

# Sammenligning av predikert og målt vindindusert dynamisk respons av Hardangerbrua

**Olav Kristoffer Mork**  
**Kenth Daniel Solheim**

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2014

Hovedveileder: Ole Andre Øiseth, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for konstruksjonsteknikk



Institutt for konstruksjonsteknikk

FAKULTET FOR INGENIØRVITENSKAP OG TEKNOLOGI

NTNU – Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

## MASTEROPPGAVE 2014

for

*Olav Kristoffer Mork og Kenth Daniel Solheim*

### **Sammenlikning av predikert og målt vindindusert dynamisk respons av Hardangerbrua**

*Comparison of Predicted and Measured Dynamic Response of the Hardanger Bridge*

I forbindelse med prosjektet ferjefri E39 blir Hardangerbrua instrumentert for å kartlegge nøyaktigheten til de metodene som benyttes til å beregne dynamisk respons av konstruksjoner utsatt for vindlaster.

Denne oppgaven dreier seg om analyse av måledata og beregning av dynamisk respons. Oppgaven bør inneholde følgende temaer:

- Beregninger av demping, svingeformer og egenfrekvenser i Abaqus
- Beregninger av demping, svingeformer og egenfrekvenser ved hjelp av måledata
- Analyse av vindfeltet for å bestemme dets romlige statistiske egenskaper
- Beregning av vindindusert dynamisk respons
- Analyse av usikkerheter knyttet til beregningene

Besvarelsen organiseres i henhold til gjeldende retningslinjer.

*Veiledere: Ole Andre Øiseth, Knut Andreas Kvåle*

**Besvarelsen skal leveres til Institutt for konstruksjonsteknikk innen 10. juni 2014.**

NTNU, 28. januar, 2014

Ole Andre Øiseth

faglærer





# Forord

Masteravhandlingen, *Sammenlikning av predikert og målt vindindusert dynamisk respons av Hardangerbrua*, har foregått gjennom 20 uker våren 2014. Oppgaven er utarbeidet i et samarbeid mellom Kenth Daniel Solheim og Olav Kristoffer Mork som en videreføring av prosjektoppgaven, *Dynamisk respons av Gjemnessundbrua*, høsten 2013, og markerer avslutningen på et 5-årig masterprogram ved Norges teknisk-naturvitenskaplige universitet (NTNU) innen bygg- og miljøteknikk.

Prosessen fra start til slutt har vært ytterst lærerik og har endt i en dyptgående forståelse innen dynamisk oppførsel til slanke konstruksjoner. Utviklingen av arbeidet er formet etter forfatterne sitt møte med aktuelle problemer.

Vi vil rekke en stor takk til førsteamanuensis, Ole Andre Øiseth. Bidraget og entusiasmen hans har spilt en nøkkelrolle for både fremdrift og motivasjon. Tilgjengeligheten og åpenheten han har vist gjennom veiledningen det siste året er svært verdsatt.

Videre vil vi takke doktorstipendiat Knut Andreas Kvaale som har vært en viktig støttespiller i fagmessige diskusjoner.

Trondheim, 10.06.2014

*Olav K. Mork*

Olav Kristoffer Mork

*Kenth Daniel Solheim*

Kenth Daniel Solheim



# Sammendrag

Den velkjente kollapsen av hengebrua, *Tacoma Narrows*, i 1940, førte til et økt fokus på vindindusert dynamisk respons som problemområde. Ettersom moderne bruedesign stadig gir lengre, slankere og lettere bruer, øker behovet for mer nøyaktige og pålitelige metoder til å predikere vindindusert dynamisk respons.

Hardangerbrua er den lengste hengebrua i Norge, og er blant de ti lengste hengebruene i verden med et hovedspenn på 1310 meter. Brua har kun to kjørebane og et felt for gang- og sykkelsti, hvilket betyr at Hardangerbrua er en av de slankeste i sin klasse. For å kartlegge nøyaktigheten til dagens metoder innen responsprediksjon og modellering, er Hardangerbrua blitt instrumentert for oppfølging.

Denne masteroppgaven består av to hoveddeler. Den første delen tar for seg signalprosessering av måledata fra Hardangerbrua, hvor kjente metoder brukes til å identifisere bruas dynamiske egenskaper og til å analysere bruas dynamiske respons. Del to anvender etablert turbulenteori for å predikere brubanens dynamiske respons. Resultatene fra de to delene presenteres og sammenlignes slik at eventuelle feil og svaketer i den brukte predikeringsmetoden kan påpekes.

Eigenfrekvensene er funnet ved å plukke markante topper i spektraltettheten til akselerasjonsmålinger, og er verifisert ved å plote korresponderende svingeform i 3D. Eigenfrekvenser som ligger uvanlig tett, er skilt ved å kombinere informasjon om akselerometerenes plassering i forhold til relevant modeform med beregnet koherens og fasevinkel. De modale dempnings-estimatene er estimert i frekvensdoment ved hjelp av båndbredden ved halv signalsstyrke. Usikkerhet knyttet til valg av diskretisering er drøftet.

---

Responsetil Hardangerbrua er målt indirekte ut fra et digitalisert akselerasjonssignal, som høypassfiltreres under numerisk dobbel integrasjon. Det er valgt å fokusere på vindindusert respons med middelvindhastigheter på rundt  $10\text{ m/s}$ . Metoden har resultert i en modell som viser sanntids vindhastighet langs bruspennet sammen med forskyvninger i tre dimensjoner. Modellen er brukt til å tolke hvordan trafikk og endringer i vind påvirker akselerasjon og forskyvning langs bruspennet.

Predikert respons er basert på turbulensteori, hvor parametere for Hardangerbrua er hentet fra en etablert elementmetodemodell og tidligere vindtunnelforsøk.

# Abstract

The infamous *Tacoma Narrows Bridge* collapse in 1940 led to an increased focus on wind induced dynamic response as a problem area. As modern bridge design gets longer, slenderer and lighter, the demand for more accurate and reliable methods to predict wind-induced dynamic response is increasing.

The Hardanger Bridge is the longest suspension bridge in Norway and among the top 10 longest suspension bridges in the world, with a main span of 1310 meters. The bridge has only two traffic lanes and one separate lane for bicycles and pedestrians. This implies that the bridge is one of the slenderest long-span suspension bridges in the world. In order to determine the precision of today's practices regarding prediction of response and modelling, the Hardanger Bridge is instrumented.

This master thesis consists of two main parts. The first part deal with signal processing of data measurements from the Hardanger Bridge, where well-known methods are used to identify dynamic properties and to analyze the dynamic response. Part two involve the prediction of the dynamic response of the bridge girder. Results from the two parts are presented and compared such that potential errors and weaknesses in the used method of prediction can be pointed out.

The natural frequencies are identified by picking distinct peaks in the spectral density of acceleration, and are verified by plotting the correspondent eigen modes in 3D. Eigenfrequencies that are difficult to separate from spectral analysis are determined by combining information about the position of the accelerometer in the relevant mode shape with calculate coherence and phase angle values. The modal damping coefficients are estimated in the frequency domain

---

by the *half-power bandwidth method*. Uncertainty attached to the choice of discretization is discussed.

The response of the Hardanger Bridge is measured indirectly from a digitized acceleration signal which is highpass filtered during numerical double integration. It is chosen to focus on wind induced response from mean wind velocity around 10 *m/s*. The method has resulted in a model which display real-time wind velocity along the bridge span, together with the dynamic response in three dimensions. The model is used to interpret in which way traffic induced loading and change in wind affect acceleration and response along the bridge span.

The predicted response is based on a self-developed *MATLAB* program where parameteres from Hardanger Bridge is gathered from an established finite element model and reported wind tunnel experiments.

# Innhold

<b>Forord</b>	<b>I</b>
<b>Sammendrag</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Figurer</b>	<b>XI</b>
<b>Tabeller</b>	<b>XV</b>
<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
1.1 Bakgrunn . . . . .	1
1.2 Tidligere arbeid . . . . .	2
1.3 Omfanget til oppgaven . . . . .	3
1.4 Strukturen til oppgaven . . . . .	4
<b>2 Teori</b>	<b>5</b>
2.1 Klassifisering av data - ergodiske prosesser . . . . .	5
2.1.1 Digitalisering . . . . .	6
2.1.2 Nyquistfrekvens . . . . .	7
2.1.3 Standardisering . . . . .	8
2.1.4 Fourierrekke, fouriertransformasjon og rask fouriertransformasjon . . . . .	8
2.1.5 Lavpassfiltrering . . . . .	10
2.1.6 Skjevhet . . . . .	11
2.2 Spektraltettheter . . . . .	12

2.2.1	Metoder for spektralestimering . . . . .	16
2.2.2	Eigenfrekvenser . . . . .	18
2.2.3	Eigenmoder . . . . .	20
2.3	Dempning . . . . .	21
2.3.1	Båndbredde ved halv signalstyrke . . . . .	21
2.3.2	Måling av fri amplitudereduksjon . . . . .	25
2.3.3	Rayleigh-dempning . . . . .	25
2.4	Stokastisk beskrivelse av turbulent vind . . . . .	27
2.4.1	Vindfeltets spektraltetthet . . . . .	28
2.4.2	Kolmogorovs $\frac{5}{3}$ -lov . . . . .	30
2.4.3	Turbulensintensitet . . . . .	30
2.5	Vindindusert last . . . . .	31
2.5.1	Turbulensteori . . . . .	31
2.5.2	Aerodynamiske deriverte . . . . .	36
2.6	Reponsberegning . . . . .	38
2.6.1	Dynamisk likevekt og frekvensresponsfunksjonen . . . . .	39
2.6.2	Responspektraltetthet . . . . .	41
2.6.3	Maksimal respons . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Numerisk integrasjon av akselerasjon</b>	<b>45</b>
3.1	Hensikt og problemstilling . . . . .	45
3.2	Tidligere arbeid . . . . .	46
3.2.1	Algoritme . . . . .	47
3.2.2	Relasjon mellom frekvens og integrasjon . . . . .	47
3.3	Ufiltrert integrasjon . . . . .	49
3.3.1	Spektraltetthet . . . . .	50
3.3.2	Integrert hastighet og forflytning . . . . .	52
3.4	Filtrert integrasjon . . . . .	54
3.4.1	Spektraltetthet . . . . .	54
3.4.2	Integrert hastighet . . . . .	56



3.4.3	Integrert forflytning . . . . .	57
3.5	Vindindusert last . . . . .	58
3.5.1	Standardavvik og startverdier . . . . .	59
3.5.2	Spektraltetthet . . . . .	62
3.5.3	Integrert hastighet og forflytning . . . . .	64
3.6	Data fra Hardangerbrua . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Signalprosessering</b>	<b>71</b>
4.1	Instrumentplassering . . . . .	71
4.1.1	Anemometer . . . . .	71
4.1.2	Akselerometer . . . . .	72
4.2	Signalfiltrering og sortering . . . . .	72
4.2.1	Vindhastighet . . . . .	72
4.2.2	Vindretning . . . . .	74
4.2.3	Akselerasjon . . . . .	77
4.3	Egenfrekvenser og svingeform . . . . .	80
4.3.1	Metode . . . . .	80
4.4	Dempningstall . . . . .	89
4.4.1	Aeroelastisk dempningsbidrag . . . . .	89
4.4.2	Metode . . . . .	90
4.4.3	Analyse av spektraldiskretiseringer . . . . .	92
4.4.4	Automatisert båndbreddeidentifisering . . . . .	94
4.4.5	Estimering av dempning i tidsdomenet . . . . .	95
4.5	Analyse av forflytning . . . . .	98
4.5.1	Uttak av ideelle målinger . . . . .	99
4.5.2	3D-visualisering . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Prediksjon av respons</b>	<b>105</b>
5.1	Tidligere arbeid . . . . .	105
5.2	Strukturelle egenskaper . . . . .	107
5.2.1	Dempning . . . . .	107

5.3	Aeroelastisk last . . . . .	108
5.3.1	Aerodynamiske deriverte . . . . .	108
5.4	Turbulent last . . . . .	113
5.4.1	Statistiske lastkoeffisienter . . . . .	113
5.4.2	Turbulensspektraltetthet . . . . .	113
5.5	Romlig lastfordeling . . . . .	118
5.5.1	Fellesakseptfunksjon . . . . .	118
5.5.2	Modal lastspektraltetthet . . . . .	119
5.6	Predikert standardavvik for respons . . . . .	120
5.7	Predikert maksimal dynamisk respons . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Resultat og diskusjon</b>	<b>125</b>
6.1	Eigenfrekvenser og svingemoder . . . . .	125
6.1.1	Eigenfrekvenser . . . . .	125
6.1.2	Horisontalmoder . . . . .	127
6.1.3	Vertikalmoder . . . . .	130
6.1.4	Torsjonsmoder . . . . .	134
6.2	Dempningstall . . . . .	135
6.3	Turbulens-krysspektraltetthet . . . . .	137
6.4	Sammenligning av predikert og målt vindindusert dynamisk respons . . . . .	138
<b>7</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>141</b>
7.1	Forslag til videre arbeid . . . . .	142
<b>A</b>	<b>Signalprosessering</b>	<b>145</b>
A.1	FFT - Eigenfrekvenskandidater . . . . .	145
A.2	Dempningsestimater fra ulike tidsserier . . . . .	147
<b>B</b>	<b>Aerodynamiske deriverte - polynomkoeffisienter</b>	<b>153</b>
<b>C</b>	<b>Tidsserier for vind mellom 9-11 m/s</b>	<b>155</b>
	<b>Referanser</b>	<b>187</b>

# Figurer

1.1	Situasjonskart . . . . .	2
2.1	Valg av samplingsrate . . . . .	7
2.2	Skjevhet . . . . .	12
2.3	Ensemble av tidsserier av samtidige hendelser . . . . .	13
2.4	Amplitudespektrum og spektraltetthet . . . . .	15
2.5	Vindusfunksjoner . . . . .	17
2.6	Metoder for spektralestimering . . . . .	18
2.7	Resonans . . . . .	19
2.8	Definisjon av båndbredde ved halv signalstyrke . . . . .	23
2.9	Rayleigh-dempning . . . . .	27
2.10	Korttids stokastiskprosess . . . . .	28
2.11	Momentan relativ vindstrømning og forskyvninger av et aerodynamisk bokstverrsnitt . . . . .	32
2.12	Statiske lastkoeffisienter . . . . .	34
3.1	Beskrivelse av system med harmoniske laster i hver frihetsgrad . . . . .	49
3.2	Ufiltrert normalisert autospektraltetthet, $\Delta\omega \approx 0.314 \text{ rad/s}$ . . . . .	51
3.3	Sammenligning av ufiltrert integrert respons og Newmark-iterert respons . . . . .	53
3.4	Filtrert normalisert autospektraltetthet, $\Delta\omega \approx 0.0314 \text{ rad/s}$ . . . . .	55
3.6	Sammenligning av filtrert integrert forflytning og Newmark-iterert forflytning . . . . .	57
3.7	Beskrivelse av system med vindindusert last i hver frihetsgrad. . . . .	58
3.8	Hastighet som funksjon av avkuttingsfrekvens . . . . .	60

3.9	Forflytning som funksjon av avkuttingsfrekvens . . . . .	61
3.10	Normaliserte autospektraltettheter fra filtrert akselerasjon . . . . .	63
3.11	Integrert hastighet . . . . .	64
3.12	Integrert forskyvning . . . . .	65
3.13	Forskyvning som funksjon av avkuttingsfrekvens . . . . .	67
3.14	Normalisert forflytningsspektraltetthet for ulike avkuttingsfrekvenser . . . . .	68
3.15	Forflytning for ulike avkuttingsfrekvenser . . . . .	69
4.1	Anemometerplassering langs brubanen til Hardangerbrua . . . . .	71
4.2	Akselerometerplassering langs brubanen til Hardangerbrua . . . . .	72
4.3	Korrigerings av vindhastighet fra anemometer . . . . .	73
4.4	Ukorrigert vindretning . . . . .	75
4.5	Korrigert vindretning . . . . .	76
4.6	Butterworth-filtrering av akselerasjon . . . . .	78
4.7	Sammenligning av filtrert- og ufiltrertsignal . . . . .	79
4.8	Unormalisert autospektraltetthet fra en tidsserie på 31 minutter. . . . .	81
4.9	Identifisering av egenfrekvenser . . . . .	83
4.10	Sammenligning av teoretisk og diskretisert modeform, $\Phi_9$ . . . . .	84
4.11	Koherens og fasevinkel for svingemode, $\Phi_9$ . . . . .	85
4.12	Sammenligning av teoretisk og diskretisert modeform, $\Phi_{13}$ . . . . .	86
4.13	Koherens og fasevinkel for svingemode, $\Phi_{13}$ . . . . .	87
4.14	Sammenligning av teoretisk og diskretisert modeform. . . . .	88
4.15	Sammenheng mellom dempningsestimert fra halv båndbredde og spektraltetthet	91
4.16	Sammenligning av diskretisert spektraltettheter . . . . .	93
4.17	Automatisert båndbredde bestemmelse . . . . .	95
4.18	Måling av fri amplitudereduksjon . . . . .	97
4.19	Illustrasjon av vindsektor . . . . .	99
4.20	Uttak av ideell seksjon . . . . .	100
4.21	Kartesisk dekomponering av vindhastighet . . . . .	101
4.22	Forflytning: Uttak av en ideell seksjon . . . . .	102

4.23 3D-visualisering av Hardangerbrua i MATLAB . . . . .	103
5.1 Hardangerbrua modellert i elementmetodeprogrammet, Abaqus FEA. . . . .	106
5.2 Tverrsnitt av Hardangerbrua: Definisjon av vindretning. . . . .	106
5.3 Rayleigh-dempningssestimat . . . . .	108
5.4 Kurvetilpasset AD-koeffisient: Vertikalretning . . . . .	110
5.5 Kurvetilpasset AD-koeffisient: Horisontalretning . . . . .	111
5.6 Kurvetilpasset AD-koeffisient: Torsjon . . . . .	112
5.7 Vindspektraltetthet . . . . .	116
5.8 Stokastisk beskrivelse av kartesiske vindkomponenter . . . . .	117
5.9 Lineær kontra logaritmisk lastfrekvensvektor . . . . .	119
5.10 Predikert spektraltetthet for responsen i midtspennet for økende vindhastighet	121
5.11 Predikert spektraltetthet for responsen i midtspennet ved $V = 38 \text{ m/s}$ . . . . .	122
5.12 Predikert standardavvik for respons i midtspennet for økende vindhastighet . .	123
6.1 Horisontal 1. symmetrisk, $\Phi_1$ . . . . .	127
6.2 Horisontal 1. asymmetrisk, $\Phi_2$ . . . . .	127
6.3 Horisontal 2. symmetrisk, $\Phi_5$ . . . . .	128
6.4 Horisontal 2. asymmetrisk, $\Phi_9$ . . . . .	128
6.5 Horisontal 3. symmetrisk, $\Phi_{13}$ . . . . .	129
6.6 Vertikal 1. asymmetrisk, $\Phi_3$ . . . . .	130
6.7 Vertikal 1. symmetrisk, $\Phi_4$ . . . . .	130
6.8 Vertikal 2. symmetrisk, $\Phi_6$ . . . . .	131
6.9 Vertikal 2. asymmetrisk, $\Phi_7$ . . . . .	131
6.10 Vertikal 3. symmetrisk, $\Phi_8$ . . . . .	132
6.11 Vertikal 3. asymmetrisk, $\Phi_{10}$ . . . . .	132
6.12 Vertikal 4. symmetrisk, $\Phi_{12}$ . . . . .	133
6.13 Vertikal 4. asymmetrisk, $\Phi_{14}$ . . . . .	133
6.14 Torsjon 1. symmetrisk, $\Phi_{11}$ . . . . .	134
6.15 Torsjon 1. asymmetrisk, $\Phi_{15}$ . . . . .	134
6.16 Gjennomsnittlig dempningssestimat for tidsserie $S_{1,\zeta}$ , $S_{2,\zeta}$ og $S_{3,\zeta}$ . . . . .	136

6.17	Predikert og estimert standardavvik for middelvindintervall $V \in [9.5, 11.5]m/s$	139
A.1	Dempingsestimat fra FFT60 . . . . .	149
A.2	Dempingsestimat fra FFT30 . . . . .	150
A.3	Dempingsestimat fra Welch . . . . .	151
C.1	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_1$ . . . . .	157
C.2	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_2$ . . . . .	159
C.3	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_3$ . . . . .	161
C.4	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_4$ . . . . .	163
C.5	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_5$ . . . . .	165
C.6	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_6$ . . . . .	167
C.7	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_7$ . . . . .	169
C.8	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_8$ . . . . .	171
C.9	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_9$ . . . . .	173
C.10	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_{10}$ . . . . .	175
C.11	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_{11}$ . . . . .	177
C.12	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_{12}$ . . . . .	179
C.13	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_{13}$ . . . . .	181
C.14	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_{14}$ . . . . .	183
C.15	Stokastisk beskrivelse av tidsserie, $S_{15}$ . . . . .	185

# Tabeller

4.1	Koherns og fasevinkel fra figur 4.11 . . . . .	85
4.2	Koherns og fasevinkel fra figur 4.13 . . . . .	87
4.3	Parametere for Hardangerbrua . . . . .	90
5.1	Rayleigh dempningskoeffisienter . . . . .	107
5.2	Statistiske lastkoeffisienter . . . . .	113
6.1	Sammenligning av målt og analytisk indikert egenfrekvens . . . . .	126
6.2	Modaledempningstall for ulike diskretiseringer . . . . .	135
6.3	Korrigerte modaledempningstall for ulike diskretiseringer . . . . .	137
6.4	Korreksjon av ett punkts krysspektraltetthet: Endring i predikert respons . . .	137
A.1	Tidsserier benyttet til å identifisere egenfrekvenser . . . . .	145
A.2	Egenfrekvenskandidater . . . . .	146
A.3	Tidsserier brukt til å finne dempingsestimat . . . . .	147
A.4	Middelvind for tidsserier . . . . .	147
A.5	$W$ -parameter for ulike diskretiseringer for tidsserie $S_{1,\zeta}$ . . . . .	148
A.6	$W$ -parameter for ulike diskretiseringer for tidsserie $S_{2,\zeta}$ . . . . .	148
A.7	$W$ -parameter for ulike diskretiseringer for tidsserie $S_{3,\zeta}$ . . . . .	148
B.1	Aerodynamisk deriverte andregradspolynom koeffisienter . . . . .	154
C.1	Tidsserier med 9-11 $m/s$ middelvind . . . . .	155





# Kapittel 1

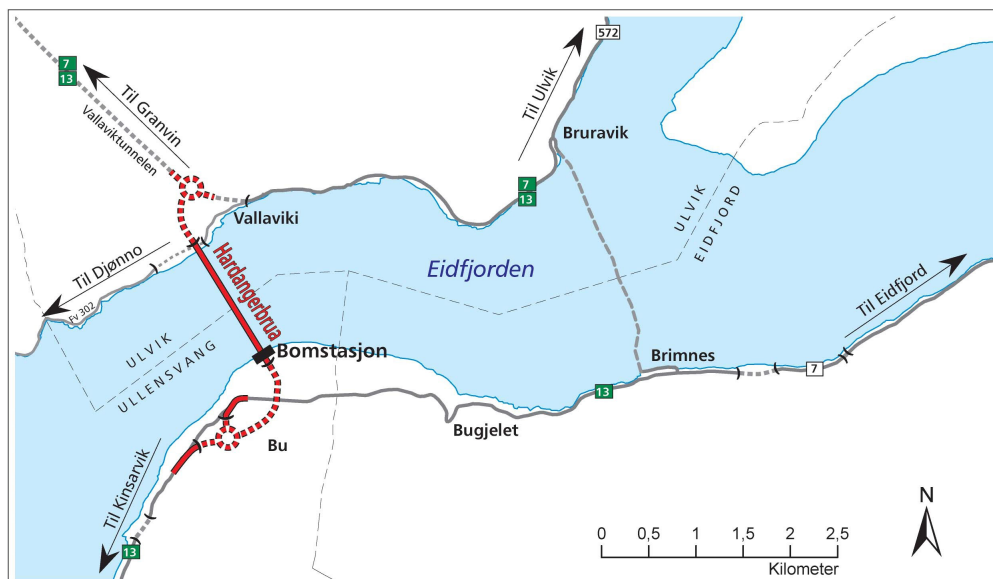
## Innledning

### 1.1 Bakgrunn

Hardangerbrua åpnet offisielt for trafikk den 17. august 2013 og står som den lengste hengebrua i Norge. Hardangerbrua strekker seg over Eidfjorden og kobler Vallavik i Ulvik kommune sammen med Bu i Ullensvang kommune med et hovedspenn på 1310 meter og seilingshøyde på 55 meter, plasseringen er vist i figur 1.1 [1]. Det slanke tverrsnittet gjør at avstivningsbæreren utsettes for vindinduserte svingninger.

Elastiske konstruksjoner, slik som bruer, har en sammensatt lastsituasjon av vind, trafikk og konstruksjon selv [2]. Ettersom moderne brudesign sikter mot å krysse stadig lengre avstander, er det essensielt å være i stand til å predikere vindindusert dynamisk repons.

I sammenheng med prosjektet *Ferjefri E39* har Hardangerbrua blitt instrumentert for en redegjøring av nøyaktigheten til metodene som anvendes til å beregne dynamisk respons hos konstruksjoner påkjent av naturlaster.



Figur 1.1: Situasjonskart[3]

## 1.2 Tidligere arbeid

Masteravhandlingen, *Instrumentering av Hardangerbrua*, av André Sætre Solheim omhandler planlegging av hvordan de pågående målingene skulle gjennomføres. I oppgaven blir dynamisk respons simulert i tidsdomenet ved bruk av elementmetodeprogrammet, *Abaqus FEA*. Solheim konkluderte med at gode målinger kunne samles når målepunktene ble plassert i åtte snitt ved hengestag 8, 17, 25, 30, 36, 41, 49 og 58. Hovedoppgaven til målepunktene er å kunne innhente måledata for å beregne de faktiske dynamiske egenskapene til Hardangerbrua.

Instrumenteringen av Hardangerbrua ble gjennomført høsten 2013. Akselerometerene er montert ved hengestagsnummer 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51 og 57. Utføringen langs brubanen ble i stedet gjort i ni snitt der hengestag 15 og 51 skiller seg ut ved at de kun har ett enkelt akselerometer i motsetning til de syv resterende snittene med parvis montering. Ytterligere to akselerometer par er plassert i topprigelen til hvert tårn. For å innhente informasjon om vindfeltet er ni anemometere montert ved hengestag 10, 19, 21, 23, 24, 33, 42 og 54. Det siste er festet i toppen av tårnet ved Vallavik.

Rapporten, *An accelerometer based approach to measuring displacement of a vehicle body*, gjør en studie i hvordan akselerasjonssignal fra kjøretøy kan integreres numerisk for å skaffe

sanntidsinformasjon om kjøretøyets posisjon[4]. Problem med initialbetingelser og drift blir diskutert og ulike høypassfilter blir testet på akselerasjonssignalet for å minimere problemet. Det konkluderes med at en høypassfiltrering av amplitudespektraltettheten fra rask fouriertransformasjon (FFT) er det nærmeste et ideelt filter på grunn av muligheten til en brå frekvensavkutting.

Svend Ole Hansen ApS har i sin rapport, *The Hardanger Bridge - Static and dynamic wind tunnel tests with a section model*, utført vindtunnelmålinger for Statens Vegvesen på en seksjonsmodell av Hardangerbroa [5]. Modellen som er testet er en seksjon av midtspennet i skala 1:50 på 1.7 meter. Målingene er utført ved to anledninger: 1. revisjon inneholder data for løft og torsjon for både østlig og vestlig vindretning, mens 2. revisjon er utvidet til å inneholde data for drag, løft og torsjon, men da kun for vestlig vindretning (gang- og sykkelstenedstrøms).

## 1.3 Omfanget til oppgaven

Forfatterne har valgt å legge fokuset på andre, fjerde og femte punkt i den foreslåtte masteroppgaven. Behandlingen av måledata viste seg å være mer omfattende enn først antatt.

Denne masteravhandlingen tar som følge for seg identifisering av egenfrekvenser, samsvarende svingeformer og dempning ved signalprosessering av måledata. De brukte målingene inneholder informasjon om akselerasjoner i tre ortogonale retninger i tillegg til vindretning og vindhastighet for målepunkt langs Hardangerbrua. I tillegg er det lagt stor vekt på beregning av predikert vindindusert dynamisk respons.

Akselerometeret gir utdata i form av  $g$ , der  $1g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ . En tolkning av et akselerasjons-signal er ikke like intuitivt å betrakte som forflytning. Det er derfor gjort et studie rundt hvordan høypassfiltrering påvirker numerisk integrasjon av akselerasjon. En korrekt integrasjon krever initielle betingelser og denne informasjonen kommer ikke fra akselerasjonsmålinger. Som en konsekvens av omfattende måledata, begrenser rapporten til å rette oppmerksomheten på respons med vindhastighet rundt 10 m/s.

## 1.4 Strukturen til oppgaven

Rapporten er strukturert på følgende måte:

**Kapittel 2:** Teori vedrørende klassefisering av data, spektraltettheter, dempning, stokastisk beskrivelse av turbulent vind, vindindusert last og responsberegning som legger grunnlaget for brukte metoder er presentert.

**Kapittel 3:** Metoden for hvordan FFT-filtrering anvendes under numerisk integrasjon er beskrevet og eksemplifisert på et system på fire frihetsgrader og avsluttes med å illustrere responsen til Hardangerbrua i horisontalretning.

**Kapittel 4:** Forklaring på utdata fra vindretning, vindhastighet og akselerasjon og hvordan målingene er behandlet før videre bruk i analysen er beskrevet. Fremgangsmåten for identifisering av egenfrekvenser og estimat for tilhørende dempningstall er gjennomgått.

**Kapittel 5:** Beregningsgrunnlaget og beregningsantagelser til responsestimeringen er presentert og sammenlignet.

**Kapittel 6:** Resultatene fra signalprosseringen og responsestimeringen er presentert og diskutert.

**Kapittel 7:** Konklusjoner trekkes med bakgrunn i resultatene i kapittel 6 og forslag til videre arbeid er gitt.

# Kapittel 2

## Teori

### 2.1 Klassifisering av data - ergodiske prosesser

Når et fysisk fenomen skal observeres, vil hver måling være unik. Dette gjør at en eksplisitt matematisk representasjon ikke kan utarbeides. En enkel tidsserie av et tilfeldig fenomen kalles en *sample funksjon*. Mer vanlig er det at en ser på et endelig tidsintervall og i stedet har et *sample opptak* [6]. Videre danner en samling av samplinger en *ensemble*. En fysisk prosess er stokastisk hvis det numeriske utfallet ved en vilkårlig tid eller posisjon i rommet er tilfeldig og kan kun forutses med en viss sannsynlighet [2].

Gitt en stokastisk prosess med  $N$  antall samplinger. Om en tar momentanverdien på et tidspunkt,  $t_1$ , for alle samplingene, summerer verdiene, og dividerer med antall samplinger fås gjennomsnittsverdien [6]:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (2.1)$$

Stokastiske prosesser kan kategoriseres enten som stasjonær eller ikke-stasjonær. Dersom  $\mu_x(t_1)$  ikke varierer når  $t_1$  varierer, kan prosessen sies å være svakt stasjonær [6]. Mer om krav til stasjonære prosesser utdypes ikke i denne rapporten. Ligning (2.1) angir at den stokastiske prosessen er stasjonær ved å se på en samling av opptak for en gitt tid. I de fleste tilfeller kan

stasjonære egenskaper identifiseres ved å se på gjennomsnittet til en spesifikk sampling i en ensemble. Gjennomsnittet for sampling nummer  $k$  blir:

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt \quad (2.2)$$

En ergodisk prosess kjennetegnes ved at gjennomsnittet,  $\mu_x(k)$  i ligning (2.2), ikke varierer over samplingene i prosessen. Sagt på en annen måte er tidsgjennomsnittet til samling nummer  $k$  lik gjennomsnittet av korresponderende ensemble, og kan representeres slik som i ligning (2.3) [6]:

$$\mu_x(k) = \mu_x \quad (2.3)$$

Egenskapene til ergodiske prosesser gjør den til en viktig type av tilfeldige prosesser på grunn av at karaktertrekk kan trekkes ut av en enkel sampling. Det er verdt å merke seg at kun stasjonære prosesser kan være ergodisk.

### 2.1.1 Digitalisering

Formlene som følger i dette kapitlet tar utgangspunkt i diskrete tidsserier og samplinger fra ergodiske prosesser, og gir en innføring i grunnleggende digitaliseringsoperasjoner. Fysiske fenomen som opptrer i naturen forekommer gjennomgående i analoge signaler. En korrekt visning av signalet er ikke mulig å beskrive matematisk og det analoge signalet må konverteres til en digital tidsserie. En sampling bestående av  $N$  digitaliserte verdier som er jevnt fordelt med tidssteg,  $\Delta t$ , sekunder er gitt som:

$$u_n \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

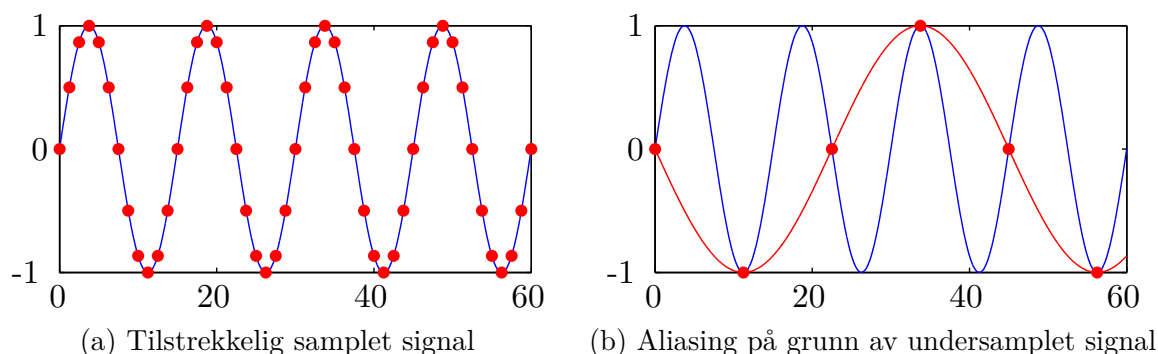
Hver sampling assosieres med tiden:

$$t_n = t_0 + n\Delta t \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

På grunn av at prosessen er antatt å være stasjonær er starttiden,  $t_0$ , vilkårlig og forekommer ikke i videre formulering. Den totale lengden av samplingen vil følgelig være  $T = N\Delta t$ .

### 2.1.2 Nyquistfrekvens

Nyquist-raten er et samplingsintervall som er et minimum for å tilfredsstillere Nyquists samplingsteorem. Problemet ligger i valg av tidssteg når et analogt signal skal digitaliseres. Et minimum antall diskrete verdier er gitt av Nyquist-intervallet, og dette intervallet gir et maksimum for valg av tidssteg. Dersom det velges å ha samplingsraten raskere enn det Nyquist tilsier, oppnår en kun overflødig informasjon. I motsatt fall kan *aliasing* inntreffe. Da er digitaliseringsfrekvensen for lav og kan gi en falsk registrering ved at det blir forvirring mellom lav- og høyfrekvente komponenter i den originale dataen [6]. Figur 2.1 viser et tilstrekkelig samplet og et undersamplet signal.



Figur 2.1: Valg av samplingsrate

Samplingsteoremet sier at hvis antall punkter deles inn med en frekvens på  $\frac{1}{\Delta t}$ , er den høyeste frekvensen som kan identifiseres lik  $\frac{1}{2\Delta t}$ . Nyquistfrekvensen er definert som:

$$\omega_{Nyquist} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (2.6)$$

Et praktisk tiltak for å unngå oversampling er å anvende et lavpassfilter. Denne metoden kalles for *anti aliasing* filtrering. Lavpassfilteret fjerner alle signaler over en gitt frekvens, og her er Nyquistfrekvensen foretrukket. Problemet går også under navnet *foldning*, og kommer av at frekvenser over  $\omega_{Nyquist}$  vil opptre under  $\omega_{Nyquist}$  og foldes inn i det lavfrekvente området av autospektraltettheten. Når frekvensene over Nyquistfrekvensen fjernes, blir problemet med høyfrekventstøy eliminert [6].

### 2.1.3 Standardisering

For den digitaliserte samplingen,  $u_n$ , er gjennomsnittsverdien forventningsrettet [6]. Med det menes at:

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n = \mu_x \quad (2.7)$$

For senere beregninger er det av anvendelighetsgrunner valgt å omforme  $u_n$  til en ny sampling,  $x_n$ , der gjennomsnittet er lik null:

$$x_n = u_n - \bar{u} \quad (2.8)$$

Det nye datasettet svinger nå om en likevektslinje lik null.

### 2.1.4 Fourierrekke, fouriertransformasjon og rask fouriertransformasjon

En av de viktigste oppgavene til en fouriertransformasjon er at den omformer en funksjon,  $x(t)$ , i tidsdomenet over til frekvensdomenet. Diskret fouriertransform (DFT) er en diskretisert tilnærming til det opprinnelige signalet. Denne approksimasjonen fungerer godt på alle frekvenser i signalet som er mindre en halve samplingsraten,  $\omega_{Nyquist}$  [7]. Før en videre innføring i DFT er det essensielt med forståelse av standard fourierrekker.

La  $x(t)$  definere en kontinuerlig stasjonær måling over tidsintervallet,  $0 \leq t \leq T$ . Grunnfrekvensen er definert som:



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.9)$$

Fourierrekken til samplingen gitt av [8]:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} a_q \cdot \cos(q\omega_0 t) + b_q \cdot \sin(q\omega_0 t) \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Faktorene,  $a_0$ ,  $a_q$ , og  $b_q$ , er fourierkoeffisienter til rekken. Fouriertransformasjonen til den kontinuerlige funksjonen,  $x(t)$ , er på kompleks form definert [6]:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dx \quad (2.11)$$

For et signal som består av et endelig antall diskrete verdier er det kun mulig å lage en diskret tilnærming. Med samme fremgangsmåte som i kapittel om digitalisering og en samplingsfrekvens lik Nyquistfrekvensen, vil en endelig fourierrekke for en gitt tid,  $t = n\Delta t$ , bli [6]:

$$x_n = A_0 + \sum_{q=1}^{\frac{N}{2}} A_q \cos\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) + \sum_{q=1}^{\frac{N}{2}-1} B_q \sin\left(\frac{2\pi qn}{N}\right) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

Når data settet er standardisert blir  $a_0$  og  $A_0$  i ligning (2.10) og ligning (2.12) lik null siden verdien representerer gjennomsnittet til signalet.  $A_q$  og  $B_q$  krever en prosedyre på omtrent  $N^2$  reelle multiplikasjoner og adderinger. Når  $N$  blir stor, gjør dette operasjonen tidskrevende. Som et hjelpemiddel er det utviklet rask fouriertransformasjon (FFT). På samme måte som at fourierrekken kun kan lages tilnærmet med et endelig antall diskrete verdier, gjelder samme argumentasjon for fouriertransformasjon. En diskret fouriertransformasjon av  $x(t)$ , vil for en vilkårlig frekvens være [6]:

$$X(f, T) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\omega n \Delta t} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.13)$$

Ligning (2.13) er på lik linje påvirket av Nyquistfrekvensen og er dermed kun unik opp til  $\frac{N}{2}$ . FFT-metodene er designet for å beregne  $X(f, T)$ . Utregninger krever derimot  $N^2$  komplekse multiplikasjoner og addisjoner. Siden komplekse tall er sammensatt av en reell del og en imaginær del, blir konsekvensen at én kompleks multiplikasjon krever fire reelle multiplikasjoner og adderinger [9].

FFT sin kjerne er å dele opp  $N$  i mindre faktorer og utfører i stedet en fouriertransformasjon på disse. La  $N$  være et produkt av  $p$  faktorer vist i ligning (2.14) [6]:

$$N = \prod_{i=1}^p r_i = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_p \quad (2.14)$$

Fouriertransformasjonen gitt av ligning (2.13) krever nå regneoperasjoner av første orden vist i ligning (2.15) [6]:

$$4(Nr_1 + Nr_2 + Nr_3 + \dots + Nr_p) = 4N \sum_{i=1}^p r_i \quad (2.15)$$

En viktig observasjon er at FFT ikke påvirker nøyaktigheten til transformasjonene. Egenskapene til DFT blir i all hovedsak overført til FFT. Positivt er at to svakheter som DFT innebefatter, kvantiseringsstøy og  $N^2$  multiplikasjoner og addisjoner, blir forbedret gjennom bruk av FFT [7].

### 2.1.5 Lavpassfiltrering

Vibrasjonsmålinger av lange slake konstruksjoner vil ofte ha en samplingsrate som ligger betydelig høyere en konstruksjonens dominerende egenfrekvenser. Med andre ord har høyere frekvenser liten innvirkning på utslaget og kommer dermed inn som støy i målingene. Det er av den grunn fordelaktig å fjerne høyfrekvente deler fra målingen.

Butterworth er et *rekursivt* filter som baserer seg på ligning (2.16) [10]:

$$y_k = a_0x_k + a_1x_{k-1} + a_2x_{k-2} + \dots + a_nx_{k-n} \\ + b_1y_{k-1} + b_2y_{k-2} + \dots + b_ny_{k-n} \quad (2.16)$$

I ligning (2.16) angir  $k$  nummeret på det filtrerte signalet,  $y_k$ , som beregnes fra det opprinnelige signalet,  $x_k$ .  $n$  står for ordenen til filteret, og representerer antall tidssteg en ser tilbake i det originale signalet, mens  $a$  og  $b$  kun er konstanter kalt, *rekursjonskoeffisienter*. Hvert punkt i det filtrerte signalet er kalkulert ved å multiplisere inndata med *a-koeffisienter*, multiplisere tidligere utregnende verdier fra utdata med *b-koeffisienter* og til slutt addere produktene. En ulempe med Butterworth-filteret er at ved valgt avkuttingskrevens så vil amplituden til  $y_k$  være redusert med  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , som tilsvarer en reduksjon på tre desibel[10].

Butterworth-filteret kan uttrykkes gjennom (2.17)[11]:

$$|H(i \cdot \omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{af}}\right)^{2n}} \quad (2.17)$$

Hvor  $|H(i \cdot \omega)|^2$  er den kvadrerte frekvensresponsfunksjonen til filteret,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  er lastfrekvensen,  $\omega_{af}$  er avkuttingsfrekvensen og  $n$  er filterorden.

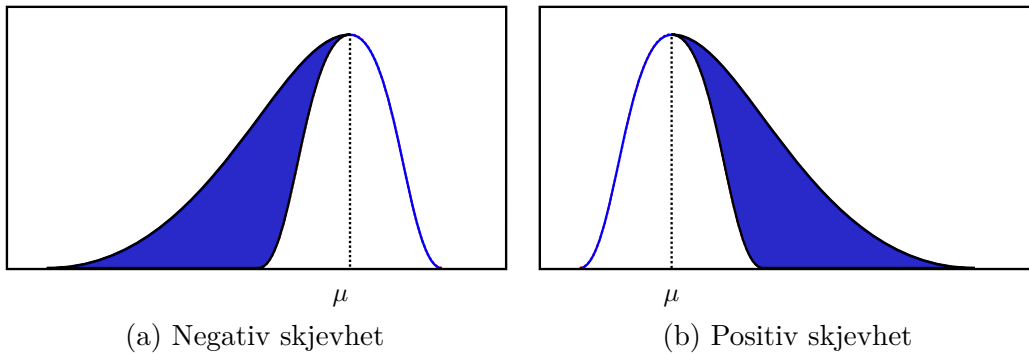
### 2.1.6 Skjevhet

Vindteorien antar at fordelingen er normalfordelt. En perfekt normalfordeling er symmetrisk om middelveiden. Skjevhet er en notasjon på hvor symmetrisk fordelingen er, gitt i ligning (2.18) [12]:

$$s = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3} \quad (2.18)$$

I ligning (2.18) representerer  $X$ ,  $\mu$  og  $\sigma$  henholdsvis en tilfeldig variabel, middelveide og

standardavviket. For en entoppet fordeling, som normalfordelingen er, vil en negativ skjevhet indikere at tyngdepunktet er mobilisert mot høyre, og motsatt for en positiv skjevhet. I det tilfellet skjevheten er lik null, kan det ha to tolkninger. Enten er det perfekt symmetri, eller så er fordelingen balansert slik at den er tynn og lang på ene siden og tykk og kort på andre[12].

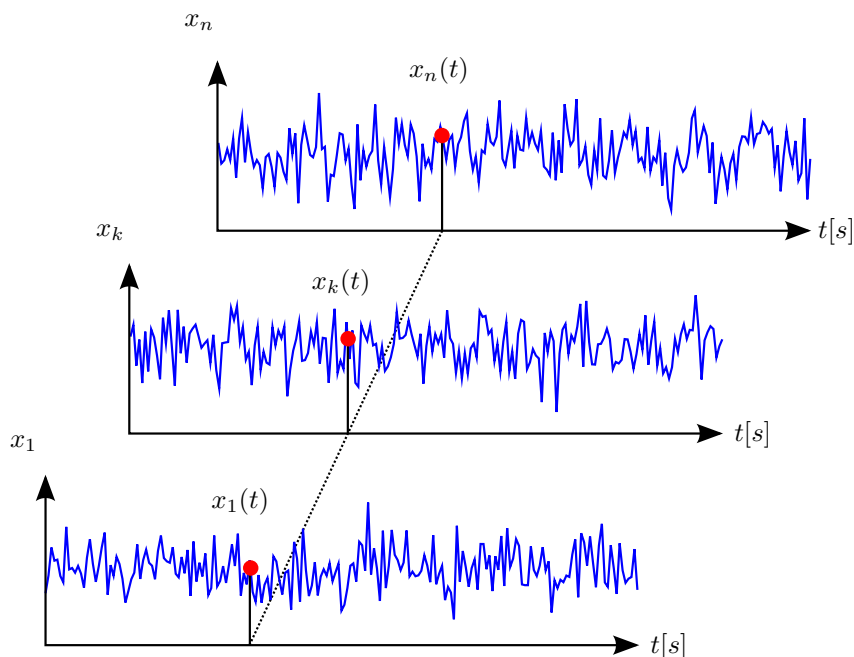


Figur 2.2: Skjevhet

## 2.2 Spektraltettheter

La  $\{x_k(t)\}$  representere en tilfeldig stokastisk prosess som vist i figur 2.3. Klammeparentesen indikerer at vi har en ensemble.  $x_k(t)$  er en enkelt sampling som er uttrykt ved tiden  $t$ . Antall mulige eksperimenter er angitt med notasjonen  $N$ .

Generelt vil ikke en enkelt måling,  $x_k(t)$ , som er inkludert i tilhørende stokastisk prosess kunne representere hele  $\{x_k(t)\}$  men ergodiske tilfeldige prosesser har egenskaper som gjør det mulig å utrede statistisk informasjon ut i fra en enkelt sampling [6]. Ved å se på to vilkårlig tilfeldige prosesser som opptrer i par, henholdsvis  $x_k(t)$  og  $y_k(t)$ , er det mulig å beregne felles statistiske egenskaper. Fouriertransformasjonen til  $x_k(t)$  og  $y_k(t)$  er i kontinuerlig form over



Figur 2.3: Ensemble av tidsserier av samtidige hendelser

et endelig tidsintervall,  $0 \leq t \leq T$ , gitt som [2]:

$$X_k(\omega, T) = \int_0^T x_k(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.19a)$$

$$Y_k(\omega, T) = \int_0^T y_k(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.19b)$$

Fouriertransformasjonene brukes til å etablere spektraltetthetene [2]:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|X_k(\omega, T)|^2] \quad (2.20a)$$

$$S_{yy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|Y_k(\omega, T)|^2] \quad (2.20b)$$

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X_k^*(\omega, T) \cdot Y_k(\omega, T)] \quad (2.20c)$$

Ligning (2.19) transformerer tidsseriene over til frekvensdomenet. Slik fouriertransformasjonen er definert i ligning (2.19) vil de ha en kompleks karakter. Det innebærer at frekvensaksen strekker seg teoretisk fra  $-\infty$  til  $+\infty$ , med fourieramplitudene fordelt symmetrisk på hver side av y-aksen. Spektraltetthetene er med andre ord tosidig. Fremstilling av autospektraltetthetene kan foregå med kun en reell akse, kalt ensidig spektraltetthet,  $G_{ij}(\omega)$ . Forholdet mellom ensidig og tosidig spekter er kun en faktor på to, vist med krysspektraltettheten i ligning (2.21):

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2}G_{xy}(\omega) \quad (2.21)$$

Krysspektraltettheten er kompleks og kan skrives på følgende måte [2]:

$$S_{xy}(\omega) = Co_{xy}(\omega) - iQu_{xy}(\omega) \quad (2.22)$$

Der den reelle delen er koinsidensspektraltettheten og imaginære er kvadraturspektraltettheten. Forholdet angir fasevinkelen [6]:

$$\phi_{xy}(\omega) = \arctan\left(\frac{Qu_{xy}(\omega)}{Co_{xy}(\omega)}\right) \quad -\pi \leq \phi_{xy} \leq \pi \quad (2.23)$$

Fasevinkelens beskriver hvordan  $x_k$  og  $y_k$  er i forhold til hverandre. En fasevinkel på null impliserer at de svinger i fase, mens en fasevinkel på positiv eller negativ  $\pi$  indikerer at de to stokastiske prosessene svinger i motfase. Fortegnet forteller om  $x_k$  er forsinket sammenlignet med  $y_k$  eller omvendt [6].

En alternativ fremstilling av krysspektraltettheten i polarkoordinater er gitt i ligning (2.22). Den tosidige krysspektraltettheten blir [6]:

$$S_{xy}(\omega) = |S_{xy}(\omega)| \cdot e^{-i\phi_{xy}(\omega)} \quad (2.24)$$

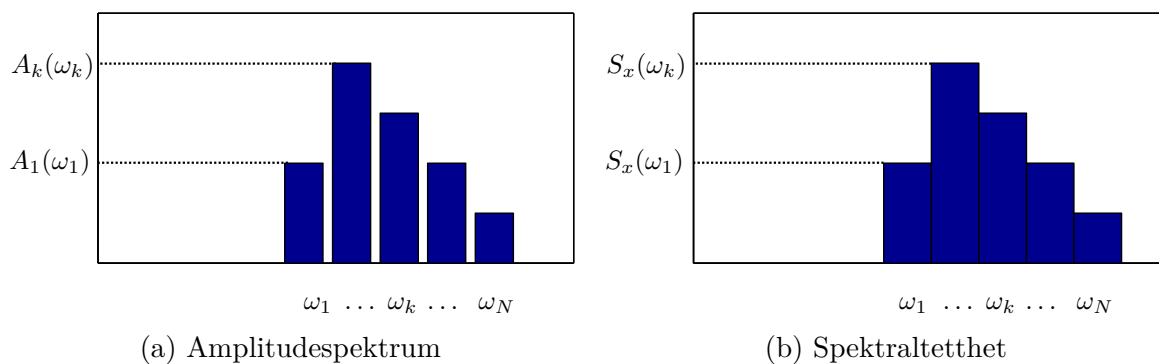
En annen parameter som kommer som et resultat fra spektraltetthetsanalysen er koherensfunksjonen [6]:

$$Coh_{xy}(\Delta s, \omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega) \cdot S_{yy}(\omega)} \quad 0 \leq Coh_{xy} \leq 1 \quad (2.25)$$

Koherensfunksjonen angir i hvilken grad det er en minste kvadraters sammenheng slik at  $x(t)$  kan predikere  $y(t)$ . En koherensverdi på én for en gitt frekvens, vil si at det er perfekt korrelasjon mellom de to signalene [13].

Spektraltettheten til  $x(t)$  skal representere variansfordelingen i frekvensdomenet, og er definert slik at arealet under kurven gir variansen til prosessen, se ligning (2.26):

$$Var(x) = \sigma_x^2 = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2.26)$$



Figur 2.4: Amplitudespektrum og tilhørende spektraltetthet av tidsserie  $x_k(t)$

En stokastisk prosess lar seg beskrive av statistiske verdier slik som standardavvik. Når et system blir utsatt for en stokastisk ytre last, vil det resultere i en stokastisk respons. Analysering av spektraltettheter gir av den grunn mening når hver frekvens i spektraltettheten er gitt av en tilhørende varians. I DFT vil en frekvens,  $\omega_1$ , bli vektet med en tilhørende amplitude,  $A_1$ , illustrert i figur 2.4a. En amplitude med stort utslag i DFT vil gi høy spektraltetthet for aktuell frekvens.

### 2.2.1 Metoder for spektralestimering

Den mest direkte metoden for å finne spektraltettheten til et signal er bruk av DFT beskrevet i kapittel 2.1.4. Spektraltettheten estimeres fra et langt signal med lengde,  $N$ . Målte signaler inneholder ofte støy som påvirker spektraltettheten. Ulike signalprosesseringsalgoritmer kan benyttes for å justere variansen slik at støy reduseres.

Det er hovedsaklig to klasser spektralestimering, parametrisk og ikke-parametrisk. Parametrisk spektralestimering går ut på å tilpasse en parametrisk modell til et signal ved å minimere en gitt funksjon. Metoden er avhengig av valgt parametrisk funksjon, og feil valg kan ende i et avvikende parameterestimat. Parametrisk spektralestimering vil ikke utdypes her. I motsetning til parametriske metoder bruker ikke-parametriske metoder ingen antagelser om den datagenererte prosessen. De mest forekommende ikke-parametriske metodene i litteraturen er *periodogrammet*, *det modifiserte periodogrammet*, *Barletts metode* og *Welchs metode*. Felles for metodene er at de er modifikasjoner av det klassiske periodogrammet. Utrykket til periodogrammet etableres ved å anvende konvolusjonsteoremet på den diskrete fouriertransformen til en tilfeldig prosess,  $x_N$  [14]:

$$\hat{P}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} X_N^*(\omega) X_N(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \quad (2.27)$$

hvor:

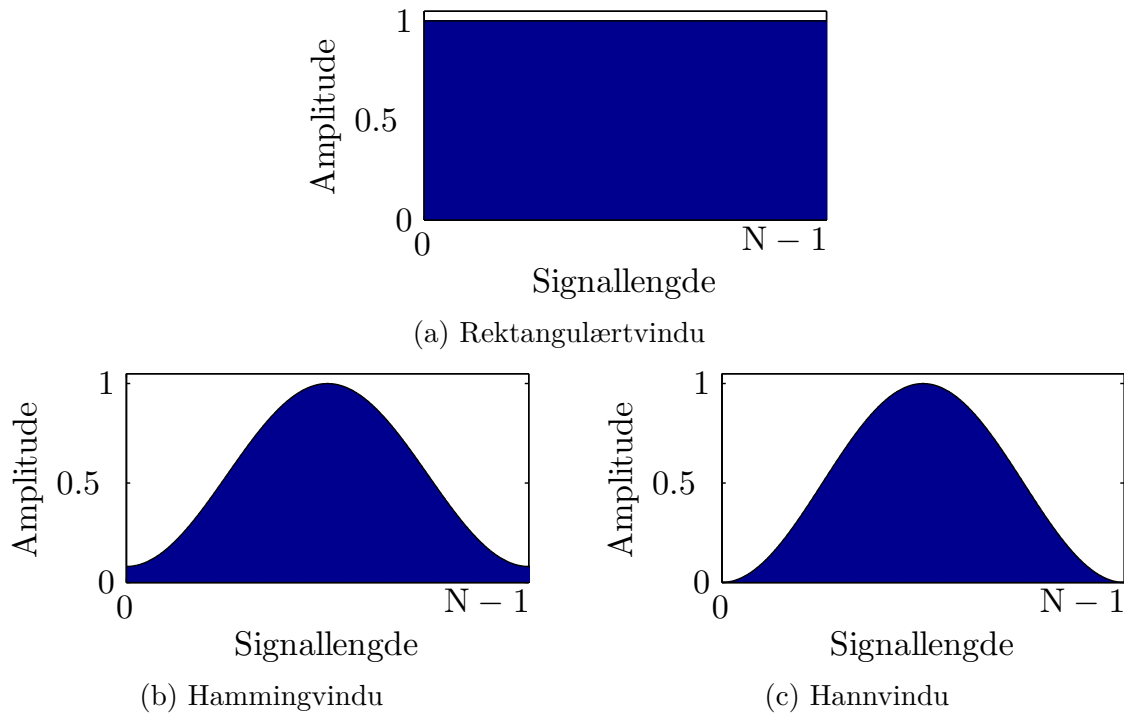
$$X_N = \sum_{-\infty}^{\infty} x_N(n) \cdot e^{-i\omega n} \quad (2.28)$$

I ligning 2.28 er  $i = \sqrt{-1}$  og  $x_N(n) = w(n) \cdot x(n)$ . Vindusfunksjonen,  $w(n)$ , er en matematisk funksjon som nuller ut verdier på utsiden av et gitt intervall. Den klassiske periodogrammetoden oppnås ved å benytte rektangulær vindusfunksjon,  $w(n) = 1$ , i periodogrammet. Periodogrammet tar da formen:

$$\hat{P}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-i\omega n} \right|^2 \quad (2.29)$$



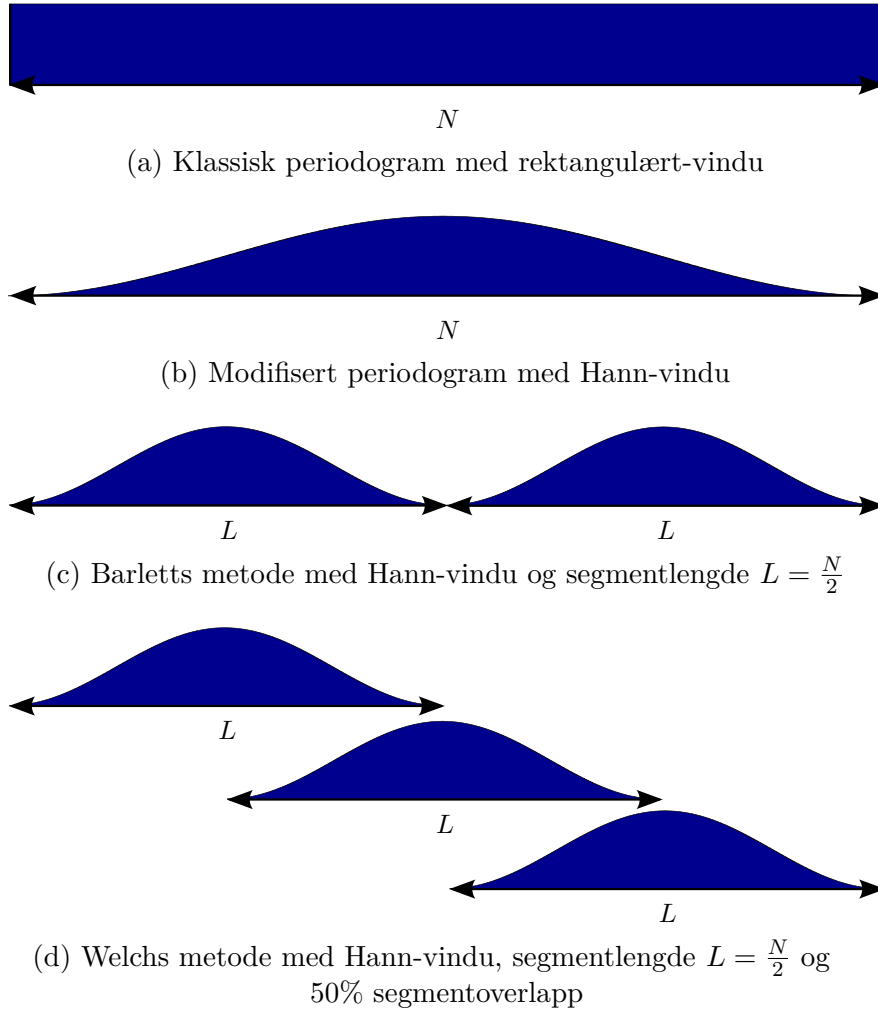
Det rektangulære vinduet er vist i figur 2.5a, og illustrerer den skarpe overgang mellom periodene. Andre vindusfunksjoner er designet for å moderere de skarpe overgangene, noe som er gunstig fordi diskontinuiteter har en uønsket effekt på  $DFT$ . Den modifiserte periodogrammetoden bruker ulike typer av ikke-rektangulære vindusfunksjoner, se figur 2.5b og 2.5c. I mellom de ekstreme vindusfunksjonene finnes moderate vindusfunksjoner slik som Hamming og Hann som ofte brukes i sammen med spektraltettheter med et smalt frekvensbånd.



Figur 2.5: Vindusfunksjoner

Barletts metode deler originalsignalet med lengde,  $N$ , opp i  $K$  antall segmenter med nye lengder,  $L = \frac{N}{K}$ . Deretter kan periodogrammetoden eller den modifiserte periodogrammetoden anvendes på hvert segment. Estimert spektraltetthet finnes ved å summere gjennomsnittet av spektraltettheten fra  $K$  antall segment. Det kan vises at variansen reduseres med en faktor lik  $K$  med konsekvensen at spektraloppløsningen også reduseres med tilsvarende faktor [15]. En annen konsekvens er at båndbredden øker med en faktor tilnærmet  $K$ . Det må derfor gjøres et kompromiss for å oppnå ønsket effekt.

Welchs metode baserer seg på oppdelingen i Barletts metode, men lar hvert segment overlappe hverandre. Figur 2.6 fremstiller en oversikt over de ulike spektralestimeringsmetodene.



Figur 2.6: Metoder for spektralestimering

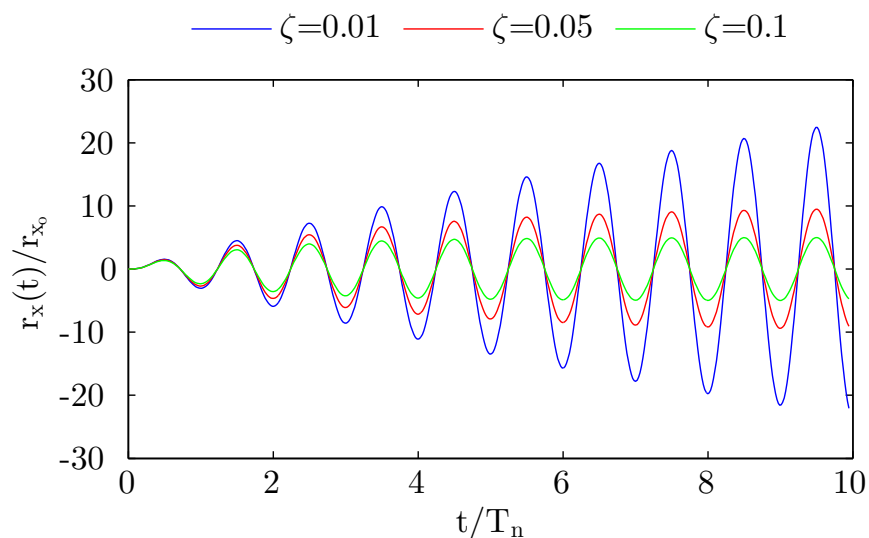
Variansen ved bruk av Welch's metode er avhengig av overlappingen, vindustype og antall segmenter. Fordelen til Welch's metode er at overlappingen medfører gjenbruk av data, og resulterer i lavere båndbredde slik at spektraltettheten blir mer markant. Følgelig er Welch's metode egnet til signalprosessering hvor en høy oppløsning er gunstig.

### 2.2.2 Egenfrekvenser

Et systems egenfrekvens bestemmes av [16]:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.30)$$

For dynamiske system er det ønskelig at systemets stivhet,  $K$ , og masse,  $M$ , gir egenfrekvenser som ligger utenfor frekvensområdet til påkjenningen av ytre laster. Når en konstruksjon blir utsatt for en lastfrekvens nær sin tilhørende egenfrekvens, blir den indre stivheten og treghetskraften like stor og motsatt rettet. Fenomenet kalles *resonans*. Den ugunstige harmoniske lasten vil øke systemets energi for hver syklus. Teoretisk vil responsen til et udempet system gå mot uendelig. I praksis vil materialhysterese og luftmotstand gjøre at alle byggverk er svakt dempet. Et system som svinger med lastfrekvens,  $\omega = \omega_n$ , for ulike dempningstall er vist i figur 2.7. Dersom dempningen ikke er tilstrekkelig, vil systemet ende i kollaps [16].



Figur 2.7: Resonans med ulike dempningstall

Spektraltetthetene er som vist konstruert med grunnlag i fourierrekker der frekvenser er vektet med en tilhørende amplitude [2]. Egenfrekvenser kan identifiseres direkte fra fourierrekkenes amplituder. En frekvens som gir høy amplitude er en god egenfrekvenskandidat. Tradisjonelt er det vanlig å omgjøre fourieramplituder til spektraltettheter og utføre tilsvarende analyser. Et utslag for samme frekvens i spektraltettheten underbygger at dette faktisk er en egenfrekvens.

Nærliggende amplituder kan være vanskelig å skille i en spektraltetthetsanalyse. Et system som ikke er symmetrisk har en krysspektraltetthet gitt av ligning (2.22), og har både en reell del og en imaginær del. For å skille ut riktig egenfrekvenstopp ved flere distinkte nærliggende frekvenstopper, kan informasjonen om fasevinkelen til de ulike prosessene benyttes. Når fasevinkelen mellom prosessene i ligning (2.23) avviker fra null radianer eller absoluttverdien til  $\pi$  radianer, har en sannsynligvis ikke med en egenfrekvens å gjøre. En videre undersøkelse er likevel nødvendig fordi enkelte systemer kan ha egenfrekvenser som ligger uvanlig tett. Koherensfunksjonen i ligning (2.25) kan nå benyttes for å se om det er en lineær samtidighet mellom to prosesser [17].

### 2.2.3 Egenmoder

Hver egenfrekvens har en korresponderende egenmode. En egenmode er gitt av den vibrasjonsfasongen systemet vil innta dersom det blir utsatt for en lastfrekvens nær den korresponderende egenfrekvensen. En egenmode er en ren harmonisk vibrasjonsform og vil derfor være ukoblet. Svingeformer kan leses direkte utifra amplitudeforholdet i frekvensdomenet slik at amplitudeforholdet ved en egenfrekvens beskriver en egenmode. Modeformen kan derfor for en angitt egenfrekvens uttrykkes ved ligning (2.31) [17]:

$$\Phi_i(x_j) = \sqrt{\frac{S_{x_j x_j}(\omega_i)}{S_{xx, maks}(\omega_i)}} \quad (2.31)$$

I ligning (2.31) representerer,  $i$ , modenummeret og,  $j$ , prosessnummeret til spektraltetthet,  $S_{x_j x_j}(\omega_i)$ . Formen til frekvens,  $\omega_i$ , blir normalisert med hensyn på roten til autospektraltettheten med størst utslag,  $S_{xx, maks}(\omega_i)$ . Fortegnet til  $\Phi_i(x_j)$  bestemmes utifra om punktet  $x_j$  svinger i fase eller motfase med et valgt referansepunkt.

## 2.3 Dempning

Dempningen til et system kan måles på flere forskjellige måter. De mest populære er [18]:

1. Måling av fri amplitudereduksjon etter påført statisk nedbøyning
2. Måling av impulsiv amplitudereduksjon etter en transient belastning
3. Måling av amplitudereduksjon til en ren svingemode etter harmonisk belastning
4. Kurvetilpasning av et multi-frihetsgradsystem (MDOF)
5. Båndbredden ved halvsignalstyrke
6. Kurvetilpasning av et enkelt frihetsgrad system (SDOF)

Metode 1-3 gjelder kun for tester med tvungen vibrasjon. Metode 4 krever kunnskap om lastfunksjonen, mens metode 5 og 6 kan blitt tatt i bruk uten kunstig last eller kjennskap til lastfunksjonen.

Metode 1-3 utføres i tidsdomenet og gir potensielt de mest pålitelige dempningsestimatene. Data fra metode 5-6 undersøkes vanligvis i frekvensdomenet og har fordelen at de er rimelige å utføre og at målingene ikke påvirkes av forstyrrelser fra trafikk[18].

### 2.3.1 Båndbredde ved halv signalstyrke

En mye benyttet fremgangsmåte for å evaluere dempning til et system *båndbredde ved halv signalstyrke*. Metoden går kort oppsummert ut på å estimere dempning ved å utnytte frekvensbredden til topper som representerer en svingemode. Sidefrekvensene utgjør båndbredden ved halv signalstyrke for tilhørende egenfrekvens, vist i figur 2.8. En smal topp betyr en lavt dempet mode, mens en bred topp tyder på at svingemoden er godt dempet. Båndbredde ved halv signalstyrke sier at avstanden mellom de to frekvensene som gir halv signalstyrke for en sentrert modetopp er tilnærmet proporsjonal med tilhørende modal dempning. Fremgangsmåten tar utgangspunkt i at båndbredden eksisterer slik at en horisontal linje ved spesifisert signalstyrke skjærer responskurven i to punkt. Metoden passer best for system bestående av

en SDOF, men den kan også anvendes på MDOF så lenge dempningen er lav og de modale egenfrekvensene er separert slik at toppene er tydelige [19].

Dempningsmetoden er basert på et SDOF-system med lineær viskøs dempning. Frekvensresponsfunksjonen til et slik system utsatt for en harmonisk last med lastfrekvens,  $\omega$ , er gitt ved:

$$H_r(\omega) = \frac{1}{k \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta_n \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) i\right)} \quad (2.32)$$

hvor  $k$  er systemets stivhet og  $\zeta_n$  er modal dempning.

Omskriving til komplekse polarkoordinater gir frekvensresponsfunksjonen til forskyvningen uttrykt med en forsterkningsfaktor,  $|H_r(\omega)|$ , og en fasevinkel,  $\phi(\omega)$ :

$$H_r(\omega) = |H_r(\omega)| \cdot e^{-\phi i} \quad (2.33)$$

hvor:

$$|H_r(\omega)| = \frac{1}{k \cdot \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad (2.34a)$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \quad (2.34b)$$

Ved å minimere nevneren i ligning (2.34a) kan det vises at resonansfrekvensen,  $\omega_{res}$ , er [6]:

$$\omega_{res} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \zeta^2 < 0.5 \quad (2.35)$$

Når ligning (2.35) innsettes i ligning (2.34a), gir dette maksimal forsterkningsfaktor til

forflytning ved resonans:

$$|H_r(\omega_{res})| = \frac{1}{k \cdot 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.36)$$

Generelt er styrken til et signal definert ved [6]:

$$P(t) = A(t)^2 \quad (2.37)$$

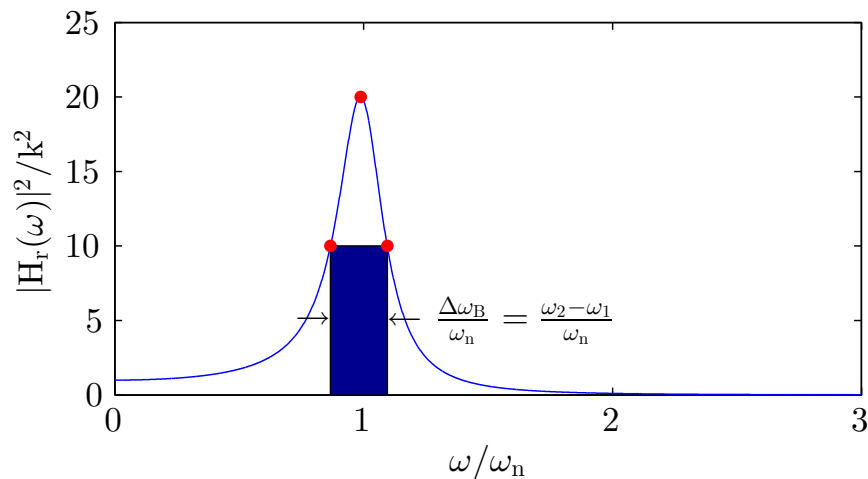
der  $P(t)$  er signalets styrke og  $A(t)$  er signalets amplitude. I ligning (2.33) forstås  $|H_r(\omega)|$  som amplituden til frekvensresponsfunksjonen og impliserer at signalstyrken til  $H_r(\omega)$  er gitt av  $P(\omega) = |H_r(\omega)|^2$ . Båndbredden defineres som:

$$\Delta\omega_B = \omega_2 - \omega_1 \quad (2.38)$$

der  $\omega_1$  og  $\omega_2$  er definert ved:

$$|H_r(\omega_1)|^2 = |H_r(\omega_2)|^2 = \frac{1}{2} |H_r(\omega_{res})|^2 \quad (2.39)$$

Den normaliserte båndbredden,  $\frac{\Delta\omega_B}{\omega_n}$ , er vist i figur 2.8.



Figur 2.8: Definisjon av båndbredde ved halv signalstyrke

Ved å sette ligning (2.34a) og (2.36) inn i ligning (2.39) og innføre antagelsen om liten dempning slik at andre ordens dempningsledd neglisjeres, kan det vises at et estimat for dempningen,  $\zeta_n$ , korresponderende til egenfrekvens,  $\omega_n$  er gitt av [20]:

$$\zeta_n \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \quad (2.40)$$

Dempningen ut i fra båndbredde ved halv signalstyrke har begrensning at estimatet er upresist for svært lav og høy dempning. For normale stålkonstruksjoner er dempningstallene ordinært innenfor  $0.002 \leq \zeta \leq 0.05$ , og noe høyere for betongkonstruksjoner[16]. Båndbredde ved halv signalsstyrke er utledet for forskyvningens forsterkningsfaktor,  $|H_r(\omega)|$ , men kan i analogt benyttes på forskyvningens autospektraltetthet,  $S_r$ , og akselerasjonens autospektraltetthet,  $S_{\ddot{r}}$ .

Amplitude- og styrkespektraltetthet er ofte i litteraturen beskrevet med logaritmisk enhet, *desibel* (*dB*). Desibel er en forholds-enhet som beregnes ved:

$$dB = 20 \log_{10} \left( \frac{P}{P_{ref}} \right) \quad (2.41a)$$

$$dB = 10 \log_{10} \left( \frac{A}{A_{ref}} \right) \quad (2.41b)$$

hvor  $P$  er målt signalstyrke,  $P_{ref}$  er referansesignalstyrken,  $A$  er målt amplitude og  $A_{ref}$  er referanseamplituden. Fra ligning (2.37) er det tydelig at en kvadrert amplitudereduksjon gir halvering i signalstyrke. Forsterkningsfaktoren,  $|H_r(\omega)|$ , er en signalamplitude som innsatt i desibeldefinisjonen i ligning (2.41), gir et amplitudeforhold på  $10 \log_{10} 2 \approx 3 \text{ dB}$  og et tilsvarende styrkeforhold for  $20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$ . Båndbredde ved halv signalstyrke går derfor også under navnet, *3 dB båndbredde*[21].



### 2.3.2 Måling av fri amplitudereduksjon

Dempningen til et system kan estimeres ved å måle reduksjon av maksimumsamplitude. Tidsdomenet gir mer pålitelige estimater enn frekvensdomenet, men metoden er avhengig av tydelige utslag og påvirkes i større grad av ytre forstyrrelser [18]. Forholdet mellom to etterfølgende maksima,  $r_{s,i}$  og  $r_{s,i+1}$ , er gitt av [20]:

$$\frac{r_{s,i}}{r_{s,i+1}} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad s = x, y, z \quad (2.42)$$

Den naturlige logaritmen til dette forholdet benevnes  $\delta$  og kalles, *det logaritmiske dekrement*:

$$\delta = \log_e \left( \frac{r_{s,i}}{r_{s,i+1}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad s = x, y, z \quad (2.43)$$

For små dempningstall blir ligning (2.43) redusert til  $\delta \simeq 2\pi\zeta$ . Ved å måle det logaritmiske dekrementet kan dermed systemets dempning estimeres ved:

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi} \quad (2.44)$$

### 2.3.3 Rayleigh-dempning

Konstruksjonsdempning refererer til hvordan interaksjonen mellom elementene i en konstruksjon samt konstruksjonsmaterialet i seg selv, resulterer i dempning. Dersom dempningskraften er kjent kan en konsistent dempningsmatrise konstrueres, men for konstruksjonsdempning er denne kraften ukjent[22].

En mye brukt estimerings metode er Rayleigh-dempning hvor en lineærkombinasjon av masse- og stivhetsmatrisen brukes for å konstruere dempningsmatrisen. Metoden gir dempningsestimat som stemmer tilfredsstillende med forsøksdata.

Rayleigh-dempningen er definert som [20]:

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (2.45)$$

hvor:

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.46a)$$

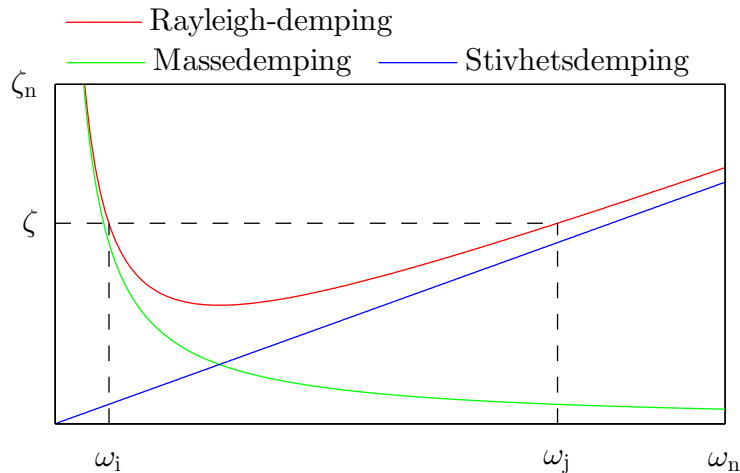
$$a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.46b)$$

Dempningsformen er hyppig tatt i bruk av en rekke grunner: Svingeformene er reelle og identiske til korresponderende udeмпet situasjon, Rayleigh-dempning er lett å implementere i analytiske modeller og modene kan være ukoblet[18].

Dempningstallet til modenummer,  $n$ , for et Rayleigh-dempet systemet er gitt av[20]:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2 \cdot \omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n \quad (2.47)$$

hvor den masseproporsjonale dempningen,  $a_0$ , og stivhetsproporsjonale dempningen,  $a_1$ , er definert i ligning (2.46). Den totale Rayleigh-dempningen er illustrert i figur 2.9. I følge Erwins er stivhetsassosiert dempning relatert til materialhysteresedempning, og masseassosierte dempning relatert til friksjonsdempning. Rayleigh-dempning kan av den grunn antas å beskrive alle former for strukturell dempning, inkludert materialdempning[23].



Figur 2.9: Rayleigh-dempning

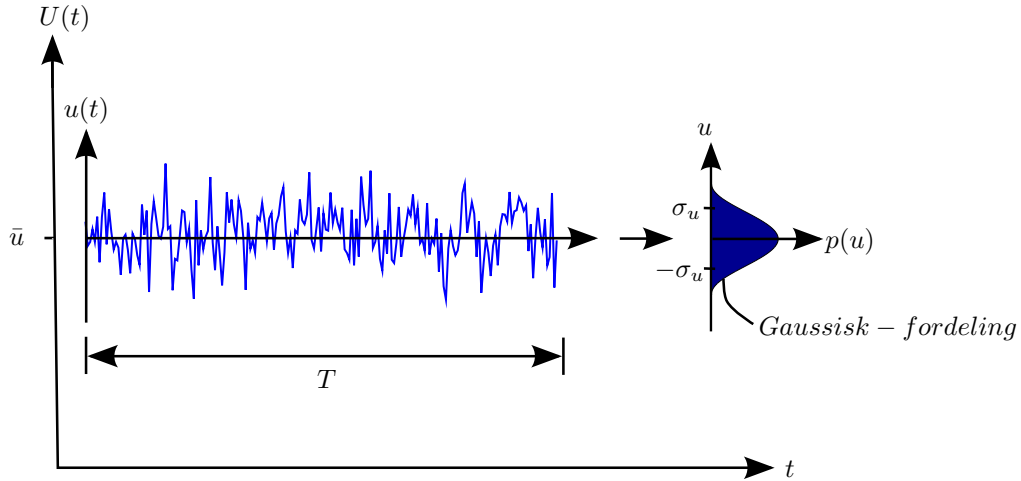
## 2.4 Stokastisk beskrivelse av turbulent vind

En stokastisk prosess karakteriseres av at utfallet aldri kan predikeres eksakt, men kun med en viss sannsynlighet. Siden vindhastigheten,  $U$ , er en stokastisk prosess, vil alle fysiske hendelser med vindhastighet som inndata resultere i stokastisk utdata. Følgelig er det momentane vindhastighetstrykket i ligning (2.48) stokastisk selv om det matematisk beskriver en naturlov:

$$q_U(t) = \frac{1}{2} \rho_a [U(t)]^2 \quad (2.48)$$

En antagelse i dynamiske analyser er at tidsvinduet til den stokastiske prosessen må være tilstrekkelig kort slik at de statistiske betingelsene er stasjonære og homogene. Tidsvinduet for vindmålinger er som regel satt til perioder på ti minutter.

Vindhastigheten kan beskrives som en sum av en tidsuavhengig og en tidsavhengig del,  $U(t) = V + u(t)$ . Den flukterende delen av vindhastigheten,  $u(t)$ , er antatt å være tilpasset en normalfordeling svingende om den statisk middelverdien,  $V = \bar{u}$ , illustrert i figur 2.10 [2].



Figur 2.10: Grafisk fremstilling av korttidsstokastiskprosess

### 2.4.1 Vindfeltets spektraltetthet

Vindens statistiske egenskaper bestemmes ved å utføre enkeltpunktmålinger av de flukterende vindkomponentene,  $u(t)$ ,  $v(t)$  og  $w(t)$ , innenfor en periode på  $T = 10min$ . Det antas at den flukterende delen av vinden er normalfordelt med forventningsverdi lik null og en varians,  $\sigma_n^2$ ,  $n = u, v, w$ . Turbulensegenskapene beskrives i frekvensdomenet av spektraltetthet, og i litteraturen er det etablert flere forslag til uttrykk som tilpasser data fra målinger. Et dimensjonsløst uttrykk for autospektraltetthet til turbulenskomponentene som ofte er foreslått i publikasjoner er *Kaimals reduserte autospekter* [24]:

$$\frac{\omega \cdot S_n(\omega)}{\sigma_n^2} = \frac{A_{n\omega} \cdot \omega \cdot x_f L_n}{V \cdot \left(1 + 1.5 \cdot A_{n\omega} \cdot \frac{\omega \cdot x_f L_n}{V}\right)^{\frac{5}{3}}} \quad n = u, v, w \quad (2.49)$$

I ligning (2.49) er  $x_f L_n$  integrert lengdeskala, og kan tolkes som den gjennomsnittlige virvelstørrelse til  $u$ -,  $v$ - og  $w$ -komponentene i hovedvindretningen .

For kunne å beskrive vindens romlige egenskaper er det nødvendig med flere simultane enkeltpunktsmålinger som kobles sammen. Krysspektraltettheten forklarer hvordan vinden i et punkt varierer i forhold til et annet punkt. Vindfeltets krysspektraltetthet,  $S_{nn}(\Delta s, \omega)$ , er vanligvis definert av autospektraltettheten,  $S_n(\omega)$ ; koherensfunksjonen,  $Coh_{nn}(\Delta s, \omega)$ , og fasespektraltettheten,  $\phi_{nn}(\Delta s, \omega)$  [2]:

$$S_{nn}(\Delta s, \omega) = S_n(\omega) \cdot \sqrt{Coh_{nn}(\Delta s, \omega)} \cdot e^{i\phi_{nn}(\Delta s, \omega)} \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (2.50)$$

Vindfeltet er normalt antatt å være homogent og vinkelrett på spennvidden til konstruksjonen. For to separerte punkt, 1 og 2, innebærer antagelsene at punktene tilnærmet har lik autospektraltetthet og krysspektraltetthet for turbulenskomponentene,  $u(t)$ ,  $v(t)$  og  $w(t)$ , slik at:

$$S_{n_1}(\omega) = S_{n_2}(\omega) \quad n = u, v, w \quad (2.51)$$

Denne antagelsen medfører at det imaginære leddet i krysspektraltettheten kanselleres ut og kun den reelle delen gjenstår. Vindfeltets krysspektraltetthet reduseres til å bestå av vindens autospektraltetthet,  $S_n(\omega)$ , og normaliserte kospektraltetthet,  $\hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega)$  [2]:

$$Re[S_{nn}(\Delta s, \omega)] = S_n(\omega) \cdot \hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega) \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (2.52)$$

Under forutsetningen til vindfeltet, er den normaliserte kospektraltettheten:

$$\hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega) = e^{-c_{ns} \frac{\omega \Delta s}{V(z_f)}} \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ s = x_f, y_f, z_f \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (2.53)$$

$\hat{C}_{o_{nn}}(\Delta s, \omega)$  er avhengig av separasjonsavstanden og ikke de individuelle plasseringene til punkt 1 og 2. Kospektraltettheten angir med andre ord de romlige egenskapene til vindfeltet [25].

### 2.4.2 Kolmogorovs $\frac{5}{3}$ -lov

Kolmogorovs hypotese sier at for en turbulent strøm med tilstrekkelig høyt Reynolds-tall, så er småskalabevegelsen statistisk isotropisk og danner en energispektraltetthet som for de laveste bølgelengdene kun er avhengig av dissipasjonshastigheten,  $\epsilon$ , til energien og den kinematiske viskositeten. Ved veldig høye Reynoldstall, eksisterer det en initiell underskala hvor spektraltetthets form blir uavhengig av viskositeten. Bølgenummeret,  $k$ , korresponderende til lengdeskalaen,  $\lambda$ , er gitt av  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Derfor, ved dimensjonsanalyse, er den eneste mulige formen energispektraltettheten kan innta [26]:

$$S_E(k) = C\epsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}} \quad (2.54)$$

Ligning (2.54) er en direkte konsekvens av Kolmogorovs 3. hypotese fra 1941 og er kjent som *Kolmogorovs  $\frac{5}{3}$ -lov* [27].

### 2.4.3 Turbulensintensitet

I stedet for å undersøke standardavviket til vindhastigheten, er det vanlig å benytte turbulensintensiteten, gitt i ligning (2.55). Turbulensintensitet er gitt som standardavviket til den flukterende komponenten,  $\sigma_n$ , normalisert med hensyn på middelvindhastigheten,  $\bar{U}$  [28]:

$$I_n = \frac{\sigma_n}{\bar{U}} \quad n = u, v, w \quad (2.55)$$

Standardavviket til langsgående turbulenskomponent,  $\sigma_u$ , er funnet ved først å trekke middelvinden,  $\bar{U}$ , fra den totale vindhastigheten i middelvindretningen,  $U(t)$ , gitt i ligning (2.56) [28]:

$$\sigma_u = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [U(t) - \bar{U}]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.56)$$

Beregning av standardavvik til  $v(t)$  og  $w(t)$  skjer uten fratrekk av middelvei på grunn av koordinatsystemet er definert i retning av hovedreningen til vinden,  $u(t)$ .

## 2.5 Vindindusert last

### 2.5.1 Turbulensteori

Hovedantagelsen i turbulensteori er at last kan beregnes fra det momentane hastighetstrykket gitt av Bernoullis ligning,  $q_U = \frac{1}{2}\rho_a[U(t)]^2$ . Når en luftstrøm møter hindringer tilsvarende en linje-lignende konstruksjon, vil interaksjonen resultere i en kraftsituasjon på konstruksjonen. Med mindre konstruksjonen er ekstremt strømlinjeformet og vindstrømmens hastighet er uvanlig jevn og lav, er konsekvensen av luftstrømmen en fluktering av kreftene i konstruksjonen. En linearisering av de flukterende kreftene er akseptert for å predikere vindlaster med tilstrekkelig nøyaktighet. Lastene beregnes fra en tolkning av en momentan relativ hastighetsvektor,  $V_{rel}$ , og den korresponderende innfallsvinkelen,  $\alpha$ , illustrert i figur 2.11. Teorien er kun gyldig for små forskyvninger og rotasjoner, og det er tatt for gitt at de flukterende vindkomponentene,  $u(t)$  og  $w(t)$ , og tversnittets hastighet,  $\dot{r}_y$  og  $\dot{r}_z$ , er liten sammenlignet med den gjennomsnittlige vindhastigheten,  $V$ .

Momentane tverrsnittskrafter som oppstår ved vindeksponering kan deles inn i tre deler: *drag* i vindretningen, *løft* på tvers av vindretningen og *moment* omkring skjærssenteret til tverrsnittet. For et tverrsnitt med bredde,  $B$ , og høyde,  $D$ , er de tre delene gitt som:

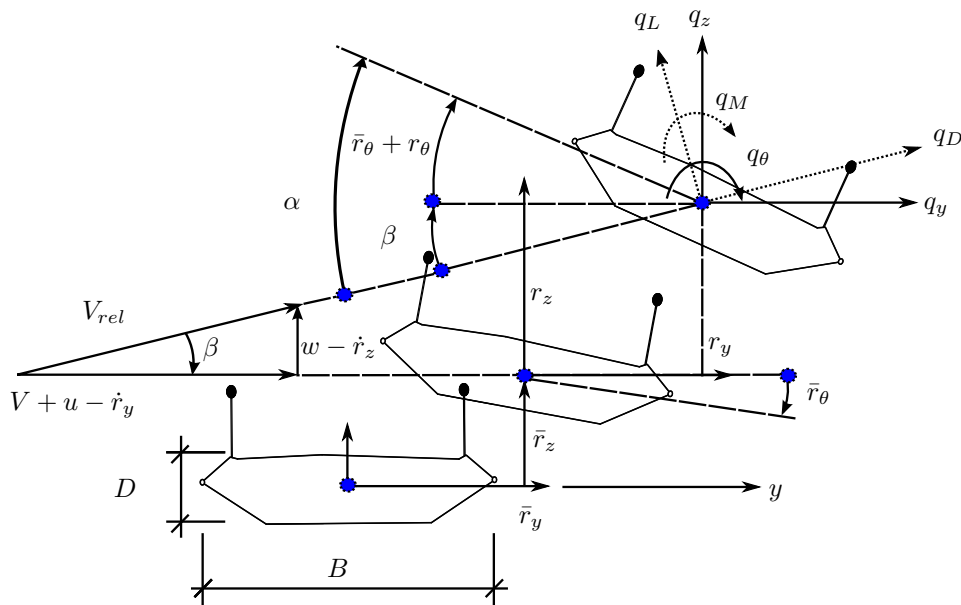
$$q_D(x, t) = \frac{1}{2} \rho_a D C_D(\alpha) V_{rel}^2 \quad (2.57a)$$

$$q_L(x, t) = \frac{1}{2} \rho_a B C_L(\alpha) V_{rel}^2 \quad (2.57b)$$

$$q_M(x, t) = \frac{1}{2} \rho_a B^2 C_M(\alpha) V_{rel}^2 \quad (2.57c)$$

Lastkoeffisientene,  $C_D(\alpha)$ ,  $C_L(\alpha)$  og  $C_M(\alpha)$ , er funksjoner av vindens relative innfallsvinkel og etableres fra statiske vindtunnellforsøk.

Lastbidragene fra ligning (2.57) kan transformeres til laster som følger konstruksjonsaksene,  $y$ ,  $z$  og  $\theta$ , definert i figur 2.11.



Figur 2.11: Momentan relativ vindstrømning og forskyvninger av et aerodynamisk bokstverrsnitt



Transformeringen utføres via enkle sinus- og cosinusrelasjoner, ligning (2.58):

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_D \\ q_L \\ q_M \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Vinkelen mellom vindretningen til den momentane relative vindhastigheten,  $V_{rel}$ , og  $y$ -retningen i horisontalplanet, er definert som  $\beta = \arctan\left(\frac{w - \dot{r}_z}{V + u - \dot{r}_y}\right)$ .

Geometrisk betraktning av figur 2.11 gir:

$$V_{rel} = \sqrt{(V + u - \dot{r}_y)^2 + (w - \dot{r}_z)^2} \quad (2.59a)$$

$$\alpha = \bar{r}_\theta + r_\theta + \beta \quad (2.59b)$$

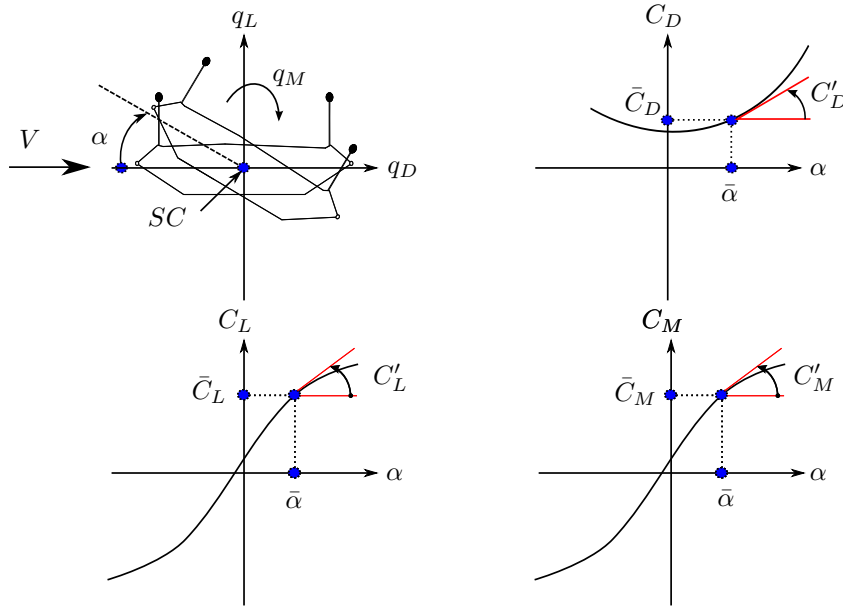
Forutsetningen, små rotasjoner, gjør at vinkelen kan omformuleres til,  $\beta \approx \tan(\beta) \approx \frac{w - \dot{r}_z}{V + u - \dot{r}_y} \approx \frac{w - \dot{r}_z}{V}$ . Innsatt i ligning (2.59) gir antagelsene turbulensteoriens første lineariseringer:

$$V_{rel} \approx \sqrt{V^2 + 2Vu - 2V\dot{r}_y} \quad (2.60a)$$

$$\alpha \approx \bar{r}_\theta + r_\theta + \frac{w}{V} - \frac{\dot{r}_z}{V} \quad (2.60b)$$

Fra ligning (2.60b) følger det at middelveiden til innfallsvinkelen er  $\bar{\alpha} = \bar{r}_\theta$ , og at den flukterende delen til innfallsvinkelen er  $\alpha_f = r_\theta + \frac{w}{V} - \frac{\dot{r}_z}{V}$ .

Lastkoeffisientene varierer ikke-lineært med økende innfallsvinkel,  $\alpha$ . Turbulensteoriens andre linearisering er illustrert i figur 2.12.



Figur 2.12: Lastkoeffisienter fra statiske forsøk

De ikke-lineære lastkoeffisient kurvene i figur 2.12 byttes ut med følgende lineære tilnærminger:

$$\begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \\ C_M(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_D(\bar{\alpha}) \\ C_L(\bar{\alpha}) \\ C_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} + \alpha_f \cdot \begin{bmatrix} C'_D(\bar{\alpha}) \\ C'_L(\bar{\alpha}) \\ C'_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

I ligning (2.61) er  $C'_D(\bar{\alpha})$ ,  $C'_L(\bar{\alpha})$  og  $C'_M(\bar{\alpha})$  gradientene til lastkoeffisientene ved  $\alpha = \bar{\alpha}$ . For enkelhets skyld blir følgende notasjon introdusert:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ \bar{C}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_D(\bar{\alpha}) \\ C_L(\bar{\alpha}) \\ C_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} C'_D \\ C'_L \\ C'_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_D(\bar{\alpha}) \\ C'_L(\bar{\alpha}) \\ C'_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Ved å kombinere antagelsene fra begge lineariseringene og neglisjere ledd som inneholder produkt av verdier som er antatt relativt små, sitter en igjen med følgende uttrykk for den totale lastmatrisen, uttrykt ved et statisk- og et dynamiskledd:

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} = \underbrace{\bar{\mathbf{q}}}_{\text{statisk}} + \underbrace{\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{v} + \mathbf{C}_{ae} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \cdot \mathbf{r}}_{\text{dynamisk}} \quad (2.63)$$

hvor:

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix}^T \quad (2.64a)$$

$$\mathbf{r}(x, t) = \begin{bmatrix} r_y & r_z & r_\theta \end{bmatrix}^T \quad (2.64b)$$

$$\bar{\mathbf{q}}(x) = \begin{bmatrix} \bar{q}_y \\ \bar{q}_z \\ \bar{q}_\theta \end{bmatrix} = \frac{\rho_a V^2 B}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{D\bar{C}_D}{B} \\ \bar{C}_L \\ B\bar{C}_M \end{bmatrix} \quad (2.64c)$$

$$\mathbf{B}_q(x) = \frac{\rho_a V B}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2D\bar{C}_D}{B} & \frac{DC'_D}{B} - \bar{C}_L \\ 2\bar{C}_L & C'_L + \frac{D\bar{C}_D}{B} \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M \end{bmatrix} \quad (2.64d)$$

$$\mathbf{C}_{ae}(x) = -\frac{\rho_a V B}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2D\bar{C}_D}{B} & \frac{DC'_D}{B} - \bar{C}_L & 0 \\ 2\bar{C}_L & C'_L + \frac{D\bar{C}_D}{B} & 0 \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64e)$$

$$\mathbf{K}_{ae}(x) = \frac{\rho_a V^2 B}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{DC'_D}{B} \\ 0 & 0 & C'_L \\ 0 & 0 & BC'_M \end{bmatrix} \quad (2.64f)$$

Frihetsgradene,  $r_y$ ,  $r_z$  og  $r_\theta$ , beskriver henholdsvis horisontalforskyvning, vertikalforskyvning og rotasjon om lokalt skjærsenter. I det dynamiske leddet i ligning (2.63) er  $\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{v}$  assosiert med turbulenskomponentene,  $u$  og  $w$ , mens  $\mathbf{C}_{ae} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  og  $\mathbf{K}_{ae} \cdot \mathbf{r}$  er bevegelsesinduserte laster assosiert med tverrsnittets hastighet og forskyvning. Ligning (2.65) presenterer en omformulering av det dynamiske leddet bestående av summen til en turbulenslastkomponent og en aeroelastisk lastkomponent med henholdsvis  $b$  og  $ae$  som notasjon.

$$\mathbf{q}_{dyn}(x, t) = \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_{ae} \quad (2.65)$$

hvor:

$$\mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} q_{b,y} \\ q_{b,z} \\ q_{b,\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{v} \quad (2.66a)$$

$$\mathbf{q}_{ae} = \begin{bmatrix} q_{ae,y} \\ q_{ae,z} \\ q_{ae,\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{ae} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \cdot \mathbf{r} \quad (2.66b)$$

Turbulensteorien brukes hovedsaklig i frekvensdomenet. En betydelig forbedring av teorien i frekvensdomenet oppnås ved å erstatte innholdet i  $\mathbf{C}_{ae}$  og  $\mathbf{K}_{ae}$  med aerodynamiske deriverte.

### 2.5.2 Aerodynamiske deriverte

Teorien om *aerodynamiske deriverte* (AD) ble først gjort anvendelig for bruer av Scanlan og Tomko i 1971 [29]. Den originale formuleringen inneholdt kun seks frekvensavhengige parametere. Etter hvert som moderne brudesign stadig blir lengre og slankere, så har vertikal- og horisontalresponsen økt vesentlig. Teorien har av den grunn blitt utvidet til å inneholde totalt 18 AD- koeffisienter.

De selveksiterende kreftene i ligning (2.66b) kan representeres fullstendig av [30]:

$$q_{ae,y} = \frac{1}{2}\rho_a V^2 B \left( \frac{P_1^* \dot{r}_y}{V_{red} V} + \frac{P_2^* B \dot{r}_\theta}{V_{red} V} + \frac{P_3^* r_\theta}{V_{red}^2} + \frac{P_4^* \dot{r}_y}{V_{red}^2 B} + \frac{P_5^* \dot{r}_z}{V_{red} V} + \frac{P_6^* r_z}{V_{red}^2 B} \right) \quad (2.67a)$$

$$q_{ae,z} = \frac{1}{2}\rho_a V^2 B \left( \frac{H_1^* \dot{r}_z}{V_{red} V} + \frac{H_2^* B \dot{r}_\theta}{V_{red} V} + \frac{H_3^* r_\theta}{V_{red}^2} + \frac{H_4^* \dot{r}_z}{V_{red}^2 B} + \frac{H_5^* \dot{r}_x}{V_{red} V} + \frac{H_6^* r_x}{V_{red}^2 B} \right) \quad (2.67b)$$

$$q_{ae,\theta} = \frac{1}{2}\rho_a V^2 B^2 \left( \frac{A_1^* \dot{r}_z}{V_{red} V} + \frac{A_2^* B \dot{r}_\theta}{V_{red} V} + \frac{A_3^* r_\theta}{V_{red}^2} + \frac{A_4^* \dot{r}_z}{V_{red}^2 B} + \frac{A_5^* \dot{r}_x}{V_{red} V} + \frac{A_6^* r_x}{V_{red}^2 B} \right) \quad (2.67c)$$

Det er de dimensjonsløse koeffisientene,  $P_k^*$ ,  $H_k^*$ , og  $A_k^*$ , for  $k = 1, 2, \dots, 6$ , som omtales som AD-koeffisienter. I ligning (2.67) representerer,  $\rho_a$ , luftens tetthet;  $B$ , tverrsnittets bredde,  $V$ , middelvindhastigheten og  $V_{red}$  står for redusert hastighet definert av:

$$V_{red} = \frac{V}{B \cdot \omega} \quad (2.68)$$

Et dynamisk system kan beskrives av bevegelsesligningen [2]:

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}_{eff} \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}_{eff} \mathbf{r}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (2.69)$$

hvor:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} r_y & r_z & r_\theta \end{bmatrix}^T \quad (2.70a)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} q_{b,y} & q_{b,z} & q_{b,\theta} \end{bmatrix}^T \quad (2.70b)$$

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_{ae} \quad (2.70c)$$

$$\mathbf{K}_{eff} = \mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_{ae} \quad (2.70d)$$

$\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{C}_0$  og  $\mathbf{K}_0$  er henholdsvis last-, dempnings- og stivhetsmatrisene i vakuum.  $\mathbf{C}_{ae}$  og  $\mathbf{K}_{ae}$  er koeffisientmatriser assosiert med den bevegelsesinduserte delen av lasten. For vindberegninger er som oftest  $\mathbf{M}_{ae}$  neglisjerbar [2]. Ved å kombinere ligning (2.66b) og (2.67) fås de generelle uttrykkene for aeroelastisk dempnings- og stivhetsmatrise:

$$\mathbf{C}_{ae} = \frac{1}{2}\rho_a B \frac{V}{V_{red}} \cdot \begin{bmatrix} P_1^* & P_5^* & BP_2^* \\ H_5^* & H_1^* & BH_2^* \\ BA_5^* & BA_1^* & B^2 A_2^* \end{bmatrix} \quad (2.71a)$$

$$\mathbf{K}_{ae} = \frac{1}{2}\rho_a \left(\frac{V}{V_{red}}\right)^2 \cdot \begin{bmatrix} P_4^* & P_6^* & BP_3^* \\ H_6^* & H_4^* & BH_3^* \\ BA_6^* & BA_4^* & B^2 A_3^* \end{bmatrix} \quad (2.71b)$$

Vanligvis bestemmes AD-koeffisienter eksperimentelt ut fra vindtunnelforsøk. AD-koeffisientene er avhengige av tverrsnittets geometri, og antas å være funksjoner av den reduserte vindhastigheten fra ligning (2.68):

$$P_k^* = P_k^*(V_{red}), \quad H_k^* = H_k^*(V_{red}), \quad A_k^* = A_k^*(V_{red}) \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.72)$$

Ligning (2.72) innebærer en antagelse om at tverrsnittet følger en perfekt harmonisk bevegelse for både vertikal- og horisontalforskyvning og rotasjon[31].

## 2.6 Reponsberegning

Metoden beskrevet i dette underkapittelet er basert på Strømmens turbulensteori og hans metode for å predikere vindindusert respons [2]. Ligningene er derimot omformulert ved at samtlige normaliseringer er fjernet for en enklere implementering i analyser.

### 2.6.1 Dynamisk likevekt og frekvensresponsfunksjonen

Det dynamiske systemet i ligning (2.69) kan transformeres til modal koordinater ved å definere:

$$\mathbf{r}(x, t) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \eta(t) \quad (2.73)$$

hvor:

$$\mathbf{r}(x, t) = \begin{bmatrix} r_y & r_z & r_\theta \end{bmatrix}^T \quad (2.74a)$$

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) & \dots & \eta_i(t) & \dots & \eta_{N_{mod}}(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.74b)$$

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \dots & \phi_i(x) & \dots & \phi_{N_{mod}}(x) \end{bmatrix} \quad (2.74c)$$

I ligning (2.74c) angir  $\phi_i(x) = \begin{bmatrix} \phi_{iy}(x) & \phi_{iz}(x) & \phi_{i\theta}(x) \end{bmatrix}^T$  og  $N_{mod}$  er antall moder valgt og inkluderes i beregningene for å oppnå en tilstrekkelig nøyaktig løsning.

Den modale bevegelsesligningen introduseres ved å transformere ligning (2.69) med ligning (2.73):

$$\tilde{\mathbf{M}}_0 \ddot{\eta} + (\tilde{\mathbf{C}}_0 - \tilde{\mathbf{C}}_{ae}) \dot{\eta} + (\tilde{\mathbf{K}}_0 - \tilde{\mathbf{K}}_{ae}) \eta = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \quad (2.75)$$

hvor:

$$\tilde{\mathbf{M}}_0 = \int_L \Phi(x)^T \mathbf{M}_0 \Phi(x) dx \quad \tilde{\mathbf{C}}_0 = \int_L \Phi(x)^T \mathbf{C}_0 \Phi(x) dx \quad \tilde{\mathbf{K}}_0 = \int_L \Phi(x)^T \mathbf{K}_0 \Phi(x) dx \quad (2.76a)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \int_{L_{exp}} \Phi(x)^T \mathbf{q}_b dx \quad (2.76b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ae} = \int_{L_{exp}} \Phi(x)^T \mathbf{C}_{ae} \Phi(x) dx \quad \tilde{\mathbf{K}}_{ae} = \int_{L_{exp}} \Phi(x)^T \mathbf{K}_{ae} \Phi(x) dx \quad (2.76c)$$

Integrasjonsgrensene,  $L$  og  $L_{exp}$ , indikerer integrasjon over henholdsvis hele konstruksjonen eller den vindutsatte delen av konstruksjonen. Overgangen fra tidsdomenet til frekvensdomenet gjøres ved fouriertransformasjon av  $\eta(t)$  og  $\tilde{Q}(t)$ :

$$\eta(t) = \sum_{\omega} \mathbf{A}_{\eta}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.77a)$$

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{\omega} \mathbf{A}_{\tilde{Q}}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.77b)$$

Hvor  $\mathbf{A}_{\eta}(\omega)$  og  $\mathbf{A}_{\tilde{Q}}(\omega)$  er fourierkoeffisientene til henholdsvis den modaleforskyvningen og den modale lasten. Innsatt i ligning (2.75) gir denne transformasjonen:

$$\underbrace{\left[ -\tilde{\mathbf{M}}_0 \omega^2 + (\tilde{\mathbf{C}}_0 - \tilde{\mathbf{C}}_{ae}) i\omega + (\tilde{\mathbf{K}}_0 - \tilde{\mathbf{K}}_{ae}) \right]}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\eta}^{-1}(\omega)} \cdot \mathbf{A}_{\eta} = \mathbf{A}_{\tilde{Q}} \quad (2.78)$$

$\tilde{\mathbf{H}}_{\eta}(\omega)$  betegnes den modale frekvensresponsfunksjonen og følgelig så kan fourieramplitudene til  $\eta$  skrives som:

$$\mathbf{A}_{\eta} = \tilde{\mathbf{H}}_{\eta}(\omega) \cdot \mathbf{A}_{\tilde{Q}} \quad (2.79)$$



hvor:

$$\tilde{\mathbf{H}}_\eta(\omega) = \left[ -\tilde{\mathbf{M}}_0\omega^2 + (\tilde{\mathbf{C}}_0 - \tilde{\mathbf{C}}_{ae})i\omega + (\tilde{\mathbf{K}}_0 - \tilde{\mathbf{K}}_{ae}) \right]^{-1} \quad (2.80)$$

Frekvensresponsfunksjonen i ligning (2.80) beskriver hvordan et system vil respondere for en gitt lastfrekvens.

### 2.6.2 Responsspektraltetthet

Det strømningsinduserte lastbidraget fra vinden er definert i ligning (2.66a). Innsatt i ligning (2.76b) gir dette den modale lastmatrisen:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \int_{L_{exp}} \Phi^T(x) \cdot \mathbf{B}_q \mathbf{v} dx \quad (2.81)$$

Overgangen fra tidsdomenet til frekvensdomenet gjøres ved å fouriertransformere  $\tilde{\mathbf{Q}}$  og  $\mathbf{v}$  i ligning (2.81). Fourierkoeffisient til modal last ender opp som:

$$\mathbf{A}_{\tilde{Q}} = \int_{L_{exp}} \Phi^T(x) \cdot \mathbf{B}_q \mathbf{a}_v dx \quad (2.82)$$

Hvor  $\mathbf{a}_v$  er fourierkoeffisienten til den flukterende vindvektoren. Den modale lastspektraltettheten er definert ved [2]:

$$\mathbf{S}_{\tilde{Q}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{A}_{\tilde{Q}}^* \cdot \mathbf{A}_{\tilde{Q}}) \quad (2.83)$$

Ved å innsette uttrykket fra ligning (2.82) i ligning (2.83) fås det totale uttrykket til den modale lastspektraltettheten:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\tilde{Q}}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left\{ \left[ \int_{L_{exp}} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{A}_v^* dx \right] \left[ \int_{L_{exp}} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{A}_v dx \right]^T \right\} \\
 &= \int_{L_{exp}} \int_{L_{exp}} \boldsymbol{\Phi}^T(x_1) \cdot \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{S}_v(\Delta x, \omega) \cdot \mathbf{B}_q^T \cdot \boldsymbol{\Phi}(x_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Hvor  $\mathbf{S}_v(\Delta x, \omega)$  inneholder krysspektraltettheten til de flukterende vindkomponentene,  $u(t)$  og  $w(t)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_v(\Delta x, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{A}_v^*(x_1, \omega) \cdot \mathbf{A}_v(x_2, \omega)) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \begin{bmatrix} A_u^* A_u & A_u^* A_w \\ A_w^* A_u & A_w^* A_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uw} \\ S_{wu} & S_{ww} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

$\Delta x = |x_1 - x_2|$  er spennmessige separasjonen. Vindfeltets krysspektraltetthet er beskrevet i kapittel 2.4.1.

Tilbakegangen til modal responspektraltetthet oppnås fra den grunnleggende definisjonen av spektraltetthet uttrykt ved fourieramplituder:

$$\mathbf{S}_\eta(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{A}_\eta^* \cdot \mathbf{A}_\eta^T) = \tilde{\mathbf{H}}_\eta^* \cdot \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{A}_{\tilde{Q}}^* \cdot \mathbf{A}_{\tilde{Q}}^T) \right] \cdot \tilde{\mathbf{H}}_\eta^T = \tilde{\mathbf{H}}_\eta^* \cdot \mathbf{S}_{\tilde{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_\eta^T \tag{2.86}$$

Hvor  $\tilde{\mathbf{H}}_\eta$  og  $\mathbf{S}_{\tilde{Q}}$  er gitt henholdsvis i ligning (2.80) og (2.84).

Responspektraltettheten til de ukjente forskyvningene,  $r_y$ ,  $r_z$  og  $r_\theta$ , i punkt,  $x = x_r$ , er da gitt ved:

$$\mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) = \begin{bmatrix} S_{r_y r_y} & S_{r_y r_z} & S_{r_y r_\theta} \\ S_{r_z r_y} & S_{r_z r_z} & S_{r_z r_\theta} \\ S_{r_\theta r_y} & S_{r_\theta r_z} & S_{r_\theta r_\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(x_r) \cdot \mathbf{S}_\eta(\omega) \cdot \mathbf{\Phi}^T(x_r) \quad (2.87)$$

Responskovariansmatrisen inneholder variansen til hver responskomponent,  $r_y$ ,  $r_z$  og  $r_\theta$ , i punkt,  $x = x_r$ , på diagonalen og krysskovariansen i de ikke-diagonale leddene og etableres ved å integrere krysspektraltettheten i ligning (2.87):

$$\mathbf{Cov}_{rr}(x_r) = \begin{bmatrix} \sigma_{r_y r_y}^2 & Cov_{r_y r_z} & Cov_{r_y r_\theta} \\ Cov_{r_z r_y} & \sigma_{r_z r_z}^2 & Cov_{r_z r_\theta} \\ Cov_{r_\theta r_y} & Cov_{r_\theta r_z} & \sigma_{r_\theta r_\theta}^2 \end{bmatrix} = \int_0^\infty \mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) d\omega \quad (2.88)$$

### 2.6.3 Maksimal respons

Vindindusert respons er en stokastisk prosess som kan uttrykkes ved  $\mathbf{r}(x_r) = \bar{\mathbf{r}}(x_r) + \mathbf{r}(x_r, t)$  der  $\mathbf{r}(x_r, t)$  er den flukterende komponenten som er antatt å svinge rundt en stasjonær middelrespons,  $\bar{\mathbf{r}}(x_r)$ . Den statiske responsen kan beregnes ut fra systemet stivhet,  $\mathbf{K}_0$  og middelvindtrykket,  $\bar{\mathbf{q}}$  gitt i ligning (2.64c), men vil ikke utdypes her fordi det faller utenfor rapportens omfang. Til dimensjonering er det ekstremverdien til responsen som er av interesse.

Den største sannsynlige momentanresponsen,  $\mathbf{r}_{maks}(x_r)$ , innenfor tidsintervallet,  $T$ , er gitt av ligningen [2]:

$$\mathbf{r}_{maks}(x_r) = \begin{bmatrix} r_{maks,y}(x_r) \\ r_{maks,z}(x_r) \\ r_{maks,\theta}(x_r) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{r}}(x_r) + \bar{\eta}_{maks} \cdot \sigma(x_r) \quad (2.89)$$

hvor standardavviket til responsen er gitt av:

$$\sigma(x_r) = \begin{bmatrix} \sigma_{r_y}(x_r) \\ \sigma_{r_z}(x_r) \\ \sigma_{r_\theta}(x_r) \end{bmatrix} = \sqrt{\text{diag}(\mathbf{Cov}_{\mathbf{rr}}(x_r))} \quad (2.90)$$

$\bar{\eta}_{maks}$  er prosessens toppfaktor og er for en bredbåndetprosess gitt av uttrykket[32]:

$$\bar{\eta}_{maks} = \sqrt{2 \cdot \log_e(\omega_0 \cdot T)} + \frac{\gamma_e}{\sqrt{2 \cdot \log_e(\omega_0 \cdot T)}} \quad (2.91)$$

I ligning (2.91) er  $\gamma_e \approx 0.5772$  lik Euler-konstanten.  $\omega_0$  kan fysisk tolkes som den frekvensen hvor størsteparten av energien i responsspekteret,  $S_r$ , er konsentrert, og for et lavt dempet system vil dette være nær retningens første egenfrekvens. Høye verdier av  $\omega_0 \cdot T$  har vanligvis lav varians, og dette gjør at det normalt vil være tilstrekkelig å anta  $\bar{\eta}_{maks}$  lik den største middelveien og ignorere variansen. Ordinære toppfaktorverdier for perioder mellom  $T = 10 - 60$  minutter ligger i området,  $\bar{\eta}_{maks} = 3 - 4.5$ .

# Kapittel 3

## Numerisk integrasjon av akselerasjon

### 3.1 Hensikt og problemstilling

Hardangerbrua har blitt instrumentert med akselerometer som har gitt tidsserier med akselerasjoner fra brubanen og tårnene. Akselerasjonene er brukt til å estimere bruas egenfrekvenser, korresponderende egenmoder og dempningstall. Responsen til Hardangerbrua kan identifiseres ved hjelp av GPS montert langs brubanen. Det er likevel av praktiske og økonomiske årsaker interesse å bruke de eksisterende målingene for å kartlegge respons til Hardangerbrua under påkjenning av ulike middelvindhastigheter. Akselerasjon er den dobbelderiverte av forflytningen. Det er med andre ord nødvendig å integrere akselerasjonsmålingene to ganger for å få respons. Problemet er at integrasjonen krever initialbetingelser for et korrekt svar, og akselerometer gir ikke informasjon angående utgangsposisjonen når målingen begynner.

Akselerometerene omformer akselerasjon til et digitaltsignal. Konverteringen kan bidra med et konstant avvik forårsaket av at instrumentet ikke er riktig kalibrert i forhold til lokal gravitasjon. Avviket medfører store integrasjonsfeil dersom det ikke fjernes.

Anta at akselerasjonssignalet,  $\ddot{r}_{digital}(t)$ , består av både et konstant ledd og et tidssvarierende ledd, ligning (3.1):

$$\ddot{r}_{digital}(t) = \ddot{r}(t) + \ddot{r}_{avvik} \quad (3.1)$$

Hvor  $\ddot{r}(t)$  er den faktiske akselerasjonen og  $\ddot{r}_{avvik}$  representerer en uønsket konstant. Dersom det utføres en dobbelintegrasjon når initialhastighet er  $\dot{r}_0$ , og initialforflytning er  $r_0$ , vil forflytningen,  $r_{digital}(t)$ , være gitt som i ligning (3.2) [4].

$$r_{digital}(t) = \int_0^t \int_0^t \ddot{r}(t) dt dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_{avvik} t^2 + \dot{r}_0 t + r_0 \quad (3.2)$$

Andre ledd i ligning (3.2) øker nå eksponentielt, og er en betydelig feilkilde. Videre medvirker mangel på initiell hastighet som en lineær feil og initiell forflytning som en uønsket konstant. Et målepunkt på Hardangerbrua vil som følge av konstruksjonen svinge om en likevektslinje. Konsekvensen av feilkalibrete instrument og utilstrekkelig opplysninger om initialverdier, resulterer i en integrert forflytningen som antyder å drifte bort fra startposisjonen. Feilen fra konverteringen kan elimineres ved å standardisere signalet før akselerasjonen benyttes i analyser. Standardisering av digitale signaler er omtalt i kapittel 2.1.3. Minimering av de resterende feilkildene blir diskutert i dette kapittelet.

## 3.2 Tidligere arbeid

Masteravhandlingen til Lance D. Slifka, *An accelerometer based approach to measuring displacement of a vehicle body*, tar blant annet for seg hvordan akselerasjon kan konverteres til forflytning gjennom numerisk integrasjon. Hovedfokuset til oppgaven ligger i utviklingen av et ideelt filter som minimerer feilkilden under integrasjonen. Et høypassfilter basert på FFT er foreslått på grunn av muligheten til sette en brå avkuttingsfrekvens,  $\omega_{af}$ . Usikkerheten til metoden ligger i valg av optimal avkuttingsfrekvens. FFT-filteret har til hensikt å fjerne de lave frekvensene som er kilden til drift og avvik i initiale betingelser[4].

### 3.2.1 Algoritme

Filtreringen blir kjørt ved hjelp av MATLAB. På grunn av at MATLAB gir ut FFT symmetrisk om Nyquistfrekvensen, er det viktig å behandle fourieramplitudene i begge ender. Algoritmen som omformer et vilkårlig signal,  $x$ , er [4]:

```
X = fft(x)
X_f = X
for i = 1 : n
    X_f(i) = 0
    X_f((N - (i - 1))) = conj(X_f(i))
end
x_f = real(ifft(X_f))
```

I algoritmen er  $N$  lengden på  $X$ .  $n$  er antall punkt som skal settes lik null, og representerer til hvilken frekvens signalet modifiseres. Når den inverse FFT (IFFT) utføres, tas kun den reelle delen med videre siden forflytning er en reell størrelse. Et negativt aspekt med FFT-filtrering er at den kan inneholde transienter i starten og slutten av den integrerte hastigheten og integrerte forflytningen. En god tilnærming til valg av  $n$  er anbefalt å være halvparten av verdien til nedre frekvensgrense for signalet[4].

### 3.2.2 Relasjon mellom frekvens og integrasjon

Når et akselerasjonssignal fouriertransformeres vil hver frekvens,  $\omega_i$ , vektes med en amplitude som forteller hvor mye innflytelse frekvensen utgjør. Et akselerasjonssignal,  $\ddot{r}_0(t)$ , bestående av kun en enkelt frekvens,  $\omega_0$ ; fasevinkel,  $\phi$ , og amplitude,  $A_{\ddot{r}}$ , er gitt i ligning (3.4):

$$\ddot{r}_0(t) = A_{\ddot{r}} \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (3.4)$$

Anta at akselerasjonssignalet i ligning (3.4) for enkelhets skyld har initielle verdier lik null. Når  $\ddot{r}_0(t)$  utsettes for en dobbelintegrasjon, blir forflytningen gitt av ligning (3.5):

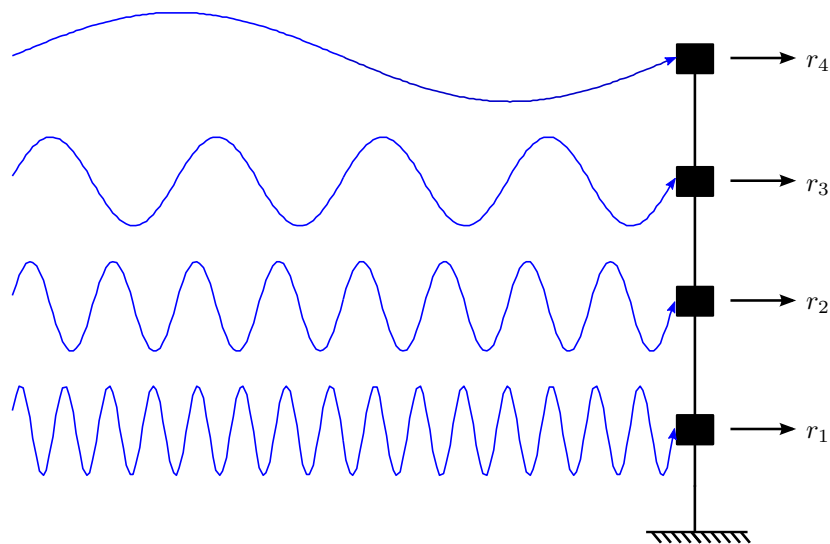
$$r(t) = -\frac{A_{\ddot{r}}}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (3.5)$$

Ligning (3.5) viser en amplitudevekting til forflytningen som er direkte avhengig av frekvensen. Frekvenser over én vil redusere amplituden, mens amplituden vil økes i motsatt tilfelle. Negativt fortegn beskriver at forflytningen er  $\pi$  radianer ut av fase sammenlignet med akselerasjonen.



### 3.3 Ufiltrert integrasjon

Dette delkapittelet tar for seg en tidsserie på 20 sekunder med tidssteg på 0.005 sekunder. Systemet som skal analyseres består av fire frihetsgrader, illustrert i figur 3.1. Systemets egenskaper er valgt for å undersøke påvirkningen til høyfrekvente komponenter under integrasjon sammenlignet med lavfrekvente komponenter. Stivhet og masse er derfor valgt slik at de tre første egenfrekvensene ligger forholdsvis tett, mens den siste er betydelig høyere. Systemet er påsatt en harmonisk last i hver frihetsgrad. Akselerasjon, hastighet og forflytning til systemet, gitt som  $\ddot{\mathbf{r}}_{Newmark}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_{Newmark}$  og  $\mathbf{r}_{Newmark}$ , er funnet ved hjelp av Newmark-iterasjon [20].  $\dot{\mathbf{r}}_{Newmark}$  og  $\mathbf{r}_{Newmark}$  er sammenligningsgrunnlaget og resultatet som ønskes etter henholdsvis én og to integrasjoner av  $\ddot{\mathbf{r}}_{Newmark}$ . I videre formuleringer omhandler akselerasjon, hastighet og forflytning frihetsgrad fire,  $r_4$ , på grunn av at frihetsgraden gir størst utslag i første svingeform. Egenfrekvensene til systemet er gitt i matrise (3.6):



Figur 3.1: Beskrivelse av system med harmoniske laster i hver frihetsgrad

$$\omega_n = \begin{bmatrix} 5.94 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15.89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 31.82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105.36 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

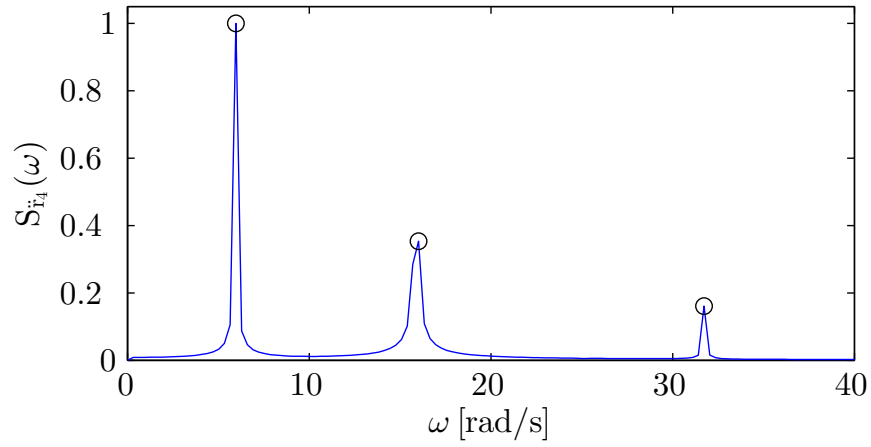
### 3.3.1 Spektraltetthet

Figur 3.2a viser den normaliserte autospektraltettheten til akselerasjonen,  $S_{\ddot{r}_4}(\omega)$ . Akselerasjonen som benyttes er ufiltrert, hvilket betyr at  $\ddot{r}_4 = \ddot{r}_{Newmark,4}$ . Siden systemet er ukoblet skulle spektraltettheten teoretisk bestå av fire enkle stolper, en for hver egenfrekvens.

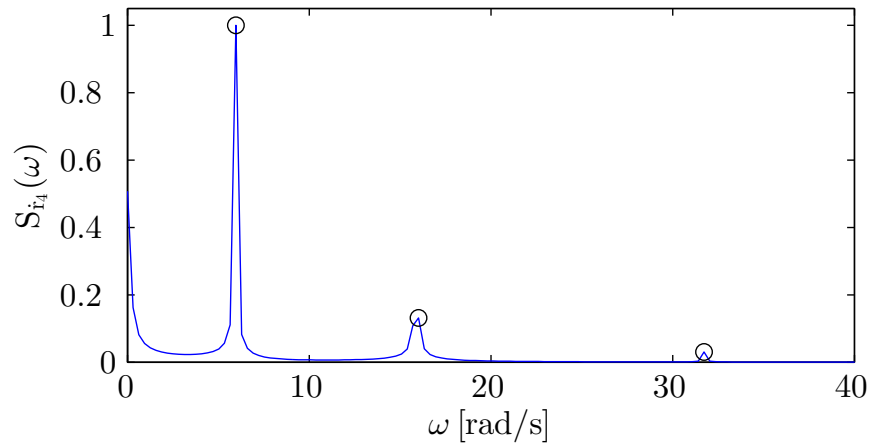
Spektraltetthetene er beregnet fra amplitudene funnet gjennom FFT i beregningsprogrammet MATLAB. FFT-diskretiseringen er direkte relatert til lengden på tidsserien. En kort tidsserie vil derfor resultere i et bredbåndet spektraltetthet, som inneholder uønskede frekvenser nær egenfrekvensene og vil påvirke videre integrasjon. En kort tidsperiode er vurdert for å tydeliggjøre utviklingen til spektraltetthetene.

Autospektraltettheten til hastigheten,  $S_{\dot{r}_4}(\omega)$ , er gitt i figur 3.2b etter at akselerasjonen er integrert en gang uten at noen lavfrekvente komponenter er fjernet i FFT. Det er åpenbart at lavfrekvente komponenter får større innvirkning etter en integrasjon som følge av utviklingen i ligning (3.5).

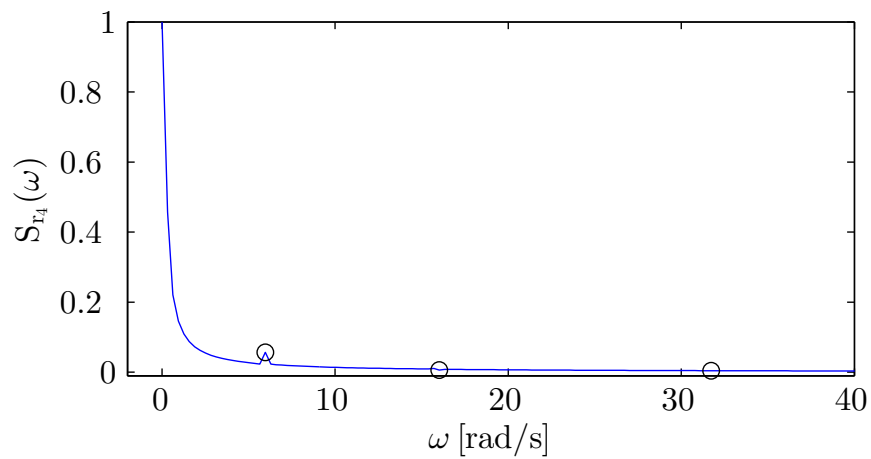
Andre integrasjon reduserer amplituden til høye frekvenser og øker amplituden til lave frekvenser ytterligere. I figur 3.2c har de lavfrekvente komponentene tatt helt overhånd. For fremstillingen sin skyld er frekvensaksen valgt å gå over på negativ akse slik at den eksponentielle utviklingen nær null vises tydeligere.



(a) Akselerasjon



(b) Hastighet



(c) Forflytning

Figur 3.2: Ufiltrert normalisert autospektraltetthet,  $\Delta\omega \approx 0.314 \text{ rad/s}$

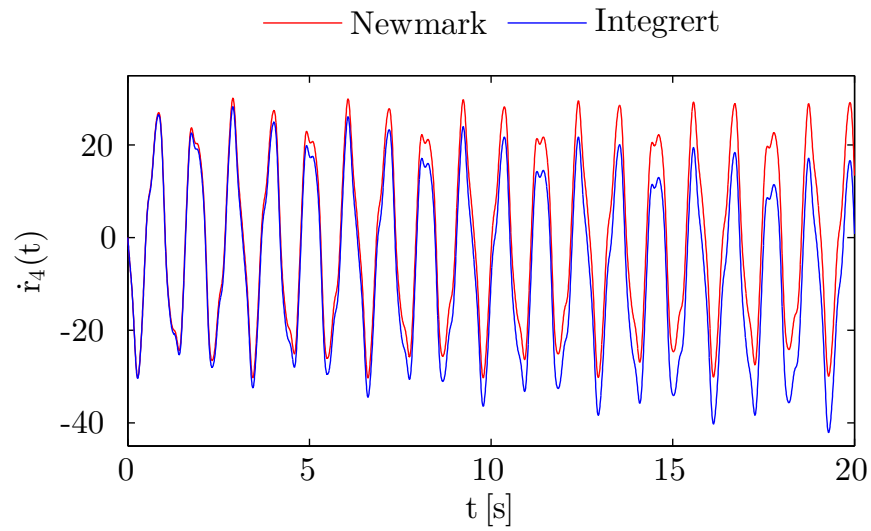
### 3.3.2 Integrert hastighet og forflytning

Numerisk integrasjon fra akselerasjon til forflytning innehar med andre ord en stor feilkilde gjennom de lavfrekvente komponentene. Hensikten med integrasjonen er å identifisere forflytningen til systemet. I innledende deler av analysen er det også valgt å sammenligne utviklingen til hastigheten.

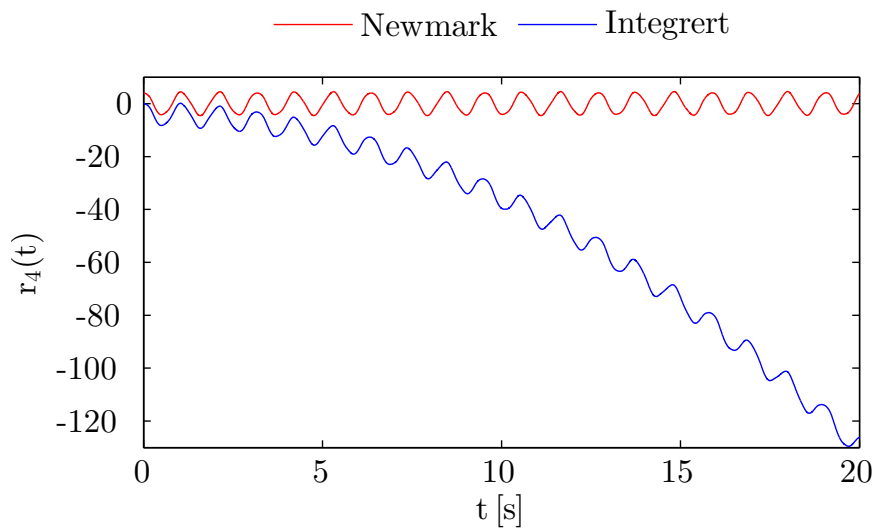
Figur 3.3a viser en sammenligning av den korrekte hastigheten fra Newmark-iterasjonen,  $\dot{r}_{Newmark,4}$ , og hastigheten integret opp fra  $\ddot{r}_{Newmark,4}$ ,  $\dot{r}_4$ . I starten er hastighetene tilnærmet identisk, men den integrerte hastigheten utvikler en betydelig avsporing på grunn av forstyrrelse fra lave frekvenser. Det er verdt å merke seg at sett bort fra driften, er formen til den integrerte hastigheten lik den korrekte.

Driften til forflytningen,  $r_4$ , er vesentlig større enn for hastigheten ettersom tredje ledd i ligning (3.2) øker lineært og falske frekvenser under én rad/s øker kvadratisk. Den integrerte forflytningen i figur 3.3b ser ut til å drifte bort fra utgangspunktet i tillegg til at formen på selve forflytningen forvrenges. Utgangspunktet til den integrerte forflytningen er ulik startposisjonen etablert med Newmark-iterasjon.

Konklusjonen er at *drift* er et alvorlig problem ved numerisk integrasjon av akselerasjon, der initialbetingelsene er ukjente.



(a) Hastighet



(b) Forflytning

Figur 3.3: Sammenligning av ufiltrert integrert respons og Newmark-iterert respons

## 3.4 Filtret integrasjon

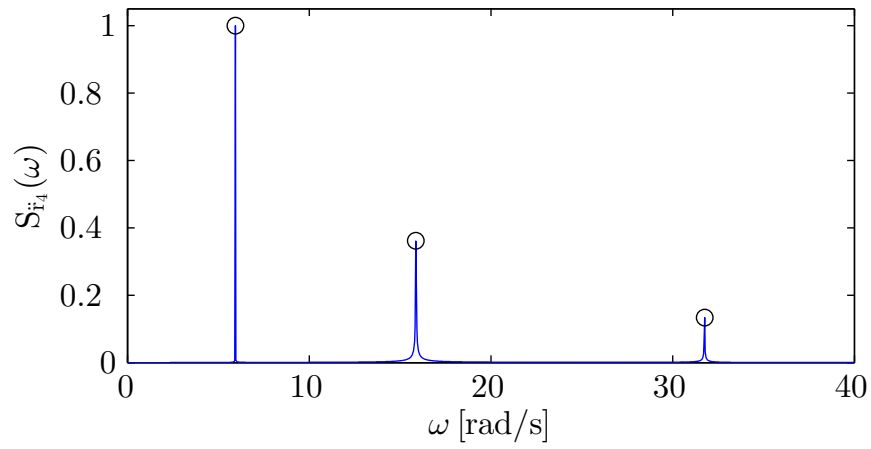
Filtreringsanalysen utføres for det samme systemet som i delkapittel 3.3, men tidsseriens lengde er økt fra 20 til 200 sekunder. Lengden på tidsserien gjør at oppløsningen til FFT-diskretiseringen øker med en faktor på ti. Systemet som i figur 3.2a så ut til å være en bredbåndet prosess, har med den nye diskretiseringen en smalbåndet akselerasjonsspektraltetthet, vist i figur 3.4a. Den nye diskretiseringen gir en mer riktig beskrivelse av den harmoniske lastsituasjonen. Lavfrekvente amplituder er satt lik null siden disse amplitudene utgjør støy og er kilde til feil videre i integrasjonen. Avkuttingsgrensen,  $\omega_{af}$ , er satt til 75 punkt, og tilsvarer omtrent halvparten av første egenfrekvens, slik at  $\omega_{af} \approx \frac{\omega_1}{2}$ .

### 3.4.1 Spektraltetthet

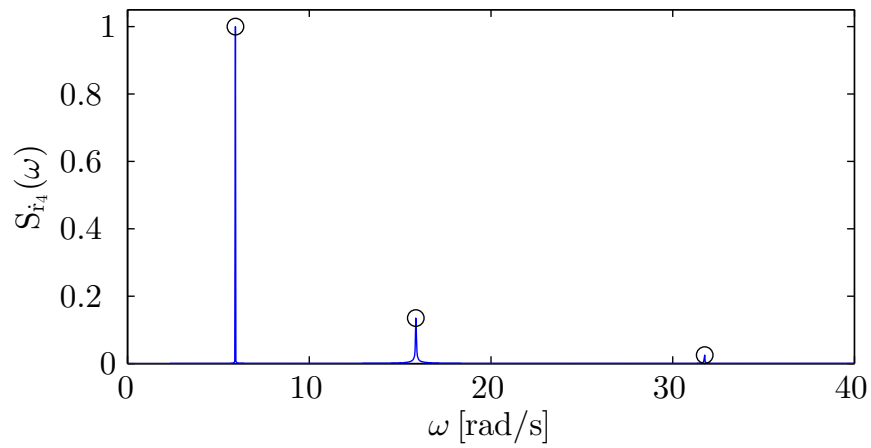
Før første integrasjon gjennomføres, filtreres  $\ddot{r}_{Newmark,4}$ . Etter at akselerasjonsamplitudene i FFT er satt lik null opp til  $\omega_{af}$ , utføres en invers FFT. Dette gir et nytt modifisert sett akselerasjon,  $\ddot{r}_4$ , som første integrasjon utføres på.  $S_{\dot{r}_4}(\omega)$  i figur 3.4b er ikke preget av den samme lavfrekvente økningen som spektraltettheten til hastigheten fra den ufiltrerte akselerasjonen i figur 3.2b.

FFT-filteret er på tilsvarende fremgangsmåte anvendt på  $S_{\dot{r}_4}(\omega)$  før siste integrasjon utføres. Spektraltettheten til forflytningen er vist i figur 3.4c. Reduksjon av toppen i egenfrekvensene senkes fortsatt med en faktor på  $\omega_i$  og  $\omega_i^2$  for henholdsvis  $S_{\dot{r}_4}(\omega)$  og  $S_{r_4}(\omega)$ . Forflytningen,  $r_4$ , er til slutt funnet etter en siste filtrering av  $S_{r_4}(\omega)$ .

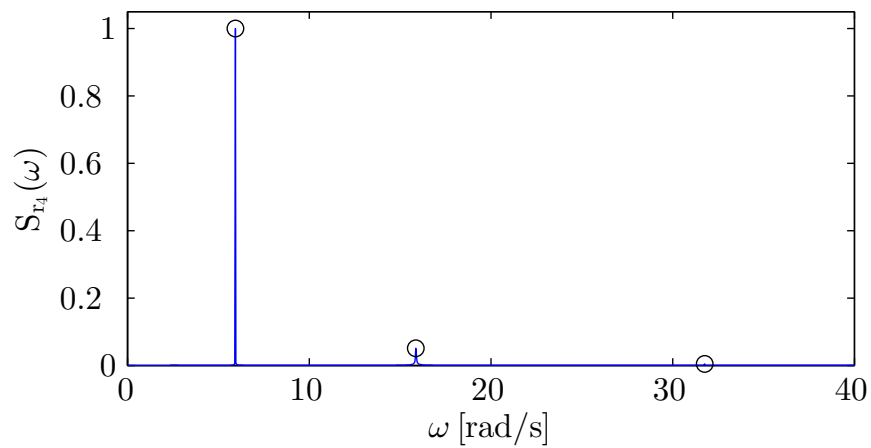
Akselerasjonen fra Newmark-iterasjonen har gjennomgått tre filtreringen før forflytningen er funnet.



(a) Akselerasjon



(b) Hastighet

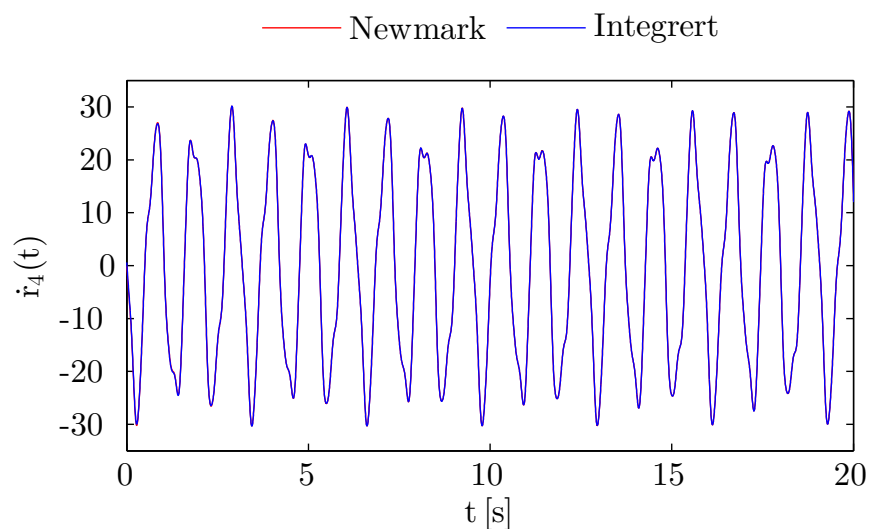


(c) Forflytning

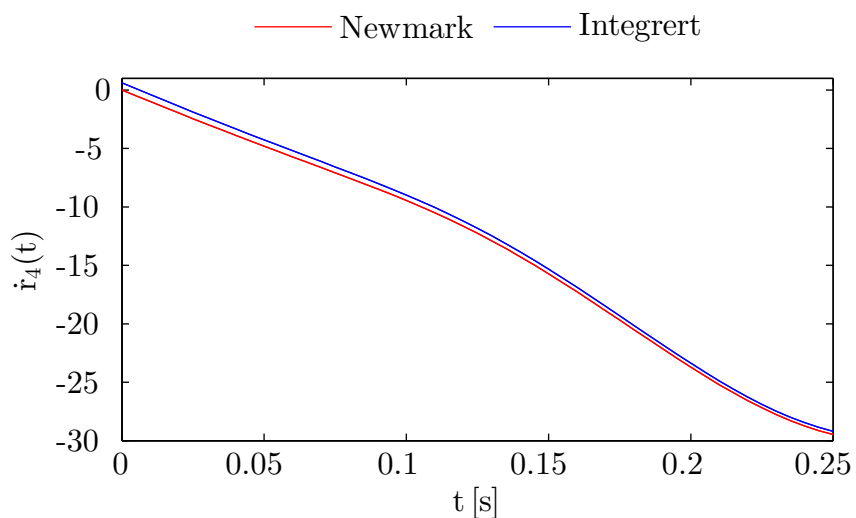
Figur 3.4: Filtrert normalisert autospektratetthet,  $\Delta\omega \approx 0.0314$  rad/s

### 3.4.2 Integrert hastighet

Figur 3.5a viser den integrerte hastigheten fra filtrert akselerasjonen sammenlignet med hastigheten fra Newmark-iterasjon. Tidsvinduet er det samme som for integrert hastighet fra den ufiltrerte akselerasjonen i figur 3.3a. Sammenligningen viser at filtreringen har fjernet de lave frekvensene som utgjorde støy.



(a) Hastighet



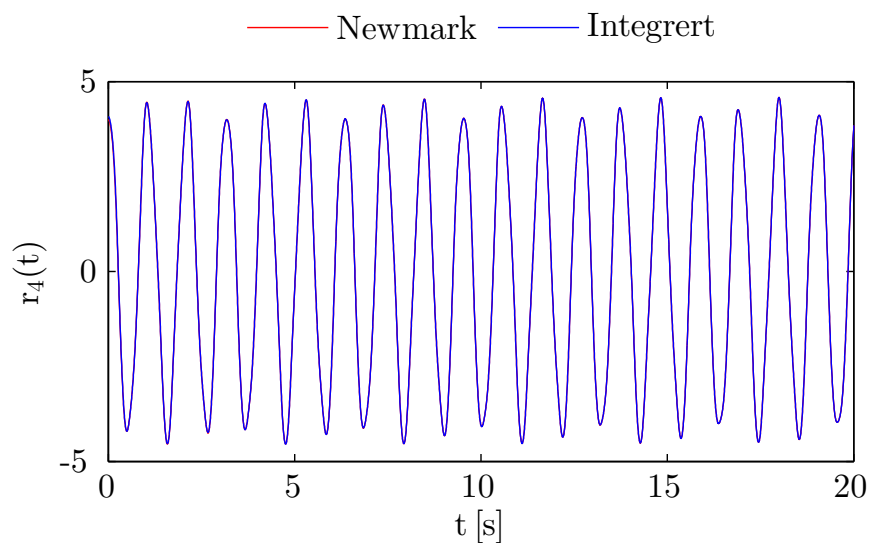
(b) Initielt utsnitt fra figur 3.5a

Utgangshastighet for systemet er lik 0 m/s og stemmer bra med den integrerte hastigheten. Ut i fra figur 3.5b er det klart at det den integrerte hastigheten ikke er 100 % eksakt.

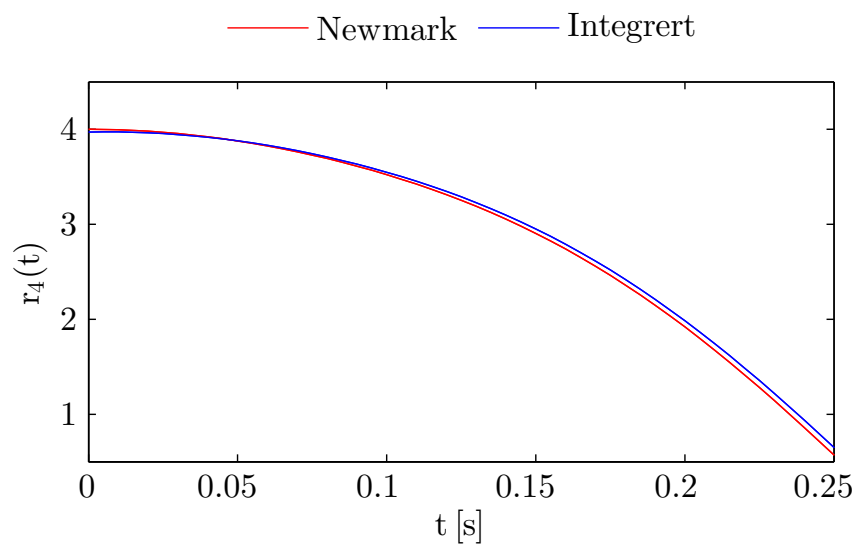


### 3.4.3 Integrert forflytning

Overgangen fra en tidsserie på 20 sekunder til en tidsserie på 200 sekunder kombinert med filtrering av lavfrekvent støy, viser seg tydelig å forbedre nøyaktigheten til forflytningen i forhold til ufiltrert forflytning i figur 3.3b. En sammenligning av Newmark-iterert forflytning og integrert forflytning er illustrert i figur 3.6a, hvor forskyvningen er tilnærmet identisk. Startposisjonen til forflytningen blir sammenlignet i figur 3.6b.



(a) Forflytning

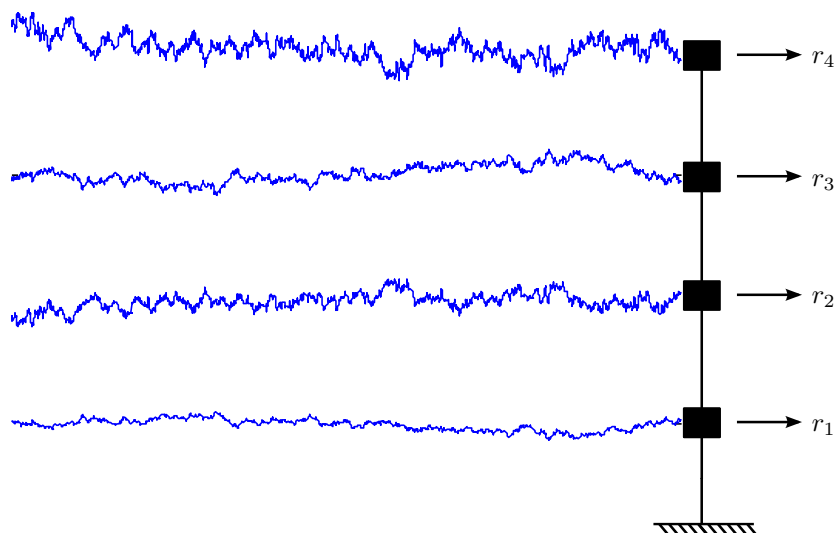


(b) Initielt utsnitt fra figur 3.6a

Figur 3.6: Sammenligning av filtrert integrert forflytning og Newmark-iterert forflytning

### 3.5 Vindindusert last

Vindinduserte laster har en stokastisk frekvensfordeling og er mer komplisert enn rene harmoniske laster. Neste steg i analysen er å kontrollere integrasjonsmetoden for en stokastisk lastsituasjon, illustrert i figur 3.7.



Figur 3.7: Beskrivelse av system med vindindusert last i hver frihetsgrad.

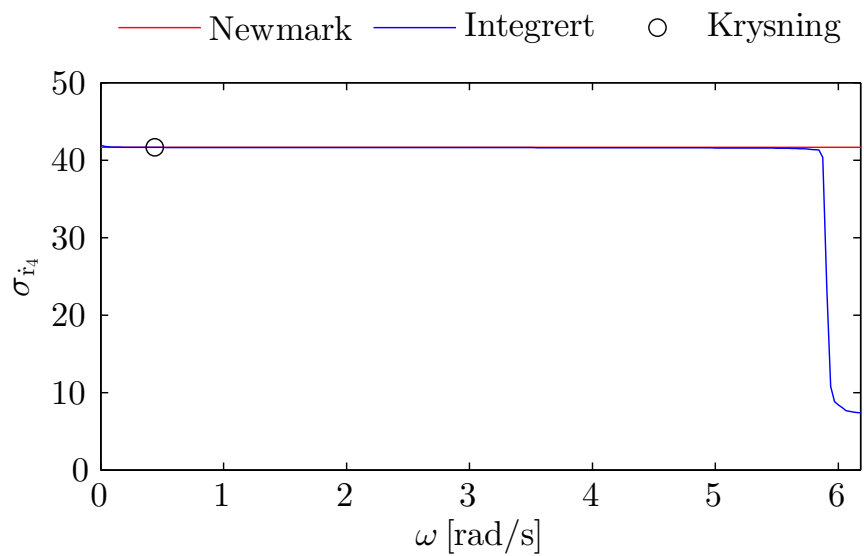
Dersom  $\omega_{af}$  settes for høyt, vil den integrerte hastigheten og integrerte forflytningen påvirkes. Dette delkapittelet inneholder en sensitivitetsanalyse for å finne en avkuttingsfrekvens som gir optimal representasjon av hastighet og forflytning ut i fra akselerasjonssignalet,  $\ddot{\mathbf{r}}_{Newmark}$ . Det er ønskelig å identifisere en trend til standardavviket i forbindelse med hvor høyt  $\omega_{af}$  settes lik null i spektraltettheten, og en tilsvarende trend for startverdier, som ideelt sett overlapper hverandre.

### 3.5.1 Standardavvik og startverdier

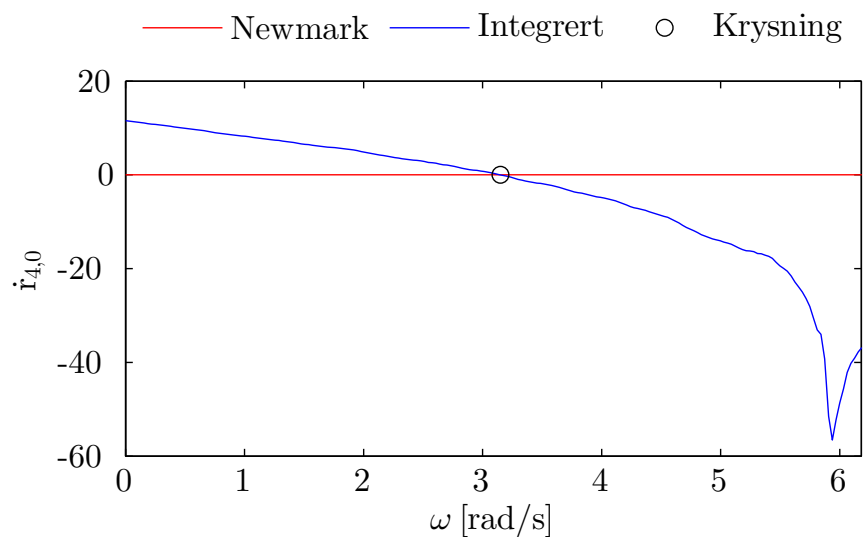
Endring i standardavvik til  $\dot{r}_4$  som konsekvens av valgt avkuttingsfrekvens er vist i figur 3.8a. Newmark representerer systemets faktiske standardavvik,  $\sigma_{\dot{r}_{Newmark,4}}$ . Det vises et klart platå hvor standardavviket holder seg upåvirket av filtreringen. Integrasjonsmetoden varsler med et skarpt fall når avkuttingsfrekvensen overgår systemets første egenfrekvens,  $\omega_{af} > \omega_1$ . Den svarte sirkelen indikerer hvilke avkuttingsfrekvens som gir standardavvik lik det eksakte standardavviket.

Utviklingen til starthastigheten,  $\dot{r}_0$ , mot økende avkuttingsfrekvenser, gitt i figur 3.8b, ser ut til å ha å avta tilnærmet lineært når  $\omega_{af} < \omega_1$ . Det er klart at det ikke eksisterer en avkuttingsfrekvens som både gir korrekt standardavvik og korrekt initialhastighet. Standardavviket er lite sensitivt for en avkuttingsfrekvens innenfor  $0 < \omega_{af} < \omega_1$ , men avkuttingsfrekvensen bør ikke settes i ytterkantene av dette intervallet på grunn av sensitiviteten til initialhastigheten.

Tilsvarende analyse for systemets forflytning er vist i figur 3.9. Forflytningen er lite sensitiv ovenfor valg av  $\omega_{af}$  innenfor intervallet  $\frac{\omega_1}{10} < \omega_{af} < \omega_1$ . En avkuttingsfrekvens innenfor dette intervallet vil derfor gi et tilfredstillende forskyvningsforløp. Når  $\omega_{af}$  er lavere enn  $\frac{\omega_1}{10}$ , har standardavviket,  $\sigma_{r_4}$ , en eksponentiell reduksjon.

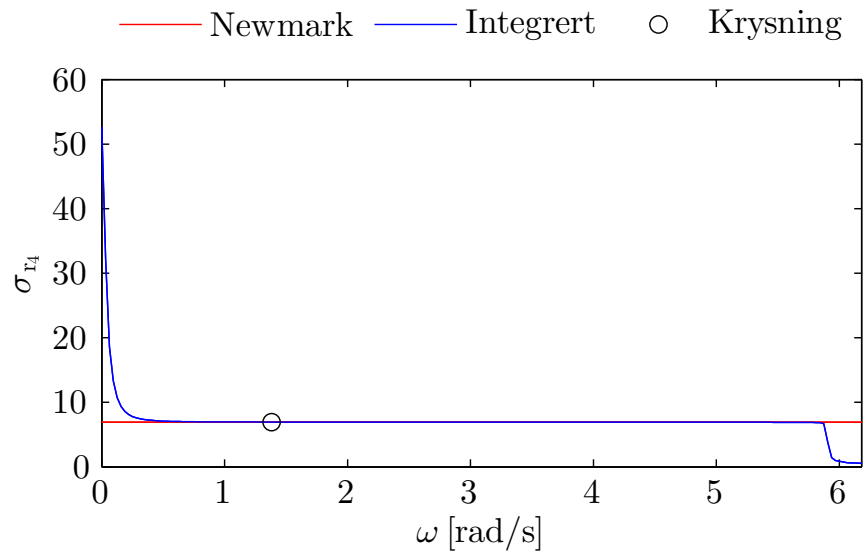


(a) Endring i standardavvik

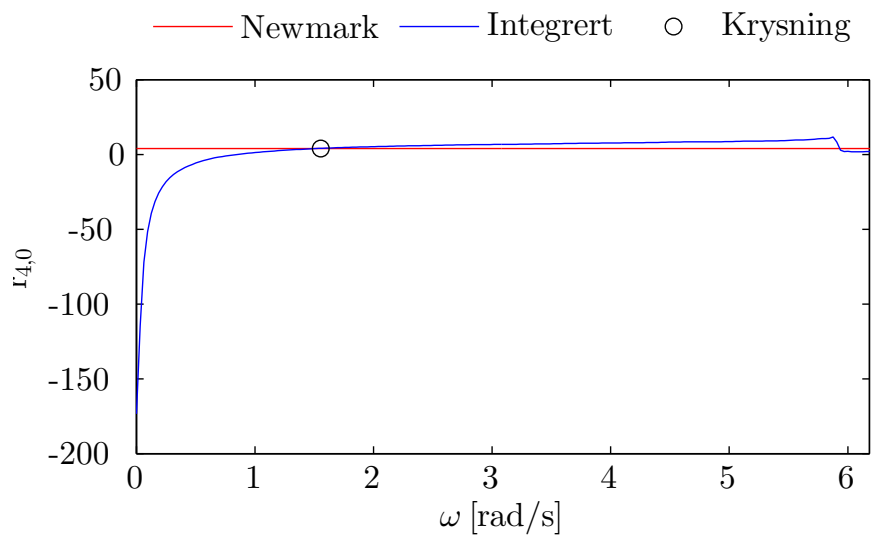


(b) Endring i initialhastighet

Figur 3.8: Hastighet som funksjon av avkuttingsfrekvens



(a) Endring i standardavvik



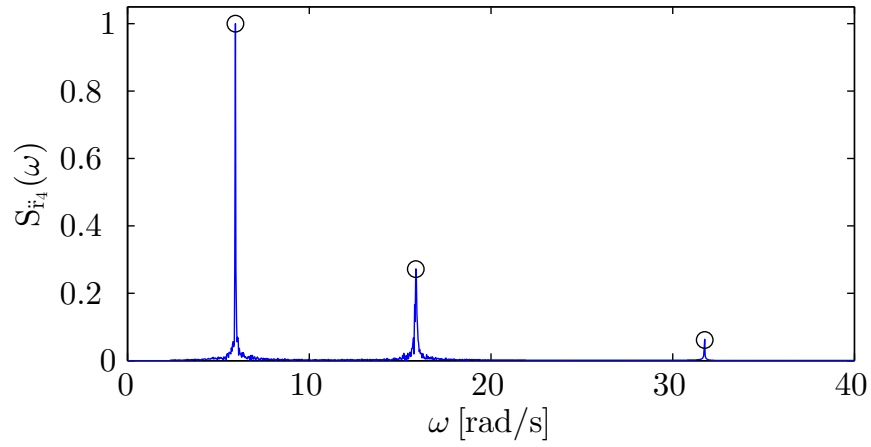
(b) Endring i initialforflytning

Figur 3.9: Forflytning som funksjon av avkuttingsfrekvens

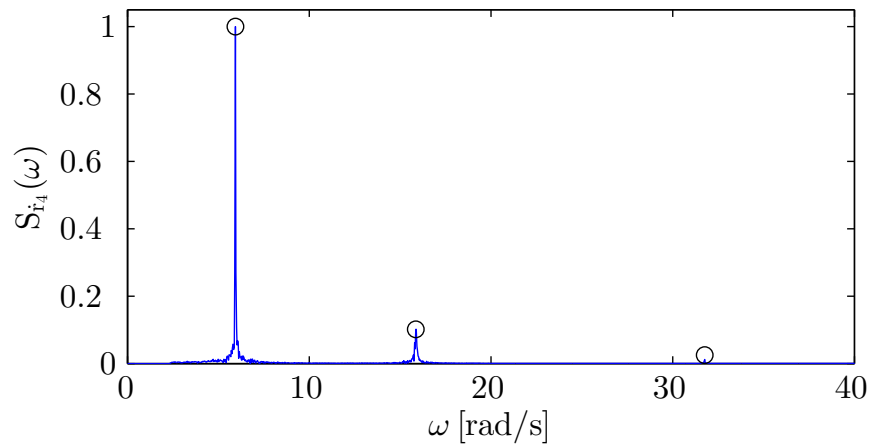
### 3.5.2 Spektraltetthet

For systemet i figur 3.7 oppnås et tilfredstillende forflytningsestimat når avkuttingsfrekvensen settes lik  $\omega_{af} = 2.6 \text{ rad/s}$ . Spektraltetthetene er gitt i figur 3.10.  $S_{\ddot{r}_4}$ ,  $S_{\dot{r}_4}$  og  $S_{r_4}$  har lik form som i figur 3.4, men som følge av at vinden inneholder en bred fordeling av frekvenser, gir dette synlig virkning i autospektraltetthetene.

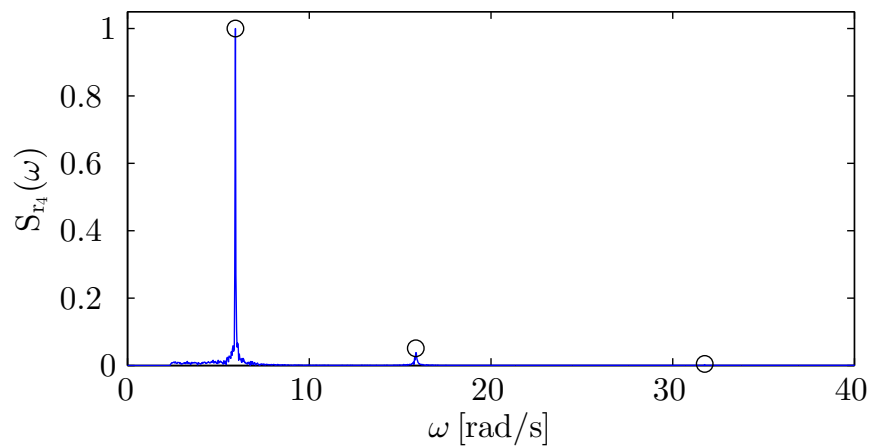
Dersom avkuttingsfrekvensen hadde vært valgt slik at  $\omega_{af} < 2.6 \text{ rad/s}$ , ville spektraltettheten til hastigheten og spesielt forflytningen vist en kunstig økning av de lavfrekvente amplitudene. Om avkuttingsfrekvensen i stedet for var satt med  $\omega_{af} > 2.6$ , hadde betydningsfulle frekvenser gått tapt og resultert i et dårligere forskyvningsestimat.



(a) Akselerasjon



(b) Hastighet

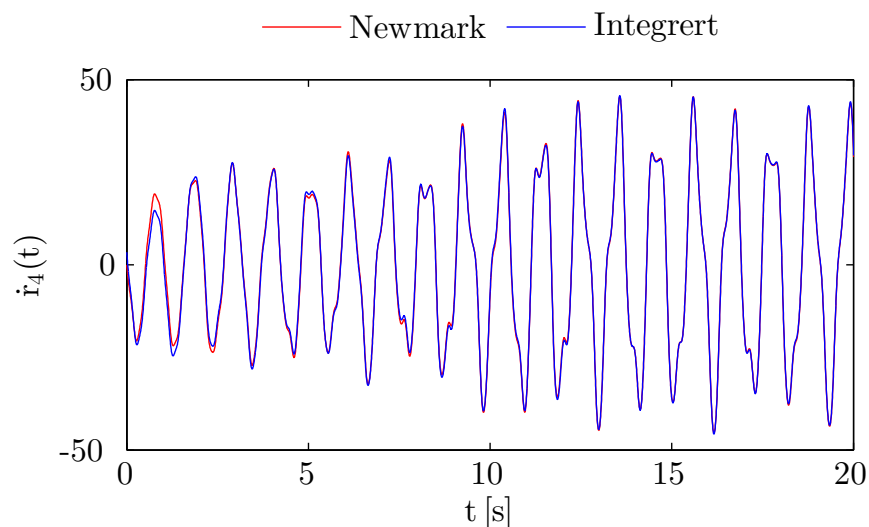


(c) Forflytning

Figur 3.10: Normaliserte autospektraltettheter fra filtrert akselerasjon

### 3.5.3 Integrert hastighet og forflytning

Figur 3.11 viser den integrerte hastigheten etter at akselerasjonen er filtrert opp til  $\omega_{af} = 2.6 \text{ rad/s}$ . De første 20 sekundene stemmer bra bort sett fra innkjøringen, som tar underkanten av to sekunder.

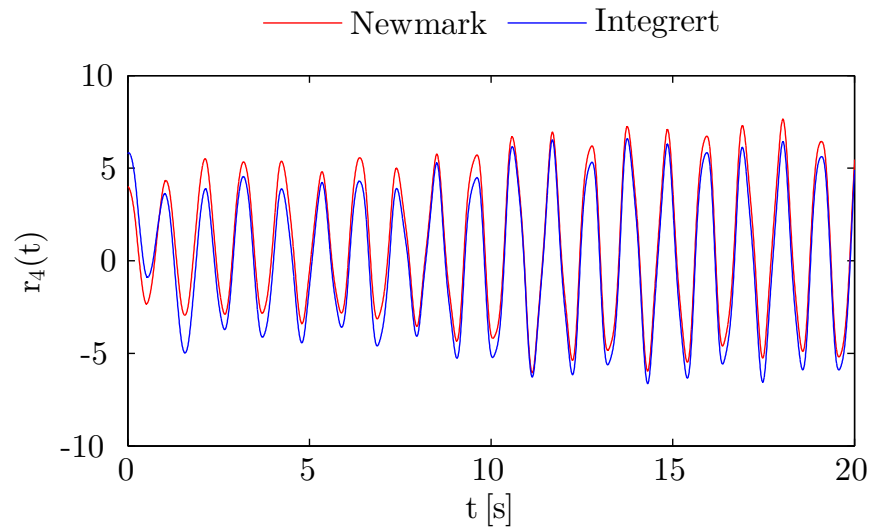
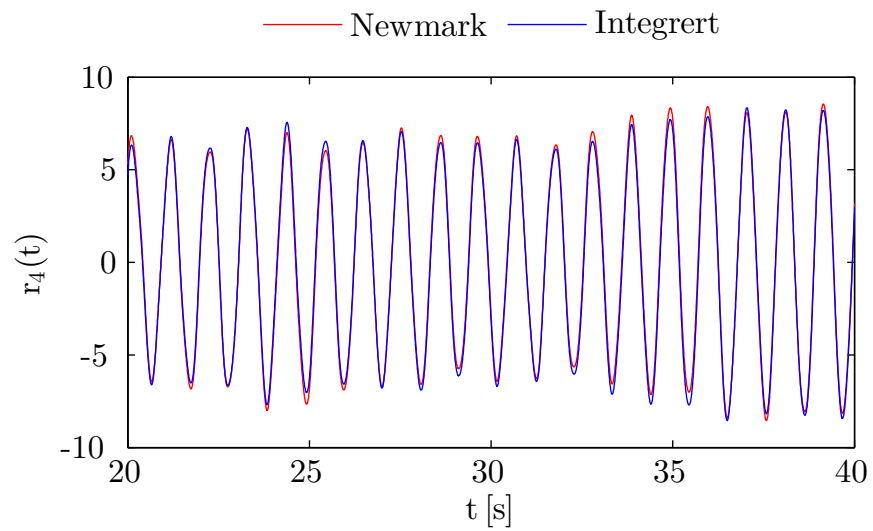


Figur 3.11: Integrert hastighet

Figur 3.12 illustrerer integrert forflytning etter at akselerasjonen er filtrert opp til  $\omega_{af} = 2.6 \text{ rad/s}$ . Forflytningen har som forventet en lengere transientperiode enn hastigheten. Fra 20 sekunder og utover er forflytningen tilnærmet identisk til forflytningen fra Newmark-iterasjonen.

Både den integrerte hastigheten og integrerte forflytningen er mest korrekt midt i tidsserien fordi start og slutt kan inneholde transienter. FFT-filteet ser ut til å fjerne problemet med initiale betingelser både for system med harmonisk og vindindusert lastsituasjon. Det er tydelig at lengden på tidsserien og fjerning av lavfrekvent støy øker nøyaktigheten. En lengere transientperiode til forflytningen er forståelig ettersom det er utført en ekstra integrasjon, og muligheten for en gal vekting av lavfrekvente komponenter øker.



(a) Del 1,  $t \in [0, 20]s$ (b) Del 2,  $t \in [20, 40]s$ 

Figur 3.12: Integrert forskyvning

## 3.6 Data fra Hardangerbrua

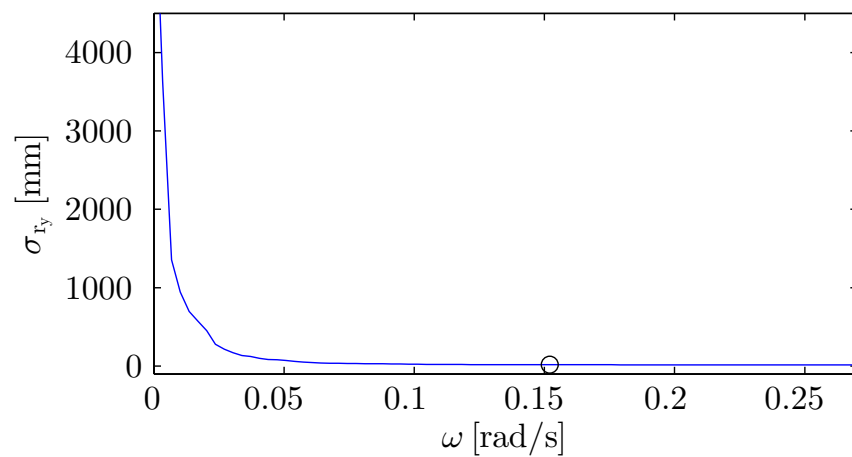
Analysen er til nå gjennomført på et enkelt system med kjente initialbetingelser og ulik lastsituasjon. Undersøkelsen har bestått i å kartlegge hvordan standardavviket, startverdier og spektraltetthet har blitt påvirket av valgt avkuttingsfrekvens. Observasjoner som er gjort i de to øvre delkapittelene danner grunnlaget for valg av avkuttingsfrekvens.

Det er ønskelig å fjerne minst mulig informasjon fra akselerasjonsmålingene. Tidsseriene har en lengde på 31 minutter, som gir en tilstrekkelig høy oppløsning i FFT.

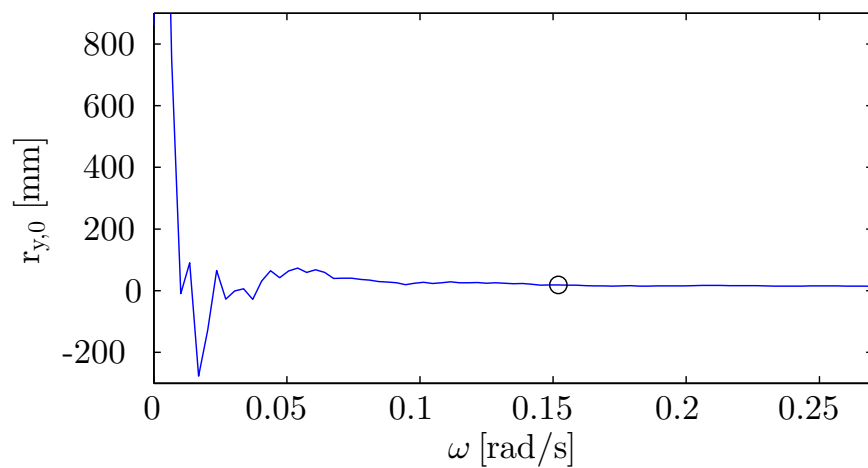
Det er valgt å fokusere på en node langs brubanen i horisontalretningen. Første svingemode til Hardangerbrua inntreffer på  $0.32 \text{ rad/s}$  og representerer nedre frekvensgrense. Figur 3.13a og 3.13b viser henholdsvis hvordan standardavviket til forflytningen og startforflytningen utvikler seg med økende avkuttingsfrekvens. Begge figurene antyder at det eksisterer et intervall med lav sensitivitet. Sirkelen indikerer den valgte avkuttingsfrekvensen.

Sensitiviteten til spektraltetthetene blir derfor avgjørende for valg av avkuttingsfrekvens. Figur 3.14 viser hvordan spektraltettheten til forflytning,  $S_r(\omega)$ , endres med valg av avkuttingsfrekvens. For og ikke miste lavfrekvent informasjon endte  $\omega_{af}$  på  $0.15 \text{ rad/s}$ . For denne avkuttingsfrekvensen er dominerende lave frekvenser utelatt og feilkilden til drift og initialbetingelser i forflytningen minimert.

Når de lave frekvensene som forsterkes gjennom integrasjonen fjernes, kommer den virkelige forflytningen frem. Figur 3.15 illustrerer hvordan forskyvningen påvirkes av filtreringen. Resultatet etter en filtrering opp til  $\omega_{af} = 0.15 \text{ rad/s}$  viser en forflytning som svinger om en likevektsakse på null millimeter. Valg av avkuttingsfrekvens samsvarer med tidligere arbeid som foreslår at et godt estimat på forflytningen oppstår når avkuttingsfrekvensen settes til  $\omega_{af} = \frac{\omega_1}{2}$ .

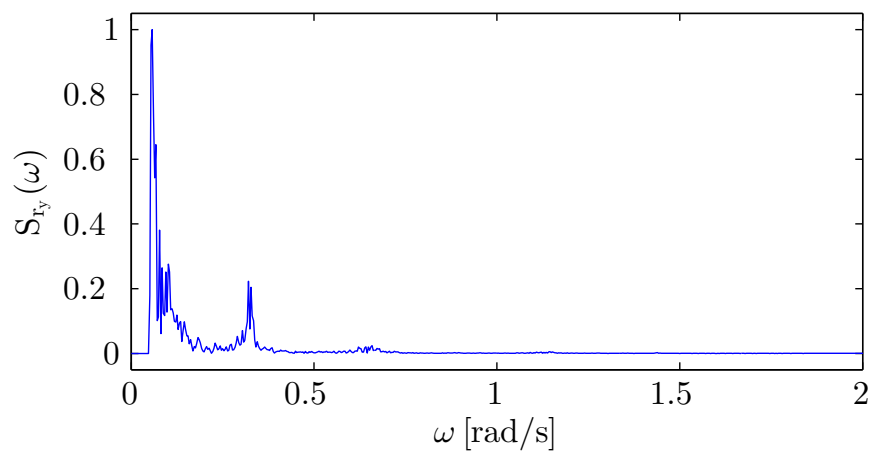
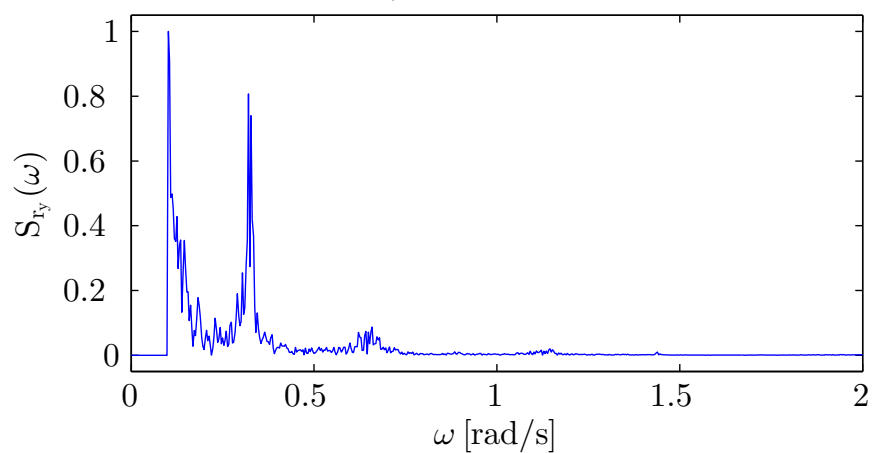
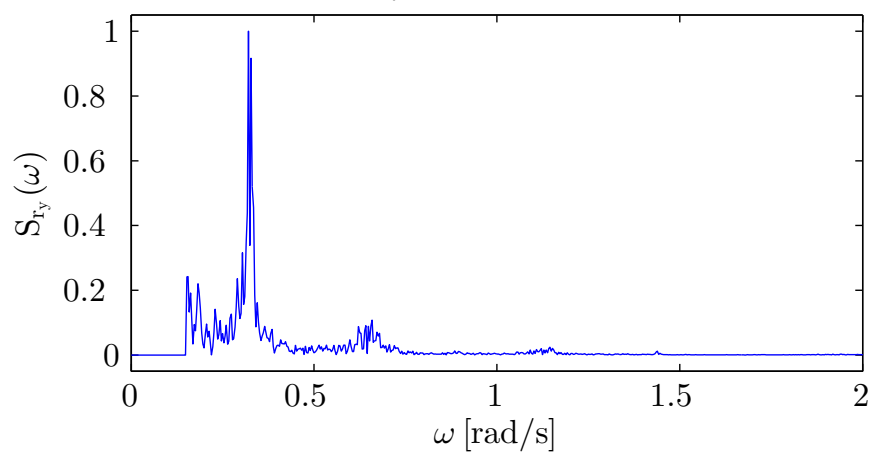


(a) Endring i standardavvik

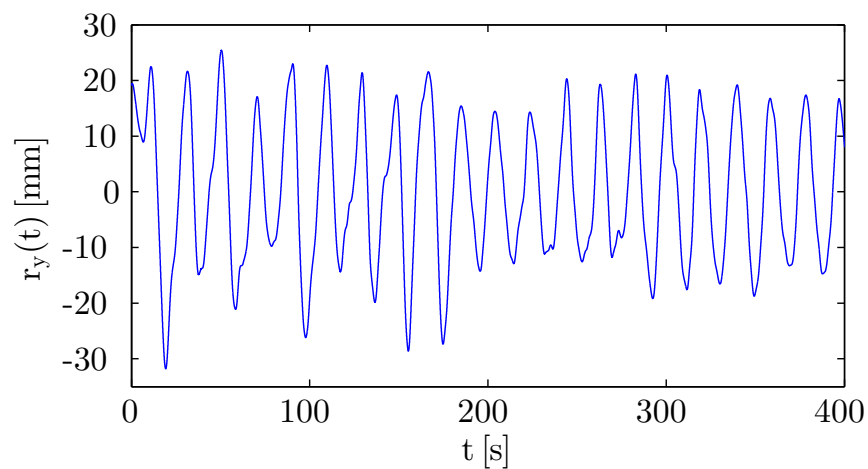
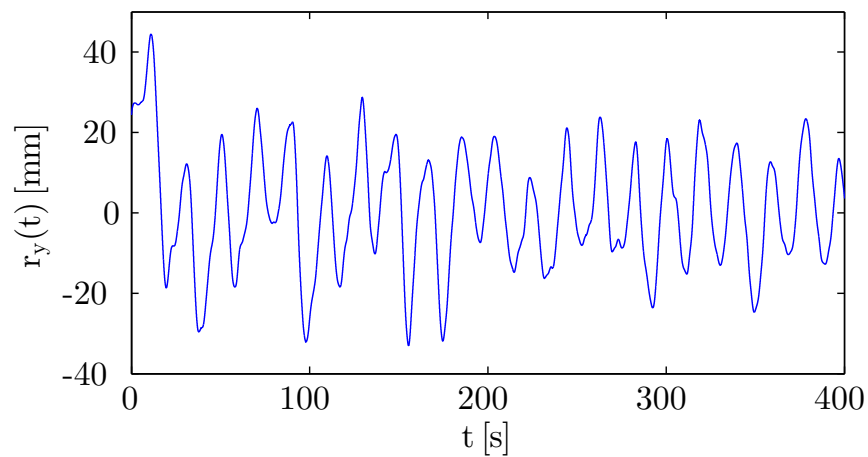
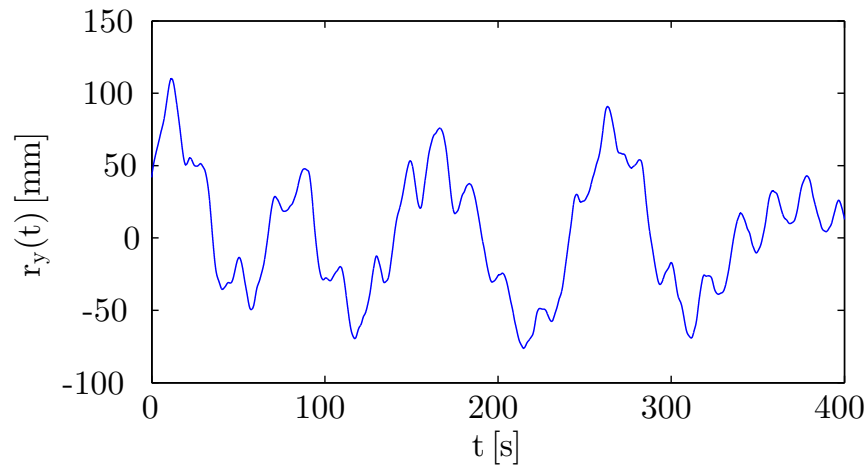


(b) Endring i initialforflytning

Figur 3.13: Forskyvning som funksjon av avkuttingsfrekvens

(a)  $\omega_{af} = 0.05$  rad/s(b)  $\omega_{af} = 0.10$  rad/s(c)  $\omega_{af} = 0.15$  rad/s

Figur 3.14: Normalisert forflytningsspektraltetthet for ulike avkuttingsfrekvenser



Figur 3.15: Forflytning for ulike avkuttingsfrekvenser



# Kapittel 4

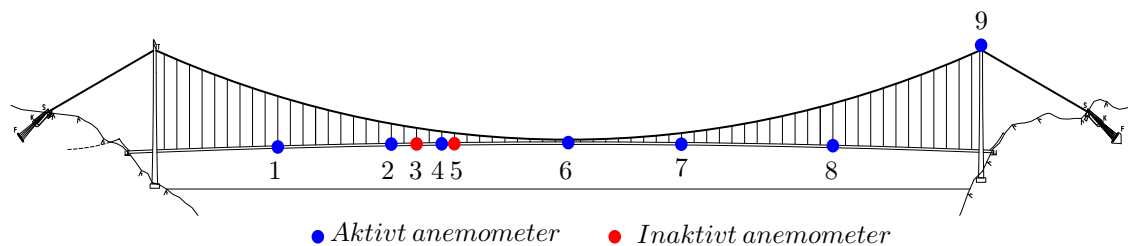
## Signalprosessering

Hardangerbrua har blitt instrumentert med akselerometer og anemometer som måler endringer i vindhastighet, vindretning og akselerasjon over tid. Lengden på målingene er varierende, men det er valgt å fokusere på målinger med en varighet på 30 minutter.

### 4.1 Instrumentplassering

#### 4.1.1 Anemometer

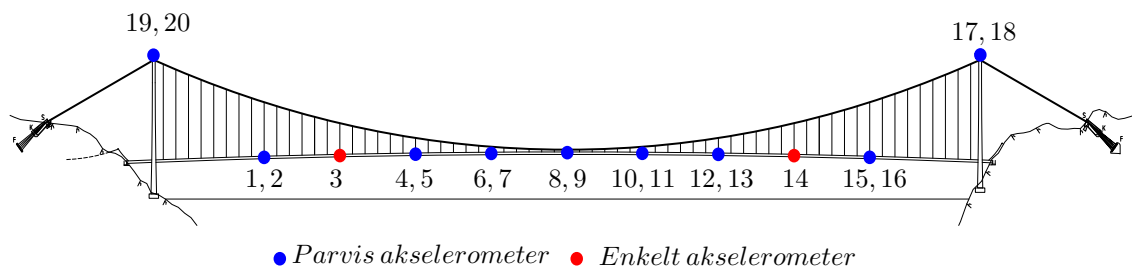
Av ni monterte anemometer er det kun syv som gir ut målinger. Plasseringene er vist i figur 4.1. Anemometerene digitaliserer vinden i form av en horisontal og vertikal komponent i hovedvindretningen.



Figur 4.1: Anemometerplassering langs brubanen til Hardangerbrua

### 4.1.2 Akselerometer

Hardangerbrua er instrumentert med 20 akselerometer, hvor 16 er plassert langs brubanen og de fire resterende er plassert parvis i tårnenes topprigel. Akselerometerene langs brubanen er montert parvis i ni snitt med unntak av andre og syvende snitt som kun har et enkelt akselerometer montert. I snittene med ett målepunkt er akselerometerene satt på hver side av brubredden for å kunne gi ut mest mulig informasjon svingningen til brubanen. Akselerometerenes plassering er illustrert i figur 4.2.



Figur 4.2: Akselerometerplassering langs brubanen til Hardangerbrua

## 4.2 Signalfiltrering og sortering

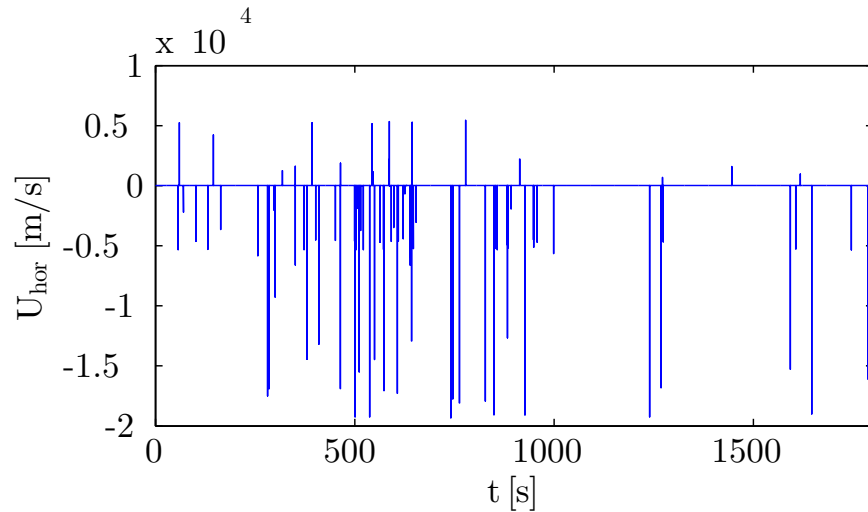
Den totale datamengden som er innhentet fra målinger er omfattende. Før denne datamengden kunne prosesseres måtte den filtreres og sorteres. Utgangspunktet for sortering var en tredeling av de halvtimes lange tidsseriene. Baktanken var en effektiv grovsortering som kunne kjøres på en stor mengde målinger. Statistiske egenskaper til hver av de ti minutter lange seksjonene ble beregnet slik at tidsserier som inneholdt seksjoner med manglende stasjonære og homogene forhold filtreres bort. Totalt ble 593 tidsserier sortert.

### 4.2.1 Vindhastighet

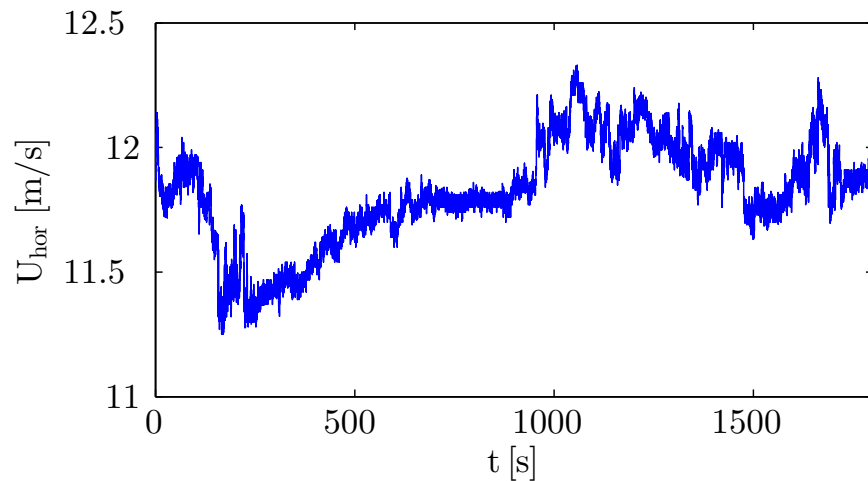
Enkelte tidsserier inneholdt støy i anemometerenes utdata. Målingene fra anemometer nummer tre skilte seg ut ved at det inneholdt av svært mange defekte målepunkt. Problemet ble løst ved å nedsample målingene til  $20\text{ Hz}$ . Dette ble gjort ved å dele målingen i intervaller på ti



punkter, der verdier over en terskel på 40  $m/s$  ble forkastet før de resterende verdiene ble midlet til en verdi. Figur 4.3a viser en ubehandlet måling fra anemometer nummer 6 som tilsynelatende ikke gir mening. Nedsamplingen gjør at vindens struktur kommer frem slik at målingen kan brukes i analyser. Nedsamplingen av en korrumpert måling er fremstilt i figur 4.3b. Middelvind, turbulensintensitet og skjevhet er brukt til å indikere om en seksjon inneholder stasjonære forhold.



(a) Ukorrigert vindhastighet



(b) Korrigert vindhastighet

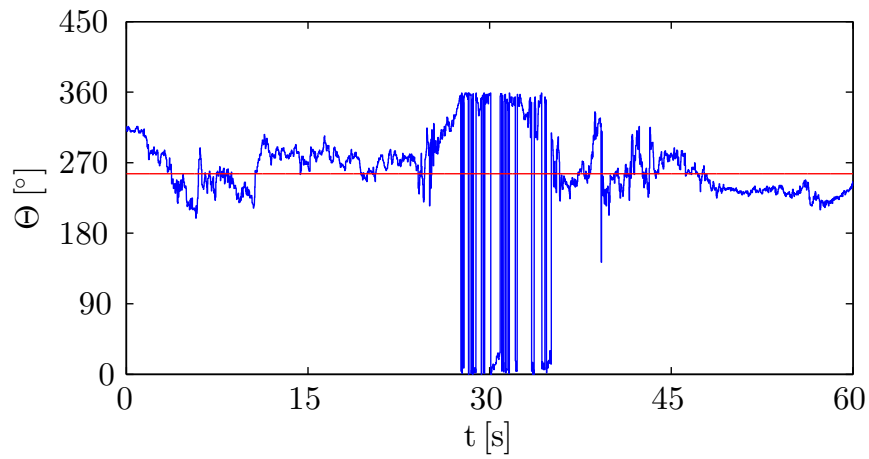
Figur 4.3: Korrigering av vindhastighet fra anemometer nummer 6

### 4.2.2 Vindretning

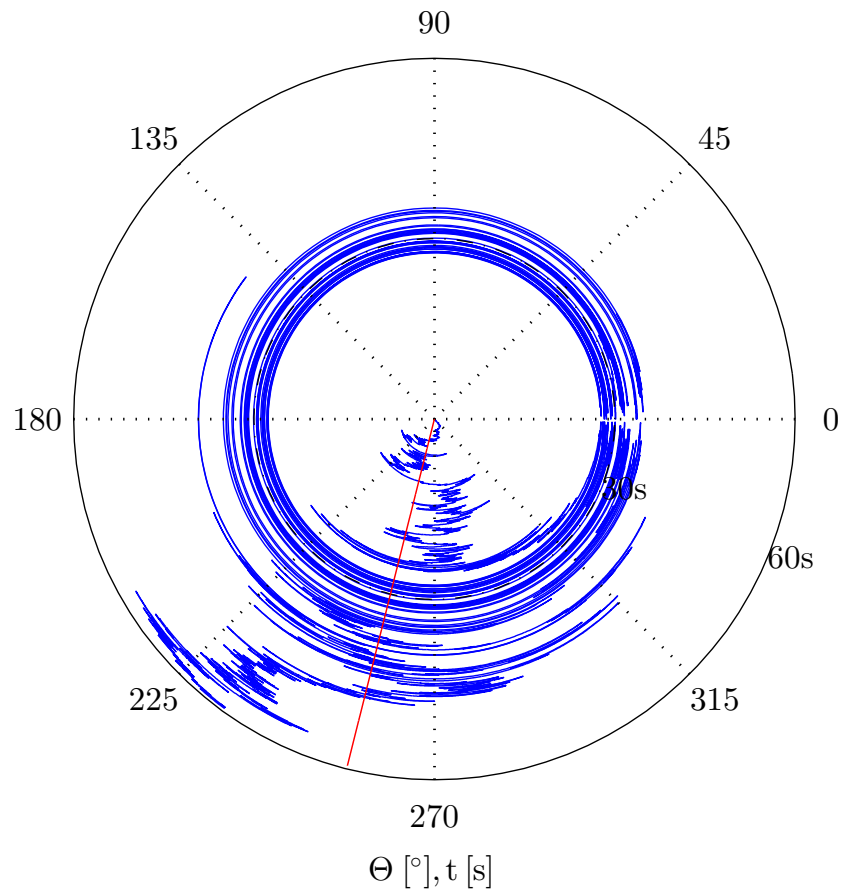
Anemometerene oppgir vindretningen i grader mellom 0 og 360. Når vinden beveger seg over enten  $0^\circ$  eller  $360^\circ$  opptrer det som et sprang i vindretningen som ser ut som om vinden foretar én hel rotasjon. Den falske rotasjonen fører til at den gjennomsnittlige vindretningen til seksjonen blir galt representert.

Figur 4.4 viser en ubehandlet måling av vindretningen direkte fra anemometeret. Spranget forstyrrer målingenes middelvindretning. En korleksjon av anemometerverdiene er vist i figur 4.5. Her er anemometersignalet korrigert slik at korteste endring i vindretning,  $\Delta^0$ , benyttes. Som følge av å velge korteste vei, kan retningen gis verdier utenfor det opprinnelige intervallet på 0 til 360 grader. Dersom gjennomsnittet ender over  $360^\circ$ , trekkes antall rotasjoner fra verdien slik at en ender i innenfor intervallet  $0^\circ \leq \Theta \leq 360^\circ$ . Den polare visningen av endring i vindretning tydliggjør store endringer slik at tidsserier med manglende stasjonære forhold kan identifiseres og forkastes. En korrekt fremstilling av hvordan vinden forandrer seg med tiden er avgjørende når tidsserier skal evalueres.

Middelvindretning, standardavvik og skjevhet er vurdert for å ta stilling til om en seksjon innehar stasjonære forhold.

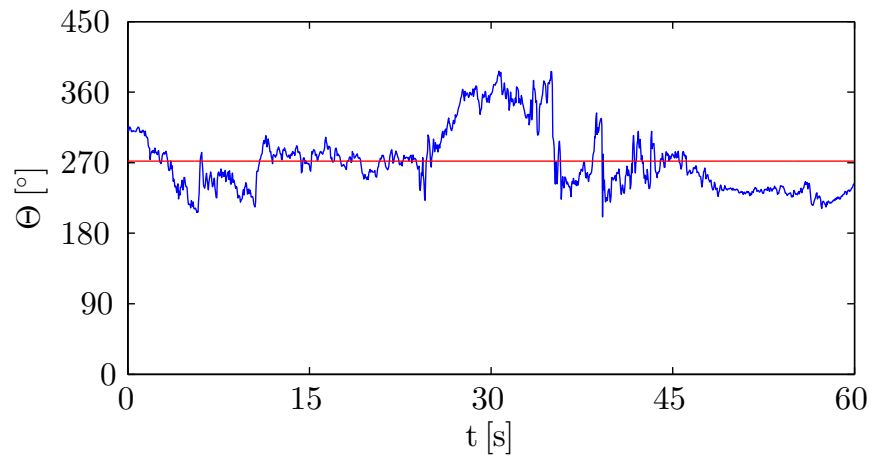


(a) Kartesiskvisning

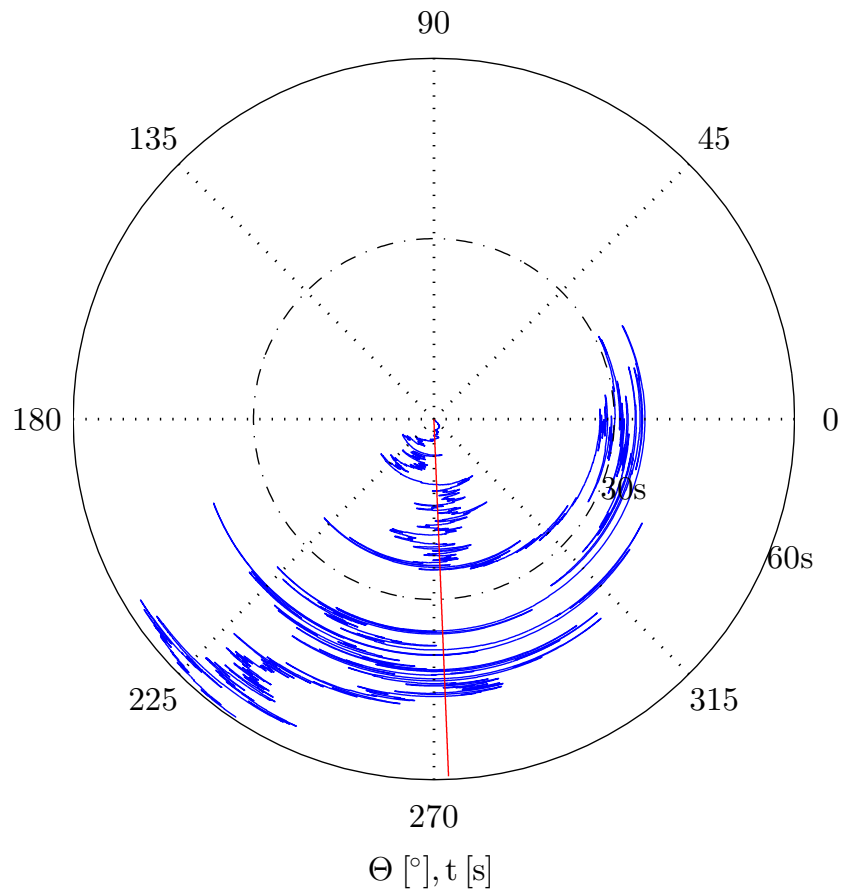


(b) Polarvisning

Figur 4.4: Ukorrigert vindretning



(a) Kartesiskvisning



(b) Polarvisning

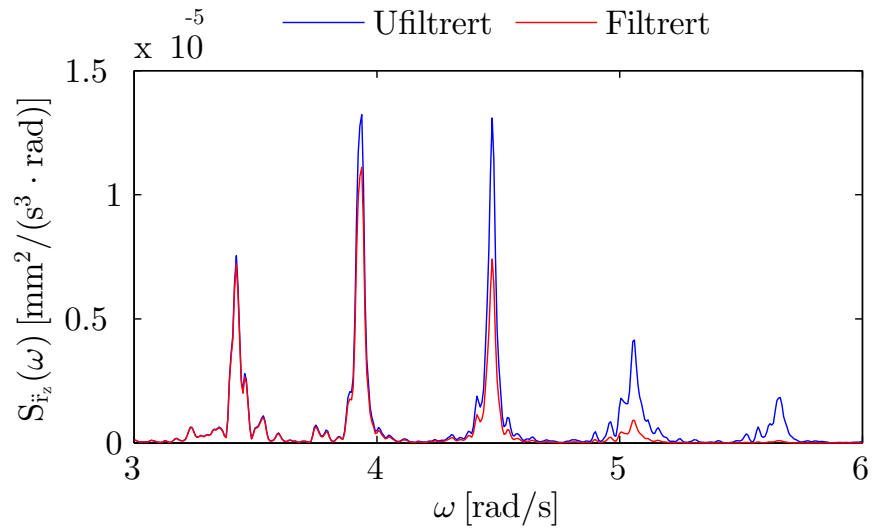
Figur 4.5: Korrigert vindretning

### 4.2.3 Akselerasjon

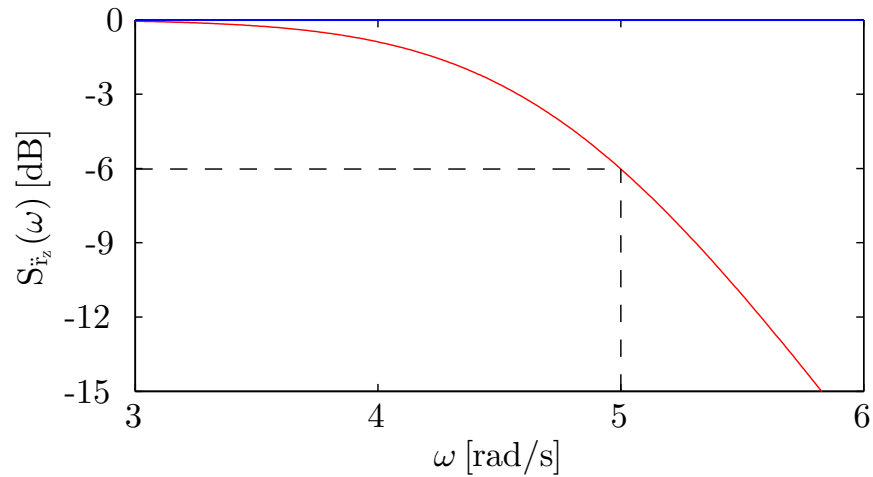
Utdataen til akselerometerene oppgis i  $g$ , der  $1g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ . I videre beregninger transformeres signalet til  $\text{mm}^2/\text{s}$ . Målingenes samplingsfrekvens er  $200 \text{ Hz}$  noe som gir en Nyquistfrekvens som ligger langt over egenfrekvenser av betydning for respons. Høyfrekvent støy i akselerasjonssignalet fjernes med filtrering av et *Butterworth* lavpassfilter. Filtringen gjør det mer praktisk å tyde akselerasjonssignalene. Andre torsjonsmode for er fra den analytiske modellen til Solheim antatt å være  $3.41 \text{ rad/s}$ , høyere opptredene egenfrekvenser er antatt betydningsløse for respons. De analytiske egenfrekvens verdiene er gitt i tabell 6.1 [33].

Avkuttingsfrekvensen,  $\omega_{af}$ , valgt til  $5 \text{ rad/s}$  sammen med Butterworth filterorden  $n = 5$ . Filtringsparameterene er valgt for holde frekvenser opp til andre torsjonsmode upåvirket av filtreringen. Et utsnitt av en ufiltrert og filtrert autospektraltetthet er vist i figur 4.6a, mens figur 4.6b viser effekten av lavpassfiltreringen. Ved avkuttingsfrekvensen,  $\omega_{af}$ , reduseres spektraltetthets amplitude med  $6 \text{ dB}$ , og tilsvarer en faktor på  $\frac{1}{4}$ . Filtringseffekten kommer tydelig frem i figur 4.6a hvor de markante frekvenstoppene fra venstre mot høyre er redusert med henholdsvis  $0.2 \text{ dB}$ ,  $0.8 \text{ dB}$ ,  $2.5 \text{ dB}$ ,  $6.6 \text{ dB}$  og  $12.5 \text{ dB}$ . En reduksjon på  $0.2 \text{ dB}$  anses for å være ubetydelig og ved  $12 \text{ dB}$  er signalet i praksis nullet ut. Figur 4.7a viser et akselerasjonssignal før og etter filtrering.

Responsen beregnet ut i fra akselerasjonssignalet ved anvende FFT-filtrering fra kapittel 3 er upåvirket av lavpassfiltreringen. Integrasjonsmetoden med FFT.filter er i seg selv et lavpassfilter. Dette vil si at den målbare responsen er dominert av lave frekvenser. Figur 4.7b viser integrert respons hvor det er brukt akselerasjon med og uten Butterworth lavpassfilter. Responsen er tilnærmet identisk.

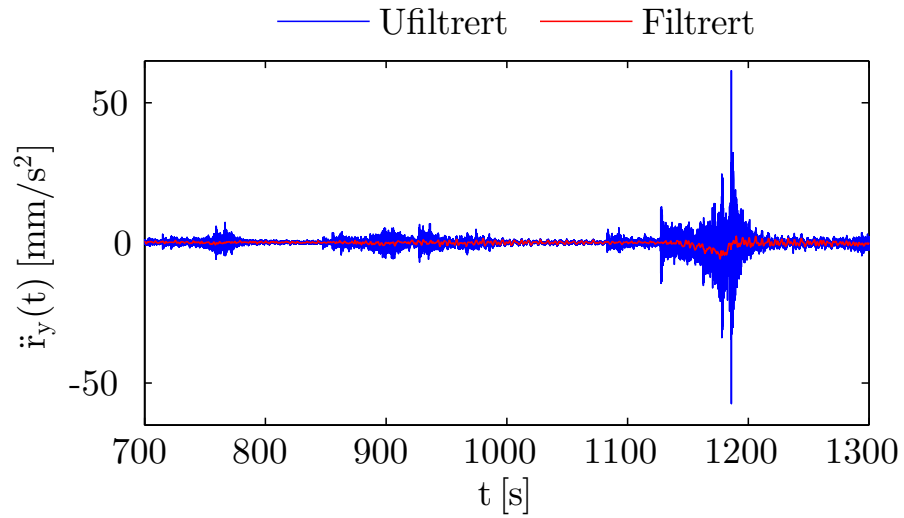


(a) Ufiltrert og filtrert akselerasjonsspektraltetthet

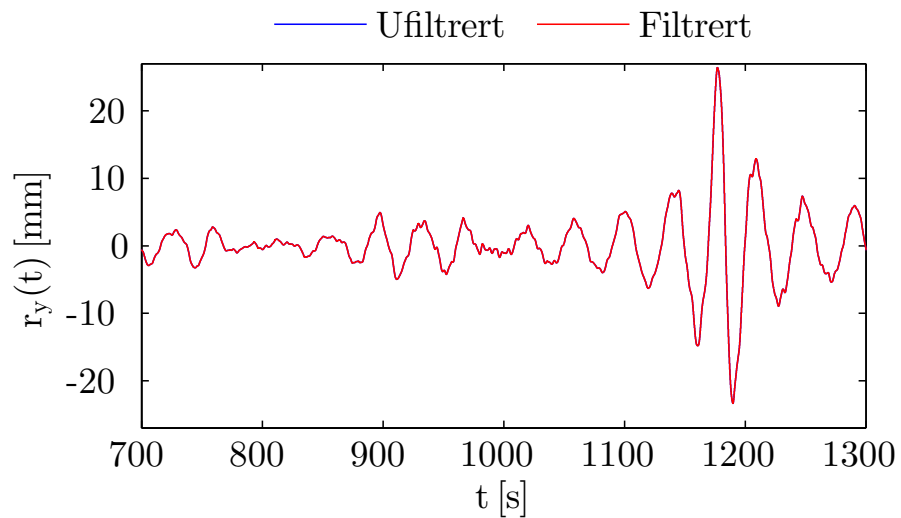


(b) Butterworth filter

Figur 4.6: Butterworth-filtrering av akselerasjon med orden  $n = 5$  og avkuttingsfrekvens  $\omega_{af} = 5 \text{ rad/s}$



(a) Akselerasjon



(b) Forflytning

Figur 4.7: Sammenligning av filtrert- og ufiltrertsignal

## 4.3 Egenfrekvenser og svingeform

Autospektraltetthetene til samtlige frihetsgrader er bereget gjennom ligning (2.20).

Oppløsningen til FFT er gitt ved [34]:

$$\Delta\omega = \frac{f_s}{N} \quad (4.1)$$

der  $f_s$  er samplingsfrekvensen og  $N$  er antall punkt i tidsserien. Målingene er utført for perioder på 31 minutter og en samplingsfrekvensen på 200 Hz, dette gir en spektraloppløsning,  $\Delta\omega$ , tilnærmet lik  $3.5 \cdot 10^{-3}$  rad/s.  $\Delta\omega$  er en viktig faktor som bestemmer hvor nøyaktig egenfrekvensene kan bestemmes.

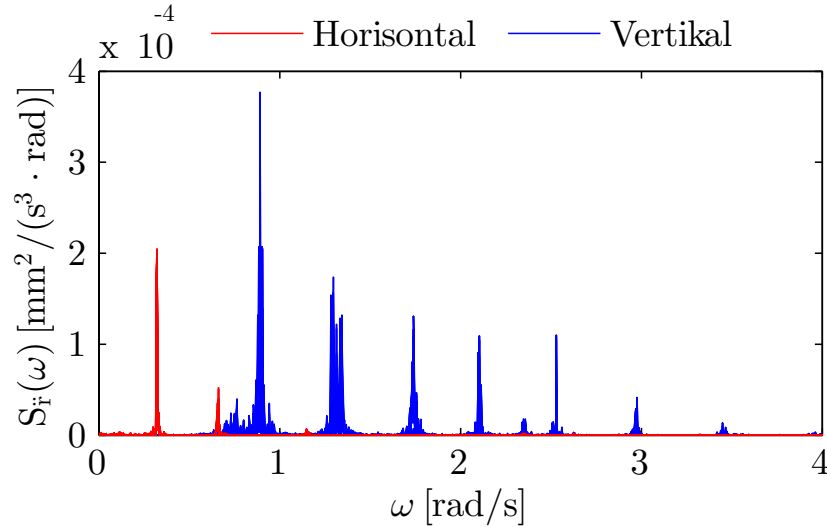
Høye vindhastigheter resulterer i et aeroelastisk stivhets- og dempningsbidrag som kan påvirke konstruksjonens egenfrekvenser. Ved identifisering av egenfrekvenser vil disse endringene kunne oppfattes som støy. For å begrense aeroelastiske variasjoner er det valgt å benytte tidsserier som inneholder moderate vindhastigheter i egenfrekvensanalysen.

### 4.3.1 Metode

Hardangerbruas egenfrekvenser er funnet ved hjelp av *topp-plukking*, en kjent metode for å identifisere egenfrekvenser. Metoden baserer seg på at frekvensinnholdet i et akselerasjonssignal er preget av systemets egenfrekvenser noe som resulterer i markante utslag i akselerasjonsspektraltettheten hvor det eksisterer egenfrekvenser. Fremgangsmåten til topp-plukking er avhengig av en tett diskretisering som klarer å fange opp topper. Det er likevel viktig å understreke at en markant topp i autospektraltettheten ikke er ekvivalent med en egenfrekvens. Videre er akselerometerets plassering i forhold til opptredene svingeform av betydning for utslaget i spektraltettheten. Dersom et akselerometer befinner seg nært et infleksjonspunkt vil informasjonen som kan trekkes ut være minimal. Et eksempel på en unormalisert autospetraltetthet er illustrert i figur 4.8.

I første omgang ble spektraltetthetene til x-, y- og z-retning for alle frihetsgradene plottet





Figur 4.8: Unormalisert autospektraltetthet fra en tidsserie på 31 minutter.

over hverandre og det viste seg at x-retningen ga mye støy. Siden x-retningen går parallelt med broaksen er den mindre interessant i forhold til vindinduserte vibrasjoner, det ble derfor valgt å utelatte denne retningen fra spektralanalysen.

Når alle frihetsgradene plottes over hverandre i samme plott, er det vanskelig å se om en spektral topp utgjør en horisontal-, vertikal- eller torsjonsmode. Et effektivt hjelpemiddel er å skille spektraltetthetene for horisontal- og vertikalretning med forskjellig farge. Tanken bak baseres på at egenfrekvenser per definisjon er en ukoblet harmonisk svingeform slik at en egenfrekvens vil vises i spektraltettheten ved at det kun er utslag i en retning.

Spektraltetthetene er bygget opp av fourieramplituder, slik at svingeformen til en gitt frekvens vises i den unormaliserte spektraltettheten. Figur 4.9a viser et utsnitt fra spektraltettheten til akselerasjon. Det er tydelig at frekvensområdet rundt  $0.32 \text{ rad/s}$  domineres av vibrasjoner i horisontalretning. Det minimale utslaget i vertikalretning indikerer at svingeformen for  $0.32 \text{ rad/s}$  er ukoblet slik at frekvensen høyst sannsynlig en egenfrekvens. Alle de horisontale frihetsgradene har utslag i  $S_{\ddot{x}}$  som forteller at svingeformen antageligvis ikke inneholder infleksjonspunkt.

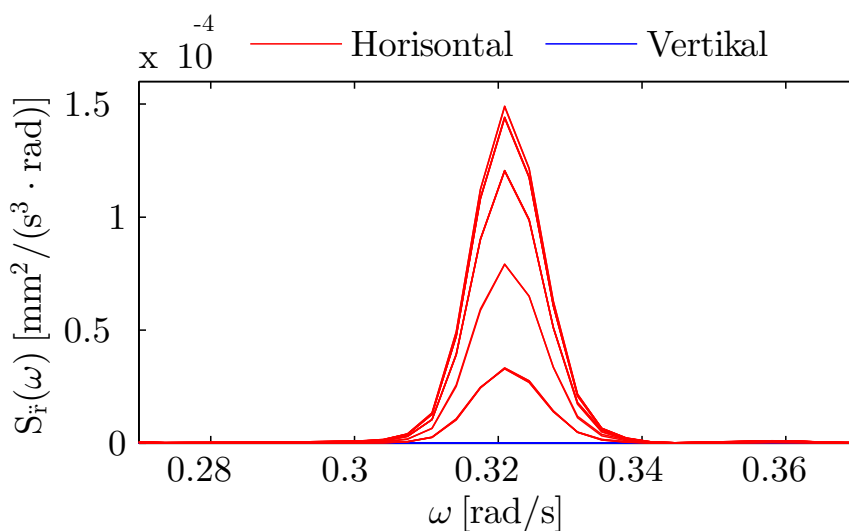
Samme argumentasjon gjelder for identifisering av vertikale egenmoder. Frekvensintervallet i figur 4.9b inneholder tydelig en frekvens som er ukoblet og dominert av vertikale vibrasjoner. Den vertikale amplitudene trappes ned helt mot null, noe som indikerer at svingeformen

inneholder et infleksjonspunkt.

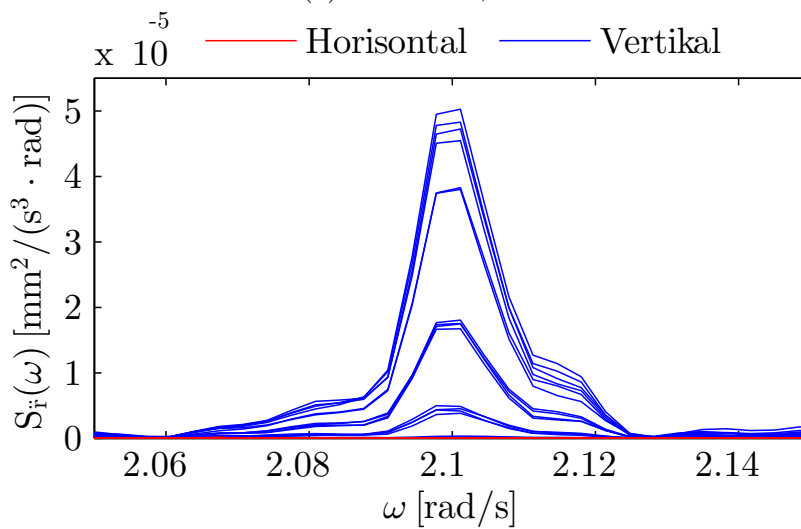
Torsjonsmoder har hovedsaklig utslag i vertikalretning men skiller seg ut ved at de også vil ha et lite bidrag i horisontalretning. Det er viktig å understreke at dette ikke er en kobling men et resultat av rotasjon. Spektraltettheten til 1. symmetrisk torsjon er illustrert i figur 4.9c.

De fleste målinger gir spektraltettheter som er preget av mer støy enn eksemplene i figur 4.9. Forstyrrelser i målingene kan spre variansen til en frekvens over flere toppe slik at det kan være vanskelig å bestemme hvilke av toppene som representerer en egenfrekvens. For å identifisere riktig frekvenstopp er modeformen til alle egenfrekvenskandidater plottet i 3D ved å kombinere informasjon om amplitude og fase til både y- og z-retning for totalt 32 frihetsgrader. Beregningen av modeform og fasevinkel er omtalt i kapittel 2 og gitt av ligning (2.31) og (2.23).

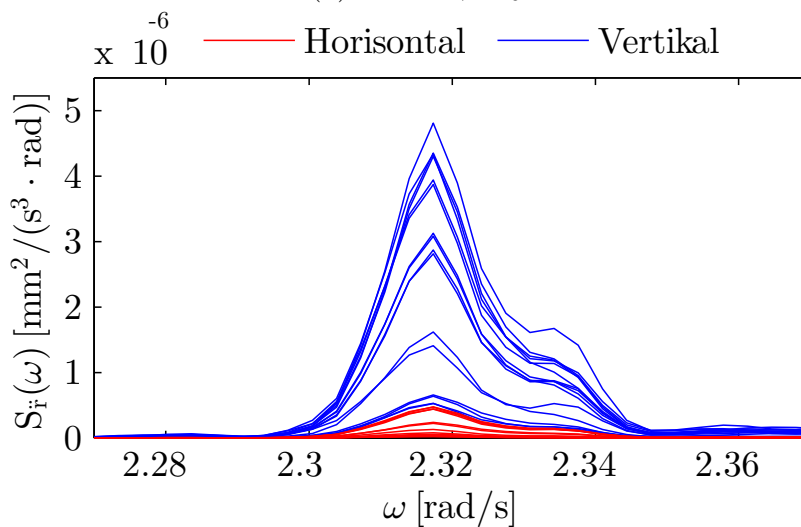
En videre undersøkelse kan i midlertid være nødvendig for enkelte egenfrekvenser som ligger uvanlig tett slik at frekvensene er vanskelig å differensiere i en spektraltetthetsanalyse. For å skille ut riktig egenfrekvenstopp ved flere distinkte nærliggende frekvenstopper, kan informasjonen om fasevinkelen og koherens mellom strategisk utvalgte målepunkt benyttes. Egenfrekvenser kjennetegnes ved at målepunktene enten svinger i fase eller motfase. Når fasevinkelen mellom målepunktene avviker fra null radianer eller absoluttverdien til  $\pi$  radianer, har en sannsynligvis ikke med en egenfrekvens å gjøre. I tillegg kan koherensfunksjonen i ligning (2.25) benyttes for å se om det er en lineær samtidighet mellom utvalgte målepunkt.



(a) Horizontal,  $\Phi_1$



(b) Vertikal,  $\Phi_{10}$



(c) Torsjon,  $\Phi_{11}$

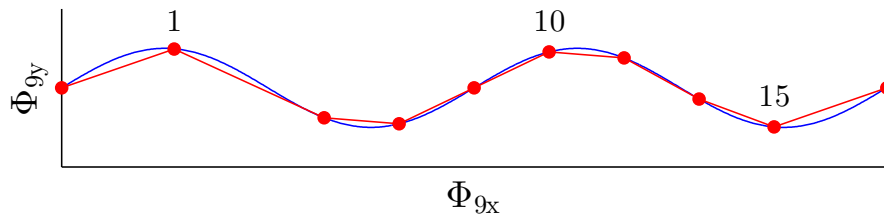
Figur 4.9: Identifisering av egenfrekvenser

## Verifisering av horisontalmoder

Den største utfordringen under egenfrekvensanalysen var å identifisere 2. asymmetrisk horisontal mode,  $\Phi_9$ , og 3. symmetrisk horisontal mode,  $\Phi_{13}$ . Fra autospektraltetthetene var det ikke innlysende hvilken topp som gav den beste beskrivelsen av teoretisk modeformen. I figur 4.10 og 4.12 er den teoretiske svingeformen og målt svingeform fra østsiden av Hardangerbrua sammenlignet. Som en ekstra verifikasjon ble informasjon om fasevinkel og koherens verdier til strategisk utvalgte punkt undersøkt.

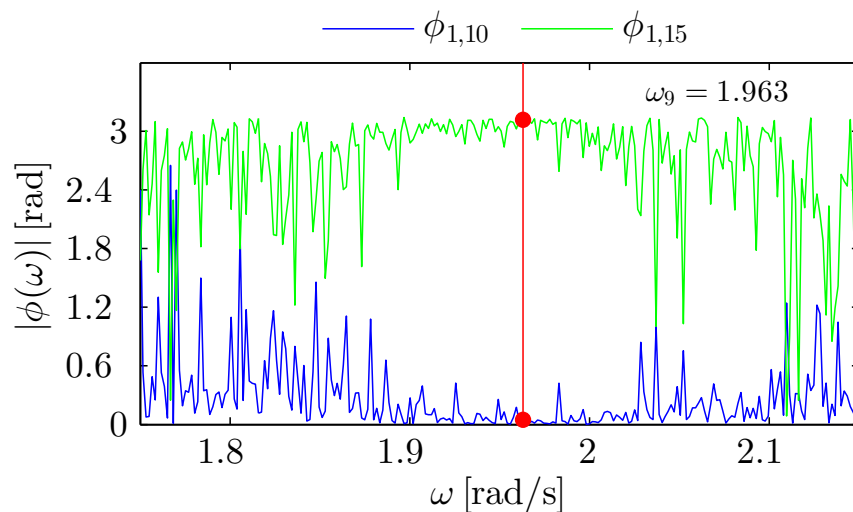
### Horisontal 2. asymmetrisk

Mode nummer  $\Phi_9$  har totalt tre infleksjonspunkt jevnt fordelt langs midtspennet. Ved studering av samtidighet og fase mellom to målepunkt er det viktig å unngå infleksjonspunktet fordi disse punktene vil gi et svakt estimat på både koherens og fasevinkel.

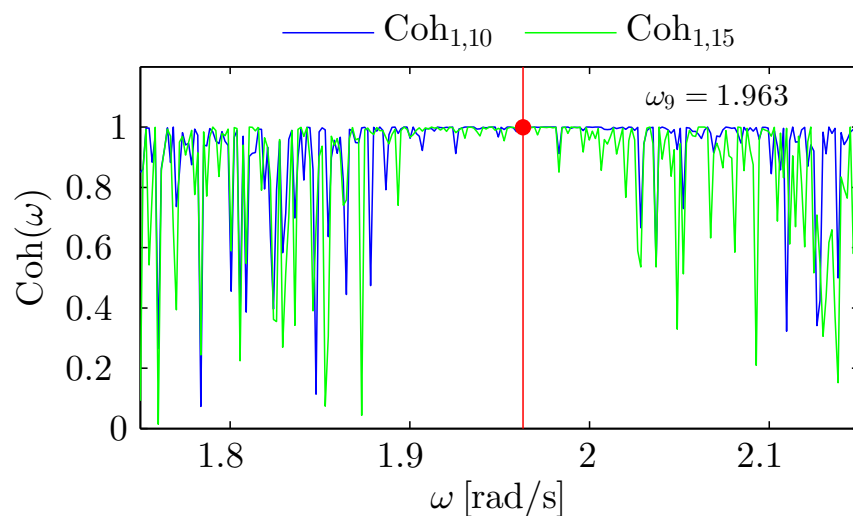


Figur 4.10: Sammenligning av teoretisk og diskretisert modeform,  $\Phi_9$

Både egenmode  $\Phi_9$  og egenmode  $\Phi_{13}$  har målepunkt som svinger i fase og i motfase. For den horisontale 2. asymmetriske egenmoden er målepunkt 1 og 10 toppunkt i svingeformen.  $\phi_{1,10}$  skal for egenfrekvensen til  $\Phi_9$  angi null faseforskyvning. Motsatt tilfelle gjelder for en sammenligning av målepunkt 1 og 15 der  $\phi_{1,15}$  skal være så nær  $\pi$  som mulig. Figur 4.11b illustrerer faseforskyvingen til målepunktene. Formen som en representasjon av to målepunkt som svinger i fase plottet mot to målepunkt som svinger i motfase er karakteristisk. Rundt egenfrekvensen åpner kurvene til  $\phi_{1,10}$  og  $\phi_{1,15}$  seg og antyder at frekvensområdet inneholder en egenfrekvens. Koherensen i figur 4.11b viser en høy koherens på nær én. I tabell 4.1 inneholder verdiene til  $Coh_{1,10}$ ,  $\phi_{1,10}$ ,  $Coh_{1,15}$  og  $\phi_{1,15}$ . Fasevinkelen til  $\phi_{1,10}$  gir en vinkel som avviker omtrentlig 1.5 % fra å svinge i fase, og  $\phi_{1,15}$  er 0.78 % fra å svinge i motfase.



(a) Koherens mellom akselerometer 1 og 8.



(b) Fasevinkel mellom akselerometer 1 og .8.

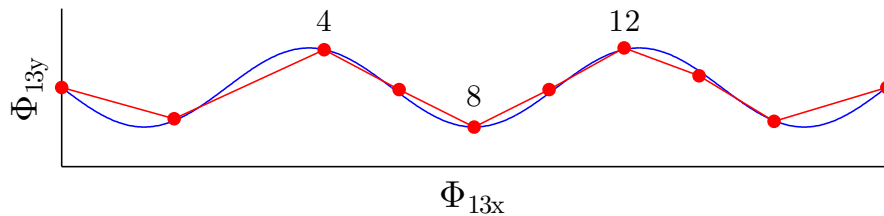
 Figur 4.11: Koherens og fasevinkel for svingemode,  $\Phi_9$ 

Tabell 4.1: Koherns og fasevinkel fra figur 4.11

$Coh_{1,10}$	$\phi_{1,10}$	$Coh_{1,15}$	$\phi_{1,15}$
0.9988	0.04857	0.9991	3.117

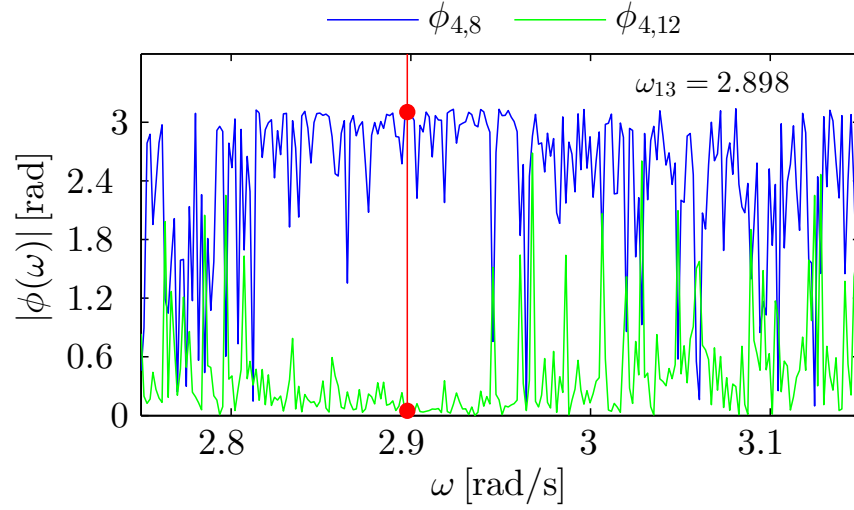
### Horisontal 3. symmetrisk

Den samme fremgangsmåten som ble brukt til å verifisere horisontal 2. asymmetrisk modeform benyttes til å kontrollere horisontal 3. symmetrisk egenmode. Svingeformen gjør at målepunkt 4 og 12 nå representerer to toppunkt i fase, mens midtpunktet, med målepunkt 8, angir et bunnpunkt som svinger i motfase til toppunktene. I figur 4.13a er  $\phi_{4,8}$  og  $\phi_{4,12}$  plottet sammen. Rommet som åpner seg mellom  $2.82 < \omega < 2.95$  er særegent for en egenfrekvens. Fasevinkelen til  $\phi_{4,8}$  og  $\phi_{4,12}$  avviker henholdsvis 1.2 % fra å svinge i motfase, og er 1.6 % fra å svinge i fase. Koherensen til både  $Coh_{4,8}$  og  $Coh_{4,12}$  er tilnærmet lik én.

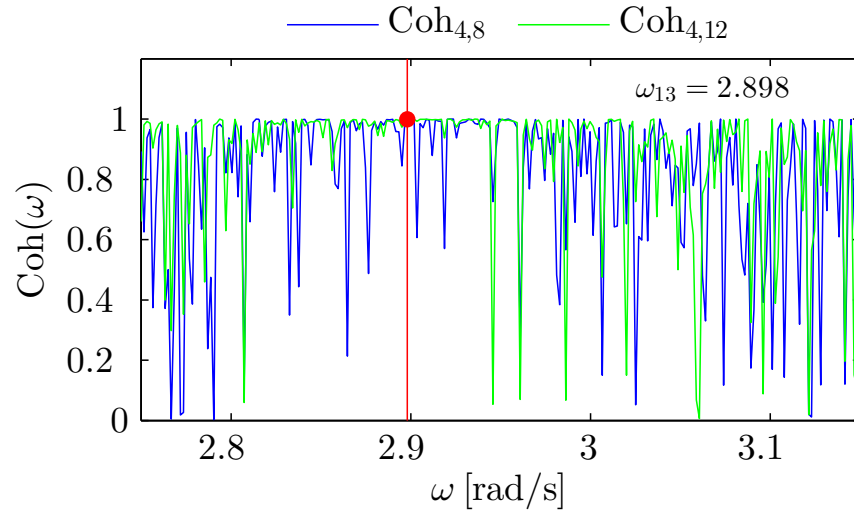


Figur 4.12: Sammenligning av teoretisk og diskretisert modeform,  $\Phi_{13}$

Figur 4.11 og 4.13 er laget med bakgrunn i to etterfølgende tidsserier,  $S_1$  og  $S_2$ , som er slått sammen for å øke spektraloppløsningen. Fullt navn på de brukte tidsseriene er gitt i tabell A.1. Høyere oppløsning er brukt for å tydeliggjøre toppene i spektraltettheten og endringer i fasevinkel og koherens. Som en sammenligning ble Welch testet med samme data. Konsekvensen av at Welch glatter ut toppene i spektraltettheten var også videreført i fasevinkel- og koherensplottet, og gjorde identifiseringen mindre gunstig. Derimot var en sammenligning mellom spektraltettheten til Welch og FFT nyttig for å fastsette korrekt spektral topp i FFT.



(a) Koherens mellom akselerometer 6 og 10.



(b) Fasevinkel mellom akselerometer 6 og 10.

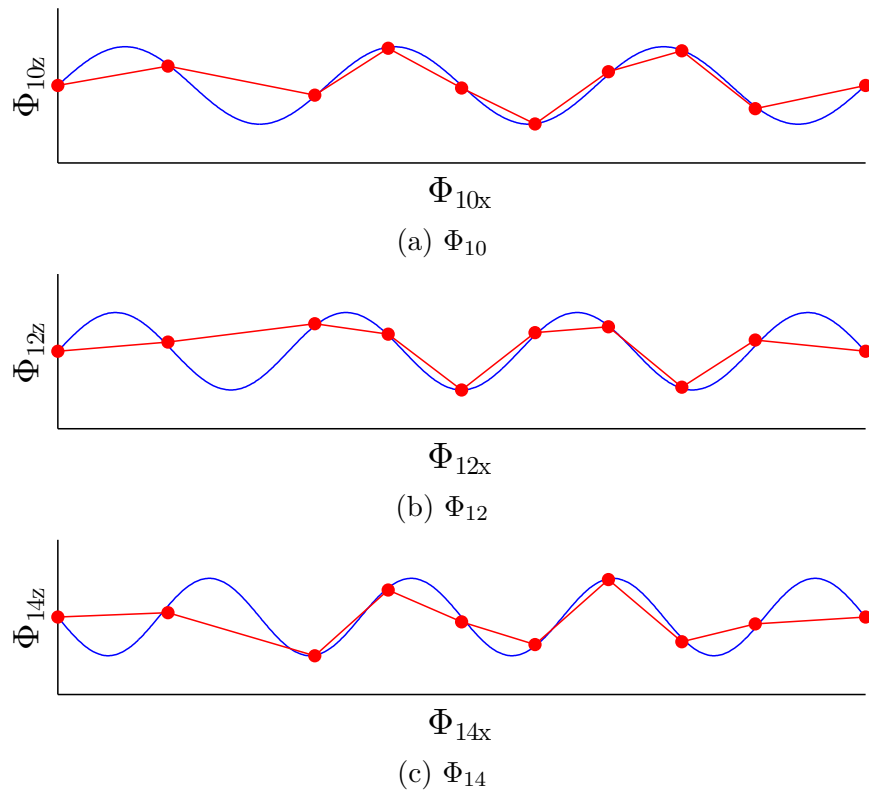
Figur 4.13: Koherens og fasevinkel for svingemode,  $\Phi_{13}$

Tabell 4.2: Koherns og fasevinkel fra figur 4.13

$Coh_{4,8}$	$\phi_{4,8}$	$Coh_{4,12}$	$\phi_{4,12}$
0.9988	3.105	0.9989	0.04891

### Verifisering av vertikalmøder

I figur 4.14a, 4.14b og 4.14c er de teoretiske modeformene til henholdsvis vertikal 3. asymmetrisk, vertikal 4. symmetrisk og vertikal 4. asymmetrisk plottet sammen med de diskretiserte modeformene fra målinger. De røde prikkene viser plasseringen til akselerometer plassering langs brubanen sammen med målt amplitude fra en utvalgt tidsserie. Den målte svingeformen samsvarer godt med teoretisk form. Figur 4.14a har den teoretiske kurven 3 bølgelengder, figur 4.14b viser 3.5 bølgelengder og figur 4.14c tilsvarende 4 bølgelengder.



Figur 4.14: Sammenligning av teoretisk og diskretisert modeform.

Figur 4.14a til 4.14c illustrerer modeformen til østsiden av Hardangerbrua. Samtlige av de teoretiske kurvene mangler informasjon ved andre ekstremalverdi sett fra venstre side i figurene. På vestsiden av Hardangerbrua er tilfellet motsatt. For svingeformer med flere bølgelengder enn  $\Phi_{14}$ , vil det være vanskelig å etterligne teoretiske kurver med kun åtte snitt.



## 4.4 Dempningstall

Dynamiske analyser er svært sensitive for dempningsvariasjoner. Det analytiske grunnlaget for valg av dempningstall er per i dag svakt eller ikke-eksisterende [18]. Dempningstallene fra fullskalamålinger av Hardangerbroa er kartlagt for å forbedre det analytiske grunnlaget.

### 4.4.1 Aeroelastisk dempningsbidrag

Den målte dempningen,  $\zeta$ , består både en strukturell del,  $\zeta_s$ , og en aeroelastisk del,  $\zeta_{ae}$ , gitt av ligning (4.2) [18]:

$$\zeta = \zeta_s + \zeta_{ae} \quad (4.2)$$

Ved å anta at vindhastigheten er konstant langs bruspennet kan den aeroelastiske dempningen for henholdsvis horisontal- og vertikalmøder beskrives av [35]:

$$\zeta_{ae,y} = \frac{1}{2} \frac{\rho_a H^2}{m} \bar{C}_D \frac{V}{H\omega} \quad (4.3a)$$

$$\zeta_{ae,z} = \frac{1}{4} \frac{\rho_a B^2}{m} C'_L \frac{V}{B\omega} \quad (4.3b)$$

Når konstruksjoner utsettes for høye vindhastigheter vil den aerodynamiske dempningen gi et betydelig positivt bidrag til den totale dempningen. I designberegninger er det konservativt å kun anta strukturell dempning. Dempningen bør derfor måles under vindstille forhold slik at  $\zeta \approx \zeta_s$ , og helst for ulike responsamplituder[18]. Dempningstallene er beregnet for tre ulike tidsserier med moderate vindhastigheter ( $\bar{V} = 3.6 \text{ m/s}$ ) hvor den aeroelastiske dempningen er antatt å gi et minimalt bidrag til den målte dempningen.

Parameterene for Hardangerbrua som inngår i ligning (4.3) er samlet i tabell 4.3.

Tabell 4.3: Parametere for Hardangerbrua [1] [5]

$\rho_a$	1.25 kg/m <sup>3</sup>
$H$	3.33 m
$B$	18.3 m
$m$	12823 kg/m
$\bar{C}_D$	0.864
$C'_L$	2.76

Parameterene i tabell 4.3 gir ved innsetting i ligning (4.3a) og (4.3b) uttrykkene til den aeroelastiske modaledempningen til Hardangerbrua uttrykt ved middelvindhastighet,  $V$ , og korresponderende egenfrekvens,  $\omega_n$ :

$$\zeta_{ae,n,y} = 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{V}{\omega_n} \quad (4.4a)$$

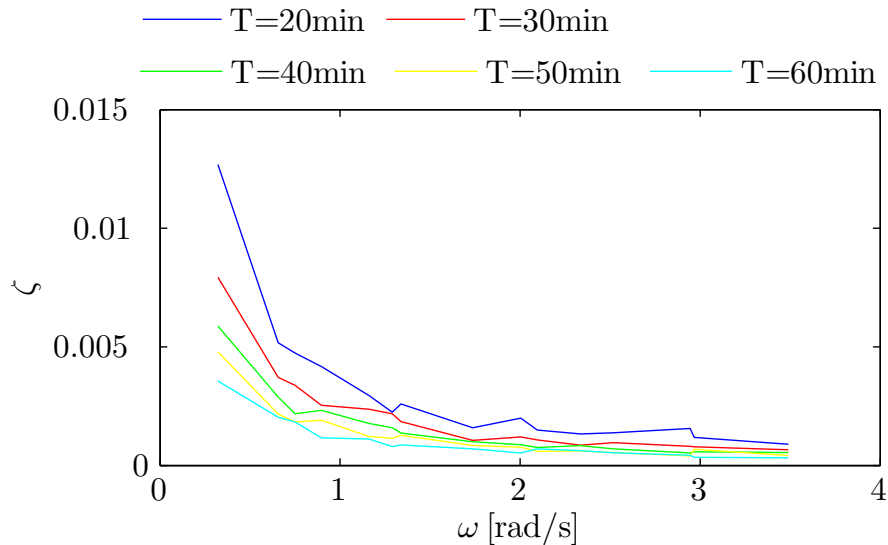
$$\zeta_{ae,n,z} = 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{V}{\omega_n} \quad (4.4b)$$

Den store forskjellen i horisontal- og vertikalretning skyldes hovedsakelig forholdet mellom tversnittets høyde og bredde. Dragkraften som virker på brukassen i horisontalretning er betydelig mindre enn dragkraften i vertikalretning.

#### 4.4.2 Metode

Dempningstallene er funnet ved å bruke metoden, *båndbredde ved halv signalstyrke*, for akselerasjonsspektraltettheter diskretisert med *FFT* og *Welchs metode* beskrevet i henholdsvis kapittel 2.3.1, 2.2.1 og 2.1.4. Spektraltettheten til akselerasjon og signalstyrken til akselerasjon skiller kun av en konstant faktor. Dempningsestimater fra båndbredde fra halv spektraltetthet er av den grunn ekvivalent med båndbredde ved halv signalstyrke. Et problem med båndbreddeestimering fra et FFT-diskretisert signal er at båndbredden i spektraltettheten er avhengig av FFT-diskretiseringen. FFT- spektraltettheten er proporsjonal med signalets lengde slik at en lang tidsserie har høy spektral tetthet, mens et kort signal gir lav spektral

tetthet. Figur 4.15 viser hvordan dempningsestimater fra FFT-spektraltettheten reduseres ved økende signallengde,  $T$ . Reduksjonen henger sammen med at FFT-spektraltettheten er et diskretisert signal, hvor redusert frekvensintervall,  $\Delta\omega$ , fordeler variansen utover flere frekvenstopper.



Figur 4.15: Sammenheng mellom dempningsestimater fra halv båndbredde og spektraltetthet

Båndbreddemetoden er avhengig av at frekvenstopper er godt definert og et akseptabelt dempningsestimater krever høy spektral tetthet. Signalets lengde må derfor velges slik at oppløsningen er høy nok til å kunne beskrive én topp med flere punkt. Dette kan gjøres ved å bruke en vindusfunksjon og dele opp signalet i mindre segmenter. Ulike metoder for spektralestimering er gjennomgått i kapittel 2.2.1. Felles for de ikke-parametriske metodene er at varians reduksjonen resulterer i økt båndbredde og forårsaker en overestimert dempning. En mye brukt ikke-parametrisk metode er Welchs metode, og har fordelen at segmentoverlapping kan brukes til å moderere båndbredde økningen.

Ønsket oppløsning i spektraltettheten krever et langt signal. Når tidsperioden utvides økes også sannsynligheten for ytre påvirkninger i form av trafikk og endring av vindretning og vindhastighet som kan forstyrre resultatene. Forstyrrelser vil øke spektraltetthetens båndbredde rundt resonanstopper og dermed øke dempningsestimater. Det antas at endring av stasjonære forhold kan neglisjeres fordi valg av diskretisering er en betraktelig større feilkilde.

### 4.4.3 Analyse av spektraldiskretiseringer

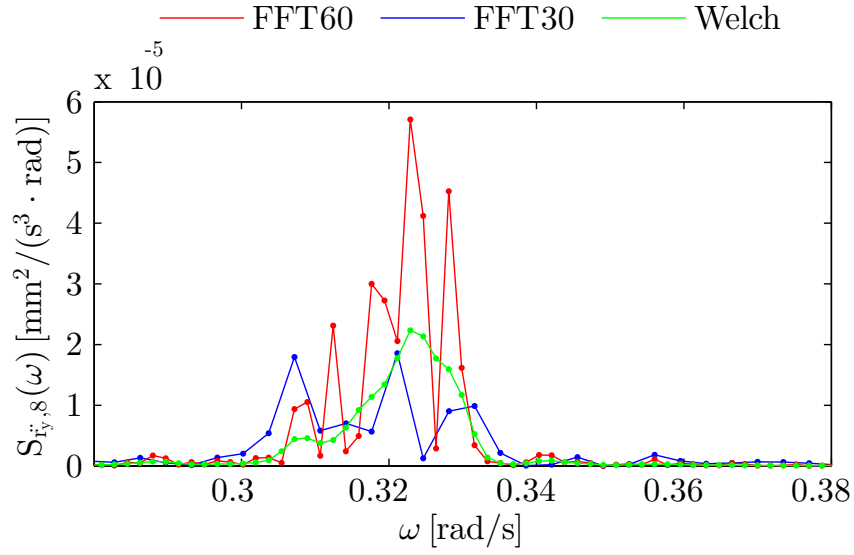
Den store usikkerheten knyttet til valg av diskretisering utløser et analysebehov. Båndbredden til ulike diskretiseringer av samme signal er derfor studert. Tre forskjellige diskretiseringer er sammenlignet: FFT for perioden  $T = 30 \text{ min}$ , FFT for perioden  $T = 60 \text{ min}$  og Welch for perioden  $T = 60 \text{ min}$  med segmentlengde  $L = \frac{T}{2}$  og segmentoverlapp 50% omtalt som henholdsvis *FFT60*-, *FFT30*- og *Welch*-diskretisert spektraltetthet. Signalet som diskretiseres har samplingsfrekvens,  $\omega_s = 200 \text{ Hz}$ . De valgte signallengdene er resultatet av et kompromiss mellom formålstjenelig spektraloppløsning og et ønske om å beholde stasjonære forhold, der spektraloppløsning er vektet mest. Analysen er begrenset til å omfatte de fire første dempingstallene. Årsaken til det er at  $\zeta_1$ - $\zeta_4$  har størst innvirkning på responsen til Hardangerbrua. Akselerometernummer 6 og 8 er valgt fordi plasseringene er gunstige i forhold til svingeformen til de fire første modene.

En parameter som indikerer kvaliteten på representasjon av en frekvenstopp er  $W$ , som beskriver forholdet mellom båndbredden ved halv signalstyrke,  $\Delta\omega_B$ , og spektraltetthetens frekvensoppløsning,  $\Delta\omega$  [18]:

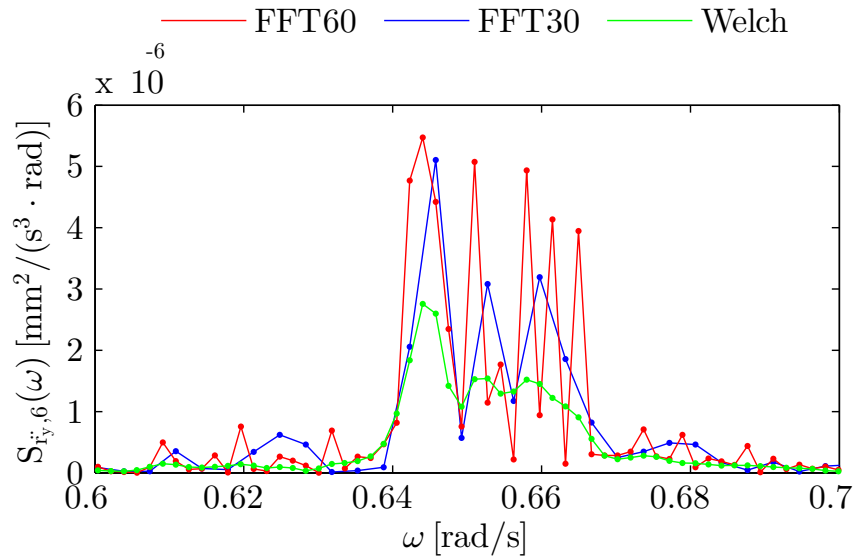
$$W = \frac{\Delta\omega_B}{\Delta\omega} \quad (4.5)$$

$W > 1$  impliserer at en frekvenstopp er beskrevet av flere punkt. Feilen til dempningsestimater kan reduseres ved å sikre at egenfrekvenstoppene har en høy  $W$ -verdi.

Diskretiseringene FFT60, FFT30 og Welch gir spektraloppløsninger på henholdsvis  $\Delta\omega = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$ ,  $\Delta\omega = 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$  og  $\Delta\omega = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$ . Figur 4.16 viser en sammenligning av hvordan de tre diskretiseringene beskriver spektraltettheten rundt  $\omega_1$  og  $\omega_2$ .  $W$ -parameteren til FFT60, FFT30 og Welch er representert i tabell 4.4.



(a) 1. symmetriske horisontalmode,  $\Phi_1$



(b) 1. asymmetriske horisontalmode,  $\Phi_2$

Figur 4.16: Sammenligning av diskretisert spektraltettheter

Tabell 4.4:  $W$ -parameter for de ulike diskretseringene i figur 4.16

Mode	1	2
FFT60	2.6	1.6
FFT30	1.3	1.5
Welch	7.2	6.4

Reduksjon av  $\Delta\omega$  i FFT-diskretiseringen fra  $T = 30 \text{ min}$  til  $T = 60 \text{ min}$  medfører tydelig smalere båndbredde. Dempningsestimater er av den grunn lavere for FFT60 som følge av at variansen er spredt utover i flere nærliggende topper. Welch glatter ut spredningen og samler variansen. Det er verdt å merke seg at variansen til Welch-diskretiseringen i de fleste tilfeller gir en båndbredde tilsvarende FFT30-diskretiseringen. Årsaken til den tilsvarende båndbredden er at Welch-diskretiseringen er gjennomsnittet av segmenter med lengde  $T = 30 \text{ min}$ . På grunn at toppene i Welch-diskretiseringen er bedre definert, anbefales Welch ovenfor FFT30. Samme utvikling kan tenkes å være tilfelle for FFT60 og Welch med periode  $T = 120 \text{ min}$  og segmentlengde  $L = \frac{T}{2}$ .

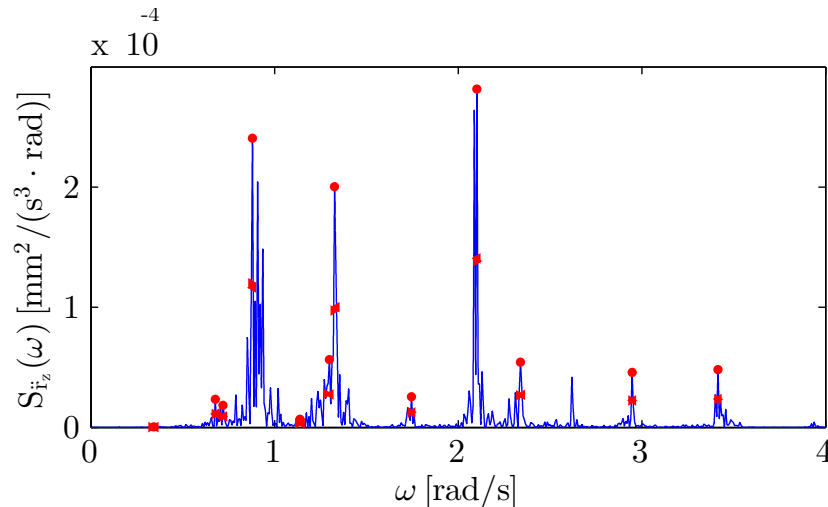
En fullstendig oversikt over  $W$ -parameteren til de tre tidsseriene  $S_{1,\zeta}$ ,  $S_{2,\zeta}$  og  $S_{3,\zeta}$  er gitt i tabell A.5, A.6 og A.7.

#### 4.4.4 Automatisert båndbreddeidentifisering

Beregningen av dempningstallene er automatisert. Fremgangsmåten er avhengig av at sidefrekvensene som gir halv signalstyrke av toppstyrken er mulig å identifisere ved søking. Problemet ligger fortsatt i FFT-diskretiseringen. Løsningen er å ta i bruk lineær interpolering mellom de diskretiserte punktene i autospektraltettheten. Interpoleringen fyller inn flere punkt mellom topp- og bunnpunkt uten at formen til spektraltettheten endres. Figur 4.17 viser  $S_{\bar{r}_z}$  der oppløsning er økt 50 ganger med lineær interpolering for å gi et tilfredstillende båndbreddeestimat.

En tidsserie gir  $N_{dof} = 3 \cdot 20$  antall autospektraltettheter og kan derfor gi opptil  $N_{dof}$  antall modale dempningstall,  $\zeta_n$ , dersom samtlige båndbredder identifiseres. Når et modalt dempningstall til mode  $n$  ligger utenfor ett standardavvik,  $\sigma_{\bar{\zeta}_n}$ , hvor  $\bar{\zeta}_n$  er gjennomsnittlig modal dempning for mode  $n$ , er dempningsestimatet utelatt fra beregningen av tidsseriens modale dempningstall.

Siden dempningen er et resultat av en stokastisk prosess er det nødvendig å ta gjennomsnittet av flere tidsserier. Feilen til dempningsestimatet reduseres ved å øke antall tidsserier.



Figur 4.17: Automatisert båndbredde bestemmelse

#### 4.4.5 Estimering av dempning i tidsdomenet

Dempningsestimater direkte fra tidsdomenet er kjent for å gi mer pålitelige resultater enn estimater fra frekvensdomenet. Båndbredde ved halv signalstyrke er sensitiv ovenfor valg av diskretisering og det er vanskelig å fastslå hvilken diskretisering som ender i korrekt dempningsbeskrivelse. Måling av fri amplitudereduksjon er beskrevet i kapittel 2.3.2. Metoden skal bidra som et sammenligningsgrunnlag og være en basis for at riktig diskretisering kan indikeres.

Midtspennet gir maksimalt utslag for de symmetriske modene  $\Phi_1$  og  $\Phi_4$  og minimalt utslag for den første asymmetriske moden,  $\Phi_2$ , som har infleksjonsspunkt i midtspennet. Dette medfører at målinger ved midtspennet gjengis som en tilnærmet perfekt symmetrisk respons der amplitudereduksjon er lett å identifisere.

Det samme er ikke tilfelle for de to første asymmetriske modene,  $\Phi_2$  og  $\Phi_3$ . Målinger utført i modenes toppunkt blir forstyrret av utslaget til de symmetriske modene. Med bakgrunn i de fire første svingeformene er kun dempningen til de to første symmetriske modene estimert med denne metoden.

Det logaritmiske dekrementet,  $\delta$ , er beregnet ved å måle amplitudereduksjonen for tidsserier hvor  $\Phi_1$  og  $\Phi_4$  er tydelig trigget. Feilen i dempningsestimateret reduseres dersom amplitudere-

duskjonen måles over flere perioder slik at [20]:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} \cdot \log_e \left( \frac{r_{s,i}}{r_{s,i+j}} \right) \quad s = y, z \quad (4.6)$$

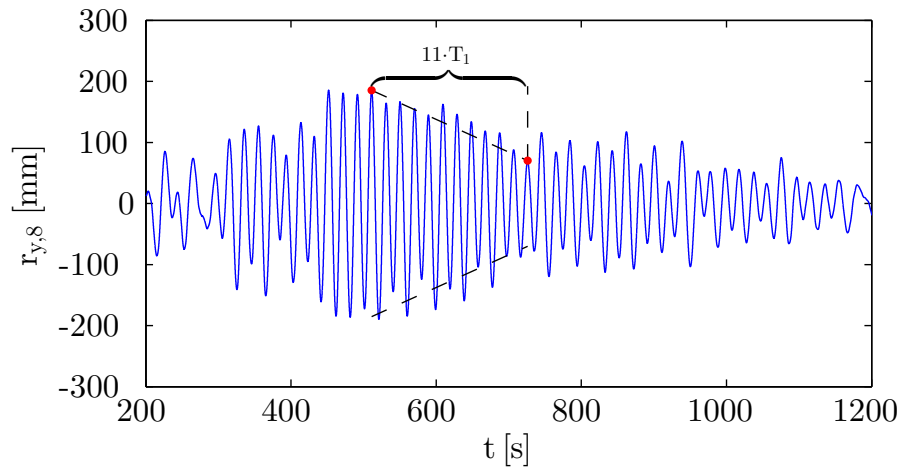
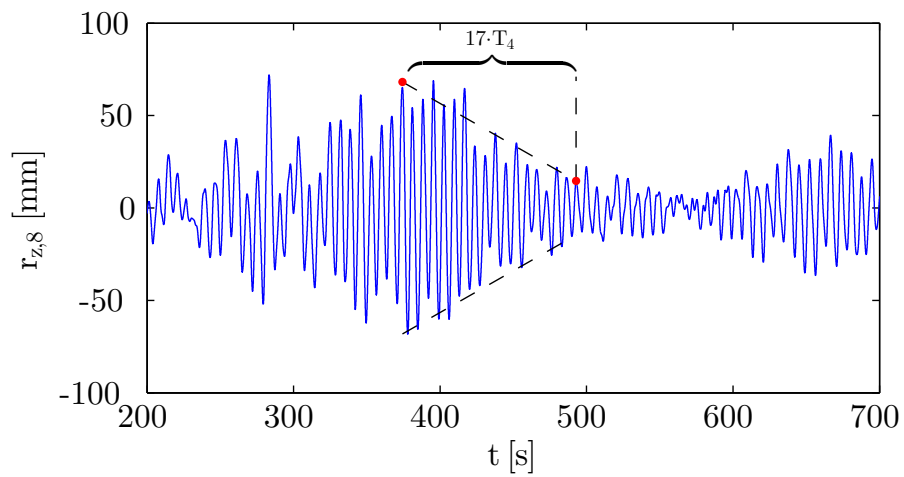
Figur 4.18a og 4.18b viser henholdsvis horisontalresponsen,  $r_{y,8}$ , og vertikalresponsen,  $r_{z,8}$ , til akselerometer nummer 8. Responsen er induisert av en middelvind på  $V = 10.1 \text{ m/s}$ . Det målte tidsintervallet for  $r_{y,8}$  er 214.8 sekunder, og tilsvarer en periode på  $T = \frac{214.8}{11} = 19.53 \text{ s}$ . Egenperiode til  $\Phi_1$  er utfra spektralanalyse funnet til å være  $T_1 = 19.57 \text{ s}$ .  $T_1$  stemmer bra med  $T$ , og antyder at brubanen er dominert av svingeformen til  $\Phi_1$  innenfor det målte intervallet.

Det logaritmiske dekrementet til de 11 periodene gir ved hjelp av ligning (4.6) en dempning på  $\zeta_1 = 0.0140$ . For  $V = 10.1 \text{ m/s}$  og  $\omega_1 = 0.321 \text{ rad/s}$  gir ligning (4.4a) det aeroelastiske dempningsbidraget,  $\zeta_{ae,1} = 0.0044$ . Strukturell dempningen,  $\zeta_s$ , til  $\Phi_1$  blir dermed  $\zeta_{s,1} = \zeta_1 - \zeta_{ae,1} = 0.0096$ .

Tidsintervallet fra figur 4.18b gir en periode på  $T = \frac{118.6}{17} = 6.98 \text{ s}$ . Første symmetriske vertikalmode har utfra spektralanalyse en egenperiode på  $T_4 = 7.01 \text{ s}$ . Målt periode for svingningene til  $r_{z,8}$  sammenlignet med  $T_4$  tyder på at det målte intervallet er dominert av svingeform  $\Phi_4$ .

Det logaritmiske dekrementet for de 17 periodene gir en dempning på  $\zeta_4 = 0.0144$ . For  $V = 10.1 \text{ m/s}$  og  $\omega_4 = 0.897 \text{ rad/s}$  gir ligning (4.4b) et aeroelastisk dempningsbidrag på  $\zeta_{ae,4} = 0.0135$ . Strukturell dempning til mode  $\Phi_4$  ender da opp som  $\zeta_{s,4} = \zeta_4 - \zeta_{ae,4} = 0.0009$ .



(a) Horisontalretning,  $\Phi_1$ (b) Vertikalretning,  $\Phi_4$ 

Figur 4.18: Måling av fri amplitudereduksjon

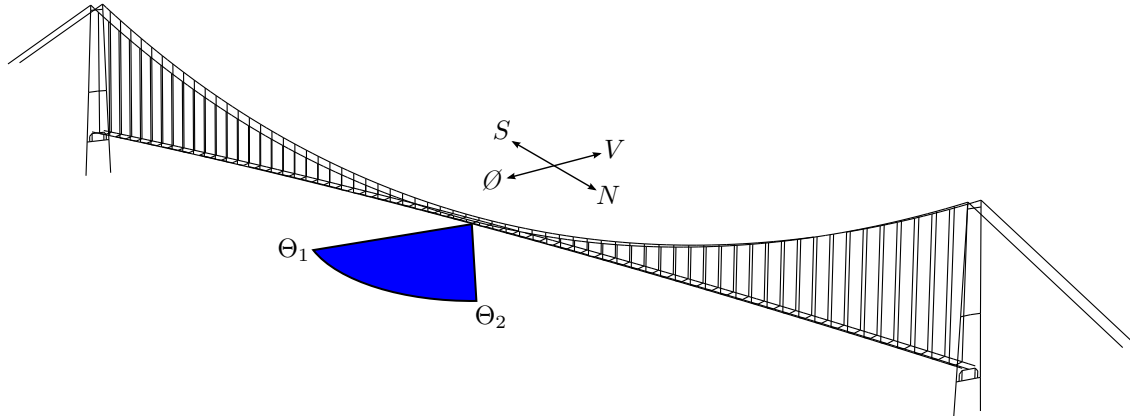
## 4.5 Analyse av forflytning

Det er ønskelig å kartlegge Hardangerbruas respons for ulike lastsituasjoner. Innsikt i hvordan brua responderer på forskjellige påkjenninger som trafikk og vindlast er vesentlig for å forbedre nøyaktigheten til dagens responsestimeringsmetoder.

Hardangerbrua er ikke instrumentert for måling av forflytning, men forflytningen kan måles indirekte ut fra akselerasjonene. Overgangen fra akselerasjon til forskyvning via numerisk integrasjon er omtalt i kapittel 3. For å gi et mest mulig korrekt bilde av virkeligheten er forskyvningene til alle de tre ortogonale retningene,  $x$ ,  $y$  og  $z$ , inkludert i analysen, men fokuset er lagt til  $y$ - og  $z$ -retning som følge at vindindusert respons langs bruaksen er ansett for å være uviktig.

Videre er det valgt å avgrense studiet til respons forårsaket av middelvindhastigheter innenfor et intervall fra 9-11  $m/s$ . I første omgang ble det laget et punktplott av standardavviket til forflytningen i henholdsvis horisontalretning og vertikalretning mot middelvindhastigheten hvor vindretningen ved midtspennet lå innen en sektor definert av  $\Theta_1$  og  $\Theta_2$ , se figur 4.21. Sektoren var i starten satt til  $230^\circ$ - $310^\circ$  for gi et høyoppløselig punktplott. Utgangspunktet var data fra grovsorteringen i delkapittel 4.2.

Analysene ga et punktplott med svært stor spredning. Eksempelvis varierte horisontalt standardavviket fra 5-500  $mm$ . Ut i fra punktverdiene var det ikke mulig å identifisere en tydelige trend. Lastsituasjonen hadde mer betydning enn antatt og påvirket resultatet. Konsekvensen ble at både vind og respons for alle de brukte målingene måtte analyseres manuelt. Sammenlignings grunnlaget fra responsteorien baserer seg på at vinden alltid står vinkelrett på brutverrsnittet og at middelvindhastigheten er konstant. For at den målte responsen skal kunne sammenlignes med den estimerte responsen må forholdene være mest mulig identisk. Det ble raskt klart at målingene på 30 minutter måtte deles opp i mindre segmenter for å unngå trafikkklaster og sikre homogene og stasjonære vindforhold.



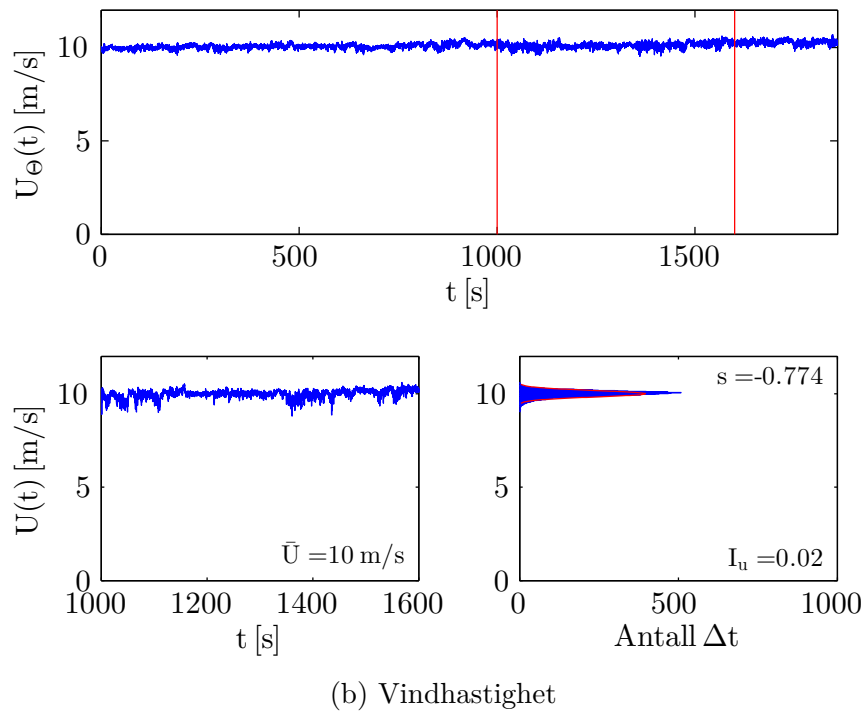
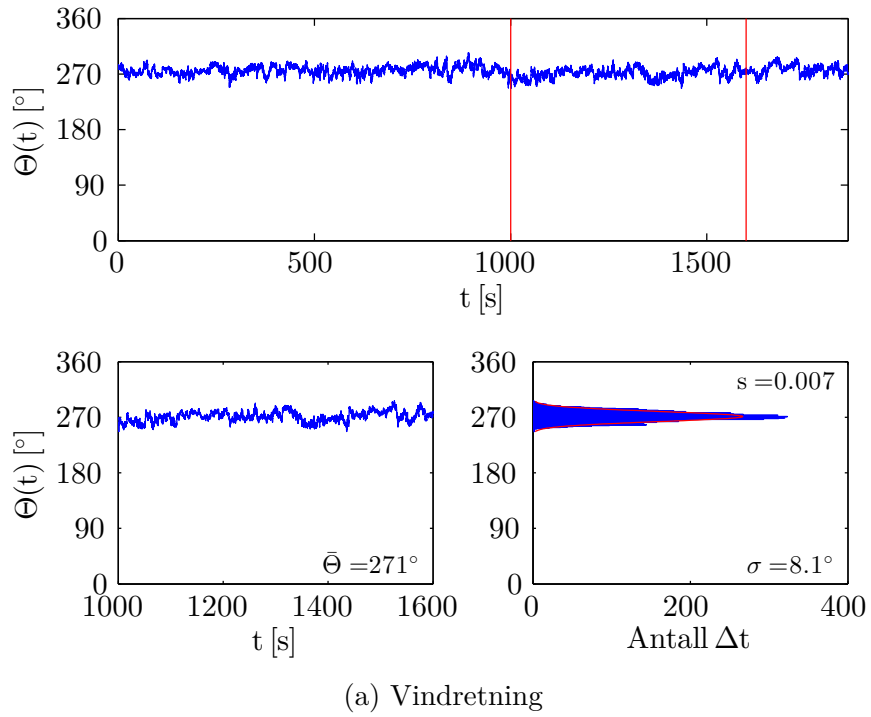
Figur 4.19: Illustrasjon av vindsektor

### 4.5.1 Uttak av ideelle målinger

Et effektivt verktøy når en tidsserie skulle studeres i MATLAB var funksjonen, *ginput*. Funksjonen gjør det brukervennlig å studere målingenes utvikling og ta ut gode intervall med ti minutters lengde direkte fra figur. Med gode målinger menes i denne sammenheng segmenter uten trafikk og hvor både vindretning og vindhastighet er normalfordelt med minst mulig varians og skjevhet. Ved uttak av målesegmenter er det viktig studere den foregående perioden for å unngå støy.

Første steg er vist i figur 4.20a der en seksjon på ti minutter har et gjennomsnitt på  $271^\circ$ , et standardavvik på  $8.1^\circ$  og en lav skjevhet på 0.007. Isolert sett er dette er bra utgangspunkt.

Andre steg tar for seg vinden presentert i figur 4.20b. Det er valgt å visualisere polarvind for hele tidsserien og kartesisk vind i seksjonsutdraget. En slik fremgangsmåte tydeliggjør de tilfeller hvor det er signifikant endring i vindretning. Konsekvensen av en retningsendring gjør at den langsgående kartesiske komponenten,  $U$ , får markante fall. Bakgrunnen for hastighets droppene er direkte tilknyttet dekomponering av  $U$  med hensyn på  $\phi$  i ligning (4.7). En turbulensintensitet på 0.02 i figur 4.20b forteller at standardavviket i forhold til middelvinden er liten. Mens skjevheten på -0.774 informerer at normalfordelingen er tilnærmet symmetrisk om middelvinden.



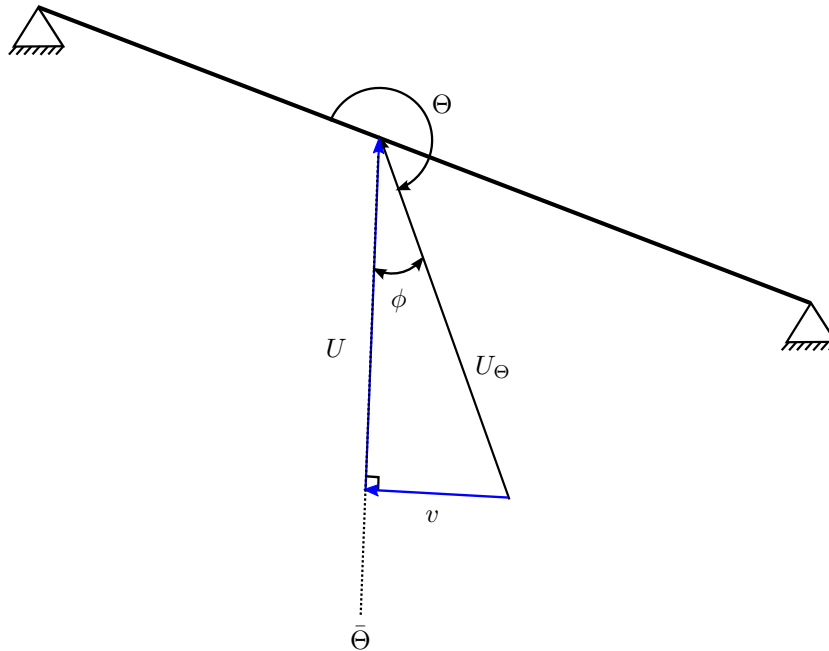
Figur 4.20: Uttak av ideell seksjon

$\phi$  i ligning (4.7c) og figur 4.7 representerer den standardiserte vindretningen og legger grunnlaget for de kartesiske vindhastighetene gitt i henholdvis ligning 4.7a og 4.7b.

$$U = U_{\Theta} \cdot \cos(\phi) \quad (4.7a)$$

$$v = U_{\Theta} \cdot \sin(\phi) \quad (4.7b)$$

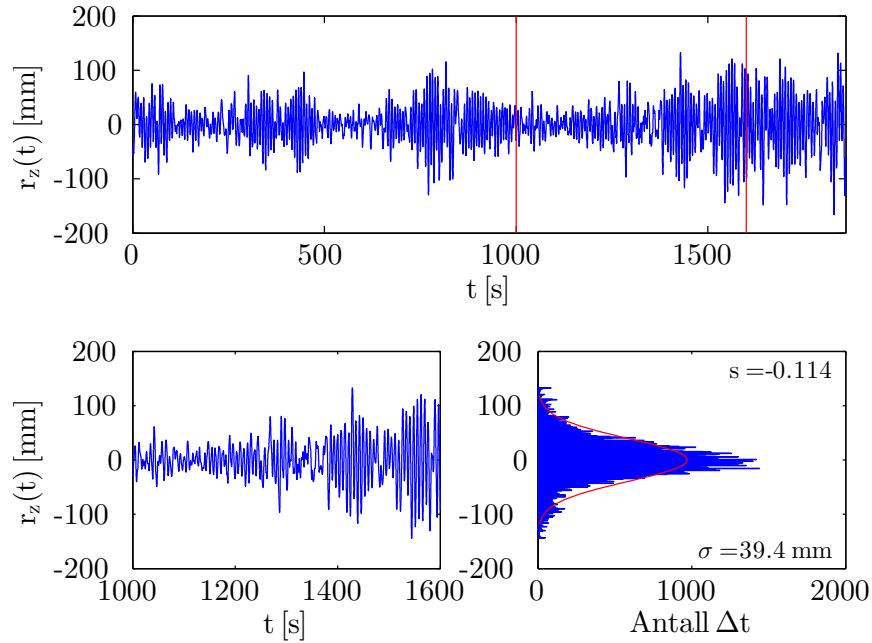
$$\phi = (\Theta - \bar{\Theta}) \quad (4.7c)$$



Figur 4.21: Kartesisk dekomponering av vindhastighet

Når segmenter med ideell vindretning og vindhastighet er tatt ut kan den tilhørende forflytningen studeres. Figur 4.22 viser forflytningen til midtpunktet i vertikalretning. Normalfordelingen til segmentets akselerasjoner og forskyvninger er beregnet slik at målinger med trafikk kan ekskluderes. Hovedbegrunnelsen for en manuell metode er at tidsserien kan ses i sammenheng med det som har skjedd tidligere. Store variasjoner i vindretning eller vindhastighet og hyppig trafikkforekomst, er ikke gunstig når stasjonære forhold skal betraktes.

Segmentutdrag fra akselerasjon og tilhørende forflytning for y- og z-retning, kartesisk vindhas-

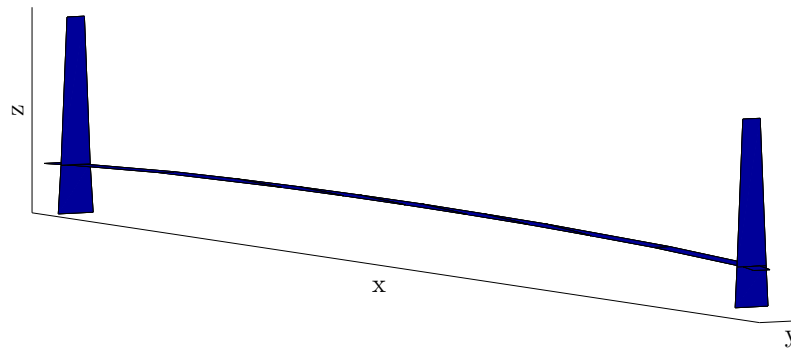


Figur 4.22: Forflytning: Uttak av en ideell seksjon

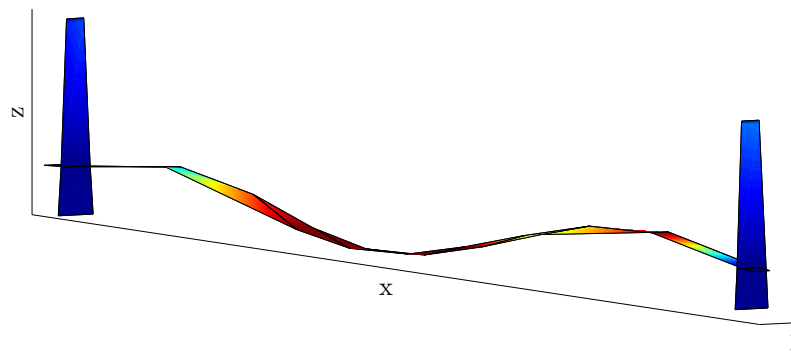
tigheter og vindretningen til samtlige utvalgte tidsserier er vist i vedlegg C. For å redegjøre for den stasjonære kvaliteten til utdraget er normalfordelingene, gjennomsnitt, standardavvik, turbulensintensitet og skjevhet oppgitt.

### 4.5.2 3D-visualisering

Hardangerbrua har en total lengde på 1380 meter. Slankheten gjør at lastimpulser med letthet vil kunne forplante seg fra en side til en annen. Forsøk på å tolke sammenhengen mellom vind og respons ut fra et enkelt målepunkt vil derfor i mange tilfeller være problematisk når det totale bildet er utestående. Ved å koble sammen all innhentet informasjon skapes en helhetlig oversikt. Figur 4.23a viser et overflateplott av geometrien til Hardangerbrua produsert i MATLAB. Endringer i forflytning over tid i x-, y- og z-retning, langs avstivningsbæreren og i topprigelene, importeres inn i modellen slik at den dynamiske forflytningen til hele konstruksjonen animeres. Figur 4.23b viser et stillbilde av responsen til Hardangerbrua oppskalert med en faktor på 500. 3D-visualisering av forflytningen til ulike tidsserier er en verifikasjon på at integrasjonsmetoden i kapittel 3 fungerer.



(a) Udeformert



(b) Deformert

Figur 4.23: 3D-visualisering av Hardangerbrua i MATLAB

For de halvtimes lange tidsseriene i vedlegg C ble det laget filmer som viste den totale 3D-responsen til Hardangerbrua. Filmene inneholder den dynamiske sanntidsforflytningen til midtspennet i vertikal og horisontal retning samt torsjonsvinkelen. I tillegg ble vindretningen og vindhastigheten i sanntid plottet ved anemometerplasseringene i et forsøk å finne sammenheng mellom forskyvning og vindsituasjonen.





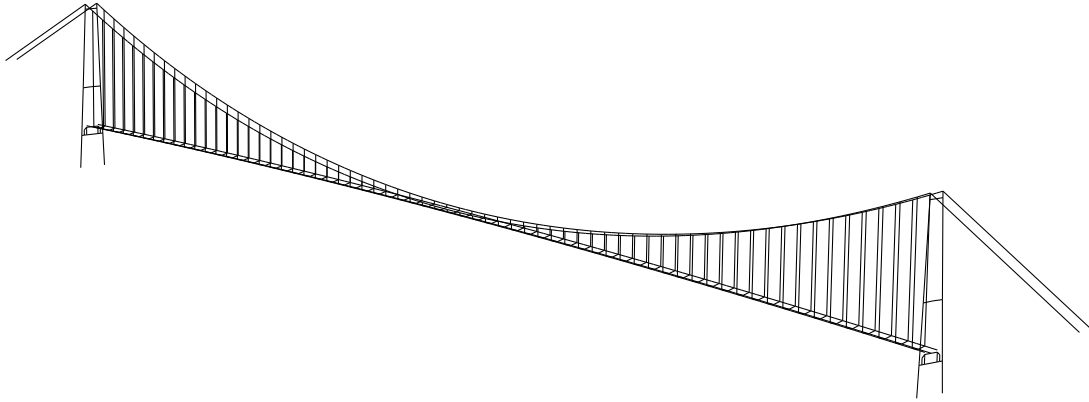
# Kapittel 5

## Prediksjon av respons

Et *MATLAB*-program er utviklet for å predikere vindindusert respons. Programmet er basert på veletablert teori som er presentert i kapittel 2.4 til 2.6. Dette kapitlet gir en gjennomgang av metoden og beregningsgrunnlaget til responspredikeringen.

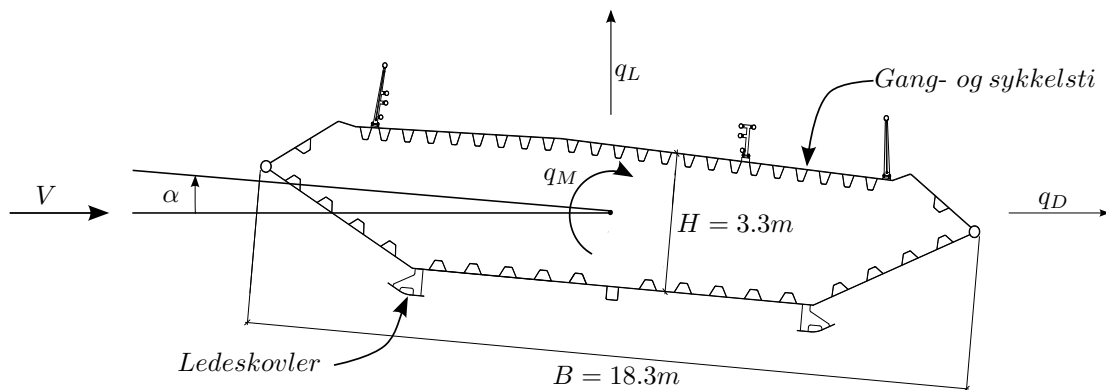
### 5.1 Tidligere arbeid

I forbindelse med masteroppgaven til Andre Sætre Solheim, *Instrumentering av Hardangerbrua*, er det utviklet en beregningsmodell av Hardangerbrua i elementmetodeprogrammet, *Abaqus FEA* [33]. Modellen er vist i figur 5.1, og er adoptert i denne rapporten og brukt til å kjøre en egenfrekvensanalyse.



Figur 5.1: Hardangerbrua modellert i elementmetodeprogrammet, Abaqus FEA.

Svend Ole Hansen ApS har i sin rapport, *The Hardanger Bridge - Static and dynamic wind tunnel tests with a section model*, utført vindtunnelmålinger på en seksjonsmodell av Hardangerbrua for Statens Vegvesen [5]. Modellen som er testet er en seksjon av midtspennet i skala 1:50 på 1.7 meter. Målingene er gjort ved to anledninger: 1. revisjon inneholder data for løft og torsjon for både østlig og vestlig vindretning, mens 2. revisjon er utvidet til å inneholde data for drag, løft og torsjon, men da kun for vestlig vindretning (gang- og sykkelsti nedstrøms). Responsberegningene er utført for vestlig vindretning fordi denne vindretningen har komplett datasett for alle tre frihetsgradene  $r_y$ ,  $r_z$  og  $r_\theta$ , se figur 5.2.



Figur 5.2: Tverrsnitt av Hardangerbrua: Definisjon av vindretning.

## 5.2 Strukturelle egenskaper

De strukturelle egenskapene er basert på elementmetodemodellen til Solheim [33]. Modellen er brukt til å kjøre en egenfrekvensanalyse for de 50 første modene. Ut i fra egenmodene er 30 kabelmoder identifisert og fjernet for videre beregninger av brubanens respons. De resterende 20 modene viser seg å være tilstrekkelig nok til at modellens respons konvergerer. Dette gir en diagonal egenfrekvensmatrise,  $\omega_n$ , og en diagonal modal massematrise,  $\tilde{\mathbf{M}}_0$ , med dimensjon 20x20.

Bruas modale stivhetsmatrise er beregnet fra utfra ligning (5.1):

$$\tilde{\mathbf{K}}_0 = \omega_n \cdot \tilde{\mathbf{M}}_0 \quad (5.1)$$

### 5.2.1 Dempning

Systemets modale dempningstall,  $\zeta_n$ , er predikert med Rayleigh-dempningsestimat gitt i ligning (2.47). Dette gir en diagonal matrise,  $\zeta_n$ , med dimensjon 20x20. Rayleigh-koeffisientene er presentert i tabell 5.1.

Tabell 5.1: Rayleigh dempningskoeffisienter

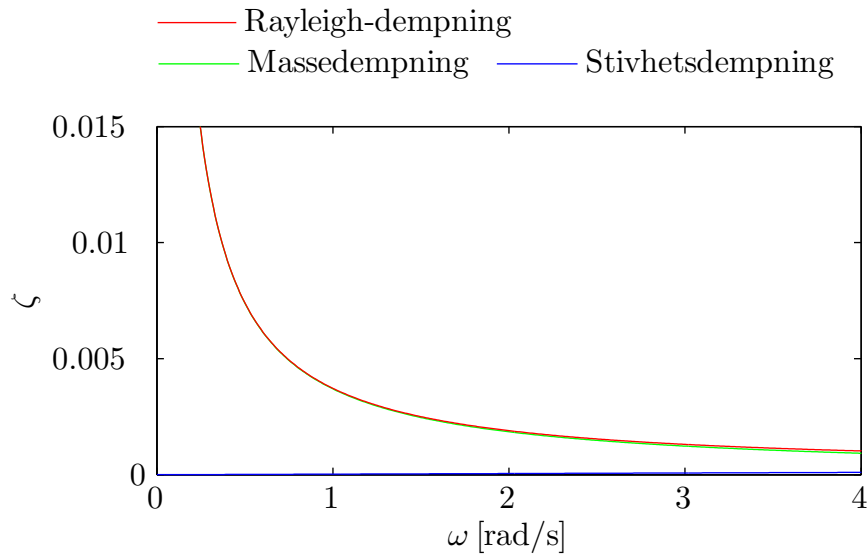
$\zeta$	0.01
$\omega_i$	0.37 rad/s
$\omega_j$	400 rad/s

Dempningen til første horisontale egenmode er satt til  $\zeta_1 = 0.01$ . Frekvensintervallet er valgt slik at dempningen følger en klar masseproporsjonal trend.

Utviklingen til,  $\zeta_n$ , for økende frekvens er illustrert i figur 5.3, hvor Rayleigh-kurven er sammenlignet med ren masse- og stivhetsproporsjonal dempning.

Bruas modale dempningsmatrise er beregnet fra uttrykket:

$$\tilde{\mathbf{C}}_0 = 2\omega_n\zeta_n \cdot \tilde{\mathbf{M}}_0 \quad (5.2)$$



Figur 5.3: Rayleigh-dempningsestimater

## 5.3 Aeroelastisk last

Dynamiske aeroelastisk lastbidrag er gitt i ligning (2.66b), og er fullt utskrevet i ligning (2.67). Bevegelsesavhengig dragkraft, løftkraft og torsjonsmoment er knyttet til strukturell forskyvning og hastighet i form av aerodynamiske deriverte (AD) koeffisienter,  $P_k^*$ ,  $H_k^*$  og  $A_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ . AD-koeffisientene inngår i det aeroelastiske modale stivhets- og dempningsbidraget,  $\tilde{\mathbf{K}}_{ae}$  og  $\tilde{\mathbf{C}}_{ae}$ , gitt av ligning (2.71). Aeroelastisk massebidrag,  $\tilde{\mathbf{M}}_{ae}$ , er antatt å være neglisjerbart.

### 5.3.1 Aerodynamiske deriverte

AD-koeffisientene er funksjoner av redusert vindhastighet,  $V_{red}(V, \omega)$ , gitt i ligning (2.68). Forsøksdata fra vindtunneltestene er normalisert med hensyn på de tre egenfrekvensene,  $n_y$ ,

$n_z$  og  $n_\theta$ , for høy vindhastighet:

$$V_{red,y}(V) = \frac{V}{n_y \cdot B} \quad (5.3a)$$

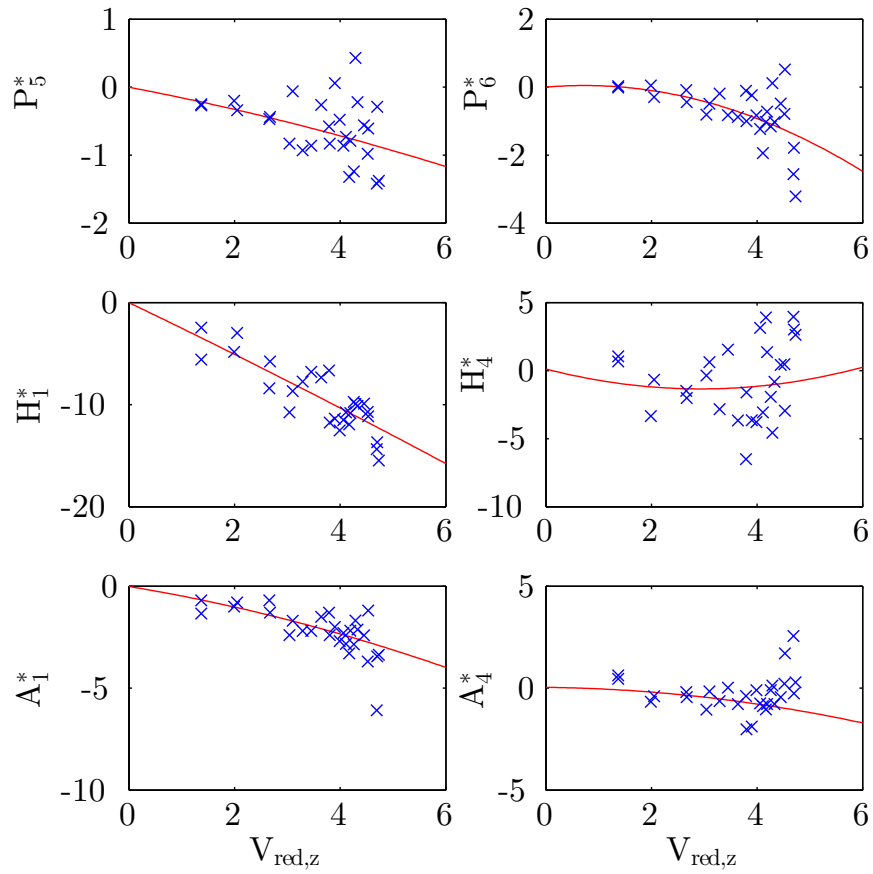
$$V_{red,z}(V) = \frac{V}{n_z \cdot B} \quad (5.3b)$$

$$V_{red,\theta}(V) = \frac{V}{n_\theta \cdot B} \quad (5.3c)$$

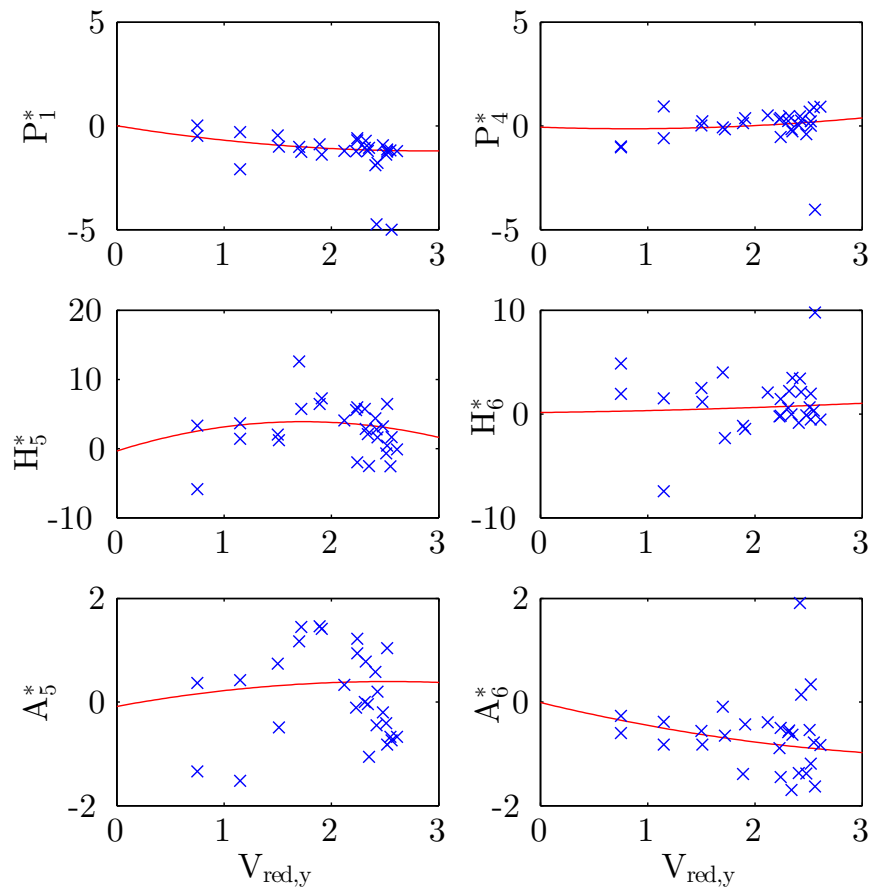
$n_y$ ,  $n_z$  og  $n_\theta$  er relatert til de tre egenfrekvensene,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  og  $\omega_\theta$ , som er assosiert med henholdsvis ren vertikalforskyvning, ren horisontalforskyvning og ren torsjon under vindstille forhold.

AD-funksjonene er funnet ved å kurvetilpasse forsøksdata fra rapporten til Hansen ApS [5]. Datasettene er utvidet til å inneholde ti nullpunkt for å sikre at kurvene er nær null for vindhastigheter på  $V = 0 \text{ m/s}$ . Kurvetilpassingen er utført med andregradspolynomer, se figur ?? . Koeffisientene til andregradspolynomene er gitt i tabell B.1.

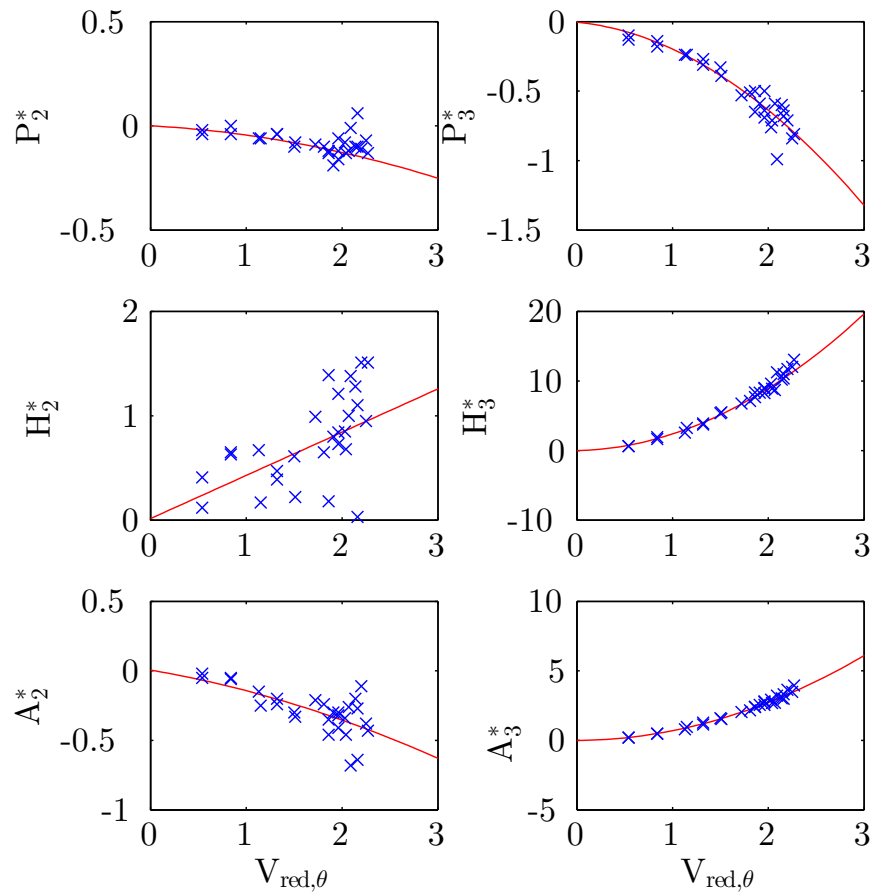
Andregradspolynomer anses å gi tilfredstillende kurvetilpasninger for de fleste tilfellene. Selv om høyere ordens polynomer i noen tilfeller gir bedre kurvetilpassing av  $V_{red}(V, \omega)$  innenfor intervallet illustrert i figur 5.4, 5.5 og 5.6 , er andregradspolynomer foretrukket som følge at polynomene vil være mer robuste ved behov for ekstrapolering. Dette henger sammen med at alle leddene i ligning (2.67) er funksjoner av  $V^2$ .



Figur 5.4: Kurvetilpasset AD-koeffisienter fra vindtunnelforsøk: Vertikal [5]



Figur 5.5: Kurvetilpasset AD-koeffisienter fra vindtunnelforsøk: Horisontal [5]



Figur 5.6: Kurvetilpasset AD-koeffisienter fra vindtunnelforsøk: Torsjon [5]



## 5.4 Turbulent last

Det dynamiske lastbidraget fra vindens turbulens er beregnet fra ligning (2.66a).

### 5.4.1 Statiske lastkoeffisienter

De statiske lastkoeffisientene for østlig vindretning og med påmonterte virvelavløsende ledeskovler er gitt i tabell 5.2.

Tabell 5.2: Statiske lastkoeffisienter

$\bar{C}_D$	0.864
$\bar{C}_L$	-0.284
$\bar{C}_M$	-0.024
$C'_D$	0
$C'_L$	2.76
$C'_M$	0.82

Dragkoeffisienten,  $\bar{C}_D$ , er inkludert faktor på 1.06 som tar høyde for vindlaster på hengestenger og hengestagsfester [1].

### 5.4.2 Turbulensspektraltetthet

Turbulenskomponenten,  $v(t)$ , går parallelt med brubanen og er derfor antatt å være ubetydelig i responsberegningene slik at vindfeltets krysspektraltetthet reduseres til:

$$\mathbf{S}_v(\Delta x, \omega) = \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uw} \\ S_{wu} & S_{ww} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Øiseth har foreslått følgende uttrykk<sup>1</sup> for vindfeltets krysspektraltetthet, uttrykt ved

<sup>1</sup>Fortegnet i ligning (5.5c) er endret

autospektraltetthet og kospektraltetthet [25]:

$$S_{uu}(\omega, \Delta x) = \frac{40.58Vz\kappa}{\left(1 + \frac{9.74\omega z}{V}\right)^{\frac{5}{3}}} \cdot e^{-1.4\frac{\Delta x\omega}{V}} \quad (5.5a)$$

$$S_{ww}(\omega, \Delta x) = \frac{0.82Vz\kappa}{\left(1 + \frac{0.79\omega z}{V}\right)^{\frac{5}{3}}} \cdot e^{-\frac{\Delta x\omega}{V}} \quad (5.5b)$$

$$S_{uw}(\omega, \Delta x) = S_{wu}(\omega, \Delta x) = \frac{2.23Vz\kappa}{\left(1 + \frac{1.67\omega z}{V}\right)^{\frac{7}{3}}} \cdot e^{-\frac{\Delta x\omega}{V}} \quad (5.5c)$$

$S_{uu}(\omega, \Delta x)$  representerer krysspektraltettheten til den flukterende vindkomponenten i vindretning,  $u(t)$ , mellom to punkt separert med  $\Delta x$  langs brubanen. Videre er  $S_{ww}(\omega, \Delta x)$  krysspektraltettheten til den vertikale kryssvindkomponenten,  $w(t)$ , og  $S_{uw}(\omega, \Delta x)$  er krysspektraltettheten til  $u(t)$  og  $w(t)$  for de to punktene.  $\kappa$  er stedets ruhetskomponent og  $z$  er brubanenes høyde over havet. Uttrykkene i ligning (5.5) er justert for å tilpasse turbulensintensitetene gitt av Statens vegvesen [25] [36].

Vindmålinger fra anemometer nummer 6, plassert i midtspennet, er brukt til å finne turbulenskomponentenes autospektraltetthet,  $S_u(\omega)$  og  $S_w(\omega)$ , og ett punkts krysspektraltettheten,  $S_{uw}(\omega)$ . Spektraltetthetene er diskretisert ved Welch's metode med  $T = 10 \text{ min}$ ; segmentlengde,  $L = \frac{T}{20}$ ; Hammingvindu og 50% overlapp. Det er tilstrebet å bruke målinger med stasjonære forhold ved å ta ut signalseksjoner på ti minutter som inneholder lav variasjon i vindretning,  $\Theta(t)$ , og vindhastighetene,  $U(t)$  og  $w(t)$ .

De målte spektraltetthetene er kun beregnet for et punkt slik at kospektraltettheten,  $\hat{C}_o(\Delta x = 0, \omega) = 1$ . Autospektraltettheten fra de teoretiske uttrykkene i ligning (5.5) er i figur 5.7 sammenlignet med de målte autospektraltetthetene, diskretisert med FFT og Welch's metode.

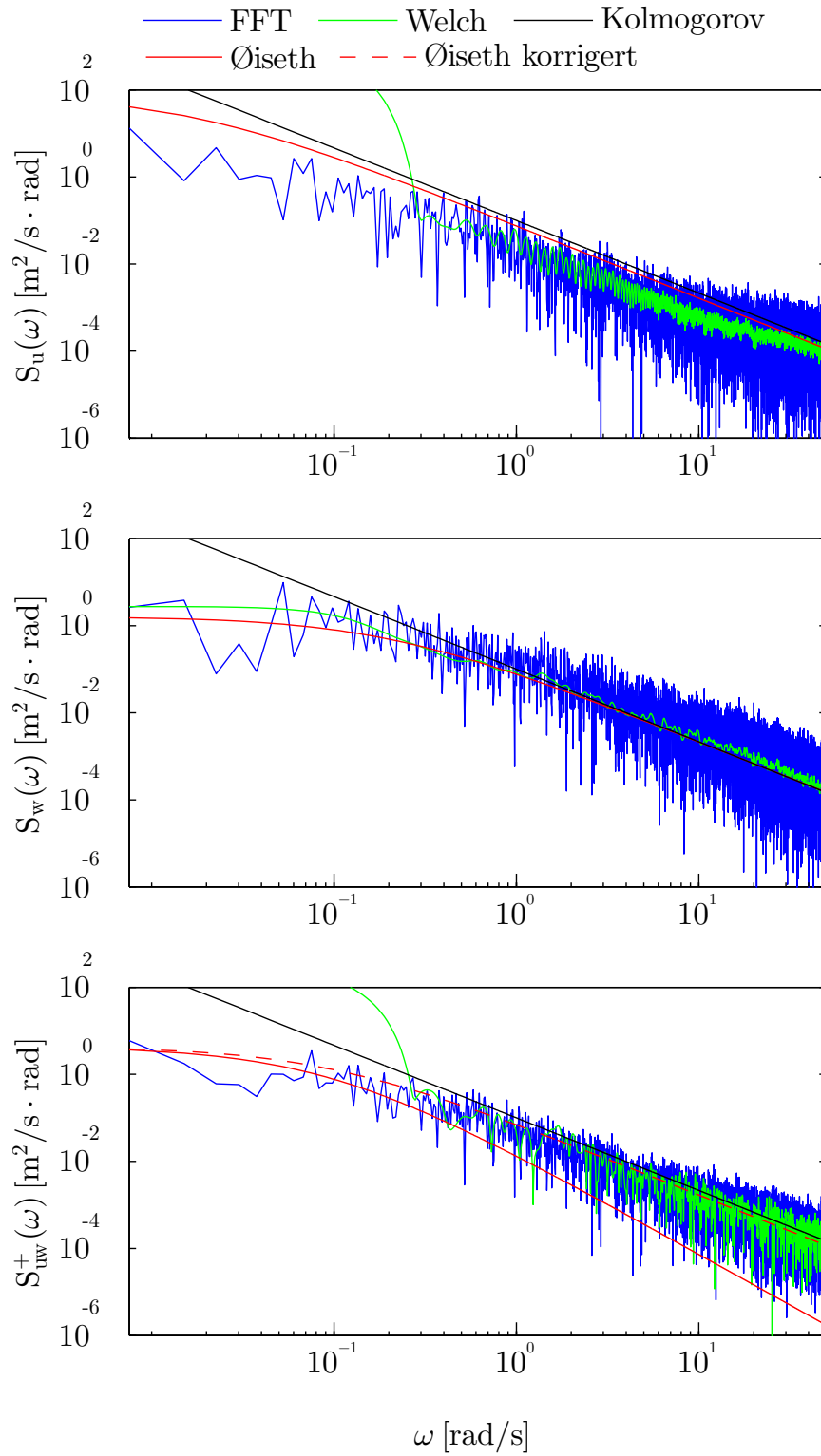
Figur 5.7 og 5.8 illustrerer at uttrykkene for turbulenskomponentenes spektraltetthet i ligning (5.5) gir en god tilpasning for vindturbulensintensiteter,  $I_u \approx 0.07$  og  $I_w \approx 0.06$ . Lavere vindturbulensintensiteter resulterer i en for høy tilpasningen, mens for høyere

vindturbulensintensiteter ligger tilpasningen for lavt. Alle tre målte spektraltettheter følger Kolmogorovs  $\frac{5}{3}$ -lov i det høyfrekvente området,  $\omega > 1$ , som inneholder små virvelstørrelser. Krysspektraltettheten til turbulenskomponentene,  $u$  og  $w$ , gitt i ligning (5.5c), har et logaritmisk stigningstall på  $-\frac{7}{3}$  i det høyfrekventeområdet. Konsekvensen er at tilnærmingen ligger for lavt for høye frekvenser. Uttrykket gir på den andre siden en god tilpasning i det lavfrekvente området som er viktig for respons. Ett forslag til korreksjon av ett punkt krysspektraltettheten,  $S_{uw}(\omega)$ , i ligning (5.5c), på bakgrunn av måleresultat og Kolmogorovs 3. hypotese, er gitt i ligning (5.6).

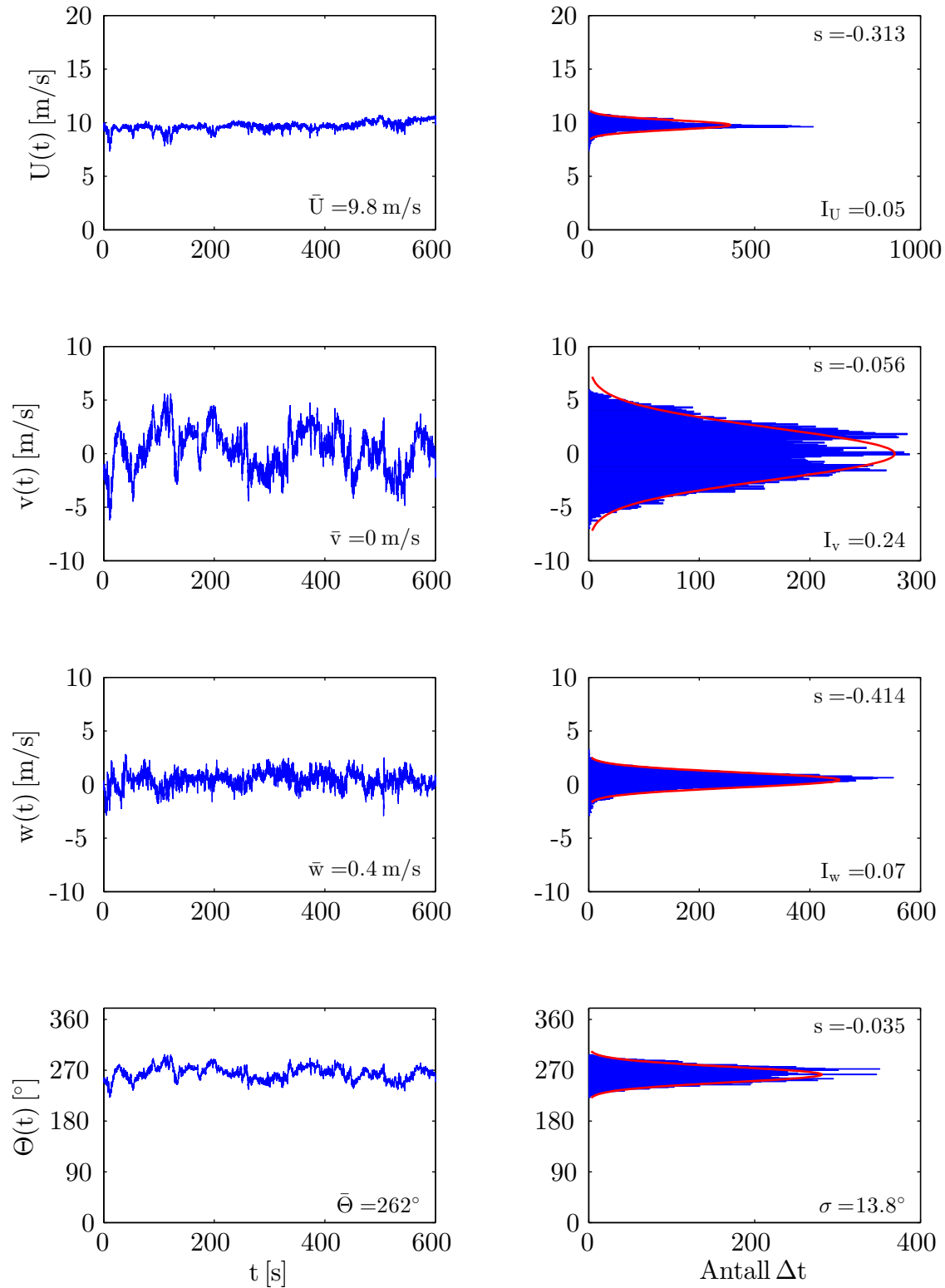
$$S_{uw,korr}(\omega) = S_{wu,korr}(\omega) = \frac{2.23Vz\kappa}{\left(1 + \frac{1.67\omega z}{V}\right)^{\frac{5}{3}}} \quad (5.6)$$

Statistiske egenskaper til målingen som vindspektraltetthetene er beregnet fra, er vist i figur (5.8).

Vindspektraltetthetene i ligning (5.5a) og (5.5b) og korreksjonen i ligning (5.6) er brukt i beregningen av den modale lastspektraltettheten,  $\mathbf{S}_{\bar{Q}}$ .



Figur 5.7: Vindspektraltetthet



Figur 5.8: Stokastisk beskrivelse av kartesiske vindkomponenter

## 5.5 Romlig lastfordeling

Elementmetodemodellen til Solheim er diskretisert med 68 bjelkeelementer langs bruaksen [33]. Koordinatene fra de 67 mellomliggende nodepunktene er benyttet til å beregne modellens modedefasonger. Tilsvarende diskretisering er anvendt i beregningen av modal lastspektralitet.

### 5.5.1 Fellesakseptfunksjon

Beregningen av vindlaster, statiske eller dynamiske, involverer etableringen av fellesakseptfunksjonen. Fellesakseptfunksjonen er uungåelig fordi den representerer den statistiske romlige fordelingen til vindtrykket over brospennet for den gitte moden. Fellesakseptfunksjonen er gitt av dobbelintegralet [35] [2]:

$$J_{ij}(\omega) = \left[ \frac{1}{N_i N_j} \int_0^{L_{exp}} \int_0^{L_{exp}} \phi_i(x_1) \cdot \phi_j(x_2) \cdot e^{-c \cdot \Delta x} dx_1 dx_2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

Hvor  $i$  og  $j$  er gitt modenummer,  $L_{exp}$  er den vindutsattelengden, eksponentialleddet er lik det normaliserte kospektrumet  $\hat{C}_o(\Delta x, \omega)$  og  $\Delta x = |x_2 - x_1|$  er den spennmessige separasjonen.

Dobbeltintegralet gjør at beregningen av fellesakseptfunksjonen blir svært tidkrevende å løse numerisk for mange lastfrekvenssteg  $\Delta\omega$ . Fellesakseptfunksjon er typisk dominert av en lavfrekventtopp som er avhengig av svært små lastfrekvenssteg for å la seg beskrive på en tilfredsstillende måte. En lineær lastvektor vil derfor gjøre beregningene av fellesakseptfunksjonen svært tidkrevende.

En logaritmisk lastvektor utnytter at fellesakseptfunksjonen raskt går asymptotisk mot null. Grunnen til dette er at eksponentialfunksjonen reduseres raskt ved økende lastfrekvens. Fordelen med en logaritmisk lastvektor er at den har tett med lastfrekvenssteg i starten hvor de lavfrekventtoppen oppstår og få lastfrekvenssteg i området som konvergerer mot null. Dette sikrer en tilfredsstillende beskrivelse av fellesakseptfunksjonen selv med svært få

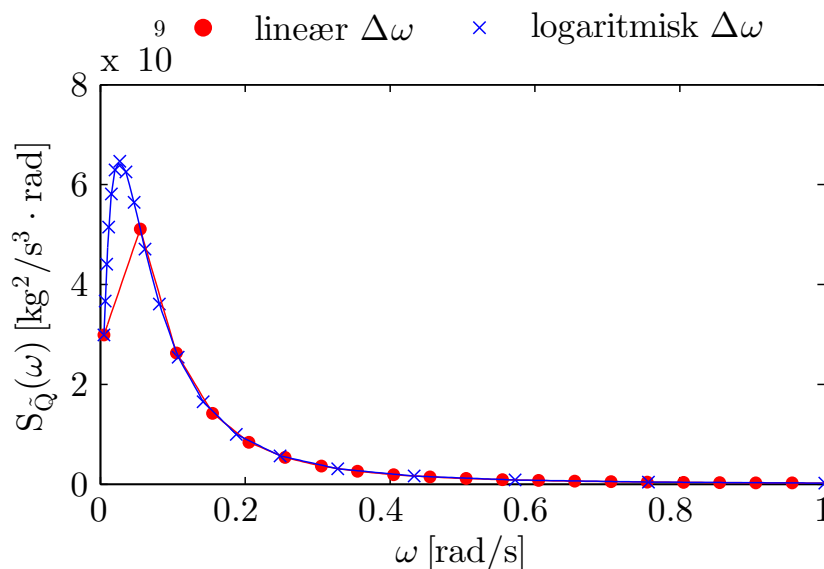
lastfrekvenssteg noe som gir betydelig raskere beregninger.

### 5.5.2 Modal lastspektraltetthet

Den modale lastspektraltettheten består av kvadratet av fellesakseptfunksjonen multiplisert med referansespektraltettheten,  $S_{\tilde{Q}_0}$  [35]:

$$S_{\tilde{Q}_{ij}}(\omega) = J_{ij}^2(\omega) \cdot S_{\tilde{Q}_0} \quad (5.8)$$

Hvor fellesakseptfunksjonen,  $J$ , er gitt i ligning (5.7). Figur 5.9 viser beregningen av auto-spektraltettheten til en modal lastvektor,  $S_{\tilde{Q}_{ii}}$ , for mode  $i$ , hvor beregningsoptimaliseringen i kapittel 5.5.1 er demonstrert. For å illustrere metoden er samme antall  $\Delta\omega$  tatt i bruk for begge lastfrekvensvektorene. Modal last beskrives tilfredsstillende av kun få lastfrekvenssteg ved en logaritmisk lastvektor, mens lengden til en lineær lasfrekvensvektor må økes betydelig for å oppnå samme representasjon.



Figur 5.9: Lineær kontra logaritmisk lastfrekvensvektor

Gevinsten av en logaritmisk lastfrekvensvektor,  $\omega_{log}$ , kontra lineær lastfrekvensvektor,  $\omega_{lin}$ , er en betydelig reduksjon i beregningstiden, som åpner for muligheten til å studere endringer i inngangs data.

Beregning med  $\omega_{log}$  reduserer lengden til den modale lastvektoren,  $\omega$ , til  $N_{\omega_{log}}$ . For at den logaritmiske lastvektoren skal ha lik lengde som opprinnelige modal lastvektor,  $N_{\omega}$ , benyttes lineær interpolering mellom de logaritmiske leddene.

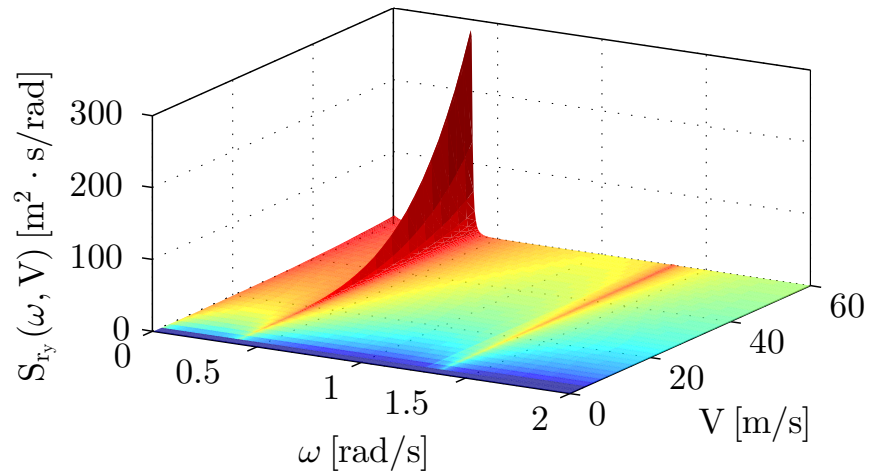
## 5.6 Predikert standardavvik for respons

Figur 5.10 viser spektraltettheten for responsen i midtspennet for økende vindhastighet,  $V$ . Det er tydelig at modellens respons i dette punktet domineres av første symmetriske horisontal egenmode,  $\Phi_1$ , og første symmetriske vertikal egenmode,  $\Phi_4$ . De første asymmetriske modene har ikke utslag i figuren på grunn av at svingeformene har infleksjonspunkt i midtspennet. Første ved rundt 10  $m/s$  eksiteres modellen i andre symmetriske horisontal egenmode,  $\Phi_5$ , og tredje symmetriske vertikal egenmode,  $\Phi_8$ . Predikert rotasjon viser seg å være forsvinnende liten sammenlignet med forskyvningene.

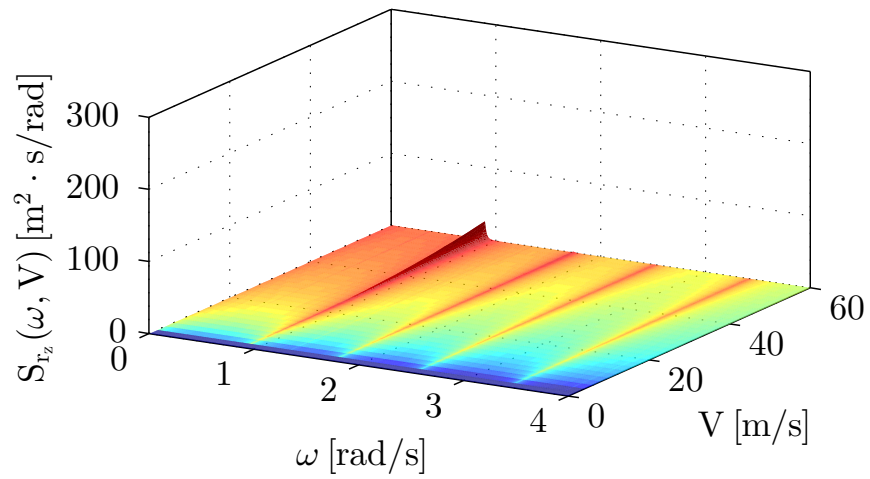
Hardangerbrua er designet for å tåle en ti minutters middelvindhastighet på  $\bar{V}_{10} = 38 m/s$  med en returperiode på 50 år [1]. Figur 5.11 viser et snitt av spektraltettheten til midtspennets respons for en middelvindhastighet på  $V = 38 m/s$ .

Den kritiske vindhastigheten hvor aerodynamisk instabilitet oppstår, er anslått til å være  $V_c = 58 m/s$  [1]. Midtspennet er antatt å være mest kritisk for høye vindhastigheter. Figur 5.12 viser predikert standardavvik til responsen i midtspennet for vindhastigheter opp til stabilitetsgrensen. En observasjon er at den predikerte dynamiske responsen for høye vindhastigheter domineres av horisontalretning. Videre er vridningen i midtspennet minimal som følge av at bærekablene gir en fastholdning i midtspennet.

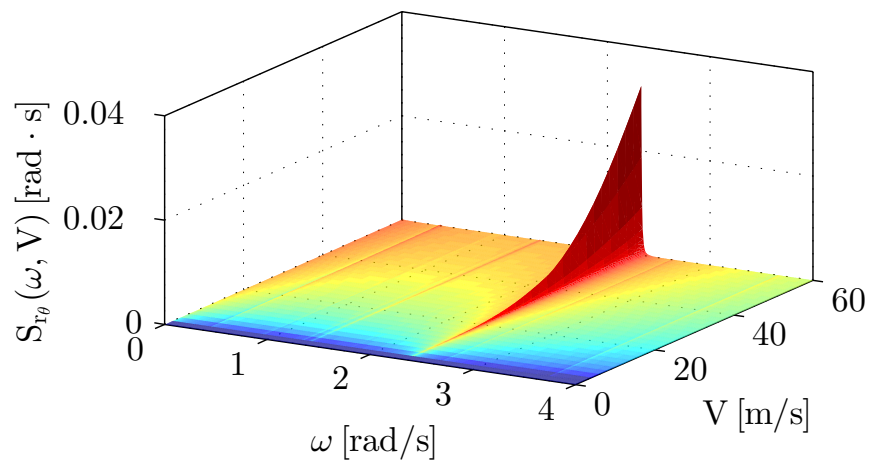




(a) Horisontalforskyvning

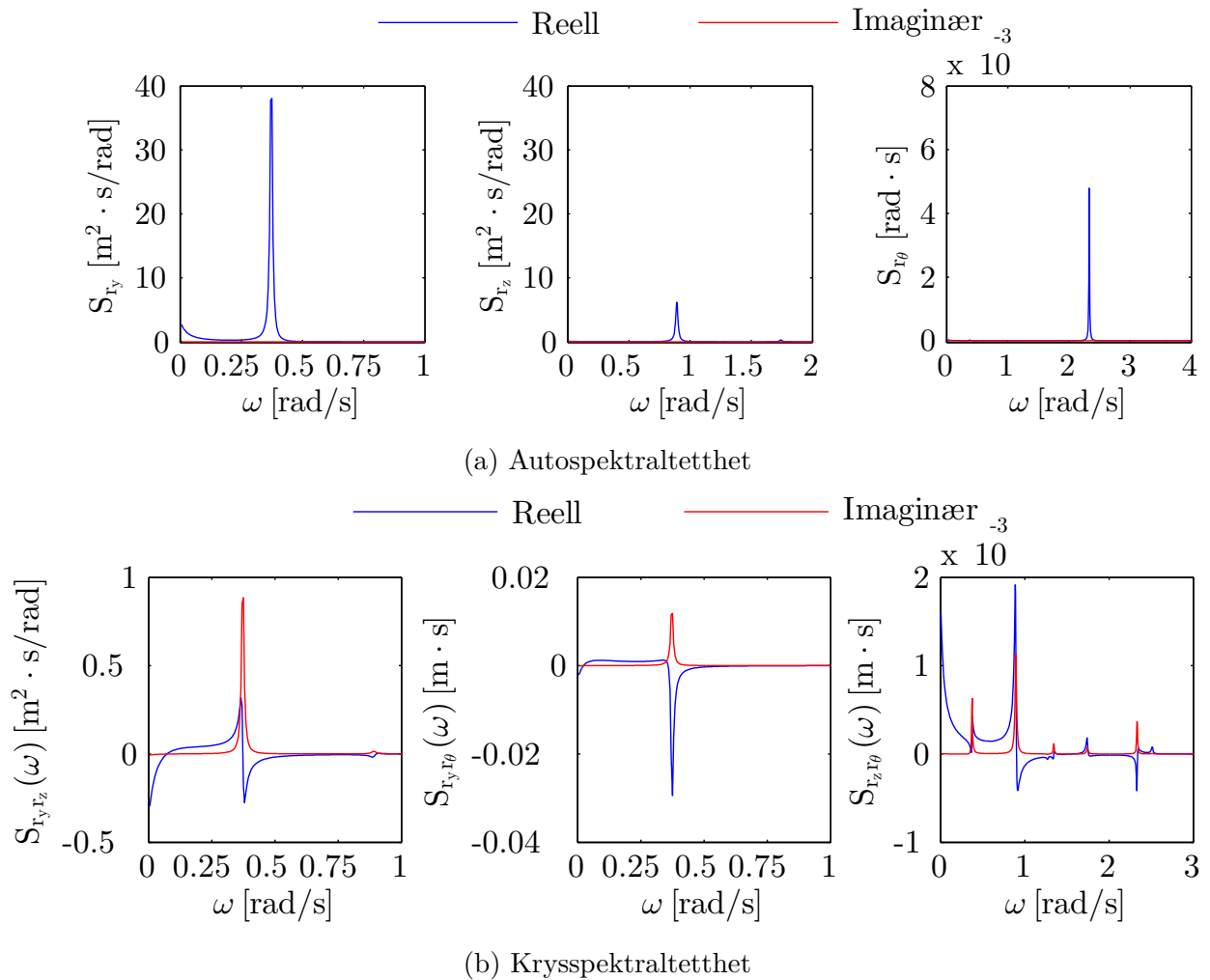


(b) Vertikalforskyvning

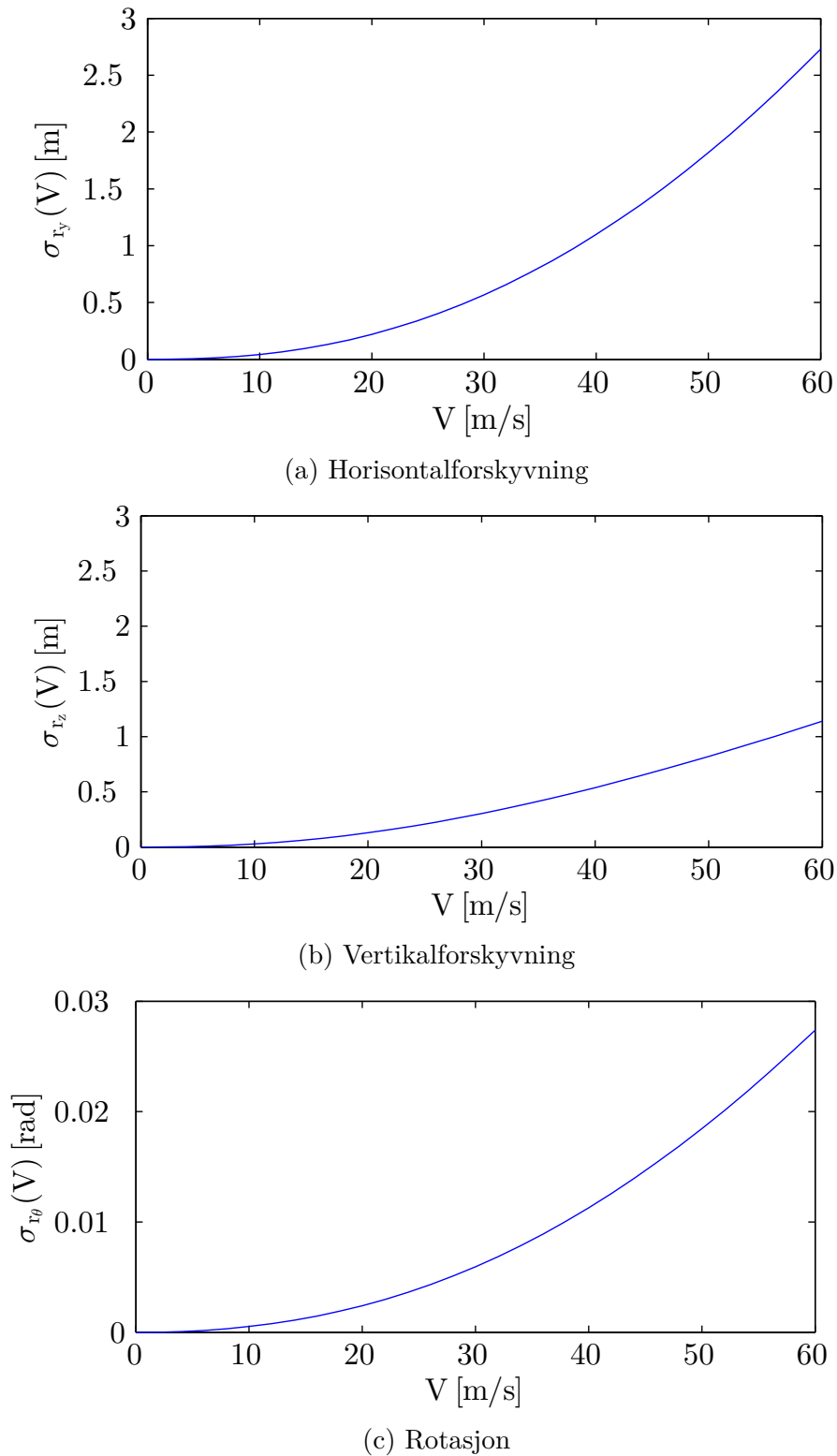


(c) Rotasjon

Figur 5.10: Predikert spektraltetthet for responsen i midtpennet for økende vindhastighet



Figur 5.11: Predikert spektraltetthet for responsen i midtspennet ved  $V = 38 \text{ m/s}$



Figur 5.12: Predikert standardavvik for respons i midtspennet for økende vindhastighet

## 5.7 Predikert maksimal dynamisk respons

Den maksimale dynamiske responsen er gitt av ligning (5.9):

$$\mathbf{r}_{dyn,maks} = \bar{\eta}_{maks} \cdot \sigma_r \quad (5.9)$$

Hvor toppfaktoren,  $\bar{\eta}_{maks}$ , er gitt i ligning 2.91. Toppfaktoren er beregnet til å være 3.42 og 3.66 i henholdsvis y- og z-retning. Det er valgt å bruke den høyeste verdien,  $\bar{\eta}_{maks} = 3.66$ , for begge retninger.

# Kapittel 6

## Resultat og diskusjon

Hardangerbruas egenfrekvenser er identifisert ut fra spektralanalyse av akselerasjonsmålinger ved hjelp av metoden som er beskrevet i detalj i kapittel 4.3. Et egetutviklet MATLAB-program er brukt til beregningen av predikert vindindusert dynamisk respons.

### 6.1 Egenfrekvenser og svingemoder

#### 6.1.1 Egenfrekvenser

Elementmetodemodellen til Solheim [33] inngår i beregningsgrunnlaget til responsprediksjonen. De analytiske egenfrekvensene til denne modellen er i tabell 6.1 sammenlignet med de målte egenfrekvensene fra signalprosesseringen. Totalt er 10 ulike tidsserier med akselerasjoner analysert. Målte egenfrekvenser er gitt som et gjennomsnitt, hvor egenfrekvenskandidater utenfor ett standardavvik er ekskludert. Akselerasjonsmålingene har en lengde på 31 minutter som gir en frekvensoppløsning på  $3.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$ , slik at de målte egenfrekvensene kun kan oppgis med en nøyaktighet på to desimaler.

De analytiske verdiene gir gode estimat for vertikal- og torsjonsmodene, men fraviker betydelig i horisontalretning. Samtlige av de analytiske egenfrekvensene for horisontalmodene ligger over de målte verdiene. Spesielt skiller  $\omega_2$  og  $\omega_3$  seg ut ved at rekkefølgen er forandret.

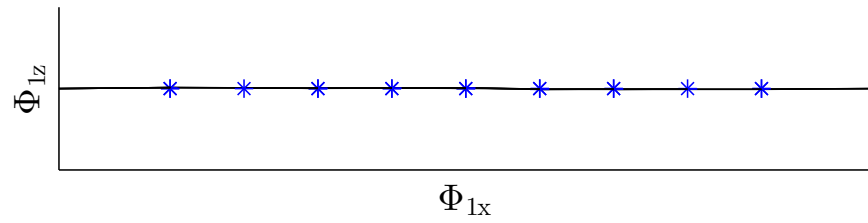
Tabell 6.1: Sammenligning av målt og analytisk indikert egenfrekvens [ $rad/s$ ]

Modenummer $n$	Målt $\omega_n$ [rad/s]	Analytisk $\omega_n$ [rad/s]	Avvik $\Delta\omega$ [rad/s]	Modeform
1	0.32	0.37	+0.05	Horisontal 1. symmetrisk
2	0.65	0.79	+0.14	Horisontal 1. asymmetrisk
3	0.75	0.71	-0.04	Vertikal 1. asymmetrisk
4	0.89	0.89	0	Vertikal 1. symmetrisk
5	1.15	1.34	+0.19	Horisontal 2. symmetrisk
6	1.27	1.27	0	Vertikal 2. symmetrisk
7	1.33	1.33	0	Vertikal 2. asymmetrisk
8	1.72	1.74	+0.02	Vertikal 3. symmetrisk
9	1.98	2.15	+0.17	Horisontal 2. asymmetrisk
10	2.09	2.08	-0.01	Vertikal 3. asymmetrisk
11	2.34	2.33	-0.01	Torsjon 1. symmetrisk
12	2.51	2.52	+0.01	Vertikal 4. symmetrisk
13	2.89	2.92	+0.03	Horisontal 3. symmetrisk
14	2.95	3.02	+0.07	Vertikal 4. asymmetrisk
15	3.48	3.41	-0.07	Torsjon 1. asymmetrisk

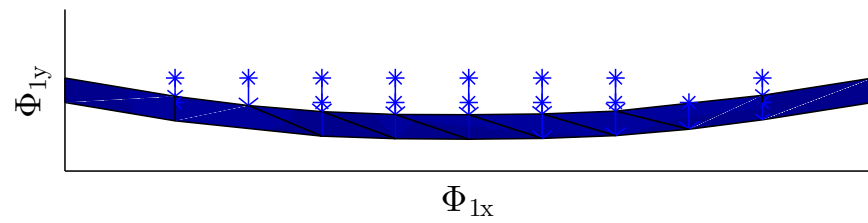
Kapittel 6.1.2-6.1.4 visualiserer egenfrekvensenes korresponderende egenmoder. Svingeformen til vertikal retning og horisontal retning er normalisert etter største utslag fra begge retninger og plottet i tre dimensjoner. Torsjonsmodene er normalisert slik at største vinkelutslag er lik  $\frac{\pi}{2}$  radianer. Figur 6.1-6.15 viser modeformer som er identifisert i egenfrekvensanalysen. Hver mode er vist i både horisontal- og vertikalplanet for å tydelig kunne avsløre modalkobling.

I horisontalplanet symboliserer fargene utslag i vertikalretning hvor blått og rødt indikerer henholdsvis ingen og fullt utslag. For vertikalplanet symboliserer fargene utslag i horisontal retning, og igjen indikerer blått null utslag og rødt fullt utslag. Fargespekteret hadde stor betydning for letingen etter korrekt egenfrekvens.

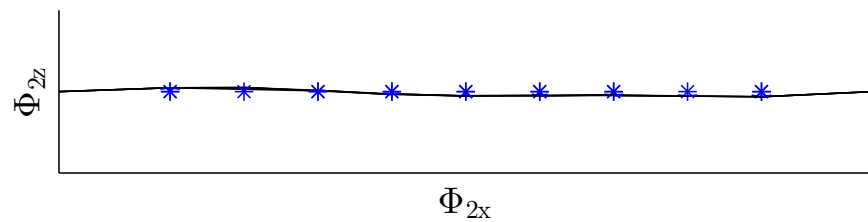
## 6.1.2 Horisontalmoder



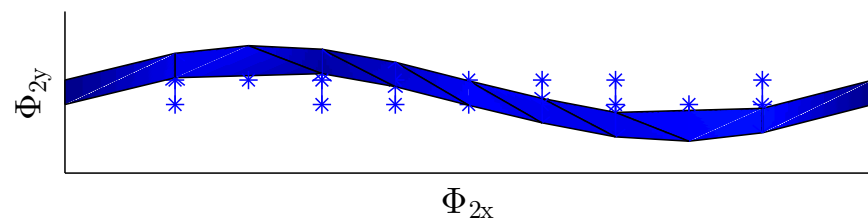
(a) Vertikalplan



(b) Horisontalplan

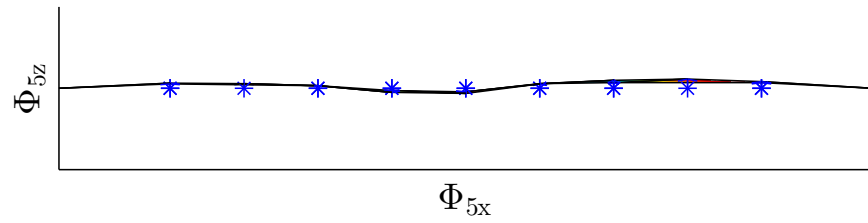
Figur 6.1: Horisontal 1. symmetrisk,  $\Phi_1$ 

(a) Vertikalplan

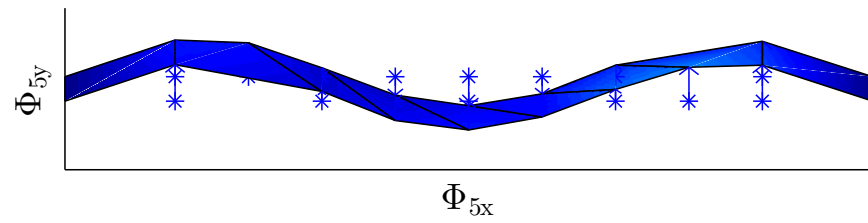


(b) Horisontalplan

Figur 6.2: Horisontal 1. asymmetrisk,  $\Phi_2$

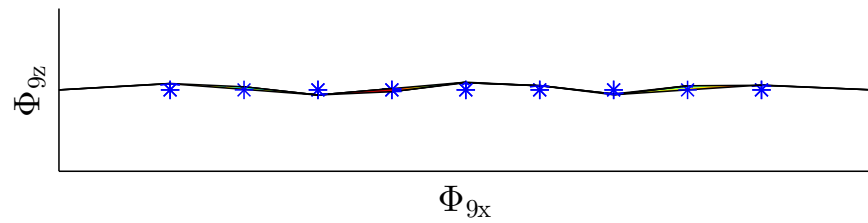


(a) Vertikalplan

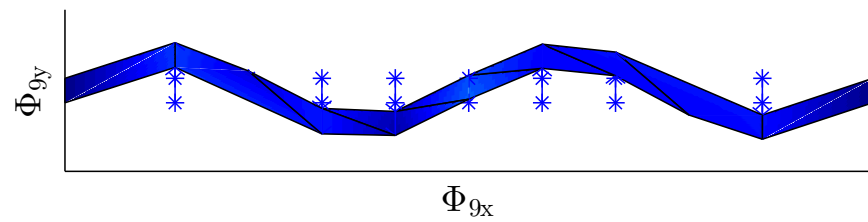


(b) Horisontalplan

Figur 6.3: Horisontal 2. symmetrisk,  $\Phi_5$



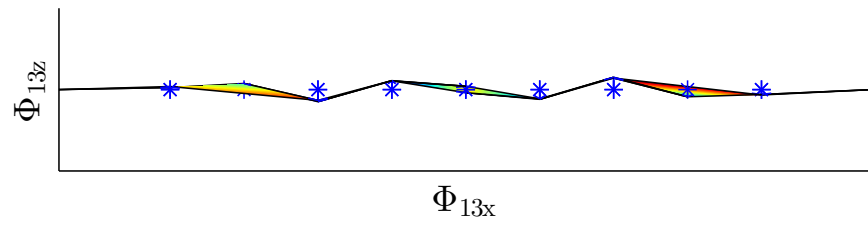
(a) Vertikalplan



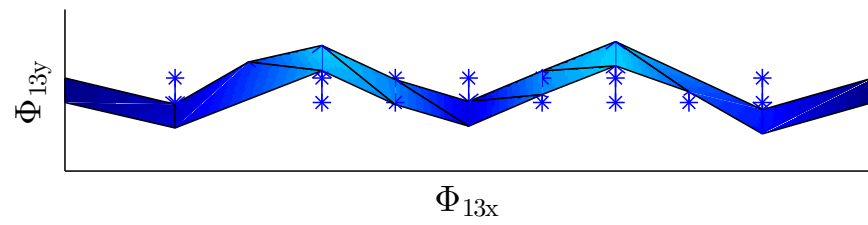
(b) Horisontalplan

Figur 6.4: Horisontal 2. asymmetrisk,  $\Phi_9$





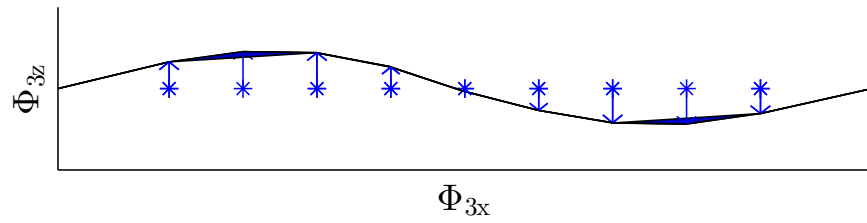
(a) Vertikalplan



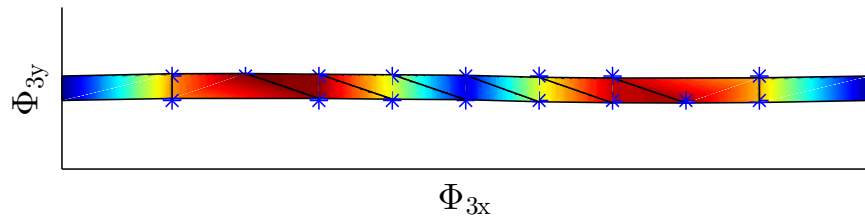
(b) Horisontalplan

Figur 6.5: Horisontal 3. symmetrisk,  $\Phi_{13}$

### 6.1.3 Vertikalmoder

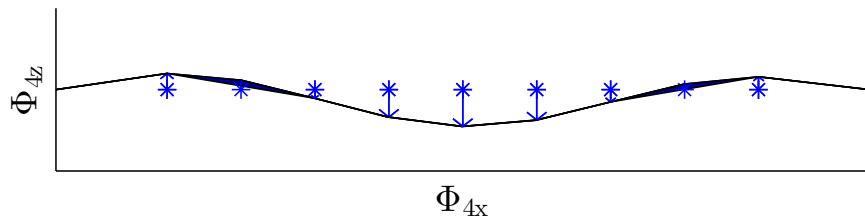


(a) Vertikalplan

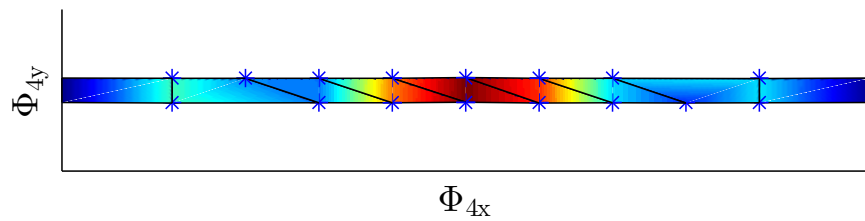


(b) Horisontalplan

Figur 6.6: Vertikal 1. asymmetrisk,  $\Phi_3$

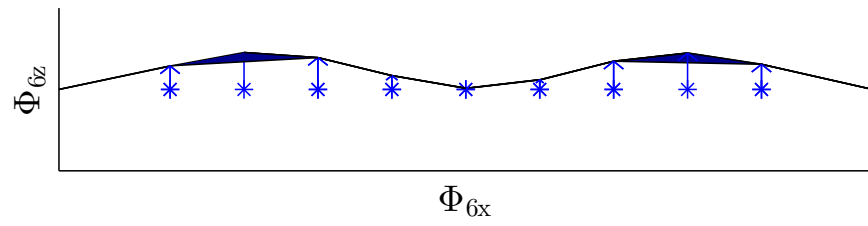


(a) Vertikalplan

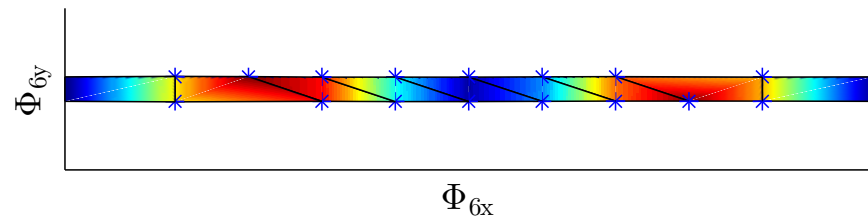


(b) Horisontalplan

Figur 6.7: Vertikal 1. symmetrisk,  $\Phi_4$

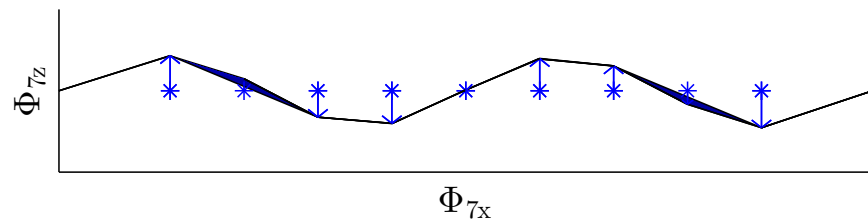


(a) Vertikalplan

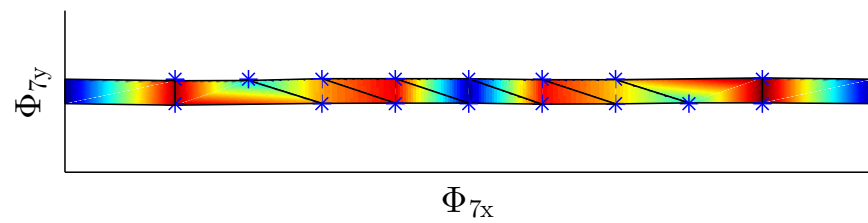


(b) Horisontalplan

Figur 6.8: Vertikal 2. symmetrisk,  $\Phi_6$

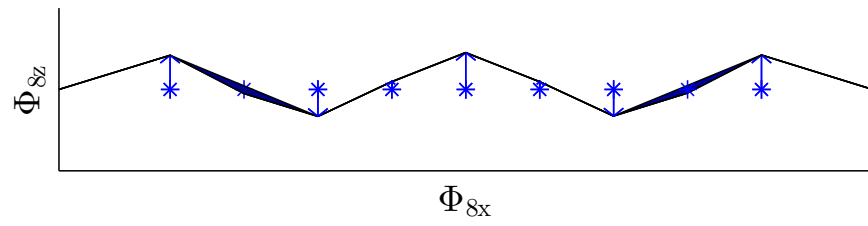


(a) Vertikalplan

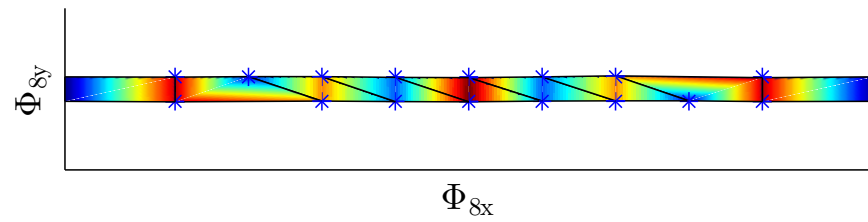


(b) Horisontalplan

Figur 6.9: Vertikal 2. asymmetrisk,  $\Phi_7$

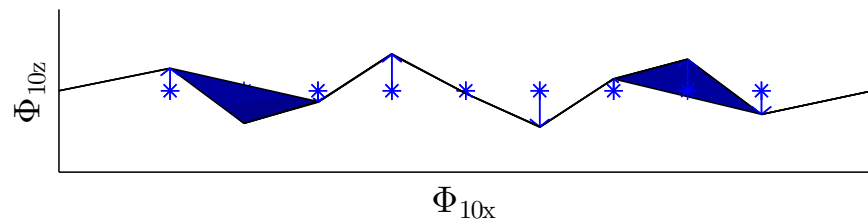


(a) Vertikalplan

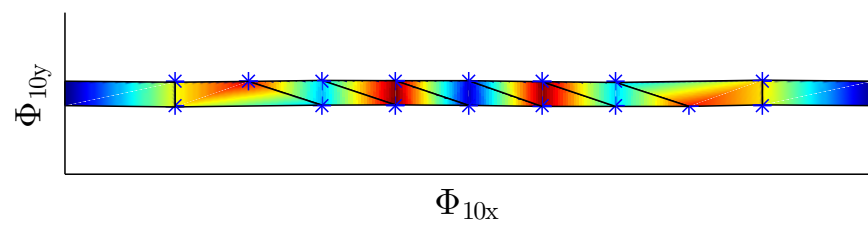


(b) Horisontalplan

Figur 6.10: Vertikal 3. symmetrisk,  $\Phi_8$

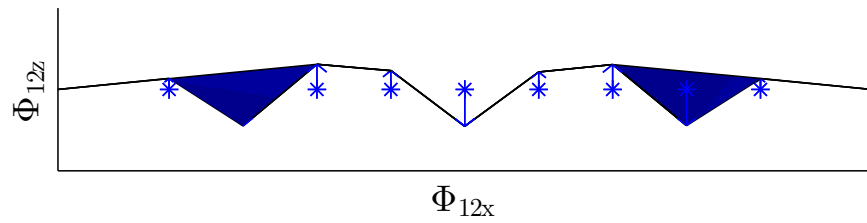


(a) Vertikalplan

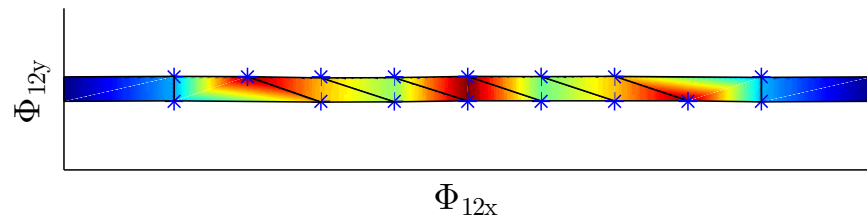


(b) Horisontalplan

Figur 6.11: Vertikal 3. asymmetrisk,  $\Phi_{10}$

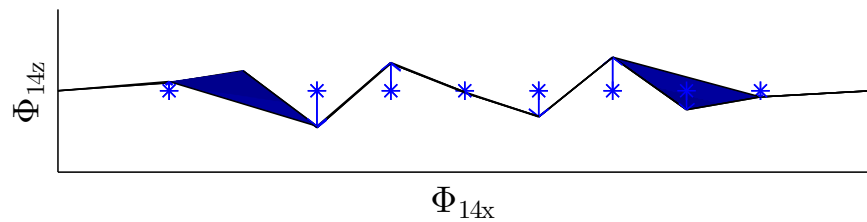


(a) Vertikalplan

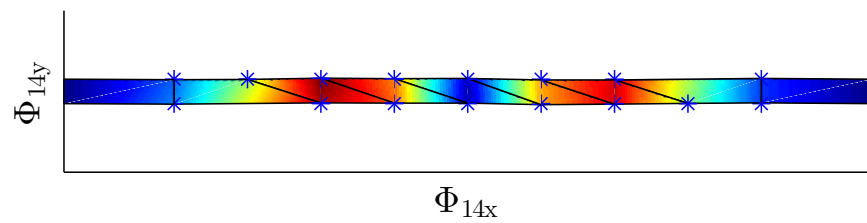


(b) Horisontalplan

Figur 6.12: Vertikal 4. symmetrisk,  $\Phi_{12}$



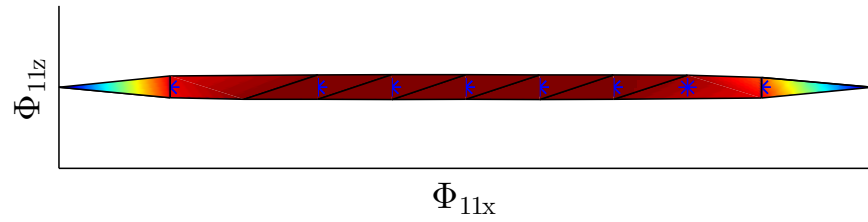
(a) Vertikalplan



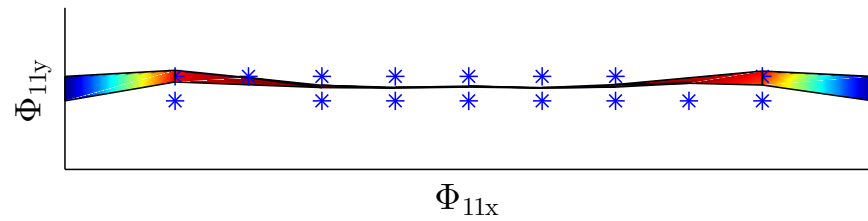
(b) Horisontalplan

Figur 6.13: Vertikal 4. asymmetrisk,  $\Phi_{14}$

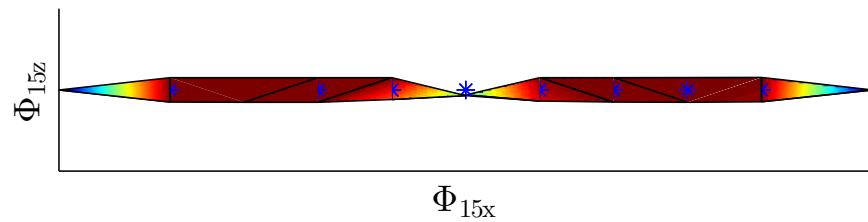
## 6.1.4 Torsjonsmoder



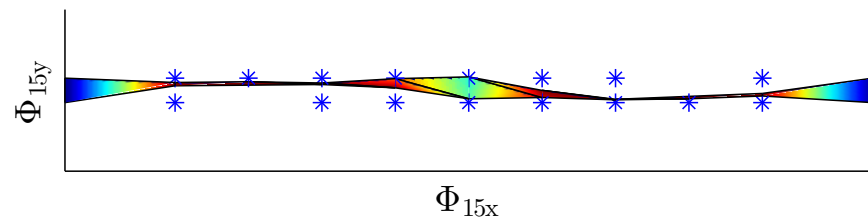
(a) Vertikalplan



(b) Horisontalplan

Figur 6.14: Torsjon 1. symmetrisk,  $\Phi_{11}$ 

(a) Vertikalplan



(b) Horisontalplan

Figur 6.15: Torsjon 1. asymmetrisk,  $\Phi_{15}$

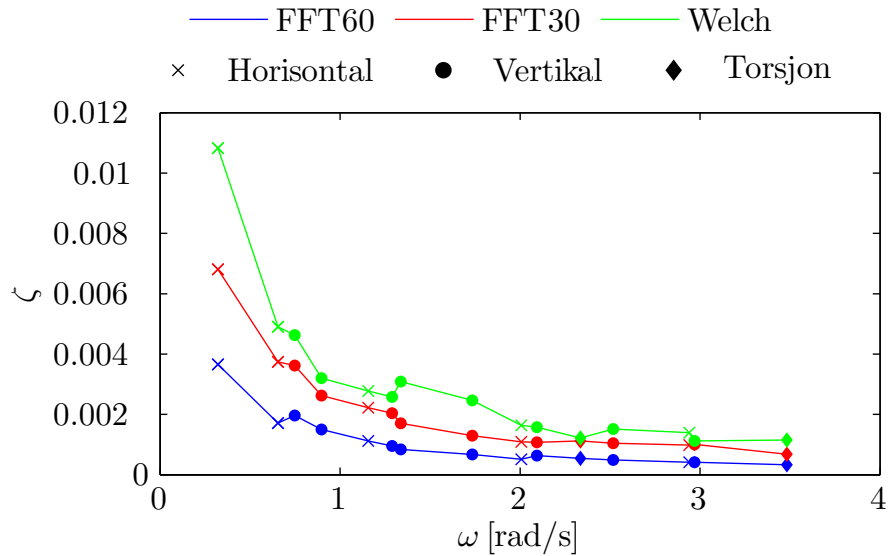
## 6.2 Dempningstall

Dempningstallene er beregnet ved hjelp av båndbredden ved halv signalstyrke for tre ulike diskretiserte akselerasjonspektraltettheter. Analyserte spektraltetthetene er FFT med signallengde,  $T = 60 \text{ min}$  og  $T = 30 \text{ min}$ , og Welch med signallengde,  $T = 60 \text{ min}$ ; Hammingvindu; segmentlengde,  $L = \frac{T}{2}$ , og 50% overlapp. De tre diskretiseringene er omtalt som henholdsvis FFT60, FFT30 og Welch og er diskutert i kapittel 4.4.3. Dempningstallene er gitt som gjennomsnittet av tre tidsserier med lav vindhastighet hvor den aeroelastiske dempningen,  $\zeta_{ae}$ , gir et minimalt bidrag. Resultatet fra tre ulike diskretiseringer er presentert i tabell 6.2.

Tabell 6.2: Modaledempningstall for ulike diskretiseringer

Modenummer $n$	$\zeta_n$ FFT60	$\zeta_n$ FFT30	$\zeta_n$ Welch	Modeform	
1	0.0037	0.0068	0.0108	Horisontal	1. symmetrisk
2	0.0017	0.0037	0.0049	Horisontal	1. asymmetrisk
3	0.0020	0.0036	0.0046	Vertikal	1. asymmetrisk
4	0.0015	0.0026	0.0032	Vertikal	1. symmetrisk
5	0.0011	0.0022	0.0028	Horisontal	2. symmetrisk
6	0.0010	0.0020	0.0026	Vertikal	2. symmetrisk
7	0.0008	0.0017	0.0031	Vertikal	2. asymmetrisk
8	0.0007	0.0013	0.0025	Vertikal	3. symmetrisk
9	0.0005	0.0011	0.0016	Horisontal	2. asymmetrisk
10	0.0006	0.0011	0.0016	Vertikal	3. asymmetrisk
11	0.0005	0.0011	0.0012	Torsjon	1. symmetrisk
12	0.0005	0.0010	0.0015	Vertikal	4. symmetrisk
13	0.0004	0.0010	0.0014	Horisontal	3. symmetrisk
14	0.0004	0.0010	0.0011	Vertikal	4. asymmetrisk
15	0.0003	0.0007	0.0011	Torsjon	1. asymmetrisk

Figur 6.16 viser en sammenligning av dempningstallene fra de ulike diskretiseringene i tabell 6.2.



Figur 6.16: Gjennomsnittlig dempningsestimert for tidsserie  $S_{1,\zeta}$ ,  $S_{2,\zeta}$  og  $S_{3,\zeta}$

For å oppnå en tilfredstillende beskrivelse av spektraltettheten, må det velges en lang signallengde,  $T$ . Avkallet på stasjonære forhold anses som neglisjerbart i forhold til den store usikkerheten knyttet til valg av diskretisering som fremgår av figur 6.16.

Middelvinden fra akselerometerene for de ulike tidsseriene er gitt i tabell A.4. Målingenes maksimale middelvindhastighet er  $V_{maks} = 6 \text{ m/s}$ , og den gjennomsnittlige middelvinden er  $\bar{V} = 3.6 \text{ m/s}$ . Innsatt i ligning (4.4) gir middelvindhastigheten et aeroelastisk dempningsbidrag for de fire første modene på  $\zeta_{ae,1} = 1.6 \cdot 10^{-3}$ ,  $\zeta_{ae,2} = 0.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $\zeta_{ae,3} = 5.8 \cdot 10^{-3}$  og  $\zeta_{ae,4} = 4.8 \cdot 10^{-3}$ . De korrigerede dempningsstallene for de fire første modene er gitt i tabell 6.3. De negative dempningsestimertene er trolig et resultat av at de aeroelastiske dempningen overestimeres. Dette er fordi uttrykkene i ligning (4.4) baserer seg på antagelsen om at vindhastigheten er konstant langs hele bruspennet. Målinger viser tydelig at dette ikke er tilfellet.

Dempningsestimert fra amplitudereduksjon i tidsdomenet er brukt til å kontrollere dempningsestimertene fra båndbreddemetoden. Første symmetriske horisontalmode,  $\Phi_1$ , ble bestemt til å være  $\zeta_1 = 0.0096$ , mens første symmetriske vertikalmode,  $\Phi_4$ , ble fastsatt til  $\zeta_4 = 0.0009$  etter at de aeroelastiske dempningsbidragene er trukket fra. Av de tre ulike diskretiseringene så er det reduserte dempningsestimert fra Welch nærmest estimert fra tidsdomenet.



Tabell 6.3: Korrigerte modaledempningstall for ulike diskretiseringer

Modenummer	$\zeta_{s,n}$	$\zeta_{s,n}$	$\zeta_{s,n}$	Modeform	
n	FFT60	FFT30	Welch		
1	0.0021	0.0052	0.0092	Horisontal	1. symmetrisk
2	0.0009	0.0029	0.0041	Horisontal	1. asymmetrisk
3	-0.0038	-0.0022	-0.0012	Vertikal	1. asymmetrisk
4	-0.0033	-0.0022	-0.0016	Vertikal	1. symmetrisk

### 6.3 Turbulens-krysspektraltetthet

Spektralfordelingen til vindens turbulens er beregnet ut fra anemometer nummer 6 som er plassert i midtspennet. Målingene er sammenlignet med teoretiske tilnærminger gitt i ligning (5.5). Utrykkene for  $S_u$  og  $S_w$  viser seg å stemme med målinger, mens krysspektraltettheten,  $S_{uw}$ , viser seg å underestimere høyefrekvente vindlaster. Følgende korreksjon er foreslått:

$$S_{uw,korr}(\omega) = S_{wu,korr}(\omega) = \frac{2.23Vz\kappa}{\left(1 + \frac{1.67\omega z}{V}\right)^{\frac{5}{3}}} \quad (6.1)$$

Korreksjonen er plottet sammen med originaluttrykket og måledata i figur 5.7. Korreksjonen gir en beskjeden økning i predikert vertikalforskyvning og reduserer predikert horisontalforskyvning og rotasjon. I tabell 6.4 er endring i standardavvik som en konsekvens av korreksjonen eksemplifisert for en vindhastighet på  $V = 60 \text{ m/s}$ .

	$S_{uw}(\omega)$	$S_{uw,korr}(\omega)$	$\Delta\sigma_r$
$\sigma_{r_y} [m]$	2.60	2.73	+0.13
$\sigma_{r_z} [m]$	1.39	1.14	-0.25
$\sigma_{r_\theta} [rad]$	0.0292	0.0274	-0.018

Tabell 6.4: Endring i predikert respons for en middelvindhastighet på  $V = 60 \text{ m/s}$ 

Endringene i standardavvik som følge av korreksjonen har ved sammenligning med målt dynamisk respons vist seg å gi en mer korrekt prediksjon.

## 6.4 Sammenligning av predikert og målt vindindusert dynamisk respons

I kapittel 5.6 er det vist hvordan det predikerte standardavviket til responsen i midtspennet utvikler seg med økende middelvindhastighet opp til den kritiske vindhastigheten,  $V_c$ . Studiet av målt respons er begrenset til å omfatte dynamisk respons i midtspennet, induisert av vindhastigheter innenfor intervallet 9-11  $m/s$ .

Av totalt 593 målinger har 83 tidsserier middelvindhastighet innenfor 9-11  $m/s$ . En analyse av de aktuelle målingene med den egenutviklede 3D-modellen, omtalt i kapittel 4.5, resulterte i at mange målinger ble forkastet på grunn av støy. Totalt gjenstod kun ni tidsserier som ble ansett for å gi representative standardavvik.

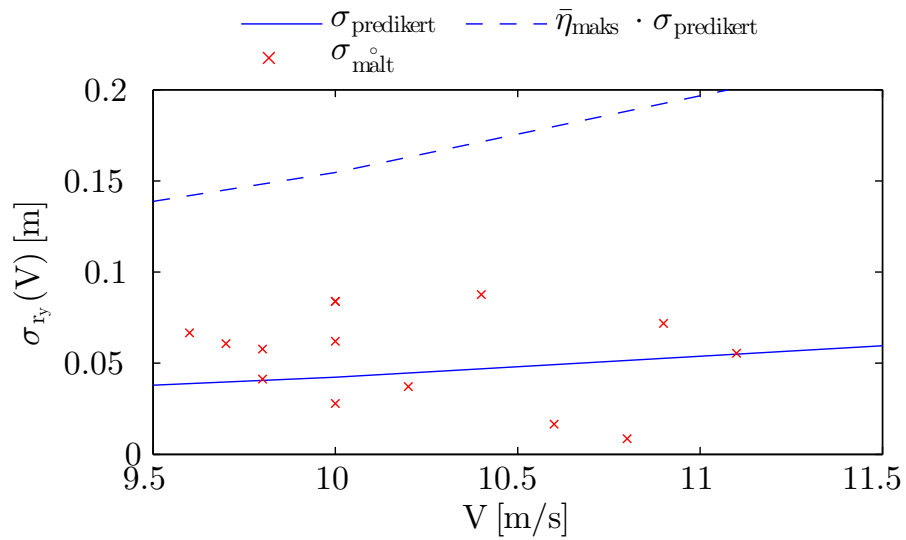
Figur 6.17 viser en sammenligning av predikert og målt standardavvik for responsen til midtspennet. Den maksimale predikerte dynamiske responsen er gitt av standardavviket multiplisert med en toppfaktor, som ut fra ligning (2.91) er beregnet til å være

$$\bar{\eta}_{maks} = 3.66.$$

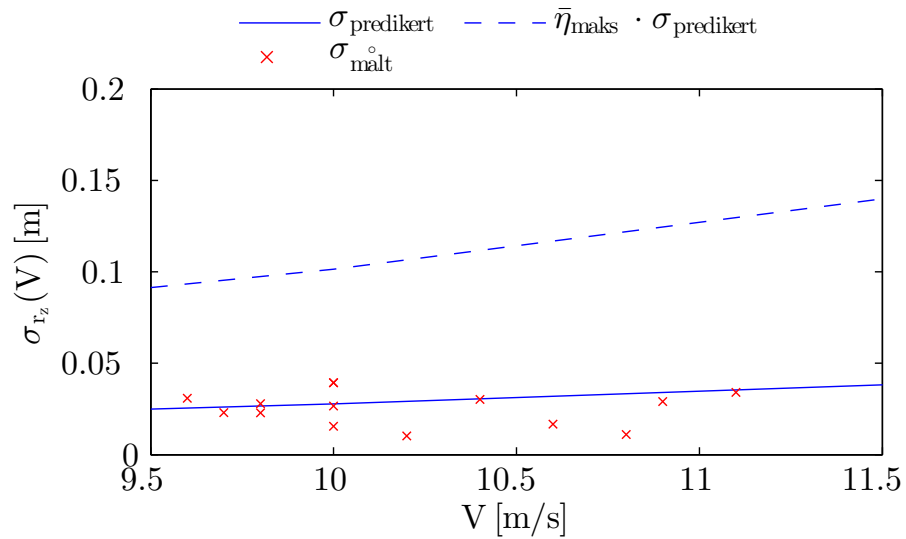
Det er kontrollert at de målte verdiene fra de to akselerometerene i midtspennet samsvarer. I figur 6.17 er kun standardavvik fra akselerometer nummer 8 illustrert. Vedlegg C inneholder en oversikt over hvilke tidsserier de analyserte segmentene er tatt ut fra.

Standardavvikene i figur 6.17 viser at den predikerte responsen gir en god beskrivelse av faktisk respons innenfor det gitte intervallet. Den målte spredningen i horisontalretning ligger godt innenfor maksimal predikert respons. Målinger som inneholder trafikk er ekskludert slik at de brukte forflytningene er tilnærmet normalfordelte. Stokastisk beskrivelse av de utvalgte målingene er samlet i vedlegg C.

6.4. SAMMENLIGNING AV PREDIKERT OG MÅLT VINDINDUSERT DYNAMISK  
RESPONS



(a) Horisontalretning



(b) Vertikalretning

Figur 6.17: Predikert og estimert standardavvik for middelvindintervall  $V \in [9.5, 11.5]m/s$



# Kapittel 7

## Konklusjon

Denne masteroppgaven tar for seg sammenligningen av predikert og estimert vindindusert dynamisk respons. Dynamiske nøkkelparametere som inngår i predikeringsmodellen er kontrollert ut i fra fullskala målinger. Egenfrekvensene og dempningstallene til Hardangerbrua er kartlagt ved å signalprosessere akselerasjonsmålinger. De målte egenfrekvensene indikerer at den etablerte elementmetode modellen overestimerer egenfrekvensene i horisontalretning. Spesielt skiller  $\omega_2$  og  $\omega_3$  seg ut ved at rekkefølgen er endret.

Dempningsestimatene er funnet ved å måle båndbredden ved halv signalstyrke til tre ulike diskretiseringer av akselerasjonsspektraltetthet. De tre diskretiseringene gir tre svært ulike dempningsestimat. Et fellestrekk er at de målte dempningstallene viser en tydelig masseproportjonal trend hvor første horisontale egenmode er estimert til å ha en dempning på mellom 0.4-1.1%. Det viser seg å være stor usikkerhet knyttet til metoden. Broas slankhet gjør at den skiller seg ut slik at det mangler et sammenligningsgrunnlag. Det konkluderes med at dempningsestimatene må kontrolleres via en annen metode.

Responser til Hardangerbrua er beregnet ved å benytte et høypassfilter under en dobbel numerisk integrasjon av digitaliserte akselerasjonssignaler. Et høypassfilter basert på FFT minimerer integrasjonsfeil ved valg av avkuttingsfrekvens,  $\omega_{af} \approx \frac{\omega_1}{2}$ . Metoden har resultert i et MATLAB-program som modellerer sanntidsforskyvninger i tre dimensjoner sammen med endringer i vind langs bruspennet. Programmet er brukt til å verifisere troverdigheten til

integrasjonsmetoden. Modellen er også anvendt til å tolke hvordan trafikk og endringer i vind påvirker akselerasjon og forskyvning langs Hardangerbrua og gir et inntrykk av total last- og responsituasjon.

I denne avhandlingen er det utviklet et MATLAB-program, basert på veletablert turbulensteori, som beregner predikert vindindusert dynamisk respons til en hengebru. Dette programmet er brukt til å predikere responsen til Hardangerbrua utsatt for et estimert vindfelt. Den teoretiske kryssvindspektraltettheten, foreslått av Øiseth, er sammenlignet med målt spektraltetthet. Uttrykkene for  $S_{uu}$  og  $S_{ww}$  viser seg å gi en god tilnærming for vindmålinger med turbulensintensiteter  $I_u \approx 0.07$  og  $I_w \approx 0.06$ . Uttrykket for  $S_{uw} = S_{wu}$  viser seg å underestimere høyfrekvente komponenter. På bakgrunn av måleresultat og Kolmogorovs 3. hypotese, er et forslag til korreksjon gitt i ligning (5.6). Den foreslåtte korreksjonen resulterer i en prediksjon med økt horisontalforskyvning, redusert vertikalforskyvning og redusert torsjon.

Det er valgt å fokusere på vindindusert respons hvor middelvindhastigheter ligger innenfor intervallet 9.5-11.5  $m/s$  og det er lagt vekt på å innhente tidsseksjoner som er representative for stasjonære forhold. Den predikerte dynamiske responsen viser seg å stemme svært godt med den målte responsen innenfor det målte intervallet. Endringene i standardavvik som følge av korreksjonen har ved sammenligning med målt dynamisk respons vist seg å gi en mer korrekt prediksjon.

## 7.1 Forslag til videre arbeid

Det viser seg å være et betydelig avvik mellom målte og analytiske egenfrekvenser i horisontalretning. Elementmetodemodellen bør justeres med tanke på stivhet i y-retning.

Dempningen bør kontrolleres via en alternativ metode. Måling av fri amplitudereduksjon i tidsdomenet ut fra indirekte respons fra akselerasjon er antatt å gi et tilfredstillende dempnings estimat for et høyt antall tidsserier.

Målt respons er undersøkt for middelvind på rundt 10  $m/s$ , og sammenlignet med predikert respons. Den predikerte responsen bør sammenlignes for et større middelvindhastighets

intervall.

Den etablerte 3D-modellen kan benyttes til å studere sammenhengen mellom respons og ulike vind- og trafikksituasjoner. Videre kan modellen oppdateres slik at statisk respons for påkjent middelvindhastighet inkluderes i animasjonen.

Negative vindhastigheter i målinger er antatt å skyldes at likevektslinjen har blitt forskøvet under oppdateringer av programvare. En slik forskyvning vil også kunne gi falskt lave vindhastigheter som er vanskelig å oppdage. Hvilke målinger som er rammet må kartlegges og årsaken bak forskyvningen må undersøkes nærmere.





# Vedlegg A

## Signalprosessering

### A.1 FFT - Egenfrekvenskandidater

Tabell A.1: Tidsserier benyttet til å identifisere egenfrekvenser

	Tidsserie
$S_{1,\omega}$	HB141M-2013-12-22-07-35-45
$S_{2,\omega}$	HB141M-2013-12-22-07-04-45
$S_{3,\omega}$	HB141M-2013-12-22-06-33-45
$S_{4,\omega}$	HB141M-2013-12-06-13-25-13
$S_{5,\omega}$	HB141M-2013-12-06-13-56-13
$S_{6,\omega}$	HB141M-2013-12-06-14-27-13
$S_{7,\omega}$	HB141M-2013-12-06-15-00-58
$S_{8,\omega}$	HB141M-2013-12-06-15-37-52
$S_{9,\omega}$	HB141M-2014-01-13-04-32-33
$S_{10,\omega}$	HB141M-2014-01-11-09-09-34

Tabell A.2: Eigenfrekvenskandidater [ $rad/s$ ] for ulike tidsserier

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$S_{1,\omega}$	0.3209	0.6587	0.7533	0.8986	1.155	1.284	1.324	1.736	2.017	2.088	2.338	2.513		2.952	3.500
$S_{2,\omega}$	0.3209	0.6655	0.7398	0.8986	1.149	1.274	1.348	1.736	2.020	2.088	2.338	2.510		2.956	3.469
$S_{3,\omega}$	0.3209	0.6587	0.7466	0.8884	1.159	1.274	1.355	1.743	2.023	2.101	2.331	2.527		2.976	3.527
$S_{4,\omega}$	0.3209	0.6452	0.7432	0.8952	1.135	1.270	1.324	1.726	1.976	2.084	2.314	2.517	2.898	2.946	3.473
$S_{5,\omega}$	0.3243	0.6452	0.7499	0.8952	1.132	1.267	1.331	1.726	1.976	2.088	2.331	2.523	2.885	2.942	3.449
$S_{6,\omega}$	0.3209	0.6351	0.7432	0.8918	1.125	1.274	1.328	1.723	1.932	2.088	2.317	2.507	2.881	2.942	3.473
$S_{7,\omega}$	0.3209	0.6452	0.733	0.8817	1.145	1.277	1.334	1.723	1.959	2.088	2.317	2.510	2.898	2.952	3.442
$S_{8,\omega}$	0.3209	0.6587	0.7567	0.8952	1.138	1.274	1.334	1.719	1.973	2.088	2.338	2.507	2.871	2.956	3.476
$S_{9,\omega}$	0.3209	0.652	0.7634	0.8918	1.149	1.297	1.334	1.719	1.983	2.098	2.341	2.530	2.895	2.969	3.513
$S_{10,\omega}$	0.3277	0.6722	0.8175	0.8884	1.155	1.287	1.338	1.726	2.000	2.904	2.351	2.520	2.898	2.959	3.500

## A.2 Dempningsestimat fra ulike tidsserier

Tabell A.3: Tidsserier brukt til å finne dempningsestimat

$S_{1,\zeta}$	HB141M-2014-01-11-09-09-34 + HB141M-2014-01-11-09-40-34
$S_{2,\zeta}$	HB141M-2013-12-06-13-25-13 + HB141M-2013-12-06-13-56-13
$S_{3,\zeta}$	HB141M-2013-12-06-17-20-55 + HB141M-2013-12-06-17-51-55

Tidsseriene i tabell A.3 er valgt fordi at de har lav middelvindhastighet slik at det aeroelastiske dempingsbidraget  $\zeta_{ae}$  blir lite. Middelvindhastigheten for de ulike anemometerene er gitt i tabell A.4. Anemometerplasseringen er vist i figur 4.1.

Tabell A.4: Middelvind for tidsserier [ $m/s$ ]

Anemometer	1	2	4	6	7	8
$S_{1,\zeta}$	3.8	-0.6	2.8	1.1	3.2	1.3
$S_{2,\zeta}$	3.8	-1.0	5.4	3.9	6.0	2.4
$S_{3,\zeta}$	3.6	-1.6	5.4	3.9	5.8	2.1

Anemometer nummer 2 gir negative verdier for vindhastigheten  $V$  for de tre målingene. Dette skyldes en feilkalibrering hvor vinden svinger rundt feil middelvindhastighet. Verdiene fra dette anemometeret er derfor ikke tatt med i beregningen av serienes gjennomsnittlige middelvindhastighet.

Tabell A.5, A.6 og A.5 viser parameteren  $W = \frac{\Delta\omega_B}{\Delta\omega}$ . Betydningen av denne parameteren er omtalt i kapittel 4.4.

## A. SIGNALPROSESSERING

Tabell A.5:  $W$ -parameter for ulike diskretiseringer for tidsserie  $S_{1,\zeta}$

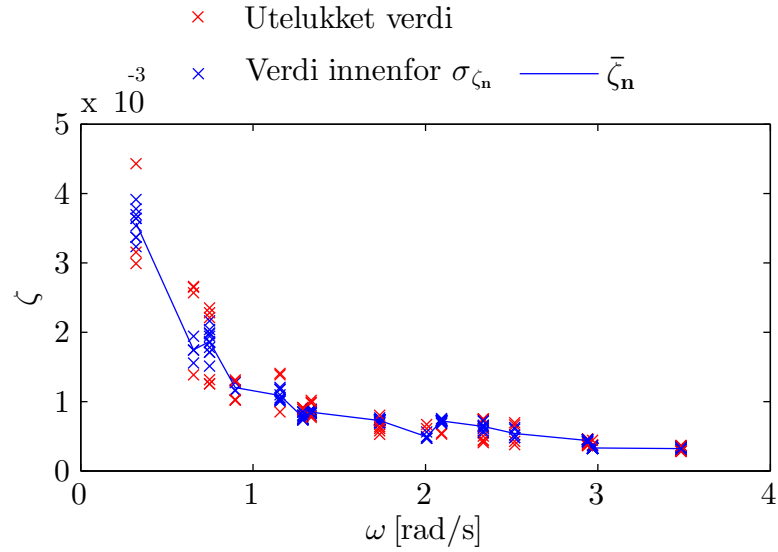
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
FFT60	1.8	2.3	2.1	1.7	1.9	1.4	1.7	1.6	2.1	2.0	2.0	2.3	1.6	1.9	1.7
FFT30	1.0	0.9	1.0	0.8	1.1	1.0	1.0	0.9	0.6	0.9	0.8	0.7	1.0	0.9	1.0
Welch	4.3	4.0	5.0	3.6	4.1	5.1	5.1	4.6	4.8	4.4	3.6	5.3	5.5	4.4	4.9

Tabell A.6:  $W$ -parameter for ulike diskretiseringer for tidsserie  $S_{2,\zeta}$

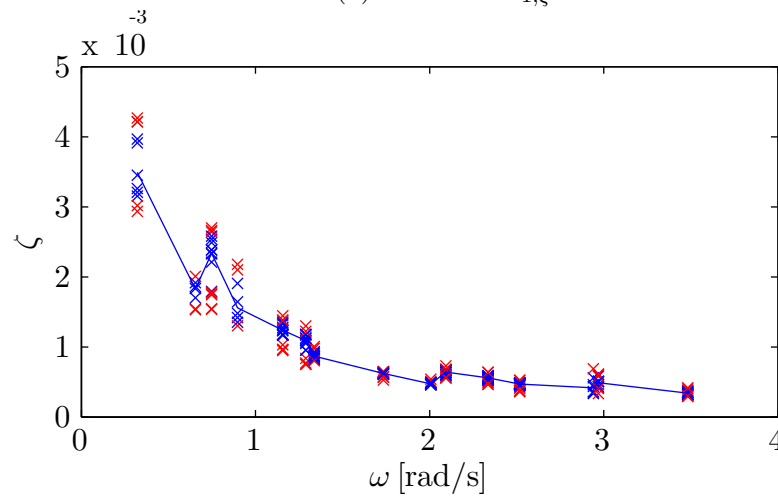
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
FFT60	2.1	1.7	2.3	2.7	1.9	1.9	1.7	1.5	1.7	1.9	1.8	1.7	2.2	2.2	2.0
FFT30	0.7	0.9	1.4	1.1	1.0	0.9	0.9	1.1	1.0	1.2	1.0	0.9	1.0	1.0	0.9
Welch	6.1	5.6	5.7	3.5	4.3	4.3	5.6	5.4	4.2	4.8	5.2	4.2	5.6	4.7	6.1

Tabell A.7:  $W$ -parameter for ulike diskretiseringer for tidsserie  $S_{3,\zeta}$

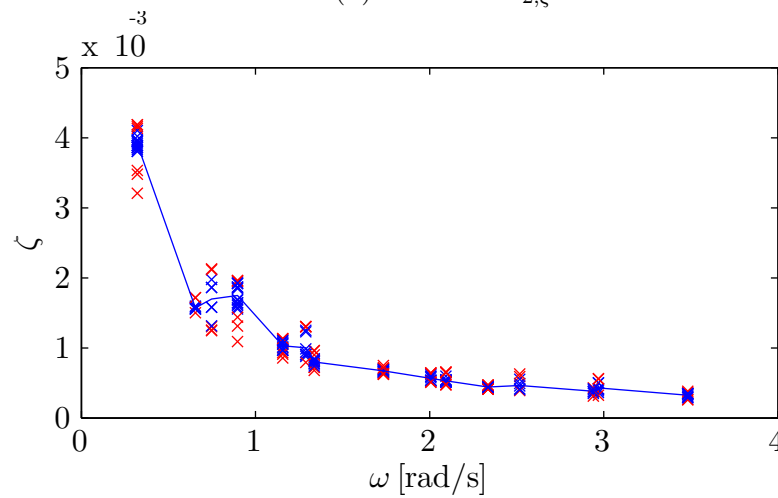
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
FFT60	1.6	2.0	2.2	2.0	1.7	2.1	1.8	1.7	1.7	1.6	1.3	2.1	1.8	1.8	1.9
FFT30	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.8	0.9	0.8	0.8	1.1	1.0	1.3	1.1	1.0
Welch	4.4	3.9	5.3	3.7	4.3	4.3	5.4	4.6	4.1	5.1	3.6	4.8	3.7	4.6	4.1



(a) Tidsserie  $S_{1,\zeta}$

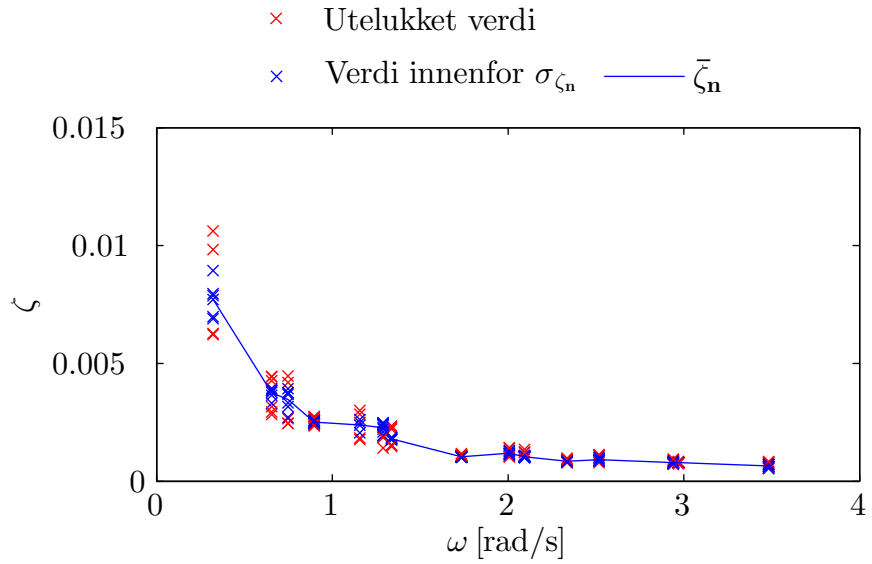


(b) Tidsserie  $S_{2,\zeta}$

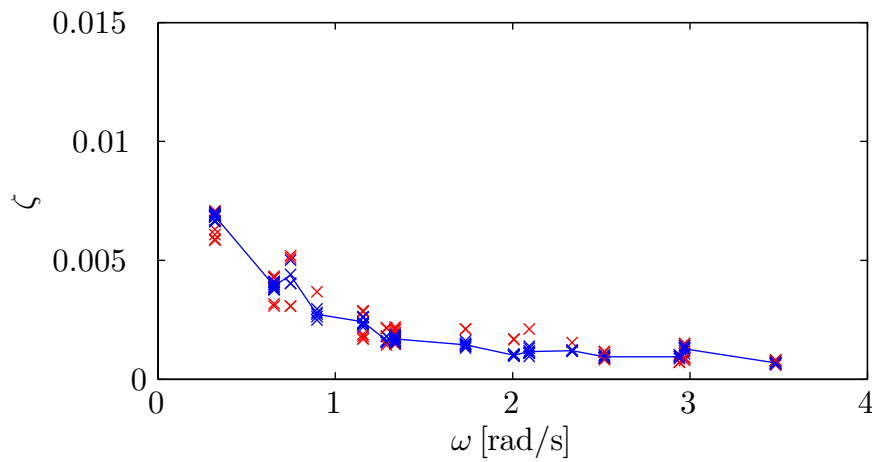


(c) Tidsserie  $S_{3,\zeta}$

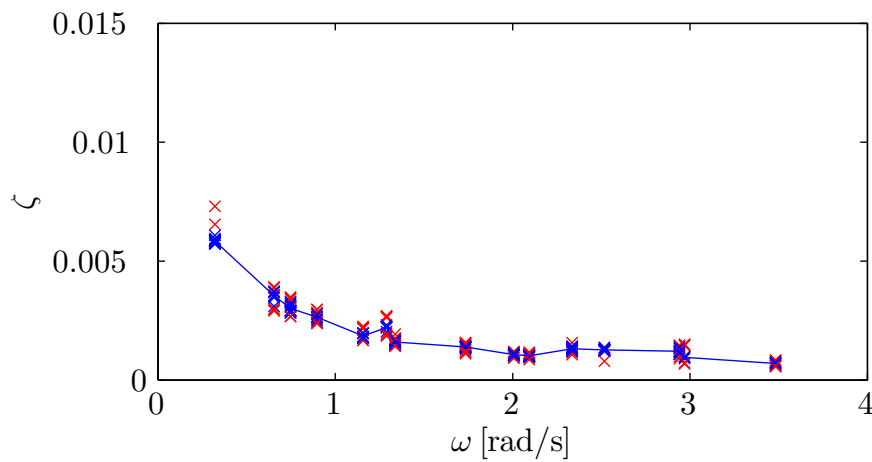
Figur A.1: Dempningsestimat fra FFT  $T = 60min$



(a) Tidsserie  $S_{1,\zeta}$

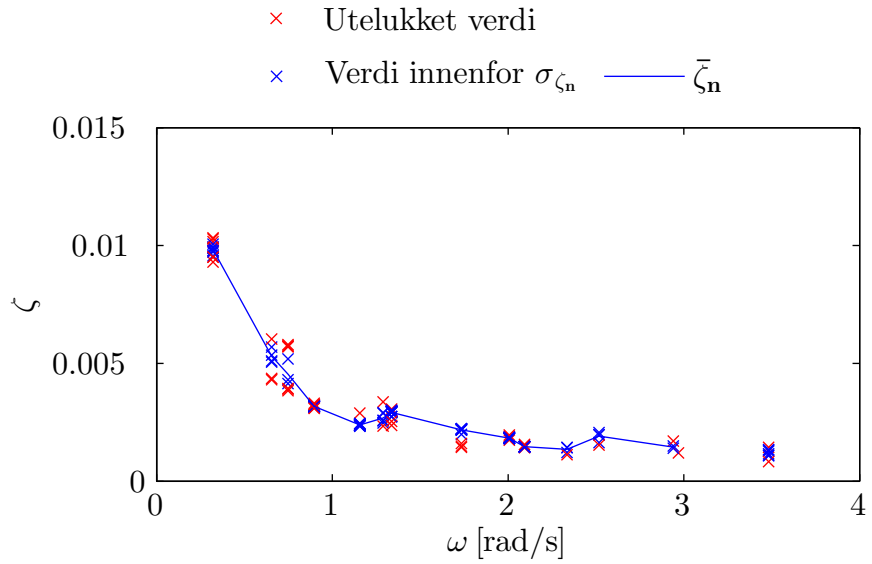


(b) Tidsserie  $S_{2,\zeta}$

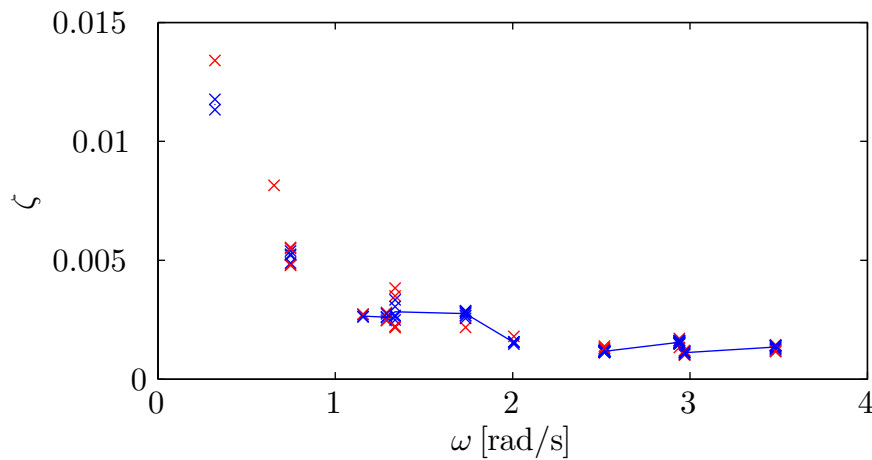


(c) Tidsserie  $S_{3,\zeta}$

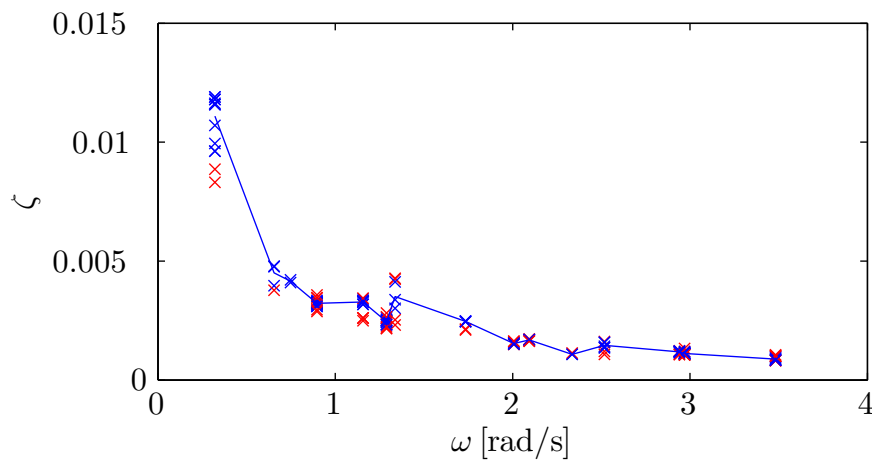
Figur A.2: Dampingsestimat fra FFT  $T = 30min$



(a) Tidsserie  $S_{1,\zeta}$



(b) Tidsserie  $S_{2,\zeta}$



(c) Tidsserie  $S_{3,\zeta}$

Figur A.3: Dempningsestimat fra Welch  $T = 30 \text{ min}$ ,  $L = \frac{T}{2}$ , 50% overlapp og Hammingvindu





## Vedlegg B

# Aerodynamiske deriverte - polynomkoeffisienter

De aerodynamiske derivertefunksjonene i figur ?? er funnet ved å kurvetilpasse måledate fra vindtunnelførsøkene utført av Svend Ole Hansen ApS [5]. Andregradspolynomene som er brukt er gitt på formen  $P = C_1x^2 + C_2x + C_3$ . Koeffisientene  $C_1$ ,  $C_2$  og  $C_3$  er gitt i tabell B.1.

Tabell B.1: Aerodynamisk derivate andregradspolynom koeffisienter

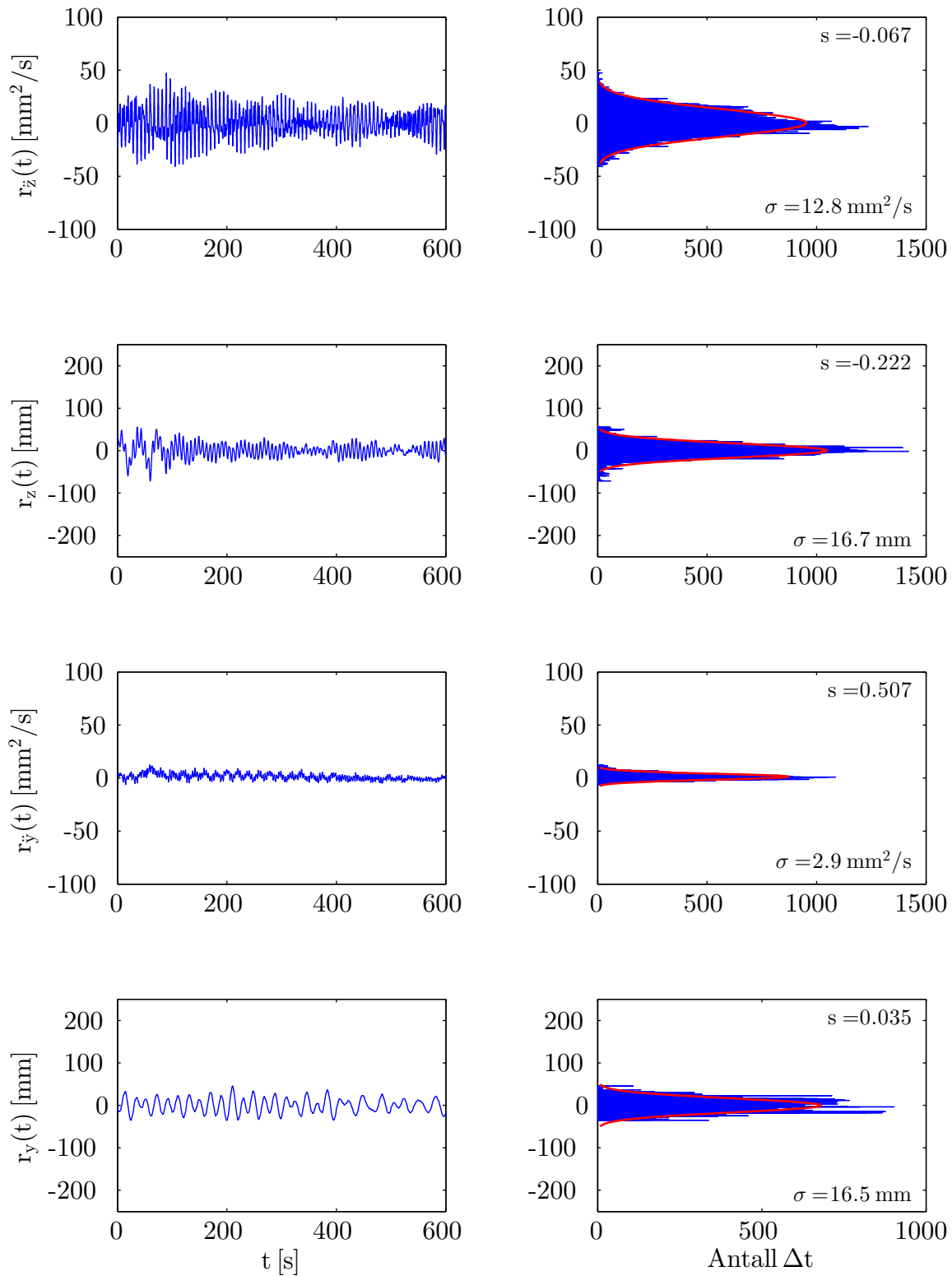
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$P_1^*$	0.0037	-0.1339	0.0085
$P_2^*$	-0.0005	-0.0039	0.0000
$P_3^*$	-0.0031	-0.0115	-0.0037
$P_4^*$	0.0028	-0.0291	-0.0589
$P_5^*$	-0.0002	-0.0234	-0.0019
$P_6^*$	-0.0023	0.0211	-0.0013
$H_1^*$	-0.0006	-0.3957	0.0083
$H_2^*$	0.0000	0.0659	0.0142
$H_3^*$	0.0526	0.0505	0.0157
$H_4^*$	0.0043	-0.1587	0.1173
$H_5^*$	-0.0358	0.7792	-0.3534
$H_6^*$	0.0014	0.0208	0.1423
$A_1^*$	-0.0010	-0.0676	-0.0179
$A_2^*$	-0.0008	-0.0186	0.0058
$A_3^*$	0.0169	0.0052	-0.0052
$A_4^*$	-0.0011	-0.0048	0.0376
$A_5^*$	-0.0019	0.0604	-0.0851
$A_6^*$	0.0015	-0.0794	-0.0104

## Vedlegg C

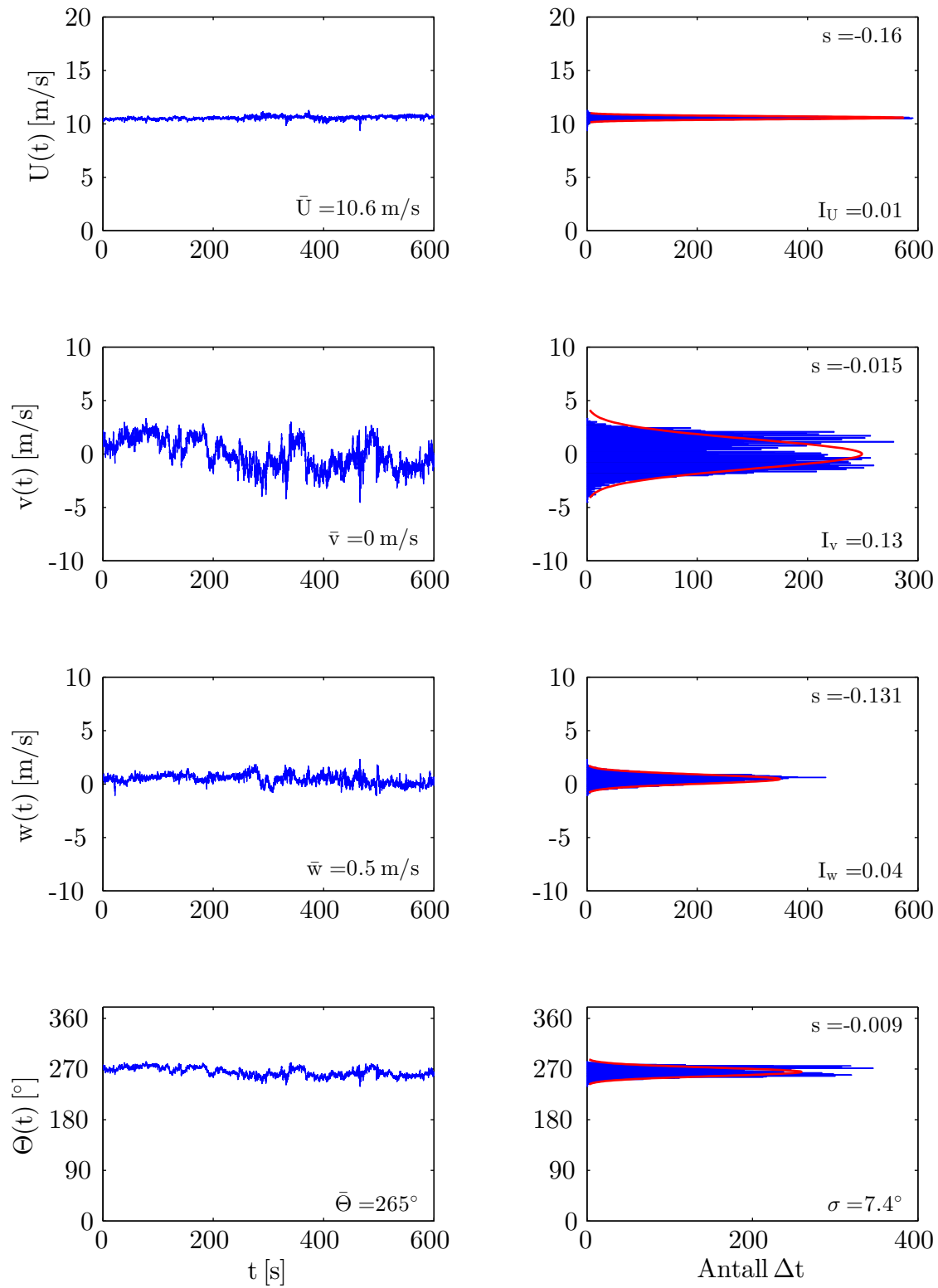
### Tidsserier for vind mellom 9-11 m/s

Tabell C.1: Tidsserier med 9-11  $m/s$  middelvind

	Tidsserie	Periode [s]
$S_1$	HB141M-2013-12-18-09-12-16	190-790
$S_2$	HB141M-2013-12-18-09-12-16	800-1600
$S_3$	HB141M-2013-12-22-03-49-29	170-770
$S_4$	HB141M-2013-12-22-04-20-29	1200-1800
$S_5$	HB141M-2013-12-26-21-13-53	200-800
$S_6$	HB141M-2013-12-26-21-13-53	1200-1800
$S_7$	HB141M-2013-12-26-21-44-53	1000-1600
$S_8$	HB141M-2013-12-26-22-57-15	240-840
$S_9$	HB141M-2013-12-26-22-57-15	980-1580
$S_{10}$	HB141M-2013-12-27-01-04-54	130-730
$S_{11}$	HB141M-2013-12-27-01-04-54	1000-1600
$S_{12}$	HB141M-2013-12-27-01-35-54	700-1300
$S_{13}$	HB141M-2013-12-27-01-35-54	1200-1800
$S_{14}$	HB141M-2014-01-01-07-17-27	400-1000
$S_{15}$	HB141M-2014-01-01-07-17-27	1100-1700

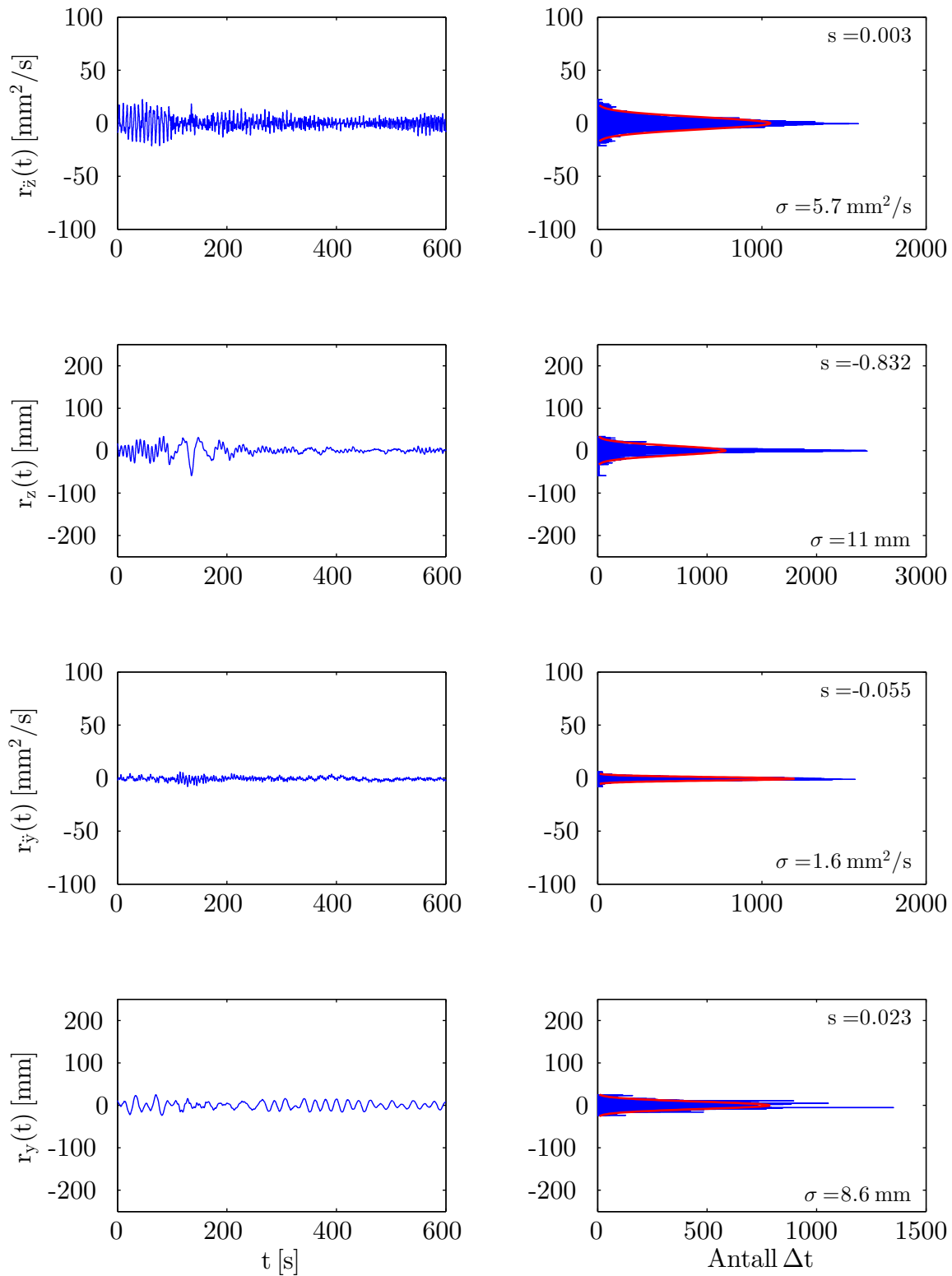


(a) Akselerasjon og forflytning

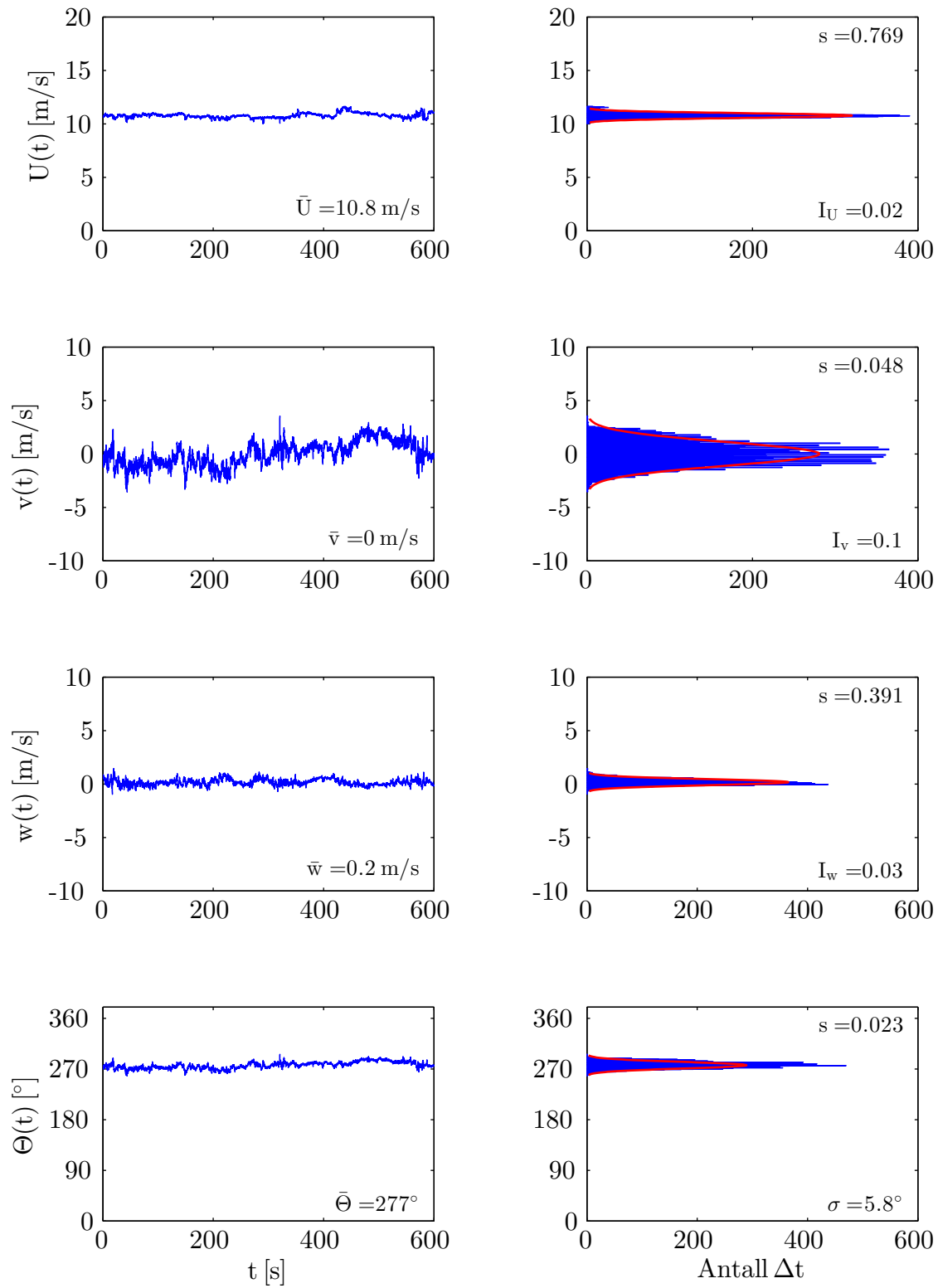


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.1: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_1$

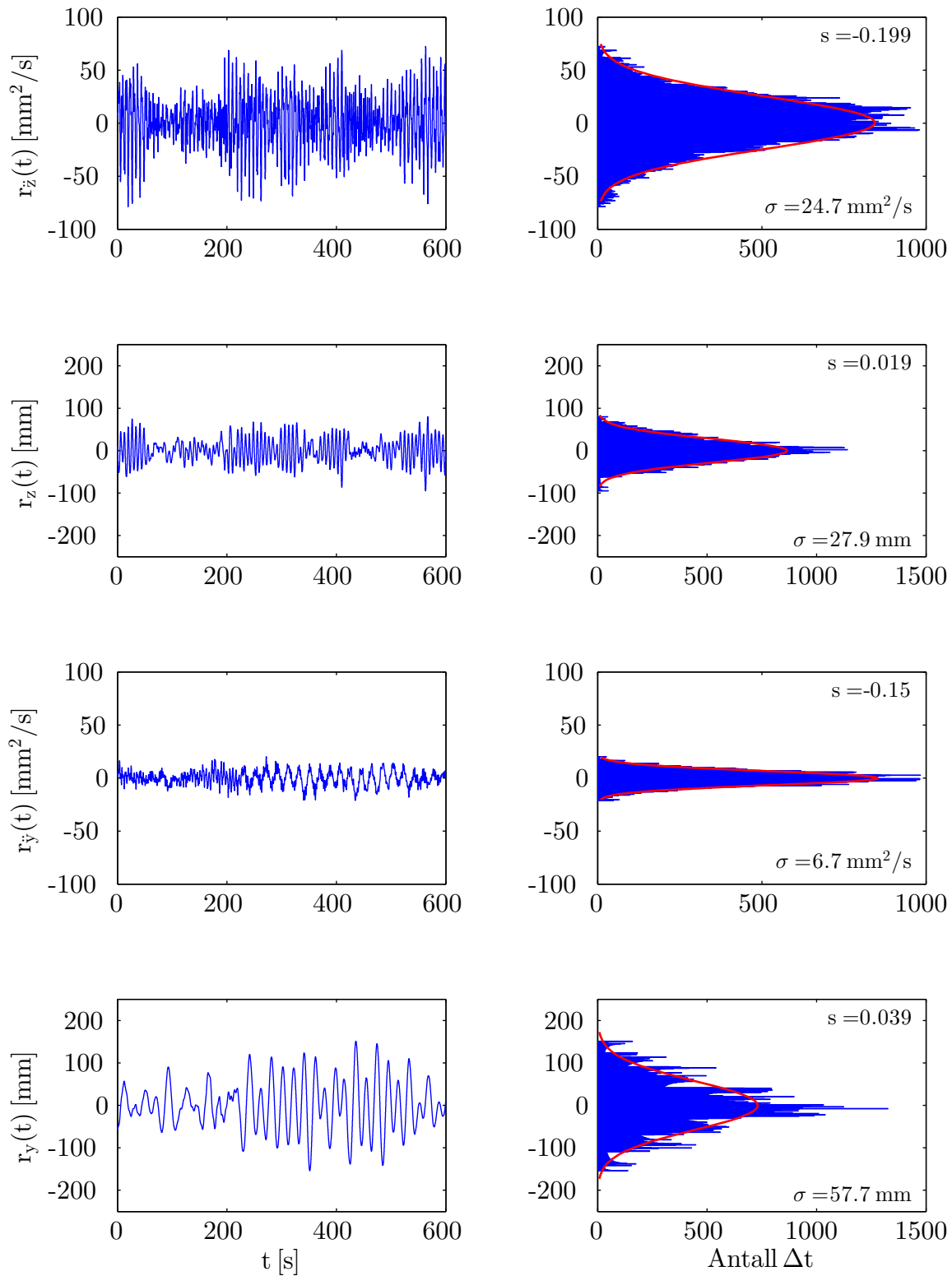


(a) Akselerasjon og forflytning



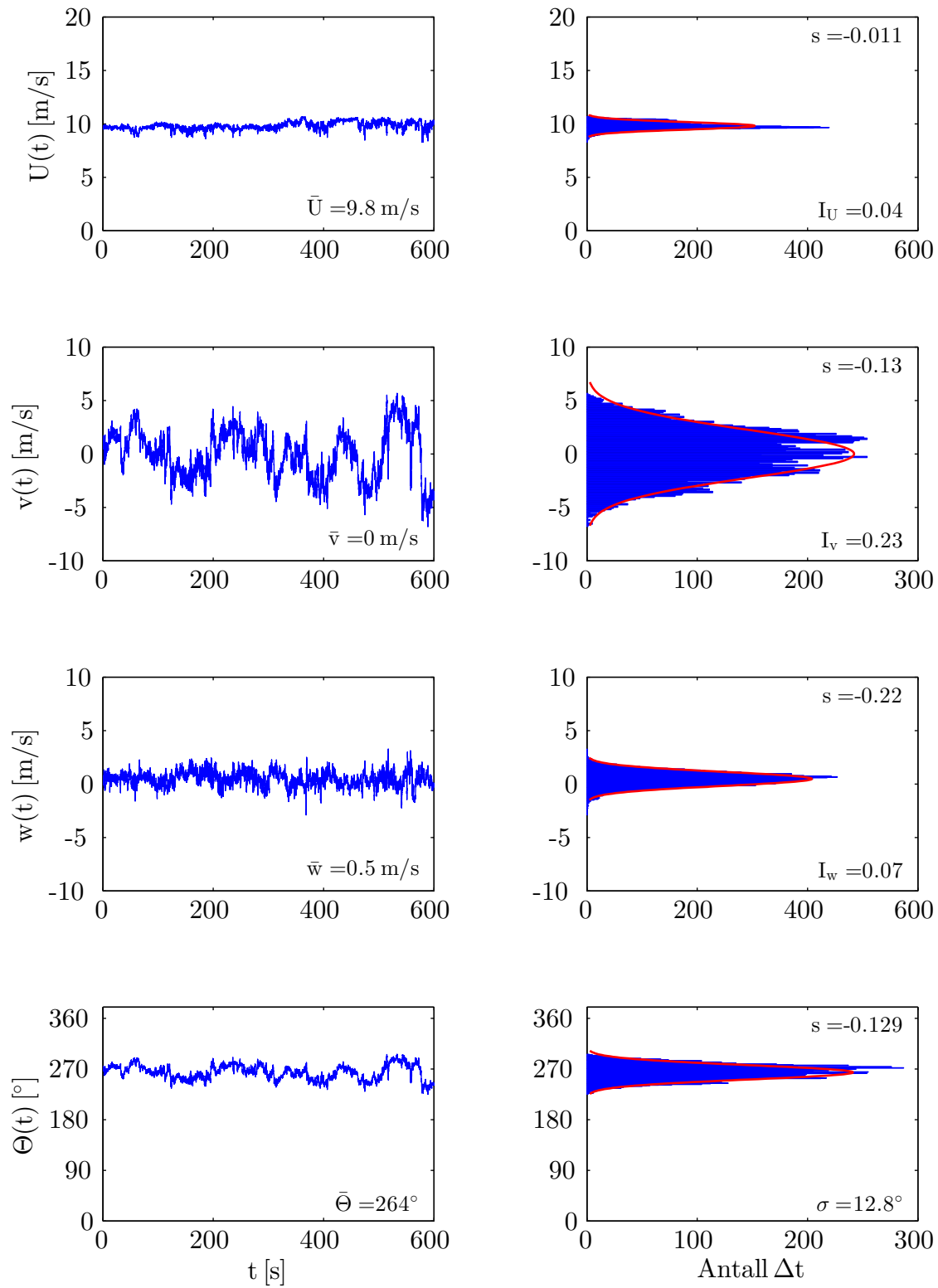
(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.2: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_2$



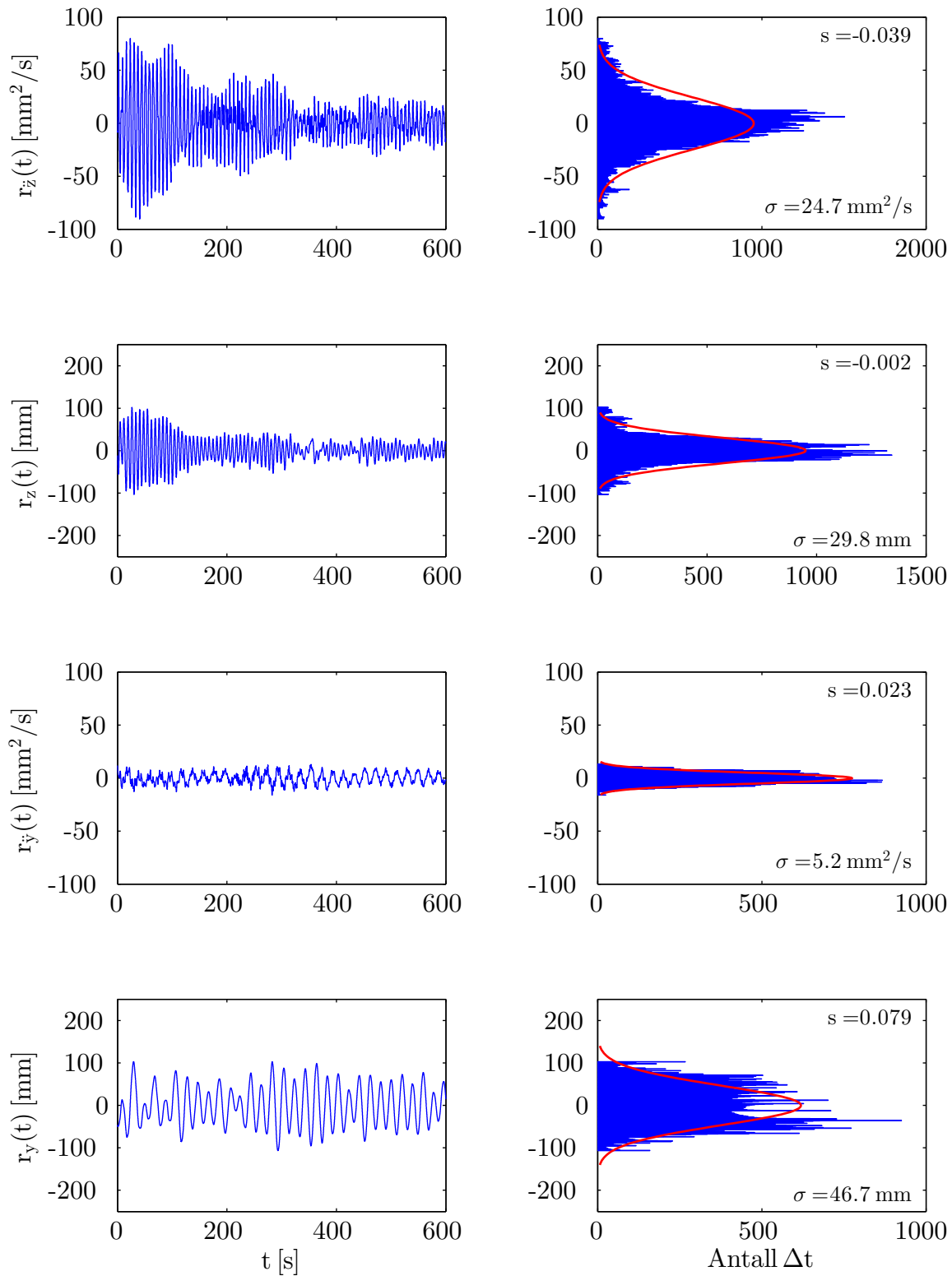
(a) Akselerasjon og forflytning



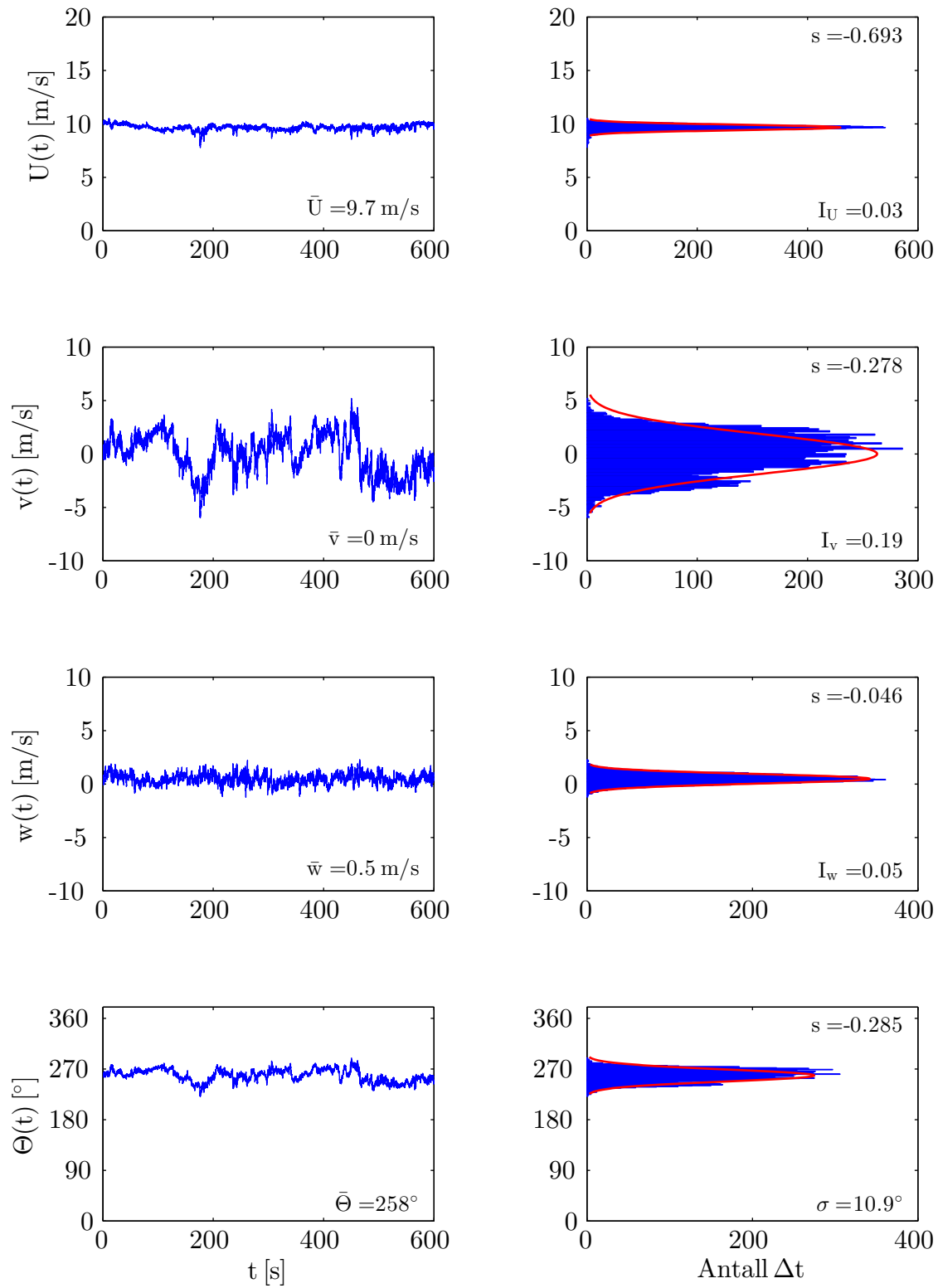


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.3: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_3$

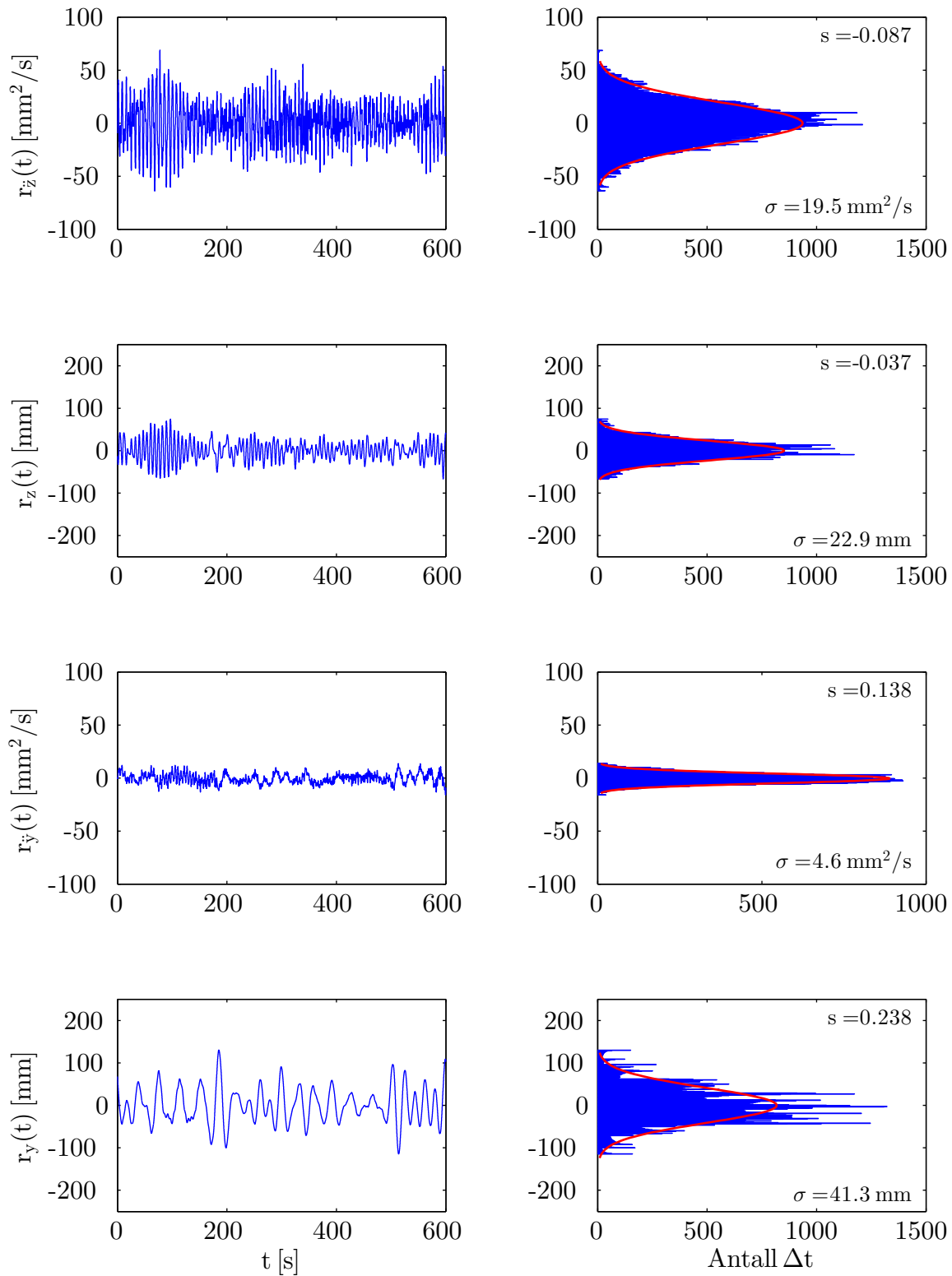


(a) Akselerasjon og forflytning

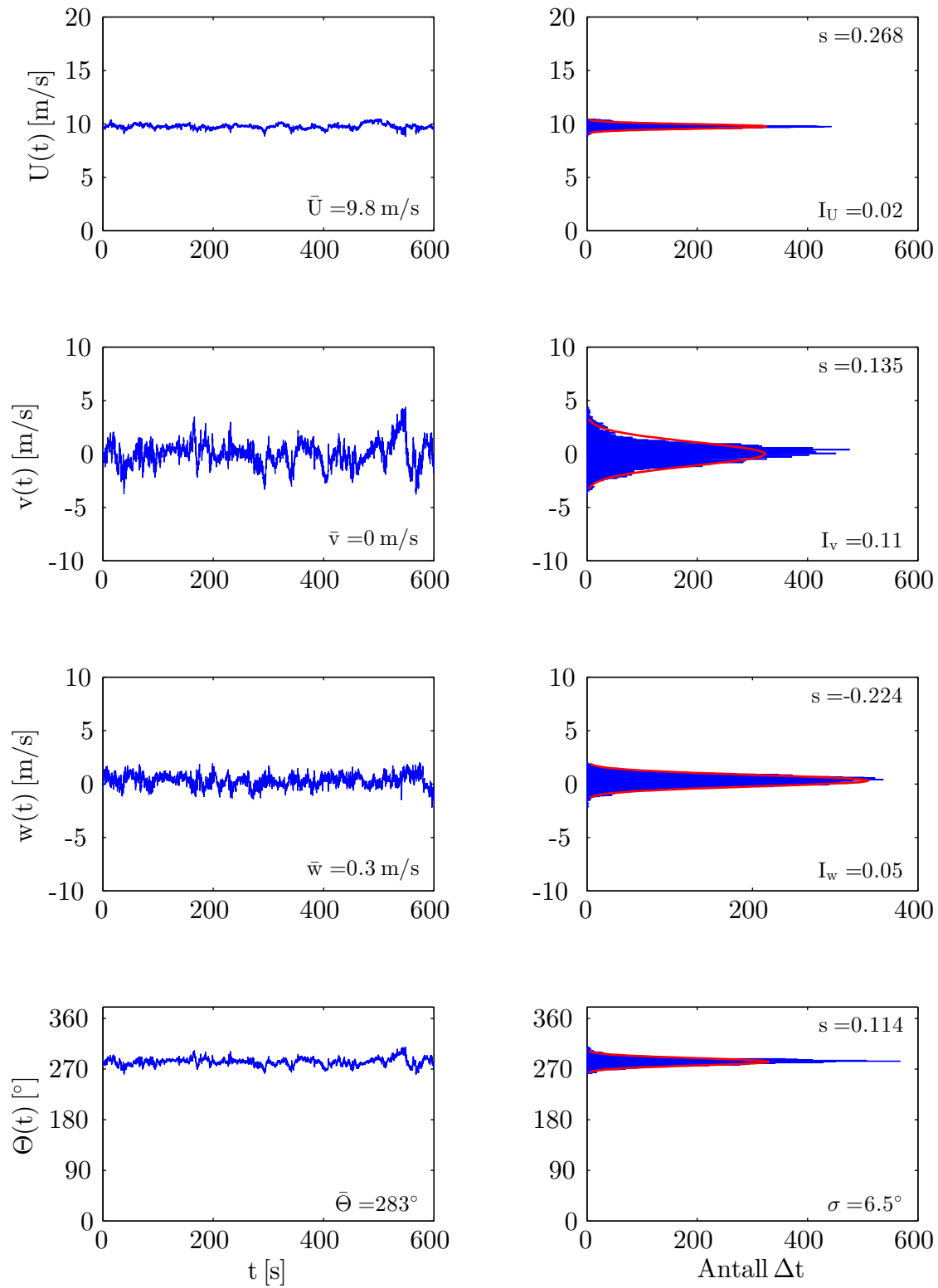


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.4: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_4$

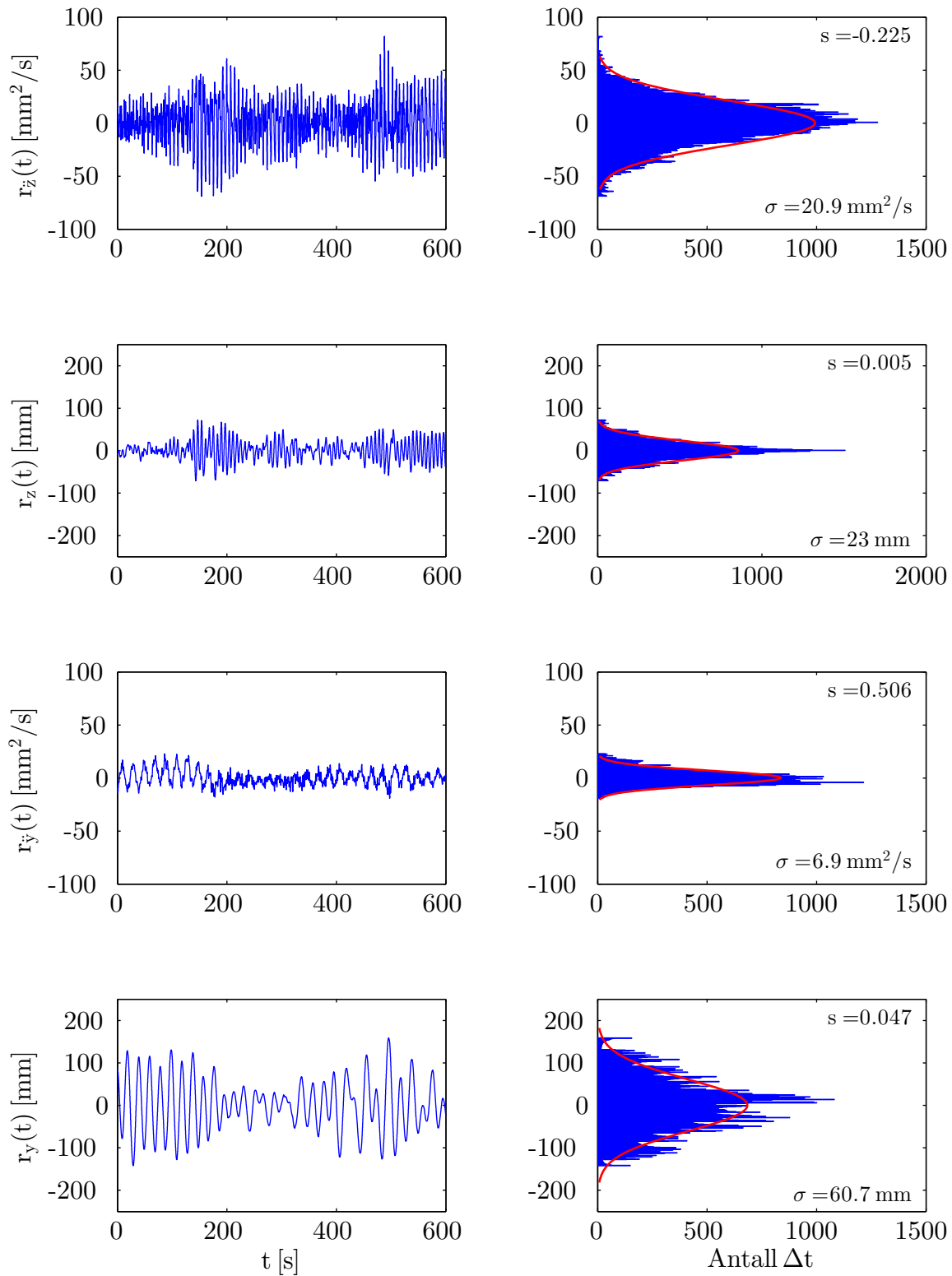


(a) Akselerasjon og forflytning

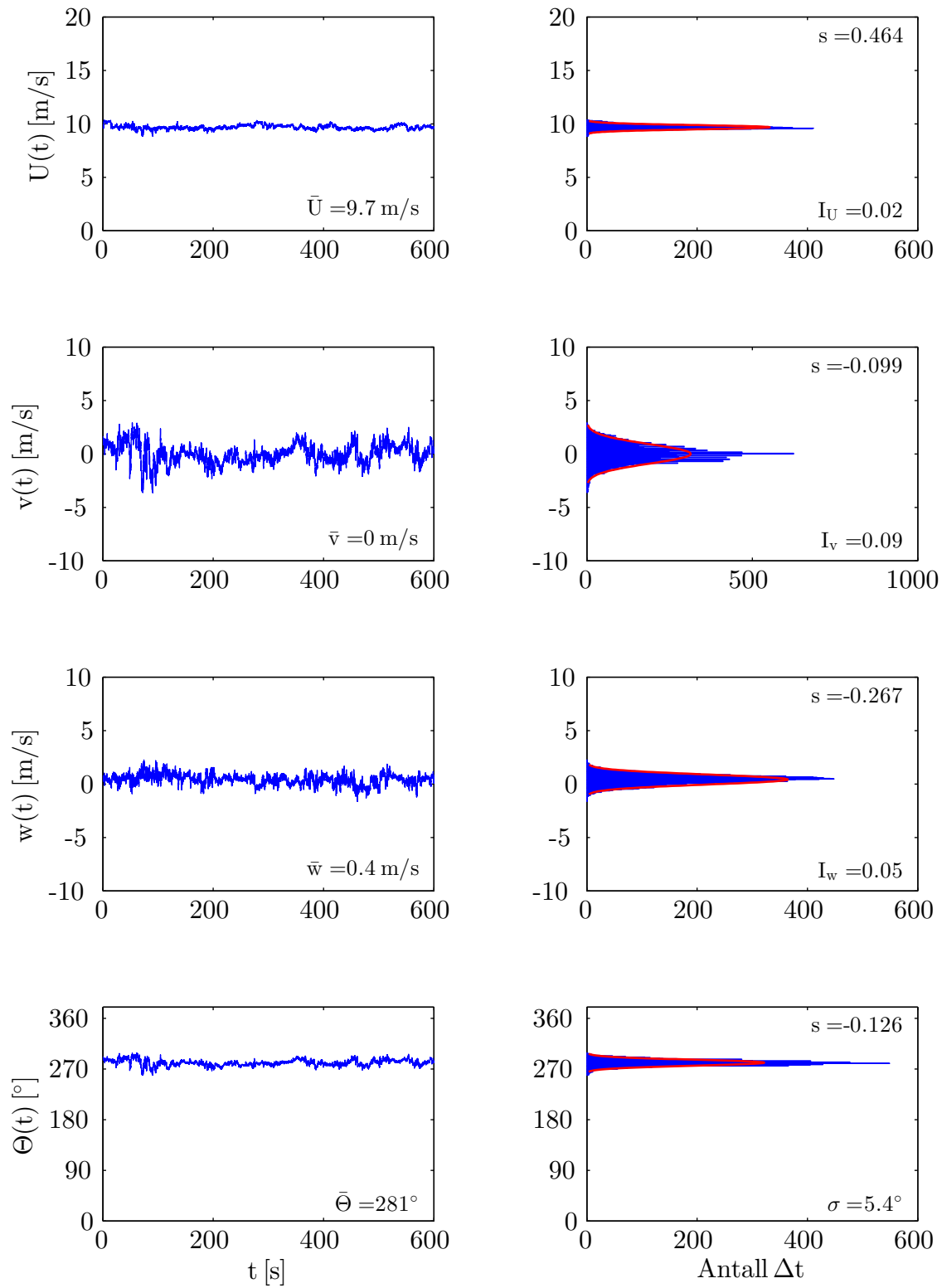


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.5: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_5$

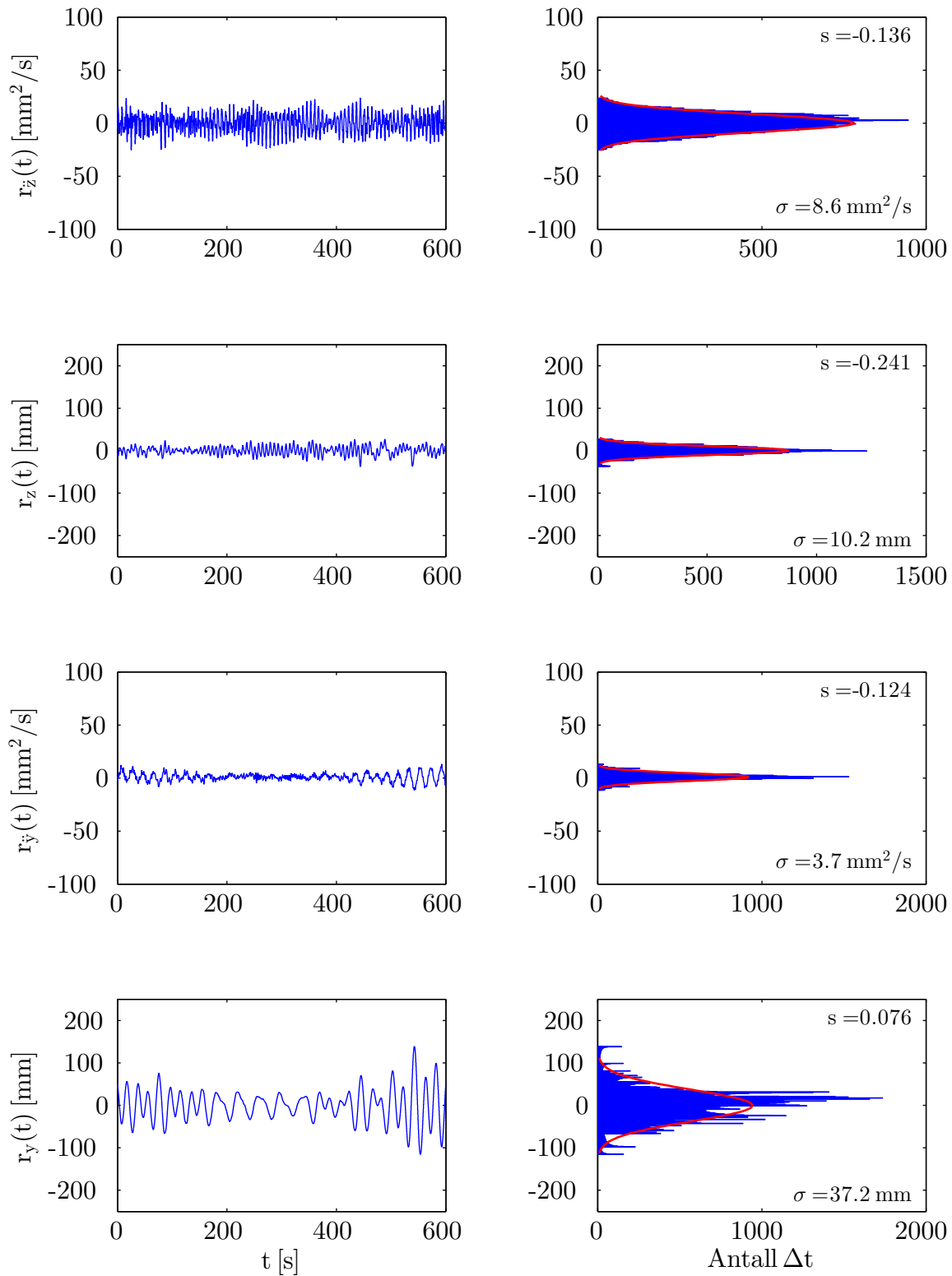


(a) Akselerasjon og forflytning



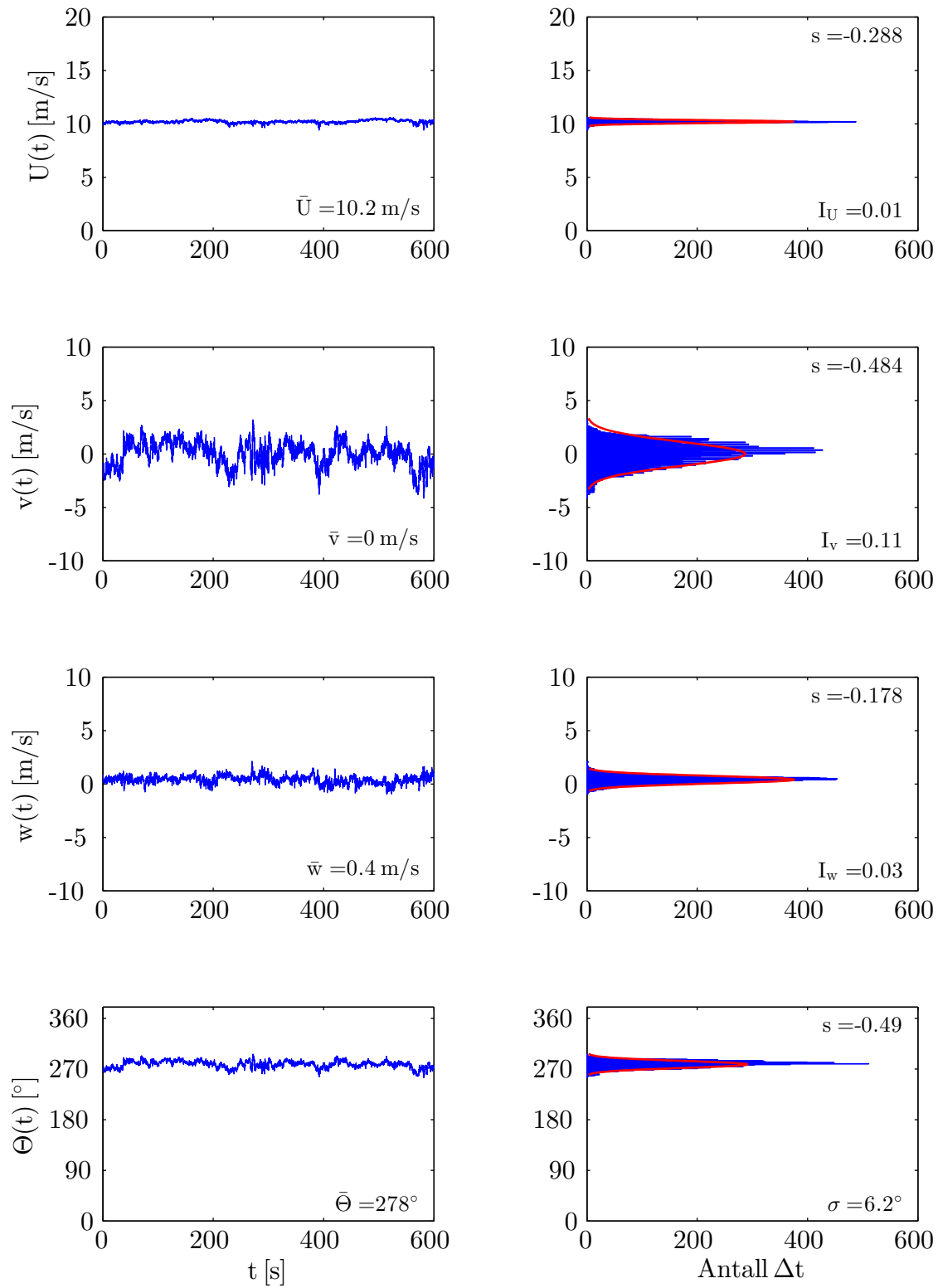
(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.6: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_6$



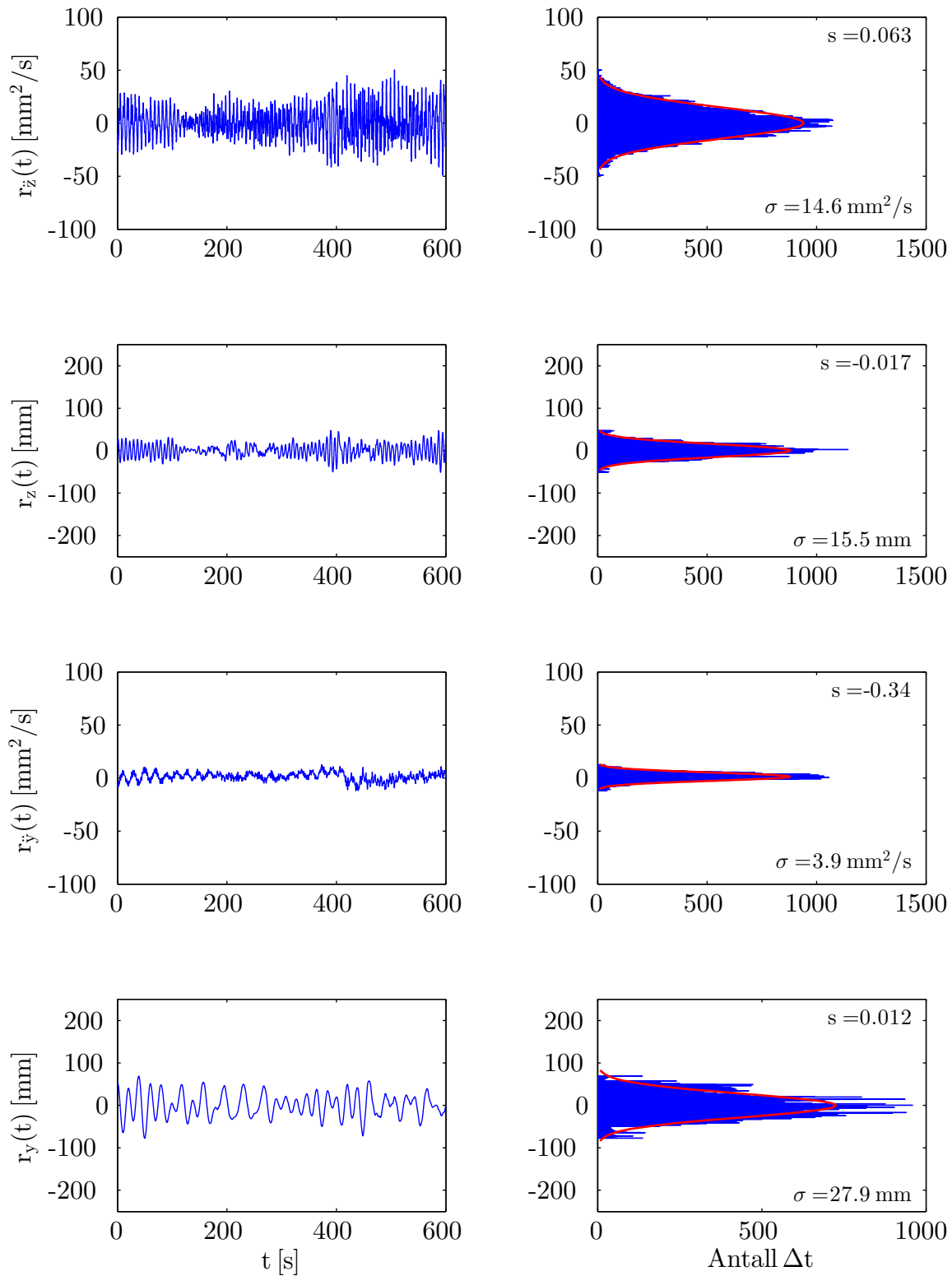
(a) Akselerasjon og forflytning



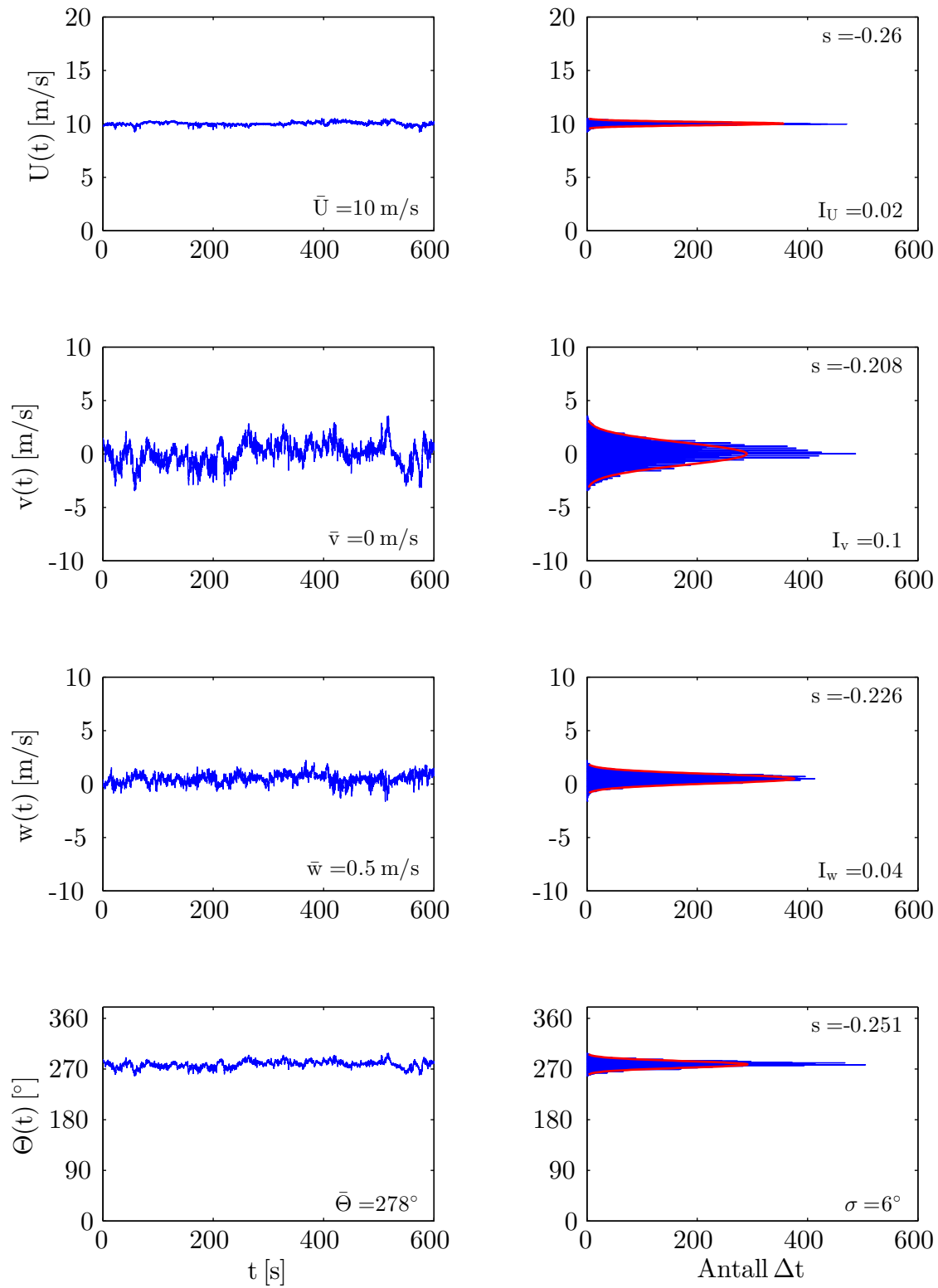


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.7: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_7$

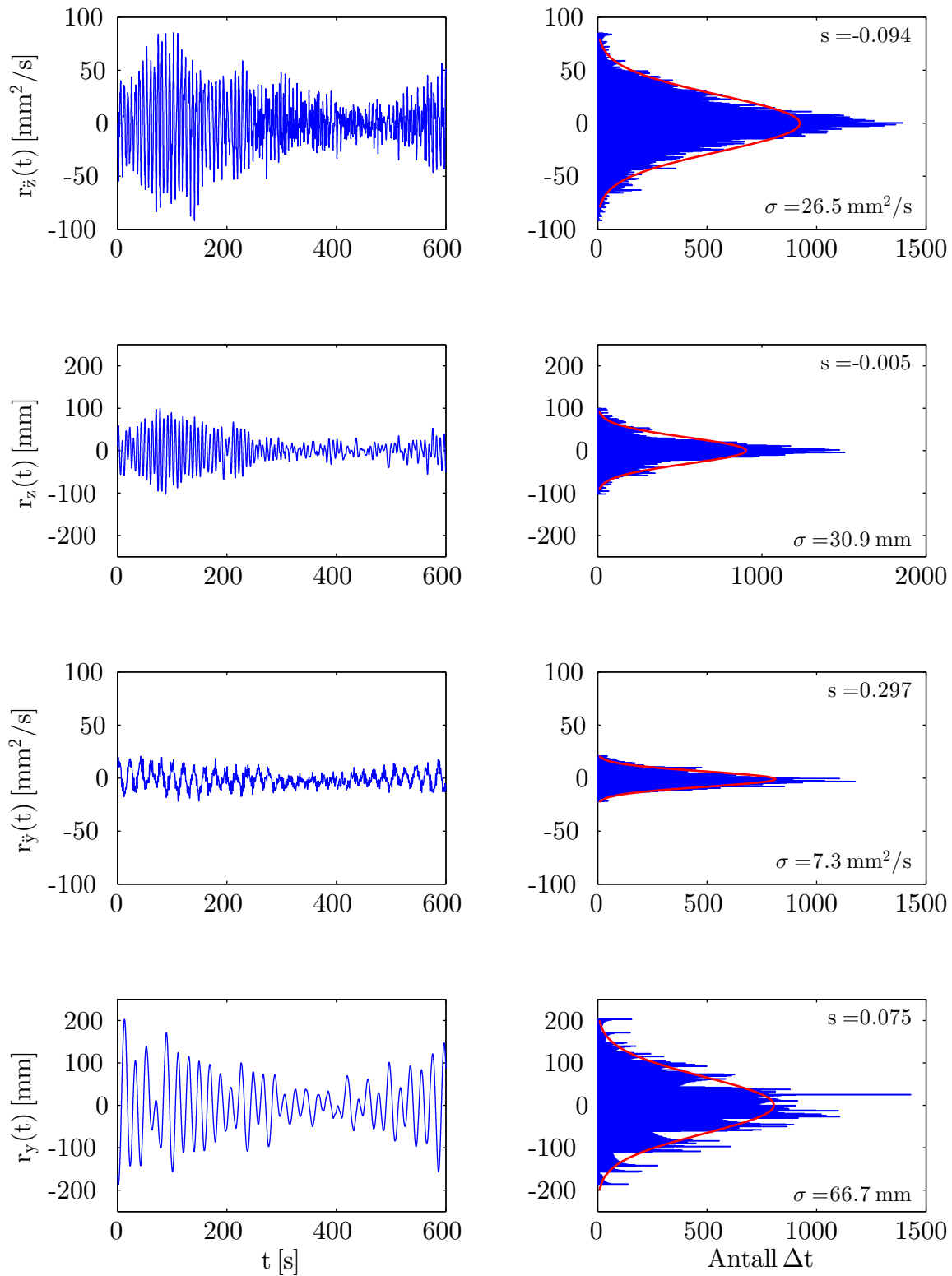


(a) Akselerasjon og forflytning

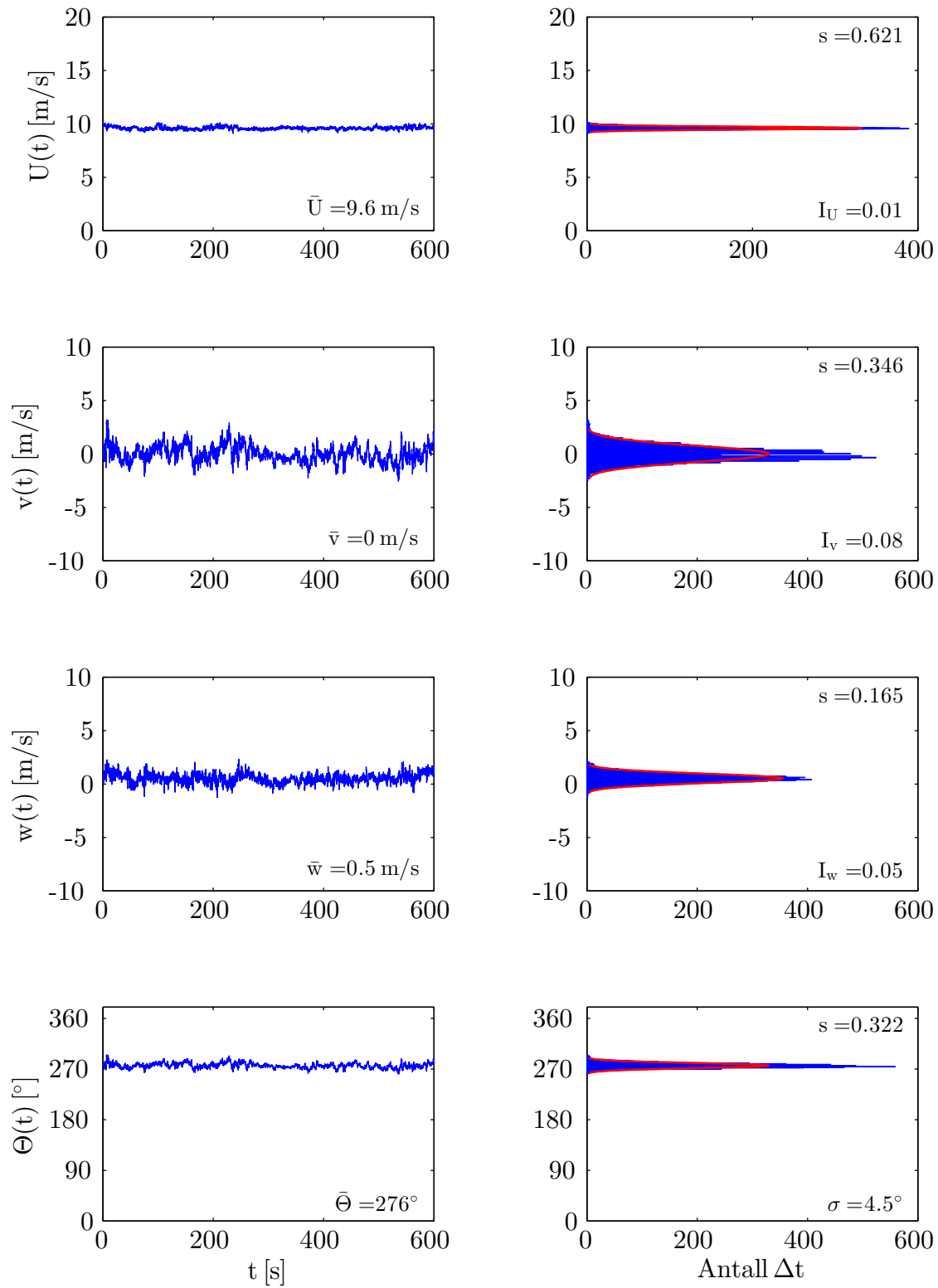


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.8: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_8$

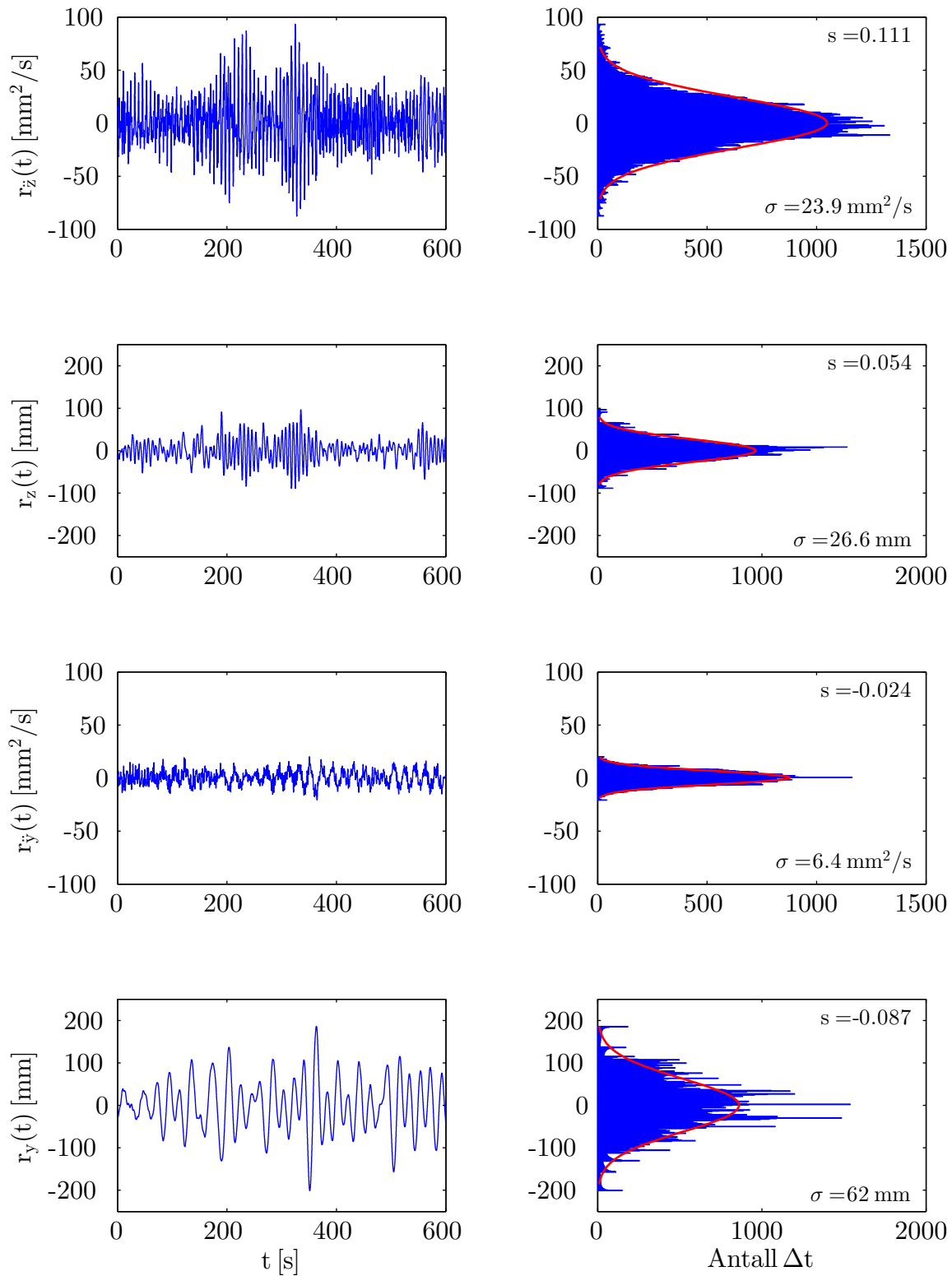


(a) Akselerasjon og forflytning

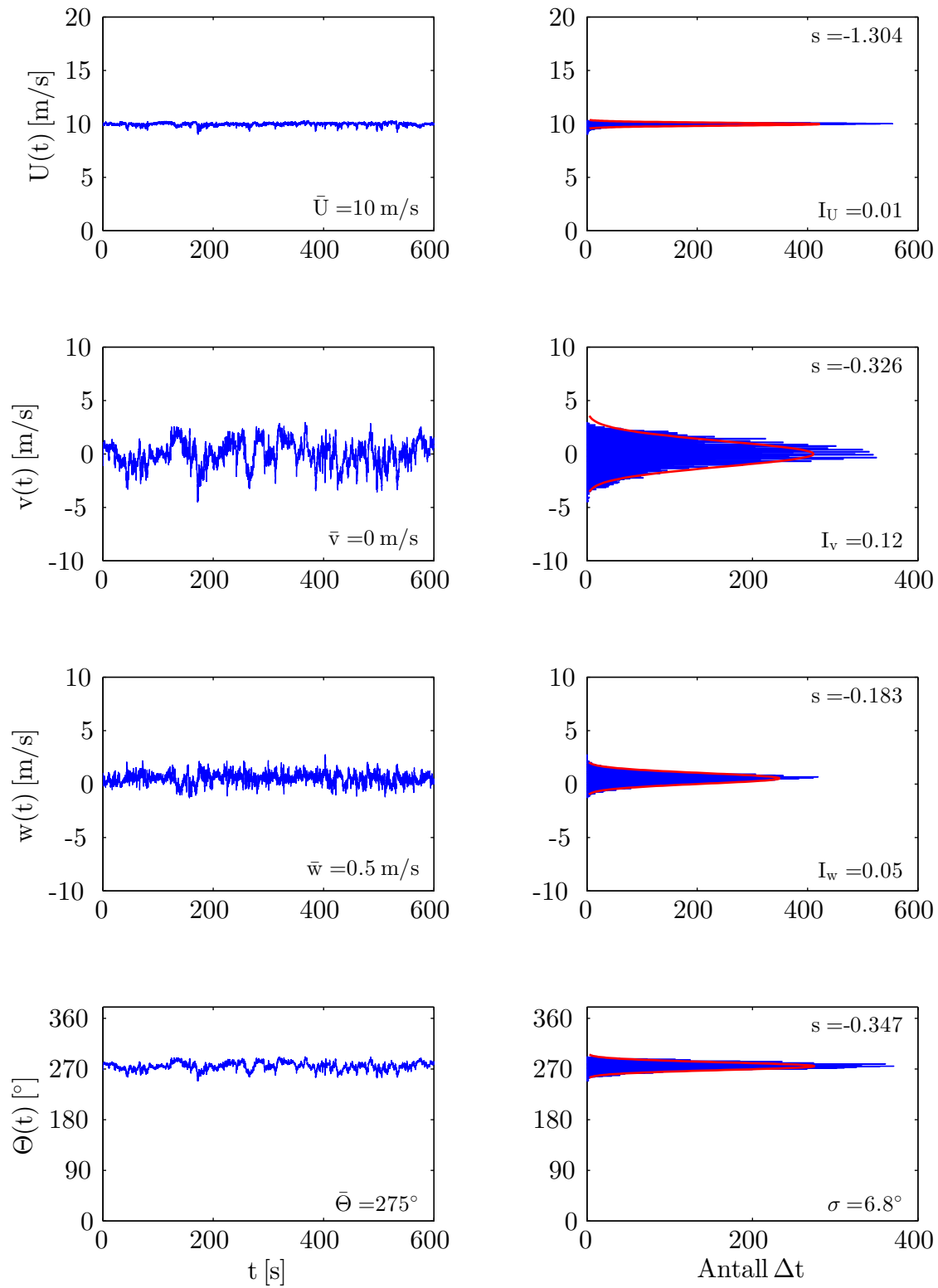


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.9: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_9$

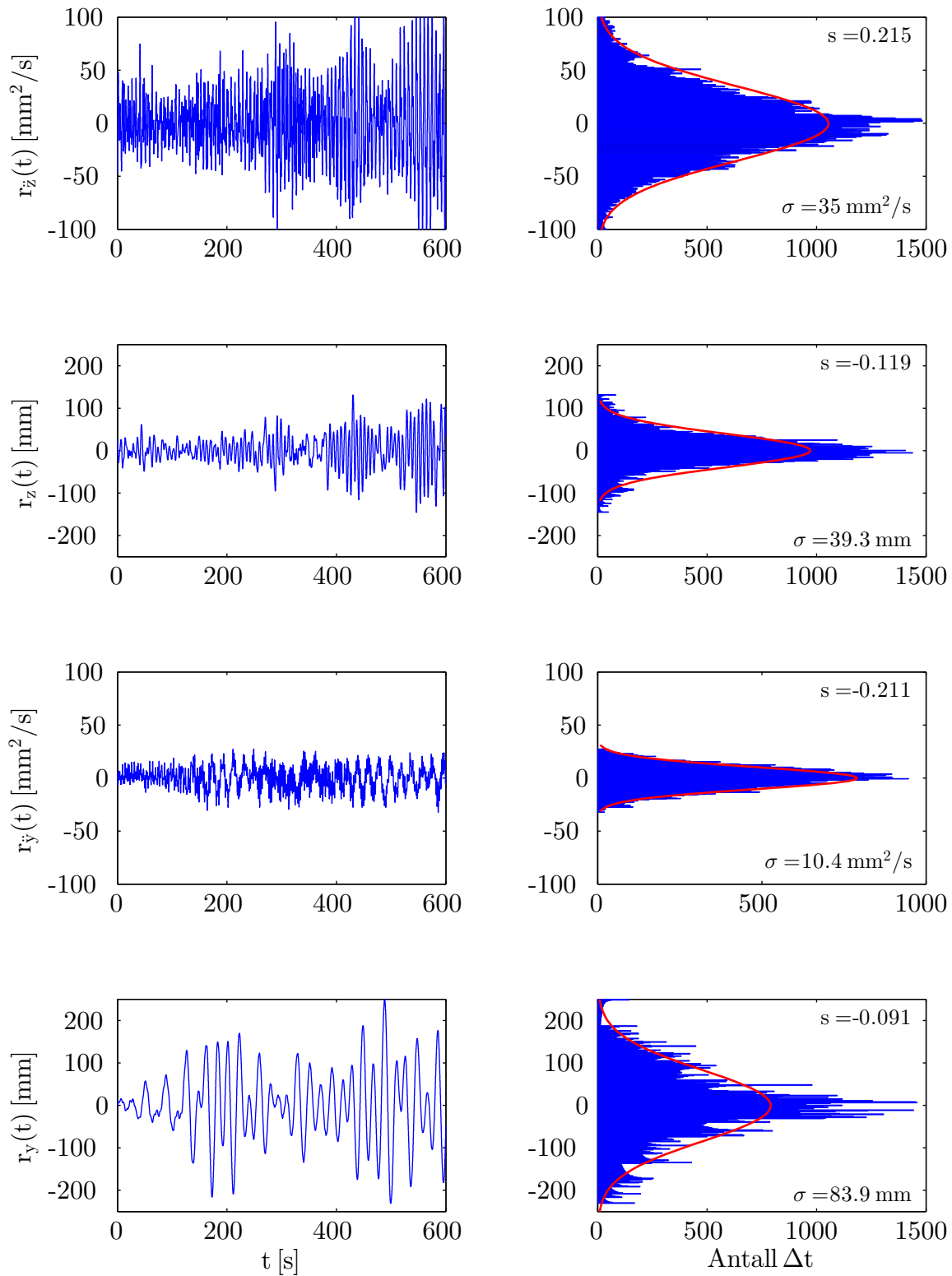


(a) Akselerasjon og forflytning



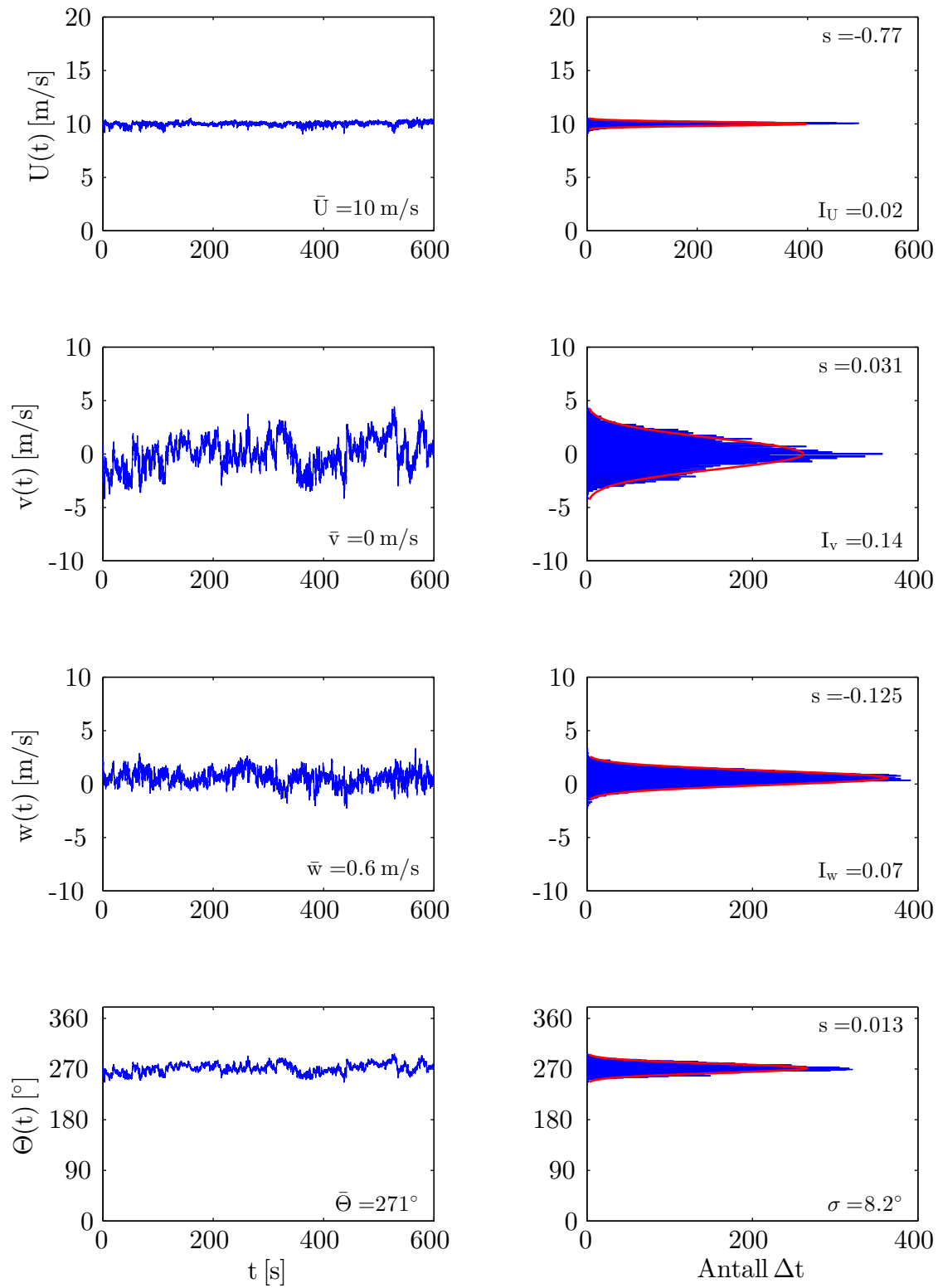
(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.10: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_{10}$



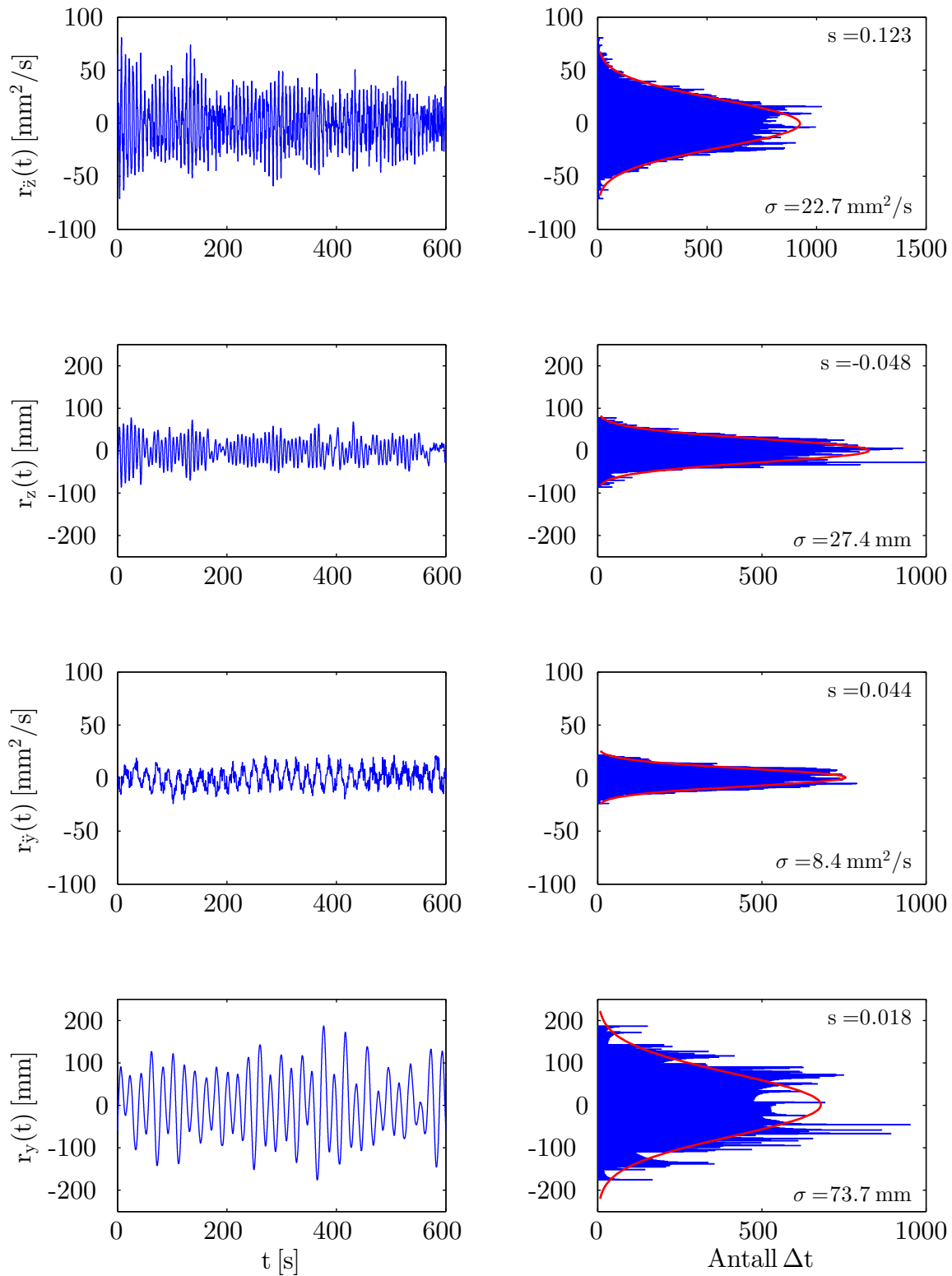
(a) Akselerasjon og forflytning



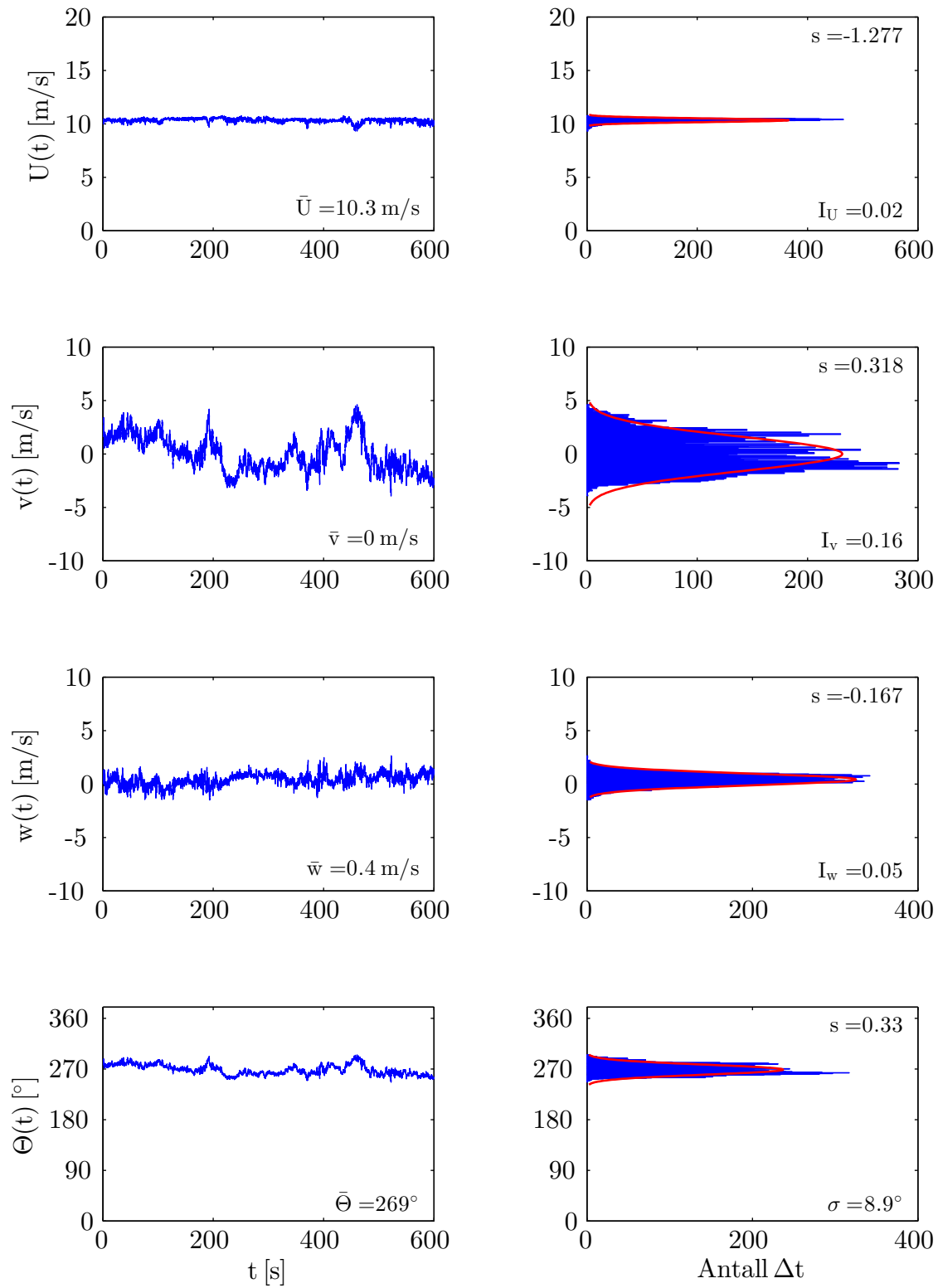


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.11: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_{11}$

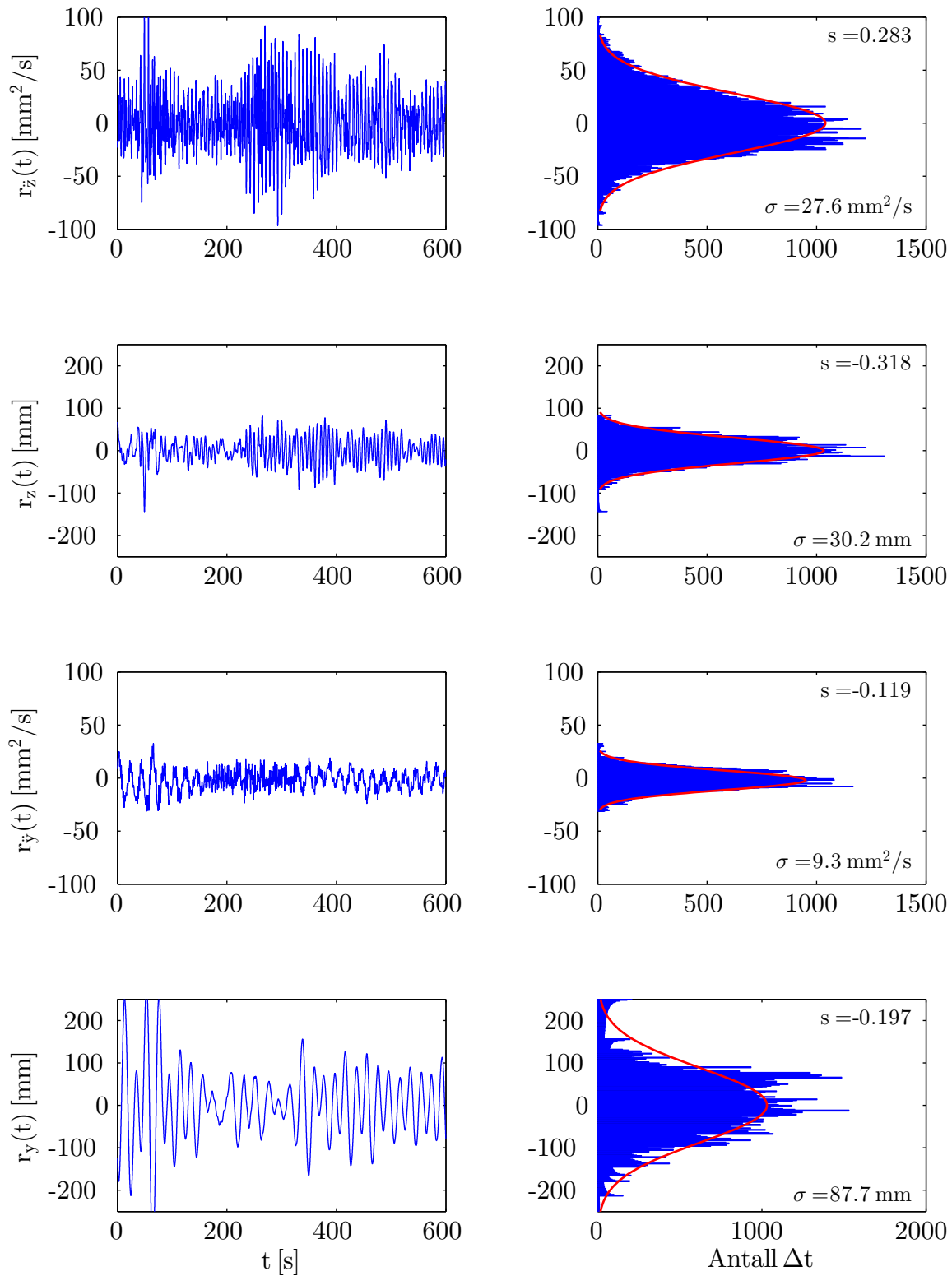


(a) Akselerasjon og forflytning

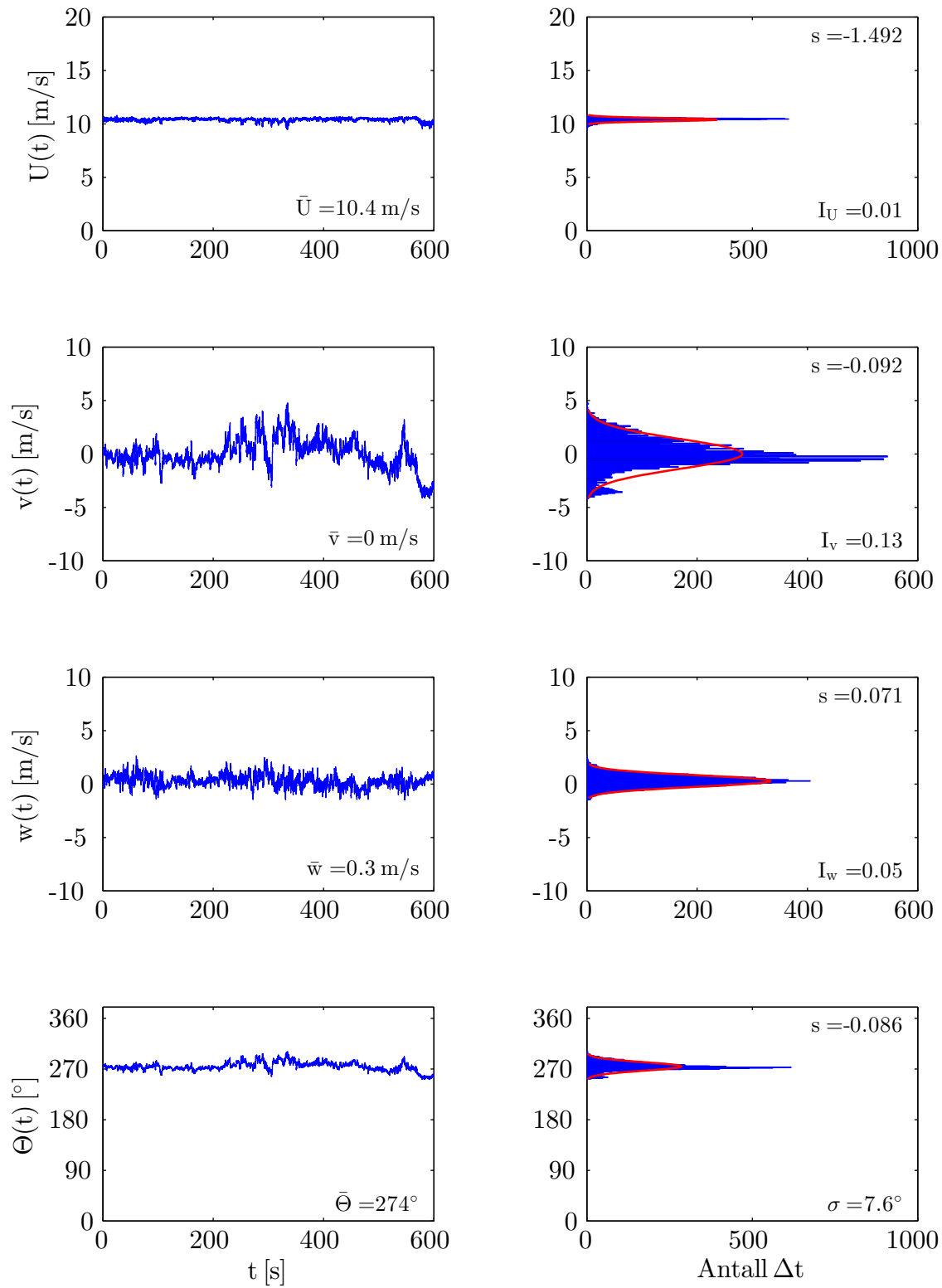


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.12: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_{12}$

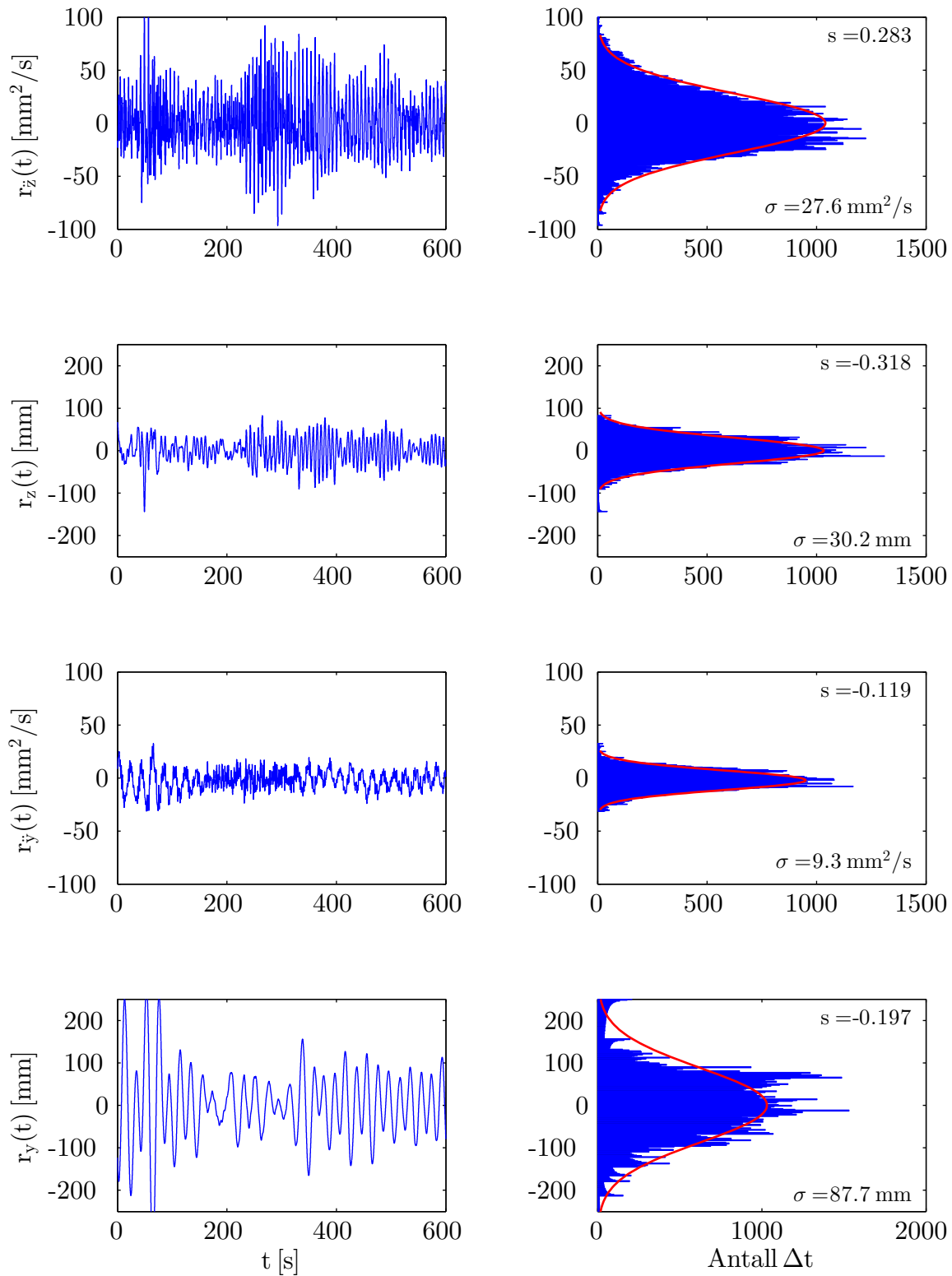


(a) Akselerasjon og forflytning

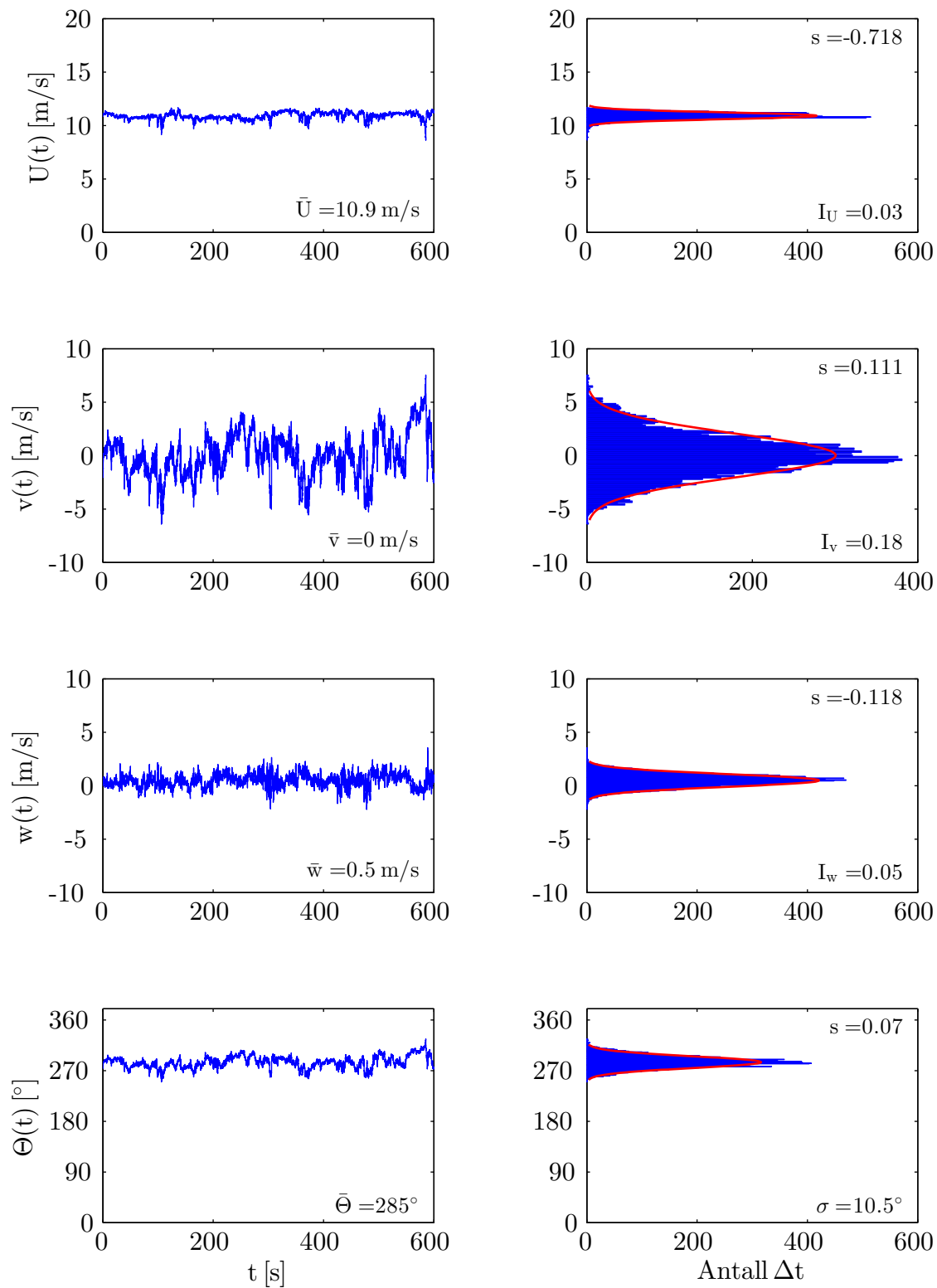


(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.13: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_{13}$

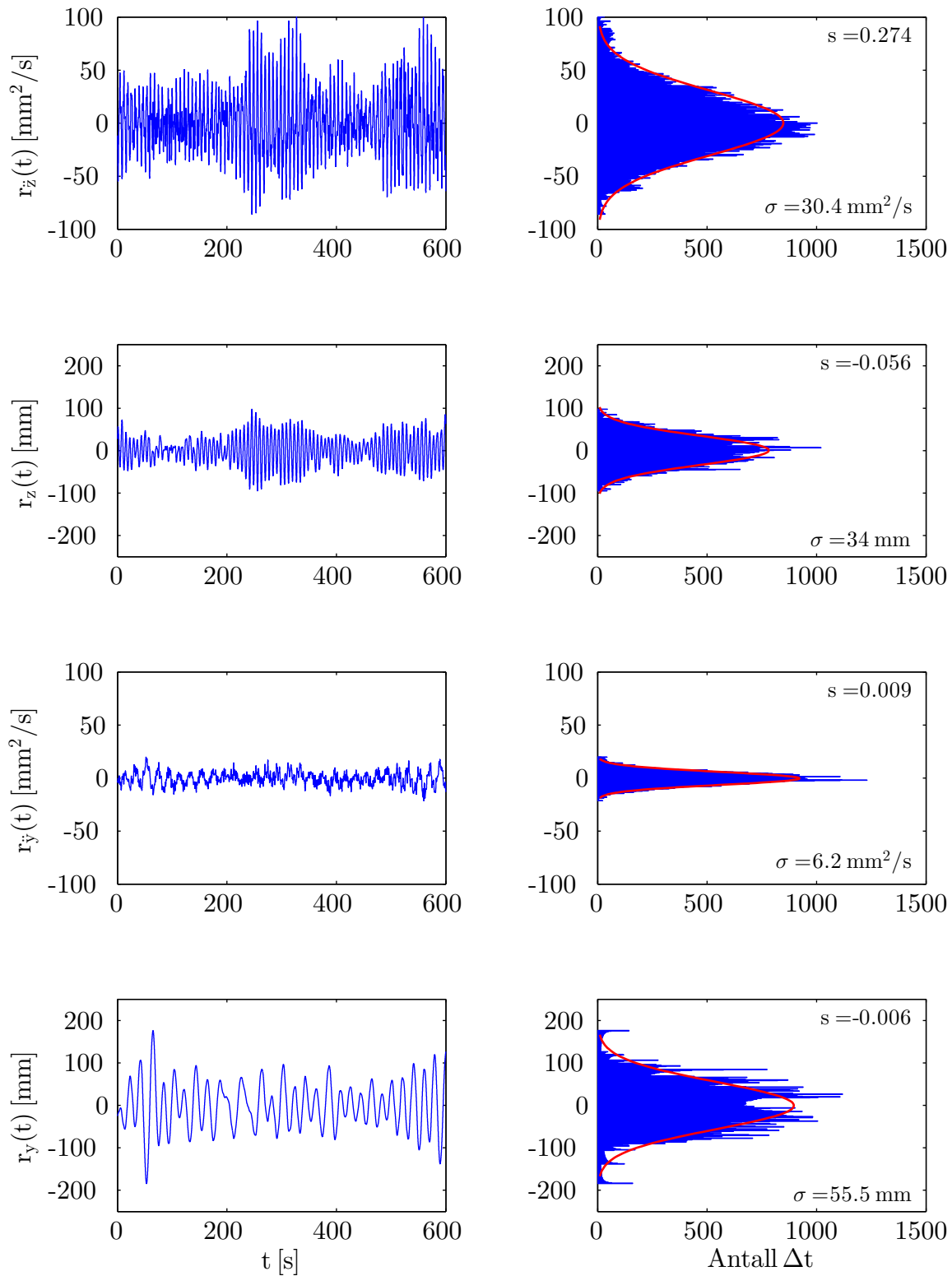


(a) Akselerasjon og forflytning



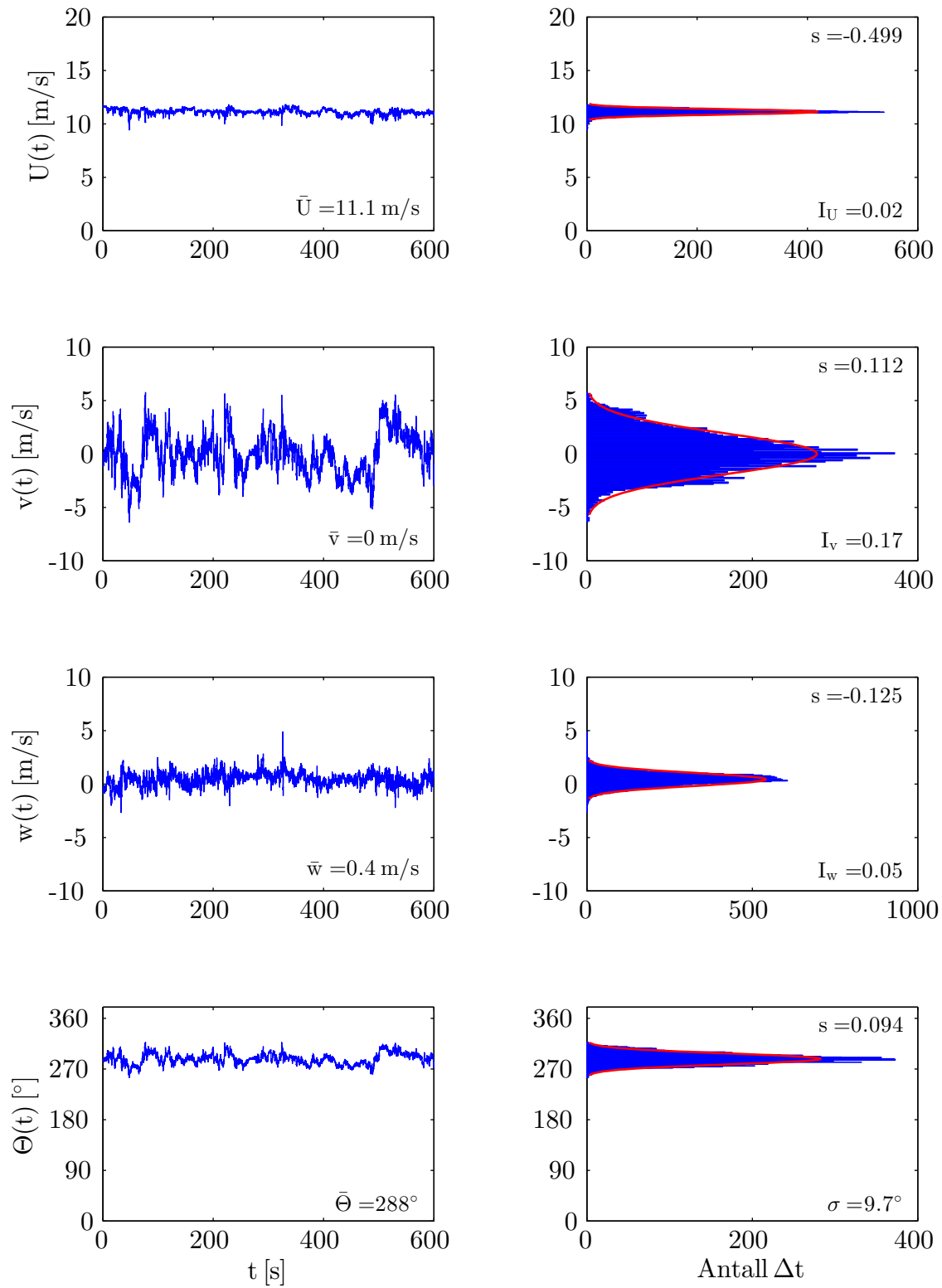
(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.14: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_{14}$



(a) Akselerasjon og forflytning





(b) Vindhastighet og vindretning

Figur C.15: Stokastisk beskrivelse av tidsserie,  $S_{15}$



# Referanser

- [1] Statens-Vegvesen. *Hardangerbrua, Beregninger, Kapittel 1:Grunnlag*. Statens Vegvesen; 2008.
- [2] Strømmen E. *Theory of Bridge Aerodynamics*. 2nd ed. Trondheim (Norway): Springer; 2010.
- [3] *Illustrasjoner* [webpage]. Statens Vegvesen; 2014 [updated 2012 Aug 17; cited 2014 Mai 25]. Available from: [www.vegvesen.no/Vegprosjekter/Hardangerbrua/Illustrasjoner](http://www.vegvesen.no/Vegprosjekter/Hardangerbrua/Illustrasjoner).
- [4] Slifka LD. *An accelerometer based approach to measuring displacement of a vehicle body*; 2004. Master of Science in Engineering.
- [5] Hansen SO, Lollesgaard M, Rex S, Jackobsen JB, Hjort-Hansen E. *The Hardanger Bridge: Static and dynamic windtunnel test with a section model*. Chopenhagen (Denmark): Svend Ole Hansen ApS; 2009. Revision 2.
- [6] Bendant JS, Piersol AG. *Random Data*. 2nd ed. New York: Wiley; 1986.
- [7] Smith WW, Smith JM. *Handbook of real-time fast Fourier transforms: Algorithms to product testing*. 1st ed. New York: Wiley; 1995.
- [8] Isaksen B. *Experimental Investigations of Wind Loading on a Suspension Bridge Girder*. 1st ed. Trondheim (Norway): Tapir; 2008.
- [9] Leis J. *Digital Signalprocessing using MATLAB for students and researchers*. 1st ed. Hoboken: Wiley; 2011.

- [10] Smith SW. *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. California: Technical Publishing; 1997.
- [11] Charles M Rader BG. *Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain*. Proceedings of the IEEE. 1967;Vol. 55(No. 2):pp. 149–171.
- [12] *Skewness* [database on the Internet]. Wikipedia Foundation, Inc. 2014 [updated 2014 Apr 15; cited 2014 Apr 30]. Available from: <http://en.wikipedia.org/wiki/Skewness>.
- [13] Ljung L. *System Identification*. 2nd ed. New York: Prentice Hall PTR; 1999.
- [14] Hayes MH. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. 1st ed. New York (USA): John Wiley and Sons Inc.; 1996.
- [15] Barbé K, Pintelon R, Schoukens J. *Welch Method Revisited: Nonparametric Power Spectrum Estimation Via Circular Overlap*. IEEE Transactions on Signal Processing. 2010;Vol. 58(No. 2):pp. 553–565.
- [16] Bergan PG, Larsen PK, Mollestad E. *Svigning av konstruksjoner*. 2nd ed. Trondheim (Norway): Tapir; 1981.
- [17] Rønnquist A. *Pedestrian induced lateral vibrations of slender footbridges*. 1st ed. Trondheim (Norway): Tapir; 2005.
- [18] Brownjohn JMW. *Estimation of damping in suspension bridges*. Proceedings of the ICE structures and buildings. 1994;Vol. 104(No. 4):pp. 401–415.
- [19] Olmos BA, Roesset JM. *Evaluation of the half-power bandwidth method to estimate damping in systems without real modes*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2010;Vol. 39(14):pp. 1671–1686.
- [20] Chopra AK. *Dynamics of Structures*. 4th ed. Boston: Pearson; 2012.
- [21] De-Silva CW. *Vibration Fundamentals and Practice*. 2nd ed. Boca Raton (US): Taylor and Francis Group; 2007.
- [22] Langen I, Sigbjørnson R. *Dynamisk analyse av konstruksjoner*. 2nd ed. Trondheim: Tapir; 1979.

- [23] Erwins DJ. *Modal testing: theory and practice*. 1st ed. Letchworth (England): Research Studies Press, LTD; 1984.
- [24] Kaimal JC, Wyngaard JC, Izumi Y, Coté OR. *Spectral characteristics of surfacelayer turbulence*. Journal of the Royal Meteorological Society. 1972;Vol. 98:pp. 563–589.
- [25] Øiseth O, Rønnquist A, Sigbjørnsson R. *Simplified prediction of wind-induced response and stability limit of slender longspan suspension bridges, based on quasisteady theory: A case study*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2010;Vol. 98:pp. 730–741.
- [26] Kolmogorov AN. *Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence*. Proceedings: Mathematical and Physical Sciences. 1991;Vol. 434(No. 1980):pp. 15–17.
- [27] Frisch U. *Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov*. 5th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2006.
- [28] Holmes JD. *Wind loading of structures*. 2nd ed. California: Taylor and Francis; 2007.
- [29] Scanlan RH, Tomko A. *Airfoil and bridge deck flutter derivatives*. Journal of the Engineering Mechanics Division. 1971;Vol. 97(No. EM6):pp. 1717–1737.
- [30] Singh L, Jones NP, Scanlan RH, Lorendeaux O. *Identification of lateral flutter derivatives of bridge decks*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1996;Vol. 60:pp. 81–89.
- [31] Ge Y, Tanaka H. *Aerodynamic flutter analysis of cable-supported bridges by multi-mode and full-mode approaches*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2000;Vol. 86(No. 2-3):pp. 123–153.
- [32] Davenport AG. *Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading*. ICE Proceedings. 1964;Vol. 28(No. 2):pp. 187–196.
- [33] Solheim AS. *Instrumentering av Hardangerbroa*; 2013. Master of Science in Engineering.
- [34] Proakis JG, Manolakis DG. *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications*. 3rd ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall; 1996.

- [35] Davenport AG. *The respons of slender, line-like structures to a gusty wind*. ICE Proceedings. 1962;Vol. 23(No. 3):pp. 389–408.
- [36] Statens-Vegvesen. *The Hardanger Bridge, Design Basis - Wind characteristics*. The Norwegian Public Road Administration; 2006.