1,12E-14 & -1,95E-14 & 1,66E-14 & -8,70E-15 & 3,24E-15 \\ \hline \end{array}$$

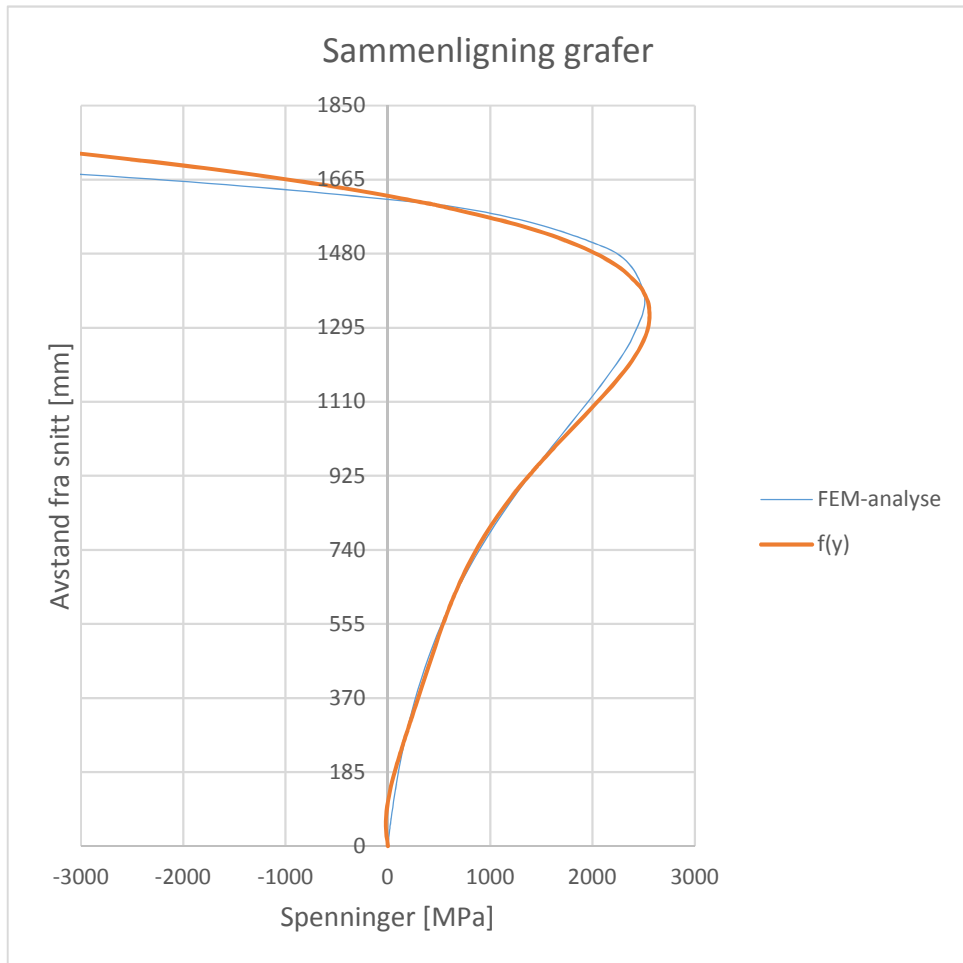
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -8,44E-01 \\ \hline 9,64E-03 \\ \hline -2,06E-05 \\ \hline 2,02E-08 \\ \hline -6,77E-12 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0	1050	1826
50	-21	1100	2012
100	-7	1150	2191
150	30	1200	2350
200	82	1250	2474
250	142	1300	2548
280	180	1350	2550
300	205	1383	2500
350	270	1400	2455
400	334	1450	2237
450	398	1500	1863
500	463	1550	1295
550	532	1600	495
600	606	1604	419
611	623	1650	-585
650	688	1700	-1995
700	780	1750	-3792
750	886	1800	-6037
800	1006	1850	-8798
850	1142		
900	1294		
942	1434		
950	1461		
1000	1640		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b = \text{nullpunktet } \alpha \text{ der } f(\alpha) = 0 \text{ og } \alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a	=	-8,44E-01
b		9,64E-03
c		-2,06E-05
d		2,02E-08
e		-6,77E-12

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
1624,66499	0,00

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
1624,665	1809002,3	911196174	1120,96406

Vedlegg 7

Søyletopp akse 4

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er tatt fra OK søyle til snittet der de horisontale spenningene er null.

Snittet ligger ca. 2427mm fra OK søyle. Negative spenninger = trykk, positive spenninger = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		0		1111		418	
41		1		1152		467	
82		3		1193		518	
123	y_1	5	$f(y_1)$	1234		573	
165		7		1275		631	
206		10		1316		692	
247		13		1357		757	
288		17		1398		822	
329		22		1440		890	
370		27		1481		959	
411		33		1522		1026	
452		41		1563		1095	
494	y_2	49	$f(y_2)$	1604		1156	
535		59		1645		1215	
576		70		1686		1266	
617		83		1727		1304	
658		98		1769		1333	
699		114		1810	y_4	1340	$f(y_4)$
740		132		1851		1327	
781		153		1892		1286	
823		176		1933		1208	
864		202		1974		1091	
905		229		2015		917	
946		261		2057	y_5	680	$f(y_5)$
987		295		2098		370	
1028	y_3	333	$f(y_3)$	2139		-43	
1069		374		2180		-556	

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
2221		-1198	
2262		-1992	
2303		-2900	
2344		-3964	
2386		-5160	
2427		-6398	

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y-verdier med tilsvarende funksjonsverdi $f(y)$ er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 123 & 1,52E+04 & 1,88E+06 & 2,32E+08 & 2,86E+10 \\ \hline 494 & 2,44E+05 & 1,20E+08 & 5,93E+10 & 2,93E+13 \\ \hline 1028 & 1,06E+06 & 1,09E+09 & 1,12E+12 & 1,15E+15 \\ \hline 1810 & 3,28E+06 & 5,93E+09 & 1,07E+13 & 1,94E+16 \\ \hline 2057 & 4,23E+06 & 8,70E+09 & 1,79E+13 & 3,68E+16 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4,52 \\ \hline 49,36 \\ \hline 332,73 \\ \hline 1340,06 \\ \hline 679,52 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1,40E-02 & -2,35E-03 & 5,67E-04 & -1,66E-04 & 7,19E-05 \\ \hline -5,66E-05 & 2,38E-05 & -6,33E-06 & 1,93E-06 & -8,38E-07 \\ \hline 7,51E-08 & -4,13E-08 & 1,54E-08 & -5,27E-09 & 2,33E-09 \\ \hline -4,00E-11 & 2,50E-11 & -1,12E-11 & 4,78E-12 & -2,19E-12 \\ \hline 7,42E-15 & -4,98E-15 & 2,50E-15 & -1,29E-15 & 6,34E-16 \\ \hline \end{array}$$

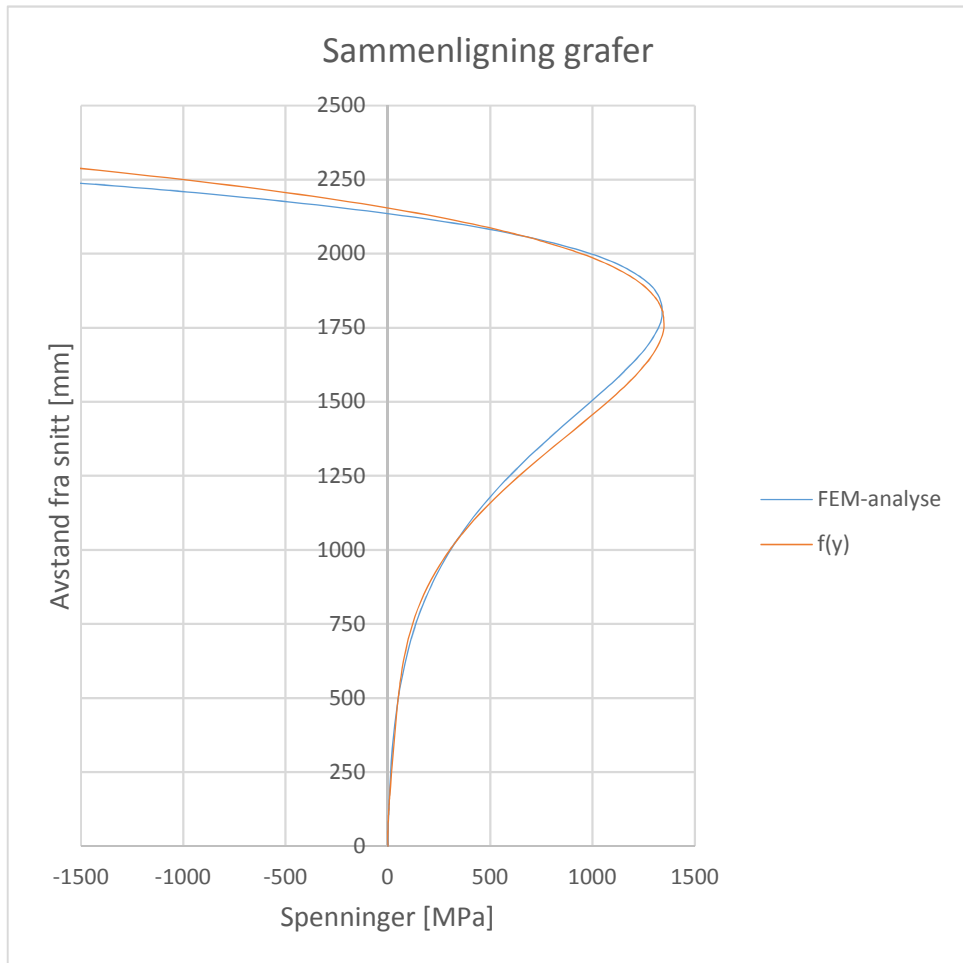
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -3,79E-02 \\ \hline 8,23E-04 \\ \hline -2,04E-06 \\ \hline 2,24E-09 \\ \hline -6,79E-13 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0	1050	358	2150	35
50	0	1100	419	2200	-433
100	3	1150	488	2250	-1001
123	5	1200	562	2300	-1681
150	7	1250	641	2350	-2486
200	12	1300	725	2400	-3429
250	18	1350	812	2450	-4523
300	24	1400	901	2500	-5786
350	30	1450	989		
400	36	1500	1074		
450	43	1550	1154		
494	49	1600	1225		
500	50	1650	1284		
550	59	1700	1327		
600	70	1750	1349		
650	83	1800	1344		
700	100	1810	1340		
750	120	1850	1309		
800	145	1900	1235		
850	176	1950	1116		
900	212	2000	946		
950	254	2050	714		
1000	302	2057	680		
1028	333	2100	414		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a	=	-3,79E-02
b		8,23E-04
c		-2,04E-06
d		2,24E-09
e		-6,79E-13

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
2154,1101	0,00

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
2154,110	1109229,4	650417445	1567,74136

Vedlegg 8

Bruplate

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene er hentet fra snittet der punktlastene er påført til snittet der de

horisontale spenningene er null. Snittet ligger 9280mm fra de påførte punktlastene.

Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
9280		0,0000		1920		0,0343	
8960	y_1	0,9821	$f(y_1)$	1600		0,0311	
8640		0,7327		1280		0,0282	
8320		0,5707		960		0,0255	
8000		0,4588		640		0,0230	
7680		0,3713		320	y_5	0,0206	$f(y_5)$
7360		0,2999		0		0,0184	
7040		0,2464					
6720		0,2047					
6400	y_2	0,1722	$f(y_2)$				
6080		0,1469					
5760		0,1264					
5440		0,1101					
5120	y_3	0,0967	$f(y_3)$				
4800		0,0856					
4480		0,0764					
4160		0,0684					
3840		0,0616					
3520		0,0557					
3200		0,0504					
2880	y_4	0,0457	$f(y_4)$				
2560		0,0415					
2240		0,0377					

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y-verdier med tilsvarende funksjonsverdi f(y) er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8960 & 8,03E+07 & 7,19E+11 & 6,45E+15 & 5,77E+19 \\ \hline 6400 & 4,10E+07 & 2,62E+11 & 1,68E+15 & 1,07E+19 \\ \hline 5120 & 2,62E+07 & 1,34E+11 & 6,87E+14 & 3,52E+18 \\ \hline 2880 & 8,29E+06 & 2,39E+10 & 6,88E+13 & 1,98E+17 \\ \hline 320 & 1,02E+05 & 3,28E+07 & 1,05E+10 & 3,36E+12 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0,98 \\ \hline 0,17 \\ \hline 0,10 \\ \hline 0,05 \\ \hline 0,02 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 6,53E-06 & -9,42E-05 & 1,95E-04 & -2,66E-04 & 4,09E-03 \\ \hline -2,50E-08 & 3,56E-07 & -7,30E-07 & 9,54E-07 & -3,32E-06 \\ \hline 1,52E-11 & -2,05E-10 & 3,97E-10 & -4,03E-10 & 9,44E-10 \\ \hline -3,18E-15 & 3,85E-14 & -6,86E-14 & 5,88E-14 & -1,13E-13 \\ \hline 2,16E-19 & -2,23E-18 & 3,70E-18 & -2,83E-18 & 4,84E-18 \\ \hline \end{array}$$

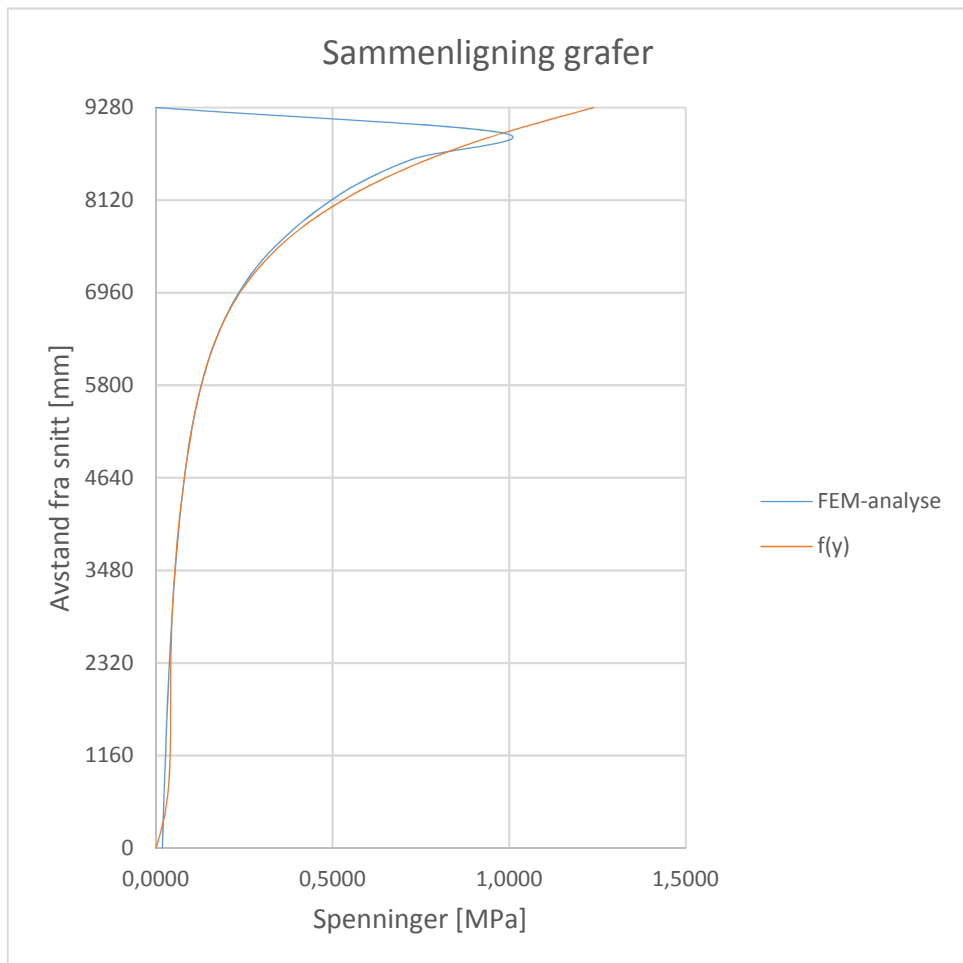
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 8,13E-05 \\ \hline -5,86E-08 \\ \hline 1,91E-11 \\ \hline -2,77E-15 \\ \hline 1,56E-19 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
9280	1,2382	1920	0,0420
8960	0,9821	1600	0,0419
8640	0,7767	1280	0,0413
8320	0,6137	960	0,0387
8000	0,4857	640	0,0326
7680	0,3861	320	0,0206
7360	0,3094	0	0,0000
7040	0,2507		
6720	0,2061		
6400	0,1722		
6080	0,1462		
5760	0,1259		
5440	0,1099		
5120	0,0967		
4800	0,0856		
4480	0,0760		
4160	0,0676		
3840	0,0604		
3520	0,0542		
3200	0,0493		
2880	0,0457		
2560	0,0434		
2240	0,0423		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En klarer imidlertid ikke å beskrive den delen av grafen hvor den går mot null 9280mm fra det betraktede snittet. For de videre betraktningene av tyngdepunktet for spenningene benyttes derfor en høyde av spenningsfordelingen beskrevet av $f(y)$ slik at formen tilsvarende formen slik den er beskrevet av FEM-analysen. Høyden settes til midtpunktet mellom den maksimale strekkspenningen og 9280mm.

Den maksimale strekkspenningen opptrer ved en høyde på 8960mm. Høyden $f(y)$ betraktes med settes til $8960 + (9280 - 8960)/2 = 9120$ mm.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a		8,13E-05
b		-5,86E-08
c	=	1,91E-11
d		-2,77E-15
e		1,56E-19

I dette tilfellet benyttes α lik høyden slik den er beskrevet under sammenligningen av grafene.

mm	$f(y)$
9120	1,1032

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
9120,000	1733,012	3315644,9	7206,77361

Vedlegg 9

Voute

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling.

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningsene er tatt fra voutens lastflate til snittet der de horisontale spenningene er null. Snittet starter ca. 490mm fra lastflaten. Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		-0,0015	
22		0,1657	
45	y_1	0,3825	$f(y_1)$
67		0,6490	
89		0,9652	
111	y_2	1,3309	$f(y_2)$
134		1,7464	
156		2,2114	
178		2,3623	
201		2,4408	
223		2,5578	
245	y_3	2,7135	$f(y_3)$
268		2,9078	
290		3,1407	
312		3,4122	
334		3,6812	
357	y_4	3,3875	$f(y_4)$
379		2,3588	
401	y_5	0,5949	$f(y_5)$
424		-1,9040	
424		-1,9042	
446		-5,1381	
468		-9,1076	
490		-13,8119	

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y -verdier med tilsvarende funksjonsverdi $f(y)$ er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 45 & 1,99E+03 & 8,86E+04 & 3,95E+06 & 1,76E+08 \\ \hline 111 & 1,24E+04 & 1,39E+06 & 1,54E+08 & 1,72E+10 \\ \hline 245 & 6,01E+04 & 1,47E+07 & 3,62E+09 & 8,87E+11 \\ \hline 357 & 1,27E+05 & 4,54E+07 & 1,62E+10 & 5,77E+12 \\ \hline 401 & 1,61E+05 & 6,46E+07 & 2,59E+10 & 1,04E+13 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0,38 \\ \hline 1,33 \\ \hline 2,71 \\ \hline 3,39 \\ \hline 0,59 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5,87E-02 & -2,21E-02 & 6,21E-03 & -3,60E-03 & 1,51E-03 \\ \hline -1,08E-03 & 7,02E-04 & -2,28E-04 & 1,37E-04 & -5,77E-05 \\ \hline 6,62E-06 & -5,27E-06 & 2,33E-06 & -1,51E-06 & 6,46E-07 \\ \hline -1,67E-08 & 1,48E-08 & -7,98E-09 & 5,91E-09 & -2,63E-09 \\ \hline 1,50E-11 & -1,41E-11 & 8,73E-12 & -7,37E-12 & 3,46E-12 \\ \hline \end{array}$$

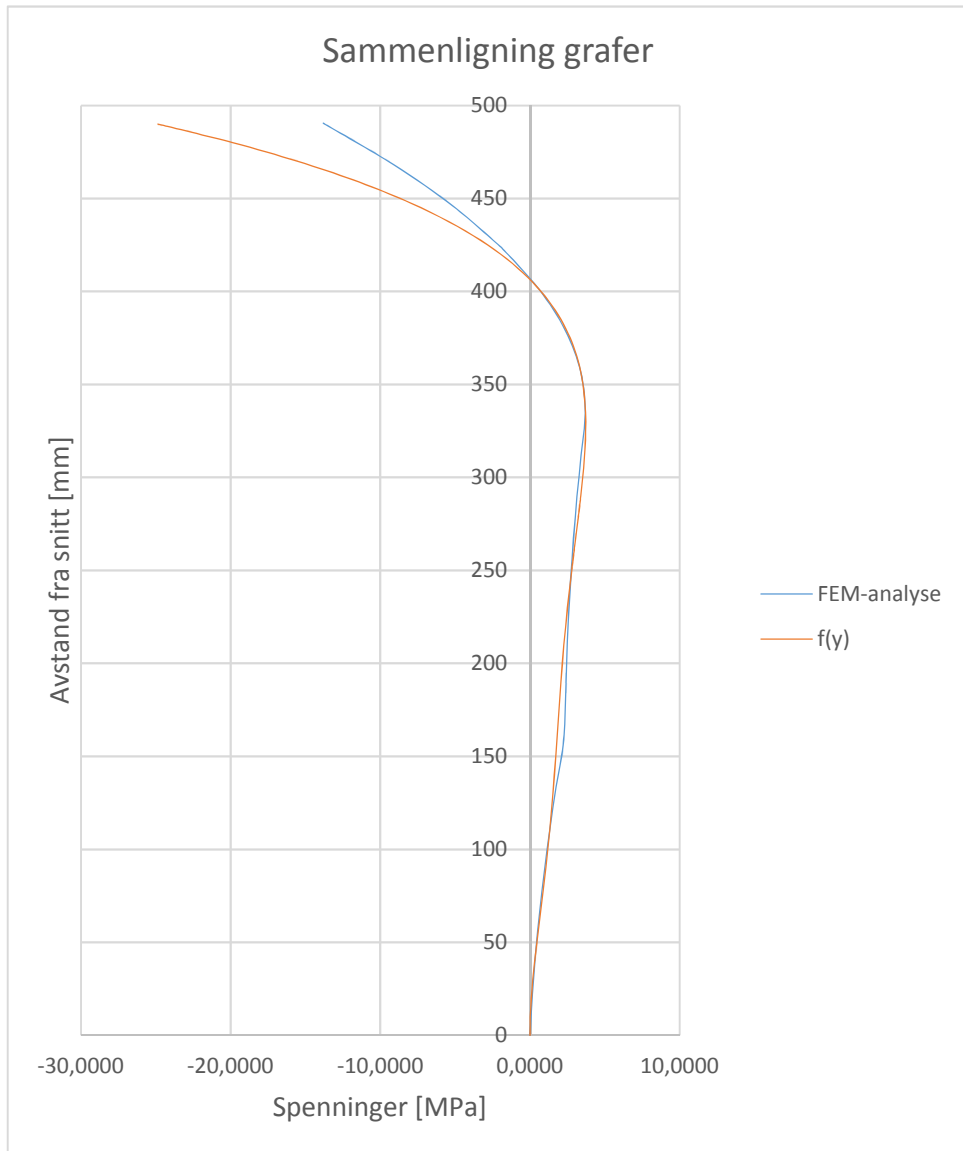
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -1,37E-03 \\ \hline 3,33E-04 \\ \hline -2,89E-06 \\ \hline 1,01E-08 \\ \hline -1,22E-11 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0,0000	280	3,2449
10	0,0168	290	3,3921
20	0,0842	300	3,5239
30	0,1884	310	3,6306
40	0,3176	320	3,7003
50	0,4621	330	3,7190
60	0,6138	340	3,6705
70	0,7666	350	3,5362
80	0,9157	360	3,2947
90	1,0578	370	2,9221
100	1,1908	380	2,3916
110	1,3137	390	1,6733
120	1,4266	400	0,7342
130	1,5300	410	-0,4619
140	1,6256	420	-1,9550
150	1,7153	430	-3,7882
160	1,8013	440	-6,0088
170	1,8861	450	-8,6677
180	1,9725	460	-11,8200
190	2,0628	470	-15,5249
200	2,1595	480	-19,8461
210	2,2643	490	-24,8515
220	2,3788		
230	2,5037		
240	2,6389		
250	2,7834		
260	2,9350		



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a	=	-1,37E-03
b		3,33E-04
c		-2,89E-06
d		1,01E-08
e		-1,22E-11

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
406,406106	0,000

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
406,406	810,967	121690,788	256,349676

Vedlegg 10

Voute

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningene går i senter av vouten med 10° helning mot lastflaten. Avstandene er målt fra bunn og går mot lastflaten til vouten. Lastflaten er plassert på høyde 831mm. Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra bunn [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra bunn [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
831		-26,36		247		0,58	
808		-18,46		225		0,47	
786		-11,84		202		0,39	
764		-6,49		180	y_4	0,32	$f(y_4)$
741		-2,42		157		0,25	
719	y_1	0,39	$f(y_1)$	135		0,19	
696		1,93		112		0,14	
674		2,19		90		0,09	
651	y_2	2,39	$f(y_2)$	67	y_5	0,06	$f(y_5)$
629		2,84		45		0,03	
606		3,15		22		0,02	
584		3,31		0		0,00	
561		3,33					
539		3,21					
517		2,94					
494		2,59					
472		2,34					
449		2,10					
427		1,89					
404		1,69					
382		1,51					
359		1,35					
337		1,21					
314		1,02					
292		0,86					
269	y_3	0,71	$f(y_3)$				

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y -verdier med tilsvarende funksjonsverdi $f(y)$ er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

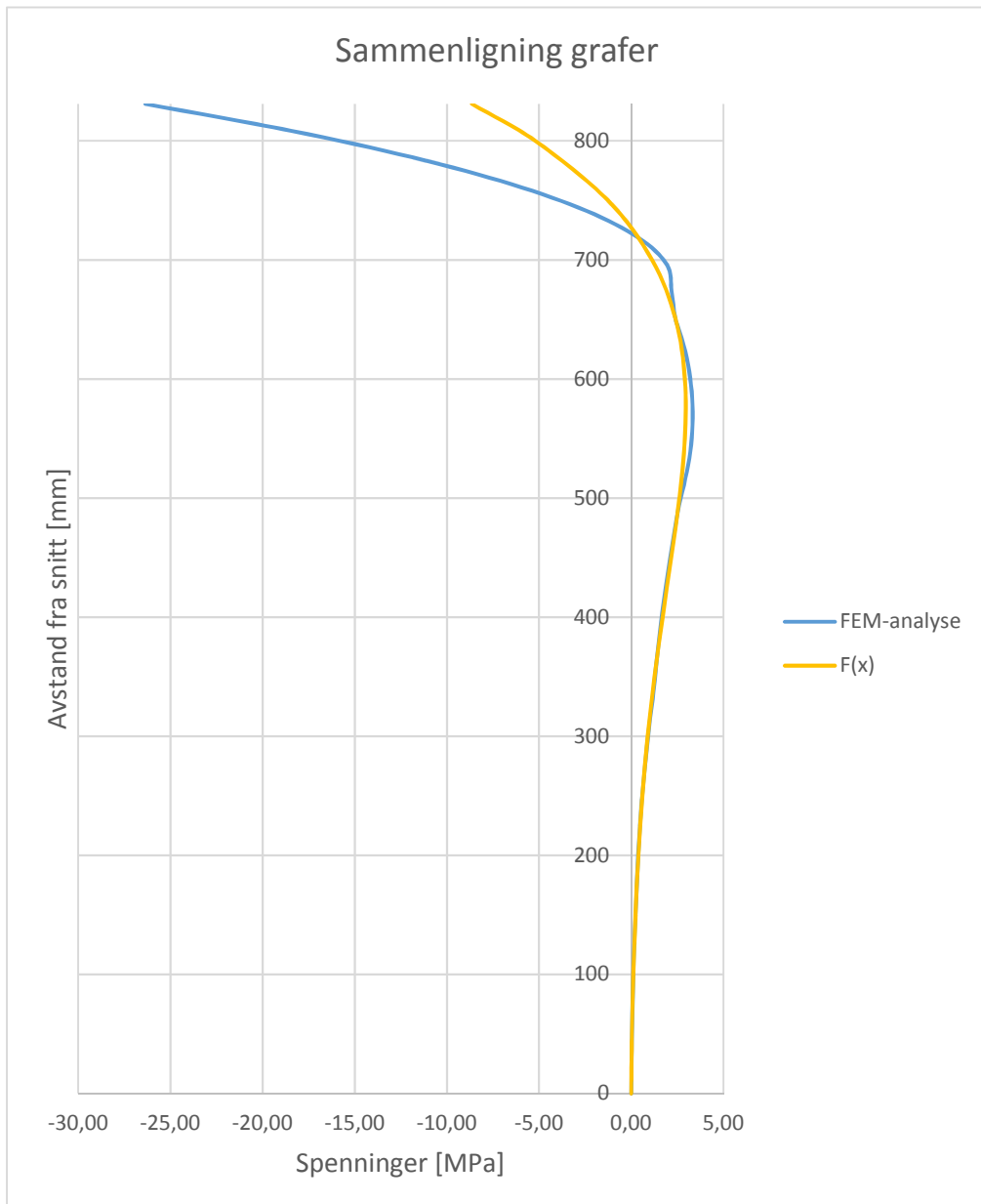
$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 719 & 5,16E+05 & 3,71E+08 & 2,67E+11 & 1,92E+14 \\ \hline 651 & 4,24E+05 & 2,76E+08 & 1,80E+11 & 1,17E+14 \\ \hline 269 & 7,26E+04 & 1,96E+07 & 5,27E+09 & 1,42E+12 \\ \hline 180 & 3,23E+04 & 5,80E+06 & 1,04E+09 & 1,87E+11 \\ \hline 67 & 4,54E+03 & 3,06E+05 & 2,06E+07 & 1,39E+09 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0,39 \\ \hline 2,39 \\ \hline 0,71 \\ \hline 0,32 \\ \hline 0,06 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2,78E-04 & -5,08E-04 & 6,75E-03 & -1,84E-02 & 3,90E-02 \\ \hline -7,14E-06 & 1,30E-05 & -1,58E-04 & 3,96E-04 & -4,76E-04 \\ \hline 5,44E-08 & -9,75E-08 & 9,76E-07 & -2,06E-06 & 1,95E-06 \\ \hline -1,53E-10 & 2,68E-10 & -1,93E-09 & 3,71E-09 & -3,13E-09 \\ \hline 1,31E-13 & -2,17E-13 & 1,19E-12 & -2,17E-12 & 1,72E-12 \\ \hline \end{array}$$



Det konkluderes med at grafene er like nok til at funksjonen $f(y)$ kan benyttes.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a		1,60E-04
b		1,38E-05
c	=	-5,64E-08
d		2,02E-10
e		-2,08E-13

Bruker Solver i Excel for å finne nullpunktet:

mm	$f(y)$
727,008464	0,000

Uttrykket for y_0 løses som følgende:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
727,008	964,667	221793,153	497,09165

Vedlegg 11

Voute

Beregning av tyngdepunkt for horisontal strekkspenningsfordeling

Fordeling av horisontale spenninger fra FEM-analyse (Abaqus)

Spenningsene er tatt fra området i undergurten der spenningsene går fra strekk til trykk rett bak den påførte punktlasten til snittet, hvor de horisontale spenningsene er null. Snittet ligger 9280mm fra den påførte punktlasten. Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk.

Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$	Avstand fra snitt [mm]	y_i	Spenninger [Mpa]	$f(y_i)$
0		0,0000		8320		0,2669	
320		0,0037		8640		0,1578	
640		0,0063		8960	y_5	0,2588	$f(y_5)$
960	y_1	0,0094	$f(y_1)$	9280		0,3144	
1280		0,0130		9600		-0,6158	
1600		0,0173					
1920		0,0223					
2240	y_2	0,0281	$f(y_2)$				
2560		0,0350					
2880		0,0430					
3200		0,0523					
3520		0,0632					
3840		0,0760					
4160	y_3	0,0911	$f(y_3)$				
4480		0,1089					
4800		0,1304					
5120		0,1565					
5440		0,1890					
5760		0,2292					
6080		0,2668					
6400		0,2650					
6720		0,2769					
7040		0,2915					
7360		0,3200					
7680	y_4	0,3438	$f(y_4)$				
8000		0,3365					

En ønsker å uttrykke verdiene fra Abaqus med en funksjon. Benytter en femtegradsfunksjon:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

Fem y-verdier med tilsvarende funksjonsverdi f(y) er valgt i tabellen fra FEM-analysen slik at:

$$f(y_i) = ay_i + by_i^2 + cy_i^3 + dy_i^4 + ey_i^5$$

Dette settes opp på matriseform: $YA = X$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 & y_1^5 \\ \hline y_2 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 & y_2^5 \\ \hline y_3 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 & y_3^5 \\ \hline y_4 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 & y_4^5 \\ \hline y_5 & y_5^2 & y_5^3 & y_5^4 & y_5^5 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 960 & 9,22E+05 & 8,85E+08 & 8,49E+11 & 8,15E+14 \\ \hline 2240 & 5,02E+06 & 1,12E+10 & 2,52E+13 & 5,64E+16 \\ \hline 4160 & 1,73E+07 & 7,20E+10 & 2,99E+14 & 1,25E+18 \\ \hline 7680 & 5,90E+07 & 4,53E+11 & 3,48E+15 & 2,67E+19 \\ \hline 8960 & 8,03E+07 & 7,19E+11 & 6,45E+15 & 5,77E+19 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline f(y_1) \\ \hline f(y_2) \\ \hline f(y_3) \\ \hline f(y_4) \\ \hline f(y_5) \\ \hline \end{array} \quad = \begin{array}{|c|} \hline 0,01 \\ \hline 0,03 \\ \hline 0,09 \\ \hline 0,34 \\ \hline 0,26 \\ \hline \end{array}$$

A matrisen kan dermed beregnes:

$$A = Y^{-1}X$$

$$Y^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3,03E-03 & -1,37E-03 & 3,43E-04 & -6,34E-05 & 2,32E-05 \\ \hline -2,82E-06 & 2,08E-06 & -5,93E-07 & 1,17E-07 & -4,31E-08 \\ \hline 8,73E-10 & -7,85E-10 & 2,88E-10 & -6,44E-11 & 2,43E-11 \\ \hline -1,09E-13 & 1,08E-13 & -4,59E-14 & 1,29E-14 & -5,08E-15 \\ \hline 4,73E-18 & -4,97E-18 & 2,32E-18 & -7,91E-19 & 3,38E-19 \\ \hline \end{array}$$

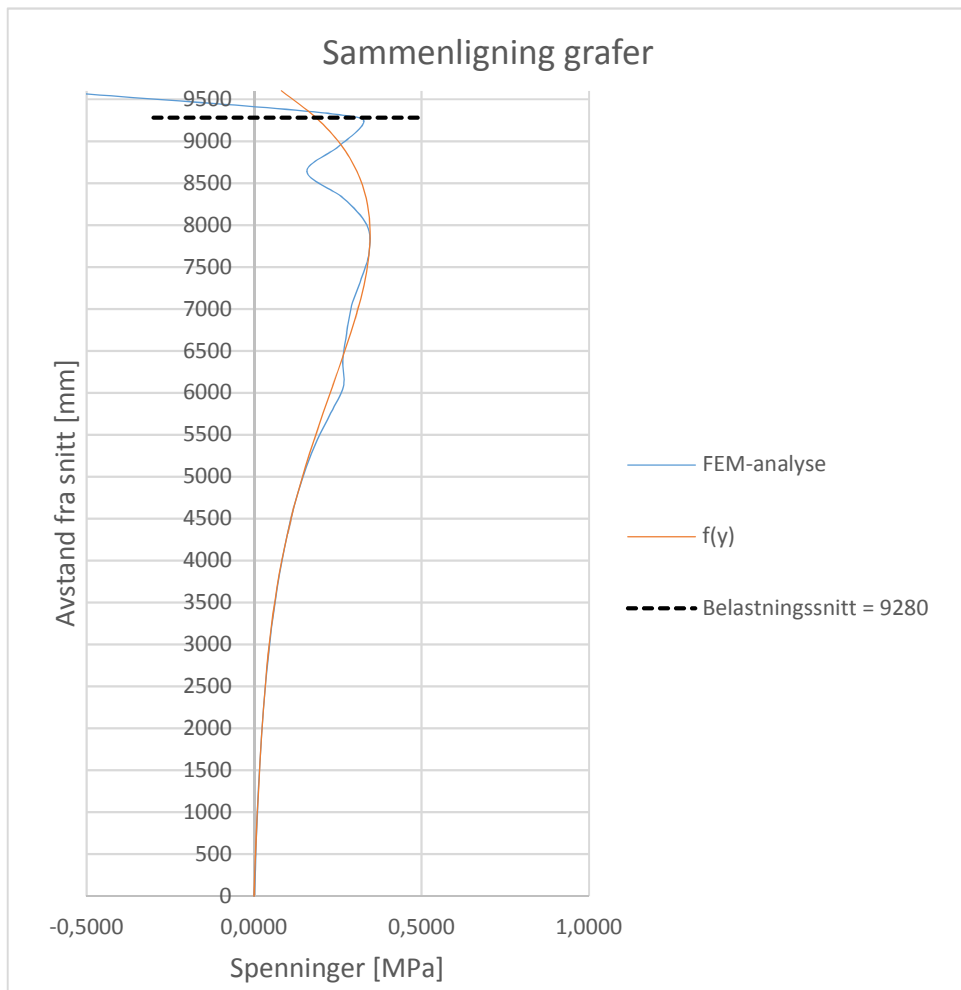
$$A = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 5,57E-06 \\ \hline 6,97E-09 \\ \hline -3,51E-12 \\ \hline 9,53E-16 \\ \hline -6,87E-20 \\ \hline \end{array}$$

Fordeling av horisontale spenninger med $f(y)$

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

(Negative verdier = trykk, positive verdier = strekk)

Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]	Avstand fra snitt [mm]	Spenninger [Mpa]
0	0,0000	8640	0,3071
320	0,0024	8960	0,2588
640	0,0057	9280	0,1854
960	0,0094	9600	0,0817
1280	0,0135		
1600	0,0179		
1920	0,0227		
2240	0,0281		
2560	0,0345		
2880	0,0420		
3200	0,0511		
3520	0,0622		
3840	0,0754		
4160	0,0911		
4480	0,1093		
4800	0,1302		
5120	0,1535		
5440	0,1790		
5760	0,2062		
6080	0,2344		
6400	0,2625		
6720	0,2892		
7040	0,3130		
7360	0,3320		
7680	0,3438		
8000	0,3457		
8320	0,3347		



Det konkluderes med at funksjonen $f(y)$ godt nok representerer grafen fra FEM-analysen med hensyn til å bestemme tyngdepunkt.

En klarer imidlertid ikke å beskrive den delen av grafen hvor spenningsene går fra strekk til trykk. For de videre betraktningene av tyngdepunktet til strekkspenningsene benyttes derfor $f(y)$. Høyden settes til punktet hvor grafene krysser hverandre ved høyden 8960.

En ønsker å finne tyngdepunktet til den delen av grafen som beskriver strekket.
Beregner tyngdepunktet y_0 med følgende formel:

$$y_0 = \frac{M_x}{M}$$

Densiteten ρ tas ikke med i beregningene ($\rho = 1$).

$$M = A$$

$$M_x = \int_a^b y[f(y) - g(y)]dy$$

der

$$a = 0$$

$b =$ nullpunktet α der $f(\alpha) = 0$ og $\alpha > 0$
(overgang fra strekk til trykk)

$$g(y) = 0$$

Utrykket blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy$$

Finner først nullpunktet α til grafen. Plasseringen av dette utgjør den totale høyden strekket virker over.

Som vist tidligere har en:

$$f(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$$

der

a		5,57E-06
b		6,97E-09
c	=	-3,51E-12
d		9,53E-16
e		-6,87E-20

I dette tilfellet benyttes α lik høyden slik den er beskrevet under sammenligningen av grafene.

mm	$f(y)$
8960	0,259

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \int_0^\alpha y \cdot f(y) dy = \frac{1}{A} \left[[y \cdot F(y)]_0^\alpha - \int_0^\alpha F(y) dy \right]$$

der

$$F(y) = \int f(y) dy$$

$$A = \int_0^\alpha f(y) dy = [F(y)]_0^\alpha = \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right)$$

Det totale uttrykket for tyngdepunktet blir:

$$y_0 = \frac{1}{A} \left[\alpha \left(\frac{a\alpha^2}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} + \frac{c\alpha^4}{4} + \frac{d\alpha^5}{5} + \frac{e\alpha^6}{6} \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{6} + \frac{b\alpha^4}{12} + \frac{c\alpha^5}{20} + \frac{d\alpha^6}{30} + \frac{e\alpha^7}{42} \right) \right]$$

α	$[F(y)]_0^\alpha$	$\int_0^\alpha F(y) dy$	y_0
8960,000	1321,968	3132775,61	6590,21828