NTNU
Det skapende universitet

Elevers forståelse av den deriverte

En casestudie om R2-elevers forståelse av
den deriverte representert grafisk

Kjersti Fandrem

Master i realfag
Innlevert: juni 2016
Hovedveileder: Frode Rønning, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min studietid på lektorutdanningen i realfag ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. Arbeidet med oppgaven har vært utfordrende, men samtidig spennende og svært lærerikt og jeg tar med meg nyttig kunnskap inn i arbeidslivet som lektor.

Først vil jeg takke min veileder, Heidi Strømskag, for gode råd og konstruktive tilbakemeldinger i forbindelse med oppgaven. Du har alltid vært positiv til mine ideer og vært tilgjengelig når jeg har trengt veiledning.

Videre vil jeg takke alle de flotte vennene mine som jeg har tilbrakt studietiden min sammen med, dere har gjort disse årene utrolig bra. Jeg vil takke familien min, som alltid støtter meg og er stolte av meg. Jeg vil også takke Øivind, som alltid oppmuntrer meg og har tro på meg.

Sist men ikke minst, vil jeg takke lærerne og de fire elevene som sa seg villige til å delta i dette forskningsprosjektet. Uten dere hadde ikke denne oppgaven vært mulig å gjennomføre.

Oslo, 1. Juni 2016

Kjersti Fandrem

Sammendrag

Denne masteroppgaven har som hensikt å undersøke hvilke begrensninger videregåendeelever som tar faget R2 opplever i forbindelse med den deriverte representert grafisk. Studien undersøker også hvordan deres lærer kan påvirke disse begrensningene. Oppgaven skal besvare følgende forskningsspørsmål: ”Hvilke begrensninger for forståelse kan man finne hos fire R2-elever angående sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan endringsrate?”, ”Hvilke begrensninger for forståelse kan man finne hos fire R2-elever angående overgangen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon?” og ”Hvordan påvirker læreren gjennom sitt syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk?”. Studien følger et kvalitativt forskningsdesign, og blir gjennomført på en videregående skole i Rogaland. Fire elever og én lærer bidrar som informanter for å besvare forskningsspørsmålene.

I studien blir det brukt flere forskningsmetoder for å svare på forskningsspørsmålene. De fire elevene arbeider individuelt med oppgaver knyttet til den deriverte representert grafisk. Underveis i arbeidet må de forklare hvordan de tenker og det stilles oppfølgingsspørsmål. Videre gjennomføres det nye oppgaver i par, hvor oppgavene er mer praktiske. I denne situasjonen har elevene dialog med hverandre, men blir også stilt oppfølgingsspørsmål. Læreren blir intervjuet og observert i en undervisningsøkt.

Studien avdekker feil og misoppfatninger som kan være en begrensning for elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk. For overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate blir det funnet misoppfatninger om gjennomsnittlig endringsrate, misoppfatninger om momentan endringsrate og manglende mestring av utregning av stigningstall. For sammenhengen mellom graf til funksjon og graf til derivertfunksjon blir det funnet manglende forståelse av den deriverte som endringsrate og forståelse av derivertgrafen som en prosess. Lærerens syn på derivasjon som en mekanisk prosess og et viktig redskap i videre utdanning, samt mye bruk av regneoppgaver kan være en begrensning for elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk.

Abstract

This master thesis attempts to identify the limitations of high school students who take the subject R2 experience concerning the derivative represented graphically. The study also includes how their teacher can affect these limitations. The thesis will answer the following research questions: "What limitations of understanding can be observed for four R2 students regarding the relationship between average rate of change and instantaneous rate of change?", "What limitations of understanding can be observed for four R2 students regarding transitions between the graph of a function and the graph of the derivative function?" and "How does the teacher affect the students' understanding of the derivative represented graphically through his views on derivation and use of graphs during teaching sessions?". The study follows a qualitative research design, and is carried out at a high school in Rogaland. Four students and one teacher participates as informants to answer the research questions.

Several research methods are used in the study to answer the research questions. The four students work individually with tasks related to the derivative represented graphically. During the work they need to explain their thought process and answer follow-up questions. Further, additional tasks are solved in pairs where the tasks are more practical. In this situation, the students communicate with each other, but will also be asked follow-up questions. The teacher is interviewed and observed in a teaching session.

The master thesis reveals errors and misconceptions that may be a limitation of students' understanding of the derivative represented graphically. For the transition from the average rate of change to instantaneous rate of change there is found misconceptions about the average rate of change, misconceptions about instantaneous rate of change and inadequate knowledge of how to calculate the slope. For the connection between the graph of the function and the graph of the derivative function there is found a lacking understanding of the derivative as a rate of change and an understanding of the graph of the derivative function as a process. The teacher's view of differentiation as a mechanical process and an important tool in further education, as well as excessive use of calculations can be a limitation for students' understanding of the derivative represented graphically.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

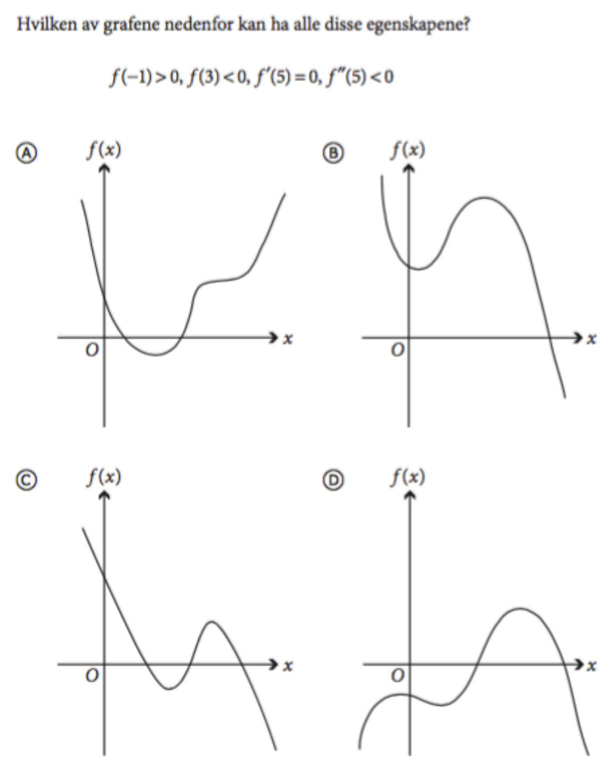
1.1 Bakgrunn for studien

Under et skolebesøk tidlig i studietiden på lektorutdanningen, hadde jeg en samtale med en lærer hvor jeg uttrykte at jeg synes det var utfordrende å skape forståelse hos noen svake elever. Jeg hadde undervist en liten gruppe elever på et grupperom og ønsket at elevene skulle forstå hvorfor de løste en oppgave på måten de gjorde, og ikke bare pugge en regel. Denne læreren mente at det jeg gjorde var helt unødvendig, og at noen elever bare måtte lære seg ”papegøyeregler”. Det var ikke noe håp for disse elevene, og man måtte bare håpe at de husket reglene til de var ferdige med matematikkundervisningen. Denne kommentaren har jeg tenkt mye på i ettertid.

Da jeg senere ble introdusert for begrepene instrumentell og relasjonell forståelse (Skemp, 1978), begynte jeg å reflektere over min egen forståelse av faget og hvordan jeg jeg selv hadde lært matematikk i grunnskolen og på videregående. Innenfor matematikkfaget på videregående skole er derivasjon et sentralt emne i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2016). Når jeg tenker tilbake husker jeg hovedsakelig å ha derivert ulike funksjonsuttrykk, funnet ekstremalpunkter og tegnet fortegnsskjema. Hva den deriverte til en funksjon *er* kan jeg ikke huske at det var stort fokus på. Forsto jeg egentlig bakgrunnen for reglene jeg brukte? Burde dette temaet blitt presentert på en annen måte?

TIMSS står for *Trends In Mathematics and Science Study*, og er en internasjonal komparativ trendstudie som skal måle elevers kunnskap i matematikk (Grønmo et al., 2010). *Advanced* henviser til at studien gjelder elever som har full fordypning i matematikk eller fysikk i videregående skole. Da TIMSS Advanced ble gjennomført i 2008 for matematikk deltok ti land: Armenia, Filippinene, Iran, Italia, Libanon, Nederland, Norge, Russland, Slovenia og Sverige. Resultater fra denne studien viste at norske elever presterer svakt i matematikk sammenlignet med de andre deltakerlandene (Grønmo et al., 2010). Sammen med Sverige er Norge det landet som har vist størst tilbakegang fra undersøkelsen i 1995. En undersøkelse som TIMSS Advanced kan gi verdifull informasjon om nivået blant elever som tar full fordypning i matematikk og fysikk.

Man kan sammenligne kunnskapsnivået med de andre deltakerlandene, og egen nasjonal utvikling over en tidsperiode. Oppgaven nedenfor er fra undersøkelsen i 2008:



Figur 1: Kalkulusoppgave 8 (Grønmo et al., 2010, side 97).

På denne oppgaven var resultatet for norske elever klart svakere enn det internasjonale gjennomsnittet, og bare 31% svarte alternativ C som var det korrekte svaret (Grønmo et al., 2010). Hele 22% prosent svarte alternativ D. Det er ikke bare nyttig å vite hvilke feil elevene gjør, men også å få innsikt i elevenes tanker bak et svar. Å vite noe om dette kan gjerne gjøre det lettere for en lærer å legge til rette for at elevene skal løse oppgavene med en høyere grad av måloppnåelse. Gjennom kvalitativ forskning er mulig å få dypere innsikt i *hvorfor* en elev ga alternativ D som svar og hvilke misoppfatninger som ligger til grunn. Å få innsikt i elevens tanker bak svarene de gir var mitt mål med dette forskningsprosjekt.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Denne studien har som formål å undersøke hvilke feil og misoppfatninger som kan begrense forståelsen en gruppe elever som har valgt høyeste nivå for matematikk i den videregående skolen (R2) har av av derivasjon. Den deriverte kan representeres på ulike måter. For å begrense denne oppgaven har jeg derfor valgt å se nærmere på en grafisk representasjon, som jeg mener er en naturlig tilnærming til begrepet. For å kunne mestre å arbeide med den deriverte representert grafisk, må eleven være kjent med en grafisk fremstilling av funksjoner. Eleven må også forstå sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan endringsrate. Det er flere faktorer som påvirker elevenes forståelse av den deriverte. For å kunne forbedre min egen undervisningspraksis ønsket jeg derfor å undersøke hvordan læreren kan påvirke elevenes forståelse. Dette ga opphav til følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilke begrensninger for forståelse kan man finne hos fire R2-elever angående sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan endringsrate?
2. Hvilke begrensninger for forståelse kan man finne hos fire R2-elever angående overgangen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon?
3. Hvordan påvirker læreren gjennom sitt syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk?

For å svare på de to første forskningsspørsmålene, ble fire elever som tok faget R2 brukt som informanter. Elevene ble hver for seg intervjuet, hvor de under intervjuet skulle løse oppgaver. Oppgavene var laget for gi best mulig innsikt i elevenes kunnskap om emnet, og underveis måtte de forklare hvordan de hadde tenkt for å løse oppgaven. Etter at de fire individuelle intervjuene var gjennomført, ble det gjort to parintervjuer. Temaet for oppgavene og kunnskapen som ble testet var det samme. Oppgavene var likevel åpnere og mer praktisk rettet, ettersom det var et mål å skape god dialog og samarbeid mellom de to elevene. For å svare på det siste forskningsspørsmålet ble det også tatt i bruk to forskningsmetoder for å styrke kvaliteten til studien. Lærerens undervisningspraksis ble undersøkt gjennom to ulike tilnærminger; Læreren ble intervjuet om sin undervisning og sine tanker rundt emnet derivasjon, i tillegg ble han observert under en undervisningsøkt med temaet derivasjon.

1.3 Oppgavens oppbygning

Denne oppgaven består av tilsammen seks hovedkapitler. I dette kapittelet har jeg gitt bakgrunn for valg av tema for oppgaven, og beskrevet viktigheten med å utføre en slik studie. Jeg har presentert formål med studien og forskningsspørsmålene.

I kapittel 2, teorikapittelet, vil den teorien som jeg valgte som rammeverk for min oppgave bli beskrevet. Jeg vil gå nærmere inn på teori om prosess og objekt som er sentralt i denne oppgaven. Jeg vil også ta for meg teori om begrepsbilde og begrepsdefinisjon, før jeg presenterer instrumentell og relasjonell forståelse. Videre vil jeg forklare den teoretiske bakgrunnen for grafisk representasjon av den deriverte, og presentere aktuelle læreplanmål. Til slutt vil teori om feil og misoppfatninger bli presentert. Jeg vil også gjengi noen utvalgte resultater fra tidligere forskning.

I kapittel 3, metodekapittelet, vil jeg presentere forskningsdesignet, og si noe om utvalget av elever for undersøkelsen. Videre vil jeg beskrive de ulike forskningsmetodene som ble tatt i bruk, og hvordan det innsamlede datamaterialet ble analysert. Jeg vil også gjennomgå et utvalg av oppgavene som ble gitt under intervjuene, og reflektere over styrker og svakheter. I metodekapittelet gjøres også noen etiske betraktninger knyttet til min studie.

I kapittel 4, analysekapittelet, vil jeg presentere sentrale resultater fra mitt arbeid med analysen. I kapittel 4.1 og 4.2 vil begrensninger som ble funnet i forbindelse med overgang fra gjennomsnittlig til momentan endringsrate og sammenheng mellom grafen til en funksjon og grafen til derivertfunksjon bli analysert. I kapittel 4.3 analyserer jeg forutsetninger for forståelse gjennom lærerens syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen.

I kapittel 5, diskusjonskapittelet, vil jeg oppsummere resultatene fra analysen, og diskutere resultatene i henhold til teori. Jeg vurderer kvaliteten på min studie gjennom Gubas (1981) fire kriterier for troverdighet i en kvalitativ studie: kredibilitet, overførbarhet, avhengighet og bekreftbarhet. Jeg vil også vurdere muligheter for videre forskning.

I oppgavens siste kapittel, kapittel 6, vil jeg gjøre en oppsummering av min studie. Jeg vil oppsummere hvilke tendenser min undersøkelse viser, hva jeg har lært ved å gjennomføre dette prosjektet og gjøre noen didaktiske refleksjoner angående temaet derivasjon.

2. Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere teori som jeg har valgt som bakgrunn for denne studien. I det første delkapittelet presenteres prosess og objekt. Videre har jeg også innenfor studier om forståelse valgt å se på begrepsbilde og begrepsdefinisjon og instrumentell og relasjonell forståelse. Etterpå blir nødvendig matematisk teori om den deriverte representert grafisk beskrevet, i tillegg til en beskrivelse av derivasjons plass i den norske læreplanen. Til slutt i teorikapittelet vil jeg presentere teori om feil og misoppfatninger, og gjengi noen resultater fra tidligere forskning.

2.1 Prosess og objekt

Innenfor matematikk er det viktig å skille mellom å utføre derivasjon og den deriverte som et objekt i seg selv. For å forklare dette nærmere vil jeg videre i dette delkapittelet presentere teori om prosess og objekt (Sfard, 1991).

Matematikk er et abstrakt fagområde sammenlignet med andre fagområder, som for eksempel biologi eller geologi. I biologi kan vi studere dyr eller mennesker, og i geologi kan vi studere steiner eller naturfenomener. De matematiske begrepene er ikke like tilgjengelige. Selv om vi skriver ned en funksjon eller tegner grafen til funksjonen, er dette bare en *representasjon* av begrepet funksjon. Dette skaper et skille mellom en operasjonell oppfatning av et begrep – *en prosess* og en strukturell oppfatning av begrepet – *et objekt* (Sfard, 1991).

Å se på et matematisk begrep som et objekt innebærer å være i stand til å se på det som en unik og virkelig ting, som en statisk struktur (Sfard, 1991). Det innebærer å kunne gjenkjenne begrepet når det er representert på ulike måter. Å ha en strukturell oppfatning av begrepet derivasjon innebærer å ha kunnskap om den deriverte. Det innebærer å kunne kjenne igjen den deriverte representert på ulike måter, for eksempel grafisk eller som formeluttrykket for grenseverdien i et punkt (definisjonen av den deriverte i punktet). Ettersom matematikken er abstrakt, skapes derimot ofte en operasjonell oppfatning av de matematiske begrepene (Sfard, 1991). Dette innebærer at begrepet i *motsetning* til den strukturelle oppfatningen ses på som dynamisk, at man finner det matematiske begrepet ved å gjennomføre en rekke handlinger (Sfard, 1991). Dersom eleven ser på derivasjon som en prosess innebærer dette at han eller hun ser på derivasjon som å utføre derivasjonsregler på et uttrykk for å komme frem til den deriverte. Et eksempel for dette er å bruke derivasjonsregelen for potensfunksjoner, $f'(x) = nx^{n-1}$, for å derivere potensfunksjonen $f(x) = x^n$, hvor n og x er reelle tall.

Sfard (1991) legger vekt på at både prosess- og objektoppfatningen er en del av det matematiske begrepet, men at prosessoppfatningen blir utviklet før objektoppfatningen. Videre skiller hun mellom tre utviklingsfaser; interiorisering, kondensering og reifisering. Dette innebærer i hvilken grad eleven evner å se på det matematiske begrepet som en helhet. På det laveste nivået mestrer eleven å utføre prosesser på det matematiske begrepet, for eksempel å bruke derivasjonsregler på ulike funksjoner. På det høyeste nivået skjer et skifte hvor eleven fullstendig evner å se på det matematiske begrepet som en helhet. Dette er kognitive prosesser hos eleven som det ikke er mulig å måle direkte. De måles eksternt gjennom å se på elevenes oppførsel, holdninger og evner (Sfard, 1991).

Innenfor derivasjon er oppgavene som gis i videregående skole delt opp i enklere underoppgaver, og hint eller forklaringer er gitt i oppgaven for å hjelpe eleven mot svaret (Gueudet, 2008). Dermed vil ikke eleven trenge å utvikle den matematiske tankegangen i samme grad. Den deriverte fremstilles også som et hjelpemiddel i den videregående skolen, for eksempel for funksjonsdrøfting, mens den blir studert i seg selv på universitetet (Gueudet, 2008). Disse forskjellene skaper et gap mellom undervisningen i de to institusjonene, og gjør overgangen til mer avansert matematikk krevende.

2.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Tall og Vinner (1981) skiller mellom begrepsbilde og begrepsdefinisjon. Uttrykket begrepsbilde blir brukt om hele den kognitive strukturen som eleven assosierer ved et emne, med andre ord hvilket innhold eleven legger til et gitt matematisk emne. Dette innebærer alle egenskaper og prosesser som har blitt bygget opp over lang tid, gjennom erfaringer som eleven har gjort tidligere i skoleløpet. Elevens begrepsbilde for et emne er hele tiden under utvikling, ettersom eleven gjør nye erfaringer og dermed utvikler sin forståelse. En begrepsdefinisjon er derimot, som uttrykket tilsier, de ordene som blir brukt for å gi en presis definisjon av det gitte matematiske begrepet (Tall & Vinner, 1981). Dette kan være en matematisk definisjon, som innebærer at definisjonen må være godkjent av et stort flertall som har kunnskap om emnet. En slik definisjon finner man for eksempel i lærebøker. Det finnes dermed flere definisjoner av et gitt begrep. Den deriverte kan for eksempel defineres ved en formel for grenseverdi, grafisk som stigningstallet til en tangent eller verbalt som momentan endringsrate. En begrepsdefinisjon kan også være elevens egen definisjon. Begrepsdefinisjonen er dermed knyttet til elevens begrepsbilde.

Et eksempel på en begrepsdefinisjon kan være den moderne definisjonen av begrepet funksjon, også kalt Dirichlet-Bourbakis begrepet, ”en relasjon mellom to mengder A og B, som til enhver verdi i A tilordner nøyaktig én verdi i B” (Vinner & Dreyfus, 1989, s. 357). En elev vil ikke nødvendigvis huske denne definisjonen, og elevens begrepsdefinisjon vil blir farget av det daværende begrepsbildet (Tall & Vinner, 1981). Begrepsbildet inneholder kanskje en idé om at funksjoner består av formler gitt ved matematiske symboler, og dette kan dermed inngå i elevens begrepsdefinisjon. Dersom læreren presenterer den generelle begrepsdefinisjonen, men bruker mange eksempler hvor formler er representert, vil funksjon som en formel utvikles og få større plass i elevens begrepsbilde, mens begrepsdefinisjonen ikke vil være like aktiv i den kognitive strukturen.

Når eleven gjør erfaringer rundt et emne, kan noen av erfaringene føre til en gal oppfatning av begrepet. Et eksempel innenfor derivasjon er at elevene ofte lærer om den deriverte ved å først se på gjennomsnittlig endringsrate. Når dette videre skal overføres til momentan endringsrate, vil noen elever fortsatt se på denne endringsraten som en gjennomsnittlig endringsrate i et veldig lite intervall (Tall & Vinner, 1981). Dette er et eksempel på at dersom elevens begrepsbilde ikke samsvarer med teori, kan det skape en kognitiv konflikt. Slike kognitive konflikter skaper rom for læring. Et problem er likevel om det er en konflikt mellom begrepsbildet og en gitt begrepsdefinisjon. I det tilfellet kan eleven avvise begrepsdefinisjonen (Tall & Vinner, 1981).

2.3 Instrumentell og relasjonell forståelse

Skemp (1978) skiller mellom to kategorier for forståelse innenfor matematikkfaget: relasjonell forståelse og instrumentell forståelse. Å ha relasjonell forståelse for et emne innebærer å vite *hva* man skal gjøre, og enda viktigere *hvorfor* man skal gjøre det (Skemp, 1978). Instrumentell forståelse kan på en annen side ses på som "rules without reasons". Jeg oversetter dette til regler uten grunngivning. Et eksempel innenfor derivasjon kan være en elev som har lært seg at formelen for å derivere potensfunksjonen $f(x) = x^n$ er gitt ved $f'(x) = nx^{n-1}$, hvor n og x er reelle tall. Eleven mestrer denne formelen for potenser av ulik grad og for oppgitte polynomer, og får riktig svar på alle regneoppgavene. Denne eleven vet *hva* man må gjøre for å få riktig svar, men spørsmålet er om eleven vet *hvorfor* man bruker den oppgitte formelen. Andre eksempler jeg kan nevne innenfor derivasjon er kjerneregelen, brøkregelen, derivasjon av sinus-, cosinus-, logaritme- og eksponentialfunksjoner.

Det finnes argumenter for praktisering av både instrumentell og relasjonell forståelse. Å undervise med fokus på instrumentell forståelse er gjerne enkelt og mindre tidkrevende (Skemp, 1978). Innenfor et avgrenset tema kan man fort lære en regel som igjen gir mulighet til å oppnå mange korrekte svar. Å mestre oppgaver kan være svært positivt for elevens selvfølelse, og oppnås gjerne hurtigere gjennom undervisning for instrumentell forståelse sammenlignet med undervisning for relasjonell forståelse (Skemp, 1978).

Et av argumentene som gis for å fremheve relasjonell forståelse bygger på antall regler som eleven må huske (Skemp, 1978). De instrumentelle reglene er ofte gjeldende i spesifikke tilfeller, og man kan fort gjøre feil i nye situasjoner hvor regelen ikke gjelder lenger dersom man ikke forstår *hvorfor* den gjelder. Instrumentell forståelse innebærer altså gjerne at elevene må huske et økende antall sett med regler, mens relasjonell forståelse derimot krever at man må forstå en grunnleggende generell sammenheng. Er denne forståelsen tilstede, er det mulig å bruke kunnskapen om dette generelle i mer komplekse oppgaver (Skemp, 1978).

2.4 Grafisk representasjon av derivasjonsbegrepet

2.4.1 Funksjon

Når en størrelse er avhengig av en annen størrelse, for eksempel at arealet av en sirkel er avhengig av sirkelens radius, defineres den første størrelsen som en funksjon av den siste (Adams & Essex, 2013). Arealet av sirkelen, definert som $A(r) = \pi r^2$, er en funksjon av sirkelens radius. En funksjon kan i følge Janvier (1987) presenteres på fire ulike måter; som en formel, en graf, en tabell eller ved å beskrive situasjonen verbalt. Å oversette fra én representasjonsform til en annen, for eksempel fra en funksjonen representert ved en formel til grafisk representasjon av funksjonen, er en psykologisk prosess som kan være svært krevende for elevene. Janvier (1987) hevder at det er allmenn akseptert at ulike representasjoner rundt et matematisk emne blir brukt i læringsprosessen, men at selve oversettelsesprosessen er oversett i lærebøker i matematikk.

TRANSLATION PROCESSES

To / From	Situations, Verbal Description	Tables	Graphs	Formulae
Situations, Verbal Description		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading off		Curve fitting
Formulae	Parameter Recognition	Computing	Sketching	

Figur 2: Oversettelser for funksjoner (Janvier, 1987, s. 28).

Ubuz (2007) hevder at det er forskjellige kognitive prosesser knyttet til grafer. Han skiller mellom tolkning (interpretation) av en graf og prosessen med å konstruere en graf. Å tolke en graf innebærer evnen til å gi mening til grafen og forstå hva den forteller. Prosessen med å konstruere en graf innebærer derimot å bruke punkter fra en tabell eller en funksjon til å tegne grafen (Ubuz, 2007).

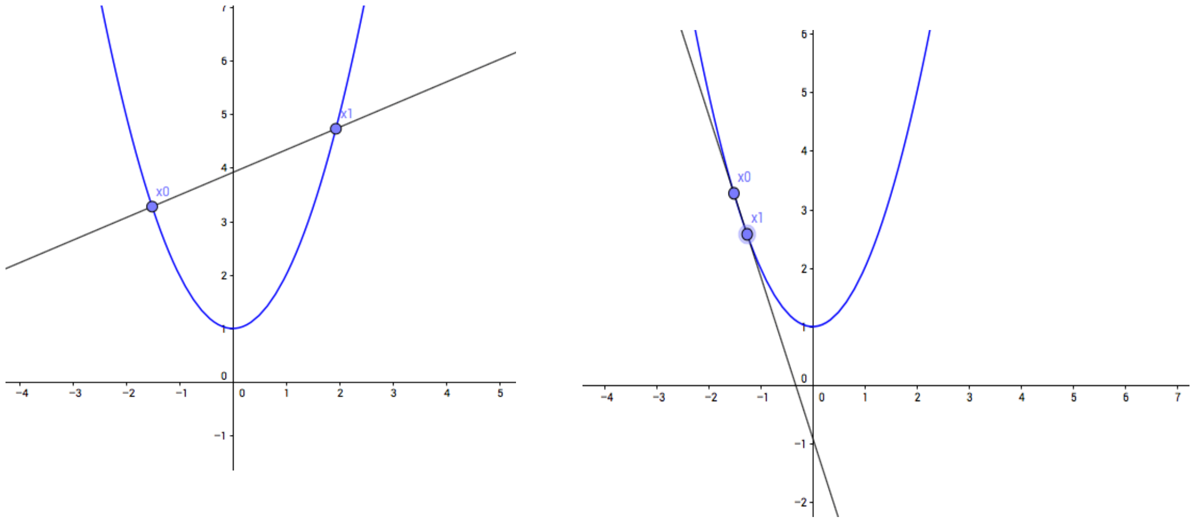
2.4.2 Derivasjon

Den deriverte av en funksjon *f* er en annen funksjon definert som:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

for alle punkter *x* i definisjonsmengden til *f* hvor denne grenseverdien eksisterer (Adams & Essex, 2013). Den deriverte i et punkt x_0 er altså grenseverdien til endringen i funksjonsverdi (Δy) i forhold til endringen i argumentverdi (Δx) når Δx går mot null. Dette betyr at den deriverte forteller noe om hvor mye funksjonen $f(x)$ øker eller minker i punktet x_0. Mer presist kan man si at den deriverte angir den momentane *endringsraten* i punktet x_0.

Mellom to punkter i definisjonsmengden, x_0 og x_1, kan det trekkes en linje. Dette er vist i figur 3. Stigningstallet til denne sekanten utgjør den gjennomsnittlige endringsraten til funksjonen i intervallet mellom de to punktene. Dersom punktet x_1 nærmer seg x_0 når x_0 holdes i ro, vil sekanten mellom punktene nærme seg tangenten i punktet x_0. Ettersom den deriverte er definert som grenseverdien når Δx går mot null, ser vi altså at den deriverte, eller endringsraten når punktet x_1 møter punktet x_0, er lik stigningstallet til tangenten i punktet x_0.



Figur 3: Grafen til en funksjon med sekant mellom punktene x_0 og x_1. På grafen til høyre nærmer punktet x_1 seg punktet x_0, og sekanten ligger nært tangenten i punktet x_0.

Derivasjon har stor nytteverdi, både i teoretisk og praktisk forstand. I realfagsmatematikken på videregående skole er gjerne derivasjon først og fremst nyttig for funksjonsdrøfting. Gjennom derivasjon kan man si noe om funksjonens ekstremalpunkter og krumning. På et høyere matematisk nivå er derivasjon knyttet til for eksempel Taylorrekker og lineær approksimasjon. I praktiske situasjoner er derivasjon knyttet til områder som fart, akselerasjon eller reaksjonshastighet. Derivasjon er også et nyttig verktøy for å analysere populasjonsvekst innenfor biologi eller for å finne marginalkostnad for produksjon av en vare.

2.4.3 Funksjoner og derivasjon i læreplanen

Funksjoner er i læreplanen for første året på videregående skole et av fire hovedtema for både den teoretiske og praktiske matematikken (Utdanningsdirektoratet, 2016). Kompetansemålene her innebærer blant annet at elevene skal mestre overgangen mellom ulike representasjoner. Innenfor den teoretiske matematikken skal de også kunne finne gjennomsnittlig vekstfart og en tilnærmet verdi for momentan vekstfart, og kunne gi en praktisk tolkning av dette. Begrepet vekstfart innebærer hvor fort en funksjonsverdi endrer seg i forhold til endring i argumentverdien. I min studie vil jeg bruke begrepet endringsrate, som i større grad åpner for endring i både positiv og negativ retning. Som en naturlig fortsettelse introduseres videre begrepet derivasjon, og etter å ha gjennomført dette faget skal eleven kunne gjøre greie for definisjonen av den deriverte. Man skal kunne bruke denne definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for polynomfunksjoner, og kunne bruke regelen til å drøfte funksjonen (Utdanningsdirektoratet, 2016). I den praktiske matematikken er fokus å kunne bruke funksjoner som beskriver praktiske situasjoner ved å finne nullpunkter og ekstremalpunkter.

I andre klasse på videregående skole, kan man velge å fortsette med teoretisk eller praktisk matematikk som er tretimers fag, eller man kan velge mellom femtimers fagene matematikk for samfunnsfag (S1) eller matematikk for realfag (R1). Ettersom jeg i denne studien arbeider med elever som har tatt matematikk for realfag, vil jeg fokusere på denne læreplanen. Mine forskningsspørsmål fokuserer på R2-elever, men ettersom derivasjon gjennomgås i faget R1 er det denne læreplanen jeg har valgt å ta utgangspunkt i. I læreplanen for R1 er et av kompetansemålene innenfor hovedområdet funksjoner å kunne gjøre rede for begrepene kontinuitet, grenseverdi og deriverbarhet (Utdanningsdirektoratet, 2016). De skal kunne bruke formler for å derivere ulike typer funksjoner, som for eksempel eksponentialfunksjoner eller logaritmefunksjoner, og kunne bruke den deriverte til å drøfte funksjoner. Når det gjelder funksjoner skal elevene kunne tegne grafer til funksjoner, og ut i fra disse kunne tolke grunnleggende egenskaper til funksjonen.

2.5 Feil og misoppfatninger

Donaldson (1963) studerer barns tankeprosess i arbeid med ulike oppgaver. I denne sammenheng analyserer hun også svar som ikke er riktige, og skiller mellom ulike årsaker til hvordan individet har kommet frem dette svaret. Begrepet *feil* er ofte brukt som *feil svar*, men også som *feil* underveis som leder til et svar (Donaldson, 1963, s. 35). Donaldson (1963) hevder at det er viktig å skille mellom disse to, og at en elev som gir et riktig svar likevel kan gjøre feil. Det er prosessen underveis som er avgjørende.

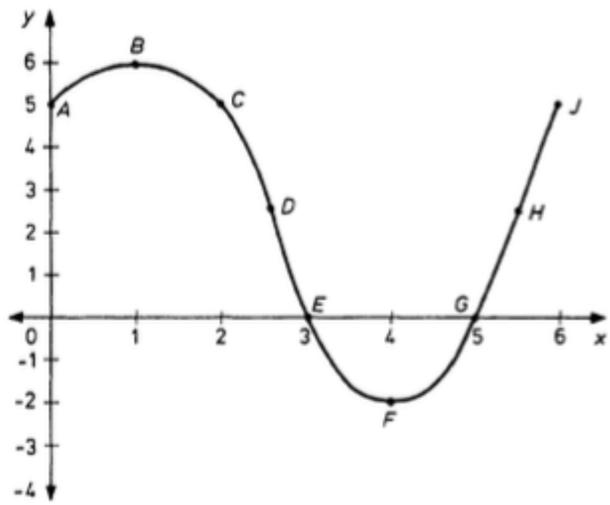
Brekke (2002) bruker begrepet misoppfatninger om ukorrekte eller ufullstendige tanker knyttet til et begrep. Det er viktig å skille mellom misoppfatninger og tilfeldige feil. Eleven kan ha lest feil i oppgaveteksten eller vært uoppmerksom og utført en ukorrekt utregning eller lignende. Dette er ofte tilfeldige feil. Misoppfatninger vil derimot gi systematiske feil. Bak feilen ligger det en idé, og en tankegang som eleven konsekvent vil ta i bruk. Slike feil er ofte en overgeneralisering av tidligere kunnskap, der elevene benytter kunnskap de har fra før på nye områder der denne ikke gjelder lenger (Brekke, 2002).

Læreren, i tillegg til læreplaner og lærebøker, kan i mange tilfeller være en stor kilde til misoppfatninger i matematikk (Nygaard og Zernichow, 2006). Dersom læreren gjennom sin undervisning er uklar eller bruker feilaktige begreper, kan dette forårsake en misoppfatning blant elevene. Nygaard og Zernichow (2006) fant misoppfatningen blant lærerstudenter at «en funksjon er noe med et funksjonsuttrykk». Allerede fra ungdomsskolen er funksjoner eksemplifisert på denne måten, og det er dermed ikke vanskelig å forstå at en slik misoppfatning veldig enkelt kan oppstå.

2.5.1 Tidligere forskning på emnet

Orton (1983) undersøkte individer i alderen 16-22 år, både videregåendeelever og lærerstudenter i matematikk, og fant innenfor emnet derivasjon flere ulike typer feil. Eksempler på dette er sammenheng mellom sekant og tangent eller forskjell på gjennomsnittlig og momentan endringsrate. Orton (1983) hevder at sekanten er et viktig element for å videre forstå tangenten som en grenseverdi.

Videre gjorde også flere av deltagerne i Ortons undersøkelse feil da de skulle finne stigningstall til en sekant, altså forholdet mellom endring i y-verdi og endring i x-verdi. Orton (1983) hevder at dette er en viktig regel, men den er også elementær og elevene skal ha lært dette i tidligere innføring i grafer og algebra. Likevel så ikke regelen ut til å være elementær for et stort antall elever, og flere ulike feil ble funnet samtidig som flere elever lot være å svare på oppgaven. Flere elever utelot å ta med minustegn foran stigningstallet til sekanten mellom punkt B og punkt E i figur 4. Andre elever dividerte med x-verdien i punktet B og ikke endringen av *x*.



Figur 4: Finne gjennomsnittlig stigningstall i ulike intervaller (Orton, 1983, s. 249).

Ubuz (2007) undersøkte forståelse av derivasjon hos 147 førsteårsstudenter på ingeniørutdanning. Dette ble gjort ved å undersøke hvordan elevene tolket grafen til en funksjon og hvordan de konstruerte tilhørende derivertgraf. Studentene ble testet både før og etter en undervisningsperiode med derivasjon og integrasjon. I denne undersøkelsen fant Ubuz følgende feil og misoppfatninger: prototyper som bare gjelder i en begrenset situasjon, svak forståelse for grenseverdinotasjon, forvirring mellom prosess og produkt og vanskeligheter med å bruke grafisk informasjon til å gi mening til symbolsk representasjon.

Det har blitt gjennomført flere studier som omhandler elevers grafiske forståelse av den deriverte, og som viser en rekke vanskeligheter hos elevene (Ubuz, 2007). Dette er for eksempel vanskeligheter med å behandle førstederiverte, andrederiverte, kontinuitet, og grenseverdi for å gjøre en tolkning eller konstruere grafen for en gitt funksjon.

Asiala, Cottrill, Dubinsky og Schwingendorf (1997) fant i sin studie manglende forståelse for sammenhengen mellom en funksjon og derivertfunksjonen. Elevene i studien, ingeniørstudenter, ble gitt grafen til en funksjon og en tangent i et oppgitt punkt (x, y). De ble bedt om å finne funksjonsverdien i punktet, $f(x)$, og verdien til den deriverte, $f'(x)$. Studien viste at noen studenter hadde et veldig sterkt behov for å ha et uttrykk for funksjonen for å derivere og så evaluere, i motsetning til å kunne jobbe med lokale data, og tolkningen av den deriverte som stigningstallet til tangenten i det gitte punktet. Denne feilen indikerte at elever ikke konstruerer den deriverte funksjonen fra den deriverte i et punkt, og at de har en operasjonell oppfatning av begrepet (Asiala et al., 1997).

3. Metode

I dette kapittelet vil jeg beskrive og begrunne hvordan forskningsprosjektet ble gjennomført. Jeg vil beskrive hvilke metoder som er tatt i bruk og hvilke valg som er gjort i analysearbeidet for å forsøke å svare på forskningsspørsmålene som ble gitt i kapittel 1.2. Jeg vil begynne med å gjøre rede for forskningsdesignet for denne studien og beskrive utvalget. Videre vil jeg beskrive de ulike forskningsmetodene for innsamling av datamateriale, og jeg vil presentere noen utvalgte oppgaver som ble brukt i undersøkelsen. Jeg vil også betrakte noen etiske problemstillinger. Til slutt vil jeg beskrive hvordan analysen ble gjennomført, og jeg ble presentere kategoriene som ble funnet i analyseprosessen.

3.1 Forskningsdesign

Corbin og Strauss (2008, s. 12) hevder at gjennom kvalitativ forskningsmetode vil forskeren få innblikk i deltakernes indre opplevelse, forskeren vil *utforske* fremfor å *teste* variabler. Undersøkelser som TIMSS Advanced tester elevenes kunnskap innenfor derivasjon, men de gir ikke innblikk i deltakernes tanker bak svarene de har gitt. Ettersom målet med dette masterprosjektet var å få innblikk i elevers tankemønster for å finne begrensninger for deres forståelse av den deriverte representert grafisk, valgte jeg dermed å ta i bruk kvalitativ forskningsmetode. I kvalitative studier blir resultater presentert verbalt eller i andre ikke-numeriske former (Robson, 2011). En naturlig setting er vanlig, og resultatene bør ses ut i fra den gitte konteksten. Det er ingen direkte tilgang til elevenes forståelse, og det kan derfor være utfordrende å svare på forskningsspørsmålene mine. I en kvalitativ undersøkelse er det vanlig å bruke flere datainnsamlingsmetoder for å få flere perspektiv slik at man bedre kan besvare et forskningsspørsmål (Robson, 2011). For å forsøke å svare på forskningsspørsmålene mine valgte jeg dermed å intervjue elevene både individuelt og i par mens de arbeidet med nøye planlagte oppgaver, i tillegg til intervju og observasjon av deres lærer.

For å svare på forskningsspørsmålene mine valgte jeg å bruke en casestudie. Yin (2009, s. 18) definerer en casestudie som en empirisk undersøkelse som undersøker et pågående fenomen i dybden og i sin virkelige kontekst, spesielt når grensen mellom fenomenet og konteksten ikke er tydelig. At grensen mellom fenomenet og konteksten ikke er tydelig innebærer at det ikke er mulig å isolere det fenomenet man ønsker å undersøke. Det vil alltid være påvirkning fra ulike forhold som forskeren ikke har innvirkning på. Dette skiller casestudien fra for eksempel en labstudie hvor forskeren kan kontrollere konteksten som studien gjøres i (Yin, 2009). At studien undersøker et pågående fenomen innebærer at forskeren søker forståelse for grunner som ligger bak fenomenet, ikke et svar på for eksempel utfall eller hvor mye – viktige ord i forskningsspørsmålet er hvordan eller hvorfor (Yin, 2009). Studien må likevel være avgrenset i tid og sted.

I denne studien er caset som undersøkes R2-elevers begrensninger for forståelse av den deriverte når den representeres grafisk. Dette er et pågående fenomen, og oppfyller derfor dette kriteriet for en casestudie. Konteksten ble skapt ut i fra skolen og elevene som deltok ved at oppgavene ble tilpasset både elevenes nivå og den tiden som som jeg fikk til rådighet av skolen. Ettersom elevene var avgangselever og hadde det travelt frem mot avsluttende eksamen, var det ikke ønskelig å ta de ut av undervisningen for mye. Tidsperspektivet ble dermed satt til én uke, hvor hver elev deltok på to intervjuer. Elevene måtte arbeide alene om teoretiske oppgaver om emnet (vedlegg B), hvor de underveis måtte forklare hvordan de gikk frem for å løse oppgaven. Etterpå skulle elevene i par løse oppgaver som var mer praktisk rettet (vedlegg C), for å skape en god dialog mellom elevene. For å sikre kvaliteten på en casestudie er det vanlig å ta i bruk metodetriangulering (Yin, 2009).

3.2 Utvalg

Forskningsprosjektet ble gjennomført ved en videregående skole i Rogaland, over en tidsperiode på én uke. Min motivasjon for å gjøre denne studien var å få innsikt i elevers forståelse av derivasjonsbegrepet. Ettersom læreplanen for R1 har stort fokus på dette temaet ble en lærer som underviste i dette faget først kontaktet. Det viste seg at derivasjon skulle gjennomgås rundt perioden hvor jeg skulle gjøre mine undersøkelser. Jeg ønsket at elevene skulle ha gjennomgått emnet allerede, slik at besvarelsene ga innblikk i elevenes kognitive nivå, og ikke var en test for hva de husket fra nylig undervisning. På bakgrunn av dette bestemte jeg meg derfor for å velge elever som tok R2.

Deltakerne i dette forskningsprosjektet er alle elever i den samme R2 klassen. Noen uker før gjennomføringen av prosjektet ble et informasjonsbrev med samtykkeskjema delt ut til alle elevene i klassen. Ettersom det også var et krav at elevene hadde hatt læreren som jeg skulle intervjue som lærer i R1, var det nøyaktig fire elever som oppfylte kravene og som også ønsket å delta. Da én av disse elevene ikke var tilstede da det individuelle intervjuet skulle gjennomføres, meldte en annen elev seg frivillig og ble dermed valgt. Utvalget besto dermed av tre jenter og én gutt. Under de individuelle intervjuene spurte jeg om elevenes karakter i R1 og R2. Fra svarere her viste det seg at forskningsdeltakerne hadde karakterer mellom 4 og 6.

Intervjuene ble gjennomført i et separat rom i løpet av elevens undervisningsøkt. Hver elev gjennomførte det individuelle intervjuet og gruppeintervjuet på ulike dager, med 1-2 dagers mellomrom. Lengden på intervjuet varierte fra rundt 25 minutter til 50 minutter, etter hvor lang tid hver elev trengte for å løse og forklare sine tanker rundt oppgavene.

Gjennom forskningsmetodene intervju og observasjon ble også læreren Espens undervisningspraksis undersøkt. Espen er professor i matematikk og har en deltidsstilling som matematikklærer ved den videregående skolen i tillegg til en stilling på et universitet. Temaet for intervjuet var hans undervisning av emnet derivasjon (vedlegg D). For å å svare på forskningsspørsmålet valgte jeg også å observere en undervisningsøkt. Ettersom Espen ikke underviste R1 dette året, ble undervisning i faget S1 observert.

3.3 Metode for datainnsamling

I undersøkelsen ble det brukt ulike datainnsamlingsmetoder. Jeg vil i dette delkapittelet beskrive disse metodene.

3.3.1 Intervju

Å gjennomføre intervju har vært en veldig sentral del av min masteroppgave. Det ble i løpet av forskningsperioden gjennomført sju intervjuer: individuelle intervjuer med hver av de fire elevene, to gruppeintervjuer der elevene arbeidet i par og et intervju med læreren i faget. Alle intervjuene ble tatt opp på lydopptak og transkribert. Robson (2011) hevder at intervju er en fleksibel måte å finne noe ut. I samtale med intervjuobjektet har man mulighet til å følge opp interessante svar, noe som er begrenset i for eksempel skriftlige oppgaver. Intervju er også en god metode for å undersøke underliggende motiver (Robson, 2011).

Intervjuet med læreren som underviste elevene i R1, kan gjerne kategoriseres som et semistrukturert intervju. I denne typen intervju lages en intervjuguide på forhånd som skal fungere som en sjekkliste for intervjuets innhold (Robson, 2011). Underveis vil spørsmålene og rekkefølgen tilpasses slik det er naturlig, og oppfølgingsspørsmål som ikke er planlagt vil ofte dukke opp. På forhånd av intervjuet hadde jeg planlagt sju spørsmål for å hente relevant informasjon om forskningsspørsmålet *Hvordan påvirker læreren gjennom sitt syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk?* Dagen før intervjuet sendte jeg spørsmålene på mail til læreren, slik at han skulle ha mulighet til å reflektere over sin undervisning. Da vi møttes dagen etter fortalte jeg litt om min masteroppgave, og han stilte videre noen spørsmål for å få oppklaring i noen av intervjuspørsmålene. Dette ble en naturlig start på intervjuet, og jeg fortsatte med oppfølgingsspørsmål og spørsmål fra lista slik det falt naturlig.

De individuelle intervjuene som ble gjort med elevene var i større grad åpne sammenlignet med lærerintervjuet, ettersom det ikke ble planlagt spørsmål på forhånd. Temaet for intervjuene var å samle data for undersøke elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk, og samtalen utviklet seg innenfor dette temaet. Dette kjennetegner et ustrukturert intervju (Robson, 2011). Likevel var det en form for struktur i intervjuene gjennom de planlagte oppgavene som alle elevene gjennomførte. Oppgavene var nøye gjennomtenkt i forkant av undersøkelsen, for best mulig å svare på forskningsspørsmålet. Jeg tenkte gjennom hvordan elevene ville forstå oppgaven, og ulike måter som oppgaven kunne løses på. Dermed hadde jeg tenkt over hvordan samtalen muligens kunne utvikle seg, og hvilke spørsmål jeg kunne stille intervjuobjektet. Gruppeintervjuene lignet de individuelle intervjuene, med at det også her ble løst oppgaver. En forskjell var likevel min deltakelse. I gruppeintervjuet forsøkte jeg å trekke meg tilbake, og i størst mulig grad observere elevene løse oppgavene sammen ved å diskutere og hjelpe hverandre.

Grunnen til at jeg ønsket å intervjue elevene mens oppgaver ble løst, var at jeg i størst mulig grad ville få innblikk i hvordan elevene tenkte. Robson (2011) hevder at intervju er en god forskningsmetode for finne ut hva som ligger som grunn for våre handlinger. Ved å stille utdypende spørsmål til intervjuobjektet vil man få større innsikt i elevens tanker, sammenlignet med observasjon hvor det er forskerens tolkninger som ligger til grunn.

3.3.2 Observasjon

For å få innsikt i lærerens undervisningspraksis ble det også gjennomført en observasjon. I løpet av én dobbeltime observerte jeg faget matematikk for samfunnsfag (S1), hvor temaet var derivasjon. Å bruke observasjon som forskningsmetode er i følge Robson (2011) en spesielt nyttig metode for å undersøke hva som faktisk skjer i undervisningen. Robson (2011) hevder også kvaliteten på en studie styrkes med metodetriangulering, og jeg valgte derfor observasjon for å få et bedre grunnlag for å kunne svare på forskningsspørsmålet. Jeg valgte å ta rollen som ikke-deltakende observatør, ettersom jeg ønsket at undervisningsøkten skulle være så realistisk som mulig. Dersom jeg hadde tatt del i undervisningsøkten kunne jeg i større grad ha risikert å påvirke undervisningen slik at lærerens undervisningspraksis ikke kom like tydelig frem. I observasjonen hadde jeg fokus på hvordan undervisningen var bygget opp, hvilke læringsmetoder som ble tatt i bruk og i hvilken kontekst emnet ble presentert.

3.3.3 Oppgaveløsing

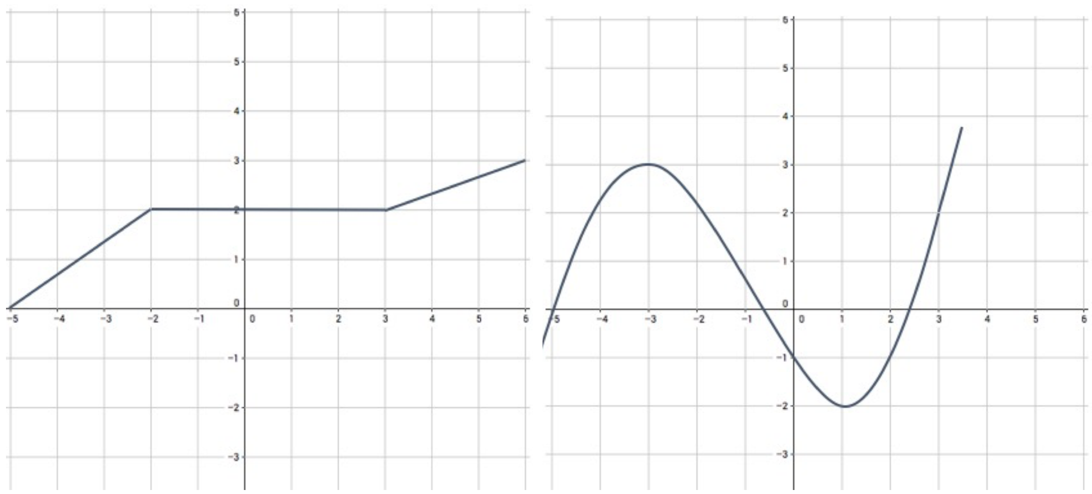
En svært sentral del av min studie var elevenes arbeid med oppgaver. Elevene besvarte oppgavene muntlig i tillegg til å skrive ned svarene sine, og jeg valgte dermed å beskrive rammen rundt oppgavene i delkapittelet om intervju. I dette delkapittelet vil jeg presentere og diskutere noen av oppgavene som elevene skulle arbeide med under intervjuene.

Før oppstarten med å løse oppgavene, forklarte jeg til elevene at de nå skulle løse oppgaver om derivasjon. Jeg presiserte at mitt mål var å forstå hvordan de tenkte, og at de derfor måtte forklare hvordan de løste oppgavene og hvordan de tenkte underveis. Jeg forklarte at jeg brukte lydopptak for å få med meg alt de sa, ettersom det var deres tanker når de løste oppgavene som var viktig for meg. Det ble også presisert at undersøkelsen var fullstendig anonym, og at jeg ikke ville bruke deres virkelige navn. Videre fikk elevene utdelt oppgavene, under det individuelle intervjuet arbeidet de med oppgavene i vedlegg B, og under gruppeintervjuet arbeidet de med oppgavene i vedlegg C. I det individuelle intervjuet ble oppgavene gjort i den rekkefølgen som var gitt. I gruppeintervjuet ble oppgave 1c gjort til slutt, ettersom parene brukte ganske lang tid på 1a og 1b. Jeg ønsket at elevene også skulle rekke oppgave 2, og prioriterte å gjennomføre denne oppgaven først. I noen tilfeller (hovedsakelig oppgave 2 på gruppeintervjuet) spurte elevene om de trengte å svare skriftlig på oppgavene. I de tilfellene hvor utregning ikke var nødvendig, fikk elevene beskjed at et muntlig svar var tilstrekkelig.

Oppgavene ble utviklet for å undersøke elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk. Nærmere bestemt overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate, og sammenhengen mellom grafen til en funksjon og grafen til derivertfunksjonen. Jeg vil presentere tre utvalgte oppgaver fra undersøkelsen min. Jeg vil begrunne hvorfor disse oppgavene ble gitt, og diskutere styrker og svakheter ved hver oppgave.

Oppgave 3a

Nedenfor ser du grafen til to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$. Skisser grafene til den deriverte av funksjonene: $f'(x)$ og $g'(x)$.



I denne oppgaven fikk elevene utdelt grafen til to funksjoner, hvor de skulle skissere grafen til den deriverte funksjonen. Målet med oppgaven var å undersøke hvilken forståelse elevene hadde av sammenhengen mellom graf til en funksjon og graf til en derivertfunksjon. En styrke med oppgaven er at det ble gitt to funksjoner med ulik grad av vanskelighet. Det er dermed i større grad mulig at flere elever klarer oppgaven. Det kan også være interessant dersom eleven klarer deloppgaven til venstre, men ikke deloppgaven til høyre. Den lineære grafen til venstre, hvor stigningstallet er konstant, kan kan deles i tre deler. Stigningstallet kan regnes ut ved å finne forholdet mellom endring i funksjonsverdi (Δy) og endringen i argumentverdi (Δx). I grafen til høyre varierer stigningstallet, og eleven må dermed forstå hva endringsraten til funksjonen forteller om grafen til den deriverte.

Oppgaven er ikke veldig kompleks, og for å gjøre den bedre kunne det blitt stilt flere spørsmål for en større innsikt i elevens tanker. Likevel var det fint at oppgaven var åpen ettersom jeg kunne stille oppfølgingsspørsmål ut i fra interessante tanker som eleven uttrykte.

Oppgave 1 – gruppeintervju

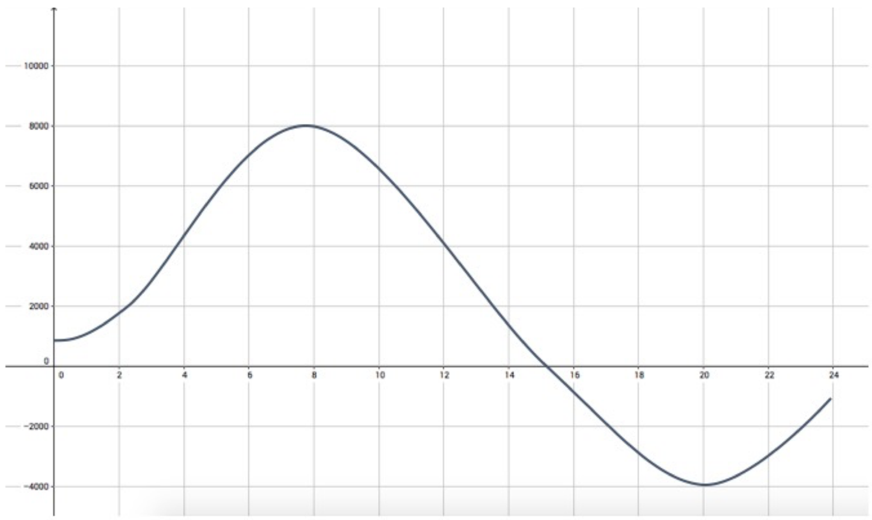
Du skal kjøre bil til hytta de som er 125 km unna. På veien må du stoppe to ganger: én gang for å fylle bensin og én gang for å handle mat. Det er fredag ettermiddag, og flere andre bilister skal også på hyttene sine. På noen strekninger kan det derfor være kø.

a) Tegn en passende graf for kjøreturen, som beskriver tilbakelagt strekning som en funksjon av tida. La enheten på x-aksen og y-aksen være henholdsvis timer og kilometer.
b) Ta utgangspunkt i et tidsintervall på kjøreturen. Hva er gjennomsnittsfarten?
c) Gjør tidsintervallet gradvis mindre ved å la endepunktet nærme seg startpunktet. Finn gjennomsnittsfarten i 3 intervaller. Hva skjer når endepunktet nærmer seg startpunktet?

Denne oppgaven går ut på å lage en passende graf for en praktisk situasjon ved å oversette fra skriftlig representasjon. Videre skal man finne stigningstallet til en valgt sekant, og beskrive hva som skjer når sekanten nærmer seg tangenten. Hensikten med oppgaven var å undersøke hvilken forståelse elevene har av sammenhengen mellom gjennomsnittlig endringsrate og momentan endringsrate. Oppgaven tester også elevens evne til oversettelse mellom representasjonsformene praktisk situasjon og graf. Dette kan være en begrensning av oppgaven. Dersom elevene ikke mestret dette, kunne det ha hindret dem i videre utførelse av oppgaven. Jeg prøvde å forsikre meg om at elevene hadde klart å tegne en graf og forsto hva den representerte, før de gikk videre til oppgave b og c. Jeg vil hevde at det er en styrke at oppgaven er relatert til en praktisk situasjon. På denne måten var det kanskje lettere for elevene å diskutere med hverandre rundt oppgaven, slik at jeg kunne få innsikt i deres forståelse.

Oppgave 2 – gruppeintervju

Utviklingen av en bakteriekultur gjennom et døgn er gitt ved funksjonen $y = f(x)$.
Figuren nedenfor viser grafen til funksjonen $y = f'(x)$.



a) Hva viser $f'(x)$ her?
b) Ved hvilket tidspunkt er antall bakterier på topp?
c) Når øker antall bakterier mest?

I denne oppgaven får gruppen gitt grafen til en funksjon. Denne funksjonen er derivertfunksjonen til en funksjon som viser antall bakterier gjennom et døgn. Elevene måtte forklare hva derivertfunksjonen forteller, og svare på spørsmål om grafen. Målet med denne oppgaven var å undersøke hvordan elevene forsto sammenhengen mellom en funksjon og den deriverte til funksjonen. I oppgaveteksten har jeg gjort en feil og kalt både funksjonen og derivertfunksjonen for y. Denne feilen kan skape forvirring for eleven ettersom den indikerer at de to funksjonene er den samme. Denne feilen ble likevel ikke kommentert av elevene, men jeg har underveis i analysen tatt problemet i betraktning. For å øke kvaliteten på oppgaven stilles det flere spørsmål, slik at elevene i mindre grad kan gjette hva grafen viser. I oppgave b må de forstå at funksjonen har en positiv endringsrate, altså at bakteriekulturen vokser, når den grafen til deriverte er positiv (y>0), og at den har en negativ endringsrate når grafen til den deriverte er negativ (y<0). Antall bakterier er dermed på topp i det derivertfunksjonen krysser x-aksen, da antall bakterier slutter å vokse og begynner å synke. I oppgave c må elevene forstå at når grafen til den viste derivertfunksjonen får en høyere y-verdi innebærer dette at funksjonen $f(x)$ vokser, altså at endringsraten blir større. I toppunktet til derivertfunksjonen er endringsraten størst, det er altså der antall bakterier øker mest.

Denne oppgaven skapte i likhet med oppgave 1 på gruppeintervjuet rom for diskusjon ettersom den beskrev en praktisk situasjon. For å øke kvaliteten ytterligere kunne det vært en fordel at elevene måtte gjennomføre en utregning eller ble spurt om et tallsvar. På denne måten kunne jeg undersøkt om elevene mestret oppgaven kun ved hjelp av den grafiske representasjonen eller om de ville søke etter et formeluttrykk.

3.4 Etiske betraktninger

Under mitt arbeid med masteroppgaven har jeg også tatt stilling til etiske spørsmål. Kvale og Brinkmann (2009) beskriver følgende tre etiske regler for forskning på mennesker: informert samtykke, konfidensialitet og konsekvenser.

Noen uker før mitt besøk fikk elevene utdelt et samtykkeskjema (vedlegg A). Her ble det informert om formålet med studien og måten datainnsamlingen skulle gjennomføres på. Elevene som sa seg villige til å delta måtte levere inn sin underskrift på egen svarslipp. Ettersom elevene var over 18 år var det ikke nødvendig med tillatelse fra foresatte.

Konfidensialitet ble opprettholdt ved at de fire elevene og læreren som deltok i undersøkelsen er anonymisert ved pseudonymer. Skolens navn er heller ikke tilgjengelig i denne masteroppgaven. Det skal derfor ikke være mulig å gjenkjenne deltakerne i studien. Dette var en forutsetning for elevenes samtykke, og de ble også fortalt at lydopptakene som ble gjort bare ville bli hørt av meg og min veileder og slettet innen 1. september 2016. Prosjektet ble ikke meldt inn til NSD, ettersom ingen personopplysninger ble behandlet med datamaskinbasert utstyr (Norsk senter for forskningsdata, 2016).

Kvale og Brinkmanns (2009) siste punkt på listen over etiske betraktninger er konsekvenser. Dette innebærer at man må ta hensyn til hvilke konsekvenser elevene gjennomgår ved å delta i undersøkelsen. De fire elevene gikk glipp av undervisningstid, som kan ha vært verdifull for deres utvikling i faget. På grunn av både individuelle intervju og intervju i par, gikk hver elev glipp av tilsammen to undervisningsøkter. Å delta i mitt masterprosjekt kan dermed ha vært negativt for elevens læringsutbytte. Likevel gjorde elevene oppgaver under intervjuet som kan ha hatt positiv innvirkning på deres forståelse av derivasjon. Derivasjon er som beskrevet i teorikapittelet en sentral del av læreplanen i matematikk for realfag. Intervjuet besto av oppgaver som muligens kan skille seg fra oppgaver i lærebøker, og dermed være nyttige å arbeide med. Gjennom oppgavene fikk elevene en repetisjon av emnet derivasjon, noe som kan være positivt å ta med seg ettersom de i den tidsperioden hadde integrasjon som tema for undervisningen.

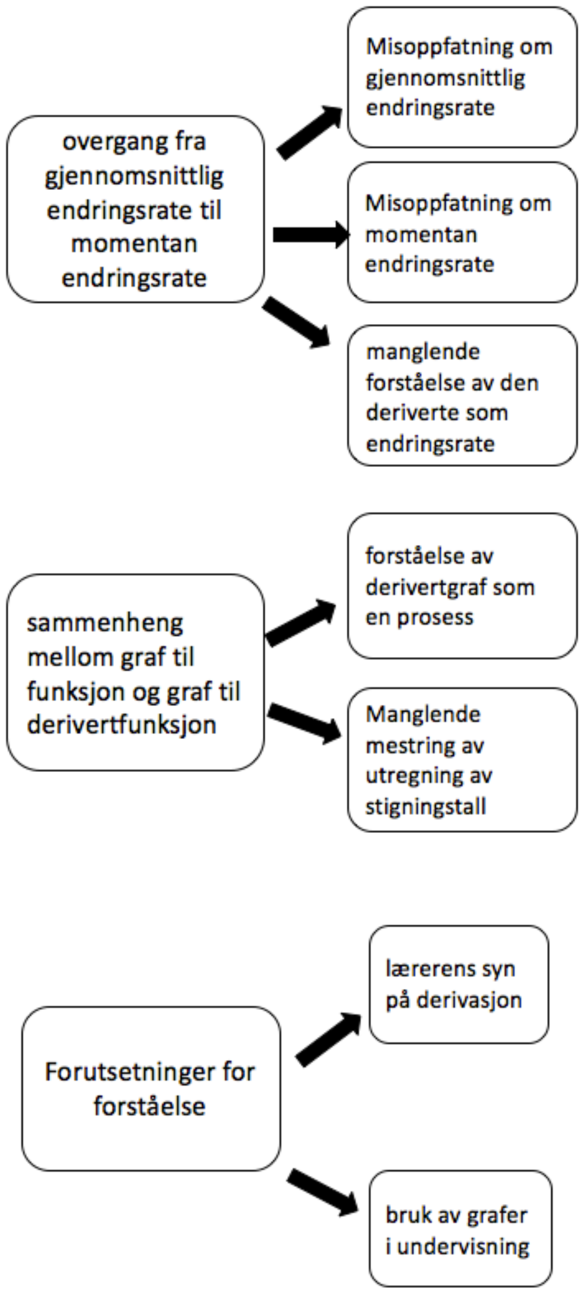
3.5 Analysemetode

Analyse innebærer å bryte opp noe komplekst i mindre deler, og forklare helheten gjennom egenskaper og sammenhenger mellom disse delene (Robson, 2011). I mitt masterprosjekt valgte jeg å ta i bruk en konstant komparativ analysemetode. Denne analysemetoden innebærer at forskeren sammenligner ulike hendelser innenfor datamaterialet med hverandre for å finne likheter og ulikheter (Corbin & Strauss, 2008). Analyseprosessen skjer i tre ulike kodingsfaser: åpen koding, aksial koding og selektiv koding. Jeg vil videre i dette delkapittelet beskrive hvordan jeg gjennomførte hver av de tre kodingsfasene.

Åpen koding innebærer å bryte datamaterialet ned i mindre deler ved å kategorisere og sette navn på fenomener i materialet (Corbin & Strauss, 2008). Gjennom å transkribere mine data ble jeg godt kjent med materialet, og jeg fikk repetert hendelsene som utspant seg underveis i undersøkelsen. Da jeg hadde transkribert hele datamaterialet, gikk jeg på ny gjennom og markerte utsagn og samtalesekvenser som kunne være knyttet til noen av forskningsspørsmålene mine. Ved de markerte episodene festet jeg en Post-it lapp hvor jeg noterte ned hvilken type feil eleven gjorde. Navnene på feilene som jeg fant kom fra tidligere studier om elevers misoppfatninger av den deriverte representert grafisk eller fra noe elevene eller læreren sa.

Det neste steget i analyseprosessen var aksial koding. Denne kodeprosessen innebærer å relatere hendelser og begrep til hverandre (Corbin & Strauss, 2008). Dette gjorde jeg ved å nummerere alle de markerte episodene og sette det samme nummeret på tilhørende Post-it lapp. Videre sorterte jeg Post-it lappene slik at episoder som lignet hverandre ble satt sammen. I denne delen av analyseprosessen skilte jeg også mellom episoder som handlet om overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate og episoder som handlet om sammenhengen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon. For datamaterialet fra læreren skilte jeg mellom lærerens syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen.

Den siste delen av analyseprosessen er selektiv koding. Her prøver man å finne kjernekategoriene og systematisk relatere dem til de andre kategoriene (Corbin & Strauss, 2008). Ved å formulere likhetene mellom de kodene som ble satt sammen kom jeg frem til mine hovedkategorier. I figur 5 nedenfor er kategoriene som ble funnet i analyseprosessen gjengitt.



Figur 5: Kategoriene som ble funnet i analyseprosessen.

I neste kapittel vil jeg presentere resultater fra analysen som ble gjort. Jeg hadde et rikt datamateriale, og har dermed valgt ut viktige episoder for å illustrere de resultatene som jeg kom frem til i studien min. Selv om det var fire elever som deltok i studien, vil kun episoder fra tre av elevene bli presentert. Bakgrunnen for dette var at den siste eleven ikke gjorde noen feil som ikke ble tolket som tilfeldige, eller gjennom intervjuer viste noen misoppfatninger. Jeg valgte dermed å fokusere på de tre andre elevene.

4. Analyse

I dette kapittelet vil jeg presentere resultater fra analysen av det innsamlede datamaterialet. Ettersom derivasjon ikke er et isolert begrep, men støtter seg sterkt til elevenes forståelse av tema som forhold, proporsjonalitet, grenseverdi, kontinuitet og funksjoner, kan dette ha betydning for elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk. Målet med denne studien var å undersøke faktorer som kunne være en begrensning for elevens forståelse av den deriverte representert grafisk. På grunn av tiden som jeg fikk til rådighet med elevene måtte jeg begrense oppgavene til denne konteksten. Oppgavene som ble utviklet hadde dermed som fokus å undersøke begrensninger for å forstå overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate, og begrensninger for å forstå sammenheng mellom grafen til en funksjon og grafen til derivertfunksjonen. Gjennom intervju og observasjon av lærer ble det også sett på hvordan læreren gjennom sitt syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen kunne ha påvirkning for elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk.

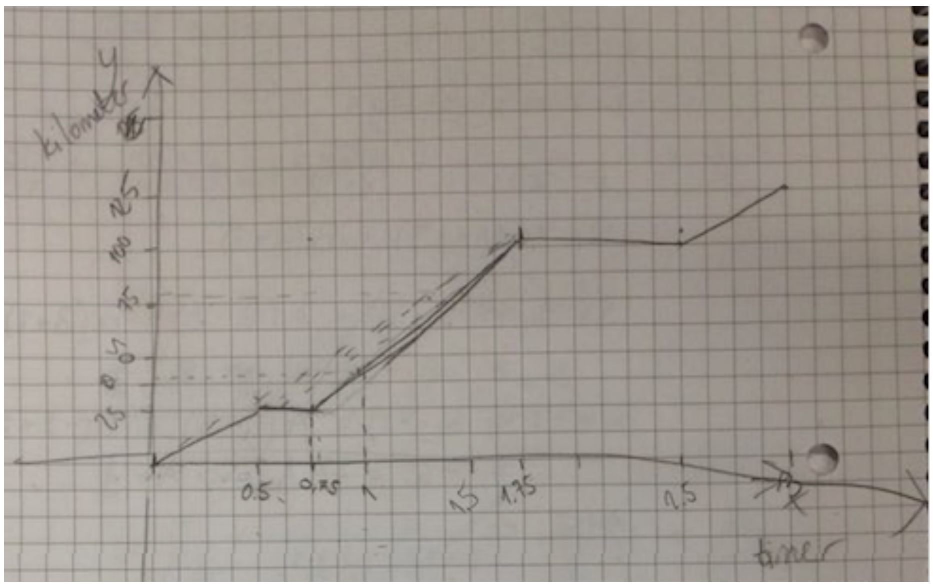
4.1 Overgang fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate

Å kunne se sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan endringsrate er sentralt for forståelsen av den deriverte representert grafisk. Dette begrunnes ved at den deriverte kan defineres som grenseverdien når endringen i argumentverdi (Δx) går mot null (se kapittel 2.5.2). I sin studie blant videregåendeelever og lærerstudenter, fant Orton (1983) tilfeller hvor elevene ikke så sammenheng mellom sekant og tangent. I dette delkapittelet vil jeg presentere resultater fra min analyse hvor eleven på ulike måter møtte motstand for å forstå overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate.

4.1.1 Misoppfatning om gjennomsnittlig endringsrate

I intervjuet med læreren sa han at undervisningen i emnet derivasjon ofte startet med at elevene studerte gjennomsnittlig endringsrate over flere intervall, før dette ble overført til momentan endringsrate. I datamaterialet mitt ble det funnet flere episoder hvor elevene hadde problemet med begrepet gjennomsnittlig endringsrate. Dette kan være en begrensning for å forstå sammenheng mellom gjennomsnittlig og momentan endringsrate.

Figur 6 viser Anna og Bente sin graf for en kjøretur til hytta i oppgave 1 på gruppeintervjuet (se kapittel 3.3.3), hvor tilbakelagt strekning er en funksjon av tid. Samtalesekvensen som følger er et utdrag fra oppgaven da elevene skulle finne gjennomsnittsfarten i et valgfritt intervall.



Figur 6: Anna og Bentes grafiske representasjon av en kjøretur, hvor tilbakelagt strekning er en funksjon av tid.

Bente: skal du ta i fra en halvtime til.. eh. To og en halv time?

Anna: nei, for der står han, han står jo i ro, og så er det 80. Og så står han i ro igjen.

Bente: ja, men da blir jo ikke gjennomsnittsfarten 80 likevel.

Anna: Okay. Blir den ikke det?

Elevene ble i oppgaven bedt om å velge et intervall av kjøreturen og finne gjennomsnittsfarten i dette intervallet. De fikk beskjed om at de måtte velge et intervall hvor farten ikke var lik gjennom hele intervallet. Bente foreslo intervallet fra 0,5 timer til 2,5 timer. Fra figuren ser vi at dette er et intervall hvor bilisten står stille i tilsammen 1,5 timer og kjører med en konstant fart på 80 $\frac{km}{t}$ i tilsammen 1 time. I denne sammenhengen er *fart* definert som endringsraten til posisjonen til et objekt (her: en bil) – altså at gjennomsnittlig fart over et tidsintervall er lik tilbakelagt strekning dividert på tiden det tar. Anna mente at de ikke kunne velge intervallet fra $t = 0.5$ til $t = 2.5$ ettersom farten var den samme i hele intervallet. I dette tilfellet ser det ut som at Anna ikke tok hensyn til perioden hvor bilisten står i ro. Det ser ut som hun har et begrepsbilde om at gjennomsnittlig endringsrate bare beregnes der hvor endringsraten er positiv eller negativ. Dette begrepsbildet kan være utviklet gjennom tidligere erfaringer i skoleløpet (Tall & Vinner, 1981). Misoppfatninger er ofte et resultat av overgeneralisering av regler (Brekke, 2002). Fra samtalesekvensen kan det se ut som at Anna overgeneraliserer sin kunnskap om at gjennomsnitt er en sum av tallene i en mengde dividert på antall tall i mengden.

Ettersom Anna hevdet at den gjennomsnittlige endringsraten i det gitte intervallet er 80 $\frac{km}{t}$ er det et tegn på at hun ikke laget en sekant mellom start- og endepunkt i intervallet. Det ser dermed ikke ut som at Anna har forståelse for at den gjennomsnittlige endringsraten er gitt ved stigningstallet til denne sekanten. Anna nevnte opptil flere ganger i datamaterialet at den deriverte er stigningstallet til tangenten. Hun har dermed en korrekt begrepsdefinisjon av begrepet (Tall & Vinner, 1981). Likevel fikk hun aldri til å bruke denne begrepsdefinisjonen i løsningen av oppgavene. I Ortons undersøkelse blant videregåendeelever og universitetsstudenter var det flere deltakere som ikke mestret sammenheng mellom sekant og tangent (Orton, 1983). Dersom Anna ikke har forståelse av begrepet sekant, kan dette være en begrensning for å kunne se sammenheng mellom sekant og tangent. Dersom hun hadde forstått at hun kunne funnet gjennomsnittsfarten i intervallet ved å se på stigningstallet til sekanten for intervallet, kunne dette ha skapt et grunnlag for å forstå den deriverte som stigningstallet til tangenten i et gitt punkt.

I figur 6 kan man også se at elevene har tegnet en stiplet linje fra $t = 0$ til $t = 1.75$. Denne linjen ble tegnet av Bente da hun skulle forklare hva gjennomsnittsfart er:

Bente: Men hvis vi på en måte hadde tegnet en strek sånn. Hvis han skulle kjørt jeevnt oppover her.. i fra 0 til.. der.. blir ikke det på en måte gjennomsnittsfarten?

Anna: Vet ikke.. men der er jo farten konstant hele veien.

Bente: Ja... men tenk da, tenk hvis du har, hvis vi skulle kjørt to biler, og så hadde du bare kjørt hele veien. Også hadde jeg kjørt, men jeg hadde kjørt fortere, også hadde jeg stoppet. Og så hadde jeg kjørt fortere igjen, så hadde vi kommet frem på likt!..

Anna: hæ?

Bente: hvis du hadde kjørt 60 kilometer i timen. Hele veien.

Anna: ja?

Bente: Sant. Så hadde du brukt 1,75 timer. På 100 kilometer.

Anna: ja.

Bente: men hvis jeg hadde kjørt, først 50. Kilometer i timen

Anna: og så stoppet i en halvtime.

Bente: også stoppet i en halvtime...

Anna: \kvarter

Bente: nei, kvarter ja.. og så kjørt 80 kilometer i timen.. så hadde vi kommet frem på likt!

Selv om Anna ser denne stiplede linjen virker hun fortsatt usikker på om det tar like lang tid å kjøre med en konstant fart på 60 $\frac{km}{t}$ i intervallet som å variere mellom å stå stille, kjøre i 50 $\frac{km}{t}$ og kjøre i 80 $\frac{km}{t}$ slik figur 6 viser. Dette indikerer igjen at eleven har en misoppfatning om gjennomsnittlig endringsrate. Det kan virke som hun har vanskeligheter med å se for seg at en gitt endring i strekning over et gitt tidsintervall kan representeres på ulike måter slik en strukturell oppfatning av gjennomsnittlig endringsrate vil innebære (Sfard, 1991).

4.1.2 Misoppfatning om momentan endringsrate

Neste kategori for begrensning knyttet til forståelsen av overgang fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate ble funnet til å være forståelse av momentan endringsrate. I gruppeintervjuet fant Anna og Bente gjennomsnittsfarten for ulike intervaller i oppgave 1 (se kapittel 3.3.3). Ettersom tidsintervallet skulle bli mindre og mindre, nådde de tilslutt grenseverdien i det tidsintervallet gikk mot null. Samtalesekvensen under viser Anna og Bente sin vurdering av momentan endringsrate.

Intervjuer: Så dere hva som skjer når endepunktet nærmer seg startpunktet, altså at intervallet blir veldig lite. Hva er det man liksom finner da?

Bente: Da finner du.. farten i et spesielt punkt?.. Er det ikke det? Hvis vi hadde tatt det veldig nært liksom. Hvis vi hadde tatt fra 0,99 til 1, så hadde vi jo funnet farten sånn egentlig akkurat her. Akkurat

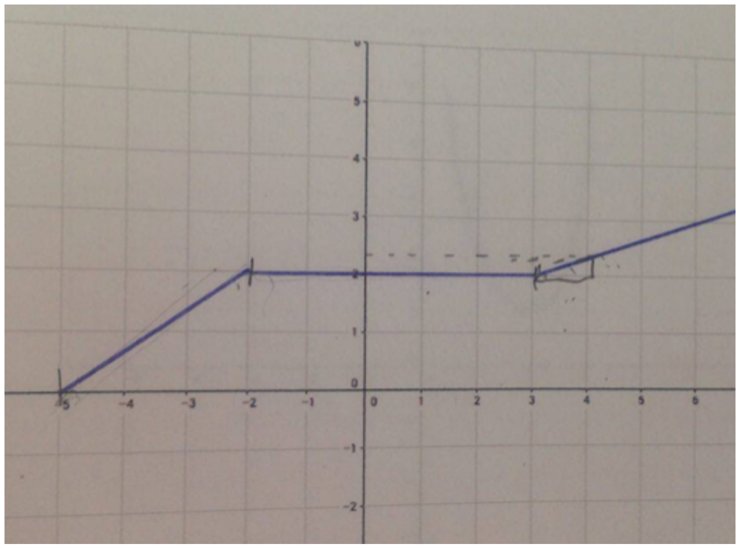
Anna: /Det er jo fortsatt forskjellig da. Det er jo ikke i akkurat det punktet.. hvis du tar i fra 0,99 til 1.

Spørsmålet som jeg stilte til elevene var nokså ledende, og det kan dermed diskuteres om det gir et korrekt innblikk i elevenes forståelse. Bente ser likevel ut til å forstå den momentane endringsraten som en grenseverdi i det gitte punktet (Adam & Essex, 2013). Tall og Vinner (1981) hevder at erfaringer noen ganger kan føre til gale oppfatninger om et begrep, og at en kognitiv konflikt dermed kan oppstå dersom begrepsbildet ikke samsvarer med teori. Den deriverte læres ofte ved å først se på gjennomsnittlig endringsrate (Tall & Vinner, 1981). Når dette videre skal overføres til momentan endringsrate, vil noen elever fortsatt se på denne endringsraten som en gjennomsnittlig endringsrate i et veldig lite intervall. Det kan se ut som om Anna møter denne kognitive konflikten hvor hun ikke mestrer å se på den deriverte som endringsrate i et gitt punkt. Det ser ikke ut som at hun evner å løsrive seg fra tankegangen om at farten er gitt ved endringsrate i mindre og mindre intervaller. Anna ser ut til å ha en misoppfatning om overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate, som kan være en begrensning for å forstå den deriverte representert grafisk.

4.1.3 Manglende mestring av utregning av stigningstall

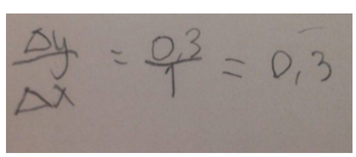
Som beskrevet i kapittel 2.5.2 er den deriverte i et gitt punkt x_0 stigningstallet til tangenten i det gitte punktet, også kalt den momentane endringsraten. I mitt datamateriale var det flere situasjoner hvor elevene hadde problemer med å finne stigningstall til ulike rette linjer. Dersom eleven ikke forstår begrepet stigningstall, kan dette begrense forståelsen av den deriverte som stigningstallet til en tangent, og av overgangen fra gjennomsnittlig til momentan endringsrate.

I oppgave 3a (del 1) på det individuelle intervjuet skulle elevene skissere grafen til derivertfunksjonen til en gitt funksjon $f(x)$. Tre av elevene valgte å dele funksjonen opp i tre deler, og finne stigningstallet i hvert intervall. Figur 7 under viser funksjonen $f(x)$ samt Annas notater for å finne stigningstall:



Figur 7: Funksjonen **f**(**x**) fra oppgave 3a på det individuelle intervjuet.

Flere av elevene var usikre på hvordan de skulle finne forholdet mellom endring i y-verdi og endring i x-verdi. Anna beregnet på følgende måte:

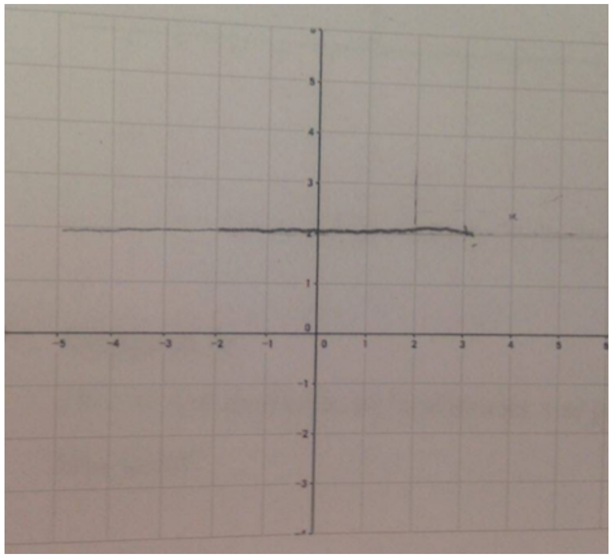


Denne riktige utregningen kom hun til slutt frem til fordi det føltes riktig, hun følte at hun hadde sett det før. En slik begrunnelse tolker jeg som at eleven har en instrumentell forståelse av begrepet stigningstall (Skemp, 1978). Det ser ut som om hun har pugget denne regelen tidligere, og får dermed problemer med å huske om stigningstallet er gitt ved $\frac{dx}{dy}$ eller $\frac{dy}{dx}$. Dersom eleven hadde hatt en relasjonell forståelse av begrepet, hvor hun forsto hvorfor stigningstallet er gitt ved $\frac{dy}{dx}$, hadde det gjerne vært enklere å huske dette forholdet.

Videre fikk Anna problemer da hun skulle finne stigningstallet til det midterste intervallet hvor grafen er gitt ved den konstante verdien $f(x) = 2$. Utsagnet under viser hvordan hun tok fatt på denne oppgaven:

Anna: Ja.. Okay, her har du ei rett linje, så det betyr at den er på den formen [snakker om $y = ax + b$]. Og hvis du deriverer den, så får du stigningstallet. Og der er det ikke noe stigningstall, for den går rett bent, og da vil den vel bare fortsette å gå rett bent. Eller vil den?.. Jeg tror den vil fortsette å gå rett bent.

I første setning snakket Anna om stigningstallet til den lineære grafen. Hun sa at et stigningstall er noe man får dersom man deriverer en funksjon som er på formen $y = ax + b$. Det kan se ut som at eleven ser på stigningstall som en verdi som oppnås ved å utføre en regneoperasjon, og at hun dermed har en operasjonell oppfatning av begrepet (Sfard, 1991). Denne begrepsoppfatningen medførte problemer da hun skulle finne stigningstallet til en funksjon som ikke var på samme form. Den deriverte til funksjonen $f(x) = a$, hvor a er en reelt tall, er $f'(x) = 0$ ettersom det ikke er noen endring i funksjonen for verdier av x i definisjonsmengden. Anna tolket dette som at det ikke var noe stigningstall. Hun tolket det ikke som at det ikke var noe *endring* i funksjonen, altså at den deriverte er lik 0 for hele det gitte intervallet. Det ser ut som at hun tenkte at det ikke fantes noe stigningstall, kanskje at det er en tom mengde. Løsningen hennes var dermed å fortsette på grafen fra forrige intervall. Løsningen hennes er vist i figur 8 nedenfor.



Figur 8: Annas skisse av grafen til $f'(x)$.

Denne løsningen kan gjerne være et tegn på at eleven har en svak kobling mellom begrepene endring og stigningstall i sin mentale struktur. Det kan tyde på at hun ikke assosierer endringsrate som en del av begrepet stigningstall. Hennes begrepsbilde om stigningstall innebærer ikke begrepet endringsrate (Tall & Vinner, 1981). Om dette er tilfellet kan det være en begrensning for hennes forståelse av den deriverte som endringsrate i et gitt punkt. Det kan være vanskelig å gå fra en gjennomsnittlig endringsrate, hvor endringen er gitt ved stigningstallet til sekanten i intervallet, til momentan endringsrate, hvor endringen er gitt ved stigningstallet til tangenten i punktet. Dersom hun ikke forstår at begrepet stigningstall innebærer forholdet mellom endring i funksjonsverdi og endring i argumentverdi i et gitt intervall, er det en begrensning for å forstå den deriverte som en endringsrate.

Denne svake koblingen ble også funnet hos eleven Dina. Hun var den eneste av elevene som ikke hadde noe forslag til hvordan hun skulle løse oppgaven, og måtte dermed ha hjelp for å komme i gang. Dina mestret ikke å si noe om stigningen til grafen, eller hva det innebærer at stigningen er konstant. Hun ble videre spurt om hun kunne finne stigningstallet, og dette klarte hun. En instrumentell forståelse av et begrep innebærer å huske et økende sett med regler (Skemp, 1978). Dina ser ut til å ha en instrumentell forståelse av begrepet stigningstall. Hun husket regelen, men kunne ikke relatere det til endringsrate slik relasjonell forståelse innebærer (Skemp, 1978). Det ser ut som at også denne eleven har en begrensning i forståelse av sammenheng mellom stigningstall og endringsrate, og hvilken sammenheng dette har til den deriverte. Dette kan være en begrensning for å forstå overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate.

4.2 Sammenheng mellom graf til funksjon og graf til derivertfunksjon

I min studie undersøker jeg begrensninger for forståelse av den deriverte representert grafisk. Det var dermed naturlig å se på forståelse av sammenhengen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon. Ubuz (2007) fant flere feil og misoppfatninger hos elever i sin undersøkelse av hvordan elevene tolket grafen til en funksjon og hvordan de konstruerte tilhørende derivertgraf. I dette delkapittelet vil jeg presentere resultater fra analysen i min studie.

4.2.1 Manglende forståelse av den deriverte som endringsrate

Som beskrevet i kapittel 2.5.2 er den deriverte i et punkt x_0 endringsraten til en funksjon i det gitte punktet. For å kunne se sammenhengen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon vil jeg hevde at det er en forutsetning å vite at den deriverte forteller noe om endring. I min studie fant jeg episoder hvor elever hadde problemer med dette.

I oppgave 3a (del 2) i det individuelle intervjuet får elevene oppgitt grafen til en tredjegradsfunksjon $g(x)$ og skal skissere grafen til funksjonen $g'(x)$. Her startet jeg med å spørre Dina om hun visste om den deriverte skulle være positiv eller negativ:

Intervjuer:	Vet du noe om den deriverte skal være positiv eller negativ?
Dina:	den deriverte er jo.. mm.. Ja, for den treffer jo y-aksen i minus.. må den være negativ da eller?

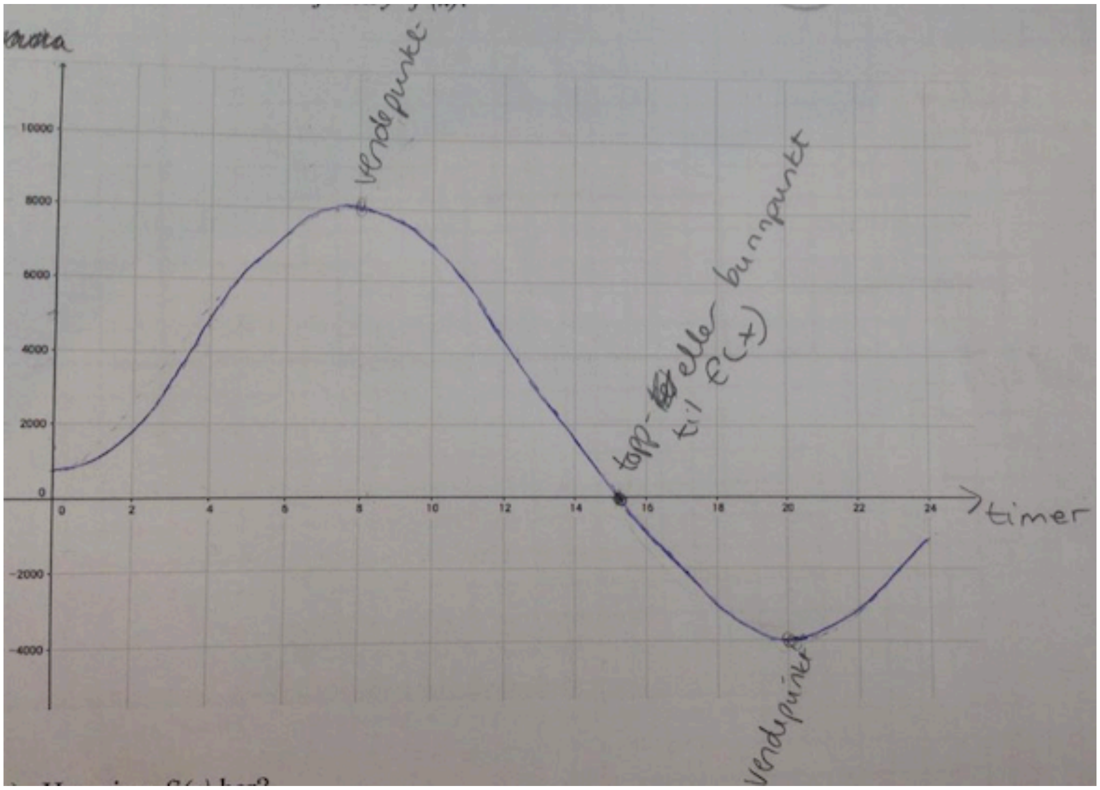
Dina hevdet at den deriverte måtte være negativ ettersom grafen krysser y-aksen på negativ side, i punktet $(0, -1)$. Det er liten sammenheng mellom dette og et riktig svar. I ettertid ser jeg at spørsmålet som ble stilt kan være noe misvisende. Det kan gjerne tolkes som at den deriverte skal være enten negativ *eller* positiv. Det ser ut til at Dina prøver å knytte fortegnet til den deriverte til fortegnet til funksjonen. Det kan se ut som at hun tenker at ettersom funksjonen er negativ, må den deriverte også være negativ.

Det ser ut til at eleven har et begrenset begrepsbilde rundt begrepet derivert (Tall & Vinner, 1981). Dersom hun hadde assosiert endringsrate i et gitt punkt til begrepet, hadde hun hatt mulighet til å forstå at den deriverte er positiv når endringsraten til funksjonen er positiv. Begrepsbildet ser ut til å være en begrensning for å se sammenhengen mellom grafen til en funksjon og grafen til derivertfunksjonen.

4.2.2 Forståelse av derivertgraf som en prosess

Sfard (1991) skiller mellom operasjonell og strukturell forståelse av et begrep. En operasjonell forståelse innebærer å se på begrepet som en prosess, hvor begrepet kan tilnærmes gjennom en rekke regneoperasjoner. En strukturell oppfatning innebærer derimot at begrepet ses på som et objekt i seg selv, og at man evner å tilnærme seg begrepet gjennom ulike representasjoner (Sfard, 1991). I min studie ble det funnet både episoder som indikerte en strukturell oppfatning og episoder som indikerte en operasjonell oppfatning. Episoder hvor eleven hadde forståelse av en derivertgraf som en prosess ble funnet til å være en begrensning for forståelse av sammenheng mellom graf til en funksjon og graf til en derivertfunksjon. I dette delkapittelet vil jeg illustrere dette.

I oppgave 2 på gruppeintervjuet (se kapittel 3.3.3) ønsket jeg å undersøke forståelsen av sammenheng mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon. I denne oppgaven ble grafen til en derivertfunksjon gitt (figur 9), og en skriftlig forklaring av innholdet til *funksjonen*. Samtalesekvensen nedenfor viser hvordan to av elevene reflekterte for å forstå hva hva den gitte derivertgrafen viser.



Figur 9: Grafen til derivertfunksjonen.

Intervjuer: Dere må huske at.. Grafen til funksjonen viser hvordan en bakterie.. kultur, eh, utvikler seg. Mens dette er grafen til den deriverte

Anna: ja

Bente: åja, den deriverte. Det vil si at denne viser nåår..

Anna: hva viser den?

Bente: hvordan er det der? Toppunkt.. toppunkt og bunnpunkt.. eh..

Anna: hva da?

Bente: Vet ikke. En graf.. nei, en funksjon vil ha et toppunkt eller et bunnpunkt der den deriverte er null.

For å forklare hva derivertfunksjonen viser, valgte Bente å bruke begrepene toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt. Det kan se ut som at Bente prøvde å forstå hva derivertfunksjonen viser ved hjelp av å ta i bruk de begrepene hun kjenner som kobler sammen funksjonen og den deriverte til funksjonen. Samtalen som utspilte seg i arbeidet med denne oppgaven viste at Bente hadde vanskelig for å forstå hva grafen til derivertfunksjonen viser. Dette kan være et tegn på at hun ikke har en strukturell oppfatning av begrepet, hvor hun evner å se den deriverte som et objekt i seg selv. Hun så ikke ut til å se på den deriverte som en unik og virkelig ting, eller å gjenkjenne denne representasjonen av begrepet (Sfard, 1991). I stedet brukte hun det hun visste om grafen til en funksjon for å forstå hva det kan fortelle om grafen til derivertfunksjonen. Hun viste kunnskap om at når grafen til en funksjon har ekstremalpunkt så har grafen til den deriverte et nullpunkt. Dermed visste hun at funksjonen har et ekstremalpunkt etter ca. 15 timer. Figur 9 viser hvordan Bente markerte spesielle punkter på derivertgrafen som fortalte noe om funksjonen.

Etter at Bente ved hjelp av grafen til derivertfunksjonen hadde funnet ekstremalpunkt og vendepunkt for funksjonen, dukket spørsmålet opp om hva grafen til derivertfunksjonen egentlig viste. Den første ytringen til Bente var ”*men når den går oppover her, betyr det at grafen stiger, frem til vendepunkt?”*. I dette tilfellet snakket eleven om intervallet $[0,8]$ på x-aksen. Jeg har valgt å tolke ”den” som grafen til derivertfunksjonen, og ”grafen” som grafen til funksjonen. Spørsmålet Bente stilte seg var altså om en økning frem til et vendepunkt for grafen til derivertfunksjonen innebar at grafen til funksjonen ville øke i samme intervall. Dette utsagnet er ikke korrekt og det kan se ut som at eleven beskrev kun det som ble vist i grafen til derivertfunksjonen foran henne. På grunnlag av dette så det ut til at Bente hadde problemer med å skille de to begrepene. Videre uttrykte hun at hun ikke skjønner hva den deriverte sier, og stilte seg spørsmålet: *”Forteller noe om stigningstallet til grafen?”* Gjennom dette spørsmålet så det ut som at det gikk opp et lys for henne, og hun uttrykte plutselig ”*her har den negativt stigningstall”*, mens hun pekte på intervallet $[15,24]$ på x-aksen. ”*Der den deriverte er negativ.. der vil grafen synke”.*

Gjennom kunnskapen om at den deriverte forteller noe om stigningstallet til tangenten, mestret Bente å uttrykke at grafen til funksjonen vil synke der den deriverte er negativ. Hun uttrykte videre at dette innebar at grafen til derivertfunksjonen viste når bakteriekulturen vokser/synker, og hvor mye den vokser/synker. Selv om Bente reflekterte seg frem til riktige slutninger, vil jeg hevde at den operasjonelle forståelsen som hun viste kan være en begrensning for å forstå sammenhengen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon. Som Donaldson (1963) skrev, så er også feil som et individ gjør underveis viktige å betrakte selv om eleven ender opp med riktig svar.

4.3 Forutsetninger for forståelse

Flere ulike faktorer kan ha betydning for feil og misoppfatninger som gir begrensninger for forståelse av den deriverte representert grafisk. Dette kan være alt fra for eksempel lærebøker, motivasjon, deltakelse, relevante forkunnskaper eller undervisning. I denne studien valgte jeg å se på lærerens betydning for forståelsen av den deriverte representert grafisk. Jeg vil videre presentere resultater fra analysen som ble samlet inn for å undersøke hvordan læreren gjennom sitt syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisning kan påvirke dette.

4.3.1 Syn på derivasjon

I undervisningen av et matematisk emne følges den gitte læreplanen i faget, ofte ved hjelp av en lærebok. Hovedområdet funksjoner i læreplanen for R1 handler blant annet om sammenhengen mellom funksjonen og dens deriverte (Utdanningsdirektoratet, 2016). Jeg vil hevde at læreplanmålet åpner for tolkning, og lærerens tolkning av læreplanens innhold kan dermed være med å farge undervisningen. I dette delkapittelet presenterer jeg analysen som ble gjort vedrørende lærerens syn på derivasjon. Det ble skilt mellom strukturell og operasjonell oppfatning.

4.3.1.1 Syn på derivasjon som en prosess

Læreren Espen sa tidlig i intervjuet at det er forskjell på en S1 og en R1 klasse, og at dette gjør at undervisningsmetodene er forskjellige. Elevene som tar R1 er *”litt mer motiverte til å for det første å gå videre med matematikk, og de vet ofte hva de vil med...”.* Videre mente han at disse elevene ville få bruk for derivasjon senere, både i R2 og fysikk og i høyere utdanning som for eksempel ingeniør, og at det derfor er viktig å kunne det mekaniske. *”Det ideelle for meg, det er hvis de kan* *det såpass godt, at det ikke sitter oppe i hodet lenger, at de faktisk har det i fingrene"*. Dette utsagnet er et godt eksempel på at Espen har fokus på anvendelse av derivasjon. Det ser ut som at Espen mener at derivasjon er et redskap hvor elevene må lære seg å bruke reglene, helst automatisk. I intervjuet hevdet han at han ønsker å gi oppgaver som kan gi elevene gode regneferdigheter som forberedelse til senere fag.

Ut i fra disse utsagnene kan det se ut som om læreren har en operasjonell oppfatning av derivasjon, hvor det matematiske begrepet kan tilnærmes ved å gjennomføre en rekke handlinger (Sfard, 1991). Dersom læreren i sin undervisning i stor grad gir oppgaver for å utvikle elevenes mekaniske ferdigheter kan dette føre til at elever også ser på derivasjon som en prosess. Flere utsagn styrket denne oppfatningen. Et godt eksempel en gjengitt nedenfor:

> Espen: ...Man skal for eksempel finne, en tangent. ehm. Ofte er jo oppgavene med det, man skal, finn ligningen til en tangent, så kan, så er.. Så er den deriverte det middelet man bruker for å finne stigningstallet til den tangenten.

I utsagnet over beskrev Espen derivasjon som et middel for å finne stigningstallet til tangenten. Dette kan tyde på at han ser på derivasjon som en del av en prosess, et hjelpemiddel for å komme frem til løsning (Sfard, 1991). Dette synet kan gjerne ha påvirkning for hvordan elevene forstår begrepet derivasjon. Dersom Espen presenterer derivasjon som et middel for å finne stigningstallet til tangenten, og ikke at stigningstallet til tangenten er én av flere måter å representere den deriverte på, kan dette gjerne hindre elevenes utvikling av forståelse for at den deriverte kan beskrives gjennom ulike representasjoner.

I løpet av intervjuet snakket læreren mye om regning og om regneregler. Et eksempel er da han ble spurt om hva han trodde elevene synes er vanskelig med temaet. Da mente han at mengden med regneregler er problematisk.

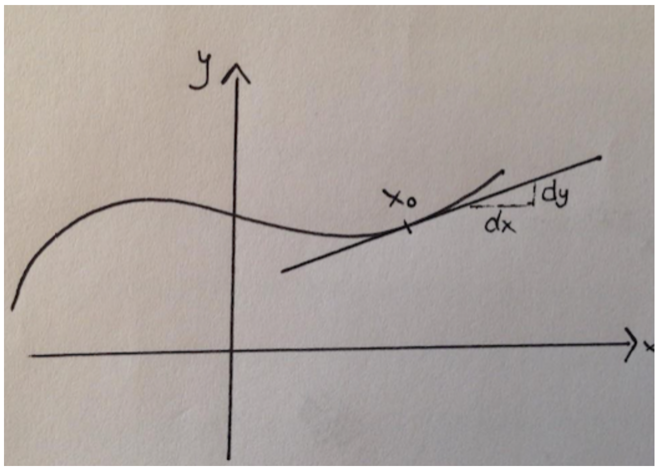
Espen: Har de det ikke i fingrene, så må de faktisk huske denne lista, til en viss grad da.. ehm.. og da blir det vanskelig. Så det er en slags terskel, en terskel du må over for å kunne, for å kunne, ja.. for å komme over den terskelen hvor du slipper liksom å tenke på, disse reglene hele tiden.

Læreren beskrev en terskel som elevene må over for oppnå måloppnåelse i emnet derivasjon. Han hevdet at det er vanskelig for elevene å huske et økende sett med regler, noe også Skemp (1978) hevder er et problem ved instrumentell forståelse. Det kan dermed se ut som at læreren ønsker å forhindre at elevene må huske regler, at han ønsker å forhindre en instrumentell forståelse av faget. Metoden ser likevel ut til å være å regne mer, at ”*eleven lærer ved å bruke regelen”.* Espen ser dermed ut til å være opptatt av å sette av tid i undervisningen til at elevene får bruke regneregler. Dersom det hovedsakelig er fokus på å regne oppgaver hvor derivasjonsregler brukes, kan dette føre til at å studere den deriverte i andre sammenhenger får redusert plass i undervisningen.

Også gjennom forskningsmetoden observasjon, ble det funnet episoder som indikerte at Espen la vekt på å utvikle regneferdighetene til elevene. Etter en kort repetisjon i starten av undervisningsøkten, hvor ulike derivasjonsregler ble ført opp på tavla, ble store deler av økten brukt til å løse oppgaver i læreboka. Det er likevel ikke sikkert at denne oppbyggingen av undervisning var typisk for hver time, den strukturelle oppfatningen blir muligens vektlagt i større grad i andre andre undervisningsøkter.

4.3.1.2 Syn på derivasjon som et objekt

Selv om hovedvekten av mitt datamateriale viste tegn på en operasjonell oppfatning av derivasjon hos læreren, var det likevel noen utsagn som falt inn under kategorien strukturell oppfatning. I intervjuet nevnte læreren at han synes det er viktig at elevene forstår hvor den deriverte kommer fra, og at det har noe med stigningstallet til tangenten å gjøre. Det kan se ut som om læreren i sin undervisning også presenterer den deriverte som en virkelig ting. Dersom læreren gir oppgaver som skaper forståelse av den deriverte som en statisk struktur, kan dette utvikle elevenes strukturelle oppfatning av begrepet (Sfard, 1991). I intervjuet uttalte Espen at han ofte startet undervisningsperioden med å bruke grafer, og snakke om endring i disse. I økten som ble observert startet også læreren med å tegne en vilkårlig graf på tavla. Han tegnet tangenten i et punkt og markerte stigningstallet. Ettersom jeg ikke fikk tatt bilde av tavla har jeg gjengitt lærerens figur nedenfor (formen på grafen kan avvike noe fra den virkelige grafen):



Figur 10: Gjengivelse av lærerens figur på tavla under undervisningsøkt.

Etter å ha tegnet denne figuren sa læreren til elevene at den deriverte er stigningstallet til en tangent i punktet x_0, det er det man kaller den deriverte til grafen i punktet. Ved denne type forklaring vil jeg hevde at læreren kan styrke elevenes strukturelle oppfatning av begrepet derivert (Sfard, 1991). Han presenterer den deriverte som en virkelig ting som kan representeres grafisk ved stigningstallet til en tangent. Den observerte episoden sammenfaller med data fra intervjuet hvor læreren hevdet at ”*det er jo tre ting som egentlig er det samme, prøver jeg å formidle. Det ene er vekstfart, momentan vekstfart. Ja, det er egentlig ikke det samme, det vet jeg. Også er det stigningstallet til tangenten, også er det den deriverte.”* Det kan virke som at læreren ønsker å formidle at den deriverte er et objekt som kan representeres på ulike måter. Dersom læreren lykkes med dette kan det gjerne være med på å hindre feil og misoppfatninger som skaper begrensning for forståelse av den deriverte representert grafisk.

4.3.2 Bruk av grafer i undervisningen om derivasjon

For å oppnå forståelse av den deriverte representert grafisk er det viktig at funksjoner som er representert grafisk har en naturlig plass i undervisningen. Da læreren Espen ble bedt om å beskrive hvordan han arbeider med temaet derivasjon ga han følgende svar:

> Espen: Stort sett så begynner man jo selvfølgelig med grafer og slike ting, man har hatt litt sånn momentan vekstfart kanskje, hvert fall gjennomsnittlig vekstfart. Så man er innpå vekstfart. Ehm. Så det er jo der det starter. Man ser på hvordan ting øker. Og. altså forandring av grafer.

Fra dette utsagnet ser det ut som at Espen betrakter grafer som en viktig del undervisningen av derivasjon. Før derivasjonsbegrepet introduseres, brukes grafer for å skape forståelse av begrepene gjennomsnittlig vekstfart og momentan vekstfart. Det kan virke som at læreren ønsker å skape en relasjonell forståelse hos elevene, hvor eleven ikke bare har pugget regler, men forstår hvorfor reglene er gyldige (Skemp, 1978). Espen beskrev i intervjuet hvordan man kan tegne sekanter for å finne gjennomsnittlig vekstfart og videre argumentere for hvordan det blir en tangent når man ser på den momentane vekstfarten. Fra siste setning i utsagnet over får jeg inntrykk av at Espen legger vekt på at elevene skal ha kunnskap om at derivasjon handler om forandring, eller endring.

I intervjuet snakket vi videre om på hvilket tidspunkt i undervisningsperioden begrepet derivasjon ble introdusert. Espen ga følgende svar:

> Espen: Ja. Det kommer da etter det. Har tegnet tangenten. Også stigningstallet, også det vi er ute etter er jo stigningstallet til tangenten, og etter det pleier jeg å introdusere hva derivasjon, begrepet derivasjon, at man kaller, altså det stigningstallet til tangenten, det er det man kaller den deriverte til grafen i punktet.

Introduksjonen av begrepet derivasjon ser i følge uttalelsene ut til å være en naturlig forlengelse av introduksjonen om vekstfart. I følge Espen definerer han begrepet den deriverte til grafen i et punkt som stigningstallet til tangenten. Det ser ut som at Espen forsøker å sette en ramme rundt temaet, hvor derivasjonsbegrepet begrunnes som endring av grafer. I analysen av datamaterialet la jeg merke til at Espen ofte brukte begreper som den deriverte til grafen, og ikke den deriverte til funksjonen. Dette kan være en muntlig formulering som ikke blir brukt i undervisning, men dersom han skiller mellom funksjon og graf kan dette gjerne hindre at elevene oppnår forståelse for at en funksjon kan representeres på ulike måter (Janvier, 1987).

I intervjuet fortalte Espen at grafer ikke ble vektlagt i like stor grad etter denne første introduksjonen. De blir hentet frem som eksempler i oppgaver, men det viktigste er å lære seg regnereglene, og å løse oppgaver hvor man skal finne ekstremalpunkter og vendepunkter ved hjelp av derivasjon.

> Espen: Så det er liksom sånn, hvis man skal bli snekker så holder det ikke å se på hvordan man hamrer inn en spiker, man må gjøre det veldig mange ganger, og etterhvert så er, så blir det mekanisk. Man slipper å tenke, en snekker tenker aldri på når han skal hamre inn en spiker, han bare gjør det.

Espen ser ut til å være opptatt av at elevene skal kunne derivasjonsreglene godt. Helst så godt at de nesten ikke trenger å tenke seg om, men bare kan løse oppgaver. Da han ble spurt om det var tid til automatisere reglene mente han at det i stor grad var dette, men at noen elever kunne trengt mer tid. Han nevnte ikke noe om mer tid til å studere endringsrate for grafer. Det kan enten bety at han bruker tilstrekkelig med tid på å skape denne rammen, eller at han ikke anser det som like viktig. Espen ga inntrykk av å ha et ønske om å skille mellom forståelse og anvendelse. Et godt eksempel på dette gis i samtalesekvensen under:

Intervjuer: Tenker du det er nyttig med grafer? Viktig?

Espen: Jaa, i.. oppgaver, forståelsen av hva de holder på med, så er det nok det i litt større grad. Når det gjelder det rent mekaniske såå, så er det nesten forstyrrende.

Spørsmålet jeg stilte var nokså ledende, og mitt inntrykk er at læreren oppfattet at han burde svare at grafer er viktige i arbeidet med derivasjonsbegrepet. Likevel ser det ut som at Espen mener at gjennomgangen av derivasjon bør være delt. En del hvor elevene skal forstå bakgrunnen for derivasjon, og en del hvor de mekaniske reglene skal læres. Den sistnevnte delen bør bestå av tekniske oppgaver uten visualiseringer slik at elevene får øvd på reglene. Også datainnsamlingen som ble gjort gjennom observasjon ga inntrykk av at øving på regneregler innenfor derivasjon er viktigere enn arbeid med grafer. I undervisningsøkten ble regler ført opp på tavla før oppgaver i boka ble løst. Dersom læreren i hovedsak bruker undervisningstiden på å innøve de mekaniske regnereglene for derivasjon, kan dette være en begrensning for elevenes utvikling av forståelse for den deriverte representert grafisk.

5. Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg oppsummere og diskutere resultatene fra denne studien. Jeg vil sammenligne feil og misoppfatninger som ble funnet med lærerens syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen. Videre vil jeg drøfte kvaliteten av studien gjennom å diskutere studiens kredibilitet, overførbarhet, bekreftbarhet og avhengighet. Til slutt vil jeg vurdere muligheter for videre forskning.

5.1 Overgang fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate

I denne studien ble det funnet tre faktorer som kan være en begrensning for forståelse av overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate. Dette var misoppfatning om gjennomsnittlig endringsrate, misoppfatning om momentan endringsrate og manglende mestring av utregning av stigningstall.

I begrensningen misoppfatning om gjennomsnittlig endringsrate tolket jeg at to av elevene i undersøkelsen hadde en misoppfatning om begrepet gjennomsnittlig endringsrate. Dette var spesielt synlig i oppgave 1 på gruppeintervjuet. I denne oppgaven skulle elevene finne gjennomsnittsfarten for en kjøretur i ulike valgfrie tidsintervaller. I læreplanen for matematikk for ungdomsskolen er det skrevet at elevene i løpet av 8.-10. trinn skal kunne analysere funksjoner ved å se etter spesielle egenskaper, dette innebærer å se hvor raskt en utvikling går (Utdanningsdirektoratet, 2016). Ser man på læreplanen i matematikk for ungdomsskolen er det et mål at eleven mestrer å finne stigningstallet i et gitt intervall.

I sin studie fra 1983 fant Orton at elever har problemer med å forstå sammenhengen mellom sekant og tangent. Også i denne studien ble dette funnet, blant annet ved at én av elevene ikke forsto at gjennomsnittsfarten i et veldig lite intervall var det samme som momentanfarten. Jeg vil hevde at slike feil er en begrensning for å forstå den deriverte representert grafisk, ettersom den deriverte kan defineres som en grenseverdi. Nygaard og Zernichow (2006) hevder at læreren kan være en kilde til misoppfatninger hos elevene. I dette tilfellet må gjerne undervisningen tilpasses slik at eleven ikke overgeneraliserer sin kunnskap om gjennomsnittlig endring (Brekke, 2002).

Gjennom min undersøkelse ser det ut som at læreren starter emnet om derivasjon ved å tilnærme seg momentan endringsrate fra gjennomsnittlig endringsrate. Dette kan gjerne være med på å utvikle en relasjonell forståelse ettersom eleven forstår hvor begrepet derivert kommer fra, og at det handler om momentan endringsrate (Skemp, 1978). Læreren var opptatt av å presisere at den deriverte i et punkt x_0 er gitt ved stigningstallet til tangenten i punktet. Dette opplevede jeg at flere av elevene hadde fått med seg, ettersom det ble nevnt flere ganger i elevintervjuene. Likevel så det ut som at elevene hadde problemer å forstå *hva* ”stigningstallet til tangenten i punktet” innebar. De hadde problemer med å ta i bruk informasjonen slik at det kunne brukes til å løse oppgavene på intervjuet.

Selv om læreren er opptatt at at elevene skal vite at den deriverte i et punkt x_0 er gitt ved stigningstallet til tangenten i punktet, kan det se ut som at det ikke fokuseres på hva dette innebærer. Det kan virke som at setningen blir lært som en instrumentell regel (Skemp, 1978). En bakgrunn for den manglende forståelsen kan være at elevene mangler kunnskap om begrepene stigningstall og tangent. Jeg vil hevde at det også er viktig man i undervisningen av derivasjon, legger vekt på viktige begreper som ligger til grunn for derivasjonsbegrepet. På denne måten er det gjerne lettere for eleven å utvikle et mer komplekst begrepsbilde knyttet til emnet (Tall & Vinner, 1981).

5.2 Sammenheng mellom graf til funksjon og graf til derivertfunksjon

Gjennom mine undersøkelser fant jeg to faktorer som kan være en begrensning for elevens forståelse av sammenhengen mellom grafen til en gitt funksjon og grafen til en derivertfunksjon. Dette var manglende forståelse av den deriverte som endringsrate og forståelse av derivertgrafen som en prosess. Både operasjonell og strukturell oppfatning av et matematisk begrep er viktig å inneha, men den operasjonelle oppfatningen blir ofte utviklet først (Sfard, 1991). At flere av elevene i denne undersøkelsen hadde en operasjonell oppfatning, med andre ord at de så på overgangen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon som en prosess, kan dermed tyde på at de er på et tidlig stadium i sin utvikling av forståelse. Å være på dette stadiet er naturlig i læringsprosessen, men ettersom undersøkelsen ble gjort på R2-elever som allerede skal ha oppnådd målene i læringsplanen (Utdanningsdirektoratet, 2016), burde de ha tilgang til objektforståelsen av begrepet også.

Gueudet (2008) hevder at det ofte legges opp til oppgaver i den videregående opplæringen som i størst grad stimulerer utviklingen av den operasjonelle oppfatningen av den deriverte. Læreren i min studie hevdet at det viktigste innenfor emnet derivasjon var å mestre de mekaniske reglene, noe som gjerne kan føre til en oppfatning av derivasjon som en prosess (Sfard, 1991). Han fortalte også at derivasjon ble brukt som et hjelpemiddel for å finne ekstremalpunkter og vendepunkter til funksjoner representert grafisk. Også flere av elevene som ble intervjuet i denne studien så ut til å behandle derivertgrafen som en prosess. De søkte informasjon om ekstremalpunkter og vendepunkter, i stedet for å forklare betydningen av derivertfunksjonen. Det ble også uttrykt at å bruke derivasjonsregler for å derivere ulike funksjoner, var lettere enn å tolke grafer.

I intervjuet sa læreren Espen at han var opptatt av at elevene skulle forstå hvor den deriverte kom fra. Jeg tolker dette som at han ønsker å skape relasjonell forståelse (Skemp, 1978). Det virker som han mener at elevene skal forstå bakgrunn for emnet derivasjon, og at det kobles til begrepet endringsrate. Dette skiller seg dermed fra instrumentell forståelse hvor et økende sett med regler innøves (Skemp, 1978). Likevel opplevde jeg ikke at disse meningene var i samsvar med senere uttalelser, eller med datamaterialet fra den observerte økten. Espen uttalte at mye av tiden innenfor temaet ble brukt til å øve på regler, for at elevene skulle kunne de såpass godt at de nesten ikke trengte å tenke seg om. I den observerte undervisningsøkten ble også regler skrevet opp på tavla, før elevene arbeidet med oppgaver i boka. Jeg tolker dataene mine som at Espen mener det er viktig å ha forståelse for hva den deriverte er, altså at elevene ser på den deriverte som et objekt (Sfard, 1991). Likevel viser data fra både intervjuet og observasjonen at han ser ut til å synes at det er enda viktigere med en operasjonell forståelse av begrepet. Han ser ut til å arbeide for utvikling av den mekaniske forståelsen av begrepet, hvor elevene ser på den deriverte som en prosess (Sfard, 1991). Da dette vil redusere fokus på å representere den deriverte grafisk, kan det være en forutsetning som hindrer elevenes utvikling av forståelse av den deriverte representert grafisk.

5.3 Vurdering av kvaliteten til studien

I dette delkapittelet vil jeg diskutere kvaliteten til denne studien. Kvaliteten på kvantitativ forskning blir ofte vurdert gjennom å se på studiens validitet og reliabilitet. Reliabilitet innebærer at undersøkelsen er stasjonær og pålitelig, dersom man gjennomfører undersøkelsen på ny vil man få samme resultat (Robson, 2011). Validitet handler om undersøkelsens nøyaktighet. Dette innebærer at resultatene fra undersøkelsen gir svar på det man ønsker å måle, og ikke er et resultat av en annen påvirkning. Ettersom kvalitativ forskning i stor grad er påvirket av konteksten, er det vanskelig å gjennomføre en nøyaktig lik undersøkelse flere ganger. Det stilles derfor også krav om at studien må være troverdig og pålitelig. Guba (1981) gir fire kriterier for kvaliteten i en kvalitativ studie. De fire kriteriene er kredibilitet, overførbarhet, avhengighet og bekreftbarhet. Jeg vil videre presentere hva som ligger i begrepene, og vurdere studien min opp mot hver kategori.

Kredibilitet, eller indre validitet, handler om at studien fremstår som sannsynlig eller tillitvekkende (Guba,1981). I min studie benyttet jeg flere datainnsamlingsmetoder, som er et redskap for å sikre studiens kredibilitet på (Guba, 1981). Dersom ulike metoder ser ut til å vise samme mønster, vil det gjerne være med på å styrke sikkerheten om et gyldig resultat. Jeg benyttet meg av intervju med oppgaveløsing, både individuelt og i gruppe slik at elevene i ulike settinger kunne utrykke sine tanker. I tillegg benyttet jeg intervju og observasjon av læreren i faget. I tillegg til metodetriangulering ble deler av studien gjort i naturalistiske situasjoner. Jeg var ikke-deltakende observatør i lærerens undervisningsøkt. Oppgaveløsningen i par ble også gjennomført med mindre innblanding fra meg som forsker. Samtalen og samarbeidet mellom elevene var dermed naturlig. Elevene utfordret hverandre til å uttrykke seg klart og forklare tankene sine nøye, noe som ga meg verdifulle data. Å gjennomføre forskning i naturalistiske situasjoner kan også bidra til å gjøre studien mer tillitvekkende, og er dermed et godt redskap for å sikre kredibilitet (Guba, 1981).

Dersom studien er overførbar, eller har en høy ytre validitet, kan den anvendes i andre kontekster og med andre deltakere (Guba, 1981). Kvantitative studier støtter seg til statistiske generaliseringer, og det er derfor enkelt å gjennomføre den nøyaktig samme studien flere ganger (Yin, 2009). I kvalitative studier er derimot målet en analytisk generalisering, som innebærer at forskeren forsøker å generalisere resultater til en bredere teori. For å oppnå dette har jeg i studien støttet meg på teoretiske begreper fra relevant teori. Jeg har også gitt en tydelig beskrivelse av konteksten slik at det er mulig for leseren å overføre til andre kontekster.

Avhengighet, eller reliabilitet, handler om hvorvidt de samme resultatene ville blitt oppnådd dersom studien hadde blitt gjort på ny med de samme (eller lignende) deltakerne og i den samme (eller lignende) kontekst (Guba, 1981, s. 80). Det handler altså om å unngå å trekke feil slutninger i en studie (Yin, 2009). I kvalitativ forskning sikres reliabiliteten ved å være grundig, nøyaktig og ærlig i gjennomførelsen av studien, slik at forskeren selv og andre kan ha mulighet til å gjennomføre den samme studien (Robson, 2011). Jeg har i denne oppgaven beskrevet hvordan jeg gjennomførte undersøkelsen og hvordan jeg har analysert datamaterialet. Jeg valgte også å ta med episoder fra datamaterialet i analysekapittelet. På denne måten er det i større grad tydelig for leseren hvordan analysearbeidet foregikk.

Det siste kriteriet som Guba (1981) beskriver er bekreftbarhet. Dette kriteriet handler om i hvilken grad man kan stole på at funnene i undersøkelsen kommer fra deltakerne, og ikke er påvirket av faktorer som motivasjon, interesse og oppfatninger (perspectives) og lignende fra forskeren (Guba, 1981, s. 80). Det handler om i hvilken grad forskeren kan være objektiv. Kritikere til casestudier hevder at forskeren er for subjektiv i sin tolkning av datamaterialet (Yin, 2009). For å sikre objektivitet må forskeren altså skaffe et datamateriale som i liten grad gir rom for tolkning. Dette gjorde jeg ved å definere problemområdet gjennom spesifikke begreper. Datamaterialet ble analysert gjennom å knytte materialet til teori, ikke subjektive tanker.

Selv om jeg i denne studien har gjennomført flere handlinger for å sikre de fire kriteriene som Guba (1981) beskriver, er det likevel flere begrensninger ved min studie. Derivasjon er et komplekst emne. Å forstå den deriverte representert grafisk innebærer kunnskap om flere begreper. Det innebærer å ha forståelse om funksjoner, grenseverdier og sekanter. Denne kompleksiteten kan være med på å svekke studiens validitet. Resultatene fra undersøkelsene kan være påvirket av for eksempel elevenes forståelse av funksjonsbegrepet, og dermed gi et unøyaktig resultat for forståelse av den deriverte representert grafisk.

Å sikre kredibilitet er særlig utfordrende i casestudier (Yin, 2009). Når forskeren skal undersøke om det er en sammenheng mellom to hendelser x og y, kan det være en tredje faktor z som ikke oppdages, men som påvirker resultatet. Jeg vil hevde at dette kan være en stor begrensning for mine resultater i denne masteroppgaven ettersom derivasjon er et såpass komplekst begrep. I en så begrenset studie som jeg gjennomførte kan det derfor være vanskelig å stole på om resultatene mine svarer på forskningsspørsmålet, eller om det er et resultat av andre faktorer.

I ettertid stiller jeg meg også spørsmålet om hvor nyttig observasjonen av lærerens undervisningsøkt var for å svare på forskningsspørsmålet. Ettersom jeg ikke har innsyn i innholdet av undervisningen hverken før eller i etterkant av den observerte økta, er det vanskelig å få en troverdig oppfatning av lærerens påvirkning for elevenes forståelse av den deriverte. Det kan være vanskelig å stole på at hendelser i den ene undervisningsøkten er representative for en lengre tidsperiode.

Videre kan det være en svakhet at jeg ikke hadde en relasjon med elevene som deltok som informanter i prosjektet. Guba (1981, s.84) hevder at studiens kredibilitet styrkes dersom forskeren tilbringer tid sammen med informantene, slik at forskerens tilstedeværelse føles mer naturlig. I min undersøkelse startet jeg direkte med et individuelt intervju. Det var gjerne skremmende for en elev å sitte alene sammen med meg som forsker, og arbeide med vanskelige oppgaver. Dette kan påvirke elevenes arbeid med oppgavene. Likevel ble studien utført over en uke, som kanskje bidro til at elevene ble mer trygge mot slutten.

5.4 Videre forskning

Elevers forståelse av den deriverte er et spennende og komplekst tema, og på grunn av dette er det store muligheter for videre forskning. På grunn av det komplekse begrepet har det vært utfordrende å gå i dybden under rammen av denne studien. Det har derfor vært en begrenset problemstilling, og jeg vil tro at en større studie kunne vært veldig interessant. Spesielt nyttig kunne det vært å utvide min studie til å se etter flere begrensninger som ligger til grunn for elevers forståelse av den deriverte representert grafisk, ved å inkludere for eksempel grenseverdier eller ikke-kontinuerlige funksjoner. Ettersom begrepet er avhengig av flere faktorer kunne det også vært interessant med en studie over tid, for å følge utviklingen av relaterte begreper. Et annet interessant tema ville vært en komparativ studie med en gruppe elever som i stor fikk presentert derivasjon grafisk og en gruppe som i stor grad fikk presentert begrepet ved regning.

6. Konklusjon

Målet med denne masteroppgaven var å få innsikt i elevers forståelse av den deriverte representert grafisk, nærmere bestemt å undersøke hvilke misoppfatninger som kunne være et hinder for forståelsen. For å undersøke dette valgte jeg følgende forskningsspørsmål: *Hvilke begrensninger for forståelse kan man finne hos fire R2-elever angående sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan endringsrate?* og *Hvilke begrensninger for forståelse kan man finne hos fire R2-elever angående overgangen mellom grafen til en funksjon og grafen til en derivertfunksjon?* Jeg ønsket også å få innsikt i faktorer som kunne ha påvirkning for forståelsen, og valgte dermed forskningsspørsmålet *Hvordan påvirker læreren gjennom sitt syn på derivasjon og bruk av grafer i undervisningen elevenes forståelse av den deriverte representert grafisk?* En innsikt i disse forskningsspørsmålene kan være svært nyttig for meg som lærer for å utvikle min undervisningspraksis, og for å få innsikt i hvilke problemer elever kan møte på i avanserte emner.

For å belyse de to første forskningsspørsmålene gjennomførte jeg individuelle intervju med de fire elevene og gruppeintervju i par. Begrensningene som ble funnet for forståelse av sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan endringsrate ble delt i kategoriene misoppfatning om gjennomsnittlig endringsrate, misoppfatning om momentan endringsrate og manglende mestring av utregning av stigningstall. Begrensningene som ble funnet for forståelse av overgangene mellom grafen til en funksjon og grafen til derivertfunksjonen ble delt inn i kategoriene manglende forståelse av den deriverte som endringsrate og forståelse av derivertgraf som en prosess. Det siste forskningsspørsmålet ble belyst gjennom intervju og observasjon av lærer. Jeg valgte å dele dataene inn i hvilket syn læreren hadde på derivasjon, og i hvilken grad grafer var en del av undervisningen. Lærerens syn ble kategorisert i strukturell og operasjonell oppfatning.

Arbeidet med denne studien har gitt meg god innsikt i hvordan elever som tar R2 forstår derivasjonsbegrepet. Det har gitt meg innsikt hvordan de arbeider alene og i en gruppe, og hvilke faktorer som setter begrensninger for deres gjennomføring av oppgaven. Å analysere elevers resonnementer når de gjorde feil har bidratt til å styrke min forståelse av ulike misoppfatninger som elevene kan møte i arbeid med den deriverte representert grafisk. Jeg vil derfor hevde at jeg ved å gjøre dette masterprosjektet har styrket min matematikkdidaktiske kompetanse.

7. Referanser

Adams, R. A., & Essex, C. (2013). *Calculus: a complete course* (8. utg.). Toronto, Canada: Pearson.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 399–431.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Læringssenteret.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory* (3. utg.). Los Angeles, CA: SAGE Publications.

Donaldson, M. (1963). *A study of children's thinking*. London, England: Tavistock publications.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational communication and technology journal*, 29, 75-91.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational studies in mathematics*, 67, 237-254.

Grønmo, L. S. (2010). Prestasjoner på oppgaver i kalkulus. I L. S. Grønmo, T. Onstad & I. F. Pedersen (Red.), *Matematikk i motvind, TIMSS Advanced 2008 i videregående skole* (s. 83-109). Oslo: Unipub.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (s. 27-41). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Norsk senter for forskningsdata (2016). *Må prosjektet meldes?* Hentet fra: http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt

Nygaard, Olav & Anja G. Zernichow (2006). Den blokkerende misoppfatning, i *Spesialpedagogikk. Temanummer matematikkvansker.* Hentet fra :

http://home.uia.no/olavn/blokkerende.pdf

Orton, A. (1983). Students understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics,* 14, 235-250.

Robson, C. (2011). *Real world research: a resource for users of social research methods in applied settings* (3. utg.). Chichester, England: Wiley.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22, 1- 36.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The arithmetic teacher*, 26, 9-15.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12, 151-169.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International journal of mathematical education in science and technology*, 38, 609–637.

Utdanningsdirektoratet (2016). *Læreplan i matematikk fellesfag – kompetansemål etter 10. årssteget.* Hentet fra:

http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal?arst=98844765&kmsn=583858936

Utdanningsdirektoratet (2016). *Læreplan i matematikk for realfag.* Hentet fra: http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Kompetansemaal?arst=1858830315&kmsn=-116986193

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education,* 20, 356-366.

Yin, R. (2009). *Case study research: design and methods* (4. utg.). Thousand Oaks, CA: Sage.

8. Vedlegg

Vedlegg A – Samtykkeskjema

Vedlegg B – Oppgaver under individuelt intervju

Vedlegg C – Oppgaver under gruppeintervju

Vedlegg D – Intervjuguide for lærerintervju

Vedlegg E – Transkripsjonsnøkkel

Vedlegg A

Samtykkeskjema

Til elever på VG3 ved [redacted]

Anmodning om tillatelse til lydopptak under oppgaveløsing og oppfølgingsspørsmål, samt innsamling av elevbesvarelser.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU, og skal denne våren skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Målet med masterprosjektet mitt er å få innblikk i hvordan elever som tar faget R2 forstår derivasjon, og hvordan lærebok og undervisning har påvirkning på elevenes forståelse.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å samle inn elevbesvarelser fra oppgaver som handler om derivasjon. Underveis i arbeidet med oppgavene vil jeg også stille oppfølgingsspørsmål. Det vil bli gjort lydopptak underveis i dette arbeidet, slik at jeg skal få med meg alt som blir sagt. I denne sammenheng ber jeg derfor om tillatelse fra deg til å kunne gjøre lydopptak under arbeidet med oppgavene, samt samle inn besvarelsen.

Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Besvarelsene og lydopptaket vil kun bli sett/hørt av meg og min veileder. I materialet som skrives eller på annen måte presenteres for andre, vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data, oppgavebesvarelse og lydopptak, vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, og senest 01.09.2016.

Hvis du ønsker å vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper du synes dette er interessant og viktig, og at du er villige til å være med på det. Jeg ber deg om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt du gir eller ikke gir samtykke til å være med på prosjektet.

Med vennlig hilsen Kjersti Fandrem.

Tillatelse:

Som del av masterprosjektet mitt ber jeg om tillatelse til å bruke din skriftlige besvarelse på oppgavene om derivasjon, samt ta opp samtalene underveis på et lydopptak. Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg gir tillatelse.

☐ Jeg gir ikke tillatelse.

Dato: ....

Fornavn og etternavn: ....

Underskrift: ....

Vennligst returner svarslippen til meg eller [redacted] så snart som mulig.

Vedlegg B

Oppgaver under individuelt intervju

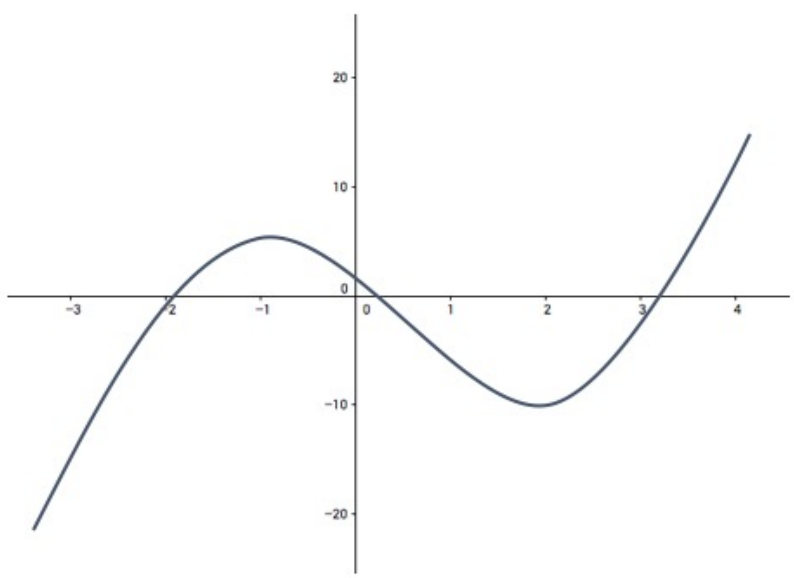
Oppgave 1

Finn $f'(x)$ når

a) $f(x) = x^3 + x^{-5}$
b) $f(x) = (3x + 2)^3$

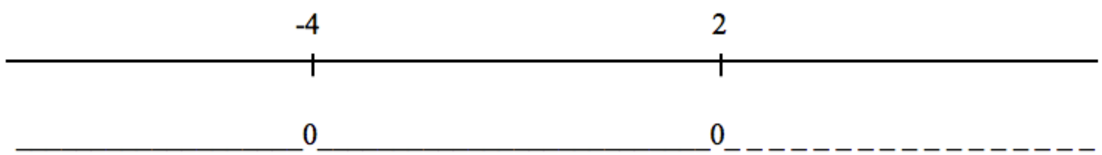
Oppgave 2

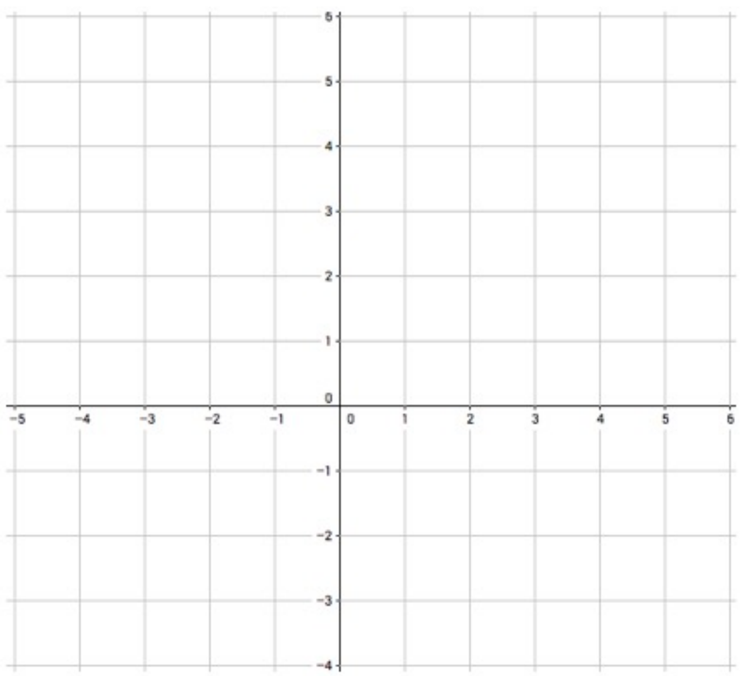
a) Funksjonen $g(x)$ er gitt ved grafen



Lag et fortegnsskjema for den deriverte til funksjonen

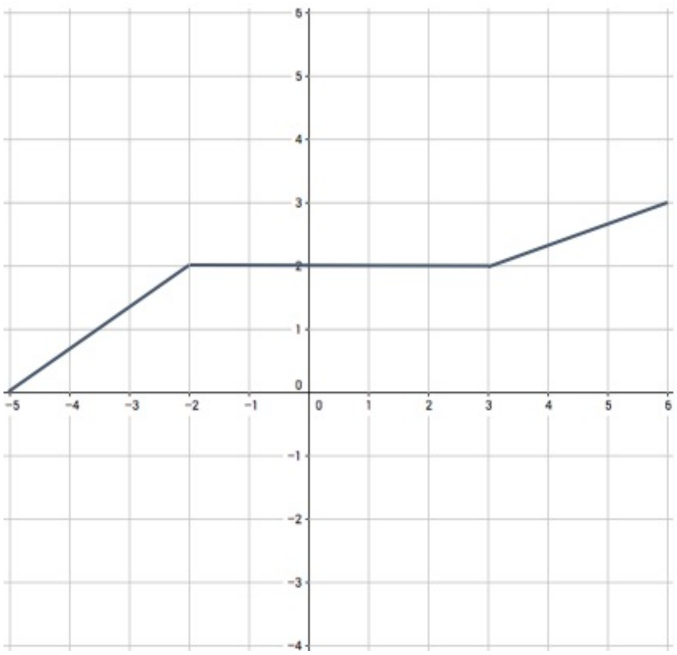
b) Nedenfor et det gitt et fortegnsskjema for den deriverte til en funksjon: $f'(x)$. Skisser ved hjelp av dette grafen til funksjonen $f(x)$.

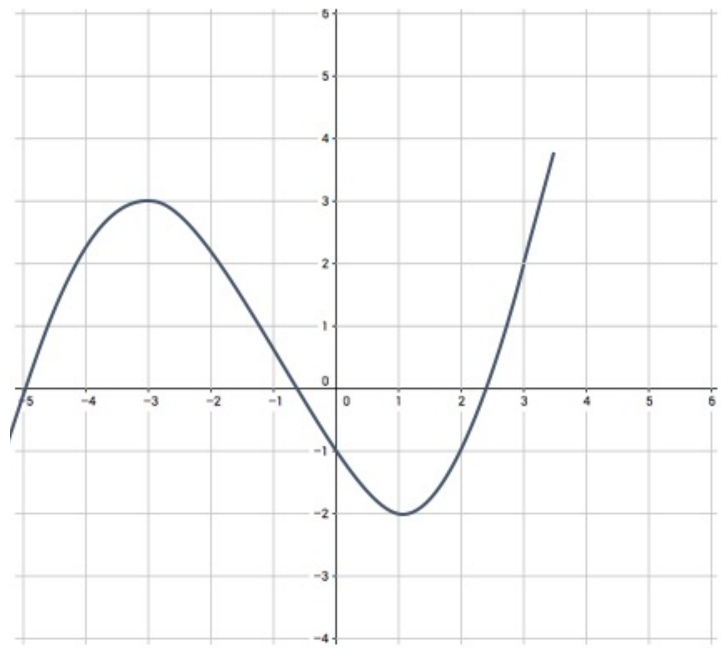


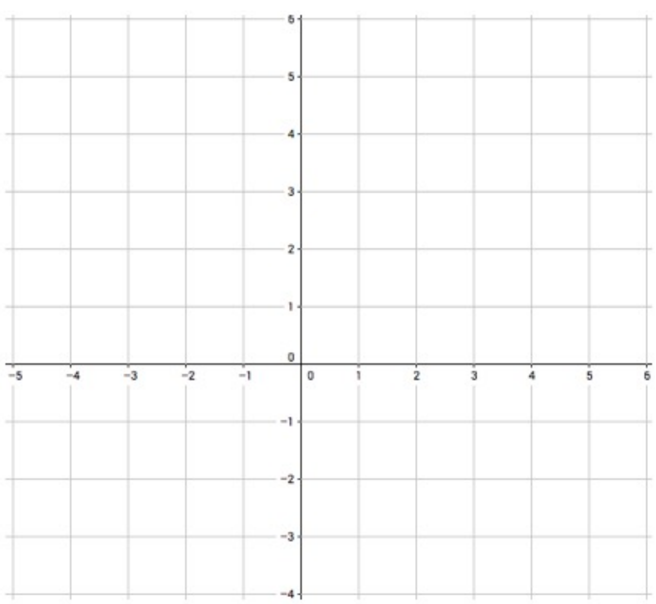


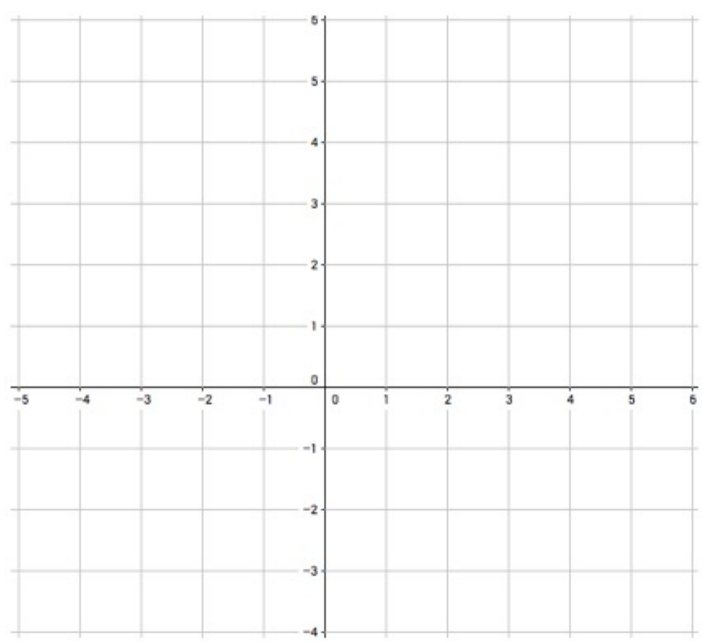
Oppgave 3

a) Nedenfor ser du grafen til to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$. Skisser grafene til den deriverte av funksjonene: $f'(x)$ og $g'(x)$.

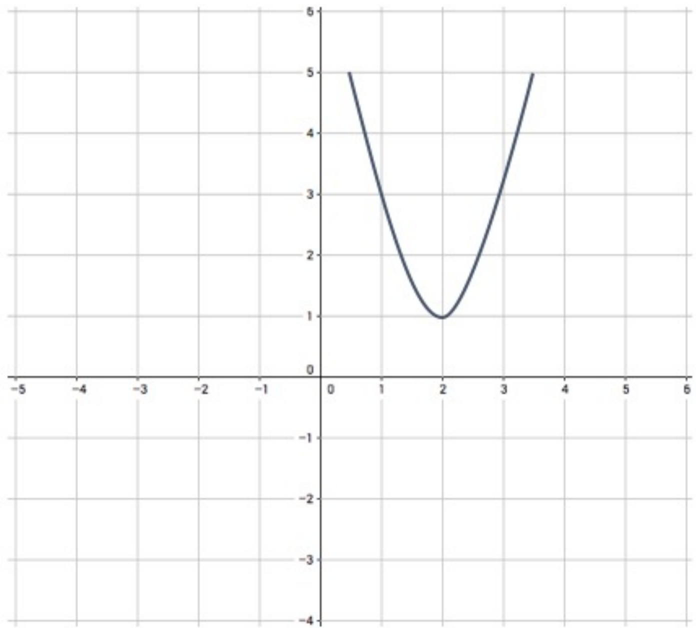


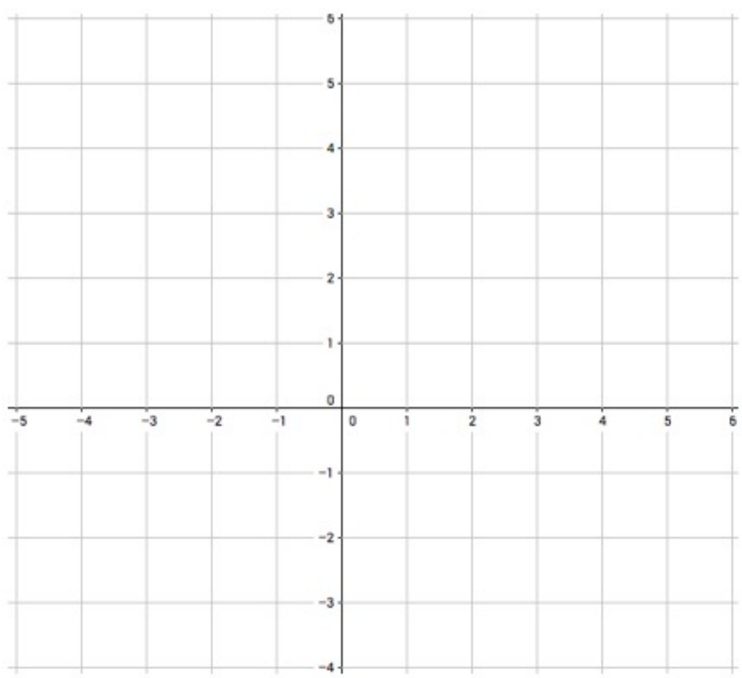






b) Nedenfor ser du grafen til den deriverte til funksjonen $h'(x)$. Skisser grafen til funksjonen $h(x)$.



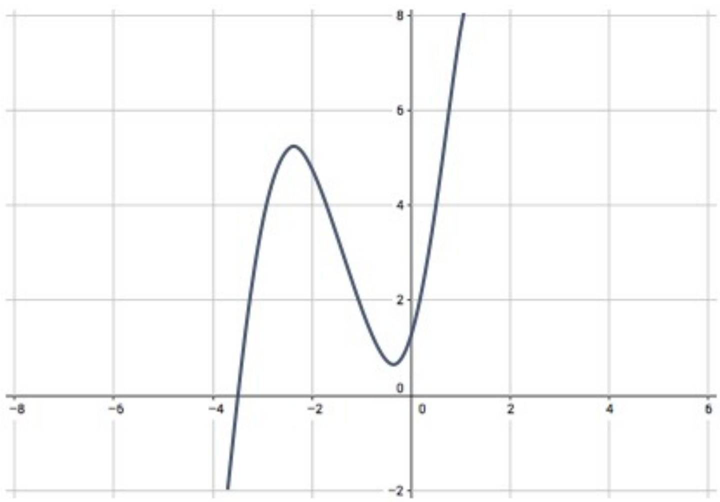


Oppgave 4

Hva er den deriverte til funksjonen i et punkt? Hvordan ville du forklart dette til en som ikke kan dette?

Oppgave 5

Gitt en funksjon $f(x)$



Finn $f'(-2)$ ved grafisk metode.

Vedlegg C

Oppgaver under gruppeintervju

Oppgave 1

Du skal kjøre bil til hytta de som er 125 km unna. På veien må du stoppe to ganger: én gang for å fylle bensin og én gang for å handle mat. Det er fredag ettermiddag, og flere andre bilister skal også på hyttene sine. På noen strekninger kan det derfor være kø.

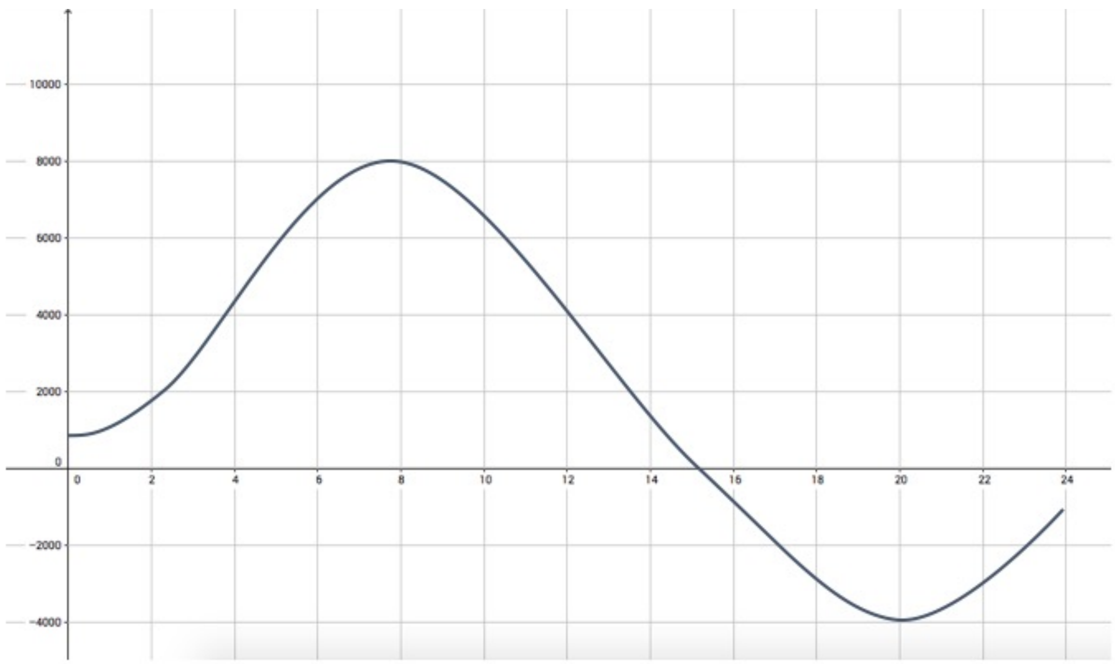
a) Tegn en passende graf for kjøreturen, som beskriver tilbakelagt strekning som en funksjon av tida. La enheten på x-aksen og y-aksen være henholdsvis timer og kilometer.

b) Ta utgangspunkt i et tidsintervall på kjøreturen. Hva er gjennomsnittsfarten?

c) Gjør tidsintervallet gradvis mindre ved å la endepunktet nærme seg startpunktet. Finn gjennomsnittsfarten i 3 intervaller. Hva skjer når endepunktet nærmer seg startpunktet?

Oppgave 2

Utviklingen av en bakteriekultur gjennom et døgn er gitt ved funksjonen $y = f(x)$. Figuren nedenfor viser grafen til funksjonen $y = f'(x)$.



a) Hva viser $f'(x)$ her?

b) Ved hvilket tidspunkt er antall bakterier på topp?

c) Når øker antall bakterier mest?

Husk å begrunne svarene dine!

Vedlegg D

Intervjuguide

- Hva er derivasjon?
- Hvordan gjennomgår/arbeider du med dette emnet? Kom gjerne med eksempler fra undervisning.
- Hva er det viktigste å gjennomgå i emnet for å skape forståelse hos elevene?
- Hvor ofte og i hvilke kontekster bruker du grafer i arbeidet med derivasjon? Fint med noen eksempler.
- Bruker du noen ganger GeoGebra? Og i så fall, hvordan brukes dette?
- Hva er elevenes forhold til derivasjon: er det et vanskelig emne, kjekt emne?
- Hva mener du at elevene skal sitte igjen med etter dere har gjennomgått kapitelet om derivasjon? Hva er det viktigst at de sitter igjen med?

Vedlegg E

Transkripsjonsnøkkel

...	=	pause – antall prikker indikerer lengde på pausen
\	=	avbryter det som blir sagt i linjen over
[setning]	=	min forklaring på hendelse/kroppsspråk som ikke fanges opp av den skriftlige transkripsjonen
”setning”	=	Et utsagn fra informanten som på grunn av flyt i analysen er satt direkte inn i teksten min.