



Instrumentering av Hardangerbrua

Andre Sætre Solheim

Bygg- og miljøteknikk (2 årig)

Innlevert: juni 2013

Hovedveileder: Ole Andre Øiseth, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk



MASTEROPPGAVE 2013

FAGOMRÅDE: Dynamisk respons av konstruksjoner	DATO: 10.06.2013	ANTALL SIDER: 50 (+12)
--	---------------------	---------------------------

TITTEL:

Instrumentering av Hardangerbrua

Structural monitoring of the Hardanger bridge

UTFØRT AV:

André Sætre Solheim



SAMMENDRAG:

Denne masteroppgaven omhandler planleggingen av et måleprosjekt som skal igangsettes for å kontrollere Hardangerbruas vindinduserte dynamiske respons. Dette måleprosjektet skal gjennomføres for å kartlegge nøyaktigheten til de metodene som blir brukt til å beregne dynamisk respons av konstruksjoner utsatt for naturlaster. Gjennom oppgaven er Hardangerbruas dynamiske respons simulert i tidsplanet i det generelle elementmetodeprogrammet Abaqus. Vindfeltet som modellen utsettes for, er generert ved Monte Carlo simuleringer i Matlab.

Når målingene av Hardangerbrua skal utføres, vil det bli plassert ut totalt 16 sensorer ved 8 snitt langs avstivningsbærerens lengdeakse. Et av hovedmålene med denne oppgaven er å bestemme plasseringene av disse sensorene, for å kunne sikre best mulig måleresultater. De viktigste kriteriene for sensorene er at de skal skaffe rett informasjon, slik at bruas egenfrekvenser og modene kan anslås. Fra responsberegninger i Abaqus blir diverse målinger simulert, ut fra valgte plasseringer av sensorene. Det viste seg at de simulerte målingene ble gode hvis sensorene plasseres ved hengestang 8, 17, 25, 30, 36, 41, 49 og 58. Med unntak av mode 13, vil denne plasseringen fange opp de 15 første egenfrekvensene og modene til Hardangerbrua på en god måte. Egenfrekvensene og modene fra de simulerte målingene blir videre sammenlignet med de teoretiske egenfrekvensene og modene som er beregnet i Abaqus.

FAGLÆRER: førsteamanuensis Ole Andre Øiseth

VEILEDER(E): førsteamanuensis Ole Andre Øiseth

UTFØRT VED: Institutt for konstruksjonsteknikk, NTNU

MASTEROPPGAVE 2013

for

André Sætre Solheim

Instrumentering av Hardangerbrua

Structural monitoring of the Hardanger Bridge

I forbindelse med prosjektet ferjefri E39 skal Hardangerbrua instrumenteres for å kartlegge nøyaktigheten til de metodene som benyttes til å beregne dynamisk respons av konstruksjoner utsatt for naturlaster.

Denne oppgaven dreier seg om å bruke simulert vindindusert dynamisk respons av konstruksjonen til å finne den optimale plasseringen av sensorene som skal benyttes i måleprosjektet.

Opgaven bør inneholde følgende temaer:

- Beskrivelse av den grunnleggende teorien for systemidentifikasjon.
- Modellering av brua i programmet Abaqus
- Bestemmelse av egenfrekvenser og egensvingeformer ved å bruke Abaqus
- Bestemmelse av egenfrekvenser og egensvingeformer ved å bruke simulerte målinger (tidsrekker for vindindusert akselerasjon)
- Bestemmelse av optimal plassering av sensorer

Besvarelsen organiseres i henhold til gjeldende retningslinjer.

Veileder(e): Ole Andre Øiseth

Besvarelsen skal leveres til Institutt for konstruksjonsteknikk innen 10. juni 2013.

NTNU, 14. januar, 2013
Ole Andre Øiseth
faglærer

FORORD

Denne rapporten er en avsluttende masteroppgave i sivilingeniørstudiet, ved Norges Tekniske-Naturvitenskaplige Universitet (NTNU) i Trondheim ved instituttet for konstruksjonsteknikk våren 2013. Arbeidet med rapporten er utført over 20 uker.

Rapporten omhandler simulering av Hardangerbruas vindinduserte dynamiske respons i forbindelse med et måleprosjekt som skal utføres av konstruksjonen. Hovedmålet med oppgaven er å plassere ut sensorer som skal registrere bruas dynamiske respons. For å kunne plassere ut sensorene vil målinger som skal utføres bli simulert. Videre vil de simulerte målingene bli sammenlignet med teoretiske verdier, beregnet i Abaqus.

Jeg vil med dette takke min veileder, førsteamanuensis Ole Andre Øiseth, for god hjelp i forbindelse med denne masteroppgaven.

Trondheim, juni 2013



André Sætre Solheim

SAMMENDRAG

Denne masteroppgaven omhandler planleggingen av et måleprosjekt som skal igangsettes for å kontrollere Hardangerbruas vindinduserte dynamiske respons. Dette måleprosjektet skal gjennomføres for å kartlegge nøyaktigheten til de metodene som blir brukt til å beregne dynamisk respons av konstruksjoner utsatt for naturlaster. Gjennom oppgaven er Hardangerbruas dynamiske respons simulert i tidsplanet i det generelle elementmetodeprogrammet Abaqus. Vindfeltet som modellen utsettes for, er generert ved Monte Carlo simuleringer i Matlab.

Når målingene av Hardangerbrua skal utføres, vil det bli plassert ut totalt 16 sensorer ved 8 snitt langs avstivningsbærerens lengdeakse. Et av hovedmålene med denne oppgaven er å bestemme plasseringene av disse sensorene, for å kunne sikre best mulig måleresultater. De viktigste kriteriene for sensorene er at de skal skaffe rett informasjon, slik at bruas egenfrekvenser og moder kan anslås. Fra responsberegninger i Abaqus blir diverse målinger simulert, ut fra valgte plasseringer av sensorene. Det viste seg at de simulerte målingene ble gode hvis sensorene plasseres ved hengestang 8, 17, 25, 30, 36, 41, 49 og 58. Med unntak av mode 13, vil denne plasseringen fange opp de 15 første egenfrekvensene og modene til Hardangerbrua på en god måte. Egenfrekvensene og modene fra de simulerte målingene blir videre sammenlignet med de teoretiske egenfrekvensene og modene som er beregnet i Abaqus.

SUMMARY

This master thesis deals with the planning of a test project that will be implemented to control the wind-induced dynamic response of the Hardanger Bridge. This test project will be carried out to determine the accuracy of the methods used to calculate the dynamic response of structures subjected to environmental loads. In this thesis, the wind-induced dynamic response of the Hardanger Bridge is simulated in the time domain with the FEM-design program Abaqus. The model is exposed to a wind field, generated by Monte Carlo simulations in Matlab.

During the measurements of the Hardanger Bridge, 16 sensors will be placed at 8 different sections along the longitudinal axis of the bridge. The main aim with this thesis is to determine the locations of these sensors, in order to ensure the best possible measurement results. The main criteria for the sensors are that they will get the right information so that the bridge's natural frequencies and mode shapes can be estimated. From the response calculations in Abaqus, a various measurements will be simulated from selected locations of the sensors. It turned out that the results from the simulated measurements was good when sensors were placed at hanger number 8, 17, 25, 30, 36, 41, 49 and 58. With the exception of mode 13, this location will be able to register information about the first 15 natural frequencies and mode shapes of the Hardanger Bridge in a good way. The natural frequencies and mode shapes from the simulated measurements are also compared with the theoretical natural frequencies and mode shapes that are calculated in Abaqus.

INNHALDSFORTEGNELSE

Kapittel 1: Hardangerbrua	1
1.1 Introduksjon.....	1
1.2 Beskrivelse av Hardangerbrua.....	1
1.2.1 Bærekabler.....	2
1.2.2 Hengestenger	2
1.2.3 Avstivningsbærer	3
1.2.4 Tårn.....	3
Kapittel 2: Systemidentifikasjon	5
2.1 Generelt om systemidentifikasjon.....	5
2.2 Fouriertransformasjon.....	5
2.3 Auto-spektralitet.....	8
2.4 Kryss-spektralitet.....	9
Kap 3: Vindfelt.....	11
3.1 Antakelser	11
3.2 Monte Carlo simulering.....	12
3.3 Vindinduserte dynamiske krefter.....	18
Kap 4: Modellering i Abaqus.....	21
4.1 Introduksjon.....	21
4.2 Tårn	22
4.3 Bærekabler	23
4.4 Hengestenger	23
4.5 Avstivningsbærer	24
4.5 Randbetingelser	26
4.6 Demping.....	27
4.7 Implementering av vindlast	28
Kap 5: Resultater fra Abaqus.....	30
5.1 Egenfrekvenser og moder	30
Kap 6: Simulerte målinger	34
6.1 Plassering av sensorer.....	34

6.2 Egenfrekvenser og moder	35
6.2.1 Horisontalmoder	35
6.2.2 Vertikalmoder.....	39
6.2.3 Torsjonsmoder	43
6.3 Kryss-spekter.....	45
Kap 7: Konklusjon.....	47
Tillegg A. Empiriske vind-spekter	48
A.1 Empiriske auto-spekter	48
A.2 Empirisk kryss-spekter	49
Referanseliste	50
Vedlegg.....	51
Spekter: Horisontal akselerasjon	51
Spekter: Vertikal akselerasjon.....	55
Spekter: Vinkelakselerasjon(Torsjon).....	59

KAPITTEL 1: HARDANGERBRUA

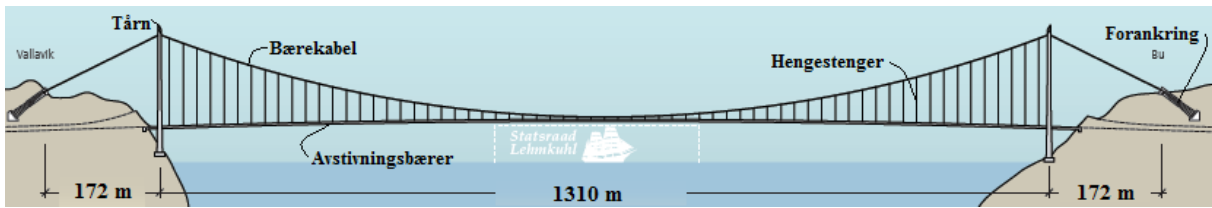
1.1 INTRODUKSJON

I løpet av sommeren 2013 vil oppsetningen av Hardangerbrua gå inn i siste fase. Etter planen skal brua åpnes for trafikk i løpet av august 2013. Hardangerbrua vil da være Norges lengste hengebro, med et fritt spenn på 1310 meter. Tårnene til brua har en høyde på 200 meter, mens seilingshøyden er 55 meter. Prosjektet, som har en økonomisk ramme på 2,3 milliarder kroner, har som formål å erstatte fergesambandet Bruravik-Brimnes. Denne fergestrekningen er i dag en del av riksveg 7, som blant annet er en av hovedforbindelsene mellom Oslo og Bergen.

På grunn av sitt slanke tverrsnitt vil Hardangerbruas avstivningsbærer være svært utsatt for dynamiske belastninger. Den vindinduserte belastningen av avstivningsbæreren vil være et av de mest kritiske punktene under bruas dimensjonering. Som et ledd i oppfølgingen av konstruksjonen vil det derfor bli satt i gang målinger av avstivningsbærerens dynamiske respons. For å kunne overvåke den dynamiske responsen vil det bli plassert ut sensorer langs avstivningsbæreren. Denne oppgaven vil ta for seg planleggingen av bruas overvåkning, der oppgaven tilslutt vil konkludere med hvor sensorene skal plasseres for å oppnå best måleresultat.

1.2 BESKRIVELSE AV HARDANGERBRUA

Bæresystemet til Hardangerbrua, så vel som alle andre hengebruer, baserer seg på et kabelsystem med forankring i fundamenter. De bærende kablene(bærekabel) strekker seg mellom forankringspunktene, via tårnenes topper. Tårnene fungerer altså som opplegg for bærekablene. For å kunne overføre lasten fra brubanen(avstivningsbæreren) til bærekablene benyttes det vertikale hengestenger. Figur 1.1 gir et godt bilde på de forskjellige komponentene som inngår i Hardangerbrua. Hengebruer har som styrke at bruas spenn kan strekke seg over lange distanser, i motsetning til rene bjelkebruer.



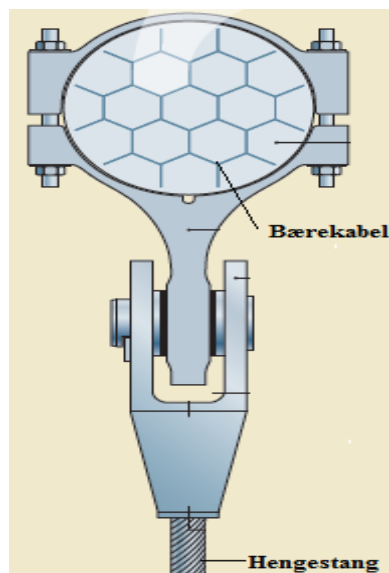
Figur 1.1. Hardangerbrua

1.2.1 BÆREKABLER

Bærekablene er laget av galvanisert stål. Hver bærekabel består av 19 bunter, der hver bunt inneholder 528 tråder med diameter på 5,3 mm. Bærekablene vil ha neglisjerbar bøyestivhet og all lastoverføring skjer i form av aksial strekk.

1.2.2 HENGESTENGER

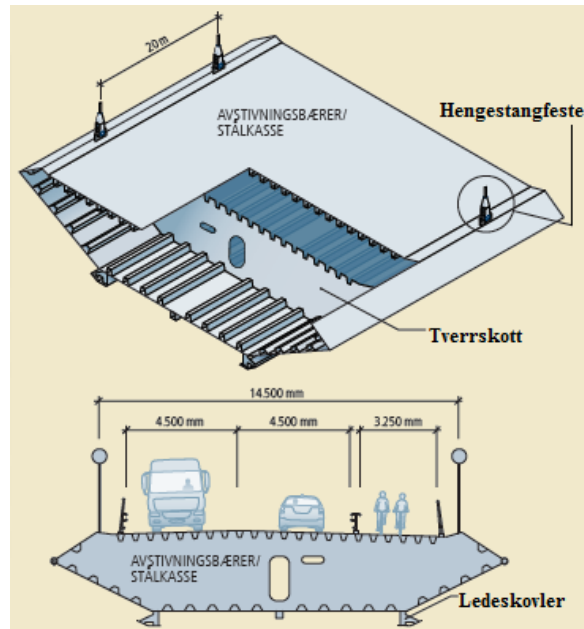
På samme måte som bærekablene, vil hengestengene kun overføre last i form av aksial strekk. Figur 1.2 illustrerer hvordan hengestengene og bærekablene er festet. Det inngår totalt 130 hengestenger, fordelt langs begge sidene av bruas avstivningsbærer. Hengestengene er altså plassert ut i 65 snitt langs avstivningsbæren.



Figur 1.2. Feste mellom bærekabel og hengestang.

1.2.3 AVSTIVNINGSBÆRER

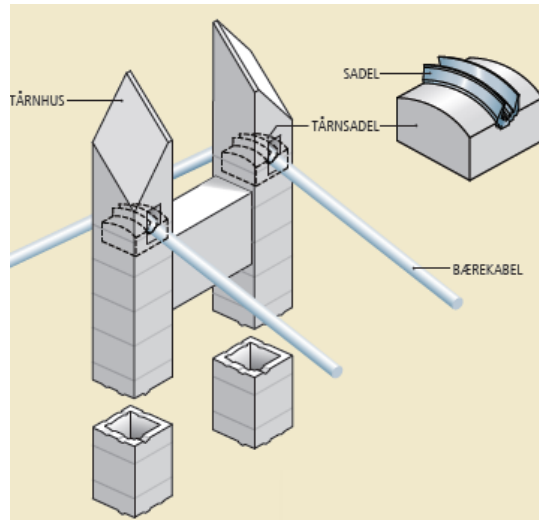
Avstivningsbæreren er utført i stål av typen S355. Denne er sveist sammen av stålkasser med langsgående stivere. I avstivningsbæreren inngår det tverrsnitt for hver fjerde meter. På undersiden er det sveist på ledeskovler som skal sørge for aerodynamisk stabilitet.



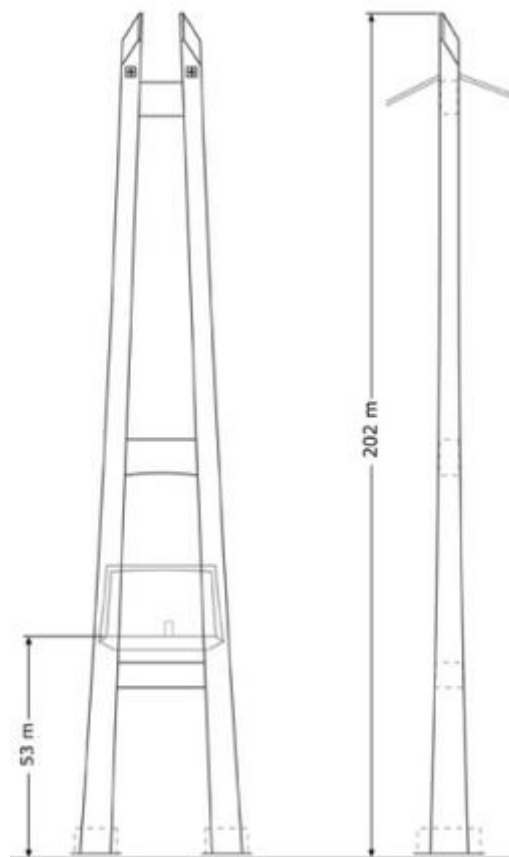
Figur 1.3. Avstivningsbærer Hardangerbrua.

1.2.4 TÅRN

Tårnene er utført i betong av typen B45. Hvert tårn består av to parallelle rektangulære hulprofiler. Disse to profilene er bundet sammen av tre rigler. Den nederste rigelen fungerer også som opplegg for avstivningsbæreren. Tårnet ved Bu er åtte meter høyere enn ved Vallavik. Dette på grunn av forskjellig kotehøyde ved de to fundamentene. Begge tårntoppene vil ligge ved kote 201,5 meter. Figur 1.4 viser opplegget til bærekablene i toppen av tårnene.



Figur 1.4. Tårntopp



Figur 1.5. Tårn, Bu.

KAPITTEL 2: SYSTEMIDENTIFIKASJON

2.1 GENERELT OM SYSTEMIDENTIFIKASJON

Systemidentifikasjon omhandler prosessen med å bygge opp matematiske modeller ut fra observert data[1]. I praksis vil dette bety at matematiske modeller, typisk utarbeidet i FEM-program, blir tilpasset og forbedret ved hjelp av målinger gjort av den aktuelle konstruksjonen. I følge Ewins[2] er det tre viktige årsaker til at systemidentifikasjon har fått en såpass fremtredende rolle innen konstruksjonsdynamikken. Ved systemidentifikasjon ønskes det å:

- a) fastslå de forskjellige nivåene av den dynamiske responsen i en konstruksjonen.
- b) verifisere teori og antakelser knyttet til forskjellige dynamiske fenomen.
- c) studere reaksjonen til ulike materialtyper når de blir utsatt for vibrasjoner, med tanke på demping, friksjon og utmatting.

Målinger kan i hovedsak utføres ved to metoder[2]. Første metode vil være å måle konstruksjonens respons, der belastningen blir kontrollert av den som utfører målingene. Den andre metoden vil være å måle respons ut fra konstruksjonens daglige påkjenninger. Den første metoden vil naturligvis gi et mer nøyaktig måleresultat. For større konstruksjoner, som Hardangerbrua, vil det være umulig å sette i gang svingninger av konstruksjonens masse i kontrollerte former. Når Hardangerbruas vindinduserte respons skal måles, vil det derimot plasseres ut anemometer langs konstruksjonen. Anemometrene gir informasjon om vindfeltets hastighet, men vil ikke kunne gi et direkte mål på belastninger brua blir utsatt for under målesekvensen.

Videre i dette kapitlet vil det bli gjort rede for nødvendig teori knyttet til systemidentifikasjon.

2.2 FOURIERTRANSFORMASJON

Et hvilket som helst signal $x(t)$ kan beskrives som summen av flere harmoniske signal. For å kunne dele dette signalet opp i disse harmoniske komponentene benyttes fouriertransformasjon. Fouriertransformasjonen forvandler det vilkårlige signalet $x(t)$, til en ny funksjon $X(\omega)$. $X(\omega)$ inneholder informasjon om styrken til hver av de harmoniske

komponentene ut ifra frekvensen ω . $x(t)$ og $X(\omega)$ gir altså informasjon om samme signal, på hver sin måte. Fouriertransformasjonen er reversibel og vil derfor kunne binde sammen tidsplanet og frekvensplanet. For et kontinuerlig signal er fouriertransformasjon og dens inverse gitt ved[3]

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

For et diskret signal, der målinger er gjort over en begrenset periode, T , er den diskrete fouriertransformasjonen(DFT) og dens inverse gitt ved [3]

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i2\pi\frac{kr}{N}} \quad (2.3)$$

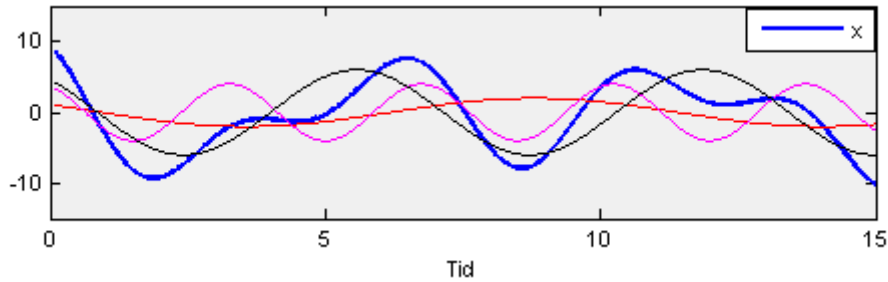
$$x_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi\frac{kr}{N}} \quad (2.4)$$

der N er det totale antall målinger gjort over perioden $T = \Delta N$. $r = 0,1,2,\dots,N-1$ og representere måling nummer r . $k = 0,1,2,\dots,N-1$ er frekvenskomponent nummer k . Δ representerer det konstante intervallet mellom hver måling, slik at tiden $t = \Delta r$.

Formel 2.3 krever N^2 komplekse multiplikasjoner. Utrekning av DFT utføres i dag på en langt mer effektiv måte enn ved bruk av formel 2.3. I flere matematiske dataprogram, derav Matlab, er den såkalte Fast Fouriertarnsfom-algoritmen(FFT) implementert. I motsetning til DFTs N^2 komplekse multiplikasjoner, vil FFT kun kreve $N \log_2 N$ komplekse multiplikasjoner. Dette gjør FFT til et godt redskap for beregning av DFT med tanke på datakapasitet, spesielt ved et stort antall målinger N [3].

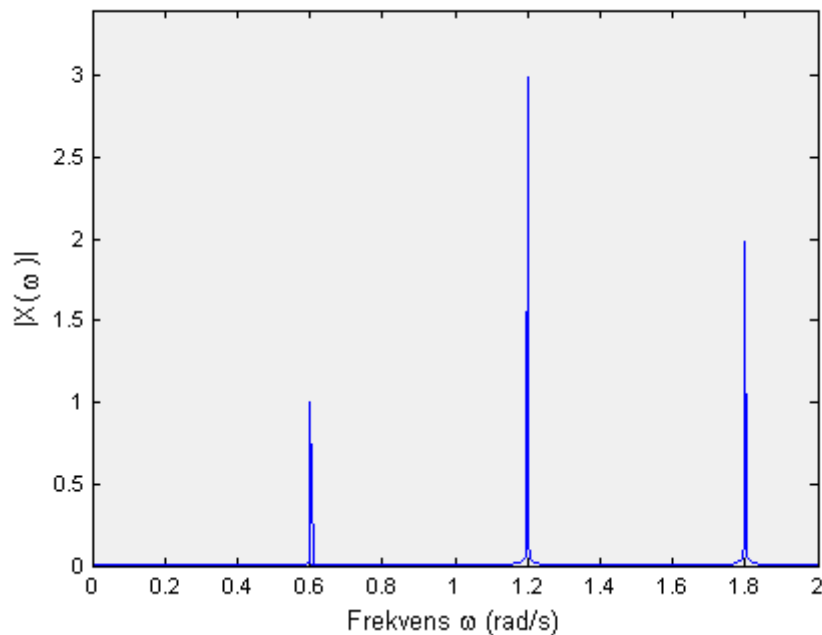
For å kunne gi en illustrasjon på fouriertransformasjonens egenskaper, vil et numerisk eksempel bli studert. Signalet i figur 2.1 er satt sammen av de tre følgende harmoniske komponentene

$$x = 2 \cos(0,6 t + 1) + 4 \cos(1,8 t + 0,4) + 6 \cos(1,2 t + 0.7)$$



Figur 2.1. Tidsserien x og dens harmoniske komponenter.

I signalet x , registreres det at de tre harmoniske komponentene har en amplitude på henholdsvis 2, 4 og 6. Største delen av styrken til signalet ligger altså i den harmoniske komponenten med frekvens på 1,2 rad/s. Dette kan lettere illustreres ved å ta fouriertransformasjon av x . Styrken til de forskjellige harmoniske komponentene i $X(\omega)$ kan da fremstilles i et spektrum, noe figur 2.2 illustrerer.



Figur 2.2. Fourier spektrum.

Figur 2.2 gir dermed et direkte bilde på styrkeinnholdet i signalet gjennom de tre harmoniske komponentene og deres korresponderende frekvenser. Frekvensene ved de tre toppene i figur 2.2 kan altså finnes igjen i signalet x .

2.3 AUTO-SPEKTRALTETTHET

Auto-spektralitettheten $S_x(\omega)$, eller auto-spekter, gir en representasjon på tettheten til variansen av et stokastisk signal $x(t)$. For et stokastisk signal er korrelasjonsfunksjonen definert som[3]

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (2.5)$$

Auto-spekteret og korrelasjonsfunksjonen danner pr. definisjon et fouriertransformasjonspar[3]

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.6)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.7)$$

Når formel 2.6 integreres fra $-\infty$ til $+\infty$ vil den imaginære delen bli null, siden $R_x(\tau)$ er en like funksjon. Auto-spektralitettheten har altså kun reelle verdier. Settes $\tau = 0$ får vi ut maksimalverdien til $R_x(\tau)$. Dermed vil arealet under kurven til auto-spektralitettheten, ut fra formel 2.5, tilsvare variansen til signalet $x(t)$

$$E[x(t)x(t)] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2.8)$$

2.4 KRYSS-SPEKTRALTETTHET

Kryss-spektraltettheten $S_{xy}(\omega)$, eller kryss-spekteret, gir en representasjon av tettheten til kovariansen mellom to stokastiske signal $x(t)$ og $y(t)$. Kryss-korrelasjonsfunksjonen er definert som

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t + \tau)] \quad (2.9)$$

Kryss-spektraltettheten og kryss-korrelasjonsfunksjonen danner et fouriertransformasjonspar[3]

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.10)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.11)$$

Når $\tau = 0$, gir arealet under kurven til kryss-spektraltettheten kovariansen mellom $x(t)$ og $y(t)$ [4].

$$E[x(t)y(t)] = Cov_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega) d\omega \quad (2.12)$$

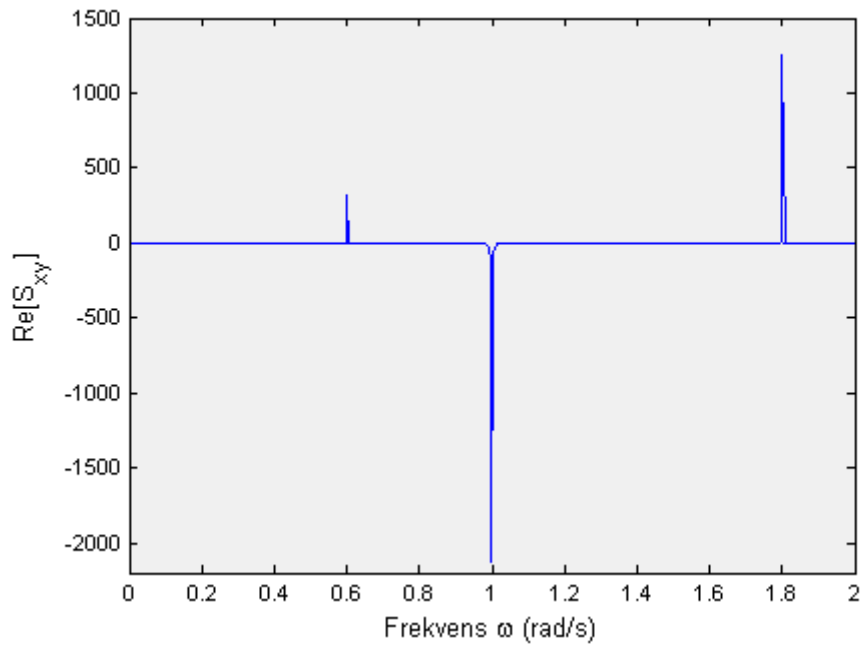
Det antas videre at x i avsnitt 2.2 og y er to stokastiske signal hentet fra samme prosess. y består av akkurat de samme harmoniske komponentene som x , med unntak av at de siste harmoniske leddet i de to signalene er ut av fase.

$$x = 2 \cos(0,6 t + 1) + 4 \cos(1,8 t + 0,4) + 6 \cos(1,2 t + 0.7)$$

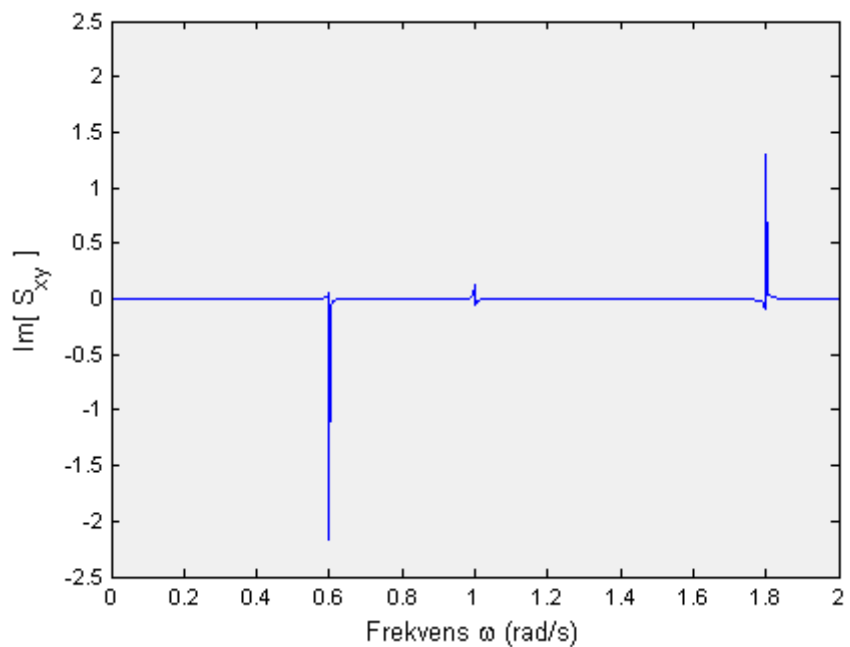
$$y = 2 \cos(0,6 t + 1) + 4 \cos(1,8 t + 0,4) - 6 \cos(1,2 t + 0.7)$$

Dermed vil de harmoniske komponentene med frekvens på 1,2 rad/s føre til at verdien til kovariansen mellom de to signalene vil reduseres. Dette kommer også tydelig frem av kryss-spekteret mellom x og y , hvor det observeres at kryss-spekteret vil ha et negativt utslag ved frekvens 1,2 rad/s. I motsetning til auto-spekteret vil kryss-spekteret inneholde både reelle og imaginære verdier. Den reelle delen av kryss-spekteret vises i figur 2.3. Den imaginære delen

kommer frem av figur 2.4. Det registreres at den imaginære delen vil være svært liten i forhold til den reelle delen.



Figur 2.3. Reell del av kryss-spekteret.

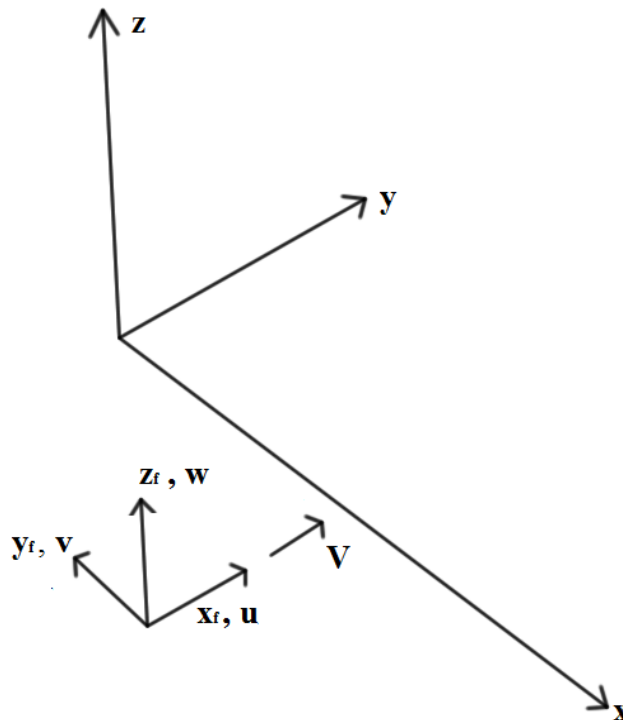


Figur 2.4. Imaginær del av kryss-spekteret.

KAP 3: VINDFELT

3.1 ANTAKELSER

Det er antatt at vindfeltet som treffer Hardangerbrua kan beskrives som en stasjonær og homogen prosess. Som avsnitt 3.2 kommer nærmere inn på, skal det simuleres tidsserier av vindfeltet langs bruas avstivningsbærere. Selv om avstivningsbærerens høyde over fjorden vil variere, er det antatt at vindfeltets stokastiske egenskaper langs hele bruaksen kan hentes fra samme spekter. Videre blir det antatt at hovedretningen til vindfeltet står normalt på bruaksen. Vindturbulensen langs bruas lengdeakse vil bli neglisjert, da den vil gi et lite bidrag til bruas respons sammenlignet med den tversgående og vertikale turbulenskomponenten. Aksesystemet (x_f, y_f, z_f) til turbulenskomponentene fremgår av figur 3.1, der u , v og w indikerer retningen til henholdsvis tversgående, langsgående og vertikal turbulenskomponent. V er den gjennomsnittlige vindhastigheten. Bruas lengderetning vil strekke seg langs x-aksen. Det empiriske auto- og kryss-spekteret som er benyttet i seinere beregninger er presentert i tillegg A.



Figur 3.1. Definisjon av aksesystemet til vindfeltet

3.2 MONTE CARLO SIMULERING

I konstruksjonsdynamikken vil det i mange tilfeller være interessant å simulere et vindfelt i tids-planet for å studere dens påvirkning av konstruksjonens dynamiske respons. For å kunne gjøre dette, må tidsseriene genereres ut fra spektrale verdier. En teknikk som er godt egnet til å simulere utfall av en stokastisk prosess, er Monte Carlo simulering. Denne teknikken vil bli brukt når vindfeltet som belaster Hardangerbrua skal simuleres. Dette avsnittet vil videre ta for seg Monte Carlo simuleringen av vindfeltet.

Som nevnt i avsnitt 2.2 vil et tilfeldig signal kunne uttrykkes som summen av flere harmoniske signal. Den reelle delen av et signal $x(t)$ vil derfor kunne skrives som[4].

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) = \sum_{k=1}^N c_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (3.1)$$

Der amplituden er c_k og fasevinkel φ_k er en vilkårlig vinkel mellom 0 og 2π . Hvis $x(t)$ er en stokastisk variabel, vil sammenhengen mellom signalets egenskaper i tids- og frekvens-planet kunne fremgå av formel 2.8. Ut fra denne formelen vil auto-spekteret til hver harmoniske komponent kunne diskretiseres, slik at[4]

$$S_x(\omega_k) = \frac{\sigma_{x_k}^2}{\Delta\omega} = \frac{c_k^2}{2 \Delta\omega} \quad (3.2)$$

Kombineres 3.1 og 3.2, kan tidsserien til $x(t)$ ut fra sine stokastiske egenskaper skrives som

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2S_x(\omega_k)\Delta\omega} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (3.3)$$

3.3 er kun gyldig for tidssimuleringer i ett enkelt punkt, uavhengig av punktets plassering i rommet. For en konstruksjon med lang utstrekning vil intensiteten til det turbulente vindfeltet, ved akkurat samme tid, ha forskjellige grad av korrelasjon ut ifra hvor på konstruksjonen vindfeltet observeres. Forholdet mellom vindintensiteten i de forskjellige punktene er derfor gitt ut fra stokastiske sammenhenger. For å kunne beskrive turbulensen ved M forskjellige punkt, ved akkurat samme tid, tas det utgangspunkt i kryss-spekteret. Som tidligere nevnt gir

kryss-spekteret informasjon om kovariansen mellom to signal, i dette tilfelle turbulenskomponentene i de forskjellige punktene. I videre beregninger antas det at korrelasjonen mellom de forskjellige turbulenskomponentene u, v og w er neglisjerbar, slik at $S_{xy} \approx 0$, når $x, y = u, v, w$. Kryss-spekteret mellom to punkt m og n kan da fremstilles i en kryss-spekter matrise.

$$\mathbf{S}_{xx}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{x_1x_1} & \cdots & S_{x_1x_n} & \cdots & S_{x_1x_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{x_mx_1} & \cdots & S_{x_mx_n} & \cdots & S_{x_mx_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{x_Mx_1} & \cdots & S_{x_Mx_n} & \cdots & S_{x_Mx_M} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

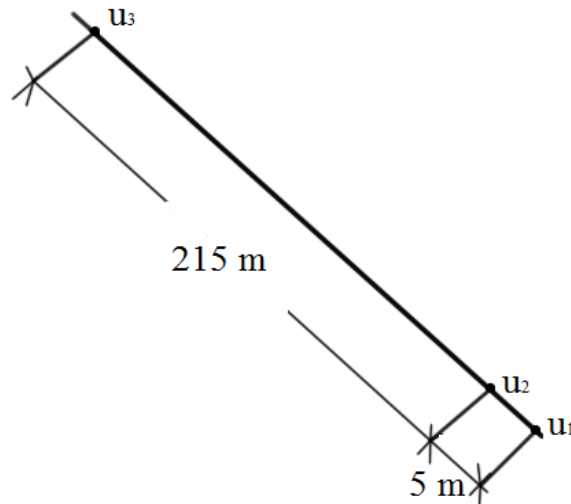
der $x = u, v$ eller w . Kryss-spekter matrisen er altså en kvadratisk matrise og siden vindfeltet antas å være en homogen og stasjonær prosess vil $S_{x_mx_n} = S_{x_nx_m}^*$. Man vil da kunne utføre en Cholesky-dekomponering av kryss-spekter matrisen, slik at $\mathbf{S}_{xx}(\omega) = \mathbf{G}_{xx}(\omega)\mathbf{G}_{xx}(\omega)^{*T}$. $\mathbf{G}_{xx}(\omega)$ blir her en nedre triangulær matrise

$$\mathbf{G}_{xx}(\omega) = \begin{bmatrix} G_{x_1x_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{x_mx_1} & \cdots & G_{x_mx_n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{x_Mx_1} & \cdots & G_{x_Mx_n} & \cdots & G_{x_Mx_M} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

der $\mathbf{G}_{xx}(\omega)^{*T}$ inneholder $\mathbf{G}_{xx}(\omega)$ sine komplekse konjuganter transponert. $\mathbf{G}_{xx}(\omega)^{*T}$ er altså en øvre triangulær matrise. Dermed kan tidsseriene for punkt $m = 1, 2, \dots, M$ simuleres ved[4]

$$x_m(t) = \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^N |G_{mn}(\omega_j)| \sqrt{2\Delta\omega} \cos(\omega_j t + \varphi_{nj}) \quad (3.6)$$

Der φ_{nj} er en vilkårlig fasevinkel mellom 0 og 2π .

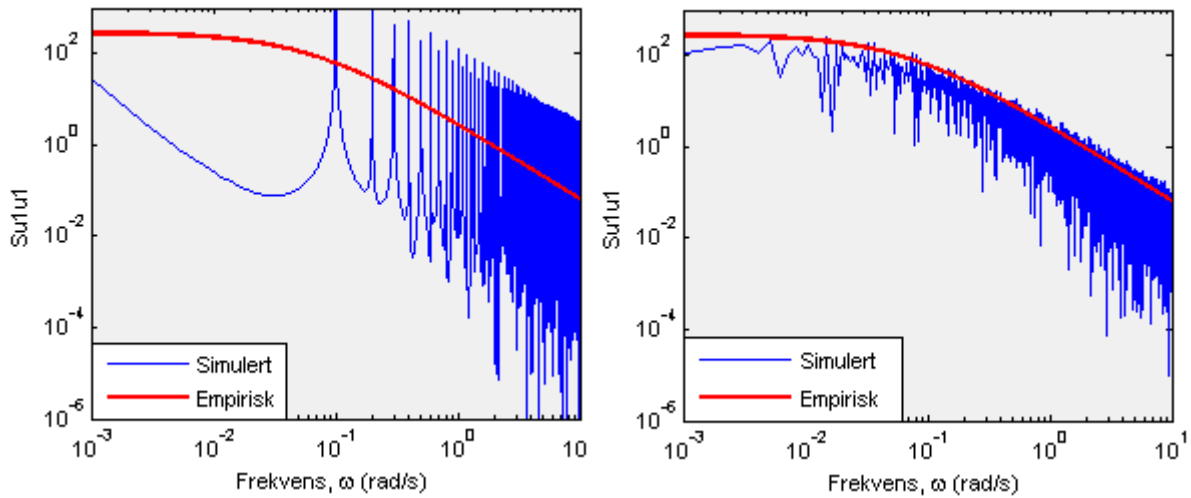


Figur 3.2. Romlig separering av turbulenskomponenter i tre punkt.

Figur 3.2 viser en enkel skisse av lengdeaksen til en brulignende konstruksjon, der vindturbulensen u_1 , u_2 og u_3 skal simuleres i tre punkt. Ut fra figuren kan det også sees at u_1 og u_2 har en avstand på 5 meter. u_3 vil derimot ligge 220 meter vekk fra u_1 . Kryss-spekter matrisen til de tre komponentene vil være

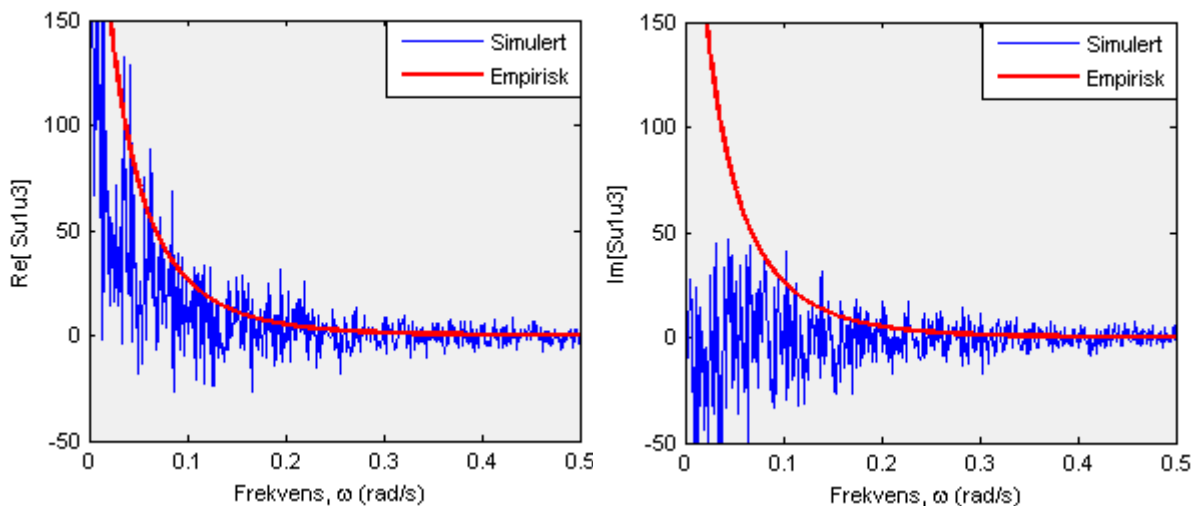
$$S_{uu} = \begin{bmatrix} S_{u_1u_1} & \dots & sym \\ S_{u_2u_1} & S_{u_2u_2} & \vdots \\ S_{u_3u_1} & S_{u_3u_2} & S_{u_3u_3} \end{bmatrix}$$

Auto-spekteret til u_1 , u_2 og u_3 er likt, slik at $S_{u_1u_1} = S_{u_2u_2} = S_{u_3u_3}$. For at de simulerte tidsseriene skal konvergere mot sin empiriske verdi må antall frekvenskomponenter $N \rightarrow \infty$ [5]. Hvis $N \rightarrow \infty$ må frekvensinndelingen av spekteret, $\Delta\omega \rightarrow 0$. Det vil derfor være interessant å se på hvordan spekteret til de simulerte tidsseriene vil konvergere mot det empiriske spekteret med en fin og grov frekvensinndeling. Grafen til høyre i figur 3.3 illustrerer hvordan auto-spekteret til u_1 vil miste store deler av sin opprinnelige informasjon hvis frekvensinndelingen er for grov. Figuren til venstre illustrerer auto-spekteret med en betraktelig tettere frekvensinndeling. Her observeres det at det simulerte auto-spekteret vil ligge seg tettere innpå kurven til det empiriske auto-spekteret.



Figur 3.3. Simulert auto-spekter ved grov(t.v) og fin(t.h) frekvensinndeling.

Videre viser figur 3.4 den reelle og imaginære delen av kryss-spekteret mellom turbulenskomponentene u_1 og u_3 . Figuren viser at verdiene til den imaginære delen i hovedsak vil ligge rundt null langs frekvensaksen. Den reelle delens verdier vil derimot følge formen til den empiriske kryss-spekter.



Figur 3.4. Imaginær og reell del av simulert kryss-spekteret.

Tidsseriene som er simulert har en lengde på 6000 sekunder. For å gjøre en vurdering om lengden til de simulerte tidsseriene og tettheten til frekvensinndelingen er tilstrekkelig, blir de stokastiske egenskapene til tidsseriene vurdert opp mot de empiriske inngangsverdiene. De stokastiske verdiene til u_1 , u_2 og u_3 blir videre fremstilt i kovarians-matrisen, som er

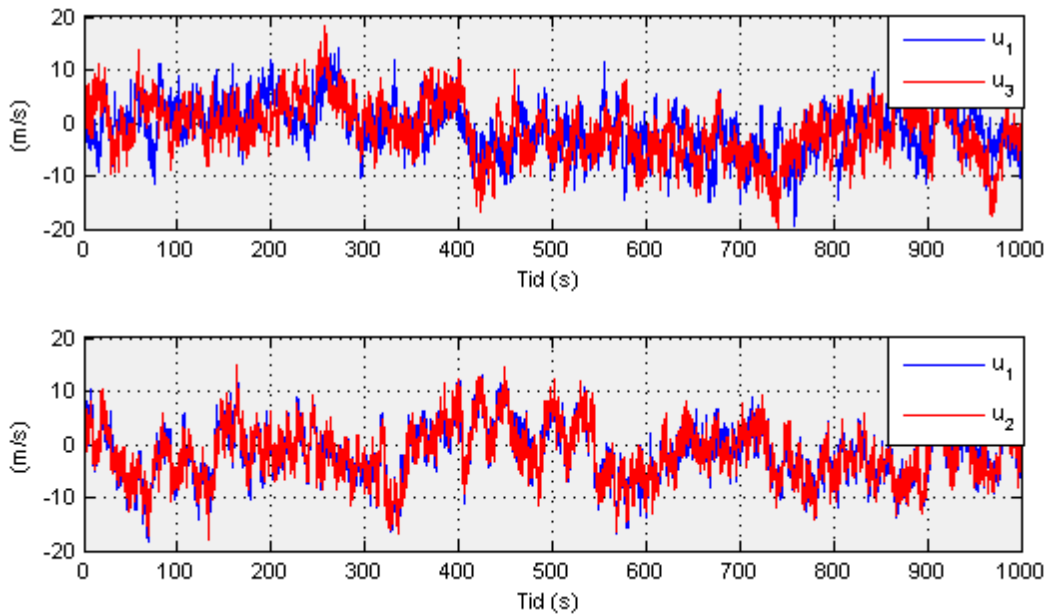
$$Cov_{uu} = \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & \dots & sym \\ Cov_{u_2u_1} & \sigma_{u_2}^2 & \vdots \\ Cov_{u_3u_1} & Cov_{u_3u_2} & \sigma_{u_3}^2 \end{bmatrix}$$

I tabell 3.1 blir de empiriske verdiene av kovarians-matrisen sammenlignet med verdiene til de simulerte tidsseriene. Tabellen viser et avvik på kovariansen mellom de punktene som har størst avstand. Det vurderes ut fra verdiene i tabellen at de stokastiske egenskapene til det simulerte vindfeltet har tilstrekkelig konvergens.

	Empirisk	Simulerte	Avvik(%)
$\sigma_{u_1}^2$	28,12	27,87	0,9
$\sigma_{u_2}^2$	28,12	27,96	0,6
$\sigma_{u_3}^2$	28,12	28,86	2,6
$Cov_{u_2u_1}$	25,12	25,51	1,6
$Cov_{u_3u_1}$	11,47	12,20	6,3
$Cov_{u_3u_2}$	11,58	12,52	8,1

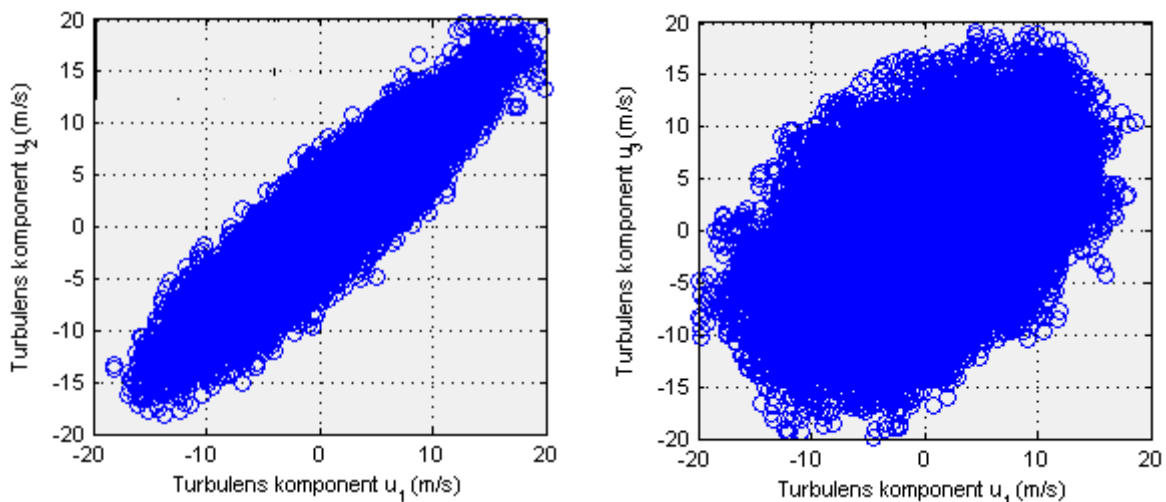
Tabell 3.1. Sammenligning av empiriske og simulerte verdier.

Kovariansen kan også bli illustrert ved figur 3.5. Den nederste av de to figurene viser tidsseriene til $u_1(t)$ og $u_2(t)$. Her observeres det at de to signalene endrer seg nesten helt likt i forhold til tidsaksen. På øverste figur kan det sees at verdien til $u_1(t)$ og $u_3(t)$ har større avvik langs tidsaksen. Figuren viser kun de 1000 første sekundene av simuleringen.



Figur 3.5. Sammenligning av tidsseriene til de forskjellige turbulenskomponentene.

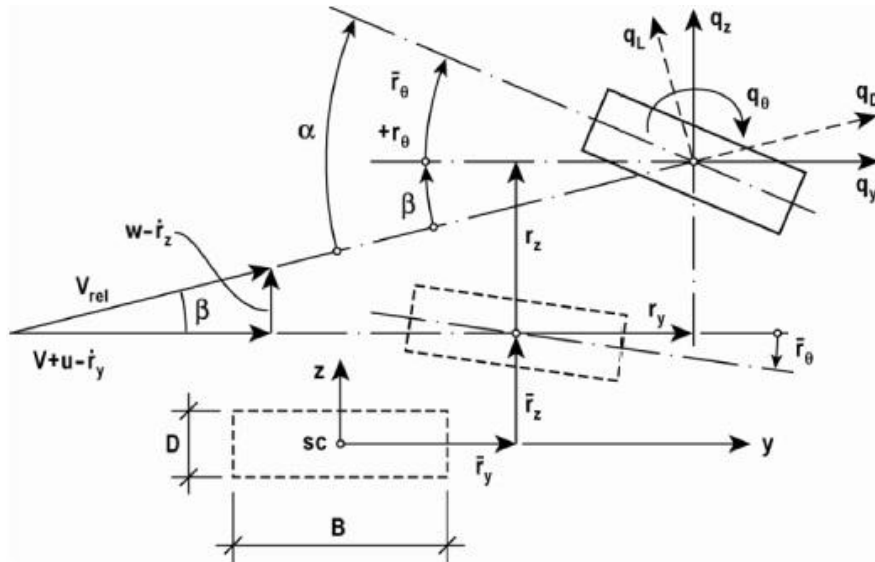
For å få et dirkete mål på likheten eller forskjellen mellom signalene vil det være praktisk å se på korrelasjonen, som vises i figur 3.6. Her observeres det at den lineære avhengigheten mellom u_1 og u_2 er sterkere enn mellom u_1 og u_3 . Dette er også fornuftig med tanke på avstandene som fremgår i figur 3.2.



Figur 3.6. Til venstre: korrelasjon mellom to punkter med avstand på 5 meter. Til høyre: korrelasjon mellom to punkter med avstand på 220 meter.

3.3 VINDINDUSERTE DYNAMISKE KREFTER

Som tidligere nevnt er det antatt at hovedvindretningen til vindfeltet står normalt på avstivningsbæreren. Ut fra figur 3.1 kan det sees at avstivningsbæreren vil bli utsatt for turbulens i retning x_f og z_f . Turbulenskomponentene er gitt som henholdsvis u og w . Belastningen fra vindfeltet vil generere kreftene q_y , q_z og q_θ i bruas avstivningsbærer, som vises i figur 3.7.



Figur 3.7. Påvirkning av forskyvninger og turbulenskomponenter på avstivningsbæreren[4].

For å kunne uttrykke kreftene blir det tatt utgangspunkt i Bernoulli's ligning for vindtrykk

$$q(t) = \frac{1}{2} \rho U(t)^2 \quad (3.7)$$

der ρ er luftens densitet og $U(t)$ vindehastighetens verdi langs tidsaksen. Første steg i figur 3.7 viser tverrsnittet i ubelastet tilstand. Deretter vil tverrsnittet få initielle forskyvninger (\bar{r}_y , \bar{r}_z og \bar{r}_θ) fra den horisontale komponenten $V + u$ og den vertikale komponenten w . Fra denne posisjonen vil variasjonen i u og w føre til at avstivningsbæreren vil svinge, beskrevet ved r_y , r_z og r_θ . Dermed kan drag-, lift- og moment-kreftene i figur 3.7 uttrykkes som[4].

$$\begin{bmatrix} q_D(x, t) \\ q_L(x, t) \\ q_M(x, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 \begin{bmatrix} D C_D(\alpha) \\ B C_L(\alpha) \\ B^2 C_M(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

I forhold til tverrsnittets lokal koordinatsystem kan lastvektoren skrives som

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_D \\ q_L \\ q_M \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

der det ut fra geometrien i figur 3.7 kan observeres at

$$\beta = \arctan \left(\frac{w - \dot{r}_z}{V + u - \dot{r}_y} \right) \quad (3.10)$$

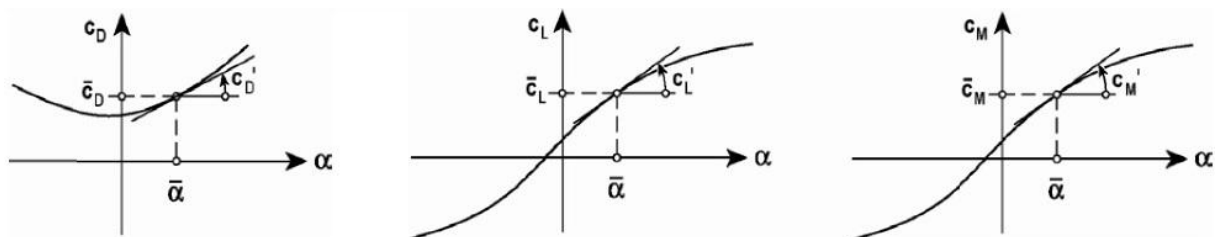
Det er videre antatt at turbulens komponentene u og w er liten i forhold til V , og at rotasjonen og forskyvningen av tverrsnittet er så små at $\cos \beta \approx 1$ og $\sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta \approx \frac{w - \dot{r}_z}{V}$. Dermed vil

$$V_{rel}^2 = (V + u - \dot{r}_y)^2 + (w - \dot{r}_z)^2 \approx V^2 + 2Vu - 2V\dot{r}_y \quad (3.11)$$

og

$$\alpha = \bar{r}_\theta + r_\theta + \beta \approx \bar{r}_\theta + r_\theta + \frac{w}{V} - \frac{\dot{r}_z}{V} \quad (3.12)$$

$C_D(\alpha)$, $C_L(\alpha)$ og $C_M(\alpha)$ varierer med tverrsnittets helning α . Disse funksjonene blir bestemt ved statiske vindtunnelforsøk. Typiske grafer for $C_D(\alpha)$, $C_L(\alpha)$ og $C_M(\alpha)$ er vist i figur 3.8.



Figur 3.8. Drag-, lift- og moment-koeffisientene[4].

Dermed kan drag-, lift- og moment-koeffisientene, henholdsvis \bar{C}_D , \bar{C}_L , og \bar{C}_M , hentes ut fra grafen ved en initielle rotasjon $\bar{\alpha} = \bar{r}_\theta$. C_D' , C_L' og C_M' er helningen til kurven ved $\bar{\alpha}$. Dermed defineres formel 3.12 som $\alpha = \bar{\alpha} + \alpha_f$, der $\alpha_f = r_\theta + w/V - \dot{r}_z/V$. I tillegg erstattes de ikke-lineære kurvene i figur 3.8 med en lineær tilnærming

$$\begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \\ C_M(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ \bar{C}_M \end{bmatrix} + \alpha_f \begin{bmatrix} C_D' \\ C_L' \\ C_M' \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Det er utført vindtunnelforsøk på avstivningsbæreren til Hardangerbrua for å fastslå disse koeffisientene. Resultatene fra forsøket fremgår i tabell 3.2.

\bar{C}_D	C_D'	\bar{C}_L	C_L'	\bar{C}_M	C_M'
0,794	0	-0,254	2,502	0,004	0,859

Tabell 3.2. Drag-, lift- og moment-koeffisienter for Hardangerbruas avstivningsbærer.

Dermed kan lastvektoren, gitt i formel 3.9 skrives som

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q \mathbf{v} + \mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \mathbf{r} \quad (3.14)$$

der

$$\mathbf{v}(x, t) = [u \quad w]^T \quad (3.15)$$

$$\mathbf{r}(x, t) = [r_y \quad r_z \quad r_\theta]^T \quad (3.16)$$

$$\bar{\mathbf{q}}(x) = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} (D/B)\bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ B\bar{C}_M \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B}_q(x) = \frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C_D' - \bar{C}_L) \\ 2\bar{C}_L & (C_L' + (D/B)\bar{C}_D) \\ 2B\bar{C}_M & BC_M' \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

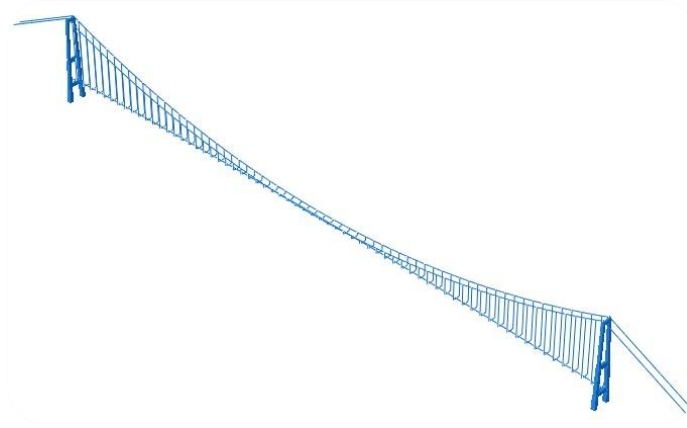
$$\mathbf{C}_{ae}(x) = -\frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C_D' - \bar{C}_L) & 0 \\ 2\bar{C}_L & (C_L' + (D/B)\bar{C}_D) & 0 \\ 2B\bar{C}_M & BC_M' & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{K}_{ae}(x) = \frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (D/B)C_D' \\ 0 & 0 & C_L' \\ 0 & 0 & BC_M' \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$\bar{\mathbf{q}}(x)$ er den statiske vindlasten. $\mathbf{B}_q \mathbf{v}$ er den dynamiske delen av vindlasten. I tillegg vil man også få bevegelsesinduserte krefter, gitt ved $\mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{r}}$ og $\mathbf{K}_{ae} \mathbf{r}$. I denne oppgaven blir det kun tatt hensyn til den statiske og dynamiske delen av lasten. Tverrsnittets aerodynamiske stabilitet vil altså ikke bli betraktet i videre beregninger.

KAP 4: MODELLERING I ABAQUS

4.1 INTRODUKSJON



Figur 4.1. Abaqus-modell av Hardangerbrua.

I det generelle elementmetodeprogrammet Abaqus er det laget en 3D-modell av Hardangerbrua, bygd opp av bjelkeelementer. Det er antatt at materialet til brua har en lineær oppførsel. Bruas stivhet vil derimot ikke være lineær, da bærekablenes deformasjon vil være stor i forhold til tøyning. Siden bærekablenes bøye-stivhet nærmest er neglesjerbar, vil den ikke-lineære akisale stivheten til bærekablene gi det største bidraget til bruas stivhet. I Abaqus vil dette bli tatt hånd om ved å aktivere ikke-lineær geometri, NLGEOM,

I modellen er det brukt to typer bjelkeelement; Timoshenko(B31) og Euler-Bernoulli(B33). Tårnene er modellert med Timoshenko-elementer siden Abaqus ikke godtar Euler-Bernoulli-elementer for lineært varierende tverrsnitt(se avsnitt 4.2). Resten av brua er modellert med Euler-Bernoulli-elementer, som baserer seg på klassisk bjelketeori.

I første omgang er hensikten med modellen å beregne egenfrekvensene og modeformene til brua. I STEP-modulen i Abaqus vil FREQUENCY-prosedyren estimere seg fram til løsninger av egenverdi-problemet, $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$, for å finne egenfrekvenser og moder[6]

Videre vil demping og vindlast bli implementert i modellen for å kunne kjøre analyse i tidsplanet, noe oppgaven kommer tilbake til seinere. Her velges implisitt integrasjon når likevektsligningen skal løses. Eksplisitt integrasjon vil kreve svært små tidssteg for at løsningen skal konvergere, og er derfor lite egnet i denne type dynamiske analyser[6].

Modellen består av fire hoveddeler:

- *Tårn*
- *Bærekabler*
- *Hengestenger*
- *Avstivningsbærer*

De fire delene modelleres hver for seg og blir til slutt satt sammen som en komplett modell. De fire hoveddelene vil bli presentert i de neste avsnittene. I modellen inngår ikke bruas sidespenn, da kreftene fra avstivningsbæreren føres ned i rigelen. Bruas masse, stivhet og geometri, som inngår i modellen, er hentet fra tegninger og beregninger utarbeidet av Statens Vegvesen[7].

4.2 TÅRN

Tårnene er modellert som et lineært varierende tverrsnitt fra fundamentet til toppen av tårnene. Siden Abaqus ikke tillater Euler-Bernoulli-elementer ved lineært varierende tverrsnitt blir Timoshenko-elementer benyttet. I en global analyse er det svært komplisert å ta hensyn til riss i betongen, da betongen vil ha forskjellige risseeffekter i forskjellige retninger. Det er dermed vanskelig å fastslå eksakt E-modul. E-modul som er oppgitt i tabell 4.1 er for urisset tilstand der virkning av armering inngår.

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">▪ $E_{\text{curisset}} = 40000 \text{ N/mm}^2$▪ $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$▪ $\nu = 0,2$ |
|--|

Tabell 4.1. Materialdata til tårnene.

4.3 BÆREKABLER

Hver bærekabel er satt sammen av 100032 ståltråder. I Abaqus er det mest hensiktsmessig å modellere kablene som et massivt sirkulært tverrsnitt, der man angir radius, r . Kablene skal kun bære strekkrefter i aksialretning. Siden kablene er modellert med bjelkeelement, er det viktig at aksialstivhet gir det dominerende stivhetsbidraget. Ved å bruke tverrsnittets radius, vil bøye- og torsjons-stivheten gi et svært lite bidrag til den totale stivheten.

<ul style="list-style-type: none"> ▪ $A = 0,22132 \text{ m}^2$ (pr. bærekabel) ▪ $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0,26542 \text{ m}$ ▪ $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ ▪ $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ▪ $\nu = 0,3$
--

Tabell 4.2. Material- og tverrsnitts-data til bærekablene.

På grunn av sin høye masse og lange spenn, vil brua ha stor nedbøyning når modellen blir påsatt tyngdekraft. Midt i bruspenet vil det være en nedbøyning på over ni meter. For å redusere forskyvningene i modellen spennes bærekablene opp. I Abaqus blir dette simulert ved å gi bærekablene en termisk tøyning. Den termiske tøyningen blir satt på slik at kablene trekker seg sammen. Bærekablene vil da rette opp modellen.

4.4 HENGESTENGER

Akkurat som bærekablene, skal hengestengene også kun bære strekkrefter i aksialretning. Det er også lagt inn en punktmasse på 1272 kg i toppen av hengestengene, for å simulere massen til de øvre hengestagfestene.

<ul style="list-style-type: none"> ▪ $A = 0,0032 \text{ m}^2$ ▪ $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0,0319 \text{ m}$ ▪ $E = 160000 \text{ N/mm}^2$ ▪ $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ▪ $\nu = 0,3$
--

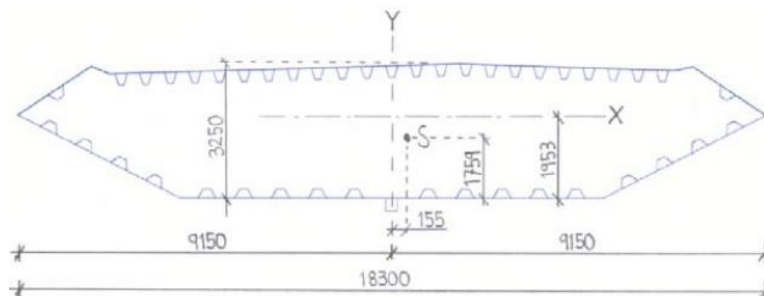
Tabell 4.3. Material- og tverrsnitts-data til bærekablene.

4.5 AVSTIVNINGSBÆRER

Avstivningsbæreren er modellert som et generelt tverrsnitt, der tverrsnittskonstanter og materialdata i tabell 4.4 er implementert. Hovedmålene til avstivningsbæreren går frem av figur 4.2.

▪	$A = 0,5813 \text{ m}^2$
▪	$E = 210000 \text{ N/mm}^2$
▪	$I_x = 0,972 \text{ m}^4$
▪	$I_y = 16,448 \text{ m}^4$
▪	$I_T = 2,460 \text{ m}^4$
▪	$I_w = 4,298 \text{ m}^6$
▪	$\nu = 0,3$
▪	$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$

Tabell 4.4. Material- og tverrsnitts-data til avstivningsbæreren.



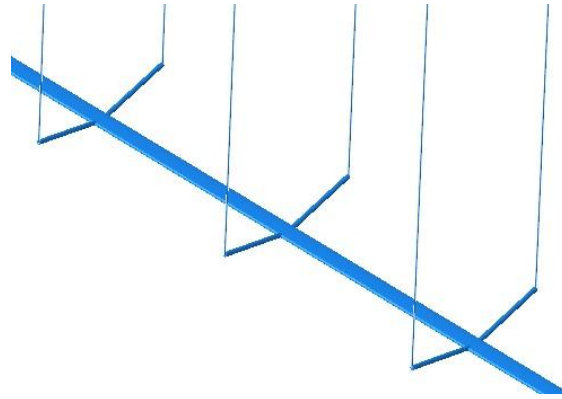
Figur 4.2. Tverrsnittet til avstivningsbæreren. Mål i mm.

Når avstivningsbæreren settes i bevegelse vil tverrskott, ledeskoveler m.m(se tabell 4.5) gi et betydelig bidrag til de samlede treghetskreftene i tverrsnittet. Denne ekstra massen legges inn som en punktmasse, med tilhørende treghetsmoment om avstivningsbærerenes skjærsenter for hver 20 m.

	Masse	Treghetsmoment
	(kg)	(kgm²)
Ledeskoveler	2280	75580
Tverrskott	22380	455740
Nedre hengestagfeste	1680	91360
Rekkverk	3660	124020
Belegning	53480	884080
Elektro	700	2300
Transportskinne	220	20
Lysmaster	100	9080
Sluk	60	2940
Overflatebehandling	680	26980
SUM	85240	1672100

Tabell 4.5. Tilleggsmasse i avstivningsbærer.

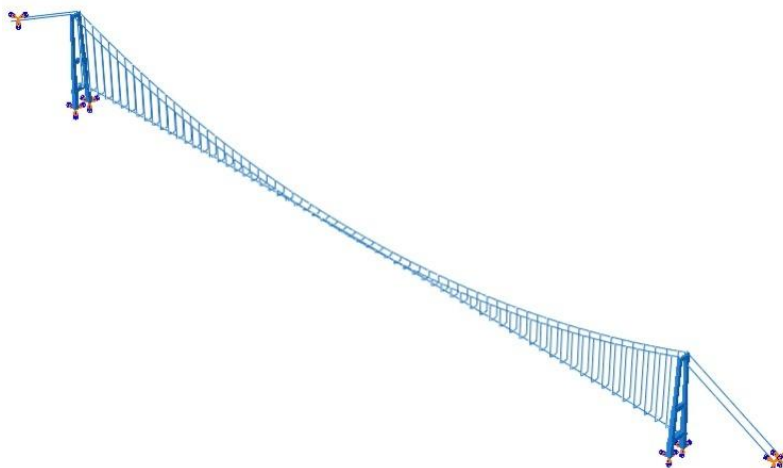
For å koble avstivningsbæreren og hengestengene er det lagt inn elementer med høy stivhet i avstivningsbæreren, da deformasjon av disse elementene ikke er ønskelig. Massen til elementene er lav siden man ikke ønsker at disse skal gi bidrag til massematrisen. Figur 4.3 viser de stive elementene som kobler sammen hengestengene og avstivningsbæreren.



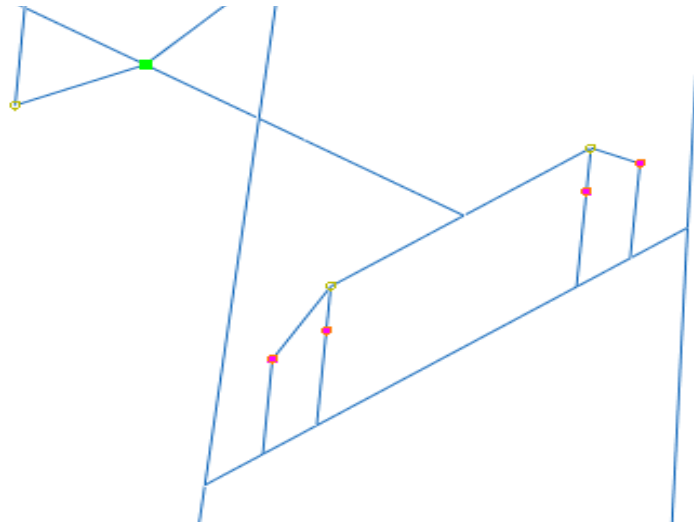
Figur 4.3. Kobling mellom avstivningsbærer og hengestenger

4.5 RANDBETINGELSER

Både tårnfot og kabelforankring er fast innspent, som vist på figur 4.4. Koblingen mellom avstivningsbæreren og tårnene er modellert med samme komponent som binder sammen avstivningsbæreren og hengestengene. Avstivningsbæreren er fritt opplagt på nederste rigel og gis en sideveis fastholdning. Figur 4.5 viser hvordan dette opplegget er simulert. De stive komponentene bidrar til at avstivningsbæreren ikke kan bevege seg ved rigelen. Forbindelsen vil simulere den fritt opplagte forbindelsen ved å tillate rotasjon om punktene som er markert med røde prikker i figur 4.5.



Figur 4.4. Randbetingelser til tårn og kabelforankring.



Figur 4.5. Kobling mellom avstivningsbærer og tårn.

4.6 DEMPING

I motsetning til masse- og stivhetsleddet i bevegelsesligningen, vil dempings-leddet være vanskeligere å fastslå for den aktuelle konstruksjonen. Damping kan blant annet være avhengig av materialegenskaper og friksjon i konstruksjonens forbindelser[2]. For å kunne si noe om konstruksjonens demping tas det derfor utgangspunkt i tidligere målinger, gjort av lignende konstruksjoner. For å estimere dempingen til Hardangerbrua brukes Rayleigh demping. Dempingsmatrisen \mathbf{C} antas å være masse- og stivhets-proporsjonal, slik at[8]

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (4.1)$$

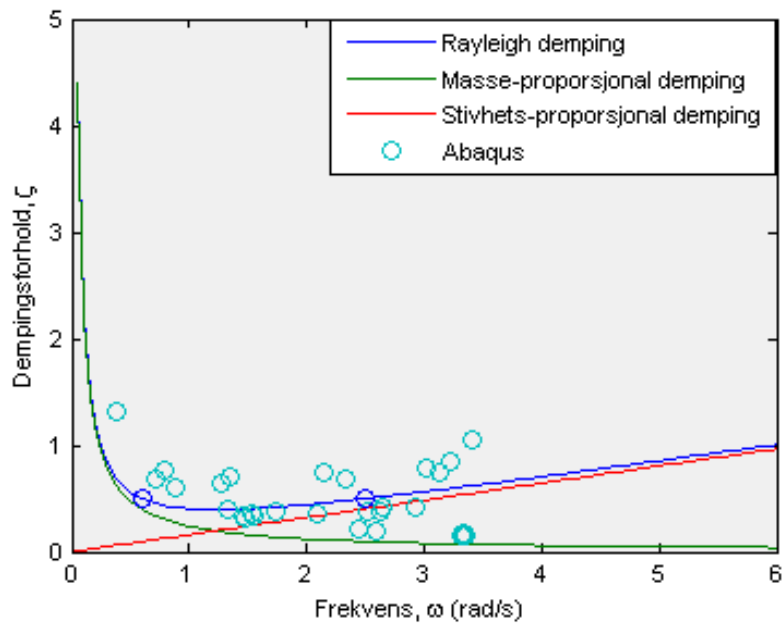
For mode n vil $C_n = 2\zeta_n \omega_n M_n$ og $K_n = \omega_n^2 M_n$. Dermed kan dempingsforholdet ζ_n skrives som

$$\zeta_n = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta \omega_n}{2} \quad (4.2)$$

Etter anbefaling fra veileder er dempingsforhold satt til $\zeta=0.5$ %. Dermed kan α og β uttrykkes som

$$\alpha = \zeta \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \quad \beta = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.3)$$

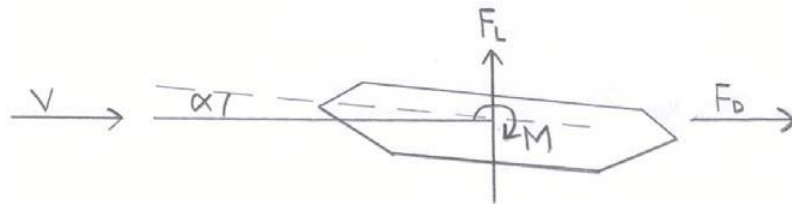
Dermed gjenstår det å velge frekvensområdet, mellom ω_i og ω_j . ω_i og ω_j velges ut fra et frekvensområde rundt bruas første egenfrekvenser og settes til $\omega_i = 0.6$ og $\omega_j = 2.5$. Dermed blir $\alpha = 0.0048$ og $\beta = 0.0032$. I Abaqus blir α og β implementert under materialegenskapene. Rayleigh dempingen med tilhørende frekvensområde og dempningsforhold vises i figur 4.6. For å kontrollere at dempningsforholdet følger Rayleighkurven vil det være mulig å kjøre en kompleks egenfrekvens-analyse i Abaqus. På figuren kan det sees at dempningsforholdet (markert med sirkler) har en viss spredning rundt Rayleighkurven. Abaqus tar ikke hensyn til geometrisk stivhet ved utregning av dempningsforhold, noe som antas å være hovedårsaken til spredningen.



Figur 4.6. Rayleigh demping

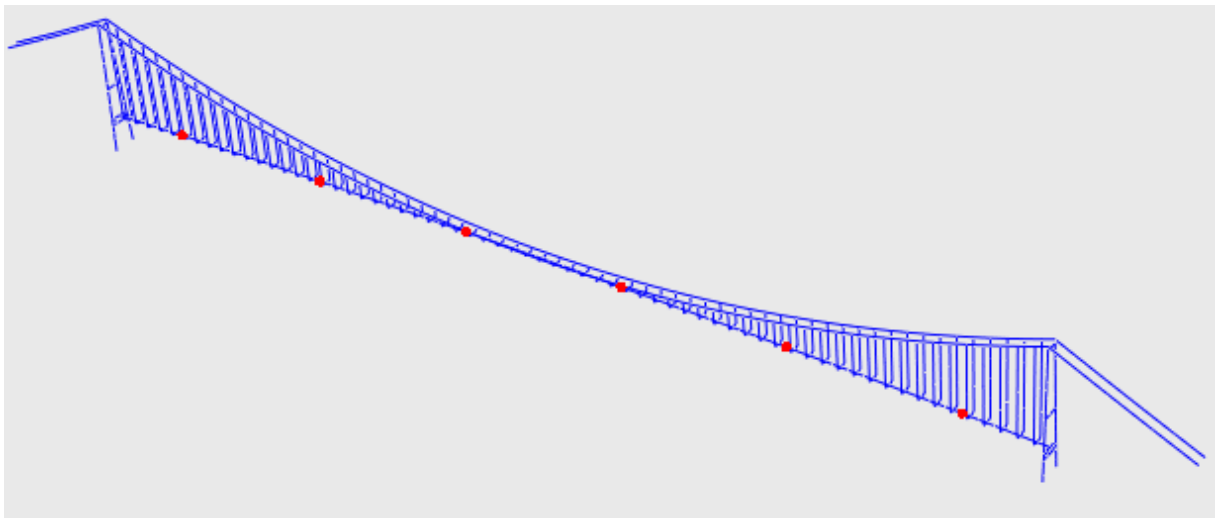
4.7 IMPLEMENTERING AV VINDLAST

Vindlasten, som diskuteres i kapittel 3, blir innført som punktlaster i skjærsenter ved seks forskjellige punkt langs avstivningsbæreren. Avstanden mellom hvert punkt er 220 meter. I formel 3.14 er vindlasten $\mathbf{q}_{tot}(x, t)$ gitt som last pr. løpemeter. Denne lasten ganges derfor opp med 220 meter for å få kreftene F_D , F_L og M som vises på figur 4.7.



Figur 4.7. Vindinduserte krefter på avstivningsbæreren.

Figur 4.8 viser hvor på avstivningsbæreren vindlasten er implementert.



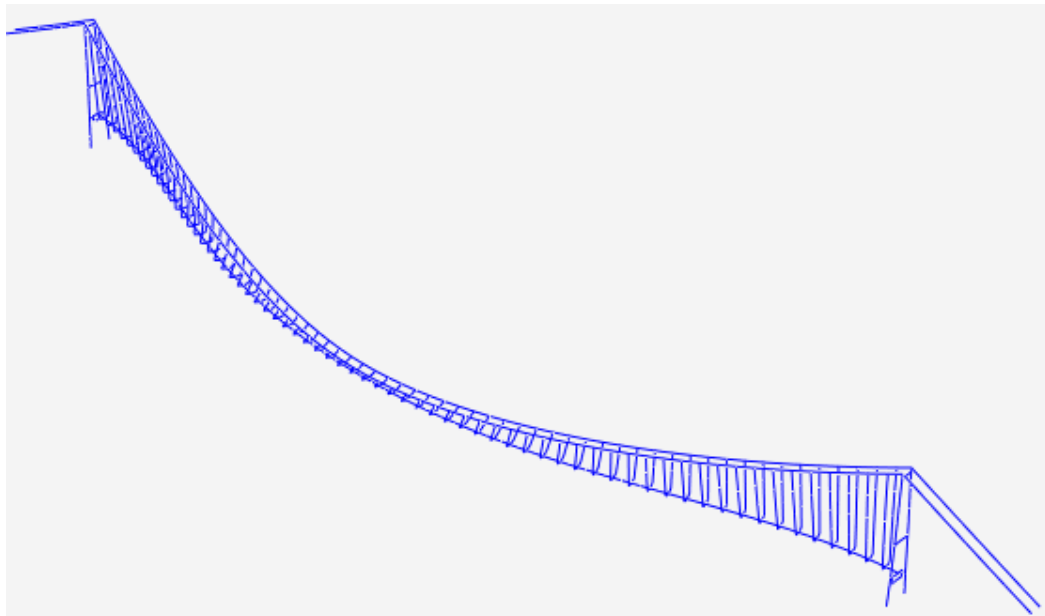
Figur 4.8. Punkter på avstivningsbærer der vindlasten er implementert.

KAP 5: RESULTATER FRA ABAQUS

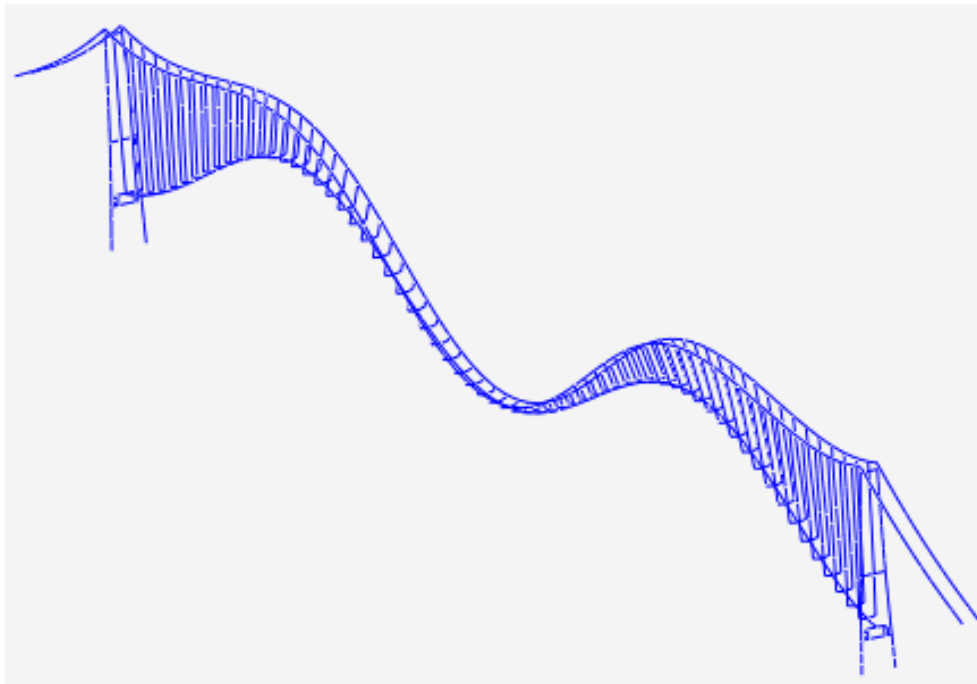
5.1 EGENFREKVENSER OG MODER

I dette avsnittet vil Hardangerbruas teoretiske egenfrekvenser og moder, beregnet i Abaqus, bli presentert. Dette er bruas moder for frie svingninger. Her er brua kun utsatt for last i form av sin egen tyngde.

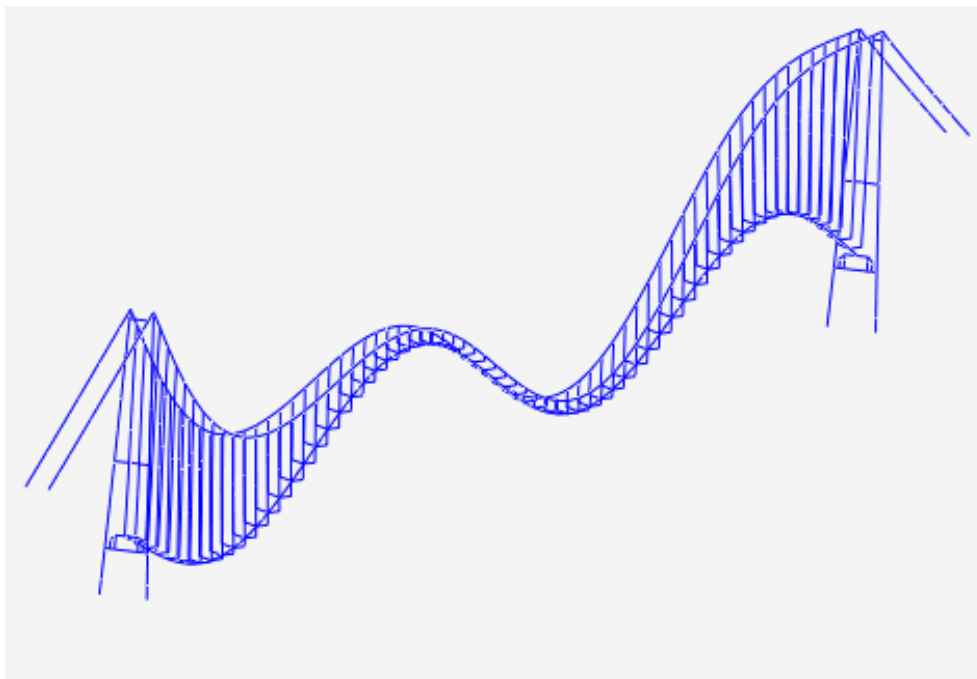
I Abaqus er det mulig å beregne svært mange egenfrekvenser og moder, avhengig av hvor mange frihetsgrader systemet har. Kun et fåtall av disse modene er av interesse. Det er derfor viktig å gjøre en vurdering av hvilke moder som er aktuelle i forhold til målingene som skal bli gjort. Siden sensorene skal plasseres langs avstivningsbæreren, vil kun moder som gir utslag på avstivningsbæreren bli vurdert. I denne oppgaven vil derfor de 15 første modene til brua bli presentert. Blant disse 15 modene inngår altså ikke de såkalte kabelmodene. I kabelmodene vil kablene gi de største utslagene på modeformen. Modene blir delt opp i tre forskjellige kategorier; horisontal-, vertikal- og torsjons-moder. Dette indikerer kun modens hovedform. For eksempel vil en torsjons-mode også kunne gi utslag i horisontal retning. Videre vil figur 5.1-5 illustrere fem utvalgte moder. Egenfrekvensene til bruas 15 første moder og deres hovedform kommer frem av tabell 5.1.



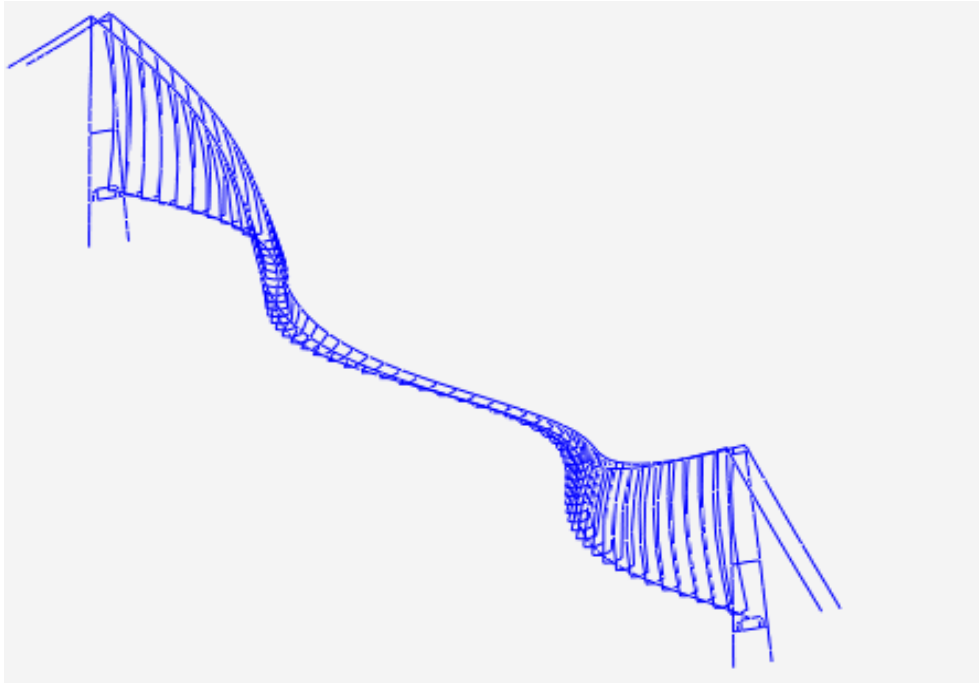
Figur 5.1. Mode 1. $\omega_1 = 0,37 \text{ rad/s}$.



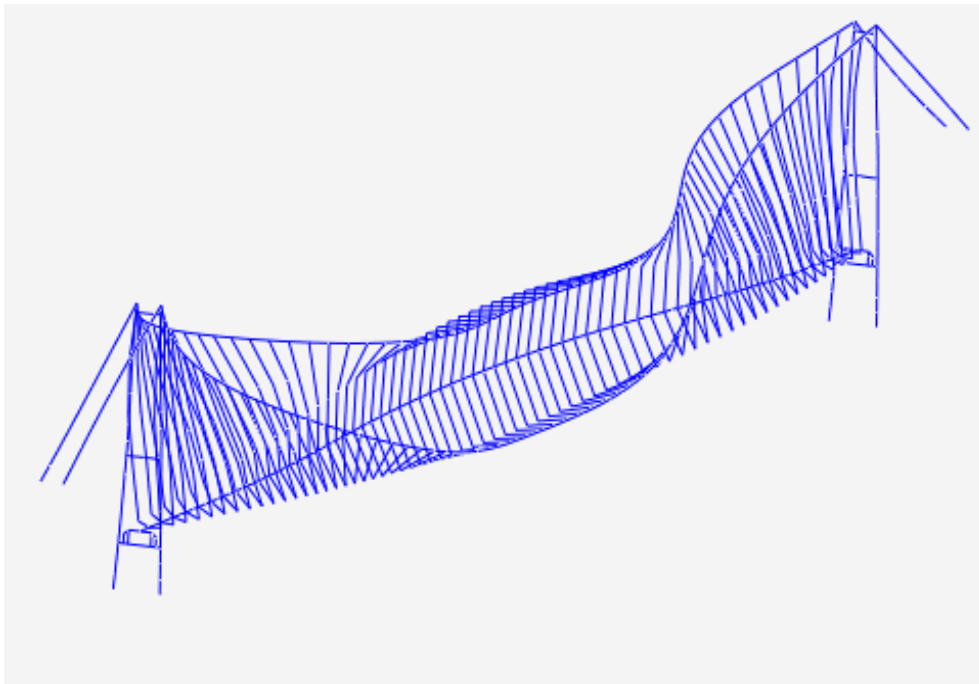
Figur 5.2. Mode 5. $\omega_5 = 1,27$ rad/s.



Figur 5.3. Mode 6. $\omega_6 = 1,33$ rad/s.



Figur 5.4. Mode 10. $\omega_{10} = 2,15 \text{ rad/s}$.



Figur 5.5. Mode 11. $\omega_{11} = 2,33 \text{ rad/s}$.

Mode	Egenfrekvens(rad/s)	Hovedform
1	0,37	Horisontal
2	0,71	Vertikal
3	0,79	Horisontal
4	0,89	Vertikal
5	1,27	Vertikal
6	1,33	Vertikal
7	1,34	Horisontal
8	1,74	Vertikal
9	2,08	Vertikal
10	2,15	Horisontal
11	2,33	Torsjon
12	2,51	Vertikal
13	2,92	Vertikal
14	3,02	Horisontal
15	3,41	Torsjon

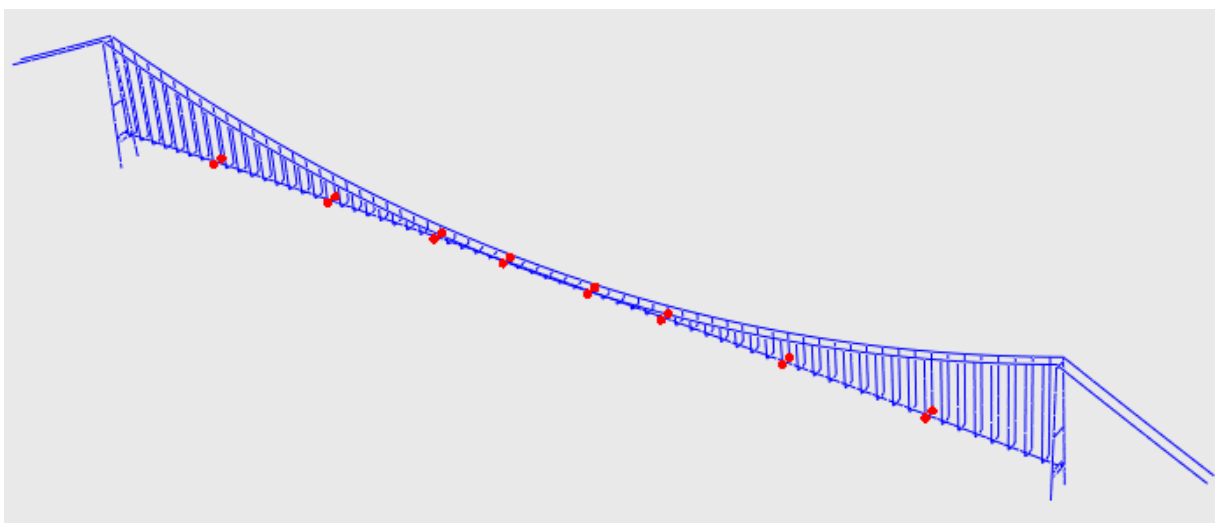
Tabell 5.1. De 15 første egenfrekvensene til Hardangerbrua i ubelastet tilstand.

KAP 6: SIMULERTE MÅLINGER

6.1 PLASSERING AV SENSORER

Et viktig ledd i planleggingsfasen vil være å simulere de målinger som skal utføres. Dette for å kunne forsikre seg om at sensorene, ut fra deres plassering, klarer å fange opp de data som er viktig for å kunne beskrive konstruksjonens dynamiske egenskaper. Den ideelle plasseringen av sensorene vil være i punktene der retningen til modene endres. Formen til de forskjellige modene kan da anslås gjennom analyse av kryss-spekteret mellom de forskjellige sensorene, noe avsnitt 6.2 vil gå nærmere inn på.

Når Hardangerbrua skal instrumenteres, vil totalt 16 sensorer plasseres langs bruas avstivningsbærer. Sensorene plasseres i par ved utvalgte hengestenger, der en sensor blir plassert på hver side av vegbanen. Dette for å kunne måle rotasjon om avstivningsbærerens lengdeakse. Det skal med andre ord plasseres ut sensorer ved åtte snitt langs avstivningsbæreren. For å gjøre en vurdering av hvor sensorene skal plasseres, tas det utgangspunkt i de teoretiske egenfrekvensene og modene som er funnet i Abaqus. Ut fra dette vil sensorene bli plassert ved hengestang 8, 17, 25, 30, 36, 41, 49 og 58. Plasseringen av sensorene kommer også frem av figur 6.1, der sensorene er indikert med røde prikker. Hengestangnummerering starter til venstre i figuren.



Figur 6.1. Plassering av sensorer.

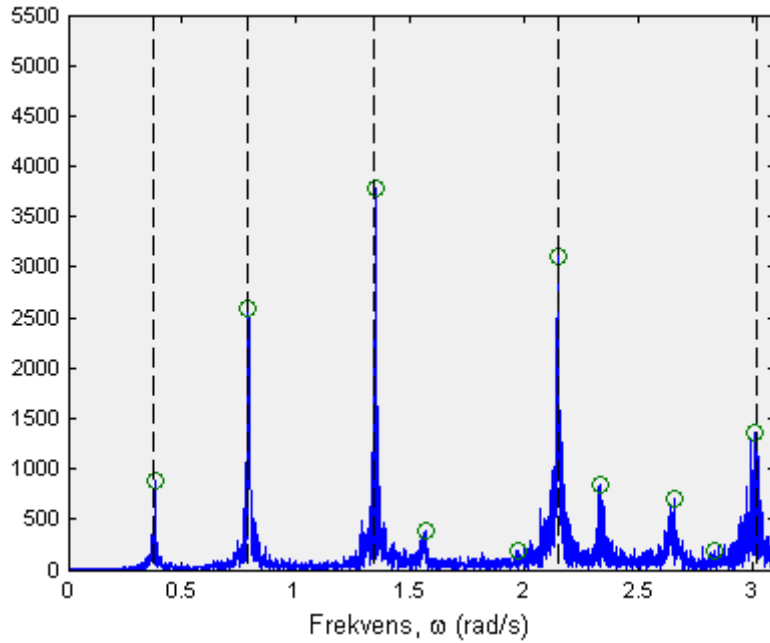
6.2 EGENFREKVENSER OG MODER

Et av formålene ved instrumenteringen av Hardangerbrua vil være å fastslå bruas egenfrekvenser. Ved å ta utgangspunkt i den simulerte responsen, hentet fra Abaqus, vil det være mulig å si noe om ved hvilke frekvenser styrken til responsen er størst. Ved å utføre en fourieranalyse av tidsseriene til den vindinduserte akselerasjonen, vil egenfrekvensene til brua bli lokalisert som frekvensen ved spekterets maksimalverdier. Videre vil akselerasjonen til Hardangerbrua bli hentet ut fra de åtte forskjellige punktene der sensorene er plassert. For å kunne lokalisere frekvensene blir horisontal-, vertikal- og torsjons-respons hentet ut hver for seg. I avsnitt 6.2 vil noen av spektrene fra de åtte hengestengene bli studert. Samtlige spekter finnes i et vedlegg bakerst i rapporten.

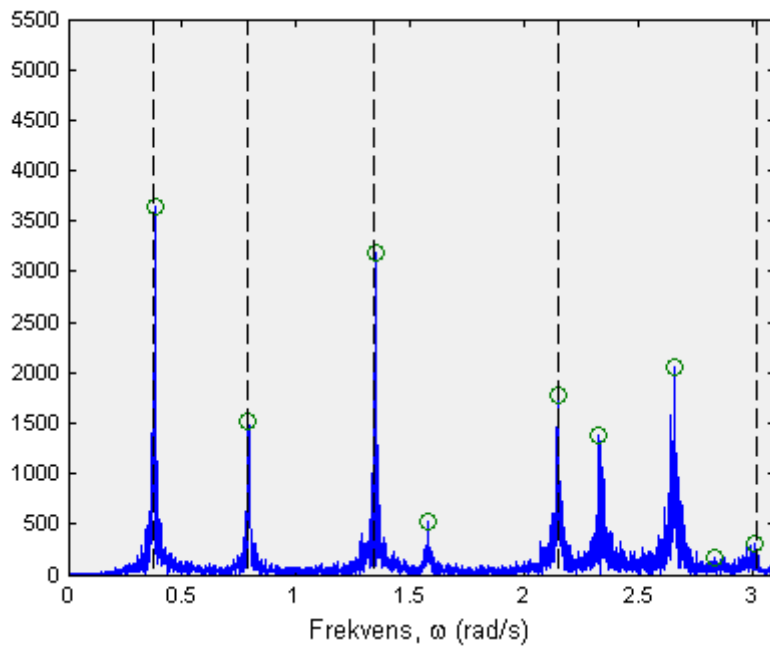
Modeformen til de avleste frekvensene vil være mulig å estimere ut i fra kryss-spekteranalyse. Som vist i kapittel 2 vil kryss-spekteret gi informasjon om fasen mellom de harmoniske komponentene. Ved å sammenligne verdiene fra kryss-spekteret vil forholdet mellom de forskjellige punktene gi et bilde på modeformen til den aktuelle frekvensen. Denne teknikken blir brukt videre i dette avsnittet, der modeformene normaliseres ut i fra kryss-spekterets maksimalverdi. Dermed vil resultatene i dette avsnittet kunne gi et bilde på om plasseringen til sensorene vil gi et godt bilde av Hardangerbruas egenfrekvenser og moder.

6.2.1 HORIZONTALMODER

Figur 6.2-3 viser spekteret til den horisontale akselerasjonen ved henholdsvis hengestang nr 8 og 30. Sirklene indikerer toppene til amplitudene. De vertikale stiplede linjene viser de teoretiske egenfrekvensene, hentet fra Abaqus.



Figur 6.2. Hengestang nr 8.



Figur 6.3. Hengestang nr 30.

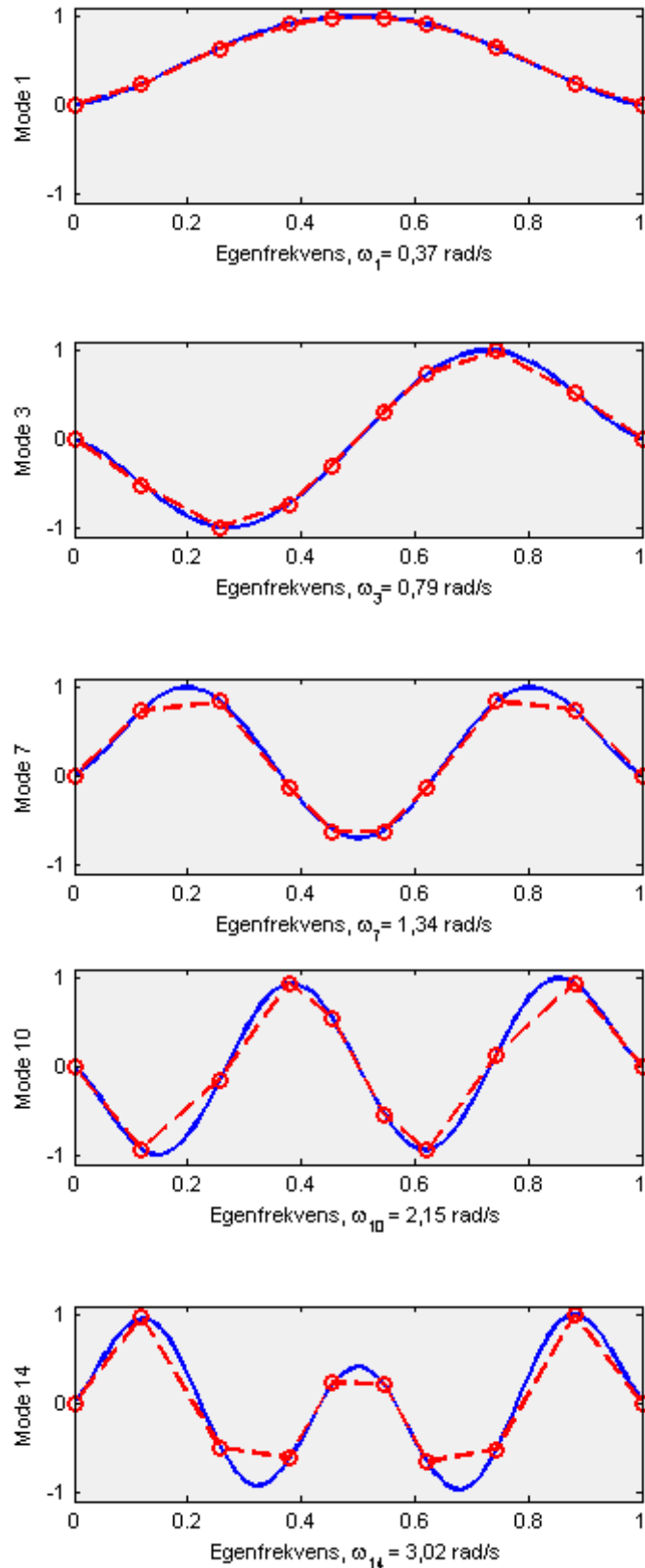
I figur 6.2-3 observeres det tre tydelige topper som ikke er markert med stiplede linjer. Sammenlignes disse med egenfrekvensene fra Abaqus viser det seg at frekvensene på 1,56 og 2,65 rad/s er knyttet til moder som gir store utslag på hengestengene. Frekvensen på 2,33 rad/s finnes igjen i mode 11, se tabell 5.1. Selv om denne moden i hovedsak er knyttet til

torsjon vil den også gi utslag i horisontalretning, noe figur 6.2-3 bekrefter. Ut fra tabell 6.1 kan det sees at egenfrekvensene fra de simulerte målingene stemmer med de teoretiske egenfrekvensene.

Mode	Abaqus	Simulerte målinger
1	0,37	0,38
3	0,79	0,79
7	1,34	1,34
10	2,15	2,15
14	3,02	3,00

Tabell 6.1. Sammenligning av egenfrekvenser(rad/s), beregnet fra simulerte målinger og Abaqus.

Videre fremgår modene fra de simulerte målingene av figur 6.4. Den blå linjen viser modene hentet fra Abaqus. De røde sirklene indikerer de åtte snittene der sensorene er plassert. Der hengestang 8 er første sirkel på figurens venstre side.

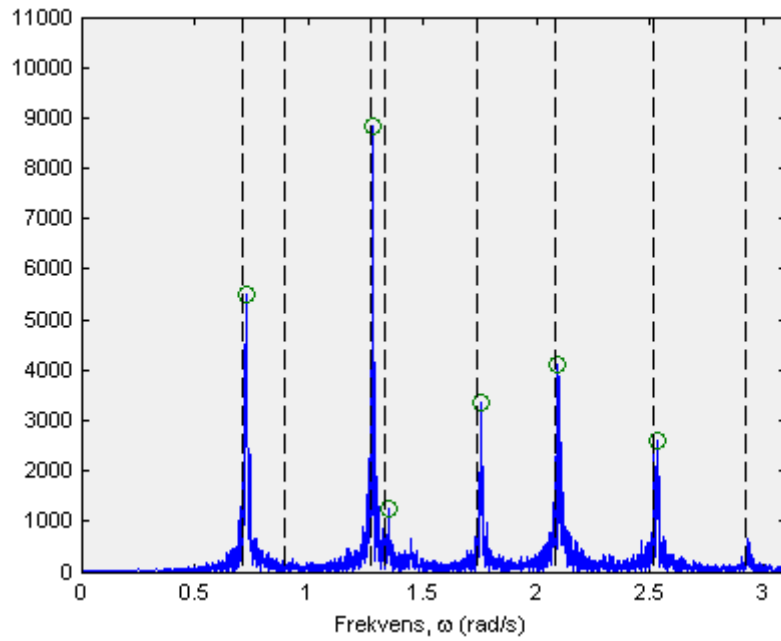


Figur 6.4. Horisontale moder fra simulerte målinger og Abaqus.

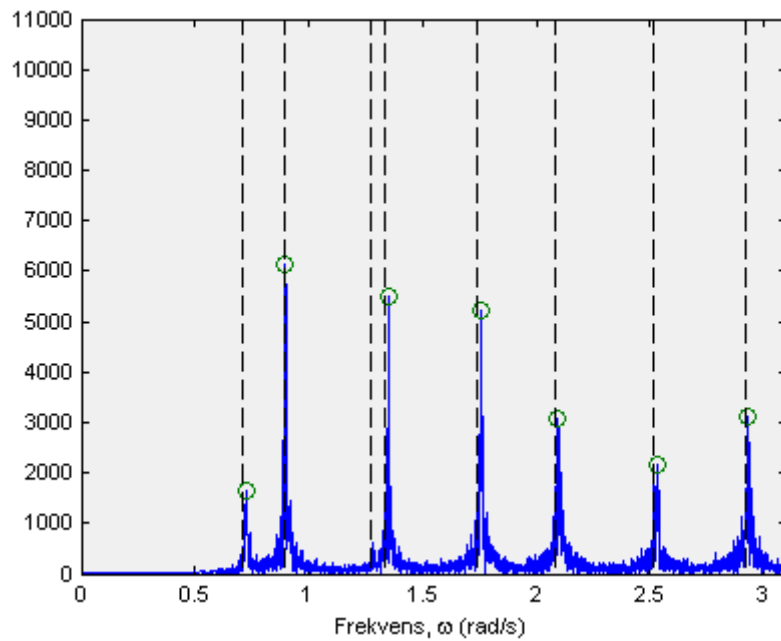
Figur 6.4 viser at sensorene vil kunne gi et godt bilde av de horisontale modene, da sensorene har en nær plassering til modenes vendepunkter.

6.2.2 VERTIKALMODER

Figur 6.5-6 viser spekteret til den vertikale akselerasjonen ved hengestang nummer 17 og 36.



Figur 6.5. Hengestang 17.



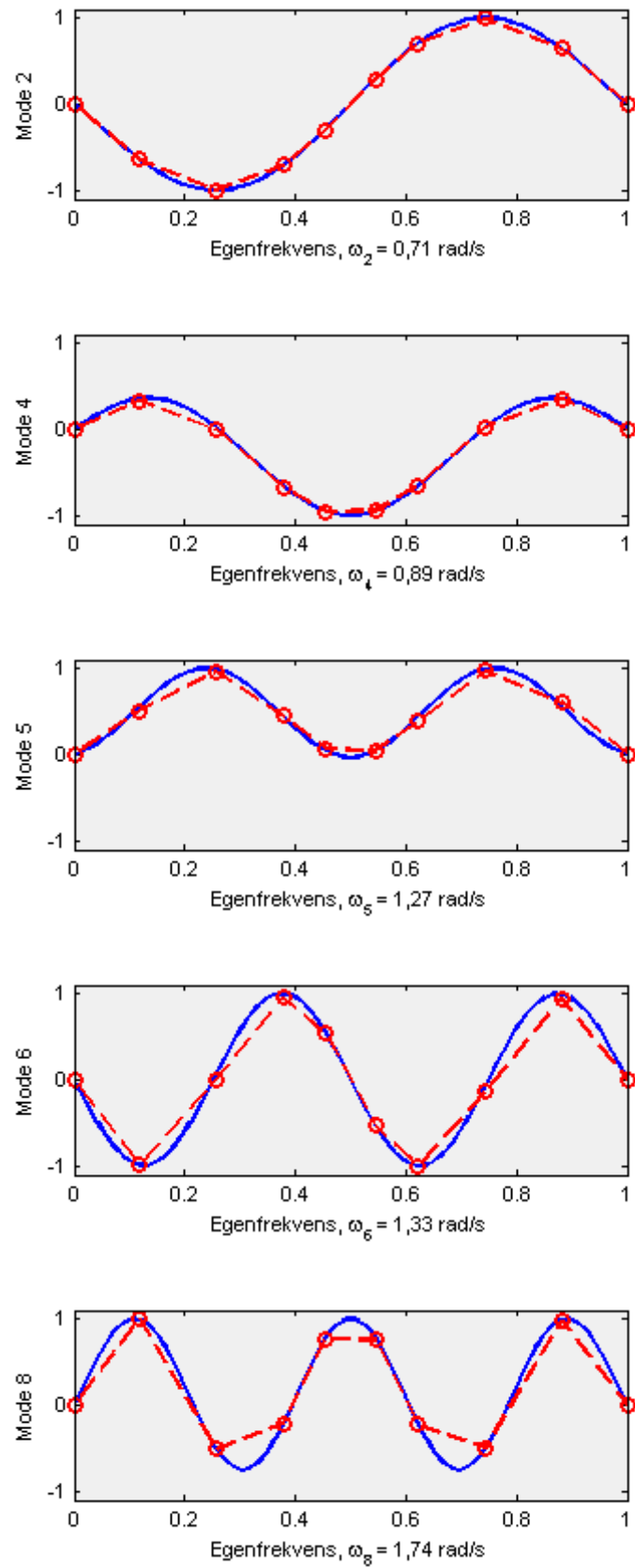
Figur 6.6. Hengestang 36.

I spekteret for vertikal akselerasjon er det kun topper ved de stiplede linjene, som markerer egenfrekvensene fra Abaqus. En årsak til dette kan være at de såkalte kabelmodene hovedsaklig vil gi utslag i horisontal retning. Toppene i spekteret for vertikalakselerasjon vil altså være knyttet til moder som gir størst utslag på avstivningsbæreren. Tabell 6.2 sammenligner egenfrekvensene fra de simulerte målingene med de som er beregnet i Abaqus. Tabellen viser at avviket mellom de simulerte målingene og de teoretiske verdiene er svært små.

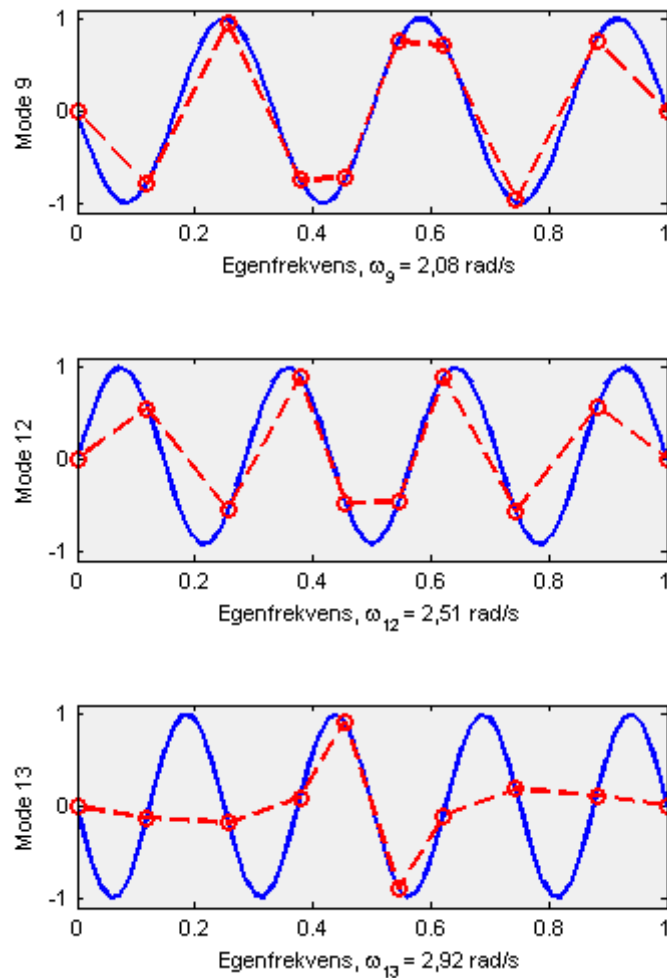
Mode	Abaqus	Simulerte målinger
2	0,71	0,73
4	0,89	0,90
5	1,27	1,28
6	1,33	1,35
8	1,74	1,76
9	2,08	2,09
12	2,51	2,53
13	2,92	2,93

Tabell 6.2. Sammenligning av egenfrekvenser(rad/s), beregnet fra simulerte målinger og Abaqus.

Sammenligning av de vertikale modene fremgår i figur 6.7-8, der de blå linjene er modene hentet fra Abaqus. De røde sirklene indikerer plasseringen til sensorene langs avstivningsbæreren.



Figur 6.7. Vertikale moder fra simulerte målinger og Abaqus.

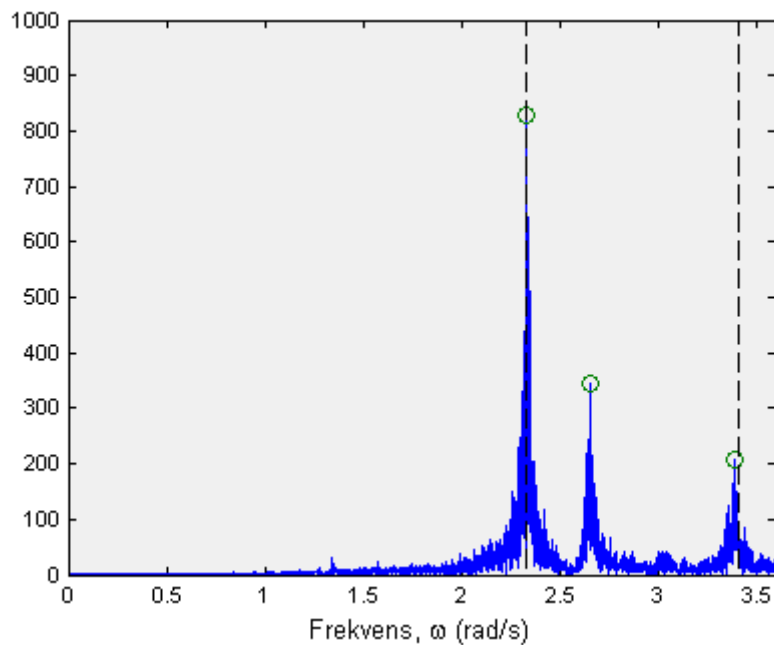


Figur 6.8. Vertikale moder fra simulerte målinger og Abaqus.

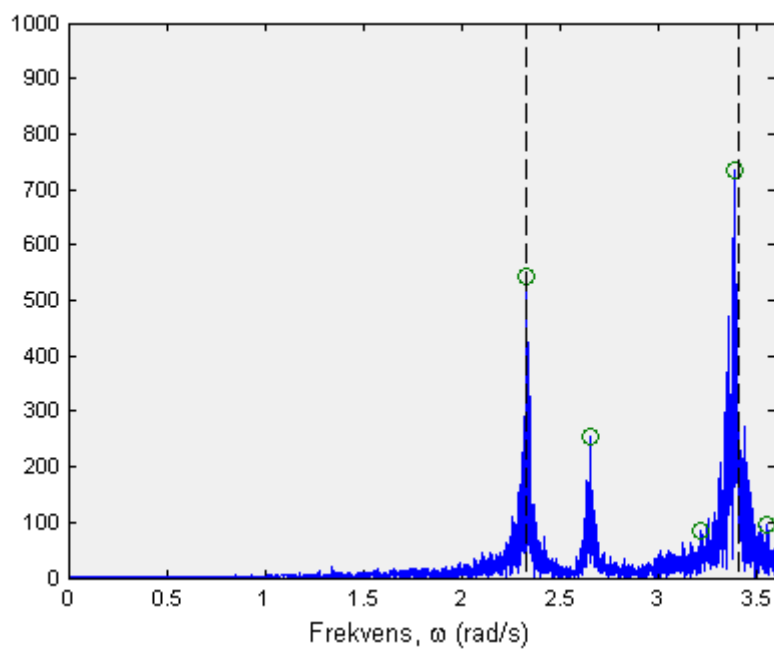
Det registreres ut fra figur 6.7-8 at de seks første vertikale modene blir fanget bra opp i forhold til sensorenes plassering. Mode 12 vil man kunne se konturene av. Når det gjelder mode 13 vil sensorenes plassering gi et dårlig bilde av formen til moden. Det kan også sees i spekteret(figur 6.5-6) at amplituden til mode 13 er svært lav ved hengstang 17. Ved hengstang 36 vil derimot utslaget i mode 13 bli registret av sensorene.

6.2.3 TORSJONSMODER

Spekteret til vinkelakselasjonen om avstivningsbærerens lengdeakse ved hengstang 36 og 49 vises i figur 6.9-10.



Figur 6.9. Hengstang 36.

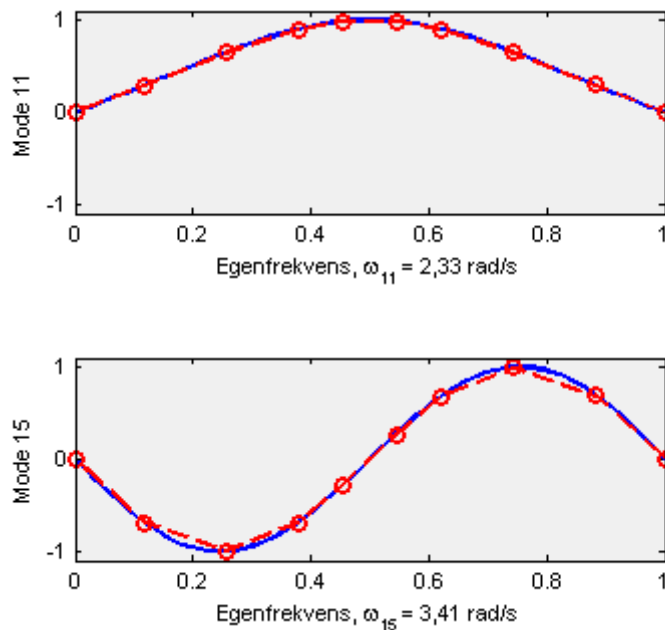


Figur 6.10. Hengstang 49.

Her observeres det at spekteret har en topp ved frekvensen på 2,65 rad/s. Dette er samme frekvens som ble observert på spekteret i avsnitt 6.1.1. Som tidligere nevnt vil moden som tilhører denne frekvensen gi store utslag på hengestengene, hvis den sammenlignes med modene i Abaqus. Denne moden vil altså både gi utslag i horisontalretning og i form av torsjon av avstivningsbæreren. De estimerte egenfrekvensene fra de simulerte målingene fremgår av tabell 6.3, som viser at disse egenfrekvensene stemmer bra med de teoretiske verdiene. Modene fremgår av figur 6.11.

Mode	Abaqus	Simulerte målinger
11	2,33	2,33
15	3,41	3,39

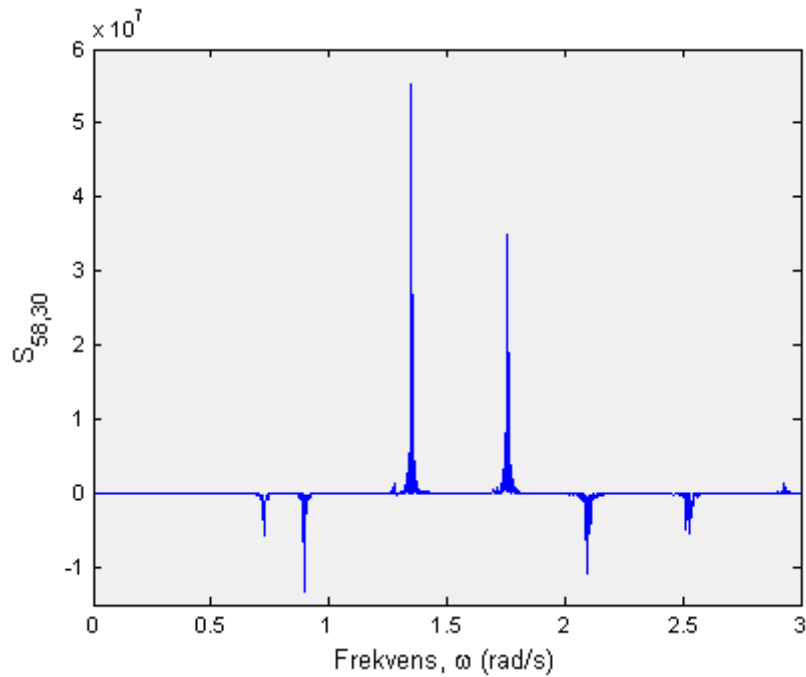
Tabell 6.3. Sammenligning av egenfrekvenser(rad/s), beregnet fra simulerte målinger og Abaqus.



Figur 6.11. Vertikale moder fra simulerte målinger og Abaqus.

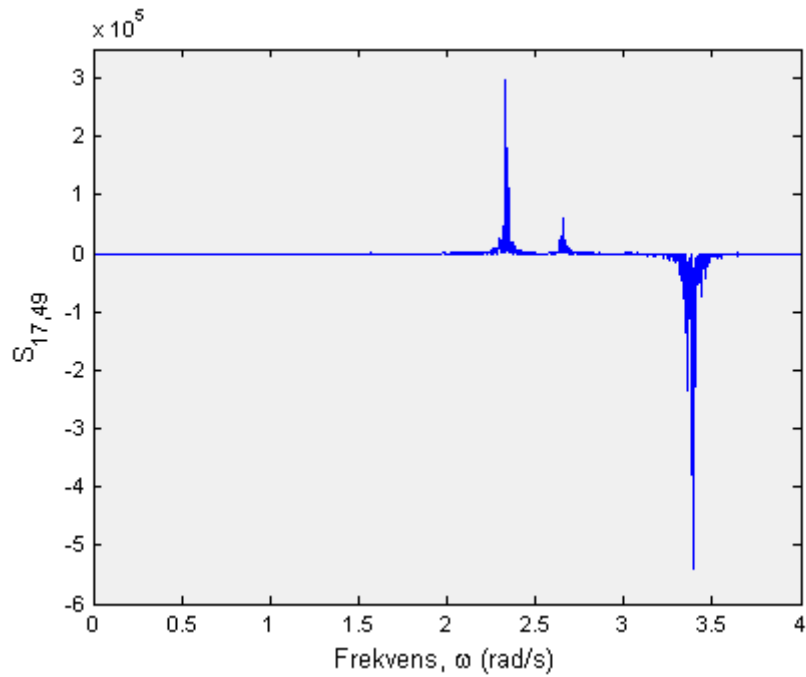
6.3 KRYSS-SPEKTER

Videre vil noen utvalgte kryss-spekter bli studert. I figur 6.12 vises kryss-spekteret for vertikal akselerasjon mellom sensorene i hengestang 30 og 58.



Figur 6.12. Kryss-spekter mellom hengestang 30 og 58.

Den harmoniske komponenten med størst verdi vil være mode 6, som kan sees i figur 6.7. Ut fra figur 6.7 ser vi også at denne harmoniske komponenten vil ganske likt utslag på modeformen ved hengestang 30 og 58. For den harmoniske komponenten med en frekvens på 2,08 rad/s registreres det en negativ verdi kryss-spekteret. Dette kan også sees ut fra tilhørende modeform på figur 6.8, der de to punktene er ute av fase.



Figur 6.13. Kryss-spekter mellom hengestang 17 og 49.

På samme måte kan kryss-spekteret til vinkelakselerasjonen om avstivningsbærerens lengdeakse settes i sammenheng med torsjons-modene i figur 6.11. For mode 11 vil utslaget til de to sensorene som er plassert ved hengestag 17 og 49 ha samme retning. For mode 15 registreres det et negativt utslag i kryss-spekteret i figur 6.13, som nok en gang kan sees i figur 6.11.

KAP 7: KONKLUSJON

For å kunne gi måleprosjektet av Hardangerbrua et best mulig utgangspunkt, har denne oppgaven gått gjennom flere steg for å estimere konstruksjonens dynamiske respons.

Vindfeltet som treffer Hardangerbrua simuleres over et tidsrom på 6000 sekunder. For kortere simuleringstid ville vindfeltets egenskaper ikke konvergere mot sine stokastiske inngangsverdier. Om vindfeltet ikke hadde hatt tilstrekkelig konvergens kunne informasjonen i Hardangerbruas respons vært mangelfull når de forskjellige spektrene blir estimert. Det vurderes at det simulerte vindfeltet har tilstrekkelig konvergens, noe som gir et godt grunnlag for videre analyser.

Oppgavens hovedmål er å sørge for at sensorene som plasseres ut langs bruas avstivningsbærer, vil fange opp informasjon som er tilstrekkelig for å videre kunne kartlegge Hardangerbrua. Ut fra de simuleringer som er gjort viser det seg at plasseringen av sensorene i snittene ved hengestang 8, 17, 25, 30, 36, 41, 49 og 58 gir et godt bilde av de fleste egenfrekvensene og modene som er studert i denne oppgaven, sammenlignet med resultatene fra Abaqus. For vertikal- og torsjons-modene vil sensorene fange opp samtlige moder på en tilstrekkelig måte. For de vertikale modene vil plasseringene av sensorene gi et dårlig bilde av mode 13. For resten av de vertikale modene, vil sensorens plassering gi et godt bilde av modens formen. Siden det kun plasseres ut sensorer i åtte snitt, vil det være vanskelig å fange opp modene ved høye frekvenser. Det konkluderes dermed med at de valgte plasseringene av sensorene vil gi et godt bilde av Hardangerbruas egenfrekvenser og moder, ut fra de simulerte målingene og sammenligner som er gjort med den teoretiske modellen i Abaqus.

TILLEGG A. EMPIRISKE VIND-SPEKTER

A.1 EMPIRISKE AUTO-SPEKTER

I dette avsnitte er verdier og formler hentet fra beregninger utført av Statens Vegvesens[7].

Den gjennomsnittlige vindhastigheten V_s varierer med høyden over terrenget z , og blir påvirket av formen på det omkringliggende terrenget.

$$V_s(z) = k_T \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) v_b \quad (\text{A.1})$$

der k_T er terrengruhetsfaktoren, z_0 er ruhetslengden og v_b er basisvindhastigheten. Turbulensintensiteten har følgende definisjon:

$$I_n(z) = \frac{\sigma_n(z)}{V_s(z)} \quad (\text{A.2})$$

der $n = u, v$ eller w . σ_n er standardavviket til turbulenskomponent n . Langsgående turbulensintensitet $I_u(z)$ antas å være:

$$I_u(z) = \frac{c_{tt}}{\ln(z/z_0)} \quad (\text{A.3})$$

der c_{tt} er turbulensfaktoren. Tversgående turbulenskomponent, $I_v(z) = 0,75 I_u(z)$ og den vertikale turbulenskomponenten, $I_w(z) = 0,50 I_u(z)$.

I denne oppgaven brukes Kaimals empiriske vindspekter for å beskrive det turbulente vindfeltet sine egenskaper i frekvensplanet.

$$\frac{\omega S_n(\omega)}{\sigma_n^2} = \frac{A_n \hat{\omega}}{(1 + 1.5A_n \hat{\omega})^{\frac{5}{3}}} \quad (\text{A.4})$$

der $\hat{\omega} = \omega^{xf} L_n / V_s$. $^{xf}L_n$ er turbulensens integrale lengdeskala. Verdier for diverse konstanter vises i tabell A.1. Her antas det at hovedvindretningen står normalt på bruaksen.

$x_f L_n$	z_0	k_T	v_b	c_{tt}	A_u	A_w
360 m	0,01 m	0,17	26 m/s	1,2	1,08	1,50

Tabell A.1. Konstanter til auto-spekteret.

A.2 EMPIRISK KRYSS-SPEKTER

I alle praktiske tilfeller er det kun den reelle delen av kryss-spekteret som er av interesse. Dersom $x(t)$ og $y(t)$ er realiseringer av samme stasjonære prosess, vil den reelle delen av krysspekteret kunne skrives som

$$\text{Re}[S_{xx}(\omega)] = S_x(\omega) \hat{C}o_{xx}(\omega) \quad (\text{A.5})$$

Et empirisk uttrykk for det normaliserte ko-spekteret $\hat{C}o_{xx}(\omega)$ til et homogent vindfelt kan tilnærmes ved[4]

$$\hat{C}o_{nn}(\Delta s, \omega) = \exp\left(-c_{ns} \frac{\omega \Delta s}{V_s(z)}\right) \quad (\text{A.6})$$

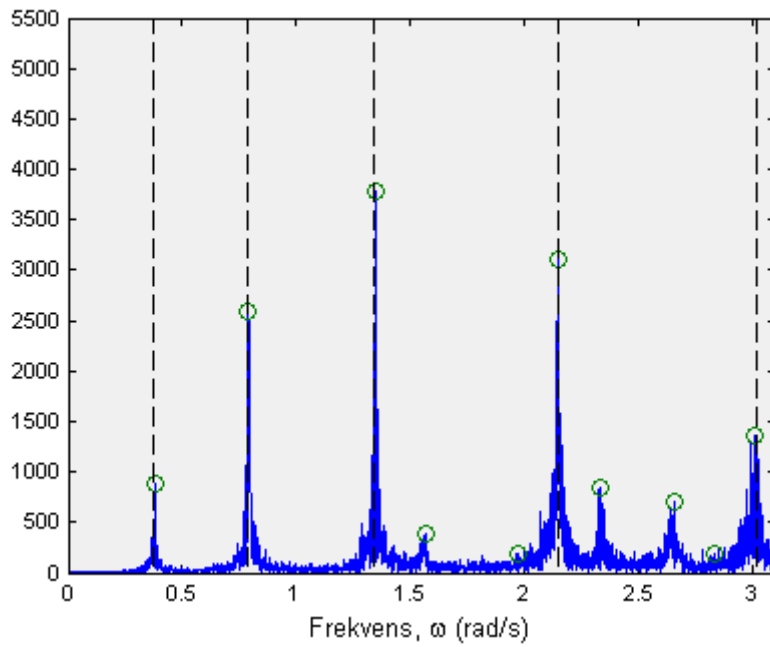
der $\Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f$ eller Δz_f . Δs tar hensyn til den romlige avstand mellom punktene vi ønsker å separere i kryss-spekteret. $s = x_f, y_f$ eller z_f . I denne oppgaven er det konstantene c_{uyf} og c_{wyf} som er aktuelle der $c_{uyf} \approx 9$ og $c_{wyf} \approx 6$.

REFERANSELISTE

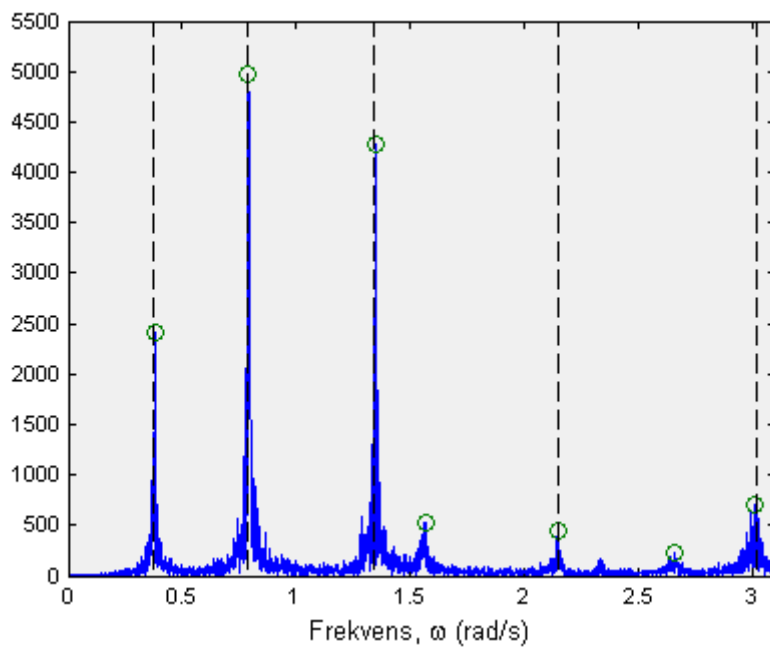
1. Ljung, L., *System identification: theory for the user*. 1999, Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall PTR. XXII, 609 s. : ill.
2. Ewins, D.J., *Modal testing: theory, practice and application*. 2000, Baldock: Research Studies Press. XIII, 562 s. : ill.
3. Newland, D.E., *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*. 1993, Harlow: Longman. xxix, 477 s. : ill.
4. Strømmen, E.N., *Theory of Bridge Aerodynamics*. 2010: Springer.
5. Langen, I. and R. Sigbjörnsson, *Dynamisk analyse av konstruksjoner*. 1979, [Trondheim]: Tapir. XXI, 505 s. : ill.
6. SimulaAS., *Abaqus Theory Manual*. 2012; Available from: <http://ivt-abaqusdoc.ivt.ntnu.no:2080/v6.12/books/stm/default.htm>.
7. Vegvesen, S., *12-2950 Hardangerbrua Beregninger Kapittel 1: Grunnlag*, 2008.
8. Chopra, A.K., *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. 2007, Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall. XXXIV, 876 s. : ill.

VEDLEGG

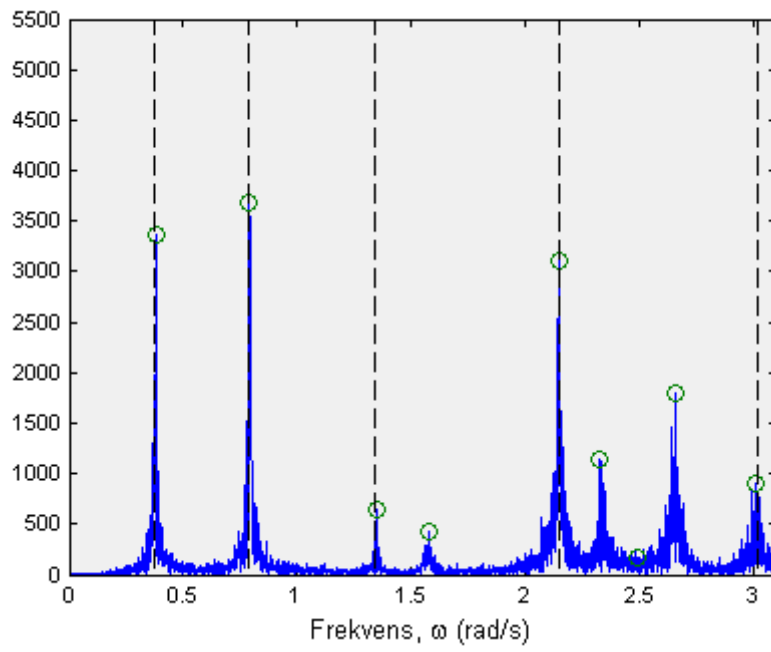
SPEKTER: HORIZONTAL AKSELERASJON



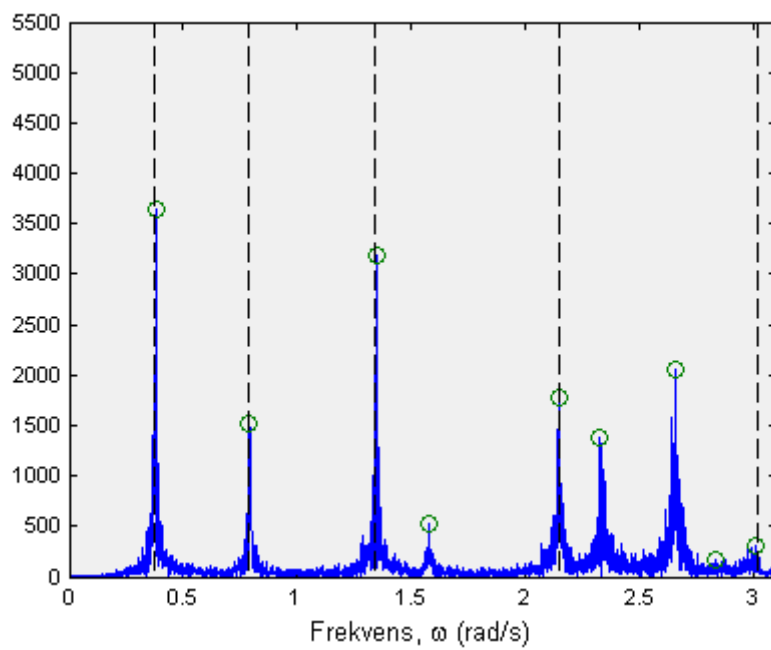
Hengestang 8.



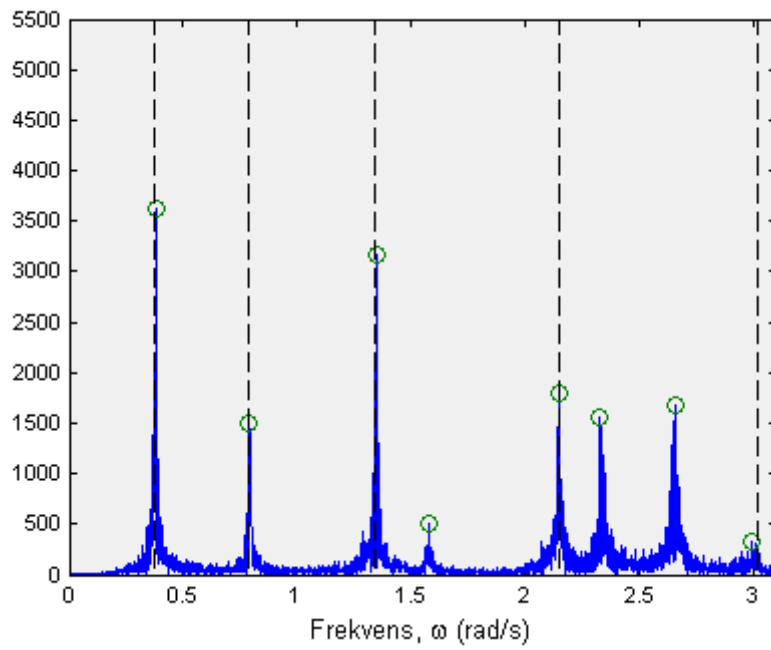
Hengestang17.



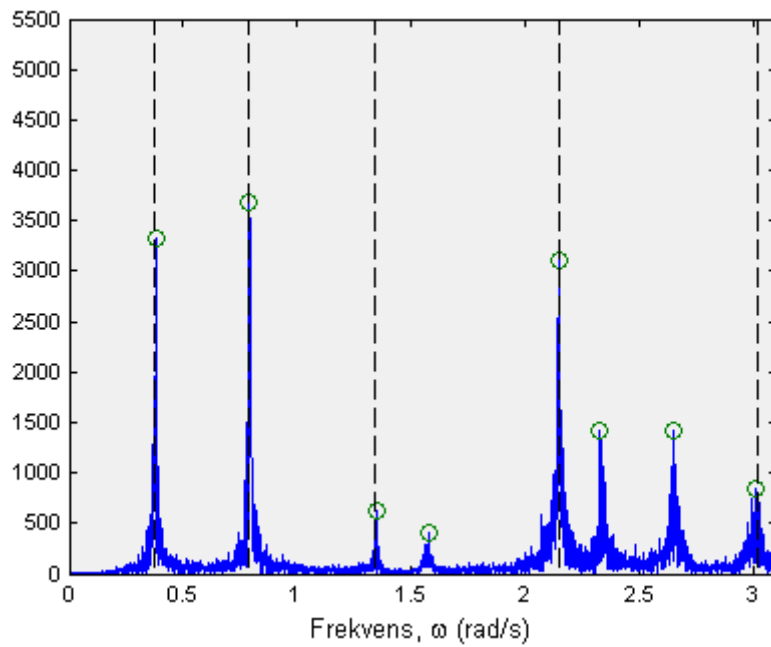
Hengstang 25.



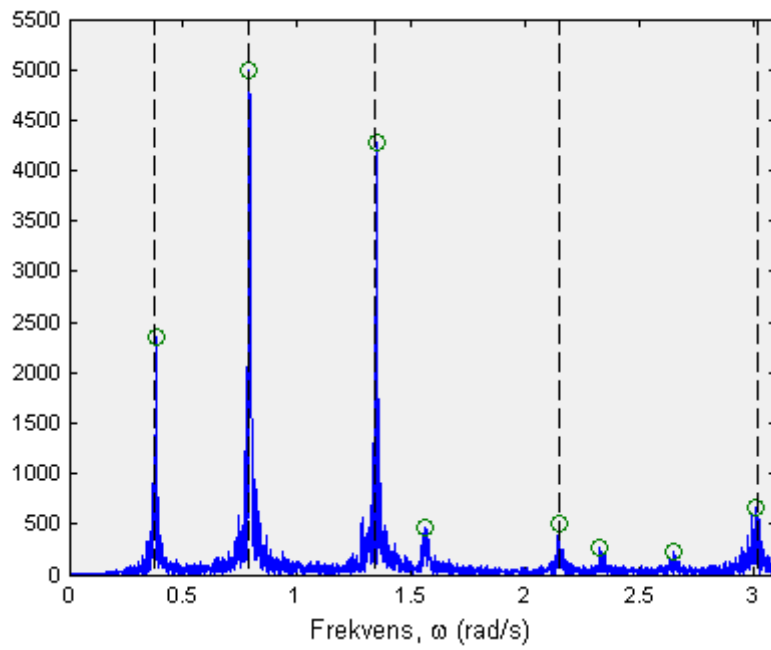
Hengstang 30.



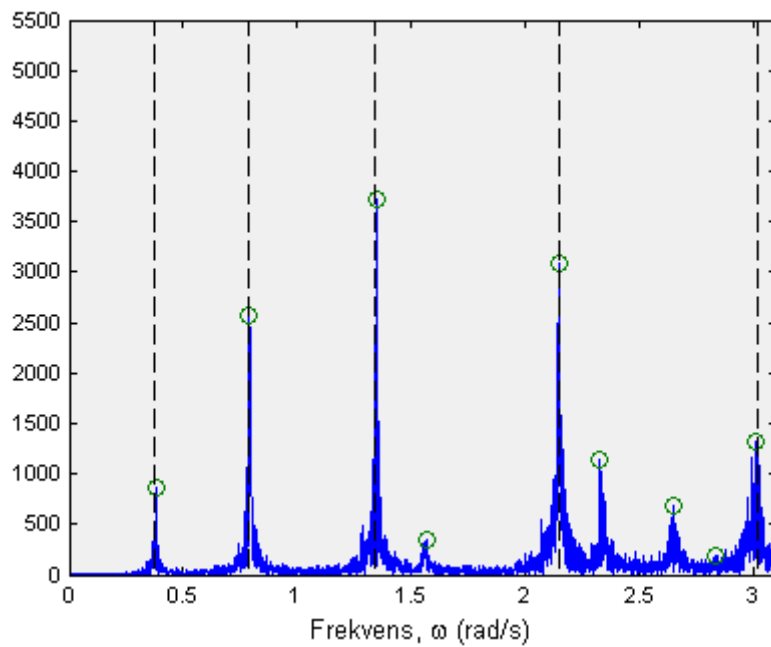
Hengestang 36.



Hengestang 41.

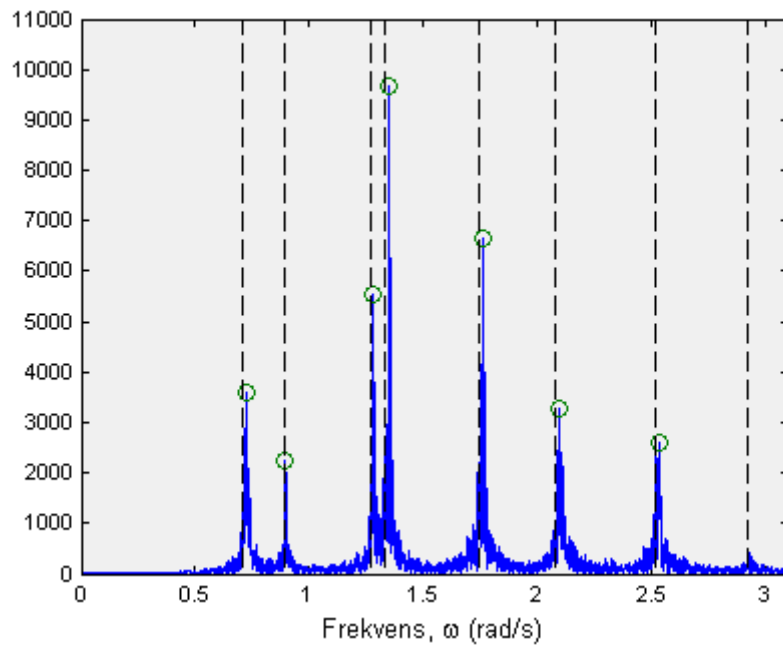


Hengstang 49.

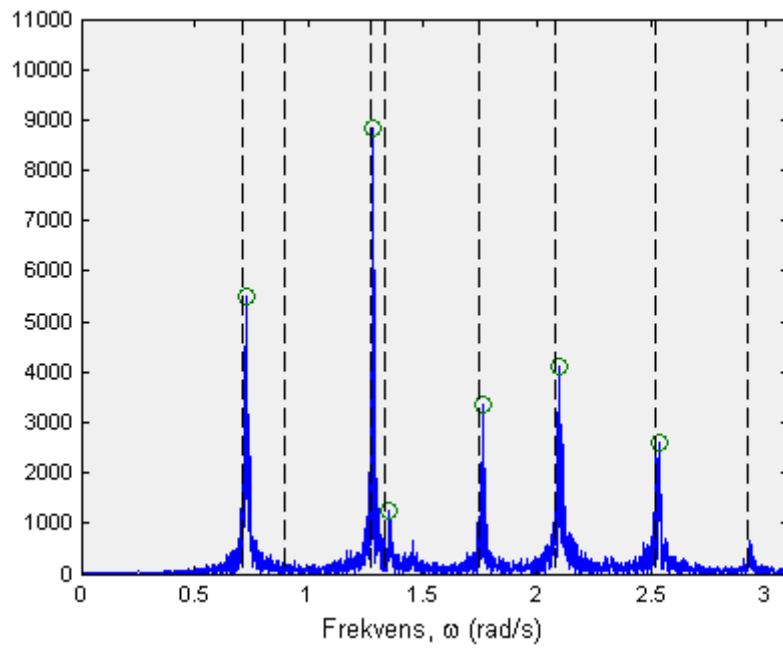


Hengstang 58.

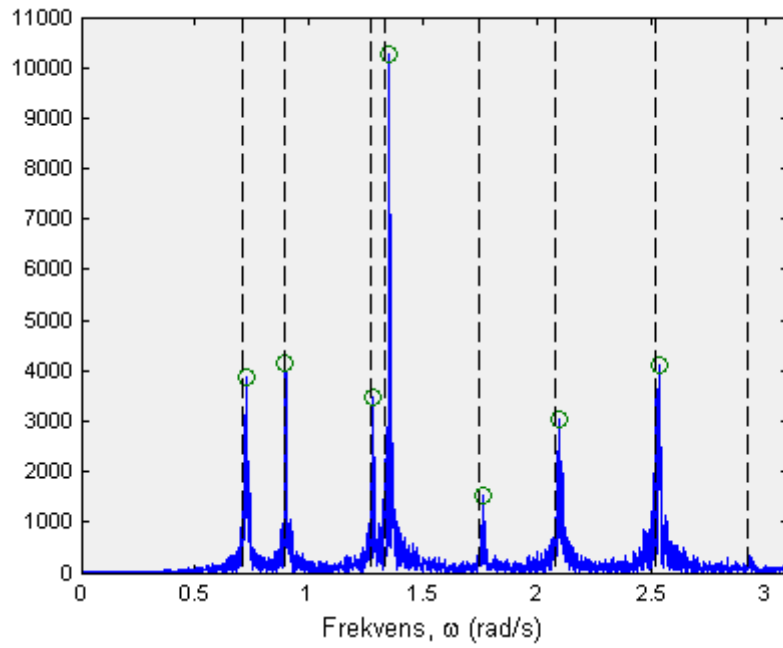
SPEKTER: VERTIKAL AKSELERASJON



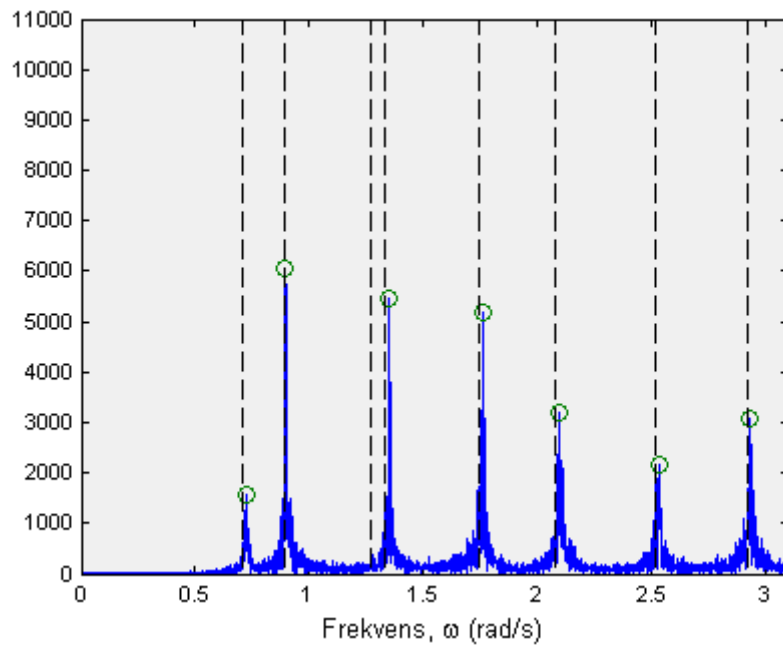
Hengestang 8.



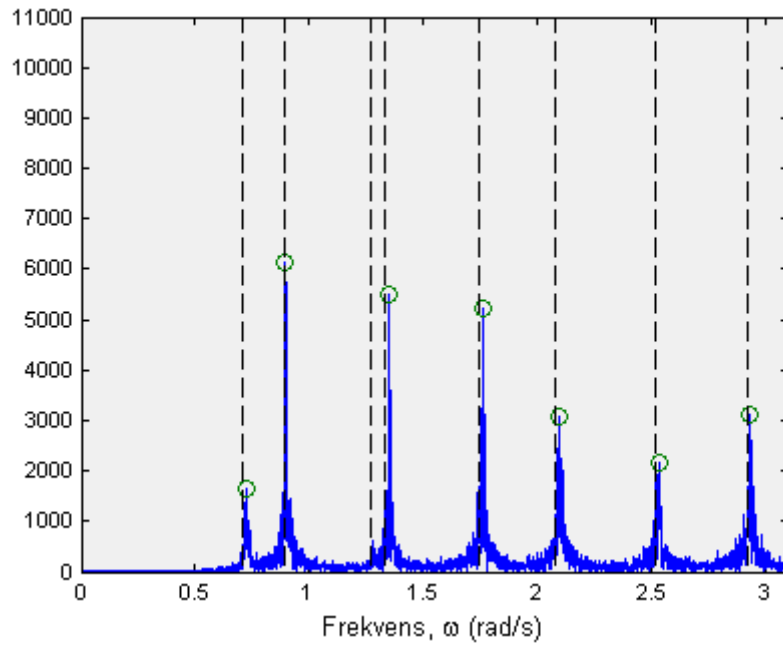
Hengestang 17.



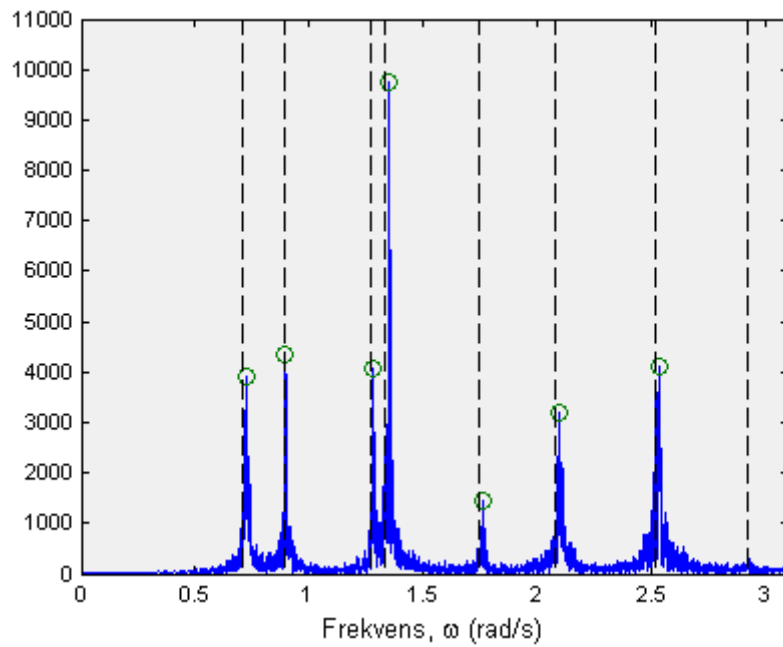
Hengestang 25.



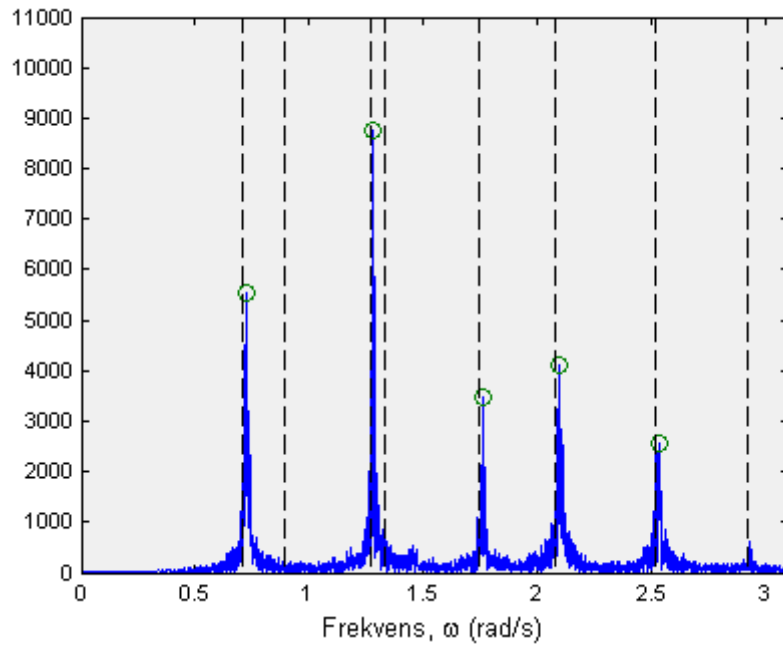
Hengestang 30.



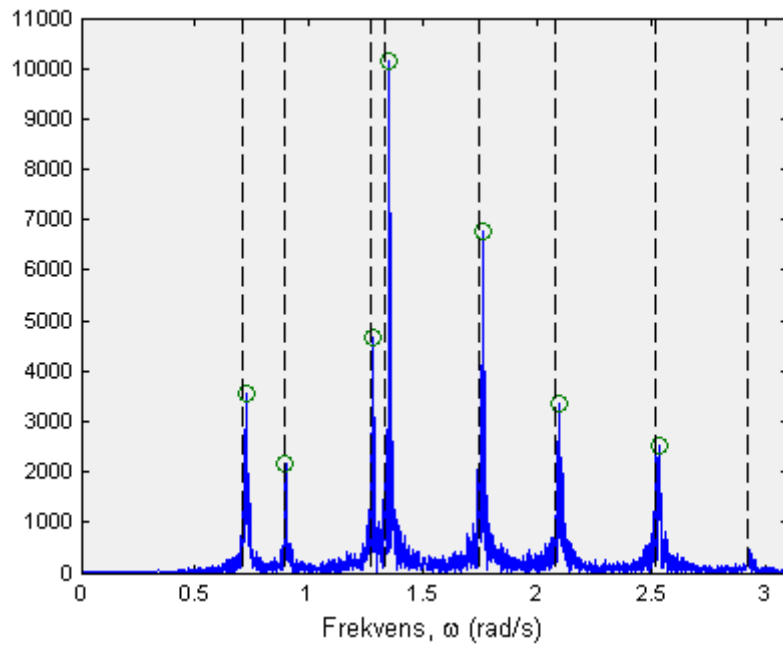
Hengstang 36.



Hengstang 41.

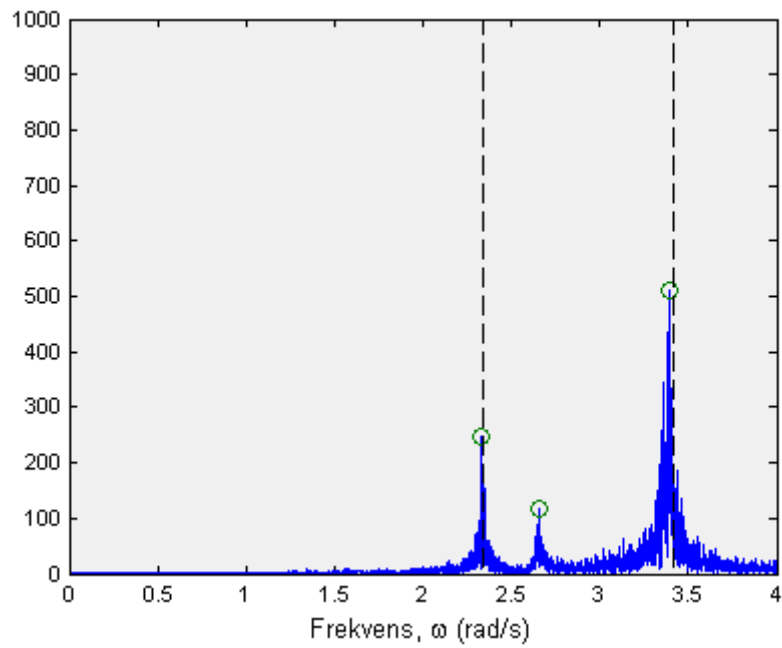


Hengstang 49.

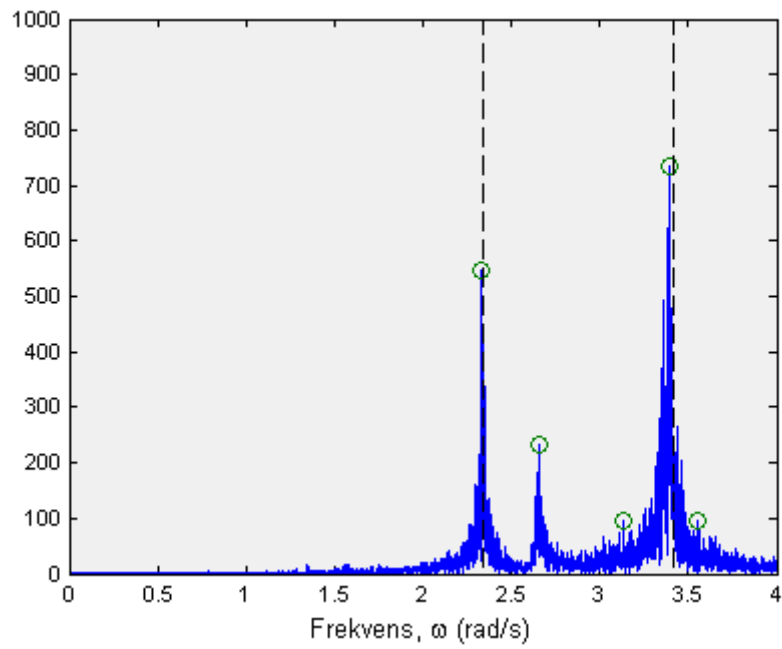


Hengstang 58.

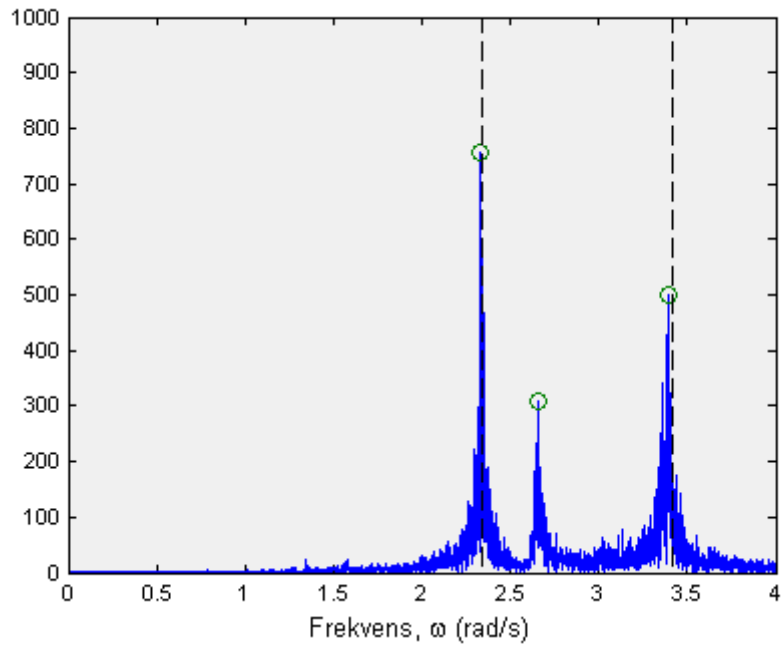
SPEKTER: VINKELAKSELERASJON(TORSJON)



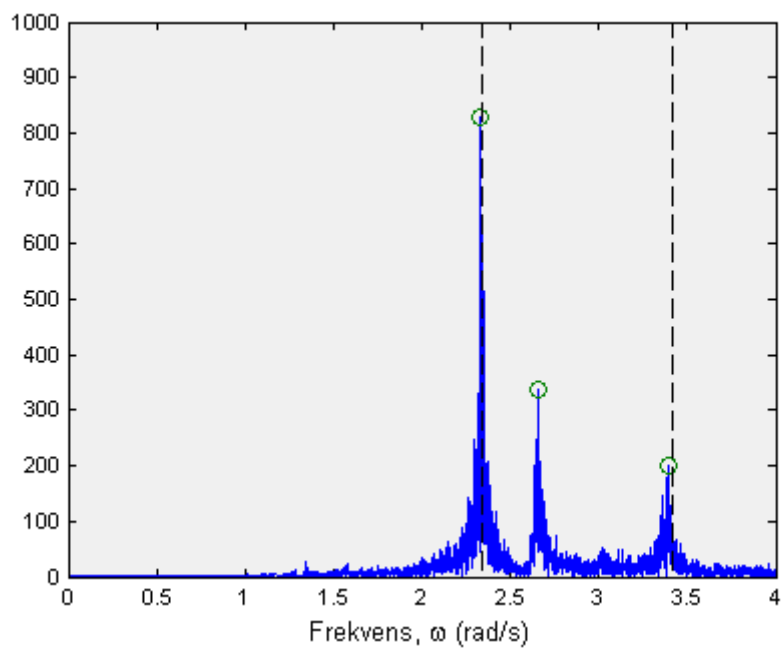
Hengstang 8.



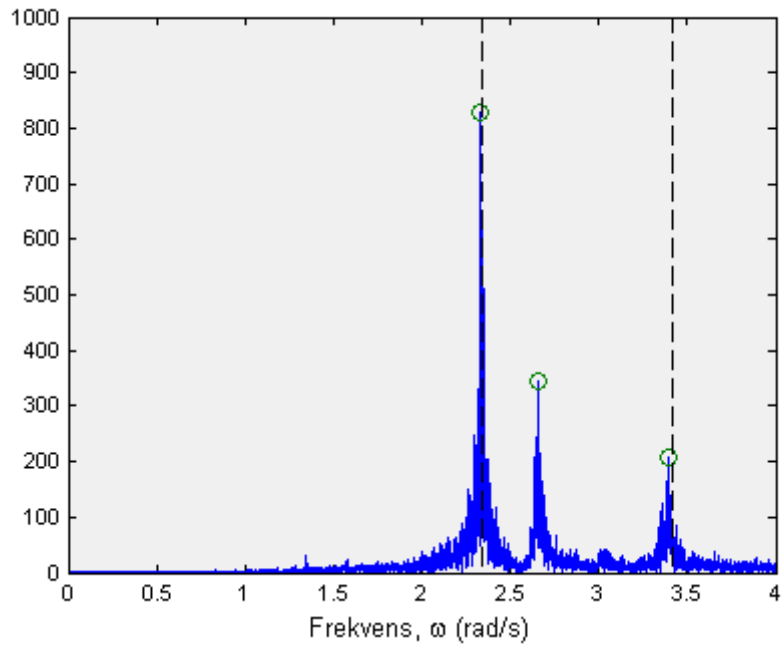
Hengstang 17.



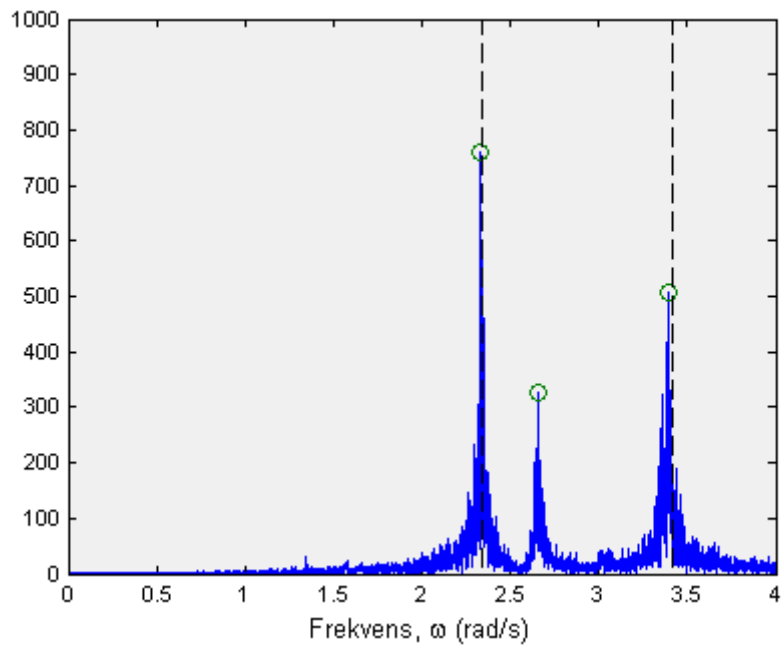
Hengestang 25.



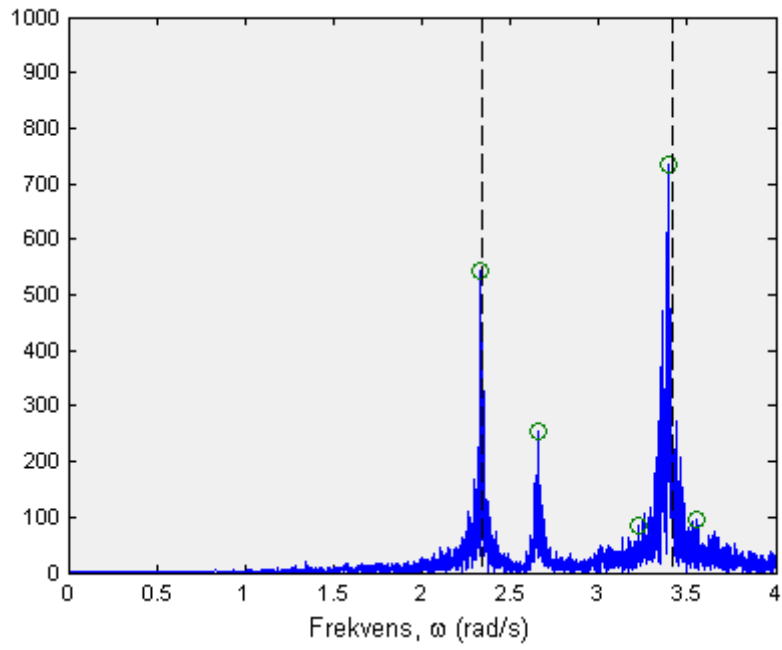
Hengestang 30.



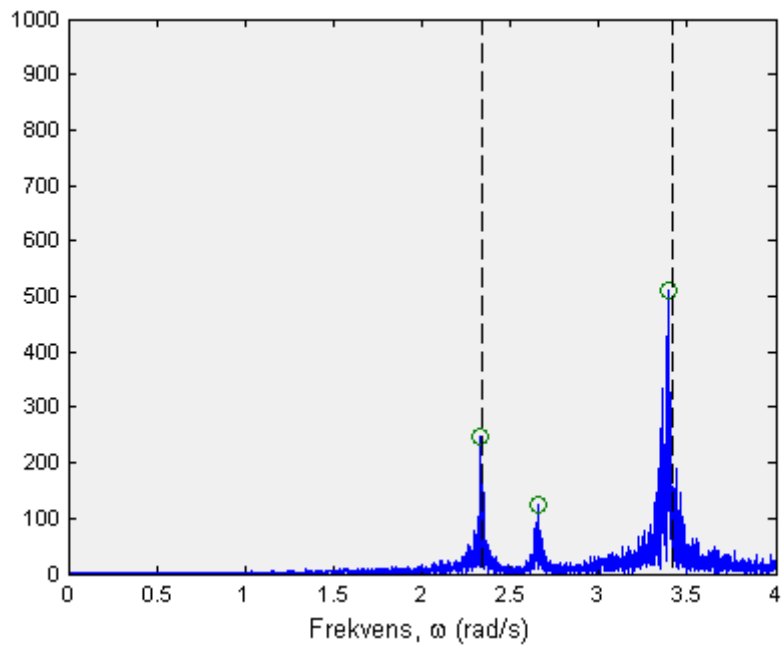
Hengestang 36.



Hengestang 41.



Hengestang 49.



Hengestang 58.