

Analyse av kommunikasjon mellom sensorer i system for gass- og flammedeteksjon.

Åshild Ingeborg Ludvigsen

Master i kommunikasjonsteknologi
Oppgaven levert: Juni 2010
Hovedveileder: Nils Holte, IET

Oppgavetekst

Autronica Fire & Security leverer blant annet gass og flamme deteksjon til Olje og Gass-industrien. I denne produktporteføljen har Autronica blant annet produktet PowerLoop. Dette er en detektor-sløyfe hvor det leveres 100W kraft + kommunikasjon på to tråder. Denne teknologien gjør til at kundene sparer penger på kabel og installasjon, samt at systemet tåler brudd og kortslutning på kabelen.

I dag kommuniserer detektorene med sløyfedriverene ved å modulere et 132kHz signal på powerkablene (1200 baud ASK). I praksis viser det seg at enkelte installasjoner får problemer med krysstale mellom sløyfene. Kablene fra de forskjellige sløyfene ligger gjerne i de samme kabelgatene flere hundre meter. Dette fører til at kundene må benytte dyrere kabler med dobbel skjerming, noe som er kostbart og vanskeligere tilgjengelig.

Det skal først foretas beregninger av signaloverføring i ei enkel kabelsløyfe i Autronicas system. Så skal krysstale begregnes for to paralellførte kabelsløyfer. Med utgangspunkt i disse beregningene skal det eventuelt foreslås endringer i transmisjonsløsningene for å oppnå sikrere kommunikasjon med alle detektorer i systemet.

Oppgaven gitt: 19. januar 2010
Hovedveileder: Nils Holte, IET

Sammendrag

Denne masteroppgaven er gitt av Autronica Fire and Security. Autronica leverer et system for gass- og flammedeteksjon som blant annet brukes i olje- og gassindustrien. Systemet består av detektorer som er koblet på detektorsløyfer, hvor det leveres kraft og kommunikasjon på to tråder. Systemet installeres slik at kablene i detektorsløyfene delvis ligger i de samme kabelgatene. Ved bruk av systemet viser det seg at det i enkelte installasjoner oppstår problemer med krysstale mellom sløyfene. Dette kan føre til at systemet ikke fungerer som det skal og at systemet blir dyrere å installere. Autronica ønsker å kartlegge problemet med krysstale og finne løsninger til forbedringer med hensyn på systemets funksjonalitet og installasjonskostnad.

Oppgaven kartlegger krysstaleproblemet ved å lage en modell for et system som består av to detektorsløyfer som delvis ligger ved siden av hverandre. Det beregnes en transferfunksjon for en detektorsløyfe som ikke er påvirket av andre kabler. Denne sammenlignes med en transferfunksjon som beskriver signalet på den samme detektorsløyfa forårsaket av en nærliggende detektorsløyfe. På denne måten gis det en indikasjon på om overhøringen er stor nok til å forårsake problemer med deteksjonen. For å komme fram til en slik modell blir modeller for en rekke enklere systemer utviklet først. Slik blir det mulig å ha kontroll over at modellen blir riktig. Først utvikles det modeller for enkle transmisjonslinjer ved hjelp av skalare kabelparametre. Deretter utvikles modeller for flerledersystemer ved at det defineres per-lengdeenhetmatriser.

Modelleringen av krysstaleproblemet for systemet i denne oppgaven viser at overhøringen mellom to nærliggende detektorsløyfer kan bli stor nok til at den kan føre til problemer med deteksjonen i systemet. Størrelsen på overhøringen er imidlertid avhengig av hvordan kablene ligger i forhold til hverandre og andre kabelparametre. Modellen som har blitt utviklet i denne oppgaven kan brukes til å forutsi om krysstalen vil bli et problem for gitte kabelsystemer og forklare observerte problemer.

Forord

Denne masteroppgaven avslutter sivilingeniørstudiet i Kommunikasjonsteknologi med fordypning i signalbehandling. Oppgaven er skrevet på Institutt for elektronikk og telekommunikasjon ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim. Arbeidet er utført våren 2010 og viderefører prosjekt-oppgaven min som ble skrevet høsten 2009.

Oppgaven har blitt gitt av Autronica Fire and Security og jeg vil gjerne takke oppgavestilleren Per Johan Vanebo for en interessant oppgave. Jeg vil også takke for muligheten til å besøke bedriften og få se på systemet som oppgaven omhandler.

Jeg vil også rette en stor takk til veilederen min, professor Nils Holte for god veiledning og nyttige innspill.

Åshild Ingeborg Ludvigsen
15. juni 2010

Innhold

Forord	ii
Figurer	vii
Tabeller	ix
1 Innledning	2
1.1 Gass- og flammedeteksjonssystemet	2
1.2 Problemstilling	2
1.3 Målet med oppgaven	3
1.4 Gjennomføring av oppgaven	3
2 Teori	6
2.1 Transmisjonslinje	7
2.2 Primære kabelparametre	8
2.3 Toportnettverk	10
2.4 Transferfunksjon	11
2.5 Krysstale	13
2.6 Flerledersystemer	15
2.7 Per-lengdeenhet-matriser	17
2.7.1 Permittivitet og permeabilitet	17
2.7.2 Utledning av per-lengdeenhet-matriser	18
2.7.3 Kapasitansmatrise	20
2.7.4 Induktansmatrise	24
2.7.5 Resistansmatrise	25
2.7.6 Admittansmatrise	25
2.7.7 Impedansmatrise	25
2.8 Matrise for generalisert propagasjonskonstant	26
2.9 Matrise for generalisert karakteristisk impedans	26
2.10 A-matrise for flerledersystemer	26

3	Modellering av forskjellige kabelsystemer	28
3.1	Beregning av kabelparametre	29
3.2	Parametre i per-lengdeenhet-matriser	31
3.2.1	Parametre for en kabel	31
3.2.2	Parametre for et system som består av to kabler	33
3.3	Enkel transmisjonslinje	36
3.3.1	Modellering av enkel transmisjonslinje	36
3.4	Enkel transmisjonslinje med matriser	37
3.4.1	Enkel transmisjonslinje med A-matrise for to ledere	37
3.4.2	Enkel transmisjonslinje med A-matrise for fire ledere	38
3.5	Detektorsløyfe	40
3.5.1	Modellering av detektorsløyfe	40
3.6	Detektorsløyfe med matriser	41
3.6.1	Detektorsløyfe med A-matriser for to ledere	41
3.6.2	Detektorsløyfe med A-matrise for fire ledere	42
3.7	To detektorsløyfer	45
3.7.1	Fullstendig modell	45
3.7.2	Beregning av en detektorsløyfe med fullstendig modell	47
3.7.3	Enkel transmisjonslinje med fullstendig modell	49
4	Resultater	52
4.1	Enkel transmisjonslinje	53
4.1.1	Dempningskonstanter for enkel transmisjonslinje	54
4.2	Detektorsløyfe	56
4.2.1	Forskjellige kabellengder for detektorsløyfe	57
4.2.2	Dempningskonstantens effekt på transferfunksjonen	59
4.3	Krysstale for et system som består av to detektorsløyfer	60
4.3.1	Vridning av kabler	61
4.3.2	Kabellengdens påvirkning på krysstalen	66
4.3.3	Kabeldepmmningens påvirkning på krysstalen	69
5	Konklusjon	74
5.1	Krysstaleproblemet	74
5.2	Videre arbeid	76
	Bibliografi	77
	Symbolliste	79
	Tillegg	81
A	Utledning av a-parametre og transferfunksjoner	82

A.1	Utledning av a-parametere for uniform transmisjonslinje . . .	82
A.2	Transferfunksjon for enkel transmisjonslinje	84
A.3	Enkel transmisjonslinje med matriser for to ledere	85
A.4	Enkel transmisjonslinje med matriser for fire ledere	87
A.5	Transferfunksjon for detektorsløyfe	89
A.6	Detektorsløyfe med matriser for to ledere	90
A.7	Detektorsløyfe med matriser for fire ledere	92
A.8	Transferfunksjon for fullstendig modell	97
A.9	Detektorsløyfe med fullstendig modell	102
A.10	Enkel transmisjonslinje med fullstendig modell	104

Figurer

2.1	Uniform transmisjonslinje	7
2.2	Transmisjonslinje med primærparametre	9
2.3	Toport	10
2.4	Toporter i kaskadekobling	11
2.5	System som består av to skjermede detektorsløyfer.	13
2.6	N-port	16
2.7	Kort segment av skjermet toleder	18
2.8	Tverrsnitt av kabel som består av to ledere	21
2.9	Tverrsnitt som viser to parallelle toledere	22
2.10	Tverrsnitt av kabel som består av fire ledere	22
2.11	Tverrsnitt av to nærliggende kabler	23
3.1	Forenklet krets ekvivalent med tverrsnittet til tolederkabelen	31
3.2	Tverrsnitt av to kabler	33
3.3	Enkel transmisjonslinje	36
3.4	Enkel transmisjonslinje definert med vektorer	37
3.5	Enkel transmisjonslinje med fire ledere	39
3.6	Detektorsløyfe	40
3.7	Detektorsløyfe definert med vektorer	41
3.8	Detektorsløyfe med fellesstrekning	43
3.9	To detektorsløyfer som ligger ved siden av hverandre	45
3.10	Fullstendig modell med detektorsløyfe nederst	48
3.11	Enkel transmisjonslinje med fullstendig modell	49
4.1	Transferfunksjon for enkel transmisjonslinje	53
4.2	Dempningskonstanter for enkel transmisjonslinje	55
4.3	Transferfunksjon til detektorsløyfa	56
4.4	Transferfunksjon for forskjellige lengder av detektorsløyfa	58
4.5	Dempningskonstanter for detektorsløyfe	59
4.6	Forskjellig vridning av kablene, $\phi_1 = 0^\circ$	62
4.7	Forskjellig vridning av kablene, $\phi_1 = 30^\circ$	63

4.8	Forskjellig vridning av kablene, $\phi_1 = 60^\circ$	64
4.9	Forskjellig vridning av kablene, beste og verste tilfeller.	65
4.10	Transferfunksjon fullstendig modell, sløyfelengde på 0,1 km	67
4.11	Transferfunksjon fullstendig modell, sløyfelengde på 0,2 km	68
4.12	Forskjellige dempningskonstanter for fullstendig modell	70
4.13	Forskjellige dempningskonstanter, beste og verste tilfelle.	72

Tabeller

3.1	Dempningskonstanter for forskjellige kabler når $f = 132$ kHz .	30
3.2	Avstandene som inngår i kabelverrsnittet	34
3.3	Tallverdier for kabelverrsnitt	34
4.1	Differanser for forskjellige vridningsvinkler til kablene	66
4.2	Differanser for forskjellige kabellengder	69
4.3	Differanser for forskjellige kabeldempninger	72

Kapittel 1

Innledning

Autronica Fire and Security, heretter kalt Autronica, er et firma som utvikler og leverer brannsikkerhetssystemer. Oppgaven går ut på å kartlegge og modellere krysstale i et eksisterende alarmsystem for gass- og flammedeteksjon som Autronica blant annet leverer til olje- og gassindustrien.

1.1 Gass- og flammedeteksjonssystemet

Autronicas system brukes til gass- og flammedeteksjon og det stilles derfor høye krav til påliteligheten til systemet. Systemet består derfor av detektor-sløyfer slik at detektorene er festet til to tråder. På denne måten tåler systemet både brudd og kortslutning på kablene uten at detektorene settes ut av funksjon. I praksis vil systemet vanligvis bestå av mange detektor-sløyfer, med mange detektorer festet til samme sløyfe.

Detektorene kommuniserer med sløyfedriverne ved at det moduleres et 132 kHz signal på kraftkablene. Dette gjør at kundene sparer penger på kabel og installasjon, siden de samme kablene brukes til kraftoverføring og kommunikasjon.

1.2 Problemstilling

Ved bruk av deteksjonssystemet kan det oppstå problemer med deteksjonen. Systemet installeres ofte slik at sløyfedriverne til alle detektor-sløyfene

er koblet opp i samme enhet. Dette gjøres for å redusere kostnadene ved installasjonen. Installering av systemet på denne måten gjør at kablene i hver sløyfe ligger i de samme kabelgatene i flere hundre meter, før kablene spres ut dit hvor detektorene skal være. Når kablene ligger ved siden av hverandre på denne måten kan det oppstå overhøring mellom kablene, dette betegnes krysstale.

Krysstale er et fenomen som oppstår når et signal overført på en kabel forårsaker et uønsket signal på en annen kabel. Krysstale kan føre til at deteksjonen av flamme/gass ikke fungerer slik som den skal. På grunn av krysstaleproblemet brukes det kabler med dobbel skjerming, noe som er kostbart. For å unngå krysstale brukes det i tillegg tidsmultipleksing av ulike sløyfer. Det vil si at det ikke sendes signaler på to nærliggende sløyfer samtidig. Dette fører til redusert effektivitet. Autronica ønsker å kartlegge problemet med detektorløyferne og finne løsninger til forbedringer med hensyn på systemets funksjonalitet og installasjonskostnad.

1.3 Målet med oppgaven

Målet med oppgaven er å lage en modell som beskriver krysstaleproblemet. Dette gjøres ved å se på to nærliggende detektorløyfer. Den ene sløyfa defineres som den forstyrrende sløyfa og påtrykkes et signal. Det beregnes så en transferfunksjon som viser forholdet mellom spenningen som oppstår på utgangen av sløyfa som blir forstyrret, når det ikke er påtrykt signal på denne, og inngangsstrømmen til den forstyrrende sløyfa. Transferfunksjonen kan sammenlignes med transferfunksjonen for en upåvirket detektorløyfe. På denne måten kan modellen vise om overhøringen fra en detektorløyfe til en annen er stor nok til at det kan oppstå problemer med deteksjonen.

1.4 Gjennomføring av oppgaven

Denne oppgaven starter med å presentere teorien som er nødvendig for å løse problemstillingen i kapittel 2. Kapitlet tar først for seg generell teori for transmisjonslinjer, og hvordan disse kan beskrives matematisk. Teorikapitlet tar også for seg hvordan topnettverk kan brukes i beskrivelsen.

En generell transferfunksjon for transmisjonslinjer blir utledet. Videre gis det en innføring i krysstale og hvordan krysstaleproblemet arter seg i systemet

som behandles i denne oppgaven. Til slutt beskrives flerledersystemer og per-lengdeenhet-matrisene som er nødvendige for å modellere slike systemer.

Modellering av forskjellige kabelsystemer gjennomgås i kapittel 3 ved å utlede transferfunksjoner. Kapitlet tar først for seg beregningen av kabelparametre for en enkel transmisjonslinje. Deretter beregnes parametre som inngår i per-lengdeenhet-matrisene.

For å forenkle problemet modelleres transferfunksjoner først for en enkel transmisjonslinje både ved hjelp av skalare parametre og matriser. Deretter modelleres detektorsløyfa med tilsvarende metoder. På denne måten kan det verifiseres at modellen for flerledersystemer stemmer overens med modellering med skalare parametre og det vil være større sannsynlighet for at det ikke er feil i den fullstendige modellen av systemet som presenteres til slutt i kapitlet.

I kapittel 4 presenteres resultatene ved hjelp av figurer som viser transferfunksjonene. Transferfunksjoner vises for den enkle transmisjonslinja, detektorsløyfa og for den fullstendige modellen. Det vises hvordan transferfunksjonene påvirkes av kabelens lengde og dempningskonstant. For den fullstendige modellen ses det også på forskjellig vridning av kablene i forhold til hverandre. Resultatene diskuteres fortløpende.

Konklusjonen av diskusjonen rundt resultatene gjøres i det siste kapitlet, kapittel 5.

Kapittel 2

Teori

I dette kapitlet beskrives relevant teori for å modellere og gjøre beregninger på systemet bestående av detektorsløyfer som behandles i denne oppgaven.

Avsnitt 2.1 omhandler transmisjonslinjer, og beskriver hvordan disse kan analyseres matematisk ved hjelp av det som kalles sekundære kabelparametre. En transmisjonslinje kan også beskrives ved hjelp av primære kabelparametre. Disse parametrene er direkte relatert til fysiske størrelser, og kan følgelig måles for aktuelle kabler. De primære kabelparametrene behandles i avsnitt 2.2. Teorien som beskrives i avsnitt 2.1 og 2.2 av dette kapitlet omhandles i [2].

I avsnitt 2.3 beskrives det hvordan topportnettverk kan brukes til å gjøre beregninger på transmisjonslinjer. Teorien som ligger til grunn for dette avsnittet er beskrevet i [6].

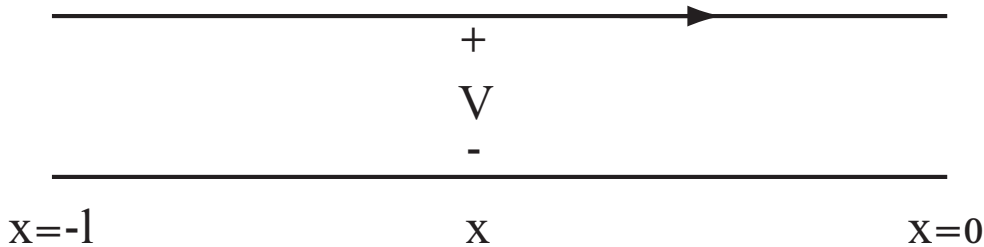
Teorien beskrevet i de foregående avsnittene kan brukes til å beregne en transferfunksjon for en transmisjonslinje eller et system bestående av flere transmisjonslinjer, dette beskrives i avsnitt 2.4. Transferfunksjonene beregnes for å kunne beskrive hvordan signalet på en kabel endrer seg i signalnivå gjennom kabelens lengde. Beregningen av transferfunksjon for systemet i denne oppgaven er gjort slik som beskrevet i [3].

Krysstale blir tatt for seg i avsnitt 2.5. Her gis det en innføring i hva krysstale er og hvordan krysstaleproblemet i det aktuelle systemet blir modellert i denne oppgaven. Avsnittet er skrevet basert på [5] og [7].

For å løse problemstillingen i denne oppgaven må det ses på systemer som består av flere ledere. Flerledersystemer behandles i avsnitt 2.6. Avsnittet er basert på teori fra [3].

For å modellere flerledersystemer inngår beregning av per-lengdeenhet-matriser som er en utvidelse av de primære kabelparametrene for flerledersystemer. Det beregnes også matriser for generalisering av sekundærparameterne, Z_0 og γ . Ut fra disse matrisene beregnes en A-matrise tilsvarende A-matrisa for den enkle transmisjonslinja. Utledning av matrisene for flerledersystemer er tatt for seg i de fire siste avsnittene av kapitlet. Teorien i disse to avsnittene er beskrevet i [3] og [5].

2.1 Transmisjonslinje



Figur 2.1: Uniform transmisjonslinje

Transmisjonslinjeteori er beskrevet i [2]. En uniform transmisjonslinje er en tolederkabel med et uniformt tverrsnitt. Det kan for eksempel være et par ledninger som er tvunnet sammen (tvunnet parkabel) eller en koaksialkabel.

En uniform transmisjonslinje kan representeres som to ledere med lengde l som vist i figur 2.1. Transmisjonslinja kan eksiteres med en kompleks eksponentialfunksjon med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f$. Dette tilsvarer at spenningskilden er en sinusformet bølgeform i tidsdomene.

Spenning og strøm langs en slik linje vil være funksjoner av ω og avstand x langs linja. Funksjonene vil variere i forhold til tida t som vist i ligningene under, hvor $V(x)$ og $I(x)$ henholdsvis er spenningen og strømmen etter avstand x .

$$V(x, \omega) = V(x)e^{j\omega t} \quad I(x, \omega) = I(x)e^{j\omega t} \quad (2.1)$$

Strømmen og spenningen som en funksjon av avstanden langs linja består av to bølger, en bølge som beveger seg fra kilden og en som beveger seg mot kilden. Disse bølgene kalles henholdsvis innkommende V_+ og reflektert bølge

V_- . Total spenning og strøm i et gitt punkt, vil da være gitt av ligningene under.

$$V(x) = V_+e^{-\gamma x} + V_-e^{\gamma x} \quad I(x) = \frac{1}{Z_0} (V_+e^{-\gamma x} - V_-e^{\gamma x}) \quad (2.2)$$

Z_0 i ligning 2.2 kalles transmisjonslinjas karakteristiske impedans, og er lik forholdet mellom spenning og strøm i et hvilket som helst punkt på linja, for enten innkommende eller reflektert bølge. Den andre parameteren i ligningene, γ , kalles propagasjonskonstanten til transmisjonslinja.

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.3)$$

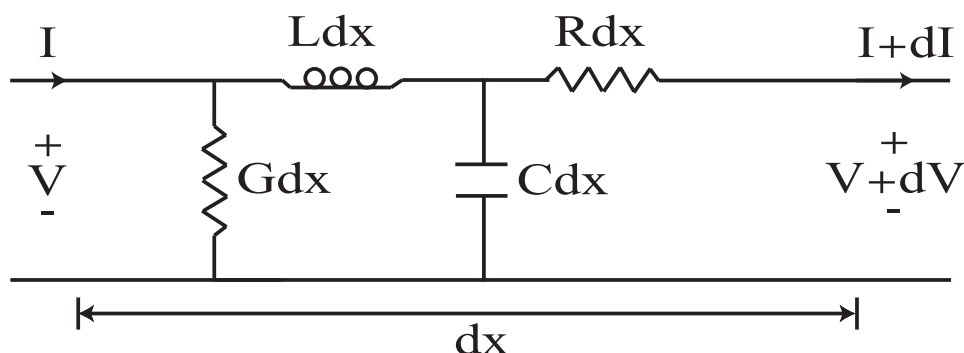
Den reelle delen α i ligning 2.3 kalles dempningskonstanten, og har enheten neper per lengdeenhet. Den imaginære delen β kalles fasekonstanten, og har enheten radianer per lengdeenhet. Z_0 og γ kalles for sekundære kabelparametre.

2.2 Primære kabelparametre

Istedenfor å beskrive kabelen med sekundære kabelparametre, kan den beskrives med primære kabelparametre som er relatert til kabelens fysiske egenskaper. De primære parametrene er nyttige siden de kan bestemmes ved målinger på den aktuelle kabelen. Dette beskrives i [2]. En modell som viser hvordan et kort segment av transmisjonslinja kan beskrives med primærparametre er vist i figur 2.2.

De primære parametrene vil være kabelens konduktans G , kapasitans C , induktans L og resistans R per lengdeenhet, som måles i henholdsvis mhos (Siemens), farad, henry og ohm per lengdeenhet. Alle disse parameterne er funksjoner av frekvens og vil har forskjellige verdi for forskjellige kabler. Primærparametrene er derfor konstante for en gitt frekvens og kabel i systemet som denne oppgaven omhandler. De primære parametrene kan brukes til å beregne de sekundære kabelparametrene, Z_0 og γ , som vist under:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \quad (2.4)$$



Figur 2.2: Modell som viser et kort segment av en transmisjonslinje beskrevet med primærparametre.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (2.5)$$

For en tapsfri transmisjonslinje vil de to dissipasjonsparametrene G og R være lik null. En mer nøyaktig tilnærming til en reell kabel, for eksempel en tvunnet parkabel eller en koaksialkabel, er å anta at tapet gjennom kabelen er lite [2]. For slike kabler kan det fremdeles antas at konduktansen er ubetydelig liten, setter derfor $G = 0$ i ligningene over. Antar også at $R \ll \omega L$, det vil si at motstanden er liten i forhold til frekvensen multiplisert med induktansen per lengdeenhet.

Strømmen vil vesentlig gå gjennom lederens overflate for høye frekvenser, dette kalles skinneffekten. Effekten skyldes selvinduksjon som hindrer strømmen i å gå inne i ledere. På grunn av skinneffekten øker motstanden i en leder proporsjonalt med kvadratroten av frekvensen [2].

Ved hjelp av disse antagelsene kan det finnes relativt enkle uttrykk for Z_0 og γ , uttrykt med primærparametrene.

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.6)$$

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{LC} \left(1 - j\left(\frac{R}{2\omega L}\right)\right) \quad (2.7)$$

Taylor-rekker har blitt brukt for omskrivingen av γ til ligning 2.7, [7].

Dempningskonstanten α og fasekonstanten β er som gitt i ligning 2.3 henholdsvis den reelle og komplekse delen av γ . Med de nevnte tilnærmelsene

fås ligningene:

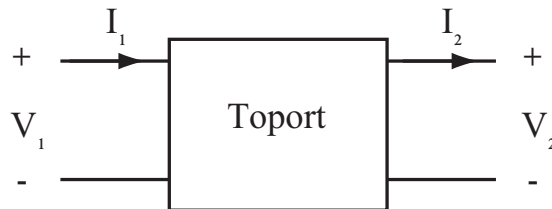
$$\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \approx k\sqrt{F} \quad (2.8)$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} \approx kF \quad (2.9)$$

I ligningene er k en konstant gitt av primærparameterne. Merk at $\omega = 2\pi f$ og at frekvensen F er gitt i MHz. Konstanten α har enheten Np/km og β har enheten rad/km. Siden dempningskonstanten ofte oppgis i dB/km må den omregnes til enheten Np/km for å beregne tilhørende propagasjonskonstant.

Antagelsene som gjøres i dette avsnittet gjelder for tvinnede parkabler, som er vanlige kabler å bruke i systemer som det som er behandlet i denne oppgaven. Uttrykkene til høyre i de to ligningene over er sammenhenger som er funnet empirisk for samme typer kabler som det som brukes i systemet.

2.3 Toportnettverk



Figur 2.3: Toport

En transmisjonslinje kan representeres ved hjelp av en toport som vist i figur 2.3. Dette gjør det mulig å bruke matriser i analysen, noe som bidrar til å gjøre analysen enklere. Teorien om toporter er gitt i [6]. Toporten kan beskrives med to ligninger:

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}V_2 + a_{12}I_2 \\ I_1 &= a_{21}V_2 + a_{22}I_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

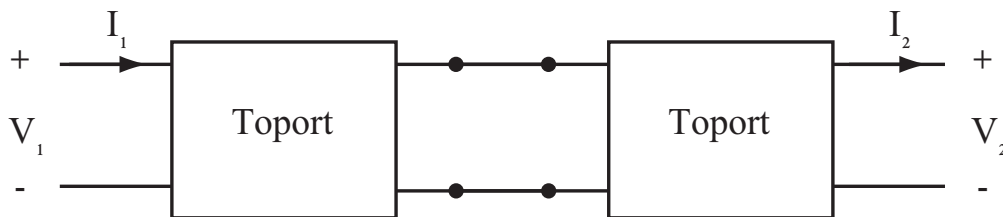
Ved å bruke uttrykkene i ligning 2.10 kan det finnes en matriserepresentasjon for toporten. Ligning 2.11 viser hvordan matriser kan brukes til å relatere inngangsstrøm og -spenning til utgangsstrøm og -spenning.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \tilde{a} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Siden alle elementene i matrisa er admittanser kalles \tilde{a} ei a-matrise og elementene til matrisa kalles a-parametre. Parameterne har enheten mhos (Siemens) og er gitt av ligningene under.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} & a_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \\ a_{21} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} & a_{22} &= \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Å analysere kretser ved hjelp av toportnettverk, gjør det enkelt å regne på kombinasjoner av kretsene. I denne oppgaven er det aktuelt å se på toporter koblet i kaskadekobling. Det vil si at toportene er koblet parallelt og at utgangene på den ene toporten er koblet i serie med inngangene på den andre, som vist i figur 2.4.



Figur 2.4: Toporter i kaskadekobling

Hvis matrisa for den første toporten kalles \tilde{a} , og matrisa for den andre toporten kalles \tilde{b} , kan det totale nettverket uttrykkes slik:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \tilde{a} \cdot \tilde{b} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Tilsvarende sammenhenger finnes også for andre koblinger av toporter.

2.4 Transferfunksjon

En transferfunksjon er en matematisk representasjon som viser relasjonen mellom inngangen og utgangen til et system. I denne oppgaven defineres det en transferfunksjon som relaterer utgangsspenning til inngangsstrøm. Denne

defineres for å se på signalnivået til signalet på en kabel gjennom kabelens lengde.

Ved å se på den uniforme transmisjonslinja vist i figur 2.1, som en toport, kan det finnes uttrykk for strøm og spenning på inngangen og utgangen. Ved å bruke uttrykkene i ligning 2.2 og teorien fra forrige avsnitt kan I_1 , I_2 , V_1 og V_2 finnes til

$$\begin{aligned} V_1 &= V(-l) = V_+ e^{\gamma l} + V_- e^{-\gamma l} \\ V_2 &= V(0) = V_+ + V_- \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= I(-l) = Z_0^{-1} (V_+ e^{\gamma l} - V_- e^{-\gamma l}) \\ I_2 &= I(0) = Z_0^{-1} (V_+ - V_-) \end{aligned} \quad (2.15)$$

For å finne a-matrisa til den uniforme transmisjonslinja kan uttrykkene i ligningene 2.14 og 2.15 brukes på uttrykkene for a-parametrene i ligning 2.12. Se tillegg A.1 for utledning a-parametrene. Dermed blir a-matrisa til transmisjonslinja som følger:

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_0} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Ligning 2.10 gir da følgende sammenheng for den uniforme transmisjonslinja:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_0} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Ut i fra ligning 2.17 kan det defineres en transferfunksjon Z_{tr} [4]:

$$Z_{tr} = \frac{V_{ut}}{I_{inn}} = \frac{V_2}{I_1} \quad (2.18)$$

Ved å variere l fra null til totallengden av transmisjonslinja viser funksjonen signalnivået til signalet gjennom hele linjas lengde. Funksjonen vil derfor kunne vise hvor på linja signalet vil være svakt og derfor sårbart overfor ytre påvirkning, eller hvor på linja signalet er sterkt og dermed mer robust.

2.5 Krysstale

Problemet med enkelte installasjoner av Autronicas deteksjonssystem er som beskrevet i innledningen at det oppstår krysstale mellom detektorløyferne. Krysstale oppstår når et signal på en kabel forstyrrer signalene i en nærliggende kabel. Denne oppgaven tar for seg hvordan krysstalen mellom to detektorløyfer kan modelleres. Dette avsnittet gir en innføring i teori som brukes til å beskrive krysstalen.

Krysstale er et fenomen som oppstår når et signal overført på en kabel forårsaker en uønsket effekt i en annen kabel. Krysstalen forårsakes vanligvis av en uønsket kapasitiv, induktiv eller konduktiv kobling mellom to kabler. Strømmen og spenningen i en kabel vil generere et elektromagnetisk felt som vil kunne indusere strøm og spenning i en annen kabel hvis de ligger i nærheten av hverandre. Signalet som sendes på kabelen som forstyrres vil da kunne bli påvirket slik at signalet endres. Krysstale mellom kabler er behandlet i [3] og [7].

Systemet med detektorløyfer brukes i forskjellige konfigurasjoner. Det består vanligvis av mange detektorløyfer, med mange detektorer hver. Det har vist seg at systemet i praksis ofte blir satt opp slik at sløyfedriverne til mange detektorløyfer er koblet opp i samme enhet. Dette fører til at kablene ligger ved siden av hverandre i de samme kabelgatene i flere hundre meter, før kablene legges ut til stedene der hvor detektorene skal detektere flamme eller gass. Systemet settes opp på denne måten for å redusere installasjonskostnadene. Informasjon om hvordan systemet brukes i praksis er gitt av [1] og [5]. Figur 2.5 viser oppkoblingen av systemet for to detektorløyfer. Systemet vil vanligvis bestå av mange slike sløyfer.



Figur 2.5: System som består av to skjermede detektorløyfer.

Systemet ble ikke designet med tanke på at kablene delvis skulle ligge ved siden av hverandre, ofte over flere hundre meter. Når kablene ligger ved siden av hverandre på denne måten oppstår det krysstale mellom dem. For å unngå

noe av krysstalen brukes det en skjerming rundt kabelen i hver sløyfe over strekningen de ligger ved siden av hverandre, som vist i figur 2.5. I tillegg til dette brukes det tidsmultipleksing av signalene for å unngå krysstaleproblemet. Det vil si at signalene sendes på detektorsløyfene i tidsluker, slik at det ikke sendes signal på to nærliggende sløyfer samtidig. Dette fører til redusert effektivitet.

Beregningene i denne oppgaven baserer seg på at skjermen er jordet i en ende, dobbeltsidig jording har ikke blitt behandlet. Jording i en ende fører til at all kapasitiv kobling mellom ledere i forskjellige skjermer forsvinner. Bestemmelse av påvirkningen fra en detektorsløyfe til en annen er derfor et spørsmål om å beregne den gjensidige induktansen mellom lederne i de forskjellige sløyfene. Ved jording i begge ender vil det gå strøm i skjermen, dette er beskrevet for elektrisk kort kabel i [7]. Jording i begge ender av skjermen vil ikke kunne fjerne de induktive koblingene, men kan føre til at de blir dempet.

I tillegg til krysstale mellom skjermede detektorsløyfer vil det også oppstå krysstale internt i en sløyfe siden alle fire lederne som inngår i en detektorsløyfe vil ligge ved siden av hverandre over en strekning. Disse fire lederne vil påvirke hverandre både med kapasitive og induktive koblinger.

I praksis vil lederne som inngår i en kabel bantes og tvinnes sammen. Deretter legges kablene ved siden av hverandre i de samme kabelgatene. I denne oppgaven modelleres systemet som at alle kablene ligger parallelt ved siden av hverandre da det antas at dette vil gi tilnærmet likt resultat som når de er tvunnet [5]. Det antas at dette vil føre til lite feil da det vil være sannsynlig at lederne tvinnes på samme måte for alle kablene. Dette vil føre til at tverrsnittene til de to kablene forholder seg med tilnærmet lik vinkel i forhold til hverandre når de tvinnes.

I denne oppgaven ses det på krysstale mellom to nærliggende detektorsløyfer som vist i figur 2.5. Krysstalen modelleres med en transferfunksjon som beskrevet i avsnitt 2.4. En av sløyfene velges som den forstyrrende sløyfa ved at det påtrykkes et signal på denne, mens det ikke påtrykkes signal på den andre sløyfa. Påvirkning fra den forstyrrende sløyfa kan da modelleres ved å definere en transferfunksjonen gitt av utgangsspenningen på den nederste sløyfa delt på inngangsstrømmen på den øverste sløyfa.

Ved å sammenligne transferfunksjonen for krysstalen i den fullstendige modellen med transferfunksjonen for en uforstyrret detektorsløyfe kan det avgjøres om krysstalen er stor nok til at den kan påvirke deteksjonen i systemet.

Resten av avsnittene i dette kapitlet gjennomgår teorien som må til for å

kunne lage en modell for krysstalen mellom to detektorløyper i systemet som oppgaven omhandler.

2.6 Flerledersystemer

Transmisjonslinjer som består av to ledere beskrives ved hjelp av sekundære eller primære kabelparametre. Et system bestående av flere ledere beskrives med per-lengdeenhet-matrisene til lederne. Teorien som omhandler flerledersystemer er beskrevet i [3] og [7].

Per-lengdeenhet-matrisene består av fire matriser som tilsvarer de skalare primærparametrene, resistansmatrisa \tilde{R} , induktansmatrisa \tilde{L} , kapasitansmatrisa \tilde{C} og konduktansmatrisa \tilde{G} . Beregning av per-lengdeenhet-matrisene er tatt for seg i avsnitt 2.7. Konduktansmatrisa beregnes ikke da det antas at konduktansen mellom lederne er liten nok til at den kan neglisjeres.

Flerledersystemer kan beskrives ved hjelp av de generaliserte telegrafligningene [3]. Telegrafligningene består av to differensialligninger som beskriver strøm og spenning langs en transmisjonslinje.

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta x} \vec{I} &= -\tilde{Y} \vec{V} \\ \frac{\delta}{\delta x} \vec{V} &= -\tilde{Z} \vec{I}\end{aligned}\tag{2.19}$$

I ligningene over er \tilde{Y} admittansmatrisa per-lengdeenhet og \tilde{Z} impedansmatrisa per-lengdeenhet. Matrisene \tilde{Y} og \tilde{Z} kan bestemmes ut fra \tilde{R} , \tilde{L} og \tilde{C} , og beregnes i avsnitt 2.7.

For parallelle ledninger er \tilde{Y} og \tilde{Z} konstante. Telegrafligningene kan da løses for spenning og strøm på inngangen og utgangen til en kabel [3].

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \vec{V}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}\tag{2.20}$$

Matrisa \tilde{A} kalles A-matrisa til systemet.

\vec{I} er en vektor bestående av strømmen på hver av lederne.

\vec{V} er en vektor bestående av spenningen på hver av lederne.

For et flerledersystem bestående av n ledere er vektorene gitt som:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_1 &= [V_{11} \quad V_{12} \quad \cdots \quad V_{1n}]^T \\
\vec{V}_2 &= [V_{21} \quad V_{22} \quad \cdots \quad V_{2n}]^T \\
\vec{I}_1 &= [I_{11} \quad I_{12} \quad \cdots \quad I_{1n}]^T \\
\vec{I}_2 &= [I_{21} \quad I_{22} \quad \cdots \quad I_{2n}]^T
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Matrisa i ligning 2.20 er gitt som vist under, hvor l er kabellengden.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh l \tilde{\Gamma} & \sinh l \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

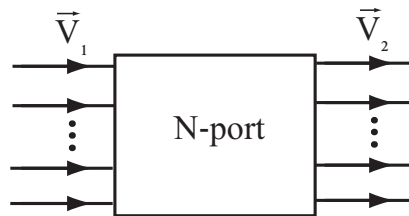
$\tilde{\Gamma}$ og \tilde{Z}_0 i ligningene over er en generalisering av henholdsvis propagasjonskonstanten γ og den karakteristiske impedansen Z_0 gitt for en enkel transmissjonslinje, se avsnitt 2.1. Matrisene vil være gitt av admittansmatrisa \tilde{Y} og impedansmatrisa \tilde{Z} som vist i avsnitt 2.7.

For å beregne hyperbolsk sinus og cosinus av matriser brukes det rekkeutvikling som vist under, hvor \tilde{I} er identitetsmatrisa:

$$\cosh(x\tilde{\Gamma}) = \tilde{I} + \frac{x^2\tilde{\Gamma}^2}{2!} + \frac{x^4\tilde{\Gamma}^4}{4!} + \cdots \tag{2.23}$$

$$\sinh(x\tilde{\Gamma}) = \frac{x\tilde{\Gamma}}{1!} + \frac{x^3\tilde{\Gamma}^3}{3!} + \cdots \tag{2.24}$$

En kabel bestående av to ledere kan som beskrevet i avsnitt 2.3 representeres ved hjelp av en toport. På samme måte kan et system bestående av n ledere representeres ved hjelp av en n -port som vist i figur 2.6.



Figur 2.6: N-port

2.7 Per-lengdeenhet-matriser

Som beskrevet tidligere kan en kabel beskrives med både primære og sekundære kabelparametre. For en toleder vil transmisjonslinja kunne beskrives med skalare primærparametre C , L , R og G . For en kabel som består av flere en to ledere brukes det tilsvarende matriser \tilde{C} , \tilde{L} , \tilde{R} og \tilde{G} hvor elementene i matrisene representerer koblinger mellom de forskjellige lederne.

Dette avsnittet tar for seg hvordan matrisene \tilde{C} , \tilde{L} og \tilde{R} utledes. Konduktansmatrisa \tilde{G} utledes ikke da det antas at konduktansen G mellom lederne er liten nok til at den kan neglisjeres.

2.7.1 Permittivitet og permeabilitet

I analysen antas det parallelle ledere og homogen permittivitet mellom lederne. Permittivitet er en størrelse som angir hvor godt et elektrisk felt ledes i en materie. For disse antagelsene vil per-lengdeenhet-kapasitansmatrisa være proporsjonal med den inverse per-lengdeenhet-induktansmatrisa som beskrevet i [3] og [7].

$$\tilde{L} = \mu_0 \epsilon \tilde{C}^{-1} \quad (2.25)$$

μ_0 er permeabiliteten i vakuum og ϵ er permittiviteten. Permeabiliteten beskriver graden av magnetisering av et materiale i respons til et ytre magnetisk felt. I store trekk kan hastigheten til en bølge i et ikke-ledende medium beskrives av permittiviteten og permeabiliteten til mediet [7]. Det antas at mediet rundt lederne er polyetylen. Dette er et ikke-magnetisk materiale og det kan derfor antas at permeabiliteten μ kan settes lik permeabiliteten i vakuum [7], dette forenkler analysen.

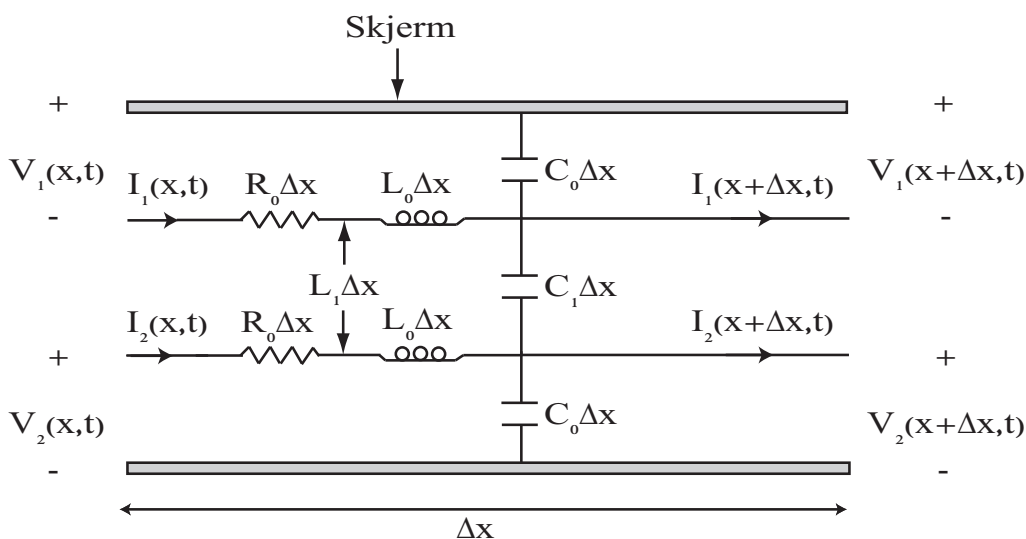
Permittiviteten ϵ er gitt av permittiviteten i vakuum ϵ_0 og den relative permittiviteten ϵ_r til materialet.

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (2.26)$$

Den relative permittiviteten antas i denne oppgaven å være lik den relative permittiviteten til polyetylen, det vil si $\epsilon_r = 2.25$.

2.7.2 Utleddning av per-lengdeenhet-matriser

For å bestemme per-lengdeenhet-matrisene til en kabel må kapasitans- og induktanskoblingene mellom lederne og skjermingen til en kabel bestemmes. En modell som viser et kort segment av en kabel som består av en toleder er vist i figur 2.7. Utleddning av per-lengdeenhet-matriser for en toleder er tatt for seg i [7].



Figur 2.7: Kort segment av en skjermet toleder som viser parametrene som inngår i per-lengdeenhet-matrisene.

For alle reelle kabler vil det være tap av signalstyrke når signalet beveger seg gjennom kabelen på grunn av motstand i kabelen. Dette tapet representeres ved en resistans R_0 i hver leder i kabelen i figur 2.7.

Strømmen som går i lederne vil danne et magnetfelt som induserer induktanser i lederne. Induktansen L_0 kalles selvinduktansen og representerer induktansen som strømmen i en leder induserer i det samme lederen. Induktansen L_1 kalles gjensidig induktans og representerer induktansen som induseres mellom de to lederne.

Tilsvarende vil spenningen mellom lederne og mellom lederne og skjermen generere elektriske felt mellom lederne og mellom lederne og skjermen som representeres med kapasitanser. Kapasitansen C_0 kalles selvkapasitansen og representerer kapasitansen som genereres mellom lederen og skjermen. Kapasitansen C_1 kalles den gjensidige kapasitansen og representerer kapasitansen som genereres mellom de to lederne.

Ved bruk av kretsanalyse og ved å la $\Delta x \rightarrow 0$ kan sammenhengene i ligning 2.27 settes opp for kapasitanskoblingene vist i figur 2.7 som beskrevet i [7].

$$\begin{aligned}\frac{\delta I_1(x, t)}{\delta x} &= -(C_0 + C_1) \frac{\delta V_1(x, t)}{\delta t} + C_1 \frac{\delta V_2(x, t)}{\delta t} \\ \frac{\delta I_2(x, t)}{\delta x} &= C_1 \frac{\delta V_1(x, t)}{\delta t} - (C_0 + C_1) \frac{\delta V_2(x, t)}{\delta t}\end{aligned}\quad (2.27)$$

Tilsvarende kan følgende sammenhenger settes opp for resistansene og induktansene i figur 2.7 [7].

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_1(x, t)}{\delta x} &= -R_0 I_1(x, t) - L_0 \frac{\delta I_1(x, t)}{\delta t} - L_1 \frac{\delta I_2(x, t)}{\delta t} \\ \frac{\delta V_2(x, t)}{\delta x} &= -L_1 \frac{\delta I_1(x, t)}{\delta t} - R_0 I_2(x, t) - L_0 \frac{\delta I_2(x, t)}{\delta t}\end{aligned}\quad (2.28)$$

Ved å sammenfatte strømmer og spenninger til vektorer og resistanser, induktanser og kapasitanser til matriser kan ligning 2.27 og 2.28 skrives om til [7]:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \vec{I}(x, t)}{\delta x} &= -\tilde{C} \frac{\delta \vec{V}(x, t)}{\delta t} \\ \frac{\delta \vec{V}(x, t)}{\delta x} &= -\tilde{R} \vec{I}(x, t) - \tilde{L} \frac{\delta \vec{I}(x, t)}{\delta t}\end{aligned}\quad (2.29)$$

Hvor vektorene er definert som følger:

$$\begin{aligned}\vec{V}(x, t) &= \begin{bmatrix} V_1(x, t) \\ V_2(x, t) \end{bmatrix} \\ \vec{I}(x, t) &= \begin{bmatrix} I_1(x, t) \\ I_2(x, t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.30)$$

For en gitt frekvens, som systemet som behandles i denne oppgaven opererer med, kan den tidsderiverte i ligningene byttes ut med $j\omega$ hvor $\omega = 2\pi f$ og ligningene kan da skrives om til:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \vec{I}(x)}{\delta x} &= -j\omega \tilde{C} \vec{V}(x) \\ \frac{\delta \vec{V}(x)}{\delta x} &= -(\tilde{R} + j\omega \tilde{L}) \vec{I}(x)\end{aligned}\quad (2.31)$$

Ligningene over gjenkjennes som de generaliserte telegrafligningene beskrevet i avsnitt 2.6. Dette gir følgende matriser for resistans, kapasitans og induktans:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} (C_0 + C_1) & -C_1 \\ -C_1 & (C_0 + C_1) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L_0 & L_1 \\ L_1 & L_0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

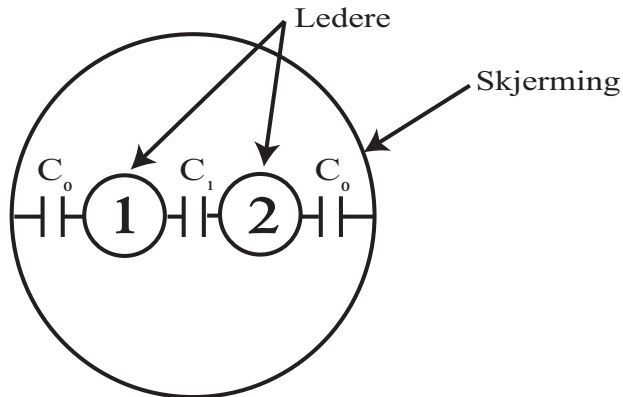
Utleddningen av per-lengdeenhet-matrisene er gjort for to ledere referert til en skjerm i dette avsnittet. Resultatet kan utvides til å gjelde for flere enn to ledere. For å beregne per-lengdeenhet-matrisene for flere ledere er det enklere å se på tverrsnittet til kablene. Dette gjøres i de videre avsnittene.

2.7.3 Kapasitansmatrise

Kapasitansmatrisa består som beskrevet i det foregående avsnittet av kapasitanskoblinger som følge av elektriske felt som genereres på grunn av spenningen mellom lederne og mellom lederne og skjermen i en kabel. I dette avsnittet blir det utledet kapasitansmatriser for forskjellige kabler. Kapasitansmatrisene beregnes på bakgrunn av [5] og [7]. For et system som består av n ledere vil kapasitansmatrisa være en $n \times n$ -matrise hvor elementene C_{xx} representerer selvkapasitansen til hver leder. Resten av elementene C_{xy} representerer kapasitanskoblingen mellom leder x og leder y .

Skjermet kabel med to ledere

Den enkleste formen for kabel det ses på i denne oppgaven er den enkle transmisjonslinja som består av to ledere. Et kort segment av en slik linje er



Figur 2.8: Tverrsnitt av kabel som består av to ledere

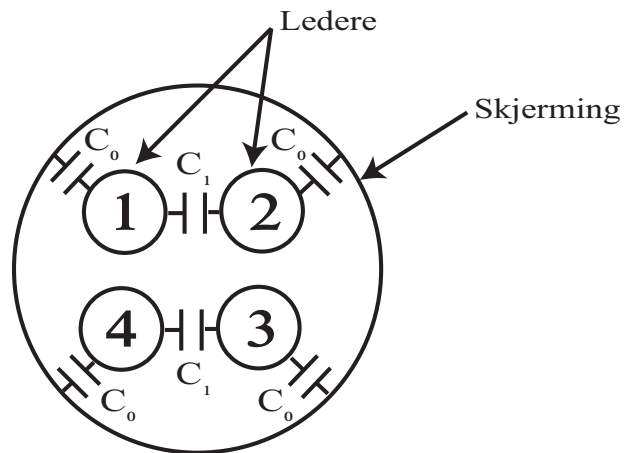
vist i figur 2.7. Tverrsnittet av en slik kabel er vist i figur 2.8. Figuren viser at det er en kapasitanskobling C_1 mellom de to lederne og en kapasitanskobling C_0 mellom hver av lederne og skjermingen til kabelen. Som en forenkling antas at de to kapasitansene C_0 og C_1 er like store, det vil si at $C_0 = C_1 = C$. For en reell kabel vil man bruke geometrien til kabelens tverrsnitt for å beregne kapasitansene. For det forenklede tilfellet vil kapasitansmatrisa se ut som vist i ligning 2.35.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 2C & -C \\ -C & 2C \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

To parallelle toledere

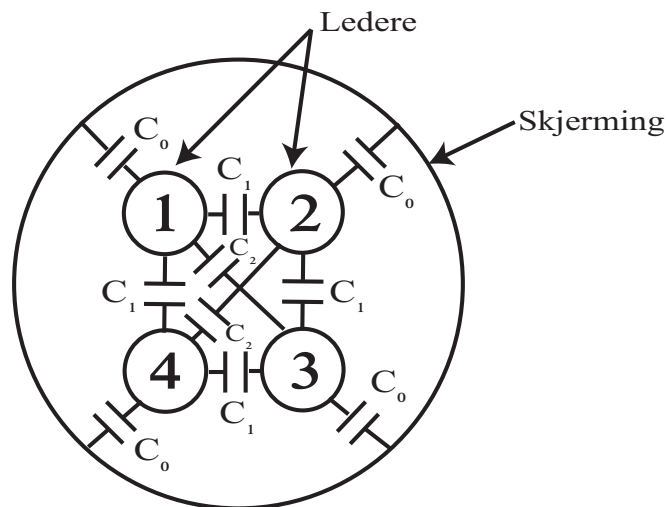
I denne oppgaven ses det videre på systemer som består av fire ledere. En fireledermodeill kan benyttes til å beregne to parallelle uavhengige toledere. Tverrsnittet av en slik modeill er vist i figur 2.9. Det er nyttig å se på en slik modeill for å kunne sammenligne forskjellige systemer for å verifisere at modeillene stemmer. I dette tilfellet blir kapasitansmatrisa en utvidelse av kapasitansmatrisa for en kabel med to avhengige ledere.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 2C & -C & 0 & 0 \\ -C & 2C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2C & -C \\ 0 & 0 & -C & 2C \end{bmatrix} \quad (2.36)$$



Figur 2.9: Tverrsnitt som viser to parallelle toledere. Kapasitanskobling mellom leder 1 og 2 og mellom leder 3 og 4.

Skjernet kabel med fire ledere



Figur 2.10: Tverrsnitt av kabel som består av fire ledere. Kapasitanskobling mellom alle lederne

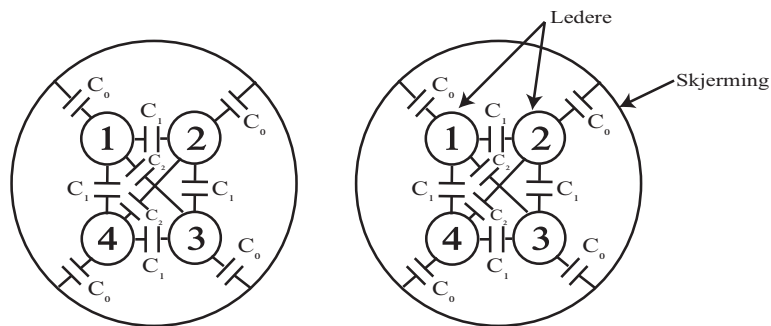
Kablene som brukes i systemet det ses på i denne oppgaven vil bestå av fire ledere som alle har en kapasitansavhengighet til hverandre. Et tverrsnitt av en slik kabel er vist i figur 2.10. C_0 er kapasitanskoblingen mellom en leder og skjermen, mens C_1 og C_2 beskriver kapasitanskobling mellom lederne.

Selvkapasitansen til en leder i denne kabelen vil være gitt som summen av

kapasitansen mellom lederen og de andre lederne og kapasitansen mellom lederen og skjermen. De andre kapasitansene er som tidligere gitt av kapasitanskoblingen mellom leder x og leder y . Kapasitansmatrisa er gitt i ligning 2.37.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0 + 2C_1 + C_2 & -C_1 & -C_2 & -C_1 \\ -C_1 & C_0 + 2C_1 + C_2 & -C_1 & -C_2 \\ -C_2 & -C_1 & C_0 + 2C_1 + C_2 & -C_1 \\ -C_1 & -C_2 & -C_1 & C_0 + 2C_1 + C_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

To skjermede kabler med fire ledere



Figur 2.11: Tverrsnitt av to nærliggende kabler med kapasitanskoblinger.

Et system som består av to skjermede kabler er vist i figur 2.11. Det antas at skjermen er jordet i en ende. Når skjermen er jordet i en ende, vil skjermingen føre til at det ikke oppstår noen kapasitiv kobling mellom lederne i forskjellige kabler. I dette tilfellet vil kapasitansmatrisa være en utvidelse av kapasitansmatrisa for en skjermet kabel.

På grunn av at skjermingen ikke stopper de induktive koblingene, beregnes induktansmatrisa først for å finne per-lengdeenhet-matrisene når det ses på to nærliggende kabler. Hvis skjermen hadde vært jordet i begge ender ville det gått strøm i skjermen. Skjermingen ville da bidratt til å dempe de induktive koblingene mellom lederne i forskjellige kabler, uten å kunne fjerne dem helt. Dette er beskrevet for elektrisk kort kabel i [7].

Den enkleste måten å finne kapasitansmatrisa på når induktansmatrisa er kjent, vil være å beregne den ut fra induktansmatrisa ved hjelp av ligning 2.25. Induktansmatrisa kan settes opp som vist i ligning 2.38

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{12} \\ \tilde{L}_{21} & \tilde{L}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Matrisene \tilde{L}_{11} , \tilde{L}_{12} , \tilde{L}_{21} og \tilde{L}_{22} er 4×4 -matriser. Matrisene \tilde{L}_{11} og \tilde{L}_{22} inneholder induktansene mellom lederne innen hver skjermet kabel. På grunn av at det antas at de to kablene har like tverrsnitt vil disse to matrisene være like. \tilde{L}_{12} og \tilde{L}_{21} inneholder induktansene mellom de to forskjellige kablene og vil variere avhengig av kablernes vridning i forhold til hverandre.

Kapasitansmatrisa kan da beregnes ved at elementene i $\tilde{C}_{11} = \tilde{C}_{22}$, vil være gitt av elementene i $\tilde{L}_{11} = \tilde{L}_{22}$. På grunn av skjermede kabler som er jordet i en ende vil det ikke være noen kapasitanskobling mellom lederne i de forskjellige kablene og matrisene \tilde{C}_{12} og \tilde{C}_{21} vil derfor begge være lik nullmatrisa $\tilde{0}$.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \epsilon \tilde{L}_{11}^{-1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \mu_0 \epsilon \tilde{L}_{11}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

2.7.4 Induktansmatrise

Induktansmatrisa \tilde{L} for et system bestående av n ledere vil være en $n \times n$ -matrise hvor elementene L_{xx} representerer selvinduktansen til leder x og de resterende elementene L_{xy} representerer induktanskoblingen mellom leder x og leder y .

Skjermet kabel med to eller fire ledere

Induktansmatrisa \tilde{L} for tilfellene med to eller fire ledere, vist i figurene 2.8, 2.9 og 2.10, kan enkelt finnes ut fra kapasitansmatrisene som ble utledet i avsnitt 2.7.3 når man antar parallelle ledere og homogen permittivitet mellom lederne. Induktansmatrisa vil da kunne finnes ved en omskriving av ligning 2.25 til ligningen vist under:

$$\tilde{L} = \mu_0 \epsilon \tilde{C}^{-1} \quad (2.40)$$

To skjermede kabler med fire ledere

For tilfellet hvor det ses på to nærliggende kabler som består av fire ledere vil induktansen mellom hver av lederne beregnes hver for seg. Dette kan ikke gjøres generelt da induktansene vil variere avhengig av hvor lederne befinner seg i kabelens tverrsnitt og hvordan de to kablene er vridd i forhold til hverandre [5]. Beregningen av induktansmatrisa som brukes i modellen av systemet i denne oppgaven er vist i avsnitt 3.2. Induktansmatrisa blir da en 8×8 -matrise hvor alle elementene er ulik null.

2.7.5 Resistansmatrise

Resistansmatrisa \tilde{R} til en kabel bestående av n ledere vil være en $n \times n$ -matrise hvor hvert element R_{xx} vil være resistansen i leder x . Det vil ikke være noen resistanskobling mellom de forskjellige lederne så alle elementer som ikke er på diagonalen vil være lik null. Det antas at alle lederne i dette tilfellet har lik resistans, $R_{xx} = R_0$. For et system som består av n ledere er resistansmatrisa som vist under [5].

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & R_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & R_0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & R_0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

2.7.6 Admittansmatrise

Admittansmatrisa \tilde{Y} vil være gitt av kapasitansmatrisa som vist i ligning 2.42, [7].

$$\tilde{Y} = j\omega\tilde{C} \quad (2.42)$$

2.7.7 Impedansmatrise

Impedansmatrisa \tilde{Z} vil være gitt av resistans- og induktansmatrisa som vist i ligning 2.43, [7].

$$\tilde{Z} = \tilde{R} + j\omega\tilde{L} \quad (2.43)$$

2.8 Matrise for generalisert propagasjonskonstant

For det endimensjonale tilfelle ble det definert en propagasjonskonstant γ . For det flerdimensjonale tilfellet defineres en matrise $\tilde{\Gamma}$ som er en generalisering av denne konstanten. Denne matrisa vil være gitt av admittans- og impedansmatrisene som har blitt presentert i de foregående avsnittene, [3].

$$\tilde{\Gamma} = \sqrt{\tilde{Z}\tilde{Y}} \quad (2.44)$$

2.9 Matrise for generalisert karakteristisk impedans

Den karakteristiske impedansen Z_0 ble definert for en toleder i kapittel 2.1. På samme måte som for propagasjonskonstanten kan det defineres en matrise for en generalisert karakteristisk impedans. Denne matrisa vil være gitt som vist i ligning 2.45, [3].

$$\tilde{Z}_0 = \tilde{\Gamma}^{-1}\tilde{Z} = \tilde{\Gamma}\tilde{Y}^{-1} \quad (2.45)$$

2.10 A-matrise for flerledersystemer

Et system som består av flere ledere kan som beskrevet i avsnitt 2.6 representeres ved hjelp av vektorer for inngangs- og utgangsstrøm og -spenning og en A-matrise. A-matrisa for et system som består av n ledere vil være en $2n \times 2n$ -matrise som finnes ut fra matrisene for generalisert propagasjonskonstant $\tilde{\Gamma}$ og generalisert karakteristisk impedans \tilde{Z}_0 , som ble utledet i henholdsvis avsnitt 2.8 og 2.9. A-matrisa er gitt som vist under hvor l er lengden av kabelen, [3].

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh l \tilde{\Gamma} & \sinh l \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Kapittel 3

Modellering av forskjellige kabelsystemer

I dette kapitlet beregnes det kabelparametre for aktuelle kabler og transferfunksjoner for forskjellige kabelsystemer.

Beskrivelsen av hvordan de skalare kabelparametrene for tolederkabler beregnes er gitt i avsnitt 3.1. Beregning av parametrene som inngår i per-lengdeenhet-matrisene gjøres i avsnitt 3.2.

Systemet som skal modelleres består av to nærliggende detektorsløyfer, men først ses det på modellering av enklere systemer for å gjøre det enklere å utlede en riktig modell.

Modellering av den enkle transmisjonslinja gjøres først ved hjelp av de sekundære kabelparametrene beregnet i avsnitt 3.1. Dette blir gjort i avsnitt 3.3. I avsnitt 3.4 blir den samme transmisjonslinja modellert ved hjelp av per-lengdeenhet-matriser. Det ses på modellering med A-matrise for både to og fire ledere.

Videre i kapitlet modelleres en detektorsløyfe, først ved hjelp av sekundære kabelparametre i avsnitt 3.5, og deretter ved hjelp av per-lengdeenhet-matriser i avsnitt 3.6. Også her ses det på modellering med A-matriser for både to og fire ledere.

I det siste avsnittet utledes det en modell for systemet som består av to detektorsløyfer som delvis ligger ved siden av hverandre. For å verifisere at deler av modellen stemmer modelleres detektorsløyfa og den enkle transmisjonslinja ut fra den fullstendige modellen.

3.1 Beregning av kabelparametre

Alle transferfunksjonene som presenteres i denne oppgaven, blir utledet med utgangspunkt i en uniform transmisjonslinje som beskrevet i avsnitt 2.1.

En kabel kan beskrives ved hjelp av propagasjonskonstanten gitt i ligning 2.3. Denne ligningen består av to konstanter, dempningskonstanten α og fasekonstanten β , som kalles sekundære kabelparametre. De sekundære parameterne kan beregnes ved hjelp av de primære kabelparametrene, som er direkte relatert til fysiske størrelser, og derfor kan bestemmes ved målinger på kabelen [2].

Modelleringen som ble gjort av den enkle transmisjonslinja og detektorsløyfa i prosjektoppgaven som denne masteroppgaven bygger på, ble gjort ved å bestemme karakteristisk impedans Z_0 til kabelen ut fra typiske verdier. Det samme ble gjort for å bestemme fasekonstanten β .

Når kablene modelleres i denne oppgaven beregnes karakteristisk impedans Z_0 og propagasjonskonstanten γ ved hjelp av de primære kabelparametrene til en transmisjonslinje som vist i figur 2.2 ut fra ligningene 2.4 og 2.5.

Med bakgrunn i data for vanlige kabler kan det antas at driftskapasitansen per lengdeenhet C_d for en skjernet kabel som består av en toleder er på 45 nF/km [5]. Driftskapasitansen vil tilsvare kapasitansen per lengdeenhet for den enkle transmisjonslinja, det vil si $C = C_d$.

Et alternativ til å anta at driftskapasitansen er lik 45 nF/km, er å beregne den ut fra elementene i kapasitansmatrisa for fire avhengige ledere gitt i ligning 2.37. Hvis de to lederne i detektorsløyfa kobles til for eksempel leder 1 og 3 i firelederkabelen vil driftskapasitansen for en toleder være gitt som vist i ligning 3.1.

$$C_d = C_2 + C_1 + \frac{C_0}{2} = 61,5 \text{ nF/km} \quad (3.1)$$

Induktansen L per lengdeenhet for en enkel transmisjonslinje kan da beregnes ut fra kapasitansen som vist under.

$$L = \frac{\mu_0 \epsilon}{C_d} \quad (3.2)$$

Resistansen R per lengdeenhet beregnes ut fra C , L og vanlige dempningskonstanter ved hjelp av tilnærmelsen i ligning 2.8. Resistansen er da gitt

Tabell 3.1: Dempningskonstanter for forskjellige kabler når $f = 132$ kHz

Tykkelse leder(mm)	Dempning(dB/km)	Resistans(Ω /km)
0,6	5,49	102,8
1,2	2,75	51,5
Max	1	18,7

som:

$$R \approx 2\alpha\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.3)$$

Realistiske verdier for dempningskonstanten α beregnes ut i fra oppgitte spesifikasjoner om det aktuelle systemet og kjente egenskaper for kabler som vanligvis brukes i slike systemer [5]. I spesifikasjonene er det gitt at signalet som moduleres på kablene har en frekvens på $f = 132$ KHz, [1].

Det er mulig å bruke systemet for kabler med ulik tykkelse. Dette vil påvirke dempningskonstanten som igjen vil påvirke formen på transferfunksjonen. For en 0.6 mm telekabel er konstanten i ligning 2.8 funnet empirisk til $k = 15$. Konstanten vil halveres når tykkelsen på kabelen dobles. Dempningskonstantene som brukes til modelleringen er gitt i tabell 3.1,[4], sammen med tilhørende resistans R .

Fysiske målinger har ikke inngått som en del av denne oppgaven. Parameterverdiene som er brukt i denne oppgaven er derfor basert delvis på informasjon fra Autronics spesifikasjoner angående systemet, og delvis på antagelser ut fra hva som er vanlige verdier for parametere for vanligvis brukte kabler [4].

Parameterverdiene er valgt på bakgrunn av realistiske beregninger og for å tydeliggjøre egenskapene til systemet. Transferfunksjonene som utledes i dette kapittelet er derfor kun tilnærmet lik det som vil være tilfelle for de faktiske kablene som brukes. Endring av parameterne vil riktignok kunne endre funksjonene noe i forhold til signalnivå og form, men den overordnede formen på funksjonene og effekten av de forskjellige endringene som gjøres vil gi tilnærmet samme resultat.

3.2 Parametre i per-lengdeenhet-matriser

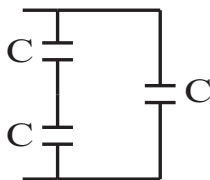
Dette avsnittet tar for seg beregningen av parametrene som inngår i per-lengdeenhet-matrisene som ble utledet i avsnitt 2.7.

3.2.1 Parametre for en kabel

Kapasitans

Som beskrevet i avsnitt 2.2 kan en enkel transmisjonslinje beskrives med primære kabelparametre, det vil si resistans R , kapasitans C og induktans L , per lengdeenhet. Primærparametrene ble beregnet i forrige avsnitt. For å modellere flerledersystemer beregnes det tilsvarende parametre for hver av lederne og koblingene mellom dem, som vist i figur 2.7. Disse parameterne vil være relatert til primærparametrene. I dette avsnittet beregnes først kapasitansene som inngår i per-lengdeenhet-kapasitansmatrisa for to avhengige ledere, deretter beregnes tilsvarende matrise for fire avhengige ledere.

Driftskapasitansen C_d som beskrevet i forrige avsnitt, kan brukes til å beregne kapasitansene som inngår i kapasitansmatrisa \tilde{C} for en kabel som består av en skjermet toleder. Et tverrsnitt for en slik kabel er vist i figur 2.8.



Figur 3.1: Forenklet krets ekvivalent med tverrsnittet til tolederkabelen

Som beskrevet i avsnitt 2.7 antas det at $C_0 = C_1 = C$. De to kapasitansene mellom lederne og skjermen står i en seriekobling og de er sammen koblet parallelt til kapasitansen mellom de to lederne som vist i figur 3.1. Dette gir følgende utregning for kapasitansen C som inngår i kapasitansmatrisa \tilde{C} vist i ligning 2.35.

$$\begin{aligned}
C_d &= \frac{C \cdot C}{2C} + C = \frac{3}{2}C \\
C &= \frac{2}{3} \cdot C_d
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Den samme kapasitansen C inngår i kabelen vist i figur 2.9.

Induktans

Induktansen \tilde{L} per lengdeenhet for en transmisjonslinje og tilhørende induktansmatrise \tilde{L} beregnes ved hjelp av ligning 2.40 som beskrevet i avsnitt 2.7.4.

$$\tilde{L} = \mu_0 \epsilon \tilde{C}^{-1}
\tag{3.5}$$

Resistans

Resistansen R_0 som inngår i resistansmatrisa \tilde{R} i ligning 2.41 kan beregnes fra resistansen R som ble funnet for gitte dempningskonstanter i tabell 3.1.

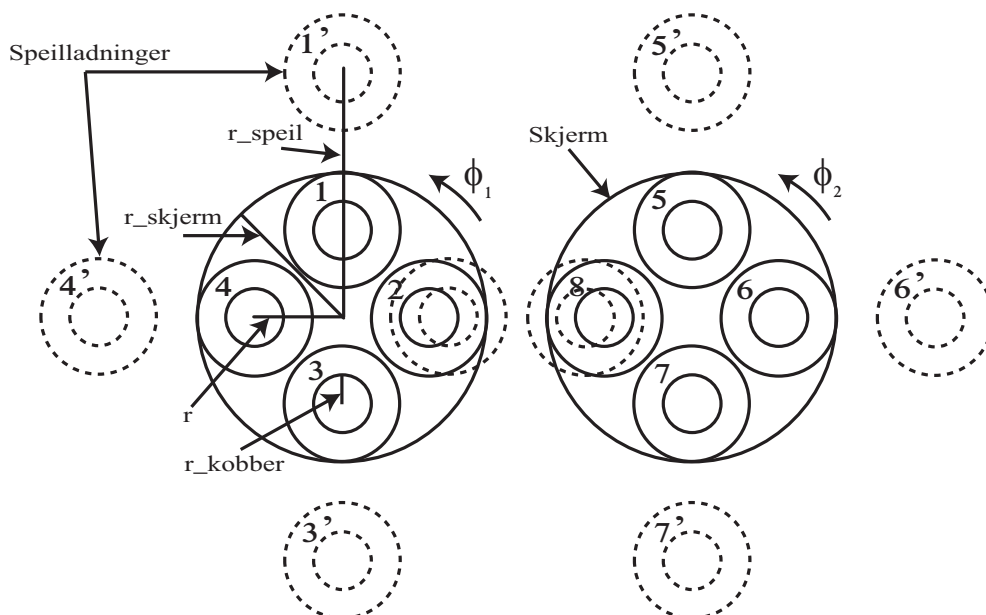
For å beregne den enkle transmisjonslinja med en resistansmatrise istedenfor en samlet resistans for hele transmisjonslinja må resistansen i hver leder finnes som vist i figur 2.7. Det vil si at totalresistansen R per lengdeenhet vil være lik resistansene R_0 som er koblet i parallell. Resistansen R_0 i en leder som inngår i resistansmatrisa er da gitt som halvparten av resistansen for den enkle transmisjonslinja.

$$\begin{aligned}
R &= R_0 || R_0 = \frac{R_0^2}{2 \cdot R_0} = \frac{R_0}{2} \\
R_0 &= \frac{R}{2}
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

3.2.2 Parametre for et system som består av to kabler

Induktans

Den endelige problemstillingen det ønskes å se på i denne oppgaven er hvor stor påvirkningen er fra en detektorsløyfe til en detektor som er festet på en nærliggende sløyfe. For dette tilfellet antas det at hver detektorsløyfe har en skjerm som er jordet i den ene enden slik at det ikke vil være noen kapasitanskobling mellom lederne i forskjellige sløyfer. Skjermen vil derimot ikke skjerme for induktive koblinger mellom lederne i forskjellige detektorsløyfer, det vil derfor være nødvendig å beregne en 8×8 -induktansmatrise hvor ingen av elementene er lik null. Tverrsnittet av to nærliggende detektorsløyfer er vist i figur 3.2.



Figur 3.2: Tverrsnitt av to kabler hvor lederne og tilhørende speilladninger er inntegnet.

Figuren viser tverrsnittet av to nærliggende kabler som hver består av fire ledere. For å beregne induktanser mellom ledere i skjermede kabler kan skjermen erstattes av speilladninger til hver av lederne. Dette er beskrevet i kapittel 9 i [7]. Speilladningene er vist som de stiplede sirklene i figur 3.2. Avstandene som inngår i figuren er beskrevet i tabell 3.2.

Tallverdiene som brukes er gitt i tabell 3.3. Det brukes relative verdier uten benevning da utregningen av kapasitanskoblingene mellom to ledere alltid

r	-	avstand fra midtpunkt i kabelen til leder
r_{kobber}	-	radius til kobberdelen av lederen
r_{skjerm}	-	radius til skjermen til kabelen
r_{speil}	-	avstand fra midtpunkt i kabelen til speilladning
$a_{\text{leder}_i\text{leder}_j}$	-	avstand mellom leder i og leder j
$a_{\text{leder}_i\text{skjerm}_j}$	-	avstand mellom leder i og skjerm j
$a_{\text{speil}_i\text{leder}_j}$	-	avstand mellom speilladning i og leder j
$a_{\text{speil}_i\text{skjerm}_j}$	-	avstand mellom speilladning i og skjerm j

Tabell 3.2: Avstandene som inngår i kabelverrsnittet

Tabell 3.3: Tallverdier for kabelverrsnitt

Strekning	Relativ lengde
r	1,41
r_{kobber}	0,5
r_{skjerm}	2,41
r_{speil}	4.12

medfører beregning av forholdet mellom to avstander. Benevnningen vil derfor være irrelevant, se ligningene 3.8 og 3.9.

Verdiene i tabell 3.3 er valgt ut fra sannsynlige verdier for typiske kabler [5]. Med denne modellen er lederne symmetrisk og tetttest mulig fordelt rundt midten av kabelen. Skjermen er plassert tetttest mulig inntil lederne. Dette gir en kabel som skissert i figur 3.2. Denne modellen er valgt fordi den er enkel og illustrer problemet. For å beregne krysstalen korrekt for en reell kabel, må verdiene tilpasses etter den faktiske kabelen som skal brukes i systemet.

Resten av avstandene vil variere avhenging av kablernes vridningsvinkler ϕ_1 og ϕ_2 , se figur 3.2. Radiusen r_{speil} er gitt av radius til skjermen og avstanden til lederne [7]. Utregningen er vist i ligning 3.7. Vinklene ϕ_1 og ϕ_2 står for vridningen av henholdsvis kabel 1 og kabel 2.

$$r_{\text{speil}} = \frac{(r_{\text{skjerm}})^2}{r} \quad (3.7)$$

Selvinduktans

Selvinduktansen er som beskrevet i teoridelen induktansen som induseres i en leder på grunn av strømmen som går i den samme lederen. I induktansmatrisa vil elementene på diagonalen være selvinduktansen til hver av lederne. På grunn av symmetrien i kabeltverrsnittet til kablene det ses på i denne oppgaven er selvinduktansen til alle lederne like. Selvinduktansen kan beregnes som vist i ligning 3.8 ved hjelp av avstandene definert tidligere.

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{a_{leder_i_skjerm_i}}{a_{kobber}} + \ln \frac{a_{speil_i_leder_i}}{a_{speil_i_skjerm_i}} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{r_{skjerm}^2 - r^2}{r_{kobber} \cdot r_{skjerm}} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Gjensidig induktans

Den gjensidige induktansen er definert som induktansen som oppstår i en leder på grunn av at strømmen i en annen leder fører til at det blir et magnetfelt rundt lederen. På grunn av symmetrien i tverrsnittet til kabelen det ses på her vil en del av de gjensidige induktansene mellom lederne innen en kabel være like. For eksempel er det slik at $L_{ij} = L_{ji}$ for ledere innen en kabel.

For de gjensidige induktansene mellom ledere i to forskjellige kabler vil noen av elementene være like, avhengige av kablens vridning i forhold til hverandre.

De gjensidige induktansene beregnes som vist i ligning 3.9.

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{a_{leder_i_skjerm_j}}{a_{leder_i_leder_j}} + \ln \frac{a_{speil_i_leder_j}}{a_{speil_i_skjerm_j}} \right) \quad (3.9)$$

Slik kablene ligger i kabelgatene kan det tenkes flere måter de kan være vridt i forhold til hverandre og det er uklart hvilke vridninger som vil føre til mest krysstale. Endrede vridningsvinkler vil føre til at avstandene som inngår i ligning 3.9 også endres. Det vil derfor være hensiktsmessig å kunne beregne avstandene for gjensidig induktans gitt av vridningsvinkelen for hver kabel. I denne oppgaven har dette blitt gjort ved hjelp av et Matlab-skript vedlagt elektronisk ved innlevering av oppgaven.

Kapasitans og resistans

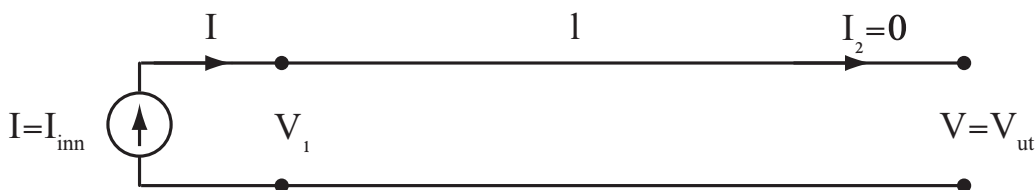
For tilfellet med to kabler beregnes kapasitansmatrisa \tilde{C} ut fra induktansmatrisa som beskrevet i avsnitt 2.7 og gitt i ligning 2.39.

Resistansen R_0 som inngår i per-lengdeenhet-resistansmatrisa for systemet som består av to kabler vil være den samme som for systemet som består av en kabel. Resistansmatrisa til dette systemet blir derfor en 8×8 -matrise som vist i ligning 2.41.

3.3 Enkel transmisjonslinje

3.3.1 Modellering av enkel transmisjonslinje

For å forenkle analysen ses det først på et tilfelle med en enkel transmisjonslinje som vist i figur 3.3.



Figur 3.3: Enkel transmisjonslinje

Ved å bruke transmisjonslinjeteorien beskrevet i avsnitt 2.1 vil ligningene for den enkle transmisjonslinja på matriseform være lik ligning 2.17, hvor l er lik lengden av transmisjonslinja.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{\sinh \gamma l}{Z_0} & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Transferfunksjonen til linja finnes ved å bruke ligning 2.18, se tillegg A.2.

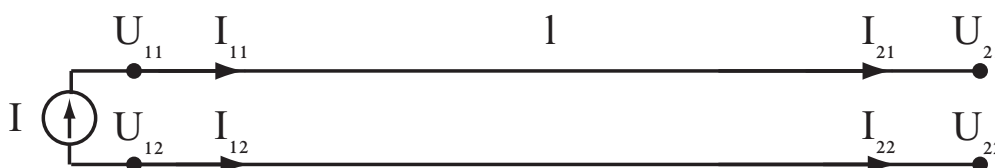
$$\boxed{Z_{tr} = \frac{Z_0}{\sinh \gamma l}} \quad (3.11)$$

3.4 Enkel transmisjonslinje med matriser

Modellering av den enkle transmisjonslinja er beskrevet i kapittel 3.3. Ved å bruke teorien beskrevet i [3] og [7] kan den samme linja beskrives ved hjelp av matriser og vektorer. Matrisene for dette ble utledet i avsnitt 2.7. Selv om dette ikke er nødvendig å gjøre for å modellere en kabel som består av en toleder er det nyttig å definere hvordan dette kan gjøres i det enkleste tilfelle først. Det gir også mulighet for sammenligning slik at det kan kontrolleres at modellen er riktig.

3.4.1 Enkel transmisjonslinje med A-matrise for to ledere

For å kunne beskrive transmisjonslinja med matriser defineres strøm og spenning som vist i figur 3.4.



Figur 3.4: Enkel transmisjonslinje definert med vektorer

Ut i fra strømmene og spenningene i figuren kan det defineres vektorer som vist i ligningen under.

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} & \vec{U}_2 &= \begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} \\ \vec{I}_1 &= \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{12} \end{bmatrix} & \vec{I}_2 &= \begin{bmatrix} I_{21} \\ I_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Transmisjonslinja kan da beskrives med følgende ligning:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

\tilde{A} er gitt av ligning 2.22 hvor $\tilde{\Gamma}$ er beregnet med matrisene \tilde{C} , \tilde{L} og \tilde{R} for to ledere som beskrevet i avsnitt 2.7. En transferfunksjon kan da utledes og vil som tidligere være gitt av forholdet mellom utgangsspenning og inngangsstrøm.

$$H_{tr} = \frac{U_{21} - U_{22}}{I} \quad (3.14)$$

Utledning av transferfunksjonen er gitt i tillegg A.3.

Transferfunksjonen i ligning 3.11 er beregnet ved hjelp av skalare sekundærparametre. Hvis sekundærparametrene γ og Z_0 beregnes ved hjelp av sekundærparametre for en transmisjonslinje, det vil si L , C og R vist i figur 2.2, og ligningene 2.4 og 2.5 kan denne sammenlignes med transferfunksjonen i ligning 3.14. Hvis funksjonene er tilnærmet like er dette en god indikasjon på at modellering med matriser gir et riktig resultat, det vil si at per-lengdeenhetmatrisene med tilhørende parametre er beregnet riktig.

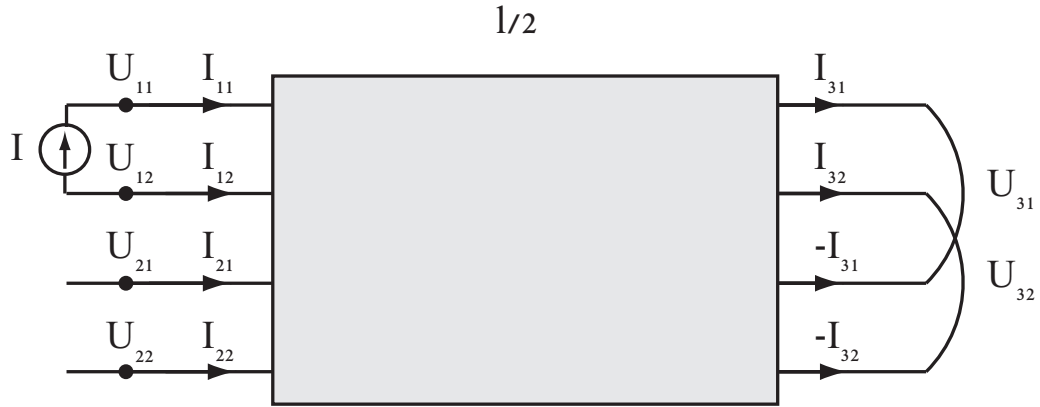
3.4.2 Enkel transmisjonslinje med A-matrise for fire ledere

Den enkle transmisjonslinja kan også modelleres ved hjelp av en 8×8 A-matrise. Det gjøres ved å se på fire parallelle ledere hvor to og to kobles sammen ved endene som vist i figur 3.5. For å kunne sammenligne med den enkle transmisjonslinja må det være slik at bare to og to av lederne er avhengige av hverandre, slik at kapasitansmatrisa \tilde{C} blir som i ligning 2.36. Hvis lengden av lederne settes til å være halvparten så lange for 8×8 A-matrisa som for utledningen med 4×4 A-matrise vil transferfunksjonene som utledes for hvert av tilfellene være like.

Systemet kan da beskrives med følgende ligning:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \\ -\vec{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Videre defineres følgende vektorer:



Figur 3.5: Enkel transmisjonslinje med fire ledere

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ -\vec{I}_2 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Følgende sammenhenger kan settes opp:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \tilde{C} \cdot \vec{V}_3 \\ \vec{V}_2 &= \tilde{D} \cdot \vec{V}_3 \\ \vec{V}_1 &= \tilde{C} \cdot \tilde{D}_{-1} \cdot \vec{V}_2 = \tilde{E} \cdot \vec{V}_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \vec{I}_1 = \tilde{E}_{21} \cdot \vec{U}_2 \\ \vec{U}_2 &= \tilde{F} \cdot \vec{I} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Matrisa \tilde{E} vil tilsvare matrisa \tilde{A} beregnet i avsnitt 3.4.1 og elementene i disse matrisene bør være tilnærmet like ved beregning med tallverdier.

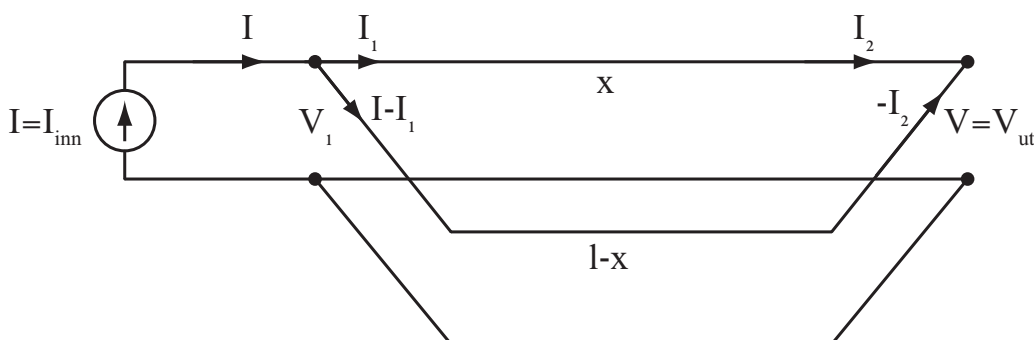
Transferfunksjonen vil som tidligere være gitt av forholdet mellom spenningen på utgangen og inngangsstrømmen. Fullstendig beregning av denne transferfunksjonen er gitt i tillegg A.4.

$$H_{tr} = \frac{U_{21} - U_{22}}{I} \quad (3.19)$$

3.5 Detektorsløyfe

3.5.1 Modellering av detektorsløyfe

Systemet består som beskrevet i kapittel 1 av en detektorsløyfe som vist i figur 3.6. Beregningen av transferfunksjonen for detektorsløyfe er gitt i [4] og i tillegg A.5.



Figur 3.6: Detektorsløyfe

For å analysere dette systemet, deles sløyfa opp i to deler. Dette resulterer i to a-matriser, en for lengden x og en for den lengden $l - x$, henholdsvis \tilde{a} og \tilde{b} . Lengden l er total lengden av sløyfa, mens x representerer posisjonen langs sløyfa. Dette gir følgende sammenhenger:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \tilde{a} \begin{bmatrix} V \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I - I_1 \end{bmatrix} = \tilde{b} \begin{bmatrix} V \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Matrisa \tilde{a} blir den samme som for den enkle transmisjonslinja. Matrisa \tilde{b} , fås ved å sette inn $l - x$ for x i \tilde{a} .

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & Z_0 \sinh \gamma x \\ Z_0^{-1} \sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(l - x) & Z_0 \sinh \gamma(l - x) \\ Z_0^{-1} \sinh \gamma(l - x) & \cosh \gamma(l - x) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

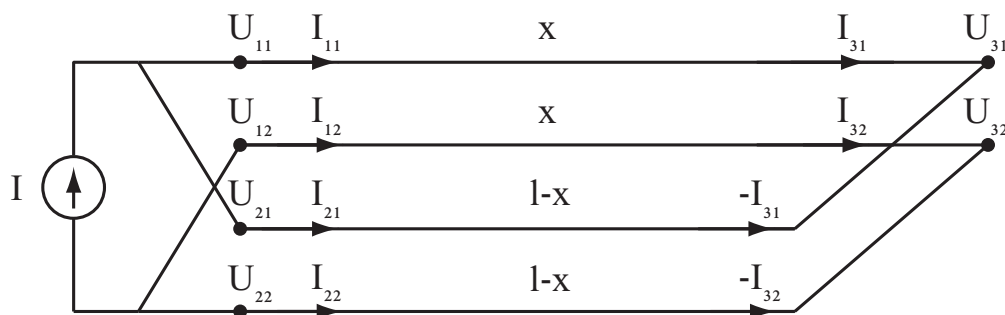
Transferfunksjonen for sløyfa kan nå finnes ved å skrive ut ligninger fra uttrykkene over og finne uttrykk for spenningen på utgangen V_{ut} og strømmen på inngangen I_{inn} . Utledningen av transferfunksjonen er vist i tillegg A.5.

$$Z_{tr} = \frac{Z_0}{2} \cdot \frac{\cosh \gamma(\frac{l}{2} - x)}{\sinh \frac{\gamma l}{2}} \quad (3.24)$$

3.6 Detektorsløyfe med matriser

3.6.1 Detektorsløyfe med A-matriser for to ledere

På samme måte som for den enkle transmisjonslinja kan også detektorsløyfa beskrives ved hjelp av vektorer og matriser. Strøm og spenning defineres som vist i figur 3.7.



Figur 3.7: Detektorsløyfe definert med vektorer

Ut fra figuren kan det defineres to ligninger:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ -\vec{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Matrisene \tilde{A} og \tilde{B} beregnes med per-lengdeenhet-matrisene for to ledere, hvor l er totallengden og x er posisjonen langs sløyfa.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh l \tilde{\Gamma} & \sinh l \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \cosh (l-x) \tilde{\Gamma} & \sinh (l-x) \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Følgende sammenhenger kan settes opp for systemet:

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \vec{U}_2 \\ \vec{I} &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \\ \vec{I} &= I_{11} + I_{21} = -(I_{12} + I_{22}) \\ \vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

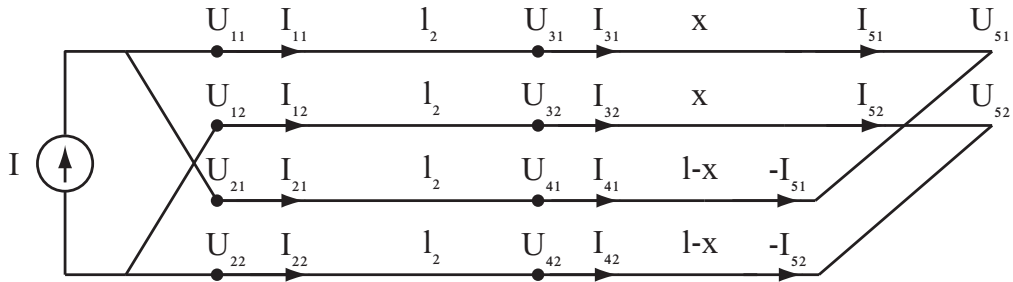
Ved hjelp av sammenhengene over kan transferfunksjonen for detektorsløyfa utledes fra ligningene 3.26. Transferfunksjonen for detektorsløyfa vil da være gitt av ligningen under. Utregning er vedlagt i tillegg A.6.

$$H_{tr} = \frac{U_{31} - U_{32}}{I} \quad (3.30)$$

På samme måte som for den enkle transmisjonslinja kan transferfunksjonen for detektorsløyfa beregnet med skalare parametre sammenlignes med transferfunksjonen for detektorsløyfa beregnet med matriser. Hvis transferfunksjonene er tilnærmet like vil det være en indikasjon på at matrisene er modellert riktig.

3.6.2 Detektorsløyfe med A-matrise for fire ledere

Detektorsløyfa kan også modelleres ved å bruke ei A-matrise for fire ledere. Systemet vist i figur 3.8 består av en rett lengde l_2 hvor de fire lederne ligger ved siden av hverandre koblet sammen med en sløyfe av lengde l .



Figur 3.8: Detektorsløyfe med en felles strekning l_2 hvor fire ledere ligger ved siden av hverandre

Dette systemet kan modelleres ved å bruke tre A-matriser.

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{U}_4 \\ \vec{I}_3 \\ \vec{I}_4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} = \tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{I}_5 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_4 \\ \vec{I}_4 \end{bmatrix} = \tilde{C} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ -\vec{I}_5 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Hvor \tilde{A} , \tilde{B} og \tilde{C} er gitt som følger:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh l_2 \tilde{\Gamma} & \sinh l_2 \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l_2 \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l_2 \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Hvis transferfunksjonen for detektorsløyfa beregnet ut fra denne modellen skal sammenlignes med transferfunksjonene som har blitt utledet tidligere i dette kapitlet, må \tilde{A} beregnes ut fra per-lengdeenhet-matrisene for fire ledere hvor bare to og to ledere er avhengige av hverandre.

For kablene som inngår i det aktuelle systemet vil alle de fire lederne som inngår i detektorsløyfa påvirke hverandre over strekningen de ligger ved siden av hverandre, l_2 . \tilde{A} beregnes da ved hjelp av per-lengdeenhet-matriser for fire avhengige ledere.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \cosh x \tilde{\Gamma} & \sinh x \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh x \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh x \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \cosh (l-x) \tilde{\Gamma} & \sinh (l-x) \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

\tilde{B} og \tilde{C} beregnes ut fra per-lengdeenhet-matrisene for to ledere.

Sammenhengene i ligning 3.29 vil også gjelde for dette systemet. Ved hjelp av dette og omskrivninger av matrisene over fås to nye matriser:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \tilde{D} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{I}_5 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{E} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ -\vec{I}_5 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Ut fra dette kan det settes opp en transferfunksjon for systemet, utledet i tillegg A.7

$$H_{tr} = \frac{U_{51} - U_{52}}{I} \quad (3.39)$$

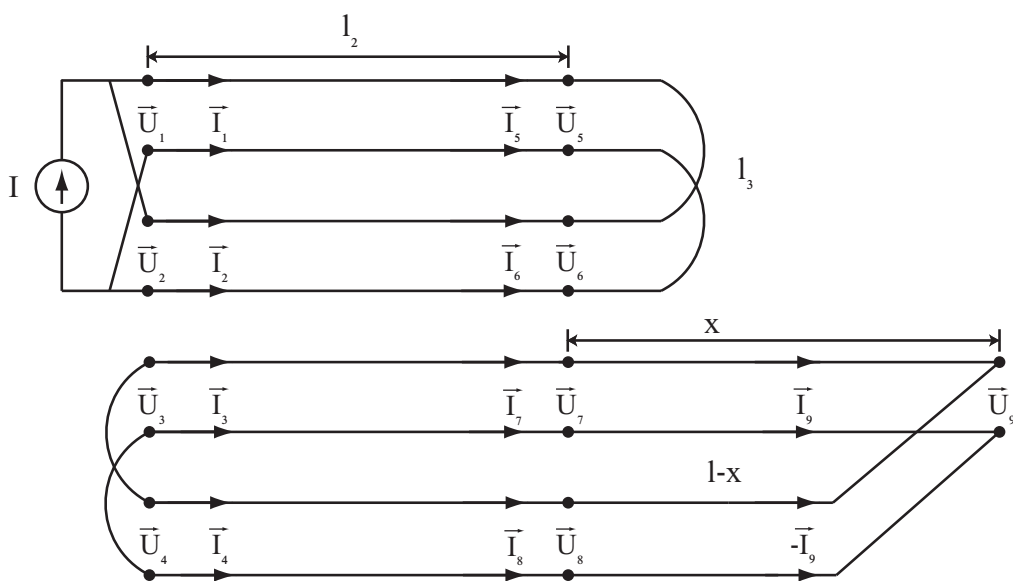
Transferfunksjonen kan sammenlignes med transferfunksjonen beregnet for detektorsløyfa i avsnitt 3.6.1, ved at det settes inn $l_2 + x$ for x i \tilde{A} og $l_2 + l - x$ for $l - x$ i \tilde{B} . Matrisene \tilde{D} og \tilde{E} tilsvarer da matrisene \tilde{A} og \tilde{B} i avsnitt 3.6.1.

3.7 To detektorsløyfer

3.7.1 Fullstendig modell

Figur 3.9 viser et system som består av to detektorsløyfer som hver består av fire ledere. Detektorsløyfene vil ligge ved siden av hverandre en strekning l_2 som vist i figuren. For denne lengden vil lederne i hver sløyfe ligge i hver sin skjermede kabel. Sløyfene vil så spres ut dit hvor detektorene skal være. Dette er lengdene l og l_3 i figuren. Her vil det altså i utgangspunktet bare være to og to ledere som ligger ved siden av hverandre slik at de kan påvirke hverandre.

For å bestemme hvor stor påvirkningen mellom detektorsløyfene er, ses det på en konfigurasjon hvor det påtrykkes et signal på den øverste detektorsløyfa. Det kan da defineres en transferfunksjon H_{tr} som er gitt av utgangsspenningen på den nederste sløyfa delt på inngangsstrømmen til den øverste sløyfa.



Figur 3.9: To detektorsløyfer som ligger ved siden av hverandre

For systemet vist i figur 3.9 kan følgende sammenhenger settes opp:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \\ \vec{U}_4 \\ \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \\ \vec{I}_4 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{U}_6 \\ \vec{U}_7 \\ \vec{U}_8 \\ \vec{I}_5 \\ \vec{I}_6 \\ \vec{I}_7 \\ \vec{I}_8 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

\tilde{A} er en 16×16 A-matrissa som gitt i ligning 2.46 innsatt $l = l_2$. Matrissa beregnes ut fra per-lengdeenhet-matrisene for åtte ledere utledet i avsnitt 2.7.

Det kan settes opp følgende sammenhenger mellom vektorene i systemet:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{I}_5 \end{bmatrix} = \tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_6 \\ -\vec{I}_6 \end{bmatrix} = \tilde{B}' \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_6 \\ \vec{I}_6 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_7 \\ \vec{I}_7 \end{bmatrix} = \tilde{C} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_9 \\ \vec{I}_9 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_8 \\ \vec{I}_8 \end{bmatrix} = \tilde{D} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_9 \\ -\vec{I}_9 \end{bmatrix} = \tilde{D}' \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_9 \\ \vec{I}_9 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

\tilde{B} , \tilde{C} og \tilde{D} er alle 4×4 -matriser som er gitt av A-matrissa i ligning 2.46 innsatt henholdsvis $l = l_3$, $l = x$ og $l = l - x$. Matrisene er beregnet ut fra per-lengdeenhet-matrisene for to ledere utledet i avsnitt 2.7.

Definerer så noen nye vektorer:

$$V_i = \begin{bmatrix} \vec{U}_i \\ \vec{I}_i \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Kan da sette opp en ny sammenheng, hvor elementene i matrissa \tilde{A}' er en omordning av elementene i \tilde{A} .

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \tilde{A}' \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_5 \\ \vec{V}_6 \\ \vec{V}_7 \\ \vec{V}_8 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Ved å bruke sammenhengene i 3.41, 3.42 og 3.43 kan 3.45 uttrykkes slik:

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \tilde{A}' \cdot \begin{bmatrix} \tilde{B}'\vec{V}_6 \\ \vec{V}_6 \\ \tilde{C}'\vec{V}_9 \\ \tilde{D}'\vec{V}_9 \end{bmatrix} = \tilde{E} \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_6 \\ \vec{V}_9 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Matrisa \tilde{E} består av noen av elementene i matrisa \tilde{A}' multiplisert med matrisene \tilde{B}' , \tilde{C}' og \tilde{D}' .

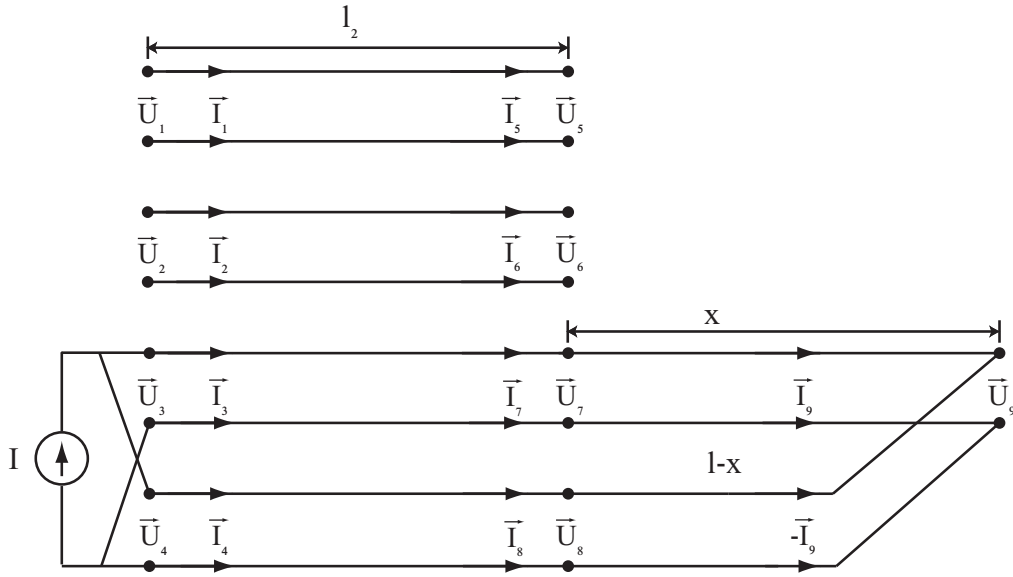
Transferfunksjonen for systemet kan da finnes som vist i ligningen under. Fullstendig utregning er gitt i tillegg A.8.

$$H_{tr} = \frac{U_{91} - U_{92}}{I} \quad (3.47)$$

3.7.2 Beregning av en detektorsløyfe med fullstendig modell

Utleddningen av den fullstendige modellen består av mange operasjoner og det er normalt at det oppstår feil i beregningene. Det er derfor nyttig å kunne sammenligne deler av modellen med tidligere modeller som blir ansett som å være riktige.

Transferfunksjonene for detektorsløyfa ble utledet i avsnitt 3.6. Den samme detektorsløyfa kan modelleres med systemet i figur 3.9 hvis et signal påtrykkes på den nederste sløyfa istedenfor den øverste, og A-matrisa for fellesstrekningen l_2 beregnes med per-lengdeenhetsmatriser hvor det ikke er avhengighet mellom lederne i forskjellige kabler. Modellering med en detektorsløyfe nederst er vist i figur 3.10.



Figur 3.10: Fullstendig modell med detektorsløyfe nederst

A-matrisene for dette tilfellet vil defineres på samme måte som for den fullstendige modellen men siden det ikke er noen induktanskobling mellom de to detektorsløyfene blir en del av elementene i \tilde{A}' lik null. Som tidligere vil transferfunksjonen defineres som utgangsspenning på inngangsstrøm og derfor ses det bare på hvordan vektorene \vec{V}_3 og \vec{V}_4 er relatert til \vec{V}_7 og \vec{V}_8 . Følgende ligninger kan da settes opp for systemet.

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{33} & A'_{34} \\ A'_{43} & A'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_7 \\ \vec{V}_8 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_3 &= \vec{U}_4 \\ \vec{I} &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \\ \vec{I} &= \vec{I}_3 + \vec{I}_4 \end{aligned} \quad (3.49)$$

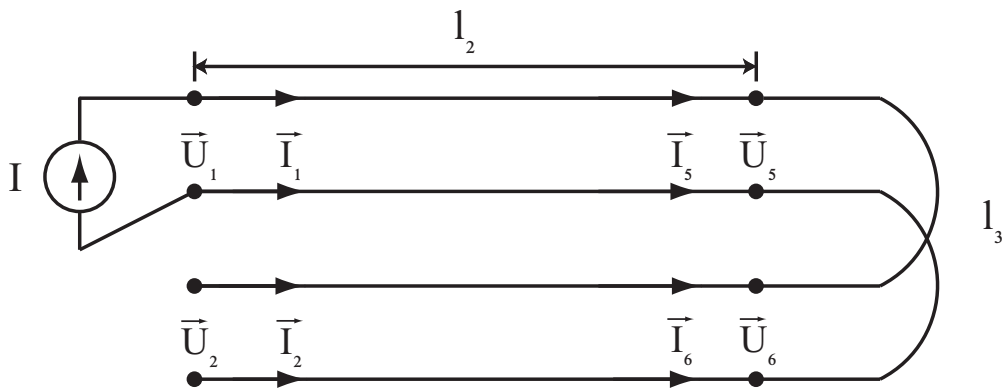
Transferfunksjonen beregnes ut fra dette som vist under, se tillegg A.9 for utledning.

$$H_{tr} = \frac{U_{91} - U_{92}}{I} \quad (3.50)$$

Tilsvarende utregninger kan gjøres for å beregne en transferfunksjon for en detektorsløyfe øverst.

3.7.3 Enkel transmisjonslinje med fullstendig modell

Det vil også være mulig å modellere en enkel transmisjonslinje ut fra den fullstendige modellen, ved å påtrykke et signal på to av lederne og koble lederne sammen i enden som vist i figur 3.11.



Figur 3.11: Enkel transmisjonslinje med fullstendig modell

A-matrisa må i dette tilfellet beregnes ut fra per-lengdeenhet-matriser hvor bare to og to av lederne er avhengige av hverandre for at transferfunksjonen skal kunne sammenlignes med transferfunksjonen for den enkle transmisjonslinja beregnet med skalare parametre. Også her blir en del av elementene lik null og følgende sammenheng kan settes opp:

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_5 \\ \vec{V}_6 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Følgende vil også gjelde:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 \quad (3.52)$$

$$\vec{I}_2 = 0 \quad (3.53)$$

Transferfunksjonen vil da være gitt som:

$$H_{tr} = \frac{U_{21} - U_{22}}{I} \quad (3.54)$$

Se tillegg A.10 for fullstendig utledning.

Strømkilden kan også kobles til leder 3 og 4, 5 og 6 eller 7 og 8 og det kan finnes tilsvarende transferfunksjoner for disse tilfellene.

Kapittel 4

Resultater

I dette kapittelet presenteres grafiske framstillinger av transferfunksjonene som ble utledet i kapittel 3. Først vises transferfunksjoner for en enkel transmisjonslinje og hvordan den blir påvirket av kabelens dempning. Deretter presenteres detektorsløyfa for ulike kabellengder og dempning.

For både den enkle transmisjonslinja og detektorsløyfa blir transferfunksjonene beregnet med skalare parametre og med matriser plottet for å vise at disse er like.

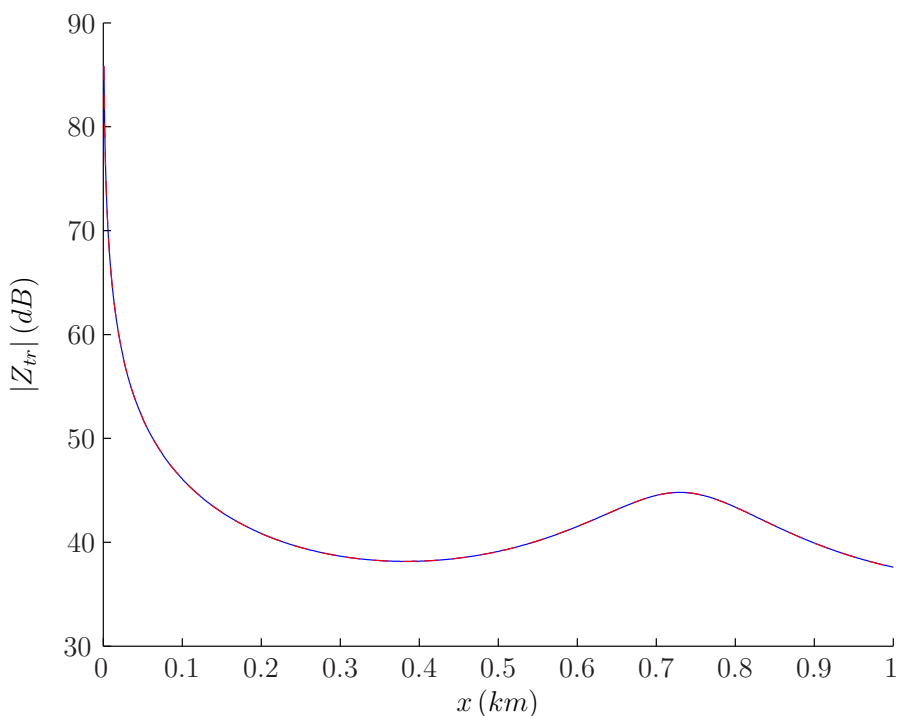
Videre presenteres figurer som viser transferfunksjonen til den fullstendige modellen. Figurene viser hvordan vridning av kablene, kabellengden og kabeldempningen påvirker transferfunksjonen. Transferfunksjonen for forstyrret sløyfe sammenlignes med transferfunksjonen for upåvirket detektorsløyfe.

Alle figurene i denne rapporten er generert med programmet Matlab, versjon 7.0. Matlab-koden som generer figurene er vedlagt elektronisk ved innlevering av rapporten. På grunn av at transferfunksjonene er komplekse funksjoner plottes amplituderresponsen, det vil si absoluttverdien av funksjonene. Amplituderresponsen viser signalnivået til de forskjellige kabelsystemene, som er interessant med hensyn på variasjonene i signalnivå. Alle funksjonene er plottet i desibel.

For det fullstendige systemet vil lengden på fellesstrekningen være mellom 0,1 og 0,3 km lang, mens lengden på detektorsløyfa vil være på mellom 0,1 og 0,2 km lang [1]. For transferfunksjonen for den enkle transmisjonslinja og detektorsløyfa er det valgt å plote funksjonen for kabellengder på 1 og 2 km fordi dette illustrerer hvilke variasjoner som kan oppstå bedre.

4.1 Enkel transmisjonslinje

Transferfunksjonen til transmisjonslinja er vist som den blå kurven i figur 4.1. Transferfunksjonen viser signalnivået til signalet som blir overført på kabelen som en funksjon av posisjonen langs linja, her for en kabellengde på opptil 1 km. Dempningskonstanten er valgt til 5,49 dB/km. Figuren viser at signalnivået varierer mye langs lengden på linja.



Figur 4.1: Transferfunksjon for enkel transmisjonslinje. Blå linje: Enkel transmisjonslinje med skalare parametre. Rød stiplet linje: Enkel transmisjonslinje med matriser.

Den blå linja i figuren viser transferfunksjon beregnet med sekundærparametre utledet i avsnitt 3.3. Den samme transferfunksjonen beregnet med per-lengdeenhet-matriser for to ledere utledet i avsnitt 3.4 er plottet med en stiplet rød linje.

Transferfunksjonen beregnet med karakteristisk impedans Z_0 og propagasjonskonstanten γ beregnes ut fra primærparameterne til en transmisjonslinje som beskrevet i avsnitt 3.1. Funksjonen kan derfor sammenlignes med transferfunksjonen beregnet med matriser.

Som figuren viser ligger funksjonene oppå hverandre, noe som viser at transferfunksjonene er svært like. Maksimalt avvik mellom de to er beregnet i Matlab til $3,6 \cdot 10^{-14}$. Dette viser at beregningen ved hjelp av matriser er ekvivalent med tidligere beregninger og at matrisene er beregnet på en riktig måte.

Som beskrevet i avsnitt 3.4.2 kan transferfunksjonen for en enkel transmisjonslinje også beregnes ved hjelp av per-lengdeenhet-matriser for fire ledere, ved at to og to ledere er koblet sammen. Da vil det kunne beregnes en matrise \tilde{E} for systemet som består av fire ledere som tilsvarer A-matrisa til den enkle transmisjonslinja.

Beregninger i Matlab gir at A-matrisa beregnet for systemet med to ledere og E-matrisa beregnet for systemet med fire ledere har største avvik mellom to elementer på $9,6 \cdot 10^{-13}$ og største avvik mellom de beregnede transferfunksjonene er på $3,6 \cdot 10^{-14}$. Dette viser at disse transferfunksjonene også er tilnærmet like. Dette tyder på at modellen med per-lengdeenhet-matriser for fire ledere gir et riktig resultat.

4.1.1 Dempningskonstanter for enkel transmisjonslinje

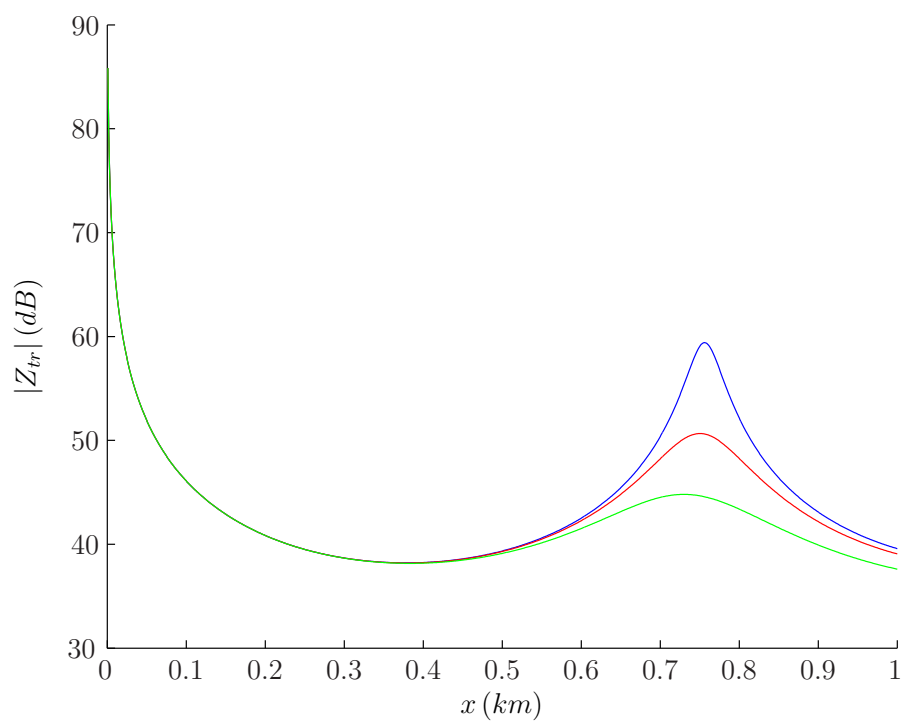
Transferfunksjonen til en transmisjonslinje er som vist tidligere gitt av linjas lengde l og propagasjonskonstanten γ . Propagasjonskonstanten er gitt av dempningskonstanten α og fasekonstanten β . Dempningskonstanten angir hvor mye kablen dempes per lengdeenhet og vil påvirke hvordan transferfunksjonen ser ut sammen med kabelens lengde.

Fasekonstanten vil også ha innvirkning på transferfunksjonen, men i denne oppgaven antas det at fasekonstanten er den samme for alle de aktuelle kablene, som beregnet i avsnitt 3.1.

For en enkel transmisjonslinje er transferfunksjoner for forskjellige dempningskonstanter vist i figur 4.2. Verdiene til α er valgt ut i fra spesifikasjonene til vanlige kabler som beskrevet i avsnitt 3.1 og er gitt i tabell 3.1.

Figuren viser at økt dempning på kablen jevner ut transferfunksjonen ved at den faller noe i signalnivå for de høyeste toppene, samtidig som toppen avrundes. Økt dempning gjør altså at funksjonen får en jevnere karakteristikk, den gjør variasjonene i signalnivå mindre.

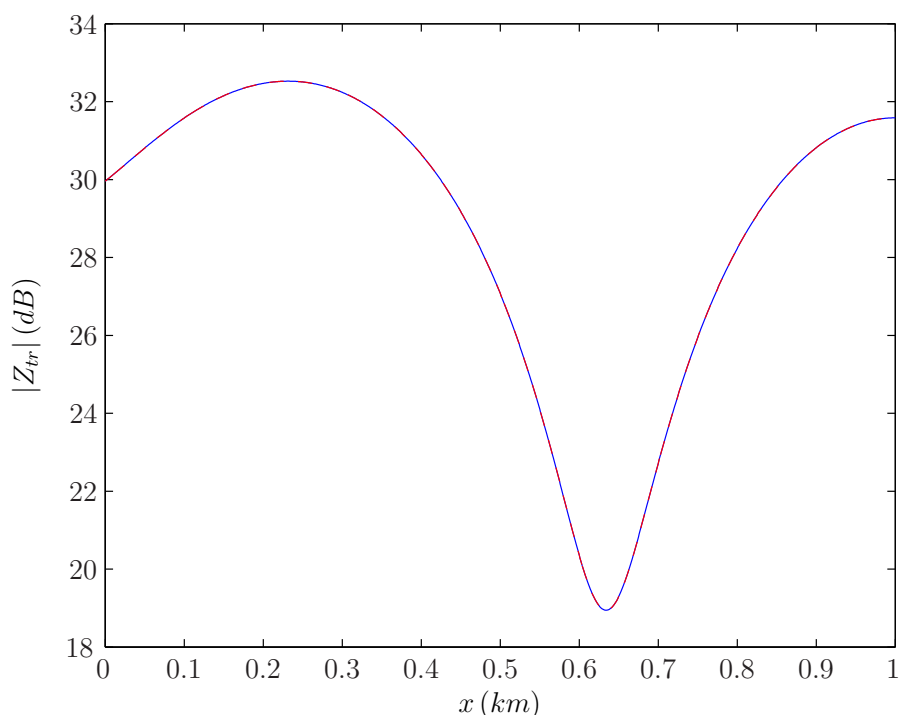
Som diskutert tidligere i oppgaven er det mest gunstig at transferfunksjonen har en jevnest mulig form. I dette avsnittet har det blitt vist at den jevneste funksjonen ble oppnådd for den største kabledempningen.



Figur 4.2: Transferfunksjon med forskjellig kabeldempning for enkel transmissjonslinje. Blå linje: $\alpha = 1$ dB/km. Rød linje: $\alpha = 2,75$ dB/km. Grønn linje: $\alpha = 5,49$ dB/km.

4.2 Detektorsløyfe

På samme måte som for den enkle transmisjonslinja kan transferfunksjonen for detektorsløyfa beregnes både ved hjelp av skalare parametre som vist i avsnitt 3.5 og per-lengdeenhet-matriser som vist i avsnitt 3.6. Transferfunksjonene er vist i figur 4.3. Funksjonene er beregnet med en kabellengde på 2 km og og dempningskonstant på 5,49 dB/km. Siden funksjonene er symmetriske om halvparten av kabellengden plottes transferfunksjonene for detektorsløyfa fra 0 til 1 km.



Figur 4.3: Transferfunksjon til detektorsløyfa. Blå linje: transferfunksjon beregnet med skalare parametre. Rød stiplet linje: transferfunksjon beregnet med matriser.

Transferfunksjonen beregnet med skalare parametre er plottet med en blå linje, mens transferfunksjonen beregnet med matriser er plottet som en rød stiplet linje. Figuren viser at funksjonene er svært like, noe som viser at modellering ved hjelp av matriser gir et riktig resultat i forhold til metoden som er brukt tidligere. Maksimalt avvik mellom de to er beregnet i Matlab til $4,6 \cdot 10^{-14}$.

I kapittel 3 beregnes det også en transferfunksjon for detektorsløyfa ved hjelp

av per-lengdeenhet-matriser for fire ledere. Hvis matrisene beregnes som to uavhengige toledere kan transferfunksjonene sammenlignes med transferfunksjonene som har blitt beregnet for detektorsløyfa tidligere. Som beskrevet i avsnitt 3.6.2 beregnes to matriser som tilsvarende A-matrisene som beregnes for to ledere. I Matlab beregnes maksimalt avvik mellom to elementer i matrisene til å være på $7,7 \cdot 10^{-13}$ og $8,5 \cdot 10^{-13}$. Maksimalt avvik mellom de to transferfunksjonene beregnes til $8,5 \cdot 10^{-14}$. Dette viser at funksjonene så og si er like og at modellen med per-lengdeenhet-matriser gir et riktig resultat.

Systemet det ses på i denne oppgaven vil bestå av detektorsløyfer som delvis ligger ved siden av hverandre en strekning. For et slik system vil alle de fire lederne være avhengige av hverandre. For å beregne transferfunksjonen for detektorsløyfa brukes det da per-lengdeenhet-matriser for fire avhengige ledere. Transferfunksjonene for detektorsløyfa vil da ha samme form som funksjonen beregnet for detektorsløyfa tidligere, men et lavere signalnivå. Signalnivået dempes mer jo lenger strekningen lederne ligger ved siden av hverandre er. Denne transferfunksjonen er ikke plottet i dette avsnittet, men er vist sammen med transferfunksjonen for overhøringen mellom to sløyfer i avsnitt 4.3.2.

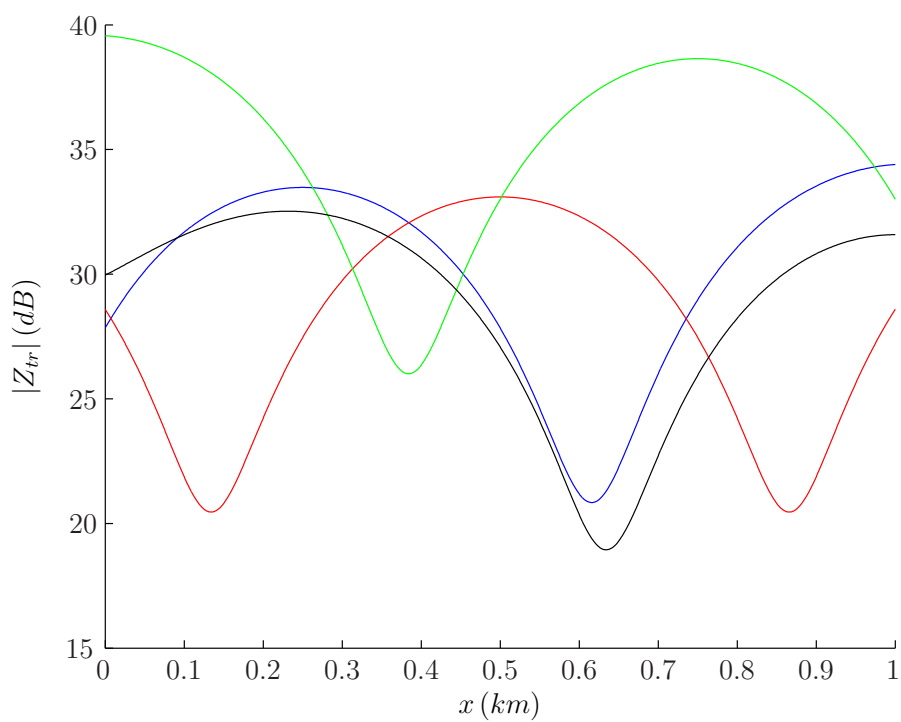
4.2.1 Forskjellige kabellengder for detektorsløyfe

I figur 4.4 er transferfunksjonen til detektorsløyfa plottet for forskjellige kabellengder. Figuren viser at alle funksjonene varierer mye i signalnivå. Forskjellen mellom høyeste og laveste signalnivå er på ca. 13 dB for alle funksjonene.

Erfaringer ved bruk av deteksjonssystemet i praksis viser at det oppstår problemer med krysstale. Modellering av detektorsløyfa viser at signalene på sløyfene varierer mye i nivå. Dette gjør at signalene er sårbare for interferens. Modelleringen viser derfor at detektorsløyfenes egenskaper kan være noe av grunnen til at det oppstår krysstaleproblemer.

Kabelen med lengde på 2 km har det gjennomsnittlig laveste signalnivået. Kablene med lengde 500 m og 1 km ligger noe høyere i gjennomsnittlig signalnivå, og funksjonen for lengde 1,5 km er den som ligger høyest i signalnivå. Figuren viser at en detektorsløyfe med lengde på 2 km vil være veldig sårbar for interferens fra andre kabler, mens en sløyfe på 1,5 km vil være noe mer robust, selv om denne også vil kunne bli påvirket.

Figur 4.4 illustrerer noe av problemet med systemet, som beskrevet i kapittel 2, siden systemet består av detektorsløyfer som ligger ved siden av hverandre i de samme kabelgatene. På grunn av de store variasjonene i signalnivå vil



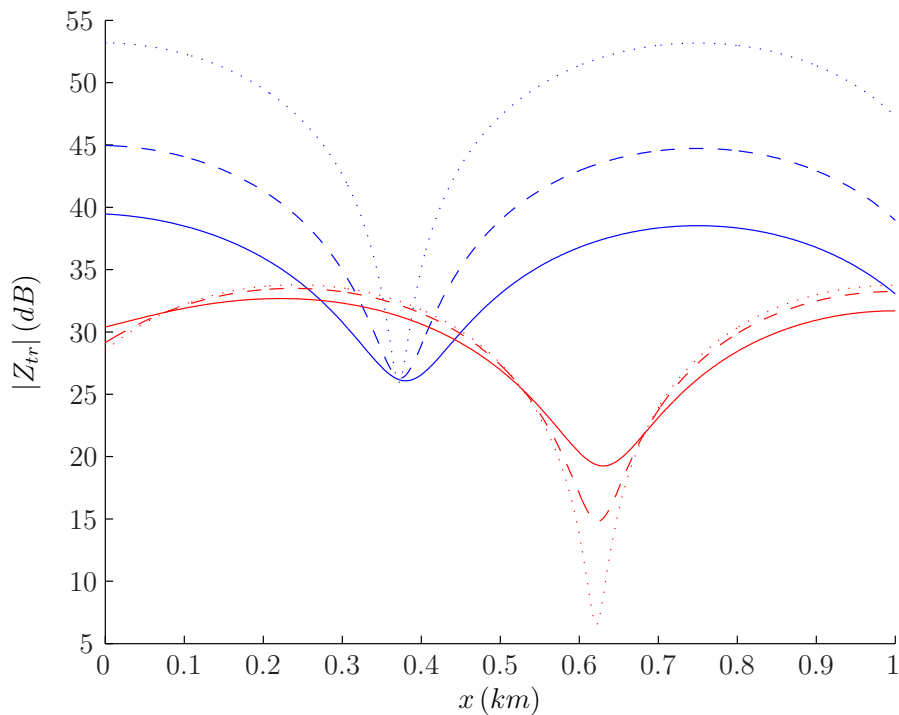
Figur 4.4: Transferfunksjon for forskjellige kabellengder l av detektorløyfa. Blå linje: $l = 0,5$ km. Rød linje: $l = 1$ km. Grønn linje: $l = 1,5$ km. Svart linje: $l = 2$ km.

kablene interfererer med hverandre. I delene av kabelen der signalnivået er lavt vil signaler som oppstår på kabelen på grunn av overhøring fra andre kabler lett kunne føre til at det opprinnelige signalet endres.

4.2.2 Dempningskonstantens effekt på transferfunksjonen

På samme måten for den enkle transmisjonslinja vil dempningskonstanten α ha en innvirkning på transferfunksjonen.

Figur 4.5 viser forskjellige dempningskonstanter for forskjellige lengder av detektorsløyfa. Det er valgt å plote funksjonene for kabellengder på 1,5 km og 2 km, basert på det som viste seg å være det beste og det verste tilfelle i figur 4.4.



Figur 4.5: Transferfunksjon med forskjellig kabeldempning for detektorsløyfa. Blå linjer: $l = 1,5$ km. Røde linjer: $l = 2$ km. Heltrukken linje: $\alpha = 5,49$ dB/km. Streket linje: $\alpha = 2,75$ dB/km. Stiplet linje: $\alpha = 1$ dB/km.

For kabelen på lengde 1,5 km, den blå kurven, blir signalnivået lavere med økende dempning på kabelen. Punktet på kabelen som gir det dårligste sig-

signalnivået er det samme for alle dempningene. Lengden som ga dårligst gjennomsnittlig signalnivå var på 2 km og er vist som den røde linja. For denne kabellengden viser figuren at delen av kurven der signalnivået er lavest heves samtidig som kabelens dempning øker. For de delene av funksjonen der signalnivået er høyest faller nivået når dempningen øker. For andre kabellengder vil også funksjonen øke i de lavere områdene og dempes i de høyere områdene i ulik grad. For begge kabellengdene faller forskjellen mellom høyeste og laveste signalnivå med ca. 14 dB for funksjonen med $\alpha = 5,49$ dB/km i forhold til funksjonen med $\alpha = 1$ dB/km.

For begge kabellengdene bidrar økt kabeldempning til mindre variasjoner på transferfunksjonen, i størst grad for kabellengde 2 km. Med hensyn på at det er gunstig med jevnest mulig form på transferfunksjonen, er den mest gunstige av kabeldempningene som blir tatt for seg i denne oppgaven på 5,49 dB/km også for detektorsløyfa. Over en viss størrelse avhengig av kabellengden vil dempningen føre til at signalnivået faller gjennom hele kabelen. For en lengde på 2 km vil dette skje for dempninger over ca. 10 dB/km. Lavere signalnivå kan kompenseres for med høyere tilført effekt, med det vil også føre til høyere kostnader ved bruk av systemet. Valget av dempningskonstanter for modelleringen er diskutert i avsnitt 3.1.

4.3 Krysstale for et system som består av to detektorsløyfer

Den fullstendige modellen for systemet som ble utledet i kapittel 3.7 har flere variable inngangsparametre. Dette avsnittet viser hvordan disse parameterne vil påvirke transferfunksjonen som viser overhøringen mellom to detektorsløyfer. Endring av noen av parametrene vil også påvirke det opprinnelige signalet på en detektorsløyfe. Figurene i dette avsnittet sammenligner det opprinnelige ønskede signalet på detektorsløyfa med signalet som oppstår på sløyfa på grunn av overhøringen fra en annen sløyfe. Hvis de to signalene ligger nært hverandre i signalnivå kan dette føre til at det ønskede signalet endres på grunn av overhøringen, og det kan oppstå problemer med deteksjonen.

I avsnitt 3.7.2 ble detektorsløyfa modellert ved hjelp av den fullstendige modellen. Beregning av denne funksjonen i Matlab viser at transferfunksjonen beregnet på denne måten er tilnærmet lik transferfunksjonen for detektorsløyfa beregnet med skalare parametre. Største avvik mellom de to funksjo-

nene ble beregnet til $4,6 \cdot 10^{-14}$. Det ble også beregnet en transferfunksjon for en detektorløyfe med matriser for fire avhengige ledere. Denne kan også sammenlignes med en transferfunksjon for detektorløyfa beregnet ut fra den fullstendige modellen. Største avvik ble da funnet til $2,1 \cdot 10^{-14}$. Dette gir en indikasjon på at den fullstendige modellen er riktig.

Transferfunksjonen for den enkle transmisjonslinja beregnet med den fullstendige modellen utledet i avsnitt 3.7.3, har også blitt sammenlignet med transferfunksjonen beregnet med skalare parametre ved hjelp av Matlab. Største avvik mellom funksjonene ble funnet til $3,6 \cdot 10^{-14}$ som viser at funksjonene er tilnærmet like. Dette resultatet bidrar også til å verifisere den fullstendige modellen.

4.3.1 Vridning av kabler

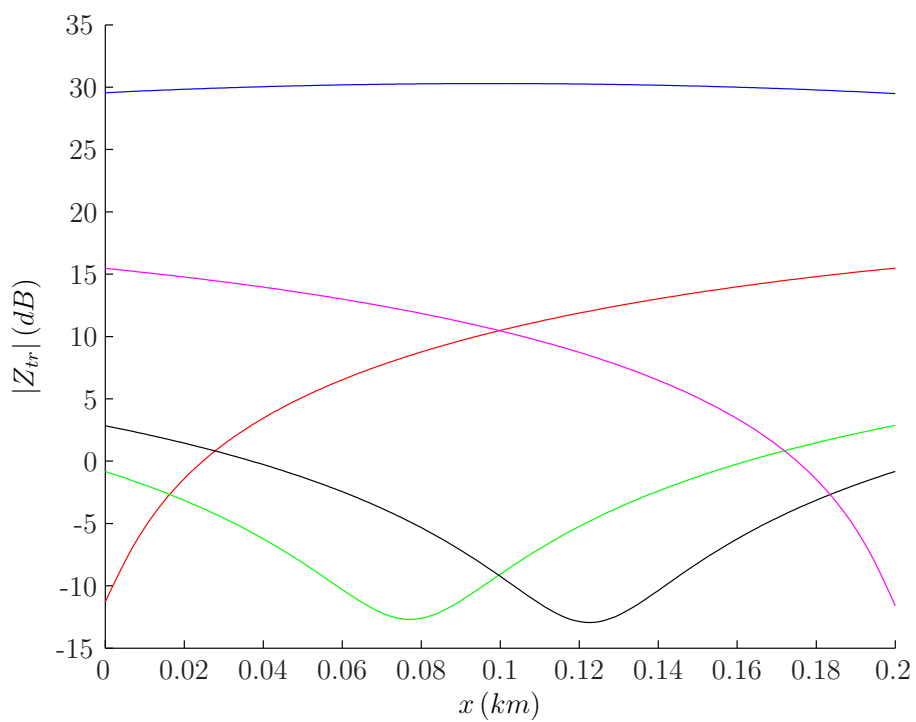
Transferfunksjonen for det fullstendige systemet vil endre seg etter hvordan de to kablene er vridd i forhold til hverandre når de ligger i samme kabelgate. Ved å variere vridningsvinklene ϕ_1 og ϕ_2 til hver av de to kablene mellom 0 og 90° , vil alle tilfellene kunne dekkes da en vridning på 90° fører til at tverrsnittet er likt som ved 0° , bortsett fra at lederne har byttet plass. ϕ_1 er vridningsvinkelen til den forstyrrende detektorløyfa, mens ϕ_2 er vridningsvinkelen til detektorløyfa som blir forstyrret.

Det er først plottet tre figurer med et utvalg av transferfunksjoner når ϕ_1 og ϕ_2 gis en av verdiene 0° , 30° og 60° og 90° . De tre første figurene plottes ved at ϕ_1 holdes konstant og ϕ_2 varieres. Det plottes ingen funksjon for $\phi_1 = 90^\circ$ da dette gir samme resultat som i figuren for $\phi_1 = 0^\circ$.

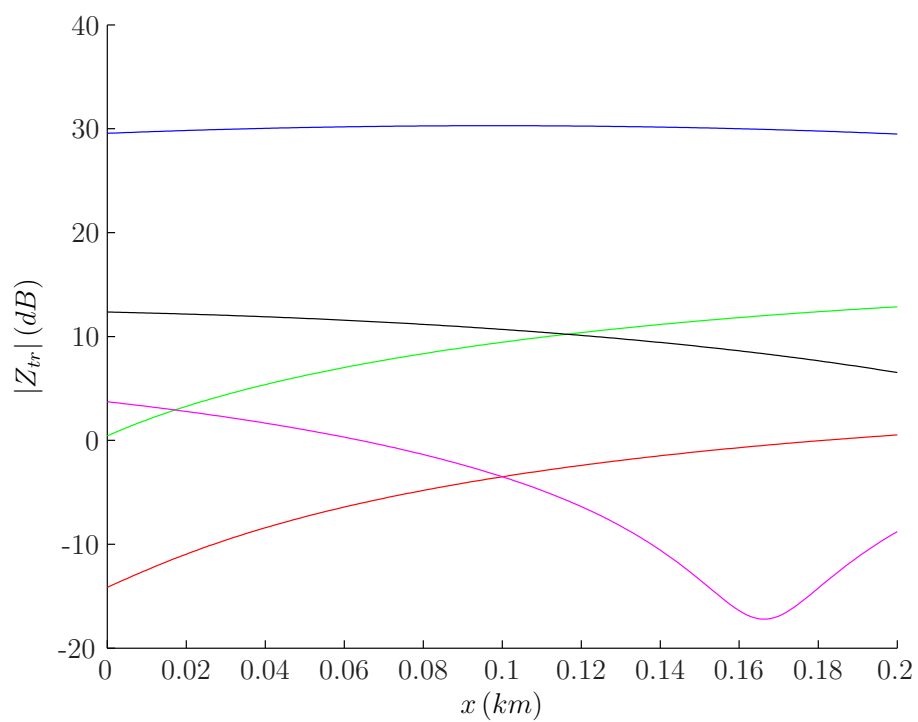
For alle figurene er kabellengden og sløyfelengden henholdsvis $0,3$ og $0,2$ km. Kabelens dempningskonstant er valgt til $5,49$ dB/km. Den blå linja i alle figurene viser transferfunksjonen for en detektorløyfe som ikke blir utsatt for påvirkning av fra andre sløyfer.

Tidligere har det blitt vist at signalet på en detektorløyfe kan variere ganske mye langs lengden hvis detektorløyfa er lang. I det aktuelle systemet vil lengden på sløyfa variere mellom $0,1$ og $0,2$ km og for så korte lengder vil transferfunksjonen holde seg ganske jevn, det vil si rundt ca. 30 dB.

Det vil oppstå problemer med deteksjonen på detektorløyfa hvis transferfunksjonen for krysstalen er i samme størrelsesorden som transferfunksjonen for den uforstyrrede sløyfa.

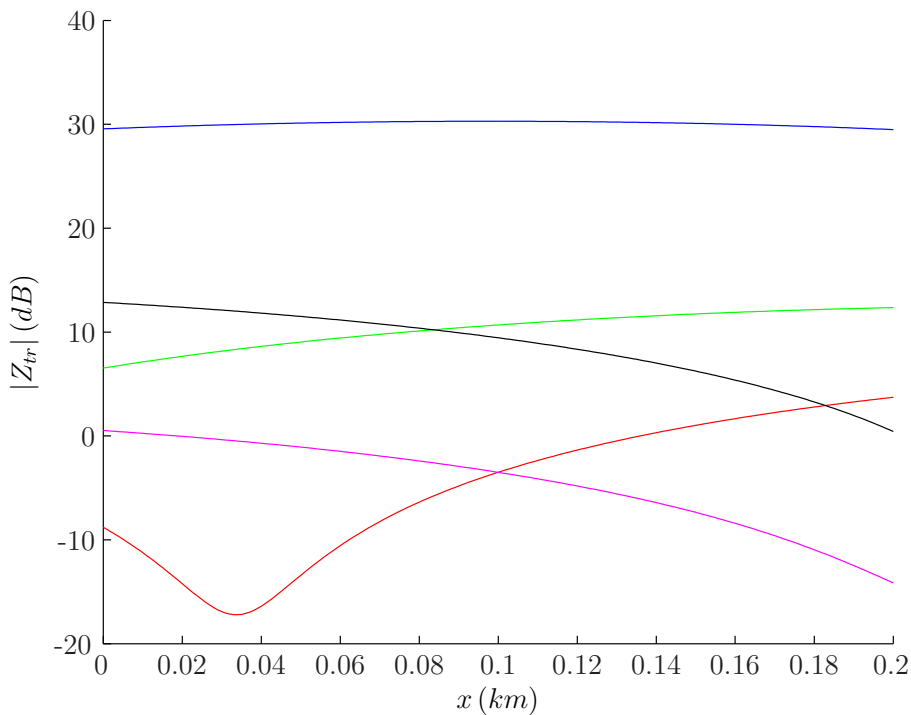


Figur 4.6: Transferfunksjon for forskjellig vridning av kablene, $\phi_1 = 0^\circ$. Blå linje: upåvirket detektorløyfe. Rød linje: $\phi_2 = 0^\circ$. Grønn linje: $\phi_2 = 30^\circ$. Svart linje: $\phi_2 = 60^\circ$. Fiolett linje: $\phi_2 = 90^\circ$.



Figur 4.7: Transferfunksjon for forskjellig vridning av kablene, $\phi_1 = 30^\circ$. Blå linje: upåvirket detektorsløyfe. Rød linje: $\phi_2 = 0^\circ$. Grønn linje: $\phi_2 = 30^\circ$. Svart linje: $\phi_2 = 60^\circ$. Fiolett linje: $\phi_2 = 90^\circ$.

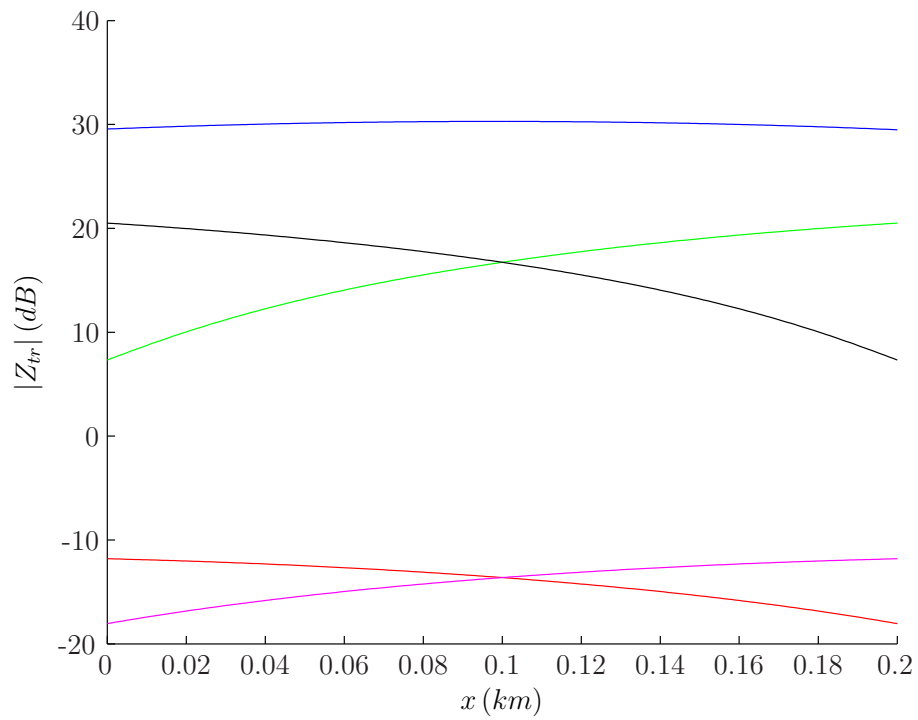
Figurene viser at transferfunksjonene for overhøringen vil variere mye i forhold til hvordan kablene ligger i forhold til hverandre. En del av transferfunksjonene ligger nært null, eller på den negative delen av dB-aksen, og disse vil ikke være et problem med tanke på deteksjonen. Dette gjelder for eksempel når $\phi_2 = 0^\circ$, samtidig som $\phi_2 = 30^\circ$ eller $\phi_2 = 60^\circ$, som vist i figur 4.6. For andre funksjoner vil overhøringen ligge nært det ønskede signalet på detektorsløyfa i signalnivå og vil derfor kunne føre til at det oppstår problemer. Transferfunksjonene for $\phi_2 = 0^\circ$, samtidig som $\phi_2 = 0^\circ$ eller $\phi_2 = 90^\circ$ i figur 4.6 viser dette.



Figur 4.8: Transferfunksjon for forskjellig vridning av kablene, $\phi_1 = 60^\circ$. Blå linje: upåvirket detektorsløyfe. Rød linje: $\phi_2 = 0^\circ$. Grønn linje: $\phi_2 = 30^\circ$. Svart linje: $\phi_2 = 60^\circ$. Fiolett linje: $\phi_2 = 90^\circ$.

Ved å se på funksjoner for flere vinkler enn det som er vist her vil noen spesielle tilfeller skille seg ut. Disse er vist i figur 4.9. Den svarte og den grønne linja viser noen av de verste tilfellene, hvor transferfunksjonen når en maksimalverdi på over 20 dB. Noen av de beste tilfellene er vist som den røde og den fiolette linja hvor transferfunksjonene holder seg godt under 0 dB i signalnivå gjennom hele sløyfa.

En tabell som viser den minste og den største differansen mellom ønsket



Figur 4.9: Transferfunksjon for forskjellig vridning av kablene, beste og verste tilfeller. Blå linje: upåvirket detektorsløyfe. Rød linje: $\phi_1 = 40^\circ$, $\phi_2 = 0^\circ$. Grønn linje: $\phi_1 = 50^\circ$, $\phi_2 = 20^\circ$. Svart linje: $\phi_1 = 40^\circ$, $\phi_2 = 70^\circ$. Fiolett linje: $\phi_1 = 50^\circ$, $\phi_2 = 90^\circ$.

Tabell 4.1: Differansen mellom krysstalen og ønsket signal for forskjellige vridningsvinkler til kablene

$\phi_1(^{\circ})$	$\phi_2(^{\circ})$	Minste differanse(dB)	Største differanse(dB)
0	0	14	41
0	30	27	43
0	60	27	43
0	90	14	41
30	0	29	44
30	30	17	29
30	60	17	23
30	90	26	47
60	0	26	47
60	30	17	23
60	60	17	29
60	90	29	44
40	0	41	48
40	70	9	22
50	20	9	22
50	90	41	48

signal på detektorsløyfa og signalet som forstyrrer for alle figurene er vist i tabell 4.1. Det er ønskelig at differansen skal være så stor som mulig gjennom hele lengden av sløyfa, for unngå at overhøringen påvirker det opprinnelige signalet på sløyfa.

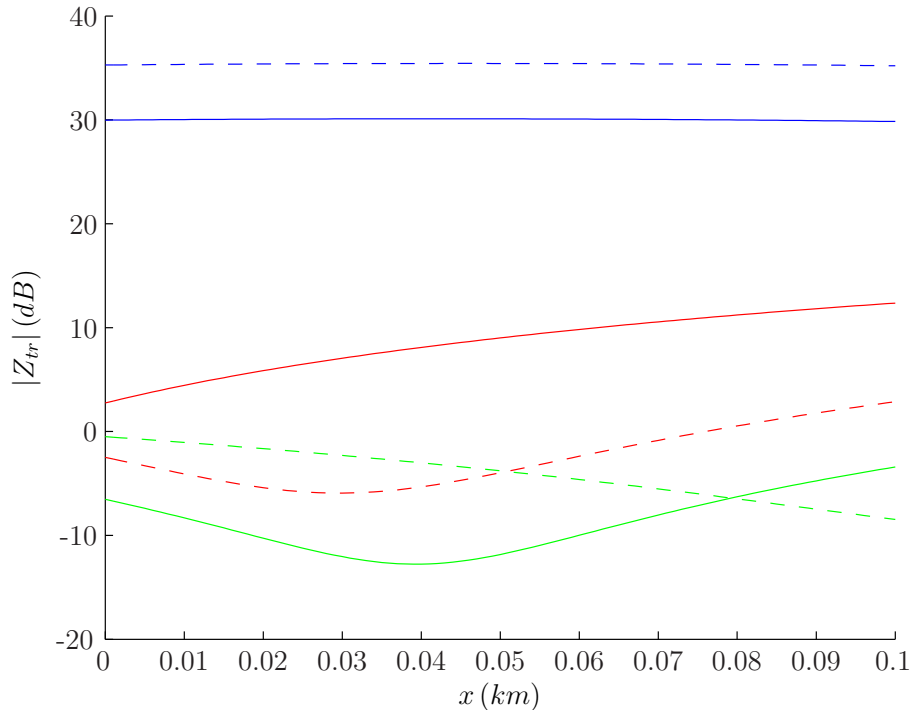
Figurene i dette avsnittet viser at det er stor avhengighet mellom hvordan kablene er vridd i forhold til hverandre og hvor høyt nivå det blir på signalet som oppstår på grunn av overhøring fra en kabel på en nærliggende kabel. Spesielt er vridningsvinklene $\phi_1 = 50^{\circ}$, $\phi_2 = 20^{\circ}$ og $\phi_1 = 40^{\circ}$, $\phi_2 = 70^{\circ}$ ugunstige med hensyn på krysstale, mens $\phi_1 = 40^{\circ}$, $\phi_2 = 0^{\circ}$ og $\phi_1 = 50^{\circ}$, $\phi_2 = 90^{\circ}$ er mer gunstige.

4.3.2 Kabellengdens påvirkning på krysstalen

Kabellengden vil også ha en innvirkning på signalstyrken til krysstalen. I den fullstendige modellen er det to lengder som kan variere, lengden av fellesstrekningen l_2 hvor alle lederne i de to detektorsløyfene ligger ved siden av hverandre og lengdene l og l_3 til detektorsløyfene, se figur 3.9. For alle plottene settes lengden av de to sløyfene like lange, det vil si $l_3 = l$. Demp-

ningskonstanten er satt til 5,49 dB/km.

For det aktuelle systemet vil lengden på den rette strekningen være mellom 0,1 og 0,3 km lang, mens lengden på detektorløyfa vil være på mellom 0,1 og 0,2 km lang [1].



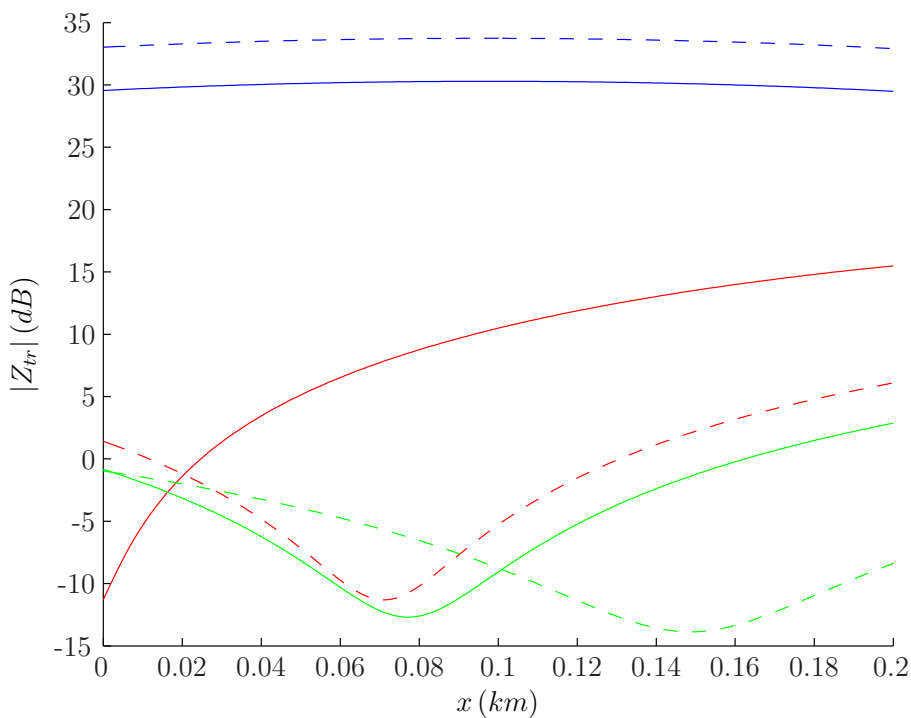
Figur 4.10: Transferfunksjon fullstendig modell, sløyfelengde på 0,1 km. Blå linje: upåvirket detektorløyfe. Rød linje: $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 0^\circ$. Grønn linje: $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 30^\circ$. Heltrukne linjer: lengde fellesstrekning på 0,3 km. Stiplede linjer: lengde fellesstrekning på 0,1 km

Figur 4.10 viser transferfunksjonen når lengden av fellesstrekningen er 0,1 og 0,3 km og detektorløyfa har lengden 0,1 km for noen utvalgte vridningsvinkler. For den upåvirkede detektorløyfa vist som de blå linjene fører kortere lengde på fellesstrekningen til at signalnivået jevnt over blir noe høyere, ca. 5 dB.

De røde og grønne linjene viser transferfunksjonen til den fullstendige modellen for noen utvalgte vinkler. Disse viser at det til dels er avhengig av kablenes vridning i forhold til hverandre og hvor på sløyfa man befinner seg om funksjonene øker i signalnivå eller ikke når kabellengden øker.

For transferfunksjonen hvor $\phi_1 = 0^\circ$ og $\phi_2 = 0^\circ$, øker nivået med økt kabel-

lengde. I og med at funksjonen for den upåvirkede sløyfa viser at den avtar i nivå med økt kabellengde vil disse vinklene være en uheldig kombinasjon når det gjelder krysstale. For transferfunksjonen hvor $\phi_1 = 0^\circ$ og $\phi_2 = 30^\circ$, viser figuren at transferfunksjonen er lavest i nivå når lengden av fellesstrekningen er lengst, bortsett fra på slutten av sløyfa. I dette tilfellet vil det altså være gunstig med en lengre fellesstrekning i forhold til påvirkningen på det ønskede signalet på detektorsløyfa, men siden signalnivået for den forstyrrende sløyfa i dette tilfellet er såpass lavt (under 0 dB) uansett vil dette ikke være av stor betydning.



Figur 4.11: Transferfunksjon fullstendig modell, sløyfelengde på 0,2 km. Blå linje: upåvirket detektorsløyfe. Rød linje: $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 0^\circ$. Grønn linje: $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 30^\circ$. Heltrukne linjer: lengde felles strekning på 0,3 km. Stiplede linjer: lengde felles strekning på 0,1 km

En figur hvor sløyfelengden er valgt til 0,2 km, men ellers har samme parametre som figur 4.10, er vist i figur 4.11. Figuren viser den samme tendensen som i figur 4.10 ved at nivået til den uforstyrrede sløyfa blir lavere med økt lengde, mens funksjonen med vridningsvinklene $\phi_1 = 0^\circ$ og $\phi_2 = 0^\circ$ øker med økt lengde på fellesstrekningen.

For det andre tilfellet av vridningsvinkler, $\phi_1 = 0^\circ$ og $\phi_2 = 30^\circ$, er det av-

Tabell 4.2: Differansen mellom krysstalen og ønsket signal for forskjellige kabellengder

$\phi_1(^{\circ})$	$\phi_2(^{\circ})$	Sløyfe- lengde (km)	Felles- strekning (km)	Minste differanse (dB)	Største differanse (dB)
0	0	0,1	0,3	17	27
0	0	0,1	0,1	32	41
0	30	0,1	0,3	33	43
0	30	0,1	0,1	36	44
0	0	0,2	0,3	14	41
0	0	0,2	0,1	27	45
0	30	0,2	0,3	27	43
0	30	0,2	0,1	34	47

hengig av hvor man er på detektorsløyfa om signalnivået har økt eller avtatt på grunn av økt lengde på fellesstrekningen. Transferfunksjonen som gir den største minimumsdifferansen mellom krysstalefunksjonen og funksjonen for den uforstyrrede sløyfa er da funksjonen hvor fellesstrekningen er kortest, se tabell 4.2. Dette vil derfor være mest gunstig med tanke på påvirkning, men siden signalnivået for den forstyrrende sløyfa i dette tilfellet er lavt vil ikke lengden av fellesstrekningen være av stor betydning.

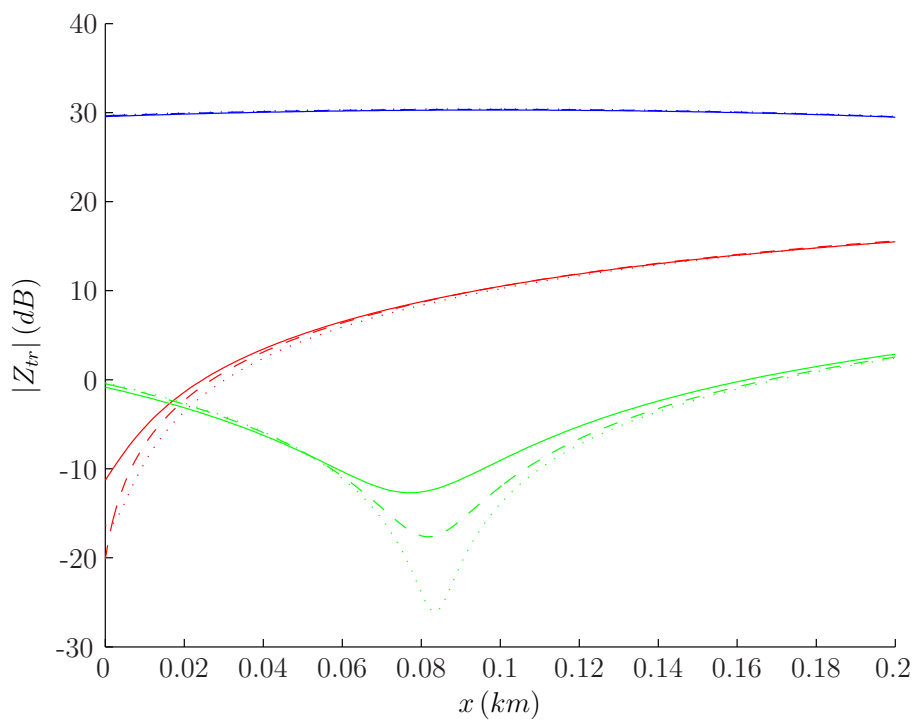
Generelt kan det sies at det for vridningsvinkler som fører til betydelig krysstale, vil krysstaleproblemet forverres med økt lengde på fellesstrekningen.

Funksjonene varierer generelt mer i nivå når detektorsløyfa blir lenger, noe som stemmer overens med resultatene for detektorsløyfa vist i avsnitt 4.2. I tillegg har begge transferfunksjonene for det fullstendig systemet et høyere maksimalnivå når lengden av detektorsløyfa øker, samtidig som den uforstyrrede sløyfa har et lavere nivå. Dette indikerer at det vil være fordelaktig å ha en kortere lengde på detektorsløyfa.

4.3.3 Kabeldepmmningens påvirkning på krysstalen

I avsnitt 4.1 og 4.2 ble det vist at kabelens dempningskonstant har innvirkning på transferfunksjonen for henholdsvis den enkle transmisjonslinja og detektorsløyfa. Dette vil også gjelde for transferfunksjonen til det fullstendige systemet.

Figur 4.12 viser transferfunksjoner for forskjellige dempningskonstanter for to



Figur 4.12: Transferfunksjon fullstendig modell for for forskjellige dempningskonstanter. Blå linje: upåvirket detektorsløyfe. Røde linjer: $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$. Grønne linjer: $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 30$. Heltrukne linjer: $\alpha = 5.49$. Strekede linjer: $\alpha = 2.75$. Stiplede linjer: $\alpha = 1$

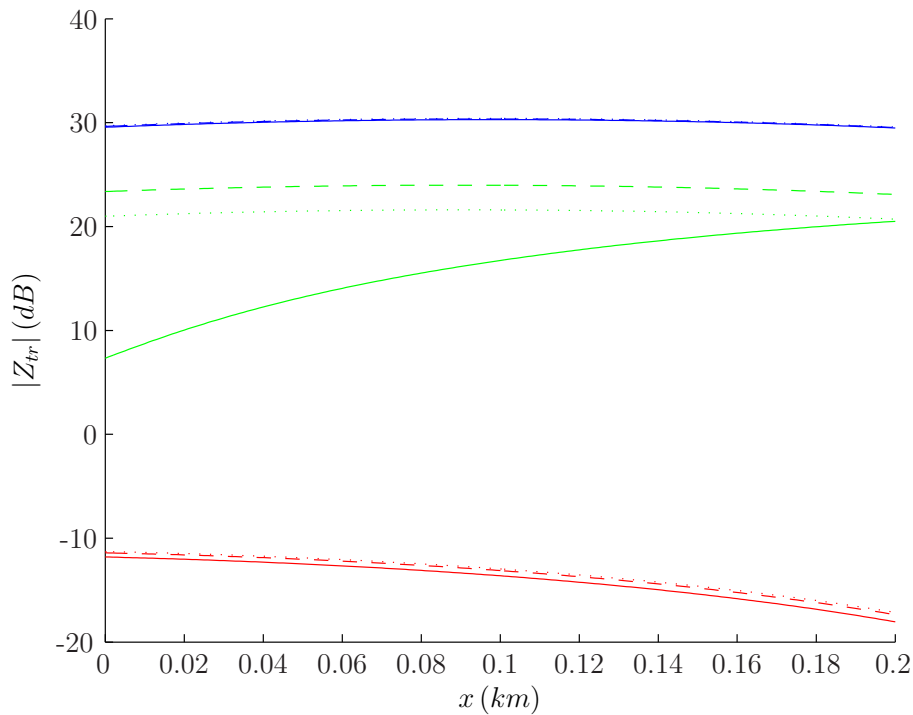
forskjellige vinkelkonfigurasjoner sammenlignet med uforstyrret sløyfe. Lengden av fellesstrekningen l_2 er 0,3 km og lengden av sløyfene, l og l_3 , er på 0,2 km.

Det har først blitt valgt å se på to vinkelkonfigurasjoner som viste seg å være best og verst i figur 4.6. Lignende resultater vil oppnås for andre tilfeller av vinkler. Figuren viser at endringer i dempningskonstanten nesten ikke har noen innvirkning på den uforstyrrede sløyfa. Tidligere resultat har vist at kabelens dempning kan ha ganske stor innvirkning på nivået på transferfunksjonen, men det vil ikke være slik når sløyfa er så kort som i dette tilfellet.

Den røde og den grønne linja i figur 4.12 viser transferfunksjonen for overhøringen mellom to sløyfer. Den grønne linja, det vil si transferfunksjonen for $\phi_1 = 0$ og $\phi_2 = 30$, ligger lavest i nivå og blir for deler av sløyfe en del dempet med økt dempningskonstant. Funksjonen for overhøringen som ligger høyest i nivå, det vil si $\phi_1 = 0$ og $\phi_2 = 0$, holder seg tilnærmet lik bortsett fra at den blir noe dempet helt i starten. For disse tilfellene vil ikke den økte kabeldempningen ha noen særlig innvirkning på deteksjonen, og heller føre til en liten forbedring i og med at den demper transferfunksjonene for forstyrrende signal noe mer enn det ønskede signalet.

I figur 4.13 ses det på en av de mest gunstige og en av de minst ugunstige vridningene av kablene i forhold til hverandre, for transferfunksjonene som ble vist i figur 4.9. Denne figuren viser at mens funksjonene for $\phi_1 = 40$ og $\phi_2 = 0$ er tilnærmet uendret, endres transferfunksjonene for $\phi_1 = 50$ og $\phi_2 = 20$, vist som de grønne linjene, merkbart i nivå. Først og fremst blir disse transferfunksjonene mye jevnere i nivå gjennom sløyfas lengde, samtidig som de også øker nivået noe. Mest øker den for en kabeldempning på $\alpha = 2,75$ dB/km. Her er nivåforskjellen mellom transferfunksjonen og den forstyrrende sløyfa under 6,5 dB gjennom hele lengden. I og med at nivåforskjellen er såpass liten, i tillegg til at den holder seg slik gjennom hele sløyfa, vil dette være uheldig med tanke på deteksjonen av det opprinnelige signalet på sløyfa.

Den største og den minste differansen mellom overhøringen og det ønskede signalet på detektorsløyfene for figurene i dette avsnittet er gitt i tabell 4.3. Dette avsnittet har vist at endret kabeldempning i mange tilfeller har liten innvirkning på krysstalen i systemet. Ved enkelte tilfeller av kablens vridning i forhold til hverandre kan en gitt kabeldempning derimot ha svært uheldig innvirkning.



Figur 4.13: Transferfunksjon fullstendig modell for for forskjellige dempningskonstanter. Blå linje: upåvirket detektorsløyfe. Røde linjer: $\phi_1 = 40$, $\phi_2 = 0$. Grønne linjer: $\phi_1 = 50$, $\phi_2 = 20$. Heltrukne linjer: $\alpha = 5.49$ dB/km. Strekede linjer: $\alpha = 2,75$ dB/km. Stiplede linjer: $\alpha = 1$ dB/km

Tabell 4.3: Differansen mellom krysstalen og ønsket signal for forskjellige kabeldempninger

$\phi_1(^{\circ})$	$\phi_2(^{\circ})$	Dempning (dB/km)	Minste differanse(dB)	Største differanse(dB)
0	0	5,49	14	41
0	0	2,75	14	50
0	0	1	14	46
0	30	5,49	27	43
0	30	2,75	27	48
0	30	1	27	56
40	0	5,49	41	48
40	0	2,75	41	47
40	0	1	41	47
50	20	5,49	9	22
50	20	2,75	6	6
50	20	1	9	9

Kapittel 5

Konklusjon

I denne oppgaven har det blitt sett på et system fra Autronica Fire and Security, som brukes til gass- og flammedeteksjon, blant annet i olje- og gassindustrien. Systemet består av mange detektorsløyfer, hvor kabler fra forskjellige sløyfer ofte ligger i de samme kabelgatene. Dette fører til at det oppstår problemer med krysstale mellom kablene. Sløyfeløsningen brukes på grunn av høye krav til pålitelighet til systemet, siden sløyfene tåler både brudd og kortslutning uten at detektorene settes ut av funksjon.

Krysstale er definert som et uønsket signal på en kabel forårsaket av en nærliggende kabel. Problemstillingen i denne oppgaven har vært å kartlegge krysstaleproblemet ved å lage en modell for systemet.

5.1 Krysstaleproblemet

Arbeidet i denne oppgaven har vist at signalene varierer betydelig langs kablelen. Signaler som varierer mye i nivå vil lett kunne bli påvirket av interferens fra andre kabler i områder med lavt signalnivå, samt interferere andre kabler i områder med høyt signalnivå.

Transferfunksjonene for den enkle transmisjonslinja og detektorsløyfa ble modellert både ved hjelp av skalare kabelparametre og per-lengdeenhet-matriser. De samme transferfunksjonene ble også modellert med matriser både for to og fire ledere. Dette viste at modelleringen av flerledersystemer ved hjelp av per-lengdeenhet-matriser ga samme resultat som modelleringen med skalare parametre.

Det ble sett på kabeldempningens innvirkning på transferfunksjonene for den enkle transmisjonslinja og detektorsløyfa. Det ble vist at økende dempning hadde en positiv effekt i form av at økt dempning førte til mindre variasjoner på signalene. Det ble også vist at signalnivået på detektorsløyfa endrer seg med endret kabellengde og at noen kabellengder vil være mer gunstig med tanke på høyt signalnivå.

Det ble utviklet en transferfunksjon som viste overhøringen mellom to detektorsløyfer. Det har blitt vist at det ved noen kombinasjoner av hvordan kablene ligger i forhold til hverandre kan signalnivået på det forstyrrende signalet bli høyt nok til at det kan påvirke det ønskede signalet på detektorsløyfa slik at det kan bli problemer med deteksjonen.

Det har blitt vist at differansen mellom det ønskede signalet og det forstyrrende signalet blir mindre når lengden av fellesstrekningen øker. Dette viser at kortest mulig lengde på fellesstrekningen er gunstig med hensyn på krysstaleproblemet. Det har også blitt vist at det av samme grunn er mest gunstig med kortest mulig detektorsløyfer.

Det ble også vist at endret kabeldempning innenfor sannsynlige verdier i de fleste tilfeller hadde liten innvirkning på signalnivåene og derfor liten innvirkning på krysstaleproblemet. For enkelte tilfeller ble det allikevel funnet at en lavere dempningskonstant førte til en utjevning av det forstyrrende signalet i tillegg til en liten økning i signalnivå. Dette viste at det ved noen kombinasjoner av hvordan kablene ligger i forhold til hverandre, kan en gitt kabeldempning forverre krysstaleproblemet.

Oppsummert har det i denne oppgaven blitt vist at krysstalen mellom detektorsløyfene kan bli stor nok til å interferere såpass mye med det opprinnelige ønskede signalet på detektorsløyfene til at det kan føre til problemer med deteksjonen. Det er gjort en rekke antagelser ved utviklingen av modellen både når det gjelder kabelparametre og i forhold til hvordan tverrsnittet på en faktisk kabel som brukes i systemet vil se ut.

Selv om modellen er en forenkling vil den gi en god indikasjon på hvordan krysstalen vil oppføre seg i systemet som oppgaven har tatt for seg og den sannsynliggjør at problemene med deteksjon i systemet er forårsaket av krysstale mellom detektorsløyfene. Modellen som har blitt utviklet i denne oppgaven kan brukes til å forutsi om krysstalen vil bli et problem for gitte kabelsystemer samt forklare forklare observerte problemer.

5.2 Videre arbeid

Krysstale mellom to kabler og hvordan dette påvirker signalene på detektorsløyvene har blitt modellert i denne oppgaven. Videre arbeid i forhold til problemstillingen, vil være å videreutvikle og forbedre modellene for krysstale mellom kabler som har blitt presentert i denne oppgaven.

Krysstalemodellen er som beskrevet i oppgaven delvis blitt verifisert. Det vil også være mulig å beregne enkle tilfeller av systemet manuelt for å sammenligne med modellen. Det har i arbeidet med oppgaven blitt sett på dette, men det er ikke fullført på grunn av tidsbegrensningen. Videre arbeid vil derfor inkludere en videre kontroll av at modellen er riktig.

Det vil være flere måter å videreutvikle modellen på. For det første har kablene som blir brukt i det faktiske systemet dobbel skjerming. Modellen i denne oppgaven gjelder for en kabel med en skjerm. Videre arbeid vil derfor kunne være å se på effekten dobbel skjerming har på overhøringen mellom kablene.

For kablene som har blitt modellert i denne oppgaven har det blitt antatt at skjermen kun er jordet i en ende. Dette fører til at den kapasitive koblingen mellom to skjermede kabler forsvinner. Det har ikke blitt sett på kabler hvor skjermen er jordet i begge ender, som vil føre til at de induktive koblingene blir dempet. Jording i begge ender er komplisert å beregne dersom ikke kabellengden er mindre enn bølgelengden til signalet, det vil si $l \ll \lambda$, noe som ikke er oppfylt i dette systemet. For å videreutvikle modellen vil det derfor være aktuelt å inkludere modellering av dobbeltsidig jording.

Alle modellene som har blitt utviklet i denne oppgaven er balanserte. Systemet vil i virkeligheten være usymmetrisk. Implementering av usymmetri vil være mulig med små endringer av modellene som er framlagt i denne oppgaven og er derfor egnet for videre arbeid.

Det vil også være mulig å se på ulike strategier for terminering i det fullstendige systemet. Terminering av en enkel transmisjonslinje og detektorsløyfe ble tatt for seg i prosjektoppgaven som denne oppgaven bygger på, men er ikke tatt for seg for det fullstendige systemet.

I tillegg til å se på tilfellene nevnt over vil det være mulig å innhente mer nøyaktige verdier for kabelparametre og andre verdier som blir brukt i modellen. Videre arbeid kan derfor også inkludere målinger på aktuelle kabler for å se hvor godt modellen stemmer overens med hvordan kablene er i virkeligheten.

Bibliografi

- [1] Autronica, 2010. Beskrivelse av system fra Autronica Fire And Security.
- [2] J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt. Digital communication. <http://users.ece.gatech.edu/~barry/digital/supp/18channels.pdf>, 1994.
- [3] N. Holte. Calculation of crosstalk in balanced pair cables by means of simulation, November 1977.
- [4] N. Holte. Autronica transmission system. Intert notat, 2008.
- [5] N. Holte, 2009-2010. Interne notater.
- [6] J. W. Nilsson and S. A. Riedel. *Electric Circuits*, chapter 18. Pearson Prentice Hall, 8 edition, 2008.
- [7] C. R. Paul. *Introduction to Electromagnetic Compability*. Kluwer Academic Publishers, 2 edition, 2006.

Symbolliste

α	Dempningskonstant [Np/km]
β	Fasekonstant [rad/km]
ϵ	Permittivitet [F/km]
ϵ_0	Permittiviteten i vakuum [F/km]
ϵ_r	Relativ permittivitet
γ	Propagasjonskonstant
μ_0	Permeabilitet i vakuum [H/km]
ω	Vinkelfrekvens [rad/s]
ϕ_1	Vridningsvinkel kabel 1 [°]
ϕ_2	Vridningsvinkel kabel 2 [°]
\vec{I}	Strømvektor
\vec{V}	Spenningsvektor
$\tilde{\Gamma}$	Generalisering av propagasjonskonstanten for flerledersystem
\tilde{A}	A-matrise til flerledersystem
\tilde{a}	A-matrise for enkel transmisjonslinje
\tilde{C}	Per-lengdeenhet-kapasitansmatrise
\tilde{G}	Per-lengdeenhet-konduktansmatrise
\tilde{I}	Identitetsmatrise
\tilde{L}	Per-lengdeenhet-induktansmatrise
\tilde{R}	Per-lengdeenhet-resistansmatrise

\tilde{Y}	Per-lengdeenhet-admittansmatrise
\tilde{Z}	Per-lengdeenhet-impedansmatrise
\tilde{Z}_0	Generalisering av karakteristisk impedansen for flerledersystem
C	Kapasitans per lengdeenhet [F/km]
C_d	Driftskapasitans
F	Frekvens [MHz]
f	Frekvens [Hz]
G	Konduktans per lengdeenhet [Mho(S)/km]
H_{tr}	Transferfunksjon
I	Strøm [A]
I_{inn}	Inngangsstrøm [A]
L	Induktans per lengdeenhet [H/km]
l	Kabellengde [km]
R	Resistans per lengdeenhet [Ω /km]
t	Tid [s]
V	Spenning [V]
V_+	Innkommende bølge
V_-	Reflektert bølge
V_{ut}	Utgangsspenning [V]
Z_0	Karakteristisk impedans
Z_{tr}	Transferfunksjon

Tillegg A

Utleddning av a-parametre og transferfunksjoner

A.1 Utleddning av a-parametere for uniform transmisjonslinje

$$\begin{aligned}V(x) &= V_+e^{-\gamma x} + V_-e^{\gamma x} \\V_1 = V(-l) &= V_+e^{\gamma l} + V_-e^{-\gamma l} \\V_2 = V(0) &= V_+ + V_-\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(x) &= \frac{1}{Z_0}V_+e^{-\gamma x} - V_-e^{\gamma x} \\I_1 = I(-l) &= \frac{1}{Z_0}(V_+e^{\gamma l} - V_-e^{-\gamma l}) \\I_2 = I(0) &= \frac{1}{Z_0}(V_+ - V_-)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_1 &= a_{11}V_2 + a_{12}I_2 \\I_1 &= a_{21}V_2 + a_{22}I_2\end{aligned}$$

Beregning av a_{11} :

$$a_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{Z_0}(V_+ - V_-) = 0 \Rightarrow V_+ = V_-$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{V_+e^{\gamma l} + V_-e^{-\gamma l}}{V_+ + V_-} \\ &= \frac{V_+(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})}{2V_+} \\ &= \cosh \gamma l \end{aligned}$$

Beregning av a_{12} :

$$a_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$V_2 = 0 \Rightarrow V_+ + V_- = 0 \Rightarrow V_+ = -V_-$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{Z_0(V_+e^{\gamma l} + V_-e^{-\gamma l})}{V_+ - V_-} \\ &= \frac{Z_0V_-(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{2V_-} \\ &= Z_0 \sinh \gamma l \end{aligned}$$

Beregning av a_{21} :

$$a_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{Z_0}(V_+ - V_-) = 0 \Rightarrow V_+ = V_-$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{V_+e^{\gamma l} - V_-e^{-\gamma l}}{Z_0(V_+ + V_-)} \\ &= \frac{V_+(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{Z_02V_-} \\ &= \frac{\sinh \gamma l}{Z_0} \end{aligned}$$

Beregning av a_{22} :

$$a_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$V_2 = 0 \Rightarrow V_+ + V_- = 0 \Rightarrow V_+ = -V_-$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{Z_0(V_+e^{\gamma l} - V_-e^{-\gamma l})}{Z_0(V_+ - V_-)} \\ &= \frac{-V_-(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})}{-2V_-} \\ &= \cosh \gamma l \end{aligned}$$

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_0} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

A.2 Transferfunksjon for enkel transmisjonslinje

Utledning av transferfunksjon for enkel transmisjonslinje vist i figur 3.3.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{\sinh \gamma l}{Z_0} & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = 0$$

$$V_1 = \cosh \gamma l \cdot V$$

$$I = \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l \cdot V$$

$$\begin{aligned}
Z_{tr} &= \frac{V}{I} \\
&= \frac{Z_0}{\sinh \gamma l}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_{tr} = \frac{Z_0}{\sinh \gamma l}}$$

A.3 Enkel transmisjonslinje med matriser for to ledere

Utleddning av transferfunksjon for enkel transmisjonslinje med matriser for to ledere vist i figur 3.4.

Ut i fra strømmene og spenningene i figuren kan det defineres vektorer som vist i ligningen under.

$$\begin{aligned}
\vec{U}_1 &= \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} & \vec{U}_2 &= \begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} \\
\vec{I}_1 &= \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{12} \end{bmatrix} & \vec{I}_2 &= \begin{bmatrix} I_{21} \\ I_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Transmisjonslinja kan da beskrives med følgende ligning:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh l \tilde{\Gamma} & \sinh l \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Matrisa \tilde{A} beregnes ut fra per-lengdeenhet-matrisene for to ledere.

Har også at:

$$\begin{aligned} I &= I_{11} = -I_{12} \\ \vec{I}_2 &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{12} \end{bmatrix}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \tilde{A}_{11} \cdot \vec{U}_2 \\ \vec{I}_1 &= \tilde{A}_{21} \cdot \vec{U}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{U}_2 = \tilde{A}_{21}^{-1} \cdot \vec{I}$$

$$\begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{12} \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = M_{11} \cdot I_{11} + M_{12} \cdot I_{12} = I(M_{11} - M_{12})$$

$$U_{22} = M_{21} \cdot I_{11} + M_{22} \cdot I_{12} = I(M_{21} - M_{22})$$

$$H_{tr} = \frac{U_{21} - U_{22}}{I} = M_{11} - M_{12} - M_{21} + M_{22}$$

A.4 Enkel transmisjonslinje med matriser for fire ledere

Utleddning av transferfunksjon for enkel transmisjonslinje med matriser for fire ledere vist i figur 3.5.

Systemet kan da beskrives med følgende ligning:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \\ -\vec{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh(l/2) \tilde{\Gamma} & \sinh(l/2) \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh(l/2) \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh(l/2) \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix}$$

En fireledermodell benyttes her til å beregne en enkel transmisjonslinje. Matrisa \tilde{A} beregnes da ut fra per-lengdeenhet-matriser for to parallelle toledere.

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \tilde{A}_{11} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{12} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{13} \cdot \vec{I}_3 - \tilde{A}_{14} \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{U}_2 &= \tilde{A}_{21} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{22} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{23} \cdot \vec{I}_3 - \tilde{A}_{24} \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_1 &= \tilde{A}_{31} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{32} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{33} \cdot \vec{I}_3 - \tilde{A}_{34} \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_2 &= \tilde{A}_{41} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{42} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{43} \cdot \vec{I}_3 - \tilde{A}_{44} \cdot \vec{I}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}) \cdot \vec{U}_3 + (\tilde{A}_{13} - \tilde{A}_{14}) \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{U}_2 &= (\tilde{A}_{21} + \tilde{A}_{22}) \cdot \vec{U}_3 + (\tilde{A}_{23} - \tilde{A}_{24}) \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_1 &= (\tilde{A}_{31} + \tilde{A}_{32}) \cdot \vec{U}_3 + (\tilde{A}_{33} - \tilde{A}_{34}) \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_2 &= (\tilde{A}_{41} + \tilde{A}_{42}) \cdot \vec{U}_3 + (\tilde{A}_{43} - \tilde{A}_{44}) \cdot \vec{I}_3 \end{aligned}$$

Videre defineres følgende vektorer:

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ -\vec{I}_2 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} - \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{31} + \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} - \tilde{A}_{34} \end{bmatrix} \vec{V}_3 = \tilde{C} \cdot \vec{V}_3$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} + \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} - \tilde{A}_{24} \\ -\tilde{A}_{41} - \tilde{A}_{42} & -\tilde{A}_{43} + \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \vec{V}_3 = \tilde{D} \cdot \vec{V}_3$$

Dette gir følgende:

$$\vec{V}_1 = \tilde{C} \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot \vec{V}_2 = \tilde{E} \cdot \vec{V}_2$$

Har også:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} & \vec{I} &= \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dette gir:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{21} \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 = \tilde{E}_{21} \cdot \vec{U}_2$$

$$\begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} \tilde{E}_{21}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
U_{21} &= F_{11} \cdot I + F_{12} \cdot I = I(F_{11} - F_{12}) \\
U_{22} &= F_{21} \cdot I + F_{22} \cdot I = I(F_{21} - F_{22})
\end{aligned}$$

Transferfunksjonen er da gitt som:

$$H_{tr} = \frac{U_{21} - U_{22}}{I} = F_{11} - F_{12} - F_{21} + F_{22}$$

A.5 Transferfunksjon for detektorsløyfe

Utledning av transferfunksjon for detektorsløyfa med matriser for to ledere vist i figur 3.6.

A-matrise for lengde x:

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma x) & Z_0 \sinh(\gamma x) \\ \frac{\sinh(\gamma x)}{Z_0} & \cosh(\gamma x) \end{bmatrix}$$

A-matrise for lengde l-x:

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma(l-x)) & Z_0 \sinh(\gamma(l-x)) \\ \frac{\sinh(\gamma(l-x))}{Z_0} & \cosh(\gamma(l-x)) \end{bmatrix}$$

Sammenhenger for detektorsløyfa gitt i figur 3.6:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \tilde{a} \begin{bmatrix} V \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I - I_1 \end{bmatrix} = \tilde{b} \begin{bmatrix} V \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Matrisene over kan skrives ut til følgende ligninger:

$$\begin{aligned}
V_1 &= a_{11}V + a_{12}I_2 \\
I_1 &= a_{21}V + a_{22}I_2 \\
V_1 &= b_{11}V - b_{12}I_2 \\
I - I_1 &= b_{21}V + b_{22}I_2
\end{aligned}$$

Kombinerer ligningene over for å finne transferfunksjonen:

$$\begin{aligned}
 a_{11}V + a_{12}I_2 &= b_{11}V - b_{12}I_2 \\
 I_2 &= \frac{(b_{11} - a_{11})V}{a_{12} + b_{12}} \\
 I &= (a_{21} + b_{21})V + (a_{22} - b_{22})I_2 \\
 I &= (a_{21} + b_{21})V + \frac{(a_{22} - b_{22})(b_{11} - a_{11})V}{a_{12} + b_{12}} \\
 \frac{I}{V} &= \frac{(a_{21} + b_{21})(a_{12} + b_{12}) + (a_{22} - b_{22})(b_{11} - a_{11})}{a_{12} + b_{12}} \\
 Z_{tr} &= \frac{V}{I} = \frac{a_{12} + b_{12}}{(a_{21} + b_{21})(a_{12} + b_{12}) + (a_{22} - b_{22})(b_{11} - a_{11})}
 \end{aligned}$$

Setter inn funksjoner for a-parametrene:

$$\begin{aligned}
 Z_{tr} &= \frac{Z_0(\sinh \gamma x + \sinh \gamma(l - x))}{(\sinh \gamma x + \sinh \gamma(l - x))^2 - (\cosh \gamma x - \cosh \gamma(l - x))^2} \\
 &= \frac{Z_0(\sinh \gamma x + \sinh \gamma(l - x))}{2 \cosh \gamma l - 2} \\
 &= \frac{Z_0 \sinh \gamma x + \sinh \gamma(l - x)}{2 \cosh \gamma l - 2} \\
 &= \frac{Z_0 2 \sinh \frac{\gamma l}{2} \cosh(\frac{\gamma}{2}l - x)}{2 \sinh \frac{\gamma l}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_{tr} = \frac{Z_0 \cosh \gamma(\frac{l}{2} - x)}{2 \sinh \frac{\gamma l}{2}}}$$

A.6 Detektorsløyfe med matriser for to ledere

Utleddning av transferfunksjon for detektorsløyfa med matriser for to ledere vist i figur 3.8.

Ut fra figuren kan det defineres to ligninger:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} &= \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} &= \tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ -\vec{I}_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Matrisene \tilde{A} og \tilde{B} beregnes med per-lengdeenhet-matrisene for to ledere og er gitt som vist under:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh x \tilde{\Gamma} & \sinh x \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh x \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh x \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \cosh (l-x) \tilde{\Gamma} & \sinh (l-x) \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Får da:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= \tilde{A}_{11} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{12} \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_1 &= \tilde{A}_{21} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{22} \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{U}_2 &= \tilde{B}_{11} \cdot \vec{U}_3 - \tilde{B}_{12} \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_2 &= \tilde{B}_{21} \cdot \vec{U}_3 - \tilde{B}_{22} \cdot \vec{I}_3\end{aligned}$$

Følgende sammenhenger kan settes opp for systemet:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= \vec{U}_2 \\ \vec{I} &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \\ \vec{I} &= I_{11} + I_{21} = -(I_{12} + I_{22}) \\ \vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2\end{aligned}$$

Får da:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= \vec{U}_2 \\ \vec{I}_3 &= (\tilde{A}_{12} + \tilde{B}_{12})^{-1} \cdot (\tilde{B}_{11} - \tilde{A}_{11}) \cdot \vec{U}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \\ &= (\tilde{A}_{21} + \tilde{B}_{21}) \cdot \vec{U}_3 + (\tilde{A}_{22} - \tilde{B}_{22}) \cdot \vec{I}_3 \\ &= ((\tilde{A}_{21} + \tilde{B}_{21}) + (\tilde{A}_{22} - \tilde{B}_{22}) \cdot (\tilde{A}_{12} + \tilde{B}_{12})^{-1} \cdot (\tilde{B}_{11} - \tilde{A}_{11})) \cdot \vec{U}_3 \\ &= \tilde{C} \cdot \vec{U}_3\end{aligned}$$

$$\vec{U}_3 = \tilde{C}^{-1} \cdot \vec{I} = \tilde{D} \cdot \vec{I}$$

$$\begin{bmatrix} U_{31} \\ U_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}U_{31} &= D_{11} \cdot I + D_{12} \cdot (-I) = I(D_{11} - D_{12}) \\ U_{32} &= D_{21} \cdot I + D_{22} \cdot (-I) = I(D_{21} - D_{22})\end{aligned}$$

Transferfunksjonen for detektorsløyfa vil da være gitt av ligningen under:

$$H_{tr} = \frac{U_{31} - U_{32}}{I} = D_{11} - D_{12} - D_{21} + D_{22}$$

A.7 Detektorsløyfe med matriser for fire ledere

Utledning av transferfunksjon for detektorsløyfa med matriser for to ledere vist i figur 3.7.

Dette systemet kan modelleres ved å bruke tre A-matriser.

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{U}_4 \\ \vec{I}_3 \\ \vec{I}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} = \tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{I}_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_4 \\ \vec{I}_4 \end{bmatrix} = \tilde{C} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ -\vec{I}_5 \end{bmatrix}$$

Hvor \tilde{A} , \tilde{B} og \tilde{C} er gitt som følger:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh l_2 \tilde{\Gamma} & \sinh l_2 \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l_2 \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l_2 \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix}$$

\tilde{A} beregnes ut fra per-lengdeenhet-matrisene for fire ledere hvor to og to ledere er avhengige av hverandre hvis transferfunksjonen skal sammenlignes med tidligere beregnede transferfunksjoner for detektorsløyfa. Detektorsløyfa som inngår i den fullstendige modellen for systemet beregnes med matriser hvor alle fire lederne er avhengige av hverandre.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \cosh x \tilde{\Gamma} & \sinh x \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh x \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh x \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \cosh (l-x) \tilde{\Gamma} & \sinh (l-x) \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}$$

\tilde{B} og \tilde{C} beregnes ut fra per-lengdeenhet-matrisene for to ledere.

$$\begin{aligned}\vec{U}_3 &= \tilde{B}_{11} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{B}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\ \vec{I}_3 &= \tilde{B}_{21} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{B}_{22} \cdot \vec{I}_5 \\ \vec{U}_4 &= \tilde{C}_{11} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{C}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\ \vec{I}_4 &= \tilde{C}_{21} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{C}_{22} \cdot \vec{I}_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= \tilde{A}_{11} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{12} \cdot \vec{U}_4 + \tilde{A}_{13} \cdot \vec{I}_3 + \tilde{A}_{14} \cdot \vec{I}_4 \\ &= \tilde{A}_{11} \cdot \tilde{B}_{11} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{11} \cdot \tilde{B}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\ &\quad + \tilde{A}_{12} \cdot \tilde{C}_{11} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{12} \cdot \tilde{C}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\ &\quad + \tilde{A}_{13} \cdot \tilde{B}_{21} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{13} \cdot \tilde{B}_{22} \cdot \vec{I}_5 \\ &\quad + \tilde{A}_{14} \cdot \tilde{C}_{21} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{14} \cdot \tilde{C}_{22} \cdot \vec{I}_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 &= \tilde{A}_{31} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{32} \cdot \vec{U}_4 + \tilde{A}_{33} \cdot \vec{I}_3 + \tilde{A}_{34} \cdot \vec{I}_4 \\ &= \tilde{A}_{31} \cdot \tilde{B}_{11} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{31} \cdot \tilde{B}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\ &\quad + \tilde{A}_{32} \cdot \tilde{C}_{11} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{32} \cdot \tilde{C}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\ &\quad + \tilde{A}_{33} \cdot \tilde{B}_{21} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{33} \cdot \tilde{B}_{22} \cdot \vec{I}_5 \\ &\quad + \tilde{A}_{34} \cdot \tilde{C}_{21} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{34} \cdot \tilde{C}_{22} \cdot \vec{I}_5\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \tilde{D} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{I}_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}D_{11} &= \tilde{A}_{11} \cdot \tilde{B}_{11} + \tilde{A}_{12} \cdot \tilde{C}_{11} + \tilde{A}_{13} \cdot \tilde{B}_{21} + \tilde{A}_{14} \cdot \tilde{C}_{21} \\ D_{12} &= \tilde{A}_{11} \cdot \tilde{B}_{12} - \tilde{A}_{12} \cdot \tilde{C}_{12} + \tilde{A}_{13} \cdot \tilde{B}_{22} - \tilde{A}_{14} \cdot \tilde{C}_{22} \\ D_{21} &= \tilde{A}_{31} \cdot \tilde{B}_{11} + \tilde{A}_{32} \cdot \tilde{C}_{11} + \tilde{A}_{33} \cdot \tilde{B}_{21} + \tilde{A}_{34} \cdot \tilde{C}_{21} \\ D_{22} &= \tilde{A}_{31} \cdot \tilde{B}_{12} - \tilde{A}_{32} \cdot \tilde{C}_{12} + \tilde{A}_{33} \cdot \tilde{B}_{22} - \tilde{A}_{34} \cdot \tilde{C}_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{U}_2 &= \tilde{A}_{21} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{22} \cdot \vec{U}_4 + \tilde{A}_{23} \cdot \vec{I}_3 + \tilde{A}_{24} \cdot \vec{I}_4 \\
&= \tilde{A}_{21} \cdot \tilde{B}_{11} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{21} \cdot \tilde{B}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\
&\quad + \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{C}_{11} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{C}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\
&\quad + \tilde{A}_{23} \cdot \tilde{B}_{21} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{23} \cdot \tilde{B}_{22} \cdot \vec{I}_5 \\
&\quad + \tilde{A}_{24} \cdot \tilde{C}_{21} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{24} \cdot \tilde{C}_{22} \cdot \vec{I}_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{I}_2 &= \tilde{A}_{41} \cdot \vec{U}_3 + \tilde{A}_{42} \cdot \vec{U}_4 + \tilde{A}_{43} \cdot \vec{I}_3 + \tilde{A}_{44} \cdot \vec{I}_4 \\
&= \tilde{A}_{41} \cdot \tilde{B}_{11} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{41} \cdot \tilde{B}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\
&\quad + \tilde{A}_{42} \cdot \tilde{C}_{11} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{42} \cdot \tilde{C}_{12} \cdot \vec{I}_5 \\
&\quad + \tilde{A}_{43} \cdot \tilde{B}_{21} \cdot \vec{U}_5 + \tilde{A}_{43} \cdot \tilde{B}_{22} \cdot \vec{I}_5 \\
&\quad + \tilde{A}_{44} \cdot \tilde{C}_{21} \cdot \vec{U}_5 - \tilde{A}_{44} \cdot \tilde{C}_{22} \cdot \vec{I}_5
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \tilde{E} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ -\vec{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ -\vec{I}_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \tilde{A}_{21} \cdot \tilde{B}_{11} + \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{C}_{11} + \tilde{A}_{23} \cdot \tilde{B}_{21} + \tilde{A}_{24} \cdot \tilde{C}_{21} \\
E_{12} &= -\tilde{A}_{21} \cdot \tilde{B}_{12} + \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{C}_{12} - \tilde{A}_{23} \cdot \tilde{B}_{22} + \tilde{A}_{24} \cdot \tilde{C}_{22} \\
E_{21} &= \tilde{A}_{41} \cdot \tilde{B}_{11} + \tilde{A}_{42} \cdot \tilde{C}_{11} + \tilde{A}_{43} \cdot \tilde{B}_{21} + \tilde{A}_{44} \cdot \tilde{C}_{21} \\
E_{22} &= -\tilde{A}_{41} \cdot \tilde{B}_{12} + \tilde{A}_{42} \cdot \tilde{C}_{12} - \tilde{A}_{43} \cdot \tilde{B}_{22} + \tilde{A}_{44} \cdot \tilde{C}_{22}
\end{aligned}$$

Følgende sammenhenger kan også settes opp:

$$\begin{aligned}
\vec{U}_1 &= \vec{U}_2 \\
\vec{I} &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \\
\vec{I} &= I_{11} + I_{21} = -(I_{12} + I_{22}) \\
\vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2
\end{aligned}$$

Matrisene \tilde{D} og \tilde{E} tilsvarer nå henholdsvis matrisene \tilde{A} og \tilde{B} for detektor-sløyfa med matriser for to ledere, se tillegg A.6.

Får da:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= \vec{U}_2 \\ \vec{I}_5 &= (\tilde{D}_{12} + \tilde{E}_{12})^{-1} \cdot (\tilde{E}_{11} - \tilde{D}_{11}) \cdot \vec{U}_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \\ &= (\tilde{D}_{21} + \tilde{E}_{21}) \cdot \vec{U}_5 + (\tilde{D}_{22} - \tilde{E}_{22}) \cdot \vec{I}_5 \\ &= ((\tilde{D}_{21} + \tilde{E}_{21}) + (\tilde{D}_{22} - \tilde{E}_{22}) \cdot (\tilde{D}_{12} + \tilde{E}_{12})^{-1} \cdot (\tilde{E}_{11} - \tilde{D}_{11})) \cdot \vec{U}_5 \\ &= \tilde{F} \cdot \vec{U}_5\end{aligned}$$

$$\vec{U}_5 = \tilde{F}^{-1} \cdot \vec{I} = \tilde{G} \cdot \vec{I}$$

$$\begin{bmatrix} U_{51} \\ U_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$U_{51} = G_{11} \cdot I + G_{12} \cdot (-I) = I(G_{11} - G_{12})$$

$$U_{52} = G_{21} \cdot I + G_{22} \cdot (-I) = I(G_{21} - G_{22})$$

Transferfunksjonen for detektor-sløyfa vil da være gitt av ligningen under:

$$H_{tr} = \frac{U_{51} - U_{52}}{I} = G_{11} - G_{12} - G_{21} + G_{22}$$

A.8 Transferfunksjon for fullstendig modell

Utleddning av transferfunksjon for den fullstendige modellen vist i figur 3.9.

Følgende sammenhenger settes opp:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \\ \vec{U}_4 \\ \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \\ \vec{I}_4 \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{U}_6 \\ \vec{U}_7 \\ \vec{U}_8 \\ \vec{I}_5 \\ \vec{I}_6 \\ \vec{I}_7 \\ \vec{I}_8 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cosh l_2 \tilde{\Gamma} & \sinh l_2 \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l_2 \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l_2 \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{15} & \tilde{A}_{16} & \tilde{A}_{17} & \tilde{A}_{18} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{25} & \tilde{A}_{26} & \tilde{A}_{27} & \tilde{A}_{28} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{35} & \tilde{A}_{36} & \tilde{A}_{37} & \tilde{A}_{38} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} & \tilde{A}_{45} & \tilde{A}_{46} & \tilde{A}_{47} & \tilde{A}_{48} \\ \tilde{A}_{51} & \tilde{A}_{52} & \tilde{A}_{53} & \tilde{A}_{54} & \tilde{A}_{55} & \tilde{A}_{56} & \tilde{A}_{57} & \tilde{A}_{58} \\ \tilde{A}_{61} & \tilde{A}_{62} & \tilde{A}_{63} & \tilde{A}_{64} & \tilde{A}_{65} & \tilde{A}_{66} & \tilde{A}_{67} & \tilde{A}_{68} \\ \tilde{A}_{71} & \tilde{A}_{72} & \tilde{A}_{73} & \tilde{A}_{74} & \tilde{A}_{75} & \tilde{A}_{76} & \tilde{A}_{77} & \tilde{A}_{78} \\ \tilde{A}_{81} & \tilde{A}_{82} & \tilde{A}_{83} & \tilde{A}_{84} & \tilde{A}_{85} & \tilde{A}_{86} & \tilde{A}_{87} & \tilde{A}_{88} \end{bmatrix}$$

Matrisa beregnes ut fra per-lengdeenhet-matrisene for åtte ledere utledet i avsnitt 2.7.

Det kan settes opp følgende sammenhenger mellom vektorene i systemet:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_5 \\ \vec{I}_5 \end{bmatrix} = \tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_6 \\ -\vec{I}_6 \end{bmatrix} = \tilde{B}' \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_6 \\ \vec{I}_6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \cosh l_3 \tilde{\Gamma} & \sinh l_3 \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh l_3 \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh l_3 \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_7 \\ \vec{I}_7 \end{bmatrix} = \tilde{C} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_9 \\ \vec{I}_9 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \cosh x \tilde{\Gamma} & \sinh x \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh x \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh x \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_8 \\ \vec{I}_8 \end{bmatrix} = \tilde{D} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_9 \\ -\vec{I}_9 \end{bmatrix} = \tilde{D}' \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_9 \\ \vec{I}_9 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \cosh (l-x) \tilde{\Gamma} & \sinh (l-x) \tilde{\Gamma} \tilde{Z}_0 \\ \sinh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \tilde{Z}_0^{-1} & \cosh (l-x) \tilde{\Gamma}^T \end{bmatrix}$$

\tilde{B} , \tilde{C} og \tilde{D} beregnet ut fra per-lengdeenhet-matrisene for to ledere også utledet i avsnitt 2.7.

Definerer følgende vektorer:

$$\tilde{I}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$\vec{I}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{I} \end{bmatrix}$$

Dette gir:

$$\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot \tilde{I}_{-1}$$

$$\tilde{D}' = \tilde{D} \cdot \tilde{I}_{-1}$$

Følgende sammenhenger kan settes opp:

$$\vec{U}_1 = \vec{U}_2$$

$$\vec{U}_3 = \vec{U}_4$$

$$\vec{I}_3 = -\vec{I}_4$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

Definerer så noen nye vektorer:

$$V_i = \begin{bmatrix} \vec{U}_i \\ \vec{I}_i \end{bmatrix}$$

Kan da sette opp en ny sammenheng, hvor elementene i matrisa \tilde{A}' er en omordning av elementene i \tilde{A} .

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \tilde{A}' \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_5 \\ \vec{V}_6 \\ \vec{V}_7 \\ \vec{V}_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}' &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{15} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{16} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{17} & \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{18} \\ \tilde{A}_{51} & \tilde{A}_{55} & \tilde{A}_{52} & \tilde{A}_{56} & \tilde{A}_{53} & \tilde{A}_{57} & \tilde{A}_{54} & \tilde{A}_{58} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{25} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{26} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{27} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{28} \\ \tilde{A}_{61} & \tilde{A}_{65} & \tilde{A}_{62} & \tilde{A}_{66} & \tilde{A}_{63} & \tilde{A}_{67} & \tilde{A}_{64} & \tilde{A}_{68} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{35} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{36} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{37} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{38} \\ \tilde{A}_{71} & \tilde{A}_{75} & \tilde{A}_{72} & \tilde{A}_{76} & \tilde{A}_{73} & \tilde{A}_{77} & \tilde{A}_{74} & \tilde{A}_{78} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{45} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{46} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{47} & \tilde{A}_{44} & \tilde{A}_{48} \\ \tilde{A}_{81} & \tilde{A}_{85} & \tilde{A}_{82} & \tilde{A}_{86} & \tilde{A}_{83} & \tilde{A}_{87} & \tilde{A}_{84} & \tilde{A}_{88} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{A}'_{11} & \tilde{A}'_{12} & \tilde{A}'_{13} & \tilde{A}'_{14} & \tilde{A}'_{15} & \tilde{A}'_{16} & \tilde{A}'_{17} & \tilde{A}'_{18} \\ \tilde{A}'_{21} & \tilde{A}'_{22} & \tilde{A}'_{23} & \tilde{A}'_{24} & \tilde{A}'_{25} & \tilde{A}'_{26} & \tilde{A}'_{27} & \tilde{A}'_{28} \\ \tilde{A}'_{31} & \tilde{A}'_{32} & \tilde{A}'_{33} & \tilde{A}'_{34} & \tilde{A}'_{35} & \tilde{A}'_{36} & \tilde{A}'_{37} & \tilde{A}'_{38} \\ \tilde{A}'_{41} & \tilde{A}'_{42} & \tilde{A}'_{43} & \tilde{A}'_{44} & \tilde{A}'_{45} & \tilde{A}'_{46} & \tilde{A}'_{47} & \tilde{A}'_{48} \\ \tilde{A}'_{51} & \tilde{A}'_{52} & \tilde{A}'_{53} & \tilde{A}'_{54} & \tilde{A}'_{55} & \tilde{A}'_{56} & \tilde{A}'_{57} & \tilde{A}'_{58} \\ \tilde{A}'_{61} & \tilde{A}'_{62} & \tilde{A}'_{63} & \tilde{A}'_{64} & \tilde{A}'_{65} & \tilde{A}'_{66} & \tilde{A}'_{67} & \tilde{A}'_{68} \\ \tilde{A}'_{71} & \tilde{A}'_{72} & \tilde{A}'_{73} & \tilde{A}'_{74} & \tilde{A}'_{75} & \tilde{A}'_{76} & \tilde{A}'_{77} & \tilde{A}'_{78} \\ \tilde{A}'_{81} & \tilde{A}'_{82} & \tilde{A}'_{83} & \tilde{A}'_{84} & \tilde{A}'_{85} & \tilde{A}'_{86} & \tilde{A}'_{87} & \tilde{A}'_{88} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ved å bruke sammenhengene i 3.41, 3.42 og 3.43 kan 3.45 uttrykkes slik:

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \tilde{A}' \cdot \begin{bmatrix} \tilde{B}'\vec{V}_6 \\ \vec{V}_6 \\ \tilde{C}'\vec{V}_9 \\ \tilde{D}'\vec{V}_9 \end{bmatrix} = \tilde{E} \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_6 \\ \vec{V}_9 \end{bmatrix}$$

Matrisa \tilde{E} består av noen av elementene i matrisa \tilde{A}' multiplisert med matrisene \tilde{B}' , \tilde{C}' og \tilde{D}' .

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} \tilde{A}'_{11} \cdot \tilde{B}' + \tilde{A}'_{12} & \tilde{A}'_{13} \cdot \tilde{C}' + \tilde{A}'_{14} \cdot \tilde{D}' \\ \tilde{A}'_{21} \cdot \tilde{B}' + \tilde{A}'_{22} & \tilde{A}'_{23} \cdot \tilde{C}' + \tilde{A}'_{24} \cdot \tilde{D}' \\ \tilde{A}'_{31} \cdot \tilde{B}' + \tilde{A}'_{32} & \tilde{A}'_{33} \cdot \tilde{C}' + \tilde{A}'_{34} \cdot \tilde{D}' \\ \tilde{A}'_{41} \cdot \tilde{B}' + \tilde{A}'_{42} & \tilde{A}'_{43} \cdot \tilde{C}' + \tilde{A}'_{44} \cdot \tilde{D}' \end{bmatrix}$$

Videre kan følgende settes opp:

$$\vec{V}_4 = \tilde{I}_{-1}\vec{V}_3$$

$$\vec{V}_2 = \vec{I}_0 + \tilde{I}_{-1}\vec{V}_1$$

Kan da settes opp:

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{I}_0 + \tilde{I}_{-1}\vec{V}_1 \\ \vec{V}_3 \\ \tilde{I}_{-1}\vec{V}_3 \end{bmatrix} = \tilde{E} \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_6 \\ \vec{V}_9 \end{bmatrix}$$

som igjen gir:

$$\begin{aligned} \vec{I}_0 &= ((-\tilde{I}_{-1} \cdot \tilde{E}_{11} + \tilde{E}_{21}) \cdot (\tilde{I}_{-1} \cdot \tilde{E}_{31} - \tilde{E}_{41})^{-1} \\ &\quad \cdot (\tilde{E}_{42} - \tilde{I}_{-1} \cdot \tilde{E}_{42}) + (-\tilde{I}_{-1} \cdot \tilde{E}_{12} + \tilde{E}_{22}))\vec{V}_9 \\ &= F \cdot \vec{V}_9 \\ \vec{V}_9 &= \tilde{F}^{-1} \cdot \vec{I}_0 = \tilde{G} \cdot \vec{I}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} U_{91} \\ U_{92} \\ I_{91} \\ I_{92} \end{bmatrix} \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_{91} &= G_{13} \cdot I - G_{14} \cdot I = I(G_{13} - G_{14}) \\ U_{92} &= G_{23} \cdot I - G_{24} \cdot I = I(G_{23} - G_{24}) \end{aligned}$$

Transferfunksjonen for systemet kan da finnes som vist i ligningen under.

$$H_{tr} = \frac{U_{91} - U_{92}}{I} = G_{13} - G_{14} - G_{23} + G_{24}$$

A.9 Detektorsløyfe med fullstendig modell

Utleddning av transferfunksjon for en detektorsløyfe ved hjelp av den fullstendige modellen som vist i figur 3.10.

Utleddningen baserer seg på samme vektorer og matriser som ble definert i tillegg A.8. Når det ikke er kobling mellom lederne i forskjellige kabler blir en del av elementene i A-matrisa lik null.

\tilde{A}' blir da som gitt under:

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} \tilde{A}'_{11} & \tilde{A}'_{12} & \tilde{A}'_{13} & \tilde{A}'_{14} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{A}'_{21} & \tilde{A}'_{22} & \tilde{A}'_{23} & \tilde{A}'_{24} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{A}'_{31} & \tilde{A}'_{32} & \tilde{A}'_{33} & \tilde{A}'_{34} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{A}'_{41} & \tilde{A}'_{42} & \tilde{A}'_{43} & \tilde{A}'_{44} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{55} & \tilde{A}'_{56} & \tilde{A}'_{57} & \tilde{A}'_{58} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{65} & \tilde{A}'_{66} & \tilde{A}'_{67} & \tilde{A}'_{68} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{75} & \tilde{A}'_{76} & \tilde{A}'_{77} & \tilde{A}'_{78} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{85} & \tilde{A}'_{86} & \tilde{A}'_{87} & \tilde{A}'_{88} \end{bmatrix}$$

Følgende sammenhenger kan da settes opp for systemet.

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}'_{33} & \tilde{A}'_{34} \\ \tilde{A}'_{43} & \tilde{A}'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_7 \\ \vec{V}_8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_7 = \tilde{C} \cdot \vec{V}_9$$

$$\vec{V}_8 = \tilde{D}' \cdot \vec{V}_9$$

$$\vec{V}_4 = \vec{I}_0 + \vec{I}_{-1} \cdot \vec{V}_3$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \tilde{G} \begin{bmatrix} \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \tilde{G} \begin{bmatrix} \tilde{C} \cdot \vec{V}_3 \\ \tilde{D}' \cdot \vec{V}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} \cdot \tilde{C} + \tilde{G}_{12} \cdot \tilde{D}' \\ \tilde{G}_{21} \cdot \tilde{C} + \tilde{G}_{22} \cdot \tilde{D}' \end{bmatrix} \vec{V}_9$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_0 &= (-\tilde{I}_{-1} \cdot (\tilde{G}_{11} \cdot \tilde{C} + \tilde{G}_{12} \cdot \tilde{D}') + (\tilde{G}_{21} \cdot \tilde{C} \\ &\quad + \tilde{G}_{22} \cdot \tilde{D}')) \vec{V}_9 \\ &= \tilde{H} \cdot \vec{V}_9 \\ \vec{V}_9 &= \tilde{H}^{-1} \cdot \vec{I}_0 = \tilde{J} \cdot \vec{I}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} U_{91} \\ U_{92} \\ I_{91} \\ I_{92} \end{bmatrix} \tilde{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix}$$

$$U_{91} = J_{13} \cdot I - J_{14} \cdot I = I(J_{13} - J_{14})$$

$$U_{92} = J_{23} \cdot I - J_{24} \cdot I = I(J_{23} - J_{24})$$

Transferfunksjonen for systemet kan da finnes som vist i ligningen under.

$$H_{tr} = \frac{U_{91} - U_{92}}{I} = J_{13} - J_{14} - J_{23} + J_{24}$$

A.10 Enkel transmisjonlinje med fullstendig modell

Utledning av transferfunksjon for en enkel transmisjonslinje ved hjelp av den fullstendige modellen som vist i figur 3.11.

Utledningen baserer seg på samme vektorer og matriser som ble definert i tillegg A.8. A-matrisa beregnes som om bare to og to av lederne er avhengige, slik at transferfunksjonen kan sammenlignes med transferfunksjoner for den enkle transmisjonslinja beregnet tidligere.

\tilde{A}' blir da som gitt under:

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} \tilde{A}'_{11} & \tilde{A}'_{12} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{A}'_{21} & \tilde{A}'_{22} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{33} & \tilde{A}'_{34} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{43} & \tilde{A}'_{44} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{55} & \tilde{A}'_{56} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{65} & \tilde{A}'_{66} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{77} & \tilde{A}'_{78} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{A}'_{87} & \tilde{A}'_{88} \end{bmatrix}$$

Følgende sammenhenger kan da settes opp for systemet.

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}'_{11} & \tilde{A}'_{12} \\ \tilde{A}'_{21} & \tilde{A}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_5 \\ \vec{V}_6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_5 = \tilde{B}' \cdot \vec{V}_6$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \end{bmatrix} = \tilde{L} \begin{bmatrix} \tilde{B}' \cdot \vec{V}_6 \\ \vec{V}_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} \cdot \tilde{B}' + \tilde{L}_{11} \\ \tilde{L}_{21} \cdot \tilde{B}' + \tilde{L}_{22} \end{bmatrix} \vec{V}_6$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \widetilde{M} \cdot \vec{V}_6 \\ &= (\widetilde{L}_{11}\widetilde{B}' + \widetilde{L}_{12}) \cdot \vec{V}_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_2 &= \widetilde{N} \cdot \vec{V}_6 \\ &= (\widetilde{L}_{21}\widetilde{B}' + \widetilde{L}_{22}) \cdot \vec{V}_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_6 &= \widetilde{N}^{-1} \cdot \vec{V}_2 \\ \vec{V}_1 &= \widetilde{M} \cdot \widetilde{N}^{-1} \cdot \vec{V}_2 \\ &= \widetilde{O} \cdot \vec{V}_2\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{O}_{11} & \widetilde{O}_{12} \\ \widetilde{O}_{21} & \widetilde{O}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 = \widetilde{O}_{21} \cdot \vec{U}_2 = \widetilde{P} \cdot \vec{U}_2$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Transferfunksjonen for systemet kan da finnes som vist i ligningen under.

$$H_{tr} = \frac{U_{21} - U_{11}}{I} = P_{11} - P_{12} - P_{21} + P_{22}$$

