

# Sammenligning av metoder for skjærdimensjonering av betong

**Morten Engen**

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: Juni 2012

Hovedveileder: Jan Arve Øverli, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for konstruksjonsteknikk





## MASTEROPPGAVE 2012

FAGOMRÅDE: Betongkonstruksjoner	DATO: 11062012	ANTALL SIDER: 148
------------------------------------	----------------	-------------------

TITTEL:

### **Sammenligning av metoder for skjærdimensjonering av betong**

Comparison of methods for concrete shear design

UTFØRT AV:

Morten Engen



SAMMENDRAG:

This thesis describes the factors that contribute to the shear capacity of non-prestressed rectangular concrete beams. Four models are presented and discussed. The design routines from Eurocode 2, NS 3473, CSA A23.3 and fib Model Code 2010 are presented and compared to test results from two databases. Eurocode 2, CSA A23.3 and Model Code 2010 show tendencies to underestimate the capacity of beams without shear reinforcement with high amounts of longitudinal reinforcement and low  $a/d$ -ratios. It is believed that this is due to arch action, which is not accounted for in the codes. Eurocode 2, CSA A23.3 and Model Code 2010 also underestimate the capacity for small aggregate sizes. This tendency is slightly pronounced for CSA A23.3 and Model Code 2010 which are based on the simplified modified compression field theory, where aggregate interlock is a key contributor to the capacity. It is thus believed that the capacity reduction due to small aggregate sizes is overestimated. Eurocode 2 seems to underestimate the capacity of beams with low amounts of shear reinforcement, and specifically for beams where the concrete contribution is expected to be high. Setting a low boundary for the crack angle compensates for the neglected concrete contribution. This also leads to a tendency to overestimate the capacity for beams with large amounts of shear reinforcement. CSA A23.3 and Model Code 2010 estimates more realistic crack angles. With the concrete contribution included, the codes have a slightly less tendency to underestimate the capacity for beams with low amounts of shear reinforcement and overestimate the capacity with large amounts for shear reinforcement. A simplified analysis of the size effect shows that the size effect is still present in beams with shear reinforcement. This was confirmed by a better agreement to the test results when the size effect was experimentally included in CSA A23.3.

FAGLÆRER: Jan Arve Øverli

VEILEDER(E): Erik Åldstedt, Jan Arve Øverli

UTFØRT VED: Institutt for konstruksjonsteknikk



## MASTEROPPGAVE 2012

for

*Morten Engen*

### Sammenligning av metoder for skjærdimensjonering av betong

#### *Comparison of Methods for Concrete Shear Design*

Dimensjoneringsprosedyrer bør gi tilstrekkelig sikkerhet, bør bygge på teori som er lett å forstå og bør være økonomiske både med tanke på dimensjoneringsarbeidet og arbeidet på byggeplass.

Det finnes flere metoder for skjærdimensjonering av betong, og hver av disse har sine fordeler og ulemper. Formelverket for dimensjonering finnes i standarden som gjelder i hvert enkelt land. De ulike standardene bygger gjerne på forskjellige teorigrunnlag, men alle metodene har som formål å sikre en duktil bruddform som gir forvarsel ved brudd. Denne oppgaven har som formål å belyse teorien bak flere ulike skjærdimensjoneringsmetoder og sammenligne disse med gjeldende standard i Norge; *Eurokode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner*. Hovedfokuset vil være på dimensjonering av bjelker. Innvirkningen av andre snittkrefter enn skjær skal også vurderes.

Besvarelsen organiseres i henhold til gjeldende retningslinjer.

*Veileder(e):* Jan Arve Øverli, Erik Åldstedt (Multiconsult)

**Besvarelsen skal leveres til Institutt for konstruksjonsteknikk innen 11. juni 2012.**

NTNU, 24. januar, 2012



## Forord

Denne oppgaven er skrevet i løpet av 21 uker fra januar til juni 2012 og er vektet med 30 studiepoeng. Oppgaven er skrevet i samarbeid med Multiconsult og Institutt for konstruksjonsteknikk ved NTNU.

Når betongkonstruksjoner skal dimensjoneres gjøres dette ved hjelp av nasjonale og internasjonale standarder. I Eurokode 2 er skjærkapasiteten for konstruksjonsdeler uten skjærarmering gitt av et empirisk tilpasset uttrykk. Ett slikt uttrykk kan vise seg å gi tilstrekkelig sikkerhet i de fleste situasjoner, men gir ikke brukeren den fysiske forståelsen som kreves for å gjøre de rette tilpasningene for å oppnå en økt kapasitet. Skjærkapasiteten til konstruksjonsdeler med skjærarmering beregnes i Eurokode 2 med en fagverksmodell uten betongbidrag. Denne metoden finnes også i andre standarder, men det finnes også metoder der betongbidraget inkluderes.

Motivasjonen for å skrive denne oppgaven var et ønske om å kunne gi en forklaring på disse metodene og undersøke hvordan den beregnede kapasiteten fra Eurokode 2 skiller seg fra andre dimensjoneringsstandarder.

Det rettes en stor takk til dr.ing. Erik Åldstedt fra Multiconsult for inspirasjon i oppstartsfasen og god veiledning underveis, og førsteamanuensis Jan Arve Øverli ved Institutt for konstruksjonsteknikk for å ha stilt opp som veileder i Trondheim. Det rettes også en stor takk til siv.ing. Dan-Evert Brekke og siv.ing. Nils Ånund Smeland, begge fra Multiconsult, for gode råd og tips både i oppstartsfasen og underveis, og PhD Håvard Nedrelied for gode diskusjoner rundt temaet.

*Morten Engen*  
*Trondheim, juni 2012*





## Sammendrag

Denne oppgaven beskriver hva som påvirker skjærkraftkapasiteten til rektangulære slakkarmerte betongbjelker. Fire modeller; 45° fagverksmodell, fagverksmodell med variabel helning, trykkfeltsteori og modifisert trykkfeltsteori, vil bli diskutert og utledet. Dimensjoneringsrutinene i de fire standardene Eurokode 2, NS 3473, CSA A23.3 og fib Model Code 2010 presenteres, før de sammenlignes ved hjelp av databaser med forsøksresultater for bjelker med og uten skjærarmering.

NS 3473 foreskriver å benytte in situ-fastheter i dimensjonering. De samme reduserte fasthetene oppnås i Eurokode 2 og fib Model Code 2010 ved å innføre faktorene  $\alpha_{cc}$  og  $\alpha_{ct}$  på henholdsvis trykk- og strekkfastheten. Disse fasthetsreduksjonene ble ikke benyttet da standardene ble sammenlignet med forsøksresultatene.

Resultatene fra sammenligningen viste en trend til at kapasitetsuttrykkene i NS 3473 er tilpasset in situ-fastheter, ettersom standarden viste en større tendens til å overestimere kapasiteten enn de andre standardene da det ble benyttet karakteristiske fastheter. Dette gjelder spesielt for bjelker uten skjærarmering, der kapasiteten beregnes ved hjelp av den forenklete metoden. NS 3473 har allikevel vist seg å ha de laveste variasjonskoeffisientene og dermed det mest konsistente sikkerhetsnivået. Standarden ble ikke analysert i dybden med in situ-fastheter og det er derfor ikke trukket flere konklusjoner.

Eurokode 2, CSA A23.3 og Model Code 2010 har alle vist tendenser til å underestimere kapasiteten for bjelker uten skjærarmering med høye lengdearmeringsforhold og lave  $a/d$ -forhold. Dette antas å ha sammenheng med den økte bukapasiteten som kan oppnås for lave  $a/d$ -forhold. Ingen av standardene tar hensyn til bukapasiteten i kapasitetsuttrykkene. Analyser med indre stavmodeller ble ikke gjennomført.

Disse tre standardene har også vist tendenser til å underestimere kapasiteten for bjelker med små tilslagsstørrelser. Dette gjelder spesielt for CSA A23.3 og Model Code 2010 som baserer seg på den forenklete modifiserte trykkfeltsteorien der effekten av aggregate interlock er antatt bestemmende. Det antas derfor at kapasitetsreduksjonen på grunn av små tilslagsstørrelser overvurderes. Eurokode 2, CSA A23.3 og Model Code 2010 ble vurdert til å ha tilnærmet samme sikkerhetsnivå uttrykt med  $\gamma_{mod,5\%} = 0.7$ . Ved å inkludere materialfaktorene oppnådde alle standardene  $\gamma_{mod,5\%} > 1.0$ .

For bjelker med skjærarmering viste Eurokode 2 en tendens til å underestimere kapasiteten når bjelkene inneholder lite skjærarmering. Dette ser ut til å gjelde spesielt i tilfeller der betongbidraget forventes å være stort, og det antas at underestimeringen skyldes at betongbidraget utelates. Standarden kompenserer for dette ved å tillate lave rissvinkler, som også fører til en tendens til å overestimere kapasiteten for bjelker med mye skjærarmering.

CSA A23.3 og Model Code 2010 beregner rissvinkler som stemmer bedre med det som forventes i virkeligheten. Dette kombinert med at betongbidraget inkluderes fører til at standardene underestimerer mindre for lave skjærarmeringsmengder, og ikke har like store tendenser til å overestimere kapasiteten med mye skjærarmering. Totalt ble sikkerhetsnivået i Eurokode 2, CSA A23.3 og Model Code 2010 vurdert til å være  $\gamma_{mod,5\%} = 0.7$ . Ved å inkludere materialfaktorene oppnådde ingen av standardene  $\gamma_{mod,5\%} > 1.0$ . Dette antas å ha sammenheng med at bjelker med høye verdier for  $\rho_w f_{yk}$  ikke oppnår flytespenning i

skjærarmeringen før kollaps og at beregningsmodellene derfor overestimerer kapasiteten.

En forenklet analyse av skalaeffekten viste en tendens til at skalaeffekten fortsatt var til stede for bjelker med skjærarmering. Dette ble bekreftet av et økt sikkerhetsnivå for CSA A23.3 da skalaeffekten ble forsøkt innført i kapasitetsberegningen.

# Innhold

<b>1</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>1</b>
1.1	Formålet med skjærdimensjonering . . . . .	1
1.2	Bruddtyper . . . . .	2
1.3	En typisk skjærttest . . . . .	4
1.4	Utfordringen ved skjærdimensjonering . . . . .	4
1.5	Rapportens oppbygning . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Materialer</b>	<b>7</b>
2.1	Betong . . . . .	7
2.1.1	Bestanddeler . . . . .	7
2.1.2	Fasthet og stivhet i enaksielt trykk . . . . .	8
2.1.3	Fasthet og stivhet i enaksielt strekk . . . . .	11
2.1.4	Fasthet i trykkfelt . . . . .	12
2.2	Stål . . . . .	13
2.2.1	Materialmodell for armeringsstål . . . . .	13
2.3	Andre materialmodeller . . . . .	15
2.3.1	Materialmodell for NS 3473 . . . . .	15
2.3.2	Materialmodell for CSA A23.3 . . . . .	17
2.3.3	Materialmodell for Model Code 2010 . . . . .	18
2.3.4	Materialmodell for modifisert trykkfeltsteori . . . . .	18
2.4	Sammenheng mellom trykk- og strekkfasthet . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Teori</b>	<b>21</b>
3.1	Plastisitetsteori . . . . .	21
3.2	B- og D-regioner . . . . .	22
3.3	Spenningstilstand og rissvinkel . . . . .	23
3.4	Aggregate interlock og armeringens dybeffekt . . . . .	24
3.5	Forholdet mellom skjærspenn og effektiv dybde, $a/d$ . . . . .	26
3.6	Virkning av rissvidde . . . . .	29
3.7	Skala- og tøyningseffekt . . . . .	31
3.7.1	Tradisjonell statistisk teori . . . . .	31
3.7.2	Teori med bakgrunn i bruddmekanikk . . . . .	31
3.7.3	Teori med bakgrunn i asymmetri . . . . .	32
3.7.4	Teori med bakgrunn i armeringens evne til å fordele riss . . . . .	32
3.7.5	Tøyningseffekt . . . . .	33
3.8	Virkningen av aksialkraft . . . . .	33
3.9	Minimumskrav til skjærarmering . . . . .	34
3.10	Oppsummering . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Beregningsmodeller</b>	<b>37</b>
4.1	45° fagverksmodell . . . . .	37
4.2	Fagverksmodell med variabel helning . . . . .	39
4.3	Trykkfeltsteori . . . . .	40
4.3.1	Likevektsbetraktninger . . . . .	41

4.3.2	Tøyningskompatibilitet . . . . .	42
4.3.3	Materialmodell . . . . .	42
4.3.4	Vinkelen $\theta$ før skjærarmeringen flyter . . . . .	42
4.3.5	Kapasitetsformler . . . . .	43
4.4	Modifisert trykkfeltsteori . . . . .	44
4.4.1	Likevektsbetraktninger . . . . .	44
4.4.2	Tøyningskompatibilitet . . . . .	45
4.4.3	Løsningsmetode . . . . .	45
4.4.4	Beregning av rektangulær bjelke . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Standarder</b>	<b>49</b>
5.1	Eurokode 2 . . . . .	49
5.1.1	Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler uten beregningsmessig behov for skjærarmering . . . . .	49
5.1.2	Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler med beregningsmessig behov for skjærarmering . . . . .	51
5.1.3	Krav til armeringsmengde og senteravstand . . . . .	53
5.1.4	Reduksjon av laster . . . . .	53
5.1.5	Tilleggskraft i lengdearmering . . . . .	54
5.1.6	Dimensjoneringsprosedyre . . . . .	54
5.2	NS 3473 . . . . .	55
5.2.1	Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler uten beregningsmessig behov for skjærarmering . . . . .	56
5.2.2	Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler med beregningsmessig behov for skjærarmering . . . . .	57
5.2.3	Krav til armeringsmengde og senteravstand . . . . .	58
5.2.4	Reduksjon av laster . . . . .	59
5.2.5	Tilleggskraft i lengdearmering . . . . .	59
5.3	CSA A23.3 . . . . .	60
5.3.1	Betongbidraget $V_c$ . . . . .	60
5.3.2	Armeringsbidraget $V_s$ . . . . .	60
5.3.3	Faktoren $\beta$ . . . . .	61
5.3.4	Rissvinkelen $\theta$ . . . . .	62
5.3.5	Krav til armeringsmengde og senteravstand . . . . .	63
5.3.6	Reduksjon av laster . . . . .	63
5.3.7	Kontroll av lengdearmeringen . . . . .	63
5.4	Model Code 2010 . . . . .	64
5.4.1	Nivå I . . . . .	65
5.4.2	Nivå II . . . . .	66
5.4.3	Nivå III . . . . .	66
5.4.4	Krav til armeringsmengde og senteravstand . . . . .	67
5.4.5	Reduksjon av laster . . . . .	67
5.4.6	Kontroll av lengdearmeringen . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Evaluering av standarder</b>	<b>69</b>
6.1	Databaser . . . . .	69
6.1.1	Materialparametere . . . . .	69
6.1.2	Uten skjærarmering . . . . .	70
6.1.3	Med skjærarmering . . . . .	72

6.2	Analysemetode . . . . .	74
6.3	Response-2000 . . . . .	75
6.4	Uten skjærarmoring . . . . .	76
6.4.1	Korruperte forsøksresultater . . . . .	76
6.4.2	Eurokode 2 . . . . .	77
6.4.3	NS 3473 . . . . .	78
6.4.4	CSA A23.3 . . . . .	79
6.4.5	Model Code 2010 . . . . .	80
6.4.6	Oppsummering . . . . .	81
6.5	Med skjærarmoring . . . . .	84
6.5.1	Korruperte forsøksresultater . . . . .	84
6.5.2	Eurokode 2 . . . . .	85
6.5.3	NS 3473 . . . . .	86
6.5.4	CSA A23.3 . . . . .	88
6.5.5	Model Code 2010 . . . . .	89
6.5.6	Skalaeffekten . . . . .	90
6.5.7	Effekten av minimum skjærarmoring . . . . .	92
6.5.8	Oppsummering . . . . .	95
6.6	Diskusjon av resultater . . . . .	97
6.6.1	Uten skjærarmoring . . . . .	97
6.6.2	Med skjærarmoring . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Konklusjoner</b>	<b>105</b>
7.1	Uten skjærarmoring . . . . .	105
7.2	Med skjærarmoring . . . . .	106
7.3	Samlet vurdering . . . . .	107
<b>8</b>	<b>Forslag til videre arbeid</b>	<b>109</b>
	<b>Vedlegg A Betraktning av betongelement</b>	<b>111</b>
A.1	Likevekt . . . . .	111
A.2	Tøyningsskompatibilitet . . . . .	113
A.3	Spenninger i riss . . . . .	114
	<b>Vedlegg B Resultater fra evaluering av standarder</b>	<b>115</b>
	<b>Vedlegg C MatLab-skript</b>	<b>125</b>
C.1	Databaser . . . . .	125
C.2	db_hoved . . . . .	126
C.3	db_minarm . . . . .	127
C.4	Funksjoner . . . . .	128
	<b>Referanser</b>	<b>131</b>

## Figurer

1.1	Belastning av bjelke med og uten skjærarmering . . . . .	1
1.2	Bøyeskjærbrudd . . . . .	2
1.3	Knusning av steg . . . . .	3
1.4	Hovedtrekkbrudd . . . . .	3
1.5	En typisk skjærttest . . . . .	4
2.1	Respons for tilslag, betong og herdnet sementpasta i trykk . . . . .	8
2.2	Ikkelineær fordeling for tre fasthetsklasser . . . . .	9
2.3	Parabel-rektangel-fordeling for B30 . . . . .	10
2.4	Bilineær fordeling for B30 . . . . .	11
2.5	Armeringsstål i strekktest . . . . .	14
2.6	Dimensjoneringsforutsetninger for armeringsstål B500NC . . . . .	15
3.1	Bjelke med B- og D-regioner . . . . .	22
3.2	Spenningsfordeling over tverrsnitt uten og med bøyeriss . . . . .	23
3.3	Tre spenningstilstander med resulterende rissvinkel . . . . .	25
3.4	Kamstruktur . . . . .	26
3.5	Utnyttelse av momentkapasitet som funksjon av $a/d$ for rektangulær bjelke uten skjærarmering . . . . .	27
3.6	Fritt opplagt bjelke med bøyeriss . . . . .	29
3.7	Rissmoment . . . . .	34
4.1	Tradisjonell $45^\circ$ fagverksmodell . . . . .	37
4.2	Beregningsmodell for indre krefter i $45^\circ$ fagverksmodell . . . . .	38
4.3	Beregningsmodell for indre krefter i fagverksmodellen med variabel helning . . . . .	39
4.4	$\sin \theta \cos \theta$ og $\cot \theta$ for $20^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ . . . . .	40
4.5	Beregningsmodell for indre krefter med trykkfeltsteori . . . . .	41
5.1	Trykkdiagonaler nær opplegg i fagverksmodell . . . . .	53
6.1	Dimensjonsløs skjærspenning for database uten skjærarmering . . . . .	71
6.2	Spredning i parametere for database uten skjærarmering . . . . .	71
6.3	Dimensjonsløs skjærspenning for database med skjærarmering . . . . .	72
6.4	Spredning i parametere for database med skjærarmering . . . . .	73
6.5	$\gamma_{mod}$ for Eurokode 2 uten skjærarmering, inkludert korrupte forsøksresultater . . . . .	76
6.6	$\gamma_{mod}$ for Eurokode 2 uten skjærarmering . . . . .	77
6.7	$\gamma_{mod}$ for NS 3473 uten skjærarmering . . . . .	78
6.8	$\gamma_{mod}$ for CSA A23.3 uten skjærarmering . . . . .	79
6.9	$\gamma_{mod}$ for Model Code 2010 uten skjærarmering . . . . .	80
6.10	$\gamma_{mod,5\%}$ for standardene uten skjærarmering . . . . .	81
6.11	$\gamma_{mod,5\%}$ for standardene uten skjærarmering med $\rho_l < 2\%$ og $a/d > 3$ . . . . .	82
6.12	$\gamma_{mod}$ for Eurokode 2 med skjærarmering, inkludert korrupte forsøksresultater . . . . .	84
6.13	$\gamma_{mod}$ for Eurokode 2 med skjærarmering . . . . .	85
6.14	$\gamma_{mod}$ for forenklet metode i NS 3473 med skjærarmering . . . . .	86

6.15	$\gamma_{mod}$ for fagverksmodellen i NS 3473 med skjærarmering . . . . .	87
6.16	$\gamma_{mod}$ for CSA A23.3 med skjærarmering . . . . .	88
6.17	$\gamma_{mod}$ for Model Code 2010 med skjærarmering . . . . .	89
6.18	$\tau_{cu}$ for forsøksresultatene med skjærarmering uten armeringsbidraget . . . . .	90
6.19	$\tau_u$ for forsøksresultatene med skjærarmering sortert for $\rho_w f_{yk}$ . . . . .	91
6.20	Effekten av minimum skjærarmering for Eurokode 2 . . . . .	93
6.21	Effekten av minimum skjærarmering for NS 3473 . . . . .	93
6.22	Effekten av minimum skjærarmering for CSA A23.3 . . . . .	94
6.23	Effekten av minimum skjærarmering for Model Code 2010 . . . . .	94
6.24	$\gamma_{mod,5\%}$ for standardene med skjærarmering . . . . .	95
6.25	$\gamma_{mod}$ for NS 3473 uten skjærarmering, beregnet med konstruksjonsfastheter . . . . .	99
A.1	Ortogonal armert betongelement belastet i planet . . . . .	111
A.2	Gjennomsnittlige betongspenninger fremstilt ved hjelp av Mohrs sirkel . . . . .	112
A.3	Tøyningstilstand fremstilt ved hjelp av Mohrs sirkel . . . . .	113
A.4	1-1: Spenningstilstand i riss, 2-2: Spenningstilstand i urisset betong . . . . .	114

## Tabeller

6.1	Resultater for standardene uten skjærarmering . . . . .	83
6.2	Resultater for standardene uten skjærarmering for $a/d > 3.0$ og $\rho_l < 2\%$ . . . . .	83
6.3	Resultater for standardene uten skjærarmering inkludert materialfaktorer . . . . .	83
6.4	Resultater for standardene med skjærarmering . . . . .	96
6.5	Resultater for standardene med skjærarmering inkludert materialfaktorer . . . . .	96
6.6	Parametere som standardene tar hensyn til . . . . .	101
B.1	Resultater uten skjærarmering sortert etter $f_{ck}$ . . . . .	115
B.2	Resultater uten skjærarmering sortert etter $d$ . . . . .	116
B.3	Resultater uten skjærarmering sortert etter $\rho_l$ . . . . .	117
B.4	Resultater uten skjærarmering sortert etter $a/d$ . . . . .	118
B.5	Resultater uten skjærarmering sortert etter $d_g$ . . . . .	119
B.6	Resultater med skjærarmering sortert etter $d$ . . . . .	120
B.7	Resultater med skjærarmering sortert etter $f_{ck}$ . . . . .	121
B.8	Resultater med skjærarmering sortert etter $\rho_l$ . . . . .	122
B.9	Resultater med skjærarmering sortert etter $\rho_w f_{yk}$ . . . . .	123
C.1	Struktur for <i>dbuarm.txt</i> . . . . .	125
C.2	Struktur for <i>dbmarm.txt</i> . . . . .	125
C.3	Struktur for <i>db_tot</i> uten skjærarmering . . . . .	127
C.4	Struktur for <i>db_tot</i> med skjærarmering . . . . .	127
C.5	Struktur for <i>db_tot</i> med minimumsarmering . . . . .	129





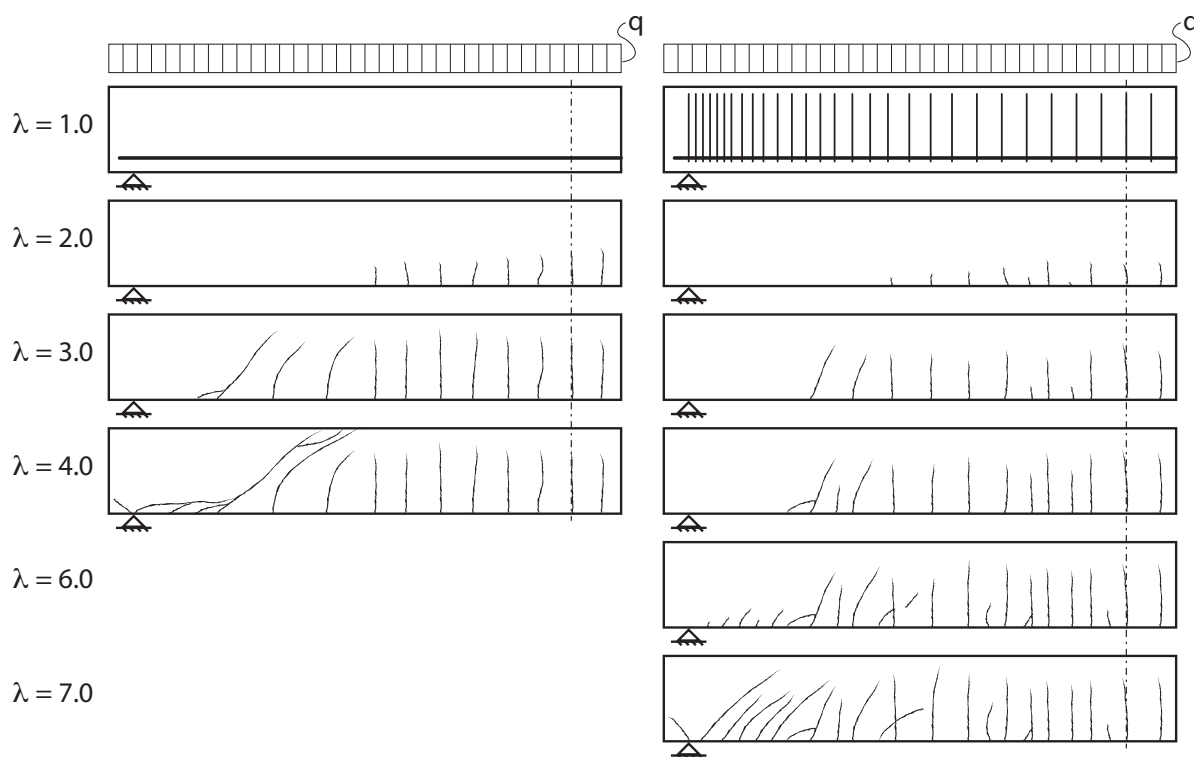
# 1 Introduksjon

Jakob Bernoullis allment aksepterte hypotese fra ca. 1700 om at plane tverrsnitt forblir plane, formalisert med Euler-Bernoulli bjelketeori, danner grunnlaget for dimensjonering av betong for bøyemoment (Collins, Bentz, Sherwood & Xie 2007). Selv etter mer enn 40 års forskning er ikke verdens betongmiljø enige om én rasjonell teori for hvordan betong bør dimensjoneres for skjærkraft. I Norge dimensjoneres det fortsatt etter en modifisert utgave av Ritter og Mörschs fagverksmodell som ble utviklet på starten av 1900-tallet.

Denne oppgaven skal belyse noen av teoriene som er blitt utviklet og se på hvordan disse danner grunnlaget for dimensjoneringsmetodene i fire dimensjoneringsstandarder. For å få et innblikk i formålet med skjærdimensjonering vil det innledes med hva som skjer når en betongbjelke blir utsatt for en økende skjærkraft.

## 1.1 Formålet med skjærdimensjonering

Figur 1.1 viser til venstre en betongbjelke uten skjærarmering utsatt for økende jevnt fordelt belastning, og til høyre den samme bjelken med skjærarmering. Lastnivået uttrykkes her med en lastproporsjonalitetsfaktor  $\lambda$ .



**Figur 1.1:** Belastning av bjelke med og uten skjærarmering (Collins & Mitchell 1991, etter figur 7-13)

I begge tilfellene oppstår det vertikale bøyeriss i underkant av bjelken ved omtrent

samme lastnivå. Fra de vertikale bøyerissene utvikles det diagonale riss med omtrent  $45^\circ$  helning i forhold til bjelkens lengdeakse. I bjelken uten skjærarmering utvikles et fullstendig bøyeskjærbrudd for  $\lambda \approx 4$ , litt høyere enn lastnivået som initierte de diagonale rissene.

Bjelken med skjærarmering fortsetter å bære last og det observeres at det dannes diagonale riss med spissere vinkel. Hvis bjelken er tilstrekkelig armert for skjærkraft vil det til slutt oppstå bøyebrydd i midtsnittet. Bjelken med skjærarmering har altså en mer duktil oppførsel enn bjelken uten.

I motsetning til kollaps på grunn av bøyning er skjærbrudd ofte sprøe og kan skje uten særlig forvarsel (Collins, Bentz & Sherwood 2008). Når en betongkonstruksjon dimensjoneres er det i de aller fleste tilfeller dimensjonering for bøyemoment som gjøres først. Denne prosedyren skal sikre at strekk- og trykksonen klarer å motstå de indre kraftresultantene på grunn av det påførte momentet. Konstruksjonen vil deretter bli sjekket for skjærkraft, og hvis det er nødvendig legges det inn armering som sikrer at strekk- og trykksonen fortsetter å oppføre seg som én enhet (Collins et al. 2007).

Dette eksempelet oppsummerer formålet med å dimensjonere for skjærkraft:

Formålet med skjærdimensjonering er å unngå tidlige, sprøe skjærbrudd som vist i tilfellet med bjelken uten skjærarmering. Vi ønsker å dimensjonere konstruksjonsdeler slik at skjærkapasiteten blir høy nok til å sikre et duktilt bøyebrydd som vist for bjelken med skjærarmering (Collins & Mitchell 1991, egen oversettelse av 7.4).

## 1.2 Bruddtyper

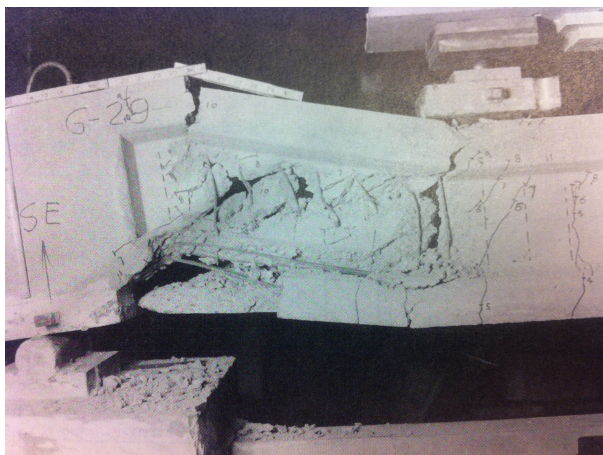
Dette avsnittet beskriver fire forskjellige bruddtyper.



**Figur 1.2:** Bøyeskjærbrudd (Wight & MacGregor 2009, 6.1)

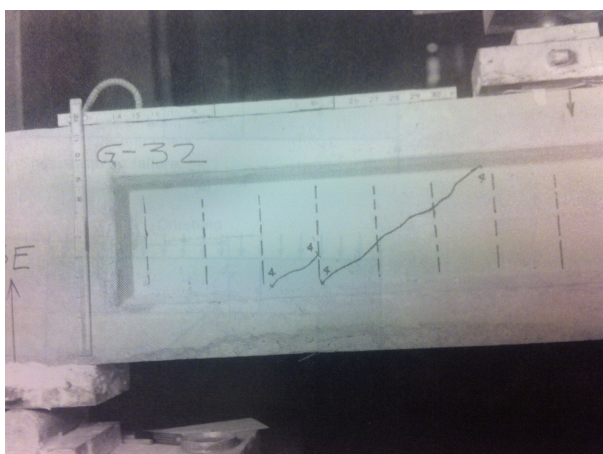
Figur 1.2 viser det som kalles bøyeskjærbrudd. Vertikale bøyeriss initierer skrå skjærriss som utvikles til brudd. Bruddtypen vil oppstå for en slank bjelke uten skjærarmering og er en typisk sprø bruddtype uten forvarsel.

Hvis bjelken i figur 1.2 var utført med skjærarmering ville denne bruddtypen oppføre seg annerledes. Når det diagonale risset propagerer og samtidig rissvidden øker vil skjærarmeringen som krysser risset etter hvert nå flytegrensen og bjelken kollapse.



**Figur 1.3:** Knusning av steg (Wight & MacGregor 2009, Figur 6-25)

Når minste hovedspenning overskrider betongens trykkfasthet kan det oppstå trykkbrudd som vist i figur 1.3. Bruddtypen karakteriseres av at betongen i steget skaller av. Bruddtypen kan forekomme for I- eller T-bjelker som har tykkelsesvariasjon over dybden, men er i de fleste tilfeller ikke dimensjonerende for rektangulære bjelker.

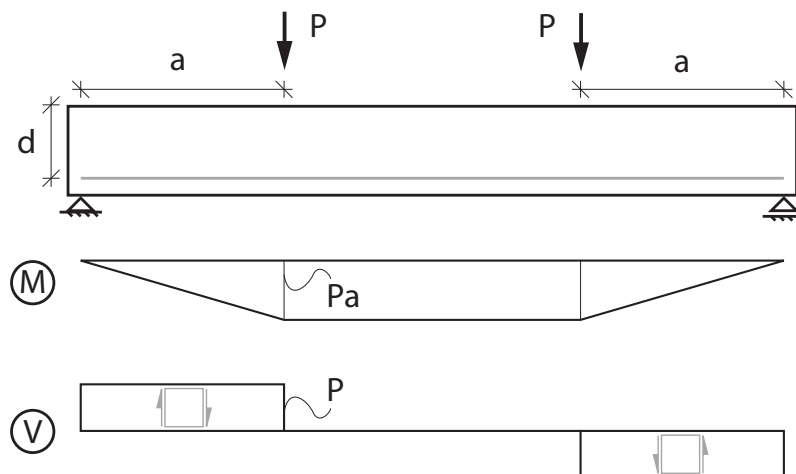


**Figur 1.4:** Hovedstrekbrudd (Wight & MacGregor 2009, Figur 6-12(a))

I et punkt der største hovedspenning overskrider betongens strekkfast uten at det har oppstått vertikale bøyeriss vil det oppstå hovedstrekbrudd som vist i figur 1.4. Denne bruddtypen oppstår i steget i tverrsnittet nær punktet med største skjærkraft, for eksempel ved opplegget i en fritt opplagt bjelke eller ved en konsentrert last. Bruddtypen krever at tverrsnittet foruten å være belastet i skjær også er utsatt for store aksielle trykkrefter for eksempel på grunn av forspenning.

### 1.3 En typisk skjærttest

Figur 1.5 viser en typisk firepunkts skjærttest med tilhørende moment- og skjærkraftdiagram. Det sentrale området er utsatt for ren bøyning og områdene mot oppleggene, skjærspennet, er utsatt for konstant skjærkraft og lineært avtakende moment. Denne testen er enkel å utføre og derfor finnes det flere tusen resultater verden rundt. Resultatene fra slike tester vil bli brukt videre i denne rapporten.



Figur 1.5: En typisk skjærttest

Ulempen med en slik test er at belastningstilstanden er forskjellig i alle snittene langs skjærspennet. Dette gjør det tilnærmet umulig å finne en rasjonell sammenheng mellom den ytre lasten og spenningen i skjærarmingen ut fra den maksimale lasten (Bentz, Vecchio & Collins 2006). Allikevel, hvis en slik test beregnes korrekt med en beregningsmodell basert på en rasjonell teori er det en god indikasjon på at teorien stemmer.

### 1.4 Utfordringen ved skjærdimensjonering

Som vist i denne rapporten er betongens skjærkapasitet kompleks og påvirkes av en rekke parametere. Å utvikle en teori som tar hensyn til alle disse parameterne er derfor hovedutfordringen ved skjærdimensjonering. Hvis en teori eller en kapasitetsformel i en dimensjoneringsstandard ikke tar med de parameterne som er viktige, kan det føre til at ingeniøren som skal dimensjonere konstruksjonsdelen for eksempel modifierer en parameter som ut fra formelen gir bedre kapasitet, men som i virkeligheten også har sekundære negative effekter.

En dimensjoneringsmetode bør i stedet være godt forankret i en rasjonell teori som gir en god fysisk beskrivelse av problemet. På den måten kan ingeniøren både modifisere riktig parameter for å øke kapasiteten og samtidig få økt forståelse av problemet (Bentz & Collins 2006).

Hvis det ut fra analyser viser seg at en teori ikke kan beskrive skjærkapasiteten tilfredsstillende, påpeker Kani at forskere må være forberedt på to ting (Kani, Huggins & Wittkopp 1979, egen oversettelse av 1.3):

1. Angripe problemet uten teori, det vil si uten å basere seg på tidligere teorier knyttet til skjærbrudd.
2. Finne parametere som enda ikke er vurdert å ha innflytelse på skjærkapasiteten. Forskeren bør vurdere alle kilder til brudd og kun bygge teorien på antakelser som er hevet over all tvil.

## 1.5 Rapportens oppbygning

### **Kapittel 2:**

Materialene betong og stål beskrives. Det argumenteres for materialoppførsel og materialmodellene i Eurokode 2, NS 3473, CSA A23.3 og Model Code 2010 presenteres.

### **Kapittel 3:**

Viktige parametere som påvirker skjærkapasiteten til armert betong blir lagt frem og argumentert for. Kapitlet fokuserer på rektangulære, slakkarmerte bjelker uten forspenning eller andre aksialkrefter.

### **Kapittel 4:**

Fire beregningsmodeller for skjærkapasiteten utledes for rektangulære, slakkarmerte betongbjelker.

### **Kapittel 5:**

Skjærkapasiteten med og uten skjærarmering i de fire standardene presenteres. Andre faktorer som for eksempel minimumsarmering og tilleggs kraft i lengdearmeringen blir også inkludert.

### **Kapittel 6:**

De fire standardene sammenlignes med forsøksresultater fra bjelker med og uten skjærarmering. Resultatene diskuteres med hensyn på sikkerhetsnivået og hvor godt standardene klarer å beskrive den virkelige kapasiteten.

### **Kapittel 7:**

Det trekkes konklusjoner fra evalueringen i kapittel 6.

### **Kapittel 8:**

Forslag til videre arbeid med bakgrunn i denne rapporten presenteres.



## 2 Materialer

Når en konstruksjon utsettes for laster, vil den deformeres, og indre krefter vil være i likevekt med den ytre belastningen. For å kunne analysere de indre kreftene og videre dimensjonere konstruksjonen er det essensielt å ha kjennskap til materialenes sammenheng mellom spenning og tøyning. Dette er spesielt viktig for armert betong som er et komposittmateriale. I armert betong må ikke bare kreftene på stål og betong være i likevekt med hverandre og de ytre lastene, men tøyningene må også være kompatible (Mosley, Bungey & Hulse 2007), bortsett fra i likevektsmodeller der det normalt sees bort fra tøyningsskompatibilitet.

I dette kapittelet vil stål og betong presenteres med tilhørende materialmodeller. Først vil formuleringen i Eurokode 2 bli gjennomgått i detalj før formuleringen i NS 3473, CSA A23.3 og Model Code 2010 blir presentert.

### 2.1 Betong

Ettersom betong er et sammensatt materiale er det nødvendig å kjenne til de ulike bestanddelene. Bestanddelene blir derfor gjennomgått før materialmodellen presenteres.

#### 2.1.1 Bestanddeler

Hovedbestanddelene i betong er vann, sement og tilslag, eller sementpasta og tilslag (Collins & Mitchell 1991). Sement består av kalsiumforbindelser i ulike fraksjoner. Fordelingen av de ulike fraksjonene kan justeres og påvirker for eksempel sulfatresistens, tidlig fasthet og varmeutvikling. Den kjemiske reaksjonen mellom vann og sement kalles hydratasjon og danner bindemiddel som gir betongen styrke.

For å oppnå tilnærmet full hydratasjon trengs det omtrent 25% vann sammenlignet med vekten av sement. Hvis det tilsettes mer vann enn dette vil det overflødig vannet resultere i økt porøsitet og dermed lavere fasthet. Et lavt masseforhold mellom vann og sement,  $w/c$ -tall, er altså gunstig med tanke på styrke og bestandighet. I praksis vil  $w/c = 0.3$  være det laveste man kan oppnå.

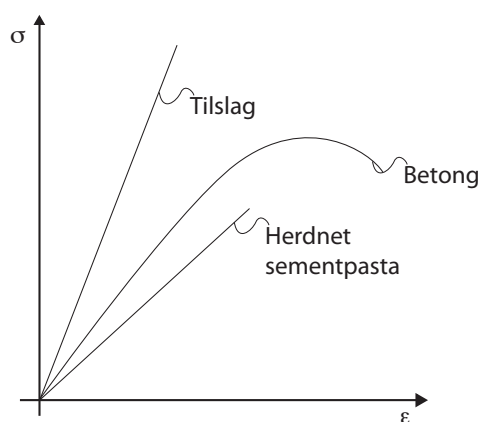
Deler av sementinnholdet kan erstattes av såkalte pozzolaner som for eksempel flyveaske og silikastøv. Pozzolaner reagerer ikke direkte med vann på samme måte som sement, men reagerer med stoffer som felles ut når sement reagerer med vann, og danner bindemiddel. Pozzolaner påvirker styrke og porøsitet ettersom de bidrar til en høyere grad av hydratasjon (CEN 2011). NS-EN 197-1 (CEN 2011) angir krav til sementens sammensetning.

For å påvirke betongens egenskaper med tanke på for eksempel bearbeidbarhet, bestandighet og herdetid kan det tilsettes ulike tilsetningsstoffer.

Tilslaget som benyttes skal i henhold til NS-EN 12620 ha passende størrelse, form og kornfordeling, ha tilstrekkelig motstand mot knusning og slitasje, være ikke-porøs, volumstabil og ikke være alkali-silikareaktivt. Tilslaget skal heller ikke tilføre klorider og organisk stoff til betongen (CEN 2002).

### 2.1.2 Fasthet og stivhet i enaksielt trykk

Fasthet og stivhet måles på prøvestykker med krav fra NS-EN 12390-1 (CEN 2001). NS-EN 12390-1 krever at prøvestykkene enten skal ha form som en terning eller en sylinder med høyde lik to diametere. Eurokode 2 (CEN 2004) baserer betongens fasthet på sylinderfastheten, og hvis ikke annet er spesifisert forstås videre fasthet i denne rapporten som sylinderfasthet. Fasthetsklassene gitt av Eurokode 2 har navn gitt av bokstaven C og forholdet mellom sylinderfastheten og terningfastheten. Betong med sylinderfasthet 30 MPa og terningfasthet 37 MPa heter dermed C30/37 (Jacobs 2008). I Norge angis fasthetsklassene med en B etterfulgt av verdien for karakteristisk sylinderfasthet. Den norske betegnelsen for C30/37 er dermed B30. Eurokode 2 tillater å benytte fasthetsklassene B20-B95 (CEN 2004, NA.3.1.2).



**Figur 2.1:** Respons for tilslag, betong og herdnet sementpasta i trykk (Collins & Mitchell 1991, etter figur 3-3)

Den enaksielle trykkfastheten til betong finnes ved sentrisk belastning av et prøvestykke med økende last opp til brudd. Metoden beskrives av NS-EN 12390-3 (CEN 2009a). Den karakteristiske trykkfastheten, verdien med 5% sannsynlighet for underskridelse, benevnes  $f_{ck}$ .  $f_{ck}$  kan beregnes fra  $f_{cm}$  ved hjelp av følgende uttrykk (CEN 2004, Tabell 3.1), der  $f_{cm}$  er midlere trykkfasthet.

$$f_{ck} = f_{cm} - 8 \text{ MPa} \quad (2.1)$$

Som vist i figur 2.1 har både tilslag og herdnet sementpasta tilnærmet lineær respons i enaksielt trykk. Betong har derimot en ikke-lineær respons (Collins & Mitchell 1991). I overgangssonen mellom sementpasta og tilslag vil det oppstå små sprekker allerede for relativt lave spenninger. Disse sprekke mykner betongen og gir responsen en typisk avrundet form. En annen kilde til ikkelineær respons er interaksjon mellom prøvestykket og lastplatene (Kotsovos & Pavlovic 1999). Lastplatene av stål vil ha en tendens til å hindre prøvestykket i å utvide seg på tvers av belastningsretningen. Som resultat av dette vil sonene nær lastplatene ha en mer kompleks triaksiell spenningstilstand enn den enaksielle som det er ønsket å ha i forsøket. Forsøk der friksjonen mellom lastplatene



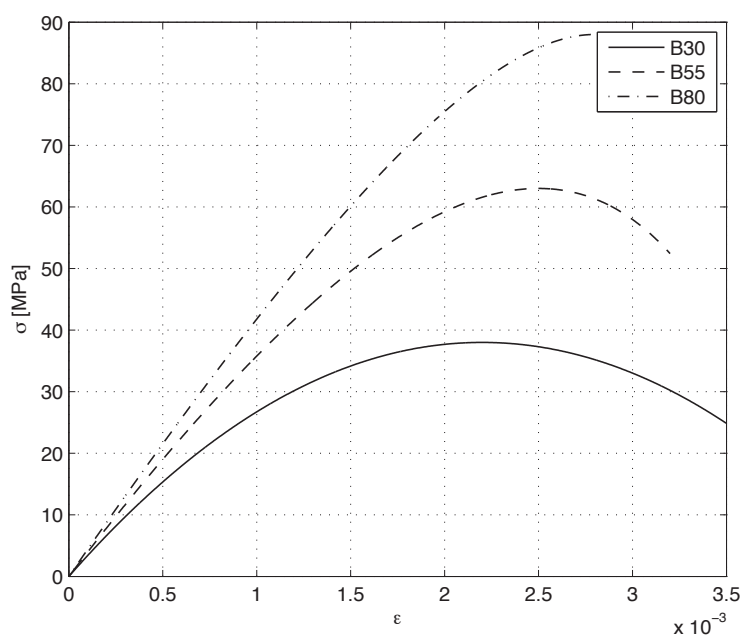
og prøvestykket er variert har vist at prøvestykket har mistet all lastbæring så fort den maksimale spenningen er nådd hvis friksjonen elimineres.

Betongens stivhet, E-modulen, avhenger av bestanddelene og da spesielt av tilslaget, og vil ligge mellom stivheten til tilslaget og sementpastaen (CEN 2004). Hvis det foreligger verdier for E-modulene til herdnet sementpasta og tilslag, kan betongens E-modul estimeres fra kompositt-teori (Collins & Mitchell 1991). Eurokode 2 angir at E-modulen forenklet kan estimeres som sekantmodulen,  $E_{cm}$ , mellom  $\sigma_c = 0$  og  $\sigma_c = 0.4f_{cm}$ , der  $f_{cm}$  er midlere trykkfasthet. For å teste E-modulen belastes et prøvestykke opp til  $\sigma_c = 0.4f_{cm}$  før det gradvis avlastes. Ved å gjøre denne operasjonen fjernes effekten av redistribusjon av spenninger og initiell setning på grunn av lukking av porer og riss. Når prøvestykket så belastes på nytt opp til  $\sigma_c = 0.4f_{cm}$  vil responsen være tilnærmet lineær (Mosley et al. 2007). Eurokode 2 angir følgende sammenheng mellom betongens midlere trykkfasthet og E-modul (CEN 2004):

$$E_{cm} = 22000 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} \quad (2.2)$$

Sekantmodulen kan brukes ved analyse av korttidseffekter. Ved analyse av langtids-effekter vil kryp og svinn, lasthistorikken og betongens styrkeutvikling over tid påvirke E-modulen (Mosley et al. 2007).

Eurokode 2 (CEN 2004, Ligning 3.14) angir den ikkelineære sammenhengen mellom spenning og tøyning med uttrykket gitt i (2.3) som er gyldig for  $0 < |\epsilon_c| < |\epsilon_{cu1}|$ , der  $\epsilon_{cu1}$  er den nominelle tøyningsgrensen ved brudd. Sammenhengen kan benyttes i ikkelineære konstruksjonsanalyser.

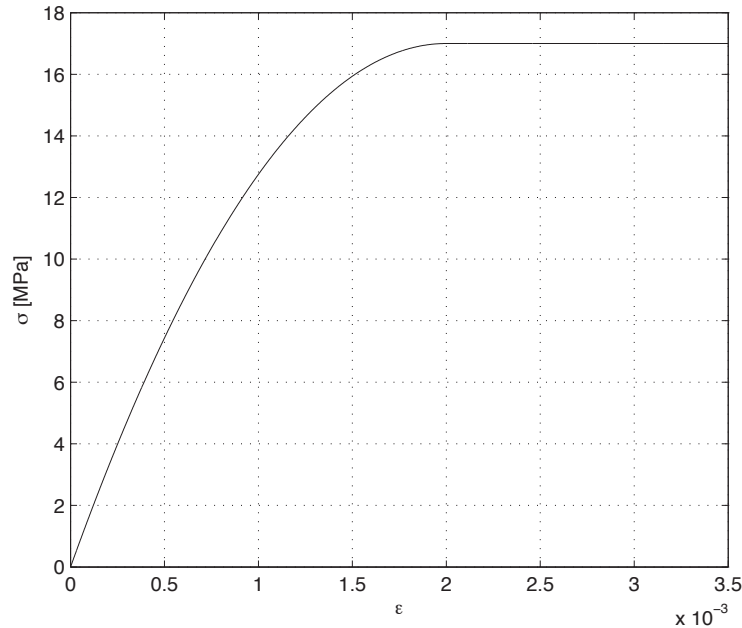


**Figur 2.2:** Ikkelineær fordeling for tre fasthetsklasser

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad (2.3)$$

I (2.3) er  $\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}$ ,  $\epsilon_{c1}$  er betongtøyningen ved største spenning og  $k = 1.05 \frac{E_{cm} |\epsilon_{c1}|}{f_{cm}}$ .

Materialparameterne oppsummeres i Tabell 3.1 i Eurokode 2. Figur 2.2 viser (2.3) for tre fasthetsklasser. Det kan tydelig sees at høyere fasthet også gir høyere stivhet og lavere duktilitet.



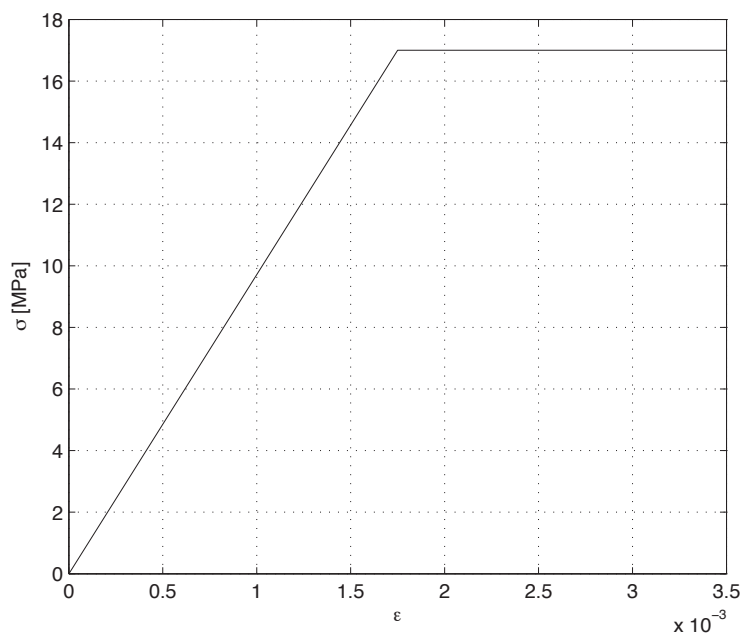
**Figur 2.3:** Parabel-rektangel-fordeling for B30

I dimensjoneringsammenheng tillater Eurokode 2 å benytte enten en parabel-rektangel-fordeling eller en bilineær fordeling for spenning-tøyning. Spenningen kan også antas å være konstant over en effektiv del av trykksonen i tverrsnittet. (2.4) og figur 2.3 viser parabel-rektangel-fordelingen gitt av (CEN 2004, Ligning 3.17 og 3.18) for B30. Figur 2.4 viser den bilineære fordelingen.

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{for } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{for } \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Tilsvarende som for den ikkelineære fordelingen angir  $\epsilon_{c2}$  og  $\epsilon_{cu2}$  tøyning ved maksimal spenning og nominell tøyning ved brudd.  $n$  er en eksponent gitt ved kurvetilpasning.

Den dimensjonerende trykkfastheten,  $f_{cd}$ , beregnes fra (2.5) (CEN 2004, Ligning 3.15), der  $\alpha_{cc}$  er en faktor som tar hensyn til reduksjon ved langtidslast og ugunstige virkninger som følge av måten lasten påføres, og  $\gamma_c = 1.5$  er materialfaktoren for betong.



**Figur 2.4:** Bilineær fordeling for B30

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.5)$$

Når fastheten regnes om til dimensjonerende verdi i (2.5), vil dette også føre til at stivheten reduseres. For å oppnå konsistente og tilstrekkelig sikre dimensjoneringsammenhenger reduseres også tøyningene gitt av  $\epsilon_{c1}$  og  $\epsilon_{cu1}$  i den ikkelineære fordelingen til  $\epsilon_{c2}$  og  $\epsilon_{cu2}$  i parabel-rektangel-fordelingen, og  $\epsilon_{c3}$  og  $\epsilon_{cu3}$  i den bilineære fordelingen (Jacobs 2008). Det er tøyningene med indeks 2 og 3 som benyttes ved dimensjonering.

### 2.1.3 Fasthet og stivhet i enaksielt strekk

I enaksielt strekk har betong tilnærmet lineær respons før spenningen når en maksimalverdi, strekkfastheten, for relativt lav tøyning (Collins & Mitchell 1991). Etter maksimalspenningen kan det observeres duktil relaksasjon. Strekkfastheten avhenger ikke bare av betongkvaliteten, men også av størrelsen på komponenten som utsettes for strekk, spenningsgradienter og initielle spenninger på grunn av kryp. Krypspanninger og store tverrsnitt reduserer strekkfastheten, mens tverrsnitt med høye spenningsgradienter øker strekkfastheten. For små rissvidder observeres det at betongen fortsatt overfører strekkspanninger på tvers av risset. Dette kan forklares av uregelmessig rissoverflate og at rissvidden er liten sammenlignet med ruheten i overflaten.

Det er vanskelig å teste betong i enaksielt strekk, og strekkfastheten måles derfor ofte indirekte ved for eksempel en spalttestrekktest. En spalttestrekktest utføres på en sylinder definert av NS-EN 12390-1 (CEN 2001). Sylinderen belastes med en linjelast i tverretningen som fører til at prøvestykket går til brudd i strekk på tvers av lastretningen.

Spaltestrekktesten beskrives i detalj av NS-EN 12390-6 (CEN 2009b).

Eurokode 2 gir følgende sammenheng mellom spaltestrekkfastheten  $f_{ct,sp}$  og aksialstrekkfastheten  $f_{ct}$  (CEN 2004, Ligning 3.3):

$$f_{ct} = 0.9f_{ct,sp} \quad (2.6)$$

Tabell 3.1 i Eurokode 2 oppgir tre strekkfastheter fra sentrisk belastede sylindere; midlere strekkfasthet  $f_{ctm}$ , strekkfastheten med 5% sannsynlighet for underskridelse  $f_{ctk,0.05}$  og strekkfastheten med 5% sannsynlighet for overskridelse  $f_{ctk,0.95}$ . Videre oppgis følgende sammenheng mellom trykkfasthet og midlere strekkfasthet (CEN 2004):

$$f_{ctm} = \begin{cases} 0.3f_{ck}^{(2/3)} & \leq C50/60, \\ 2.12 \ln(1 + f_{cm}/10) & > C50/60. \end{cases} \quad (2.7)$$

Betongens strekkfasthet antas normalfordelt og  $f_{ctk,0.05}$  og  $f_{ctk,0.95}$  kan finnes fra (2.8) og (2.9).

$$f_{ctk,0.05} = 0.7f_{ctm} \quad (2.8)$$

$$f_{ctk,0.95} = 1.3f_{ctm} \quad (2.9)$$

Den dimensjonerende strekkfastheten beregnes fra (2.10) (CEN 2004, Ligning 3.16), der  $\alpha_{ct}$  innføres av samme årsak som  $\alpha_{cc}$  i (2.5).

$$f_{ctd} = \alpha_{ct} \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c} \quad (2.10)$$

Før brudd kan sammenhengen mellom betongens spenning og tøyning i strekk beskrives av den lineære sammenhengen gitt av (2.11) (Collins & Mitchell 1991).

$$\sigma_c = E_{cm}\epsilon_c \quad (2.11)$$

#### 2.1.4 Fasthet i trykkfelt

I et trykkfelt vil betong være i en biaksiell spenningstilstand. Betong utsatt for strekk i tverretningen vil ha en redusert trykkfasthet, og ved trykk i tverretning forventes en økt trykkfasthet (CEB-FIP 2010a, 5.1.6).

Eurokode 2 tar hensyn til dette ved å angi en redusert fasthet for opprissede betongtrykksoner. Den reduserte fastheten,  $\sigma_{Rd,max}$ , er gitt av (2.12) (CEN 2004, Ligning 6.56) der  $\nu'$  er gitt av (2.13) (CEN 2004, Ligning 6.57N).

$$\sigma_{Rd,max} = 0.6\nu'f_{cd} \quad (2.12)$$

$$\nu' = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (2.13)$$

I tilfeller med trykkspenning eller uten strekkspenning i tverretningen angir Eurokode 2 at  $\sigma_{Rd,max} = f_{cd}$  (CEN 2004, Ligning 6.55). Videre angir Eurokode 2 at det ved fleraksielt trykk kan være aktuelt å anta en høyere dimensjonerende trykkfasthet. Eurokode 2 del 2 (CEN 2005b) gir regler for hvordan todimensjonale membranelementer kan dimensjoneres på basis av en lineær elementmetodeanalyse. Et todimensjonalt membran-element har kun spenninger i planet. (2.14) (CEN 2005b, Ligning 6.110) gir største tillatte trykkspenning hvis begge hovedspenningene er i trykk, der  $\alpha \leq 1$  er forholdt mellom hovedspenningene.

$$\sigma_{Rd,max} = 0.85f_{cd} \frac{1 + 3.80\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad (2.14)$$

Ved derivasjon av (2.14) finnes den maksimale verdien  $\sigma_{Rd,max} = 1.096f_{cd}$  for  $\alpha = 0.474$ .

## 2.2 Stål

Armeringsstål begrenser betongens rissvidder og gir konstruksjonen en duktil oppførsel ved riktig dimensjonering (Sørensen 2010). Vanlig armeringsstål er stenger av varmvalset stål med kammer på overflaten.

For å sikre beskyttelse av stål mot korrosjon, tilfredsstillende brannmotstand og kraftoverføring ved hjelp av heft mellom stål og betong har Eurokode 2 krav til betongoverdekning (CEN 2004).

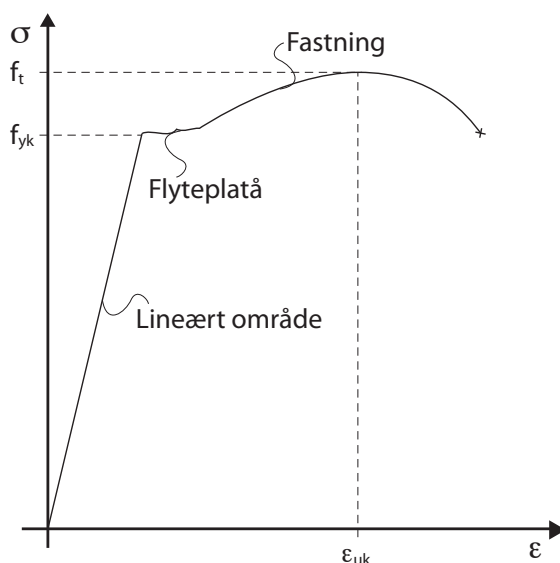
NS-EN 10080 (CEN 2005a) stiller krav til hvilke egenskaper for kamstål som skal deklarerer, og hvordan de skal testes. Tallkrav til egenskapene for kamstål fastsettes nasjonalt. NS 3576 del 1-4 (Standard Norge 2005a, Standard Norge 2012a, Standard Norge 2012b, Standard Norge 2005b) gir tallkravene og kan brukes sammen med reglene for kontrollering gitt av NS-EN 10080.

### 2.2.1 Materialmodell for armeringsstål

Figur 2.5 viser en typisk spenning-tøyningsfordeling for en strekktest av varmvalset armeringsstål, der  $f_t$  er strekkfastheten, den høyeste strekkspenningen stålet kan nå,  $f_{yk}$  er karakteristisk flytespenning og  $\epsilon_{uk}$  er karakteristisk tøying ved høyeste strekkspenning (CEN 2004). Fordelingen i figur 2.5 karakteriseres av det lineære området opp til flytespenning, flyteplataet, fastningsområdet frem til høyeste strekkspenning og relaksasjon inntil brudd.

$f_{yk}$  og  $f_t$  er henholdsvis målt karakteristisk verdi av last ved flytning dividert med nominelt tverrsnittsareal og armeringens strekkfasthet målt i et strekkforsøk. Med karakteristisk verdi menes her, som for betong, verdien med 5% sannsynlighet for underskridelse. Forholdet  $f_t/f_{yk}$  gis av forholdstallet  $k$ .

Armeringsstål deles i tre klasser; A, B og C, avhengig av duktilitetsegenskaper. Alle klassene har en karakteristisk flytespenning mellom 400 MPa og 600 MPa. Hver klasse har et minstekrav til forholdstallet  $k$  og karakteristisk tøying ved største last  $\epsilon_{uk}$  (CEN 2004, Tabell C.1). Armeringsstålet betegnes med en stor B etterfulgt av den karakteristiske



**Figur 2.5:** Armeringsstål i strekktest

flytespenningen, en stor N og bokstaven som angir duktilitetsklassen. B500NC, som er den vanligste typen i Norge, er dermed armeringsstål med  $f_{yk} = 500$  MPa fra duktilitetsklasse C (Standard Norge 2005a, Standard Norge 2012a, Standard Norge 2012b, Standard Norge 2005b).

Ved dimensjonering av armering tillater Eurokode 2 å bruke en av to dimensjoneringsforutsetninger. Lineær elastisk oppførsel inntil  $\sigma_s = f_{yd}$  etterfulgt av lineær fastning med øvre grensetøyning  $\epsilon_s = \epsilon_{ud}$  og største spenning  $\sigma_s = k f_{yd}$  ved  $\epsilon_s = \epsilon_{uk}$ , eller lineær elastisk oppførsel inntil  $\sigma_s = f_{yd}$  etterfulgt av ideell flytning uten øvre grensetøyning (CEN 2004). Den dimensjonerende flytespenningen er gitt av (2.15) der  $\gamma_s = 1.15$  materialfaktoren for stål. Grensetøyningen  $\epsilon_{ud}$  avhenger av duktilitetsklassen og er gitt i tabell NA.3.5(901) i Eurokode 2. Figur 2.6 illustrerer de to dimensjoneringsforutsetningene. Vanlig norsk praksis har vært å benytte forutsetningen med ideell flytning, gitt av (2.16), og en definert bruddtøyning på 1.0% (Sørensen 2010).

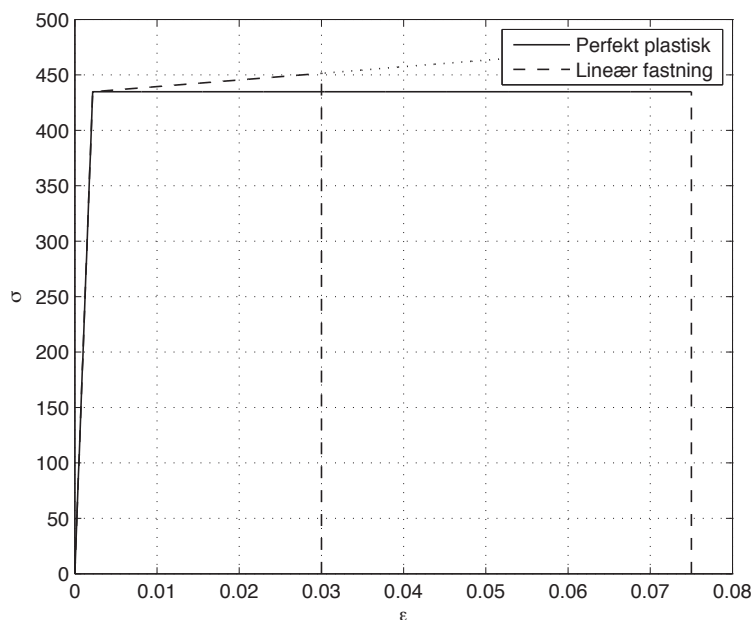
$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (2.15)$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \leq f_{yd} \quad (2.16)$$

Eurokode 2 tillater en dimensjonerende verdi for E-modulen;  $E = 200$  GPa.

Skjærarmeringens dimensjonerende flytegrense,  $f_{ywd}$ , er gitt av et uttrykk på samme form som (2.15).

For plater og fundamenter med konsentrerte laster angir Eurokode 2 en effektiv dimensjonerende fasthet for skjærarmeringen. Denne er gitt av (2.17) (CEN 2004), der  $d$  er midlere effektiv dybde i de ortogonale armeringsretningene.



**Figur 2.6:** Dimensjoneringsforutsetninger for armeringsstål B500NC

$$f_{ywd,ef} = 250 + 0.25d \leq f_{ywd} \quad (2.17)$$

## 2.3 Andre materialmodeller

I dette kapitlet presenteres materialmodellene for betong fra andre standarder enn Eurokode 2. For materialparameterne som inngår vil symbolbruken bli beholdt fra de respektive standardene, men for generelle verdier, for eksempel hovedtrekkspenningen i betong,  $\sigma_{c1}$ , eller rissvidden,  $w$ , vil symboler bli valgt konsistent med resten av rapporten. Gjennomgangen vil fokusere på forskjellene fra Eurokode 2 og vil ikke gå i dybden.

### 2.3.1 Materialmodell for NS 3473

På samme måte som i Eurokode 2 navngis betongfasthetsklassene med bokstaven B etterfulgt av sylindrefastheten funnet fra en enaksiell trykktest (Standard Norge 2003). Sylindrefastheten er fastheten med 5% sannsynlighet for underskridelse. NS3473 tillater å benytte fasthetsklassene B20-B95 (Standard Norge 2003, 7.3.3 og tabell 5.a)

Ved dimensjonering skal betongens konstruksjonsfasthet benyttes. Konstruksjonsfastheten tar hensyn til at forholdene i en konstruksjon er noe forskjellige fra forholdene i et prøvestykke (Sørensen 2005). Verdier for karakteristisk sylindrefasthet og konstruksjonsfasthet er gitt på tabellform i NS 3473, der  $f_{cck}$  er karakteristisk sylindrefasthet,  $f_{tk}$  er strekkfasthet,  $f_{cn}$  er konstruksjonstrykkfasthet og  $f_{tn}$  er konstruksjonsstrekkfasthet (Standard Norge 2003, Tabell 5). I dette avsnittet angis alle spenninger og tøyninger med positivt fortegn.

Sammenhengen mellom karakteristisk sylindrefasthet og konstruksjonsfasthet beskrives av følgende uttrykk for B20 til B45 (Sørensen 2005, Ligning 2.1):

$$f_{cn} = 0.7f_{cck} + 2.8 \quad (2.18)$$

Den dimensjonerende fastheten finnes fra følgende uttrykk (Standard Norge 2003, 11.4.2) der  $\gamma_c = 1.4$  er materialfaktoren for betong når det ikke tas hensyn til avvik i tverrsnittsdimensjoner:

$$f_{cd} = \frac{f_{cn}}{\gamma_c} \quad (2.19)$$

$$f_{td} = \frac{f_{tn}}{\gamma_c} \quad (2.20)$$

E-modulen i trykk for fasthetsklasser lavere enn B75 kan beskrives av følgende uttrykk (Standard Norge 2003, 11.3.1):

$$E_{cn} = 10000(f_{cn})^{0.3} \quad (2.21)$$

For B20 til B45 kan sammenhengen mellom tøyning og dimensjonerende trykkfasthet antas beskrevet av en parabel-rektangelfordeling for  $0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu}$  gitt av følgende uttrykk (Standard Norge 2003, Figur 3):

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[ 2 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} \right)^2 \right] & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{co} \\ f_{cd} & \epsilon_{co} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \end{cases} \quad (2.22)$$

Der  $\epsilon_{co} = 0.002$  og  $\epsilon_{cu} = 0.0035$ .

Konstruksjonsdeler med strekkrefter, med unntak av strekk forårsaket av skjær, forankring og skjøting av armering eller delvis belastede områder, skal dimensjoneres slik at armeringen tar hele strekkraften (Standard Norge 2003, 11.5). I andre tilfeller der betong utsettes for strekktøyninger skal den antas spenningsløs (Standard Norge 2003, 11.3.1).

Betong i trykkfelt vil ha en redusert trykkfasthet gitt av (2.23) (Standard Norge 2003, 12.5.2) der  $\epsilon_1$  er den gjennomsnittlige hovedstrekktøyningen i trykkfeltet. Sammenhengen mellom tøyning og dimensjonerende trykkfasthet kan beskrives av (2.22) der  $f_{cd}$  erstattes av den reduserte fastheten  $f_{c2d}$ .

$$f_{c2d} = \frac{f_{cd}}{0.8 + 100\epsilon_1} \leq f_{cd} \quad (2.23)$$

Hvis rissvinkelen  $\theta$  i trykkfeltet antas å være  $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$  kan det for kontroll av skjærtrykkkapasitet forenklet antas at  $f_{c2d} = 0.6f_{cd}$  (Standard Norge 2003, 12.3.3.3).

Armeringsstål klassifiseres på samme måte som i Eurokode 2 og det antas at konstruksjonsfastheten er den samme som den karakteristiske flytespenningen. Den dimensjonerende flytespenningen finnes fra (2.15) der  $\gamma_s = 1.25$  når det ikke tas hensyn til avvik i tverrsnittsdimensjoner.



### 2.3.2 Materialmodell for CSA A23.3

Den canadiske betongstandarden CSA A23.3 angir at betongens trykkfasthet,  $f'_c$ , skal bestemmes fra tester på prøvestykker herdnet i 28 dager (CSA 2004, 4.1). Sylinderfastheten er fastheten med 5% sannsynlighet for underskridelse (CSA 2009, 4.4.6.6). Trykkfastheten som kan brukes i dimensjoneringsammenhenger skal begrenses nedad til 20 MPa og oppad til 80 MPa (CSA 2004, 8.6.1.1).

Den dimensjonerende trykkfastheten kan beregnes ved hjelp av følgende uttrykk der  $\phi_c = 0.65$  er materialfaktoren for betong (CSA 2004, 8.4.2):

$$f_{cd} = \phi_c f'_c \quad (2.24)$$

Betongens E-modul kan bestemmes fra sekantmodulen funnet på samme måte som i avsnitt 2.1.2 (CSA 2004, 8.6.2.1). Hvis det ikke foreligger testresultater kan E-modulen bestemmes generelt fra (2.25) (CSA 2004, Ligning 8-1) der  $\gamma_c$  er betongens massetetthet, eller forenklet fra (2.26) (CSA 2004, Ligning 8-2) for normaldensitetsbetong med sylinderfasthet mellom 20 MPa og 40 MPa.

$$E_c = (3300\sqrt{f'_c} + 6900) \left( \frac{\gamma_c}{2300} \right)^{1.5} \quad (2.25)$$

$$E_c = 4500\sqrt{f'_c} \quad (2.26)$$

For å ta høyde for en redusert fasthet for lavdensitetstilslag, innføres det en reduksjonsfaktor  $\lambda$  som skal multipliseres med den dimensjonerende strekkfastheten (CSA 2004, 8.6.5).

$$\lambda = \begin{cases} 1.00 & \text{for normaldensitetsbetong,} \\ 0.85 & \text{for semilavdensitetsbetong der alt fint tilslag er naturlig sand,} \\ 0.75 & \text{for lavdensitetsbetong uten naturlig sand.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Sammenhengen mellom trykktøyning og betongtrykkspenning kan antas å avhenge av kjente funksjoner, jfr. avsnitt 2.3.4, eller antas å ha en form som gir en styrke som svarer til omfattende testresultater (CSA 2004, 10.1.6).

Armeringens flytespenning som kan benyttes i dimensjonering skal velges lik armeringsstålets flytespenning, men begrenses til 500 MPa (CSA 2004, 8.5.1). Begrensningen gjelder ikke for spennarmering. Den dimensjonerende flytespenningen for armeringsstål i trykk som har flytespenning større enn 400 MPa skal begrenses til spenningen som tilsvarende en tøyning lik 0.35% (CSA 2004, 8.5.2).

Kraften i armeringsstålet kan beskrives av en lineær perfekt plastisk kurve der det lineære partiet opp til flytetøyningen  $\epsilon_{sy} = f_y/E_s$  beskrives av  $F_s = \phi_s A_s E_s \epsilon_s$  og etter flytetøyningen beskrives av  $F_s = \phi_s A_s f_y$  (CSA 2004, 8.5.3.2). Her er  $\phi_s = 0.85$  materialfaktoren for vanlig armeringsstål (CSA 2004, 8.4.3) og  $E_s = 200000$  MPa er E-modulen for vanlig armeringsstål (CSA 2004, 8.5.4.1).

### 2.3.3 Materialmodell for Model Code 2010

Model Code 2010 (CEB-FIP 2010a) følger samme notasjoner og definisjoner av materialparametere som Eurokode 2 og vil ikke bli presentert i detalj her. Model Code 2010 tillater å benytte betong med trykkfastheter i intervallet  $12 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$  (CEB-FIP 2010b, Tabell 7.2-1).

### 2.3.4 Materialmodell for modifisert trykkfeltsteori

I utledningen av modifisert trykkfeltsteori i avsnitt 4.4 behandles opprisset betong som et eget materiale med egne materialegenskaper. Spenningene og tøyningene i opprisset betong varierer betydelig avhengig av om de måles i et riss eller i områder med urisset betong. Materialmodellen i dette avsnittet bygger derfor på en gjennomsnittlig spennings- og tøyningstilstand (Vecchio & Collins 1986).

De originale uttrykkene er basert på canadisk notasjon der  $f'_c$  er sylindrefastheten,  $\epsilon'_c$  er tøyning ved største trykkspenning i en enaksial trykktest,  $f_{c2max}$  er trykkfastheten til opprisset betong,  $f_{cr}$  er karakteristisk strekkfasthet,  $\epsilon_{cr}$  er tøyning ved største strekkspenning,  $\tau_{cr}$  er skjærspenningen som overføres i betongrissene, begrenset oppad av  $\tau_{r,max}$ , og  $\sigma_{cr}$  er betongtrykkspenningen som virker i betongrissene. Trykktøyninger og -spenninger settes inn med negativ verdi

Betong i strekk antas å ha en oppførsel beskrevet av følgende sammenhenger der  $E_c = 2f'_c/\epsilon'_c$  og  $f_{cr} = 0.33\sqrt{f'_c}$ .

$$f_{c1} = \begin{cases} \epsilon_1 E_c & \epsilon_1 \leq \epsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500\epsilon_1}} = \frac{0.33\sqrt{f'_c}}{1 + \sqrt{500\epsilon_1}} & \epsilon_1 > \epsilon_{cr}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Betong i trykk antas å ha en ikkelineær oppførsel gitt av følgende sammenheng.

$$\sigma_{c2} = f_{c2max} \left[ 2 \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c} \right) - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

Der

$$\frac{f_{c2max}}{f'_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34\epsilon_1/\epsilon'_c} \leq 1.0 \quad (2.30)$$

Skjærspenningene som kan overføres i betongrissene, jfr. vedlegg A, beregnes fra følgende sammenheng:

$$\tau_{cr} = 0.18\tau_{cr,max} + 1.64\sigma_{cr} - 0.82 \frac{\sigma_{cr}^2}{\tau_{cr,max}} \quad (2.31)$$

Der

$$\tau_{cr,max} = \frac{\sqrt{f'_c}}{0.31 + \frac{24w}{D_{max} + 16}} \quad (2.32)$$

$w$  er gjennomsnittlig rissvidde som forenklet beregnes fra (2.33) der det ikke tas hensyn til svinntøyninger i betongen og  $D_{max}$  er største tilslagsstørrelse, begge målt i millimeter.

$$w = s_{\theta} \epsilon_1 \quad (2.33)$$

$s_{\theta}$  er midlere rissavstand mellom de diagonale rissene og kan bestemmes av (2.34) der  $s_{mx}$  og  $s_{my}$  er midlere rissavstand i x- og y-retning kontrollert av armeringen i de to retningene. Forenklingen i (2.34) viser hvordan  $s_{\theta}$  uttrykkes i tilfeller uten skjærarmering,  $\rho_w = 0$ .

$$s_{\theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{s_{mx}} + \frac{\cos \theta}{s_{my}}} \xrightarrow{\rho_w=0} s_{mx} / \sin \theta \quad (2.34)$$

Hvis det sees bort fra den positive innvirkningen fra betongtrykkspenninger i risset kan skjærspenningene i risset skrives på forenklet form.

$$\tau_{cr} \leq 0.18 \tau_{cr,max} = \frac{0.18 \sqrt{f'_c}}{0.31 + \frac{24w}{D_{max} + 16}} \quad (2.35)$$

## 2.4 Sammenheng mellom trykk- og strekkfasthet

Som det har kommet frem i de foregående avsnittene kan sammenhengen mellom trykk- og strekkfastheten til betong beskrives av et uttrykk på følgende form der  $A$  er en konstant og  $n < 1$ :

$$f_{ctk} = A f_{ck}^n \quad (2.36)$$

I flere uttrykk som går igjen i de ulike standardene som vil bli presentert i kapittel 5 inngår for eksempel  $f_{ck}^{1/3}$  eller  $\sqrt{f_{ck}}$ . Underforstått er da uttrykket avhengig av betongens strekkfasthet og ikke direkte av trykkfastheten.



## 3 Teori

I dette kapitlet vil det bli presentert egenskaper som påvirker skjærkapasiteten til bjelker. Kapitlet starter med en beskrivelse av plastisitetsteorien som danner grunnlaget for modellene i kapittel 4.

### 3.1 Plastisitetsteori

En konstruksjonsdels kapasitet kan beregnes ved hjelp av plastisitetsteori (Jensen & Lapko 2009). Avhengig av fremgangsmåten vil løsningen enten være en nedre grenseløsning eller en øvre grenseløsning.

#### Nedre grenseteorem:

Det antas et indre spenningsfelt som oppfyller likevekt med randbetingelser og ytre laster, og som er trygt i henhold til valgte bruddkriterier for materialene som inngår. Den ytre lasten som tilsvarer det antatte spenningsfeltet vil være mindre eller lik konstruksjonsdelens kapasitet.

#### Øvre grenseteorem:

Det antas at konstruksjonsdelen ved kollaps danner en mekanisme. Ved hjelp av en arbeidsbetraktning og kjennskap til konstruksjonsdelens duktilitet kan det beregnes en kapasitet som er større eller lik konstruksjonsdelens kapasitet.

Eksempler på nedre grenseløsninger er fagverksmodeller og stavmodeller for bjelker, og øvre grenseløsninger er flyteledd for bjelker og flytelinjer for plater. En øvre grenseløsning må skreddersys til hver enkelt konstruksjon og er derfor ikke egnet til å utlede generelle dimensjoneringsformler, men tillates brukt i for eksempel Eurokode 2 (CEN 2004, 5.6.3(3)P).

Som det går frem i beskrivelsen ovenfor må det antas trygge bruddkriterier for å kunne finne en nedre grenseløsning. I avsnitt 2 ble disse presentert for stål og betong. I de fleste tilfeller kan det antas at betongens strekkfasthet kan neglisjeres, men noen beregningsmodeller regner med at betongen kan overføre en begrenset gjennomsnittlig strekkspenning, jfr. modifisert trykkfeltsteori i avsnitt 4.4. I figur 2.1 er det tydelig at betong ikke er et materiale med gode duktile egenskaper i form av for eksempel et flyteplatå. I plastiske analyser innføres det derfor en såkalt effektivitetsfaktor som reduserer den tillatte fastheten. I Eurokode 2 er det vist at denne faktoren er gitt direkte for en gitt fasthetsklasse som konstanten  $\nu$ , mens den i andre standarder kan gis som en funksjon av største hovedtøyning, altså tøyningen ortogonalt på største trykkspenning, jfr. avsnitt 2.3.1 og 2.3.4.

Armeringen antas vanligvis å følge en lineært perfekt plastisk fordeling der spenningen begrenses av flytespenningen.

En nedre grenseløsning kan dermed finnes når armeringen når flytegrensen og betongen når den reduserte trykkfastheten hvis det antas at betongen ikke kan overføre strekk.

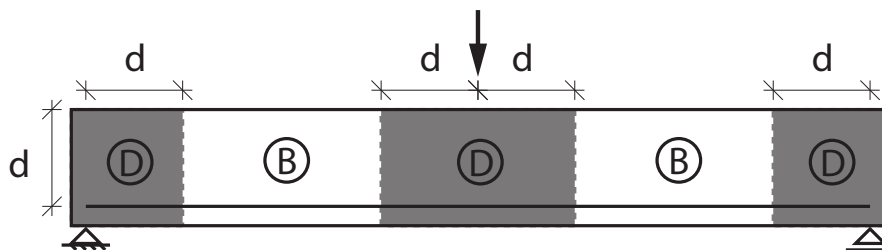
Det er viktig å merke seg at plastisitetsteori tar for seg bruddgrensetilstanden og at beregningene begrenser seg til en tilstand der kollaps kan oppstå (Jensen & Lapko 2009). Bruksgrensetilstanden vil derfor ikke omfattes av slike beregninger. For praktisk bruk

av dimensjonering ved hjelp av plastisitetsteori må det derfor legges inn ekstra krav til for eksempel avstand mellom armeringsenheter eller en minste armeringsmengde, slik at bruksgrensekraav også er tilfredsstilt (Morley 2007).

### 3.2 B- og D-regioner

En konstruksjonsdel kan deles inn i B- og D-regioner. I en B-region kan spenningsfeltet beskrives av relativt enkle matematiske uttrykk og Jakob Bernoullis hypotese om at plane tverrsnitt forblir plane er gjeldende. Spenningene kan her utledes fra snittkrefter (Schlaich, Schäfer & Jennesswein 1987). B kan for eksempel bety *bjelke* eller *Bernoulli*.

D-regioner er områder som ligger i nærheten av diskontinuiteter i last eller geometri, for eksempel i nærheten av en konsentrert last, et opplegg eller en utsparring. D-regioner sies å ha et forstyrret spenningsfelt ettersom spenningsfeltet i stor grad avhenger av randbetingelser og at det ikke enkelt lar seg beskrive av matematiske uttrykk. Det kan antas at forstyrrelsen fra randbetingelser forsvinner i en avstand lik konstruksjonsdelens effektive dybde fra der forstyrrelsen innføres. D kan for eksempel bety *disturbed* eller *discontinuity*.



**Figur 3.1:** Bjelke med B- og D-regioner

Figur 3.1 viser en bjelke med dybde  $d$  og gitt belastning. Med antakelsen om utbredelsen av D-regionene beskrevet ovenfor er bjelken delt inn i B- og D-regioner. Bjelkens snittkrefter og opplagerbetingelser kan beregnes fra en elastisk analyse. B-regionene kan dimensjoneres med bakgrunn i de opptredende snittkreftene, men D-regionene må derimot isoleres og dimensjoneres separat der det etableres en indre modell for kraftoverføring basert på spenningstilstanden på randen. Hele bjelken kan allikevel dimensjoneres i en operasjon hvis det etableres en indre stavmodell som er i likevekt med de ytre kreftene (Schlaich et al. 1987). Slike modeller vil ikke bli behandlet ytterligere i denne rapporten.

Skjærkraften er den derivert av momentet. Momentet bæres av et indre kraftpar,  $T$  og  $C$ , med tilhørende indre momentarm  $z$  (Collins et al. 2007) vist i figur 3.2. Det kan være lettere å forstå hvordan skjærkraften bæres i en bjelke hvis det utføres en produktderivasjon av momentet som i (3.1).

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d(Tz)}{dx} = \frac{dT}{dx}z + \frac{dz}{dx}T \quad (3.1)$$

Det er tydelig at skjærkraften bæres av to komponenter:

**Bjelkevirkning:**

Endringen i kraftresultant multiplisert med en konstant indre momentarm.

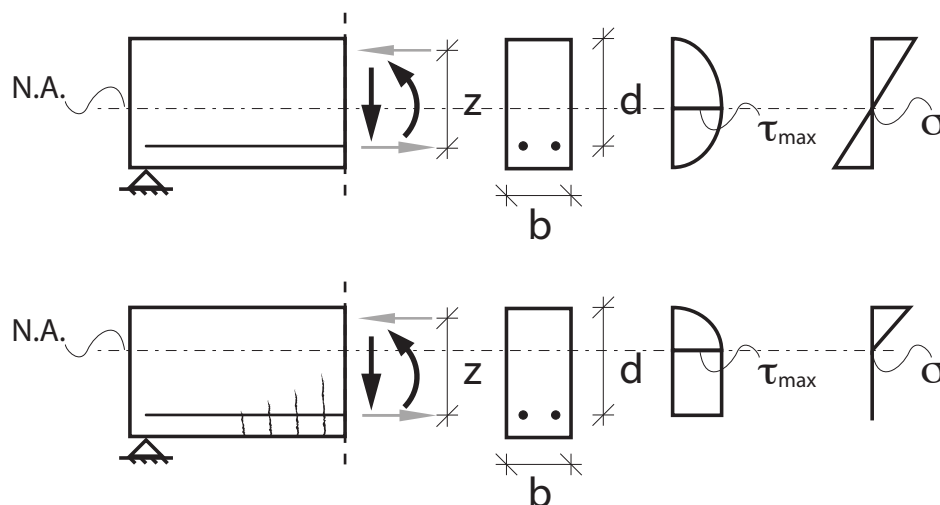
**Buevirkning/stavmodell:**

Endringen i momentarm multiplisert med en konstant kraftresultant.

Disse to komponentene er geometrisk inkompatible og kan derfor ikke opptre samtidig (Collins et al. 2007). I urisset betong vil antakelsen om at plane tverrsnitt forblir plane være rimelig og skjærkraften bæres ved hjelp av bjelkevirkning. Når betongen risser derimot, vil bjelkevirkningen avta og buevirkningen ta over helt til kapasiteten til buen er oppnådd.

**3.3 Spenningstilstand og rissvinkel**

Figur 3.2 viser spenningsfordelingen i et snitt i en B-region i en bjelke utsatt for moment og skjærkraft. Når betongspenningen i underkant på grunn av moment når betongens strekkfasthet vil det oppstå vertikale bøyeriss. Figuren viser spenningsfordelingen både med og uten bøyeriss.



**Figur 3.2:** Spenningsfordeling over tverrsnitt uten og med bøyeriss

De skraverte pilene er momentets resultantkrefter med indre momentarm  $z$ .

Som beskrevet i avsnitt 2.1 har betong tilnærmet lineær oppførsel for små tøyninger. Dette kan sees i normalspenningsfordelingen i tilfellet uten bøyeriss. Skjærspenningsfordelingen vil her ha en karakteristisk parabelform gitt av (3.2) der  $S$  er første arealmoment av utenforliggende areal og  $I$  er andre arealmoment for det urissede betongtverrsnittet. Skjærspenningsfordelingen vil ha maksimalverdi gitt av (3.3) der  $A$  er tverrsnittsarealet. Nøytralaksen vil sammenfalle med tverrsnittets tyngdepunktsakse, som ligger eksentrisk mot armeringen i forhold til betongens tyngdepunkt (Sørensen 2010).

$$\tau = \frac{VS}{Ib} \quad (3.2)$$

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A} \quad (3.3)$$

Når bøyerissene oppstår antas det at betongspenningene i strekksonen kan neglisjeres. Dette illustreres av den nederste normalspenningsfordelingen i figur 3.2. Som en følge av opprissingen vil nøytralaksen ligge høyere i tverrsnittet. Likevekt av elementer over og under nøytralaksen gir skjærspenningsfordelingen med parabelform over nøytralaksen og konstant verdi ned til armeringen gitt av (3.4) (Sørensen 2010). Denne fordelingen fører til at det aller meste av skjærspenningen overføres i områdene med bøyeriss og at kun omtrent 30% overføres i den uopprissede trykksonen (Collins & Mitchell 1991). Forskere er uenige om denne fordelingen mellom strekk- og trykksonen, og noen mener at det meste av skjærspenningen overføres i trykksonen. På grunn av denne usikkerheten omtales skjærspenningen fra (3.4) som den nominelle skjærspenningen.

$$\tau_{max} = \frac{V}{bz} \quad (3.4)$$

Som en følge av denne usikkerheten har følgende uttrykk i enkelte tilfeller blitt inført som en forenkling av skjærspenningen (Collins & Mitchell 1991):

$$\tau_{max} = \frac{V}{bd} \quad (3.5)$$

For en gitt spenningstilstand kan det beregnes et sett med hovedspenninger med tilhørende hovedspenningsretning  $\theta$ . Det antas at rissene propagerer langs minste hovedspenningsretning og åpner seg ortogonalt på denne. Figur 3.3 viser en grafisk fremstilling av tre spenningstilstander der hovedspenningsretningen er angitt. De tre spenningstilstandene tilsvarer tre punkter i forskjellig høyde fra nøytralaksen og oppover i tilfellet med bøyeriss. Det er vist at spenningen i lengderetning øker med høyden og en heltrukken linje viser hvordan skjærspenningen avtar med høyden.

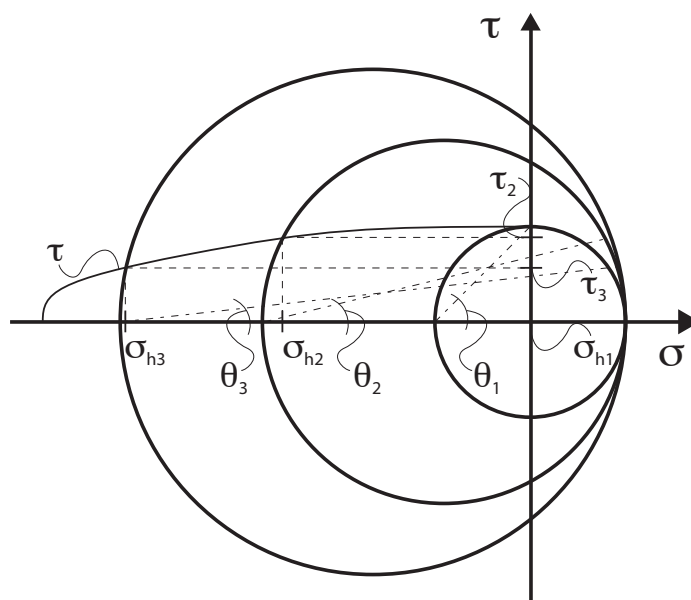
Skråriss initieres i de fleste tilfeller av bøyeriss. Dette tilsvarer spenningstilstanden uten normalspenninger hvis strekkspenningene i betongen på tvers av bøyerissene neglisjeres. Rissene som predikeres av denne tilstanden har  $\theta = 45^\circ$ . I et snitt hvor det ikke har oppstått bøyeriss kan skråriss initieres i et punkt med største skjærspenning, i nøytralaksen. Også her vil det kun være skjærspenninger, og rissene predikeres til å ha  $\theta = 45^\circ$ .

Fra denne fremstillingen kommer det klart frem hvorfor de første diagonale rissene har  $45^\circ$  helning og at vinkelen blir lavere høyere opp i tverrsnittet. Uten å være vist i figuren kan det på samme måte vises at strekkspenninger i lengderetningen vil føre til at rissvinkelen blir større.

### 3.4 Aggregate interlock og armeringens dybeleffekt

Betong med normal fasthet og tetthet vil ha tilslag som er mye stivere og sterkere enn den herdnete sementpastaen (Collins & Mitchell 1991). Allerede for små belastninger vil





**Figur 3.3:** Tre spenningstilstander med resulterende rissvinkel

det oppstå mikroriss i overgangssonen mellom tilslag og herdnet sementpasta. For økende belastning vil disse rissene utvikle seg til kontinuerlige riss som går gjennom betongen langs tilslagskornene. Disse rissene vil ha stor ruhet i forhold til rissvidden og kan overføre skjærspenninger på tvers av rissene når rissflatene beveges på langs av rissene. Måten skjærspenningene overføres på kalles *aggregate interlock* (Vecchio & Collins 1986).

Hvis betongen har høy sylindrefasthet vil rissene ha en tendens til å splitte tilslagskornene i stedet for å gå rundt dem. Dette fører til riss med lavere ruhet og mindre evne til å overføre skjærspenninger. Det samme er i teorien tilfelle for betong med lett tilslag, der den herdede sementpastaen også har høyere fasthet enn tilslaget (Bentz & Collins 2006).

En lignende effekt kan observeres i tilknytning til lengdearmeringen på strekksiden av en bjelke. Hvis det oppstår diagonale riss initiert av bøyeriss vil rissflatene ha en tendens til å bevege seg langs hverandre. Armeringen som krysser risset vil derfor utsettes for bøyning på grunn av krefter på tvers av armeringens lengderetning. Dette fører til at armeringen også kan gi et vertikalt bidrag til lastbæringen. Dette bidraget kalles *dybeffekten*. Forskning på slutten av 60-tallet viste at så mye som 75% av skjærkraften ble overført av aggregate interlock og dybeffekten (Collins & Mitchell 1991).

Selv om de to fenomenene beskrevet her danner basis for en almen forståelse av hva som påvirker skjærkapasiteten til en bjelke er det store uenigheter. Kotsovos & Pavlovic (1999) mener at aggregate interlock og dybeffekt ikke kan ha noen invirkning på skjærkapasiteten. Grunnen til dette er antakelsen om at riss propagerer langs minste hovedspenningsretning og åpner seg normalt på denne. Denne rissmekanismen fører ikke til at rissflatene beveger seg langs hverandre, noe som er forutsetningen for bidragene beskrevet ovenfor.

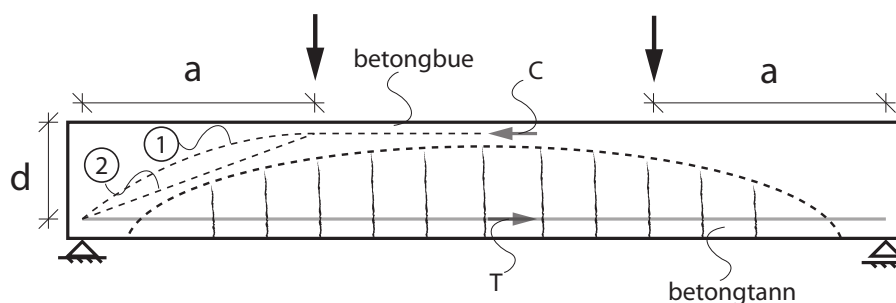
I en nylig publisert avhandling (Nedrelid 2012) argumenteres det for at bjelker laget

av lettbetong kan ha minst like god skjærkapasitet som bjelker laget av normal betong. Dette bidrar til å avkrefte teorien om aggregate interlock ettersom denne sier at rissene i lettbetong vil ha lavere ruhet enn i normal betong og dermed lavere skjærkapasitet.

### 3.5 Forholdet mellom skjærspenn og effektiv dybde, $a/d$

Som beskrevet i introduksjonen kan det være nødvendig å gå drastisk til verks når testresultater skal analyseres; det kan være nødvendig å forkaste kjente teorier og undersøke andre faktorer som kan være viktige for skjærkraftkapasiteten.

Kani (Kani et al. 1979) hadde nettopp denne tankegangen og forkastet ideen om at det finnes en kritisk skjærspenning for armert betong. Det ble gjort en rekke forsøk på bjelker uten skjærarmoring for å undersøke hvilke faktorer som påvirket skjærkapasiteten. Med bakgrunn i denne forsøksserien konkluderte Kani med at det som vanligvis kalles skjærbrudd, egentlig burde kalles *diagonalt brudd* ettersom det ikke hadde noen direkte sammenheng med skjærkraften. Denne konklusjonen kommer av noen spesialdesignede forsøk der det ble observert at det kunne oppstå diagonale brudd uten skjærkraft til stede (Kani et al. 1979). I stedet konkluderte Kani med at forholdet mellom skjærspenn og effektiv dybde,  $a/d = M_{max}/V_{max}d$ , bestemte hvor stor del av bjelkens momentkapasitet som kunne utnyttes. Dette vil bli forklart i det følgende.



**Figur 3.4:** Kamstruktur

En bjelke i et typisk skjærkraftforsøk som utsettes for økende last, vil utvikle bøyeriss i den sentrale regionen og danne en kamlignende struktur som vist i figur 3.4. Betongtrykksonen er kammens rygg og strekksonen består av "betongtenner". Når lasten øker vil spenningene i trykksonen øke, ikke først og fremst på grunn av økte momentresultantkrefter, men på grunn av dypere riss og dermed lavere trykksoner. Når trykkspenningene når en begrensende verdi vil betongen knuses og bjelken har nådd momentkapasiteten,  $M_{fl}$ .

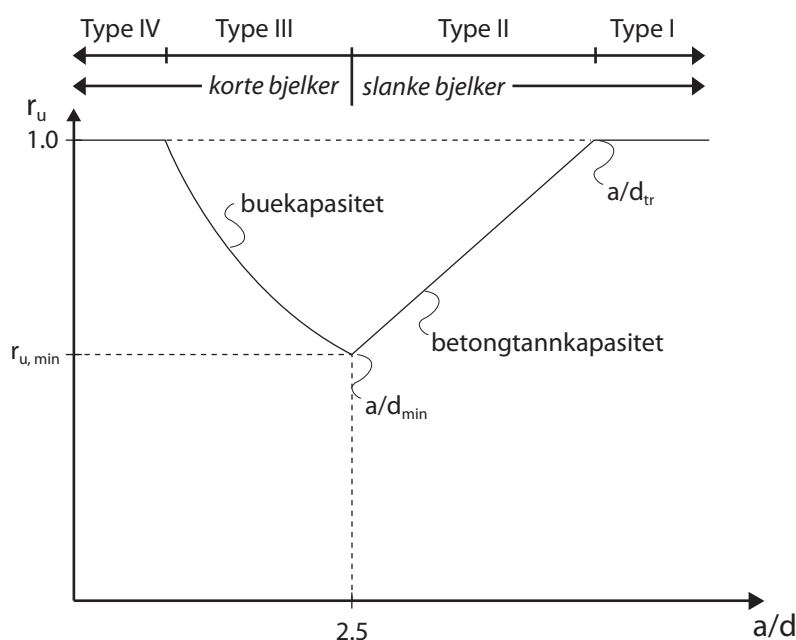
Utenfor den sentrale regionen kan kollaps oppstå på grunn av diagonale riss som Kani mente var avhengige av forholdet mellom skjærspennet og den effektive dybden; en høy verdi for  $a/d$  ga en lav skjærspenning ved kollaps.

Med full heft mellom armering og betong vil den indre lastoverføringen beskrives av trykksti 1 i figur 3.4 der hver betongtann forårsaker en kraftøkning  $\Delta T$  i armeringen på grunn av heft.  $C$  er trykkresultanten i betongen. Når  $\Delta T$  når en begrensende verdi vil

betongtannen rives av i toppen på grunn av bøyning som en utkrager. Etter hvert som betongtennene rives av vil en større andel av den maksimale strekkraften  $T$  overføres rett til opplegget og lastbæringen bli nærmere trykksti 2 i figuren. Det antas at armeringen er tilstrekkelig forankret ved opplegget.

Når alle betongtennene er revet av vil det stå igjen en betongbue med armeringen som strekkbånd i bunnen. Trykkresultanten ligger nå lavere i tverrsnittet enn før betongtennene ble revet av og har en eksentrisitet i forhold til trykksonen. Eksentrisiteten kan føre til strekkspenninger på oversiden og bøyeriss som følge av dette. For at bjelken skal kunne fortsette å bære økende last må betongbuen ha tilstrekkelig kapasitet.

Både betongtennene og buens momentkapasitet,  $M_u$ , antas å være avhengig av  $a/d$ . Ved å definere  $r_u = M_u/M_{fl}$  som den høyeste mulige utnyttelsen av bjelkens momentkapasitet kan denne plottes som en funksjon av  $a/d$ . Et slikt plott er vist i figur 3.5. Figuren viser klart en *dal* der diagonalt brudd oppstår.



**Figur 3.5:** Utnyttelse av momentkapasitet som funksjon av  $a/d$  for rektangulær bjelke uten skjærarmering (Kani et al. 1979, etter figur 1.12)

Figuren viser to kritiske punkter;  $(a/d)_{min}$  der kapasiteten til betongtennene er lik kapasiteten til buen, og  $(a/d)_{tr}$  der kapasiteten til tennene er lik bjelkens momentkapasitet. Figuren viser også at korte bjelker vil styres av buevirkning, mens slanke bjelker vil styres av betongtennenes kapasitet opp til  $(a/d)_{tr}$ . Fra tester viste Kani at  $(a/d)_{min}$  som regel ligger rundt 2.5, men at  $(a/d)_{tr}$  avhenger av armeringsmengden. Hvor dyp dalen er, altså hvor stor påvirkning  $a/d$  har på momentkapasiteten avhenger også av armeringsmengden. Liten armeringsmengde fører til at bjelken kan nå hele momentkapasiteten for alle  $(a/d)$ , mens for større armeringsmengder kan  $r_u$  bli så lav som 0.5. Kanis forsøk viste at en variasjon i trykkfasthet med konstant armeringsmengde ikke ga noen signifikant forskjell.

Hvis dette oversettes til skjærkapasitetens avhengighet av  $(a/d)$  kan det konkluderes med at bjelker med  $1 \leq a/d \leq (a/d)_{tr}$  vil være utsatte for skjærbrudd eller diagonalt brudd.

For bjelker med jevnt fordelt last og lengde  $L$ , argumenterte Kani for at skjærspennet kunne settes lik  $M_{max}/V_{max} = L/4$ .

Figur 3.5 antyder også at bruddtypen bestemmes av  $a/d$ -forholdet. Her følger en beskrivelse av de fire bruddtypene (Kotsovos & Pavlovic 1999).

**Type I:**

For  $a/d > \text{ca. } 5$  vil bjelken kollapse duktilt som følge av at den fulle momentkapasiteten oppnås i det sentrale området. Dette er beskrevet ovenfor.

**Type II:**

Typisk for  $\text{ca. } 2 < a/d < \text{ca. } 5$  vil det kunne oppstå diagonale riss initiert av bøyeriss i skjærspennet og en sprø bruddform. Rett etter at det diagonale risset oppstår vil det kunne propagere nesten horisontalt gjennom trykksonen i retning punktlasten på en ustabil måte. Dette fører umiddelbart til at bjelken mister all evne til lastbæring. Det diagonale risset kan også propagere horisontalt langs lengdearmingen i retning opplegget, men tilstrekkelig forankring kan hindre at dette fører til kollaps.

**Type III:**

Typisk for  $\text{ca. } 1 < a/d < \text{ca. } 2$  vil det oppstå diagonale riss og en sprø bruddform som ikke er initiert av bøyeriss i skjærspennet. Det diagonale risset fører ikke umiddelbart til kollaps, men når lasten økes vil det oppstå strekkspenninger på tvers av trykksonen i det sentrale området og betongen vil splittes før den fulle momentkapasiteten nås.

**Type IV:**

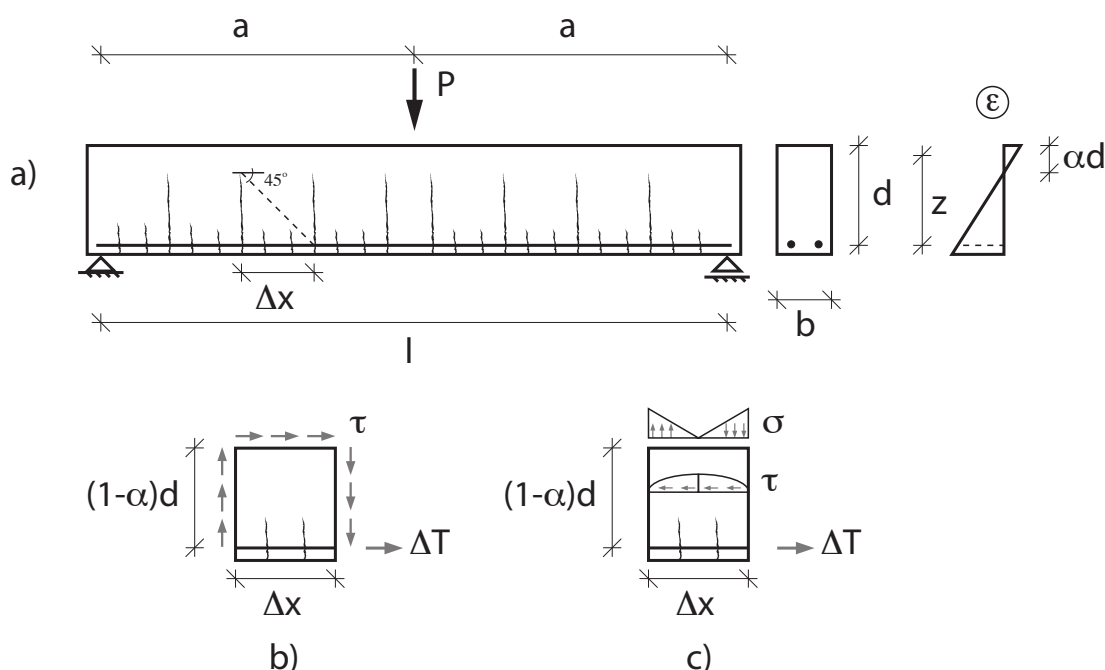
For  $a/d < \text{ca. } 1$  vil det oppstå diagonale riss omtrent midt mellom punktlasten og opplegget som kan føre til en av to ulike bruddformer: en duktil bruddform som skyldes at risset propagerer mot trykksonen, men ikke går høyere opp i bjelken enn de dypeste bøyerissene, og en sprø bruddform som skyldes at risset propagerer mot opplegget. Hvilken av de to bruddformene som vil være gjeldende er også avhengig av bjelkens bredde: en bred bjelke vil ha en tendens til å oppnå den duktile bruddformen. Uansett vil ikke kapasiteten reduseres sammenlignet med den fulle momentkapasiteten.

### 3.6 Virkning av rissvidde

I avsnitt 3.5 ble det argumentert for at en bjelke med bøyeriss kunne sees på som en kam der den urissede betongtrykksonen var ryggen og tennene besto av betongen mellom bøyerissene. I dette avsnittet vil virkningen av bøyerissenes rissvidde beskrives med bakgrunn i denne modellen.

Figur 3.6 a), viser en fritt opplagt bjelke uten skjærarmoring med en punktlast på midten og en forenklet fremstilling av bøyerissene som oppstår. Trykkzonehøyden angis som produktet  $\alpha d$  og den indre momentarmen angis som  $z$ . Punktlasten vil i hvert av skjærspennene gi et lineært momentdiagram og en konstant skjærkraft. Endringen i strekkraft i armeringen,  $\Delta T$ , fra et bøyeriss til det neste vil dermed avhenge av endringen i moment. Videre vil skjærkraften være den deriverte av momentet slik at følgende uttrykk kan benyttes:

$$V = \frac{dM}{dx} \approx \frac{\Delta M}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta M = V \Delta x \quad (3.6)$$



**Figur 3.6:** Fritt opplagt bjelke med bøyeriss (Collins et al. 2007, etter fig. 4)

Ved nøytralaksen vil avstanden mellom bøyerissene avhenge av avstanden til den urissede trykksonen og avstanden som kreves for at strekkspenninger i betongen skal forplante seg fra strekkarmeringen. I nærheten av strekkarmeringen vil rissavstanden avhenge av armeringens heftegenskaper (Collins et al. 2007). Hvis det antas at dispersjonsvinkelen er  $45^\circ$ , det vil si at spenningene forplanter seg i en vifteform med helning  $45^\circ$  som vist på figuren, vil rissavstanden i nøytralaksen være omtrent  $\Delta x = (1 - \alpha)d$ . Endringen i strekkraft

i armering mellom to bøyeriss som strekker seg opp til nøytralaksen kan dermed skrives på følgende form:

$$\Delta T = \frac{\Delta M}{z} = \frac{V \Delta x}{z} = \frac{V(1 - \alpha)d}{z} \quad (3.7)$$

Figur 3.6 b) og c) viser to likevektsbetraktninger av en betongtann mellom to bøyeriss som strekker seg opp til nøytralaksen. I tilfellet med små rissvidder, figur 3.6 b), antas det at hele skjærkraften kan overføres ved hjelp av friksjon i rissene. Dette fører til at betongtannen er i en tilstand av rent skjær der skjærspenningen er gitt av (3.4). Når tannen er i rent skjær vil rissvinkelen være  $45^\circ$ , og største hovedspenning vil være lik skjærspenningen, jfr. utledningen i avsnitt A.1. Horisontal likevekt er tilfredsstilt da det antas at den horisontale skjærspenningen virker med konstant verdi over lengde  $\Delta x$ . Ved å innføre bruddkriterium fra plastisitetsteorien der det antas at riss oppstår når største hovedspenning i betongen når strekkfastheten  $f_{ctk}$  kan skjærkraften som gir opprissing skrives på følgende form:

$$V_c = bz f_{ctk} \quad (3.8)$$

I det andre tilfellet, figur 3.6 c), antas det at rissvidden er så stor at rissene ikke kan overføre friksjon. Dette fører til at betongtannen vil oppføre seg som en vertikal utkragerbjelke belastet med punktlasten  $\Delta T$ . Momentet i overkant av betongtannen og motstandsmomentet i samme snitt vil være gitt av følgende uttrykk:

$$M_{c,tann} = \Delta T(1 - \alpha)d = \frac{V[(1 - \alpha)d]^2}{z} \quad (3.9)$$

$$W_{c,tann} = \frac{1}{6}b[(1 - \alpha)d]^2 \quad (3.10)$$

Den vertikale betongtrekkspenningen ved bøyerisset vil dermed være gitt av følgende uttrykk:

$$\sigma_{cy} = \frac{M_{c,tann}}{W_{c,tann}} = \frac{6V}{bz} \quad (3.11)$$

Skjærspenningen i betongtannen vil følge en parabelform som angitt i figuren. Ved kanten der trekkspenningen beregnet i (3.11) virker vil det derfor ikke være skjærspenninger. Rissvinkelen vil da være  $\approx 0^\circ$ . Ved å innføre samme bruddkriterium som ovenfor kan dermed skjærkraften som gir opprissing skrives på følgende form:

$$V_c = \frac{1}{6}bz f_{ctk} \quad (3.12)$$

Ut fra disse antakelsene vil altså en økende rissvidde føre til lavere skjærkraft som gir opprissing, og en lavere rissvinkel.

### 3.7 Skala- og tøyningseffekt

Det er et kjent faktum at den nominelle skjærspenningen ved kollaps for en bjelke uten skjærarmering synker for økende tverrsnittshøyde og at denne effekten er mer tydelig for lavere andel lengdearmering, høyere sylindrefasthet og lavere verdi for største tilslagsstørrelse (Bentz & Buckley 2005). Det er vist at rissmønsteret i forsøksresultater kan skaleres for bjelker med varierende høyde, men med konstant forhold mellom høyden og øvrig geometri og tilnærmet konstant armeringsforhold. Det vil si at en skalering av bjelken ikke påvirker hvordan rissene utvikler seg. Men det er viktig å huske at rissviddene skaleres ved å skalere bjelken. Avhengigheten av tverrsnittstørrelse kalles *skalaeffekten*. Det er vist at skalaeffekten kun har sammenheng med høyden av tverrsnittet og at en økning av bredden ikke påvirker den nominelle skjærspenningen (Kani et al. 1979). Forsøk har også vist at skalaeffekten ikke er signifikant for bjelker med skjærarmering større enn minimumskravet (Collins & Kuchma 1999).

Det kan bekreftes at dimensjonering i henhold til tradisjonell plastisitetsteori ikke kan beskrive skalaeffekten (Bazant & Kazemi 1991). Dette kan komme av at plastisitetsteorien antar at brudd skjer samtidig i hele konstruksjonen ved kollaps. I realiteten kollapser en betongkonstruksjon gradvis.

Det er utviklet flere teorier som beskriver skalaeffekten. Disse vil bli presentert i det følgende.

#### 3.7.1 Tradisjonell statistisk teori

På grunn av utilsiktet variasjon i betongkvalitet innenfor en konstruksjonsdel kan det oppstå svake punkter tilfeldig fordelt i betongvolumet (Bazant, Ozbolt & Eligehausen 1994). Hvis det antas at skjærriss oppstår i forbindelse med et svakt punkt i materialet vil det derfor være større sjanse for at det oppstår riss i en stor konstruksjon enn i en liten ettersom den store konstruksjonen ut fra antakelsen vil ha flere svake punkter. Ut fra denne teorien vil det initieres brudd i en stor konstruksjon for en mindre nominell skjærspenning enn i en liten konstruksjon. Det har vist seg at dette stemmer godt, men at teorien ikke beskriver hvordan den nominelle skjærspenningen ved kollaps avhenger av størrelsen.

#### 3.7.2 Teori med bakgrunn i bruddmekanikk

Med bakgrunn i ikkelineær bruddmekanikk kan skalaeffekten beskrives ved hjelp av frigjøring av tøyningseenergi på grunn av rissvekst (Bazant et al. 1994). Energien som kreves for en enhetsøkning av risslengden kan betraktes som uavhengig av konstruksjonsdelens størrelse. På grunn av energibalanse må det frigjøres like mye tøyningseenergi som det kreves for en enhetsøkning av risslengden. Ettersom en stor konstruksjonsdel frigjør tøyningseenergi over et større område enn en liten konstruksjonsdel må derfor den nominelle skjærspenningen ved kollaps være mindre for en stor enn for en liten konstruksjonsdel.

Den maksimale nominelle skjærspenningen kan beskrives av et uttrykk på formen (3.13) (Bazant & Kazemi 1991) som tar med skalaeffekten.  $\beta = d/d_0$  kalles sprøhets-

faktoren og tar høyde for at konstruksjonen får en sprøere oppførsel for lavere lengdearmeringsmengde, mindre tilslagsstørrelse og høyere sylindrefasthet (Bentz & Buckley 2005).  $d_0$  er en empirisk konstant,  $d$  er tverrsnittets effektive dybde og  $\tau_0$  er en referansespenning som kan være avhengig av sylindrefastheten.

$$\tau_{max} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \beta}} \quad (3.13)$$

(3.13) beskriver en ikkelineær overgang fra plastisitetsteori for  $d \ll d_0$  til lineær bruddmekanikk for  $d \gg d_0$ .

### 3.7.3 Teori med bakgrunn i asymmetri

Michael D. Kotsovos hevder at skalaeffekten skyldes effekter ut av planet som følge av asymmetri i deformasjon og belastning (Bentz & Buckley 2005). Asymmetri kan blant annet komme av følgende årsaker:

- Skjev belastning eller utilsiktet eksentrisitet som gir rotasjon av tverrsnittet.
- Asymmetriske riss på bjelkens sidekanter.

Tverrsnitt med stort forhold mellom høyde og bredde vil ha større effekt av asymmetri ettersom den ytre lasten da vil få en større momentarm om lengdeaksen når tverrsnittet roteres.

### 3.7.4 Teori med bakgrunn i armeringens evne til å fordele riss

Det antas at skjærkapasiteten bestemmes av de diagonale rissenes evne til å overføre skjærspenninger ved friksjon. Skjærkapasiteten vil dermed direkte avhenge av rissvidden og rissenes ruhet (Collins & Kuchma 1999). Ruheten vil være avhengig av største tilslagsstørrelse og betongens sylindrefasthet, jfr. avsnitt 3.4.

Rissvidden er avhengig av rissavstanden og største hovedtøyning i betongen. I avsnitt 3.6 ble det argumentert for at rissavstanden nær strekksiden var avhengig av heftegenskapene til armeringen og at den midt i høyden var avhengig av avstanden til armeringen og den urissede trykksone. Disse argumentene burde medføre at rissavstanden og dermed rissvidden avtar hvis avstanden til armeringsenhetene er lav. En hypotese vil dermed være at den nominelle skjærspenningen ved kollaps øker hvis det legges inn fordelt lengdearmering over høyden.

Denne hypotesen bekreftes av en forsøksrekke utført av Collins & Kuchma (Collins & Kuchma 1999). Egenskaper som ble forandret i bjelkene som ble testet var høyde, lengdearmeringsmengde, innføring av minimumsarmering og fordeling av lengdearmering over høyden. Det følgende ble observert:

- Nominell skjærspenning avtok ved økende høyde.



- Nominell skjærspenning økte hvis det ble lagt inn fordelt lengdearmering. Det ble samtidig observert en jevnere fordeling av diagonale riss samt duktilt kollaps i motsetning til sprøtt kollaps i tilfellene uten fordelt lengdearmering.
- Forholdet  $V/bd\sqrt{f'_c}$  avtok for økende sylindrefasthet.
- Spredningen i fremstillingen ble mindre hvis den nominelle skjærspenningen ble plottet mot den ekvivalente rissavstanden, jfr. avsnitt 4.4, i stedet for mot dybden  $d$ .
- Med minimumsarmering ble det ikke observert noen effekt av å øke høyden.

I modifisert trykkfeltsteori, jfr. avsnitt 4.4, innføres skalaeffekten ved hjelp av enten avstanden mellom hvert lag av fordelt lengdearmering eller indre momentarm  $z$  hvis lengdearmeringen er konsentrert på strekksiden.

### 3.7.5 Tøyningseffekt

Som beskrevet i avsnitt 3.7.4 avhenger rissvidden også av den største hovedtøyningen i betongen. Denne tøyningen er i stor grad avhengig av tøyningen i lengdearmeringen på grunn av det påførte momentet, skjærkraften og en eventuell aksialkraft. Hvis bjelken inneholder en stor andel lengdearmering vil tøyningen bli liten. I praksis vil lengdearmeringen være proporsjonal med det maksimale momentet som følge av vanlig dimensjonering, men i skjærkraftforsøk på bjelker er det gjerne lagt inn større mengder lengdearmering for å sikre at bjelken ikke går til brudd på grunn av bøyning før skjærkraftkapasiteten oppnås (Collins et al. 2007). Dette kan føre til at uttrykk som tar høyde for armeringsmengden, men ikke tøyningen i lengdearmeringen, som er empirisk tilpasset slike forsøk kan gi urealistisk høy skjærkapasitet for praktiske tilfeller.

Avhengigheten av tøyningen i lengdearmeringen kalles *tøyningseffekt*.

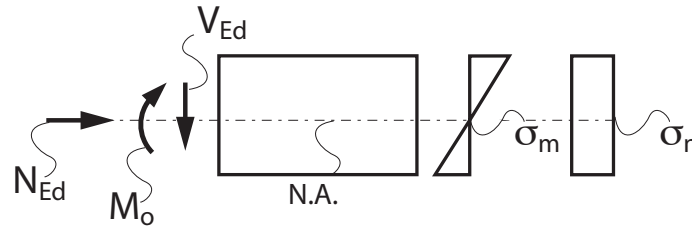
Ut fra disse beskrivelsene er det klart at skala- og tøyningseffekt er to fenomener som er svært viktige for konstruksjonsdeler uten skjærarmering. Med antakelsen om at skalaeffekten skyldes armeringens evne til å fordele riss er det også klart at disse to effektene avhenger av hverandre i stor grad.

## 3.8 Virkningen av aksialkraft

En aksiell trykkraft øker skjærkapasiteten til et tverrsnitt og det motsatte er tilfelle for en aksiell strekkraft. Det kan komme som en følge av at aksialstrekk har en tendens til å åpne de allerede eksisterende rissene og aksialtrykk lukker rissene. I dette avsnittet vil det bli gitt et argument for hvordan en aksiell trykkraft kan øke skjærkapasiteten.

Med en aksiell trykkraft i tillegg til moment og skjærkraft vil trykksonehøyden bli større enn i en bjelke med kun moment og skjærkraft (Sørensen 2005). Samtidig vil eventuelle skråriss bli mer paralelle med lengdeaksen, jfr. avsnitt 3.3. Det antas at diagonale riss initieres av vertikale bøyeriss og at bøyerissene oppstår når det ytre momentet når

rissmomentet  $M_o$  som tilsvarer at bøyespenningen på strekksiden passerer verdien 0. Det antas videre at forholdet mellom skjærkraften og momentet i et snitt er konstant i alle tilstander.



**Figur 3.7:** Rissmoment (Sørensen 2005, etter figur 4.18)

Figur 3.7 viser de ytre kreftene og de resulterende indre aksialspenningsene i en bjelke utsatt for moment og aksialkraft. Bøyespenningen  $\sigma_m$  er gitt av  $\sigma_m = M_o/W_c$  der  $W_c$  er det urissede betongtverrsnittets motstandsmoment og normalspenningen på grunn av aksialkraft  $\sigma_n$  er gitt av  $\sigma_n = N_{Ed}/A_c$ . Ved å forlange at spenningen på strekksiden er lik 0 når betongen risser kan følgende uttrykk utledes:

$$\sigma_m - \sigma_n = \frac{M_o}{W_c} - \frac{N_{Ed}}{A_c} = 0 \Rightarrow M_o = \frac{N_{Ed}W_c}{A_c} \quad (3.14)$$

Ved å innføre antakelsen om at forholdet mellom skjærkraft og moment er konstant i alle tilstander kan følgende uttrykk beregne tillegget i skjærkapasitet med en aksial trykkraft. Dette tilsvarer tillegget gitt i NS 3473 (Standard Norge 2003, 12.3.2.2):

$$V_o = \frac{M_o}{M_{Ed}} V_{Ed} \quad (3.15)$$

### 3.9 Minimumskrav til skjærarmering

For å hindre sprøtt kollaps kort tid etter dannelsen av diagonale riss bør det legges inn et minimum av skjærarmering (Hsu & Mo 2010). Ut fra tester på bjelker med liten andel skjærarmering kan resultatene for forholdet  $\rho_w f_y / \sqrt{f_{ck}}$  plottes som en funksjon for eksempel  $a/d$ -forholdet. Hvis det samtidig angis i plottet hvilke resultater som skyldtes duktilt og sprøtt kollaps kan et minste armeringsforhold som gir duktilt kollaps finnes direkte. Minimumsarmeringen kan dermed angis som en funksjon av for eksempel  $a/d$ -forholdet eller som en verdi som oppfyller hele skalaen.

### 3.10 Oppsummering

Her følger en kort oppsummering av parameterne som påvirker skjærkapasiteten til en bjelke med normaldensitetsbetong uten skjærarmoring. En god beregningsmodell for skjærkapasiteten bør ta hensyn til alle disse parametrene.

**Betongkvaliteten:**

Høy sylindrefasthet fører til at skjærtrykkkapasiteten blir høy, men altfor høy sylindrefasthet kan føre til at rissene penetrerer tilslagskorn og gir riss med lavere ruhet. En høy strekkfasthet gir betongen god motstand mot å risse opp og bør betegnes som hovedegenskapen med hensyn på skjærkapasiteten.

**Lengdearmeringsmengde:**

Lav lengdearmeringsmengde fører til lav momentkapasitet og dermed at bjelken har stor sannsynlighet for å kollapse på grunn av moment før den kritiske skjærkraften nås. Samtidig vil lav lengdearmeringsmengde føre til mindre dybeeffekt og større rissvidder, noe som er negativt for aggregate interlock.

 **$a/d$ -forholdet:**

Skjærkraft være kritisk for en bjelke for omtrent  $1 < a/d < 5$ .

**Tverrsnittshøyden:**

Det er beskrevet at høye tverrsnitt har en lavere kritisk skjærspenning enn lave tverrsnitt.

**Tilslag:**

Rissenenes ruhet og dermed bidraget til skjærkapasiteten fra aggregate interlock er avhengig av tilslagets størrelse og densitet, liten tilslagsstørrelse og lav densitet fører til lav ruhet.

**Aksialkraft:**

Aksielle strekkrefter reduserer bjelkens skjærkapasitet.



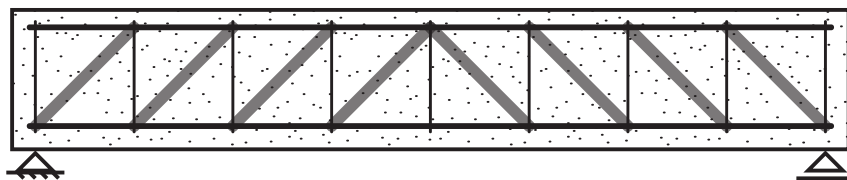
## 4 Beregningsmodeller

I dette kapittelet vil det bli presentert fire beregningsmodeller for beregning av skjærkapasiteten til en bjelke:  $45^\circ$  fagverksmodell, fagverksmodell med variabel helning, trykkfeltsteori og modifisert trykkfeltsteori.

Hovedforskjellene mellom de forskjellige modellene er hvordan rissvinkelen  $\theta$  beregnes og om betongen regnes med eller uten strekkspenninger.

### 4.1 $45^\circ$ fagverksmodell

Mörsch (1909) argumenterte i sin bok for bruken av en indre fagverksmodell ved dimensjonering for skjær. Bakgrunnen for dette var en rekke tester på bjelker både med og uten skjærarmering. Figur 4.1 viser et eksempel på denne modellen for en fritt opplagt bjelke. Betongtrykksonen og trykkarmeringen danner overgurten og lengdearmeringen i bunnen er undergurten. Diagonale trykkspenninger i betongen med  $45^\circ$  helning oppfører seg som trykkstaver og de vertikale skjærbøylene som strekkstaver. Valget av helningen på betongtrykkspenningene tilsvarer en rissvinkel på  $45^\circ$ .



**Figur 4.1:** Tradisjonell  $45^\circ$  fagverksmodell

I utgangspunktet gikk trykkstavene fra toppen av en vertikal strekkstav til bunnen av neste, men Mörsch argumenterte i en senere utgave av boken for at trykkstavene heller kunne sees på som et kontinuerlig trykkfelt. Beregningsmodellen for de indre kreftene kan illustreres med figur 4.2.

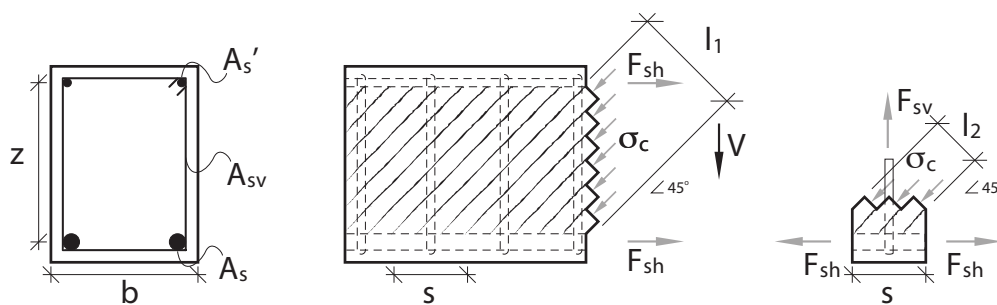
Skjærkraften fører til spenningen  $\sigma_c$  i betongtrykkdiagonalen som må være i likevekt med kreftene  $F_{sh}$  i lengdearmeringen. Hvis det antas at betongtrykkspenningen  $\sigma_c$  virker over høyden  $z$ , vil lengden  $l_1$ , spenningen  $\sigma_c$  og armeringskreftene  $F_{sh}$  være gitt av (4.1), (4.3) og (4.4).

$$l_1 = z \sin 45^\circ = \frac{z}{\sqrt{2}} \quad (4.1)$$

$$V = \sigma_c b l_1 \sin 45^\circ \quad (4.2)$$

$$\sigma_c = \frac{V}{b l_1 \sin 45^\circ} = \frac{2V}{bz} \quad (4.3)$$

$$F_{sh} = \frac{\sigma_c l_1 b \cos 45^\circ}{2} = \frac{V}{2} \quad (4.4)$$



**Figur 4.2:** Beregningsmodell for indre krefter i  $45^\circ$  fagverksmodell (Collins & Mitchell 1991, etter figure 7-16)

Betongens strekkspenninger på tvers av rissene neglisjeres. Derfor må spenningen i trykkdiagonalen være i likevekt med kreftene i skjærarmeringen. Ut fra geometri og likevekt kan  $l_2$  og  $F_{sv}$  uttrykkes med (4.5) og (4.6) der  $s$  er senteravstanden mellom skjærarmeringsenhetene.

$$l_2 = s \sin 45^\circ \quad (4.5)$$

$$F_{sv} = \sigma_c l_2 b \sin 45^\circ = V \frac{s}{z} \quad (4.6)$$

Hvis det antas at betongens kapasitet bestemmes av dimensjonerende fasthet i trykkfelt og at armeringen flyter, kan (4.3) og (4.6) skrives om slik at de gir dimensjonerende skjærkraft. (4.7) vil her være betongens skjærtrykkkapasitet og (4.8) vil være tverrsnittets skjærstrekkkapasitet.  $\sigma_{Rd,max}$  er beskrevet i kapittel 2.1.4 og  $f_{ywd}$  i 2.2.  $A_{sv}$  er arealet av skjærarmeringen som vist i figur 4.2. I tillegg til å sjekke skjærkraftkapasitetene må horisontalarmeringen sjekkes med (4.4).

$$V_{Rd,max} = \frac{bz}{2} \sigma_{Rd,max} \quad (4.7)$$

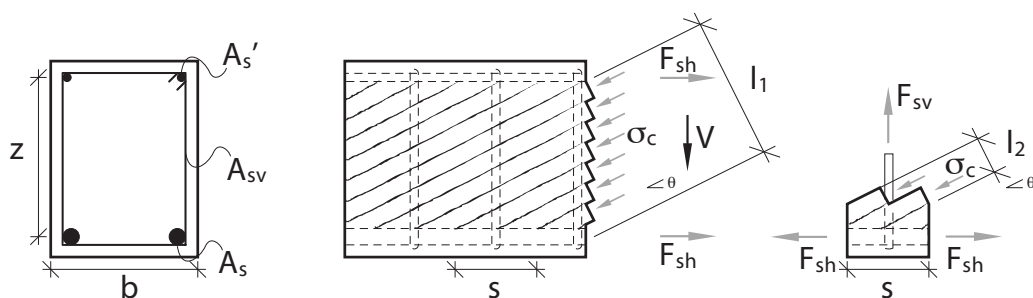
$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sv}}{s} z f_{ywd} \quad (4.8)$$

En klar ulempe med denne teorien er at en bjelke uten skjærarmering ut fra (4.8) ikke vil ha noen skjærkapasitet. De første skjærrissene som oppstår vil ha  $45^\circ$  helning, men når bjelken utsettes for økende last vil rissvinkelen bli mindre. En mindre rissvinkel vil føre til at flere skjærarmeringsenheter krysser risset og kan bidra til tverrsnittets strekkkapasitet. Dette kan føre til at en  $45^\circ$  fagverksmodell underestimerer skjærkapasiteten (Collins & Mitchell 1991).

## 4.2 Fagverksmodell med variabel helning

Som beskrevet i kapittel 3.3 vil de første diagonale rissene som oftest ha en helning på  $45^\circ$ , men etter dette kan helningen variere. For å ta høyde for dette kan fagverksmodellen gjøres mer generell ved å tillate en variabel helning på de diagonale trykkfeltene (Collins & Mitchell 1991).

Figur 4.3 viser en modell for beregningen av de indre kreftene i en fagverksmodell med variabel helning.



**Figur 4.3:** Beregningsmodell for indre krefter i fagverksmodellen med variabel helning (Collins & Mitchell 1991, etter figure 7-22)

De indre kreftene beregnes på samme måte som for fagverksmodellen med  $45^\circ$  helning, men vinkelen  $\theta$  kan variere. (4.9), (4.10) og (4.11) gir uttrykkene for de indre kreftene.

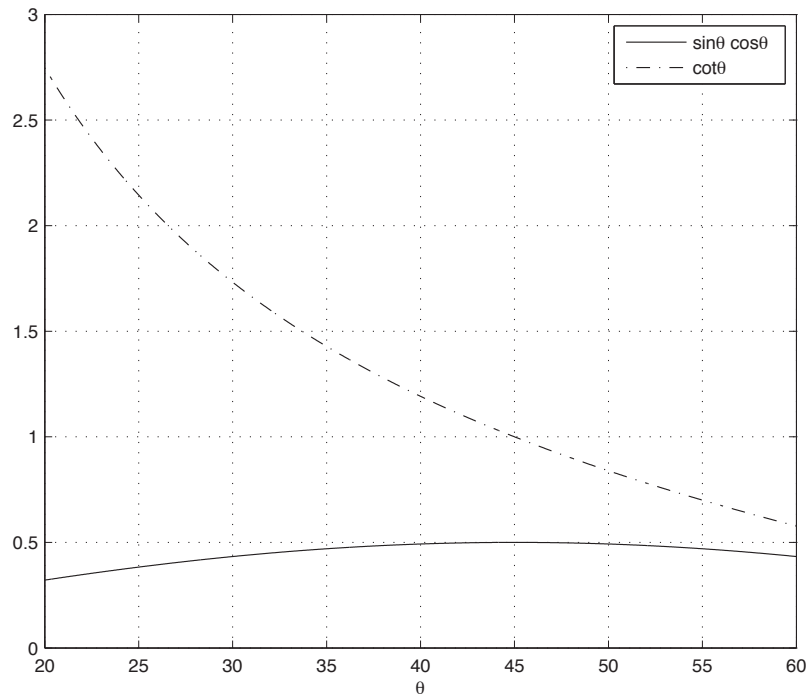
$$\sigma_c = \frac{V}{bz \sin \theta \cos \theta} = \frac{V}{bz} (\tan \theta + \cot \theta) \quad (4.9)$$

$$F_{sh} = \frac{V}{2} \cot \theta \quad (4.10)$$

$$F_{sv} = V \frac{s}{z} \tan \theta \quad (4.11)$$

Utfordringen med denne formuleringen er at det er fire ukjente;  $\sigma_c$ ,  $\sigma_{sh}$ ,  $\sigma_{sv}$  og  $\theta$ , men bare tre likevektslikninger. En mulig løsning på problemet er å anta at både stål og betong oppfører seg lineært elastisk og bruke prinsippet om stasjonær potensiell energi til å bestemme vinkelen  $\theta$ . Dette prinsippet fører til at elementene med størst stivhet tar størst last. I de fleste tilfeller vil lengdearmeringen ha den største stivheten og  $\theta < 45^\circ$  (Collins & Mitchell 1991).

En annen måte å løse problemet på er å anta spenninger i materialene ved brudd i henhold til plastisitetsteorien. Ved å anta at  $\sigma_c = \sigma_{Rd,max}$  og  $\sigma_{sv} = f_{ywd}$  kan  $\theta$  og  $V$  finnes ved å løse ligningssystemet (4.9) og (4.11). Dimensjoneringsstandarder setter øvre og nedre grenser for vinkelen. Dette vil spesifiseres nærmere i kapittel 5. Hvis de maksimale spenningene for skjærbøylene og betong i trykkfelt settes inn i (4.9) og (4.11) kan skjærkapasiteten uttrykkes som skjærtrykkkapasiteten i (4.12) og skjærstrekk i (4.13).



**Figur 4.4:**  $\sin \theta \cos \theta$  og  $\cot \theta$  for  $20^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

$$V_{Rd,max} = bz \cos \theta \sin \theta \sigma_{Rd,max} = \frac{bz}{\cot \theta + \tan \theta} \sigma_{Rd,max} \quad (4.12)$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sv}}{s} z \cot \theta f_{ywd} \quad (4.13)$$

Hvis betongen har høy sylinderfasthet, blir  $\theta$  beregnet fra (4.12) for en kjent skjærkraft lav, og jo lavere  $\theta$  blir, jo lavere blir belastningen på hver skjærbøyler. Dermed blir resultatet av høyere betongkvalitet lavere  $\theta$  og færre skjærbøyler. Det skal bemerkes at skjærstrekkkapasiteten normalt er dimensjonerende for rektangulære bjelker, mens skjærtrykkkapasiteten kan være dimensjonerende for bjelker med tynne steg, jfr. avsnitt 1.2.

Funksjonene  $\sin \theta \cos \theta$  og  $\cot \theta$  er vist i figur 4.4 for  $20^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ . Fra figuren kan det sees at  $\sin \theta \cos \theta$  har sin maksimalverdi 0.5 for  $\theta = 45^\circ$ , og at  $\cot 45^\circ = 1$ . Figuren er inkludert fordi disse trigonometriske funksjonene inngår i flere av kapasitetsuttrykkene i kapittel 5.

### 4.3 Trykkfeltsteori

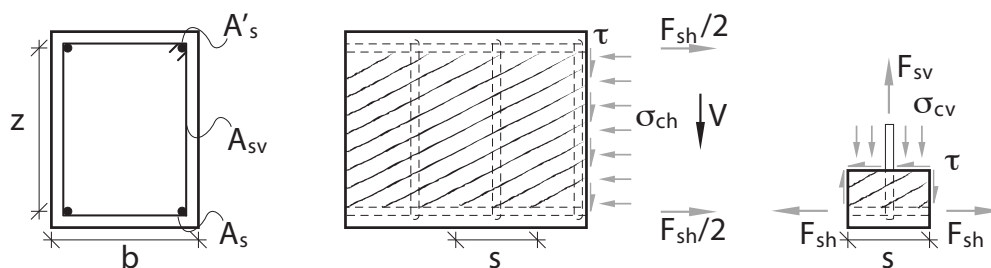
Trykkfeltsteori er basert på en teori fra 1929 som behandlet tynnveggede stålbjelker utsatt for skjærkrefter. Teorien gikk ut på at bjelkene overførte hele skjærkraften i form av diagonale strekkfelt så fort steget ble utsatt for knekning. I trykkfeltsteori for betong antas det at opprisset betong ikke kan overføre strekk. Skjærkrefter vil da overføres av



skjærarmering og betong i diagonalt trykk (Collins 1978). Teorien vil her bli utledet for en rektangulær bjelke med skjærarmering og symmetrisk lengdearmering utsatt for rent skjær. Armeringen antas utført på en slik måte at rissene som oppstår fordeler seg jevnt.

Rissene som oppstår fører til en lokal variasjon av spenninger og tøyninger. En skjærbøyle vil for eksempel ha større strekk-tøyninger midt i et riss sammenlignet med et urisnet område. Derfor vil spenningene og tøyningene som benyttes i formuleringen være gjennomsnittlige spenninger og tøyninger. En gjennomsnittlig tøyning kan defineres som en tøyning målt over en lengde som inkluderer flere riss. Videre antas det at det kun er betongen innenfor høyden  $z$  som er effektiv. Ved hjelp av likevektsbetraktninger, konstitutive relasjoner for stål og betong og en kompatibilitetsbetingelse for tøyningene vil teorien utledes. Det skal vises at teorien ikke bare kan beskrive en kritisk skjærkraft eller skjærspenning, men at den også kan beskrive deformasjonen ettersom det er tatt hensyn til tøyningsskompatibilitet.

### 4.3.1 Likevektsbetraktninger



**Figur 4.5:** Beregningsmodell for indre krefter med trykkfeltsteori (Collins 1978, etter FIG. 2 og 3)

Figur 4.5 viser beregningsmodellen for likevekt. Ved å se bort fra dybelvirkningen i lengdearmeringen gir vertikal likevekt den gjennomsnittlige skjærspenningen i (4.14). Horisontal likevekt gir sammenhengen mellom spenningen i lengdearmeringen,  $\sigma_{sh}$ , og den horisontale komponenten av betongtrykkspenningen,  $\sigma_{ch}$ , i (4.15). Ved å innføre armeringsforholdet  $\rho_{sh} = \frac{A_{s,tot}}{bz}$ , kan (4.15) omskrives til (4.16).  $A_{s,tot} = A_s + A'_s$  er den totale lengdearmering.

$$\tau = \frac{V}{bz} \quad (4.14)$$

$$A_{s,tot}\sigma_{sh} - \sigma_{ch}bz = 0 \quad (4.15)$$

$$\sigma_{ch} = \rho_{sh}\sigma_{sh} \quad (4.16)$$

Sammenhengen mellom skjærspenningen og de indre betongspenningene gitt av (4.17), (4.18) og (4.19) kan finnes ved hjelp av (A.7), (A.8) og (A.9) ved å sette  $\sigma_{c1} = 0$  og innføre negativt fortegn på trykkspenninger.

$$\sigma_{cv} = \tau \tan \theta \quad (4.17)$$

$$\sigma_{ch} = \tau \cot \theta \quad (4.18)$$

$$\sigma_{c2} = \sigma_{cv} + \sigma_{ch} = \tau(\tan \theta + \cot \theta) \quad (4.19)$$

Ved å benytte (A.2), sette  $\sigma_y = 0$  og innføre  $\rho_{sv} = \frac{A_{sv}}{b_s}$  kan følgende uttrykk beskrive sammenhengen mellom vertikale betongspenninger og spenningene i skjærarmeringen.

$$\sigma_{cv} = \rho_{sv} \sigma_{sv} \quad (4.20)$$

### 4.3.2 Tøyningskompatibilitet

For å kunne koble spenning og tøyning innføres tøyningskompatibiliteten gitt av (A.16). Det antas at minste hovedspennings- og hovedtøyningsretning sammenfaller, det vil si  $\theta = \theta_\epsilon$ .

### 4.3.3 Materialmodell

Det antas at materialmodellen presentert i avsnitt 2.3.4 kan benyttes ved å neglisjere strekkspenningene i betongen. For små trykktøyninger kan det antas som en forenkling at betongen har lineær elastisk oppførsel.

Armeringen antas å ha en lineær, perfekt plastisk oppførsel.

### 4.3.4 Vinkelen $\theta$ før skjærarmeringen flyter

Collins (1978) foreslår to metoder for å beregne rissvinkelen  $\theta$  før skjærarmeringen flyter; en iterativ metode og en metode basert på indre arbeid. Den iterative metoden egner seg godt til programmering og er gitt i den følgende punktlisten.

1. Anta verdi for vinkelen  $\theta$
2. Beregne  $\tau$  fra (4.14)
3. Beregne  $\sigma_{cv}$  fra (4.17)
4. Beregne  $\sigma_{sv}$  fra (4.20)
5. Beregne  $\epsilon_{sv}$  fra (2.16)
6. Beregne  $\sigma_{ch}$  fra (4.18)

7. Beregne  $\sigma_{sh}$  fra (4.16)
8. Beregne  $\epsilon_{sh}$  fra  $\sigma_{sh}$
9. Beregne  $\sigma_{c2}$  fra (4.19)
10. Beregne  $\epsilon_2$  fra den lineære sammenhengen for betong i trykk
11. Beregne  $\theta$  fra tøyningsskompatibilitet gitt av (A.16). Hvis den beregnede verdien stemmer med antakelsen fra punkt 1 er verdien korrekt. Hvis ikke, må en ny verdi antas og prosessen gjentas.

Ved å anta lineært elastiske materialer kan det etableres et uttrykk for det indre for-  
mendringsarbeidet. Spenningstilstanden vil være i likevekt når arbeidet når sin minste  
verdi. Vinkelen  $\theta$  som gir likevekt finnes dermed ved å minimere arbeidet med hensyn  
på  $\theta$ . (4.21) (Collins 1978, Ligning 29) gir  $\theta$  når det antas at både skjærarmingen og  
lengdearmingen er under flytegrensen.  $\eta$  er modulforholdet gitt av (4.22).

$$\tan^4 \theta = \frac{1 + \frac{1}{\eta \rho_{sh}}}{1 + \frac{1}{\eta \rho_{sv}}} \quad (4.21)$$

$$\eta = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.22)$$

(4.21) sier at  $\theta$  kun avhenger av armeringsforholdene og er konstant opp til flytegrensen. Med disse antakelsene og ved å benytte tøyningsskompatibiliteten kan deformasjonen beregnes frem til armeringen når flytegrensen.

#### 4.3.5 Kapasitetsformler

I henhold til plastisitetsteori antas det at kollaps inntreffer når skjærarmingen flyter. Opp til skjærarmingen flytegrense kan  $\theta$  bestemmes ved hjelp av (4.21). Hvis denne verdien settes inn i (4.17) og (4.19), og (4.14) innføres, kan følgende uttrykk bestemme henholdsvis skjærstrekk- og skjærtrykkapasiteten. Her er dimensjonerende verdier for flytespenningen og betongtrykkspenningen satt inn i henhold til avsnitt 2.1.

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sv}}{s} z f_{ywd} \cot \theta \quad (4.23)$$

$$V_{Rd,max} = \sigma_{Rd,max} b z \frac{1}{\tan \theta + \cot \theta} \quad (4.24)$$

I tillegg til disse ligningene må lengdearmingen kontrolleres. Dette kan gjøres ved hjelp av (A.10) som omskrevet og innsatt for  $\sigma_x = \sigma_{c1} = 0$  blir:

$$\rho_x \sigma_{sx} = \tau_{xy} \cot \theta \quad (4.25)$$

Hvis  $\sigma_{sx}$  beregnes fra (4.25) er større enn flytespenningen vil bjelken kollapse på grunn av bøyning.

## 4.4 Modifisert trykkfeltsteori

Vecchio & Collins (1986) testet en rekke betongelementer med dimensjoner 890x890x70 mm og ortogonal armering i ulike belastningskombinasjoner i planet. Egenskapene som ble variert var armeringsmengde i to retninger og betongkvaliteten. De gjennomsnittlige armeringsspenningene ble beregnet fra målte gjennomsnittlige tøyninger. Fra likevektsbetraktninger og de kjente ytre spenningene kunne de gjennomsnittlige betongspenningene beregnes.

Ved å fremstille betongspenningene grafisk, ble det tydelig at det oppstod gjennomsnittlige hovedtrekkspenninger i betongen (Collins et al. 2007). Det ble observert at betong utsatt for trykk og samtidig strekk på tvers var svakere enn betong i en enakset trykktest og at responsen hadde lavere stivhet. Hovedtrykkspenningene,  $\sigma_{c2}$ , ble funnet å ikke bare være avhengige av minste hovedtøyning,  $\epsilon_2$ , men også største hovedtøyning,  $\epsilon_1$ .

I den urissede delen av betongen langs et plan parallelt med de diagonale rissene vil det ikke være skjærspenninger ettersom dette er et hovedplan. På grunn av den tidligere nevnte variasjonen av lokale spenninger, vil betongtrekkspenningene på et plan i et diagonalt riss synke til null samtidig som armeringsspenningene stiger. For å oppnå likevekt må det være lokale skjærspenninger og trykkspenninger i betongen i risset (Vecchio & Collins 1986). Det antas at normalbetong risser i overgangssonen mellom tilslag og herdnet sementpasta, og at skjærspenningene skyldes den røe overflaten som oppstår der. Størrelsen på skjærspenningene som kan overføres i risset antas å avhenge av rissvidden og største tilslagsstørrelse. Rissvidden antas videre å avhenge av største hovedtøyning, det vil si tøyningen ortogonalt på rissretningen.

Betongens motstand mot skjærspenninger i planet bestemmes fra dette av trykk- og strekkkapasiteten i trykkfeltet og av rissenes evne til å overføre skjærspenninger ved hjelp av aggregate interlock. Disse tre faktorene kontrolleres av  $\epsilon_1$ .  $\epsilon_1$  kan derfor sies å være skadeindikatoren i modifisert trykkfeltsteori (Collins, Mitchell, Adebar & Vecchio 1996).

I det følgende vil det bli vist hvordan modifisert trykkfeltsteori kan brukes til å beregne responsen av et skallelement i betong utsatt for spenninger i planet. Videre vil det bli vist hvordan teorien kan utvides for å beregne responsen av en rektangulær bjelke utsatt for kombinert skjærkraft, moment og aksialkraft. Utledningen er basert på materialmodellen presentert i avsnitt 2.3.4.

### 4.4.1 Likevektsbetraktninger

Figur A.1 viser et betongelement utsatt for spenninger i planet. Likevektsligningene gitt av (A.9), (A.10), (A.11) og (A.12) vil bli benyttet i det følgende.

Figur A.4 viser samme element snittet i to plan. Horisontal og vertikal likevekt i de to snittene beskrives av (A.17), (A.18), (A.19) og (A.20). Ved å kreve at de to spenningstilstandene skal være statisk ekvivalente kan følgende uttrykk utledes (Vecchio & Collins 1986):

$$\sigma_{c1} + \rho_x \sigma_{sx} = \rho_x \sigma_{sxx} - \sigma_{cr} - \tau_{cr} \cot \theta \quad (4.26)$$

$$\sigma_{c1} + \rho_y \sigma_{sy} = \rho_y \sigma_{syr} - \sigma_{cr} + \tau_{cr} \tan \theta \quad (4.27)$$

Spenninger med subskript  $r$  er spenninger som virker i armering og betong i risset. Fra (4.26) og (4.27) kan det sees at betongens evne til å overføre gjennomsnittlige strekkspenninger,  $\sigma_{c1}$ , begrenses av rissets evne til å overføre skjærspenninger,  $\tau_{cr}$ . Hvis det sees bort fra den positive innvirkningen fra betongtrykkspenningene i risset kan (4.26) og (4.27) forenkles.

$$(\sigma_{sxr} - \sigma_{sx})\rho_x = \sigma_{c1} + \tau_{cr} \cot \theta \quad (4.28)$$

$$(\sigma_{syr} - \sigma_{sy})\rho_y = \sigma_{c1} - \tau_{cr} \tan \theta \quad (4.29)$$

Hvis den gjennomsnittlige armeringsspenningen i  $y$ -retning, og dermed også i risset i  $y$ -retning, har nådd flytegrensen, begrenses den gjennomsnittlige hovedtrekkspenningen i betongen av følgende uttrykk (Collins et al. 1996).

$$\sigma_{c1} = \tau_{cr} \tan \theta \quad (4.30)$$

#### 4.4.2 Tøyningskompatibilitet

Tøyningskompatibiliteten presentert i vedlegg A er også gyldig for modifisert trykkfeltsteori. (A.16) beskriver dermed relasjonen mellom de gjennomsnittlige tøyingene og risvinkelen når det antas at minste hovedspennings- og hovedtøyningsretning sammenfaller, det vil si  $\theta = \theta_\epsilon$ .

#### 4.4.3 Løsningsmetode

Den totale responsen av elementet i figur A.1 er nå gjort ikkelineær på grunn av den ikkelineære materialmodellen for betong og at betongens hovedtrekkspenning begrenses av rissets evne til å overføre skjærspenninger. En måte å løse dette på er ved hjelp av en iterativ løsningsmetode. Collins & Mitchell (1991) foreslår en metode som her er gjengitt og tilpasset til det generelle tilfellet vist i figur A.1. Metoden går ut på å iterativt øke største hovedspenning, og for hvert steg beregne skjærspenningen som skaper likevekt mellom ytre normalspenninger og indre respons. Metoden egner seg godt til programmering ettersom den baserer seg på en rekke beregninger som skal gjøres i serie og kontroller som kan føre til at det må returneres til tidligere steg i prosessen. Elementets kapasitet finnes for den tøyingen som fører til at betongen knuses eller at armeringen flyter.

1. Velge  $\epsilon_1$
2. Anta  $\theta$
3. Beregne  $w$  fra (2.33)
4. Anta  $\sigma_{sy}$

5. Beregne  $\sigma_{c1}$  fra (2.28) og (4.30) og velge den minste verdien
6. Beregne  $\tau_{xy}$  fra (A.12)
7. Beregne  $\sigma_{c2}$  fra (A.9)
8. Beregne  $f_{c2max}$  fra (2.30)
9. Hvis  $\sigma_{c2} > f_{c2max}$  er betongens kapasitet nådd i trykk
10. Beregne  $\epsilon_2$  fra (2.29) innsatt  $\epsilon'_c = -0.002$ :  $\epsilon_2 = -0.002(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_{c2}}{f_{c2max}}})$
11. Beregne  $\epsilon_x$  og  $\epsilon_y$  fra tøyningsskompatibilitet:  $\epsilon_y = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2 \theta}$ ,  $\epsilon_x = \frac{\epsilon_1 \tan^2(\theta) + \epsilon_2}{1 + \tan^2 \theta}$
12. Beregne  $\sigma_{sy}$  fra (2.16). Hvis verdien ikke stemmer med den antatte verdien; anta ny verdi og returner til punkt 4.
13. Beregn  $\sigma_{sx}$  fra (2.16)
14. Beregn  $\sigma_x$  (A.10). Hvis verdien ikke stemmer med ytre belastning, anta ny verdi for  $\theta$  og returner til punkt 2. Større  $\theta$  øker  $\sigma_x$
15. Kontroller om armeringen i x-retning kan overføre kreftene på tverrs av risset, det vil si sjekke om  $\sigma_{sxr} \geq f_{yd}$  i (4.28). Hvis ikke må  $\sigma_{c1}$  begrenses av (4.28) og returnere til punkt 5.

Når alle punktene er gjennomført for en verdi av  $\epsilon_1$ , vil  $\tau_{xy}$  beregnet i punkt 6 være skjærspenningen som svarer til spenningstilstanden.

#### 4.4.4 Beregning av rektangulær bjelke

Bentz et al. (2006) foreslår tre metoder å beregne en bjelke utsatt for skjærkraft med modifisert trykkfeltsteori:

1. Dele inn hele bjelken i biaksielle skallelementer og gjennomføre en full ikkelineær elementmetodeanalyse med metoden beskrevet i forrige avsnitt. På denne måten kan kraft-forskyvningsresponsen til hele bjelken, både i D- og B-regioner, beregnes veldig nøyaktig. Dette er en kompleks metode som krever et eget dataprogram.
2. Hvis det antas at plane tverrsnitt forblir plane og at tverrsnittet ikke belastes i høyderetningen, kan et snitt av bjelken analyseres med en rekke biaksielle skallelementer over høyden. På denne måten kan skjærspenningsfordelingen over høyden, samt skjær kraft-skjærdeformasjonen beskrives nøyaktig i B-regioner.
3. En enda mer forenklet metode er å legge inn kun ett biaksielt skallelement over høyden av bjelken og anta at skjærspenningsfordelingen er konstant over høyden. Denne metoden vil bli behandlet i det følgende for å finne kapasiteten til et rektangulært betongtverrsnitt.

Ved å anta at  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_{sy} = \sigma_{syr} = f_{yd}$  i henhold til plastisitetsteori og å neglisjere betongtrykkspenningene i risset kan (A.11) og (A.18) skrives om.

$$\tau_{xy} = \sigma_{c1} \cot \theta + f_{yd} \rho_{sy} \cot \theta \quad (4.31)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{cr} + f_{yd} \rho_{sy} \cot \theta \quad (4.32)$$

(4.32) og (4.31) kan begge skrives på følgende form:

$$\tau_{xy} = \beta \sqrt{f'_c} + f_{yd} \rho_{sy} \cot \theta = \tau_c + \tau_s \quad (4.33)$$

Fra (4.31), (4.33) og (2.28) er det klart at  $\beta$  kan beskrives av følgende uttrykk der den øvre begrensningen kommer av rissets evne til å overføre skjærspenning og er utledet fra (4.32), (4.33) og (2.35).

$$\beta = \frac{0.33 \cot \theta}{1 + \sqrt{500} \epsilon_1} \leq \frac{0.18}{0.31 + \frac{24w}{D_{max} + 16}} \quad (4.34)$$

Rissvidden i (4.34) styres av midlere rissavstand i x- og y-retningen,  $s_{mx}$  og  $s_{my}$ , der  $s_{mx}$  forenklet kan settes lik senteravstanden mellom lengdearmeringsenheter eller  $z$  for konstruksjonsdeler med lengdearmering kun på én side.  $s_{my}$  kan forenklet settes lik senteravstanden mellom skjærarmeringsenhetene målt langs bjelkens lengdeakse.

For konstruksjonsdeler uten skjærarmering vil rissvidden kun kontrolleres av rissavstanden styrt av lengdearmeringen,  $s_\theta = s_{mx} / \sin \theta$ . Denne utledningen er basert på betong med største tilslagsstørrelse 19 mm, men andre størrelser kan også omfattes ved å bytte ut  $s_{mx}$  med en ekvivalent størrelse  $s_{xe}$  gitt av følgende uttrykk:

$$s_{xe} = s_{mx} \frac{35}{D_{max} + 16} \quad (4.35)$$

Ved å innføre dette i (4.34) kan følgende uttrykk beskrive den øvre begrensningen av  $\beta$  for en konstruksjonsdel uten skjærarmering:

$$\beta \leq \frac{0.18}{0.31 + 0.686 s_{xe} \epsilon_1 / \sin \theta} \quad (4.36)$$

Skjærkapasiteten finnes for den største verdien av  $\beta$ , altså den verdien av  $\beta$  der det generelle uttrykket for  $\beta$  sammenfaller med (4.36). Følgende uttrykk bruker denne forutsetningen og gir et uttrykk for  $\theta$  ved kollaps.

$$\tan \theta = \frac{0.568 + 1.258 s_{xe} \epsilon_1 / \sin \theta}{1 + \sqrt{500} \epsilon_1} \quad (4.37)$$

Som beskrevet innledningsvis i dette avsnittet er  $\epsilon_1$  skadeindikatoren i denne metoden, dette kan sees ved at begge de to foregående uttrykkene er avhengige av nettopp  $\epsilon_1$ . Ved å uttrykke  $\epsilon_1$  med tøyningen i lengderetningen  $\epsilon_x$  og fremstille sammenhengen mellom  $\beta$  og  $\epsilon_x$  grafisk for forskjellige verdier av  $s_{xe}$  og tilsvarende for  $\theta$  kan det utvikles langt enklere formeler for  $\beta$  og  $\theta$  gitt av (4.38) og (4.39). Disse formelene ble utviklet med bakgrunn i

tilfellet uten skjærarmoring, men ettersom det er ønskelig å ha én formel som gjelder for både armert og uarmert tilfelle, ble formelene tilpasset til å gjelde generelt.

$$\beta = \left( \frac{0.4}{1 + 1500\epsilon_x} \right) \left( \frac{1300}{1000 + s_{xe}} \right) \quad (4.38)$$

$$\theta = (29^\circ + 7000\epsilon_x) \left( 0.88 + \frac{s_{xe}}{2500} \right) \leq 75^\circ \quad (4.39)$$

Det kan sees at disse uttrykkene består av en tøyningfaktor og en skalafaktor, som beskrevet i avsnitt 3.7.  $\epsilon_x$  kan beregnes som tøyningen i punktet som tilsvarer halve tverrsnittshøyden. Ved å ta med virkningen av aksialkraft i strekk, moment som gir strekk i underkant og en positiv skjærkraft og å anta at tøyningen ved halve høyden tilsvarer halvparten av tøyningen i lengdearmoringen på grunn av den store stivheten til betongen i trykksonen fås følgende uttrykk:

$$\epsilon_x = \frac{2M/z + V \cot \theta + N}{4E_s A_s} \approx \frac{2M/z + 2V + N}{4E_s A_s} \quad (4.40)$$

Innledningsvis ble skjærspenningen antatt konstant over tverrsnittet med verdi  $\tau_{xy} = \frac{V}{bz}$ . Ved å innføre denne verdien i (4.33) kan tverrsnittets skjærstrekkkapasitet uttrykkes ved følgende formel:

$$V = (\beta\sqrt{f'_c} + \rho_y f_{yd} \cot \theta)bz = \beta\sqrt{f'_c}bz + \frac{A_{sy}}{s} z f_{yd} \cot \theta \quad (4.41)$$



## 5 Standarder

I dette vil kapittelet vil regelverket for skjærkraftdimensjonering i standardene Eurokode 2, NS 3473, CSA A23.3-04 og Model Code 2010 bli gjennomgått for rektangulære bjelker. Kapasitetsformlene blir først presentert og det vil bli forklart hvilken bruddform de baserer seg på og hvilken teori de bygger på før faktorer som inngår blir forklart mer i detalj.

### 5.1 Eurokode 2

Eurokode 2 tok over etter NS 3473 som gjeldende dimensjoneringsstandard for betong i Norge i mars 2010 (Sørensen 2010). Del 1-1 tar for seg allmenne regler og regler for bygninger, del 2 tar for seg regler for broer (CEN 2005b) og del 3 siloer og beholdere (CEN 2006). Det skal bemerkes at del 1-1 for eksempel ikke dekker plattformer til havs (CEN 2004). NS-EN ISO 19903 bemerker at alle standarder kan benyttes som referansestandard for dimensjonering av offshorekonstruksjoner så lenge de er supplementert av relevante tillegg der det behøves (Standard Norge 2006, 8.2.1). NS-EN ISO 19903 påpeker også at NS 3473 er en anerkjent standard som dekker de spesielle kravene som gjelder for offshore betongkonstruksjoner. NS 3473 benyttes derfor til dette formålet i Norge i 2012.

Hvis konstruksjonsdelen belastes med punktlast må kapasiteten også sjekkes for gjennomlokking i henhold til avsnitt 6.4 i Eurokode 2. Hvis konstruksjonsdelen er belastet i underkant må det legges inn vertikal armering som fører lasten til overkanten i tillegg til eventuell nødvendig skjærarmering.

#### 5.1.1 Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler uten beregningsmessig behov for skjærarmering

For slakkarmerte konstruksjonsdeler uten skjærarmering gis følgende skjærkraftkapasitet (CEN 2004, Ligning 6.2.a og b) der sylinderefastheten ikke skal settes inn med større verdi enn  $f_{ck} = 65$  MPa.:

$$V_{Rd,c} = (C_{Rd,c}k(100\rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1\sigma_{cp})bd \geq (v_{min} + k_1\sigma_{cp})bd \quad (5.1)$$

Venstre del av (5.1) er en empirisk formel for skjærkraftkapasiteten der det antas at kollaps inntreffer samtidig som det oppstår diagonale riss initiert av vertikale bøyeriss (Jacobs 2008).

$k$  er en faktor som tar hensyn til skalaeffekten og er gitt av  $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2.0$  der  $d$  settes inn i mm.

$\rho_l$  er lengdearmeringstettheten gitt av  $\rho_l = \frac{A_{sl}}{bd} \leq 0.02$ .

$C_{Rd,c}$  er en konstant som er blitt funnet ved kurvetilpasning til forsøksresultater. En rekke forsøk viste at verdien 0.12 ville gi tilstrekkelig sikkerhet. Å innføre 0.12 som en fast verdi i (5.1) ville føre til at uttrykket ikke kunne ta høyde for ulikt sikkerhetsnivå for varige, forbigående og ulykkeslastsituasjoner uttrykt ved materialfaktoren  $\gamma_c$ . Det ble derfor valgt å uttrykke konstanten som  $C_{Rd,c} = k_2/\gamma_c$ , der  $k_2 = 0.18$  for betong med største tilslagsstørrelse større eller lik 16 mm, det grove tilslaget utgjør minst halvparten

av den totale tilslagsmengden og det ikke benyttes grovt tilslag av kalkstein eller stein med tilsvarende lav fasthet (CEN 2004). I andre tilfeller settes  $k_2 = 0.15$ .

$\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c \leq 0.2f_{cd}$  er midlere trykkspenning i betongen på grunn av forspenning eller andre aksialkrefter, innsatt med positiv verdi for trykk.  $k_1\sigma_{cp}$  tar hensyn til at skjærkraftkapasiteten er større for konstruksjonsdeler utsatt for aksielt trykk fra for eksempel forspenning og lavere for aksielt strekk. Ved å regne om aksialkraften til en ekvivalent tverrkraft parallell med skjærkraften, og sette inn verdier for tverrsnittsdimensjoner og skjærspenn fra en forsøksrekke ble det vist at  $k_1 = 0.15$  er en konservativ verdi for aksial trykkraft og  $k_1 = 0.3$  for aksial strekkraft (Jacobs 2008).

Begrensningen av  $\sigma_{cp}$  kan forklares ved hjelp av (A.4), (A.5) og (A.6). Det antas at  $\theta = 45^\circ$ , at betongen ikke overfører strekk  $\sigma_{c1} = 0$  og at  $\sigma_{cx} = \sigma_{cp}$ . Minste hovedspenning i betongen begrenses av (2.12). Fra disse antakelsene utledes følgende uttrykk:

$$\sigma_{cp} = 0.5\sigma_{c2} = 0.30\nu'f_{cd} \quad (5.2)$$

For B40 vil  $\nu' = 0.84$  noe som fører til at  $\sigma_{cp} \leq 0.252f_{cd}$ . Eurokode 2 gir altså en konservativ begrensning av aksialkraften for å unngå hovedtrykkbrudd for de fleste trykkfasthetene.

$v_{min}$  er en minimumsverdi for betongen og lengdearmeringens bidrag til skjærkapasitet, der  $v_{min} = 0.035k^{3/2}f_{ck}^{1/2}$ . Det norske nasjonale tillegget til Eurokode 2 angir  $v_{min} = 0.035k^{2/3}f_{ck}^{1/2}$  noe som er konservativt i forhold til det som er oppgitt i hoveddelen i standarden, men som må bygge på en skrivefeil. Selv om det er skrivefeil i det nasjonale tillegget må uttrykket benyttes frem til det foreligger en revisjon av standarden. Uttrykket for  $v_{min}$  kan begrunnes med eksempelet i avsnitt 3.6, der den minste skjærspenningen ved kollaps er  $\tau_{min} = f_{ctk}/6 = 0.035f_{ck}^{2/3}$  innsatt for (2.7) og (2.8). Ved å anta at  $f_{ck}^{2/3} \approx 2f_{ck}^{1/2}$  og at  $k \approx 2$  for lave tverrsnitt der skalaeffekten er ubetydelig vil uttrykket for  $v_{min}$  ta hensyn til skalaeffekten og sørge for at den minste skjærspenningen ved kollaps stemmer med teorien for lave tverrsnitt med store rissvidder.

For en bjelke som ikke har vertikale bøyeriss, det vil si i tilfeller der bøyestrekkspenningen ikke overskrider dimensjonerende strekkfasthet, for eksempel et I-profil eller en bjelke med spennarmering, kan det utvikles diagonale riss i steget som ikke er initiert av bøyeriss. Ved å anta at  $\sigma_{cy} = 0$ ,  $\sigma_{c1} = f_{ctd}$  og sette inn negativt fortegn for  $\sigma_{cx} = \sigma_{cp}$  kan (A.4), (A.5) og (A.6) kombineres og gi følgende uttrykk for hovedstrekbrudd i nøytralaksen:

$$\tau_{xy} = \sqrt{f_{ctd}^2 + \sigma_{cp}f_{ctd}} \quad (5.3)$$

Hvis skjærspenningsfordelingen i (3.2) legges til grunn, kan kritisk skjærkraft for diagonale riss i nøytralaksen skrives på følgende form:

$$V_{Rd,c} = \frac{Ib}{S} \sqrt{f_{ctd}^2 + \sigma_{cp}f_{ctd}} \quad (5.4)$$

(5.4) tilsvarer ligning 6.4 i Eurokode 2 der det også tas hensyn til at kontrollsnittet kan ligge innenfor kraftoverføringslengden for føreropspente kabler. Kapasiteten gitt av (5.4) trengs ikke sjekkes nærmere opplegget enn avstanden mellom opplegget og skjæringspunktet mellom tverrsnittets nøytralakse og en linje med helning  $45^\circ$  fra opplegget (CEN 2004,

6.2.2(3)). Dette kommer av at beregningsmodellen er basert på en  $45^\circ$  fagverksmodell og betongtrykkdiagonalen dermed har  $45^\circ$  helning.

Hvis det antas at skjærkraften fordeles over arealet  $bd$  og at skjærspenningen er konstant innenfor dette arealet, det vil si  $\tau = \frac{V}{bd}$ , at betongen ikke overfører strekkspenninger og at  $\theta = 45^\circ$  kan (A.9) omskrives til å gi følgende uttrykk for minste hovedspenning i betongen på grunn av skjærkraft:

$$\sigma_{c2} = 2\tau_{xy} = 2\frac{V}{bd} \quad (5.5)$$

Hvis (5.5) skrives om til en kritisk skjærkraft der  $\sigma_{c2} \leq \sigma_{Rd,max}$ , vil (5.6) være tverrsnittets skjærtrykkkapasitet (CEN 2004, Ligning 6.5). Dette uttrykket tilsvarer (4.7) der det er antatt at skjærkraften fordeles over høyden  $z$  i stedet for  $d$  og at lastoverføringen representeres ved en  $45^\circ$  fagverksmodell.

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max} = 0.5bd\sigma_{Rd,max} = 0.5bd\nu f_{cd} = 0.3bd\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)f_{cd} \quad (5.6)$$

Hvis en bjelke oppfyller kravene presentert i dette avsnittet er det ikke beregningsmessig behov for skjærarmering. Bjelken krever kun minimumsarmeringen beskrevet i avsnitt 5.1.3.

### 5.1.2 Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler med beregningsmessig behov for skjærarmering

Hvis en konstruksjonsdel ikke oppfyller kravene i forrige avsnitt må det legges inn skjærarmering for å ta opp *hele* skjærkraften. Nødvendig skjærarmering beregnes ved hjelp av en fagverksmodell med variabel helning. I dette kapitlet vil kapasitetsformlene fra Eurokode 2 presenteres for tilfeller med skrå skjærarmering og det skal vises at uttrykkene blir de samme som vist i kapittel 4.2 for vertikal skjærarmering.

Følgende uttrykk gir kapasiteten til skjærarmeringen (CEN 2004, Ligning 6.13):

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha \xrightarrow{\alpha=90^\circ} \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta \quad (5.7)$$

Her er  $A_{sw}$  arealet av en skjærarmeringsenhet,  $s$  er senteravstanden mellom armeringsenhetene målt langs bjelkens lengdeakse,  $z$  er tverrsnittets indre momentarm beregnet fra opptredende bøyemoment eller tilnærmet som  $z = 0.9d$ ,  $\theta$  er trykkdiagonalens helning og  $\alpha$  er skjærarmeringens helning. Innsatt for  $\alpha = 90^\circ$  kan det sees at uttrykket blir det samme som (4.13).

Trykkdiagonalens kapasitet uttrykkes som følger (CEN 2004, Ligning 6.14):

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b z \nu_1 f_{cd} \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \xrightarrow{\alpha=90^\circ} \alpha_{cw} b z \nu_1 f_{cd} \frac{1}{\cot \theta + \tan \theta} \quad (5.8)$$

$\alpha_{cw}$  er en konstant som tar hensyn til aksialspenninger i tverrsnittet og  $\nu_1$  er en fasthetsreduksjon tilsvarende reduksjonen beskrevet i avsnitt 2.1 og kan bestemmes av (2.13). Hvis armeringsspenningen er mindre enn 80% av dimensjonerende flytespenning kan  $\nu_1$  bestemmes av følgende uttrykk:

$$\nu_1 = \begin{cases} 0.6 & f_{ck} \leq 60 \text{ MPa}, \\ 0.9 - f_{ck}/250 > 0.5 & f_{ck} > 60 \text{ MPa}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Det vil si: høyere armeringsspenning gir større tøyning på tvers av trykkfeltet og større fasthetsreduksjon.

For konstruksjonsdeler uten forspenning eller aksialtrykk settes  $\alpha_{cw} = 1$ . Med forspenning eller aksialtrykk bestemmes konstanten av følgende uttrykk:

$$\alpha_{cw} = \begin{cases} 1 + \sigma_{cp}/f_{cd} & 0 < \sigma_{cp} < 0.25f_{cd}, \\ 1.25 & 0.25f_{cd} < \sigma_{cp} < 0.5f_{cd}, \\ 2.5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd}) & 0.5f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Det kan sees at (5.8) er basert på samme uttrykk som (4.12) og er tilpasset ved å innføre  $\alpha_{cw}$  for å ta høyde for den positive innvirkningen av aksialtrykk.

Eurokode 2 gir brukeren frihet til å velge verdi for rissvinkelen  $\theta$ , men setter en nedre og øvre grense gitt av følgende uttrykk der den nedre grensen begrenses ytterligere for tverrsnitt med store aksielle strekkspenninger.  $\sigma_t$  er betongspenningen som følge av en aksiell strekkraft.

$$1 \leq \cot \theta \leq \begin{cases} 2.5 \\ 1.25 \end{cases} \quad \sigma_t \geq f_{ctk,0.05}. \quad (5.11)$$

For tverrsnitt uten store strekkspenninger vil altså  $21.8^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ . Som vist i figur 4.4 vil en liten vinkel føre til store trykkspenninger og lite behov for skjærarmering. Det motsatte er tilfelle for en stor vinkel. I praksis kan vinkelen velges vilkårlig så lenge (5.7) og (5.8) er tilfredsstillt. Hvis det velges en lav vinkel og dermed liten skjærarmering kan dette resultere i at rissvidden i de diagonale rissene blir stor (Jensen & Lapko 2009). Den nedre grensen for rissvinkelen er dermed innført for å begrense rissvidden. Når skjærkraften når kapasiteten gitt av (5.7) og (5.8) med liten skjærarmering og  $\cot \theta = 2.5$  antydes det altså ikke nødvendigvis at konstruksjonen kollapser, men at de diagonale rissene er innenfor en akseptabel størrelse. Fra figur 4.4 kan det sees at  $\sin \theta \cos \theta$  har sin maksimalverdi for  $\theta = 45^\circ$  og at  $\cot \theta$  synker for økende verdi av  $\theta$ . For høyere verdier enn  $\theta = 45^\circ$  vil dermed  $V_{Rd,max}$  synke. Den øvre grensen for  $\theta$  kan derfor sees på som et valg for å gjøre dimensjoneringsprosedyren robust.

For en konstruksjonsdel med kjent skjærarmering kan den optimale utnyttelsen, det største effektive armeringsarealet, finnes ved å sette (5.7) lik (5.8). Ved å løse ut for  $\theta$  vil følgende uttrykk gi vinkelen  $\theta$  som gir optimal utnyttelse av skjærarmeringen (CEN 2004, Ligning 6.15 omskrevet).

$$\sin^2 \theta = \frac{\frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \sin \alpha}{\alpha_{cw} b_w z \nu_1 f_{cd}} \xrightarrow{\alpha=90^\circ} \frac{\frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd}}{\alpha_{cw} b_w z \nu_1 f_{cd}} \quad (5.12)$$

$\theta$  beregnet fra (5.12) innsatt i (5.7) og (5.8) vil dermed gi konstruksjonsdelens skjærkraftkapasitet.

### 5.1.3 Krav til armeringsmengde og senteravstand

Eurokode 2 spesifiserer at det skal legges inn et minimum av skjærarmering i form av bøyer som oppfyller følgende krav (CEN 2004, Ligning NA.9.5N):

$$\rho_{w,min} = 0.1 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \quad (5.13)$$

Der

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b_s \sin \alpha} \quad (5.14)$$

Denne armeringsmengden må legges inn selv om det ikke er beregningsmessig behov for skjærarmering. Minimumsarmeringen kan utelates i plater, der omfordeling av laster i tverretningen er mulig, og i konstruksjonsdeler av underordnet betydning (CEN 2004).

For bjelker med høyde  $> 1000$  mm skal det legges inn en langsgående overflatearmering på begge sider gitt av følgende uttrykk:

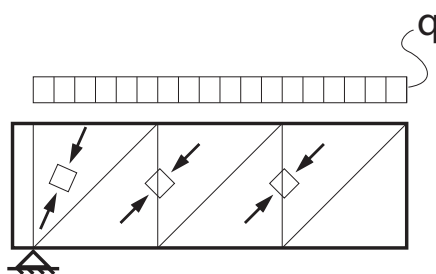
$$A_{s,dbmin} = 0.001A_c \geq 150 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (5.15)$$

Skjærarmeringen må legges inn med en maksimal senteravstand gitt av (5.16) (CEN 2004, Ligning NA.9.6N) for bøyer og (5.17) (CEN 2004, Ligning NA.9.7N) for oppbøyde stenger der  $h'$  er den vertikale avstanden mellom strekk- og trykkarmeringen.

$$s_{l,max} = 0.6h'(1 + \cot \alpha) \quad (5.16)$$

$$s_{b,max} = s_{l,max} \quad (5.17)$$

### 5.1.4 Reduksjon av laster



**Figur 5.1:** Trykkdiagonaler nær opplegg i fagverksmodell

Figur 5.1 viser et utsnitt av en fritt opplagt bjelke belastet med en jevnt fordelt last der det er vist hvordan lasten bæres av en tenkt indre fagverksmodell. For å oppnå kontinuitet i den indre lastbæringen må trykkresultanten i faget nærmest opplegget ha en større vinkel enn i de øvrige, og ha retning rett mot opplegget. Hvis det antas at lasten har  $45^\circ$  utbredelse vil faget nærmest opplegget ha en lengde  $d$ . Med denne antakelsen vil

lasten innenfor en avstand  $d$  fra opplegget overføres rett til opplegget i trykk. Eurokode 2 tar hensyn til dette ved å tillate at konstruksjoner som hovedsaklig påvirkes av en jevnt fordelt last kan kontrolleres for skjærstrekk i en avstand  $d$  fra opplegget. Beregningsmessig nødvendig armering skal legges helt frem til opplegget. Skjærtrykkkapasiteten skal sjekkes for den maksimalt opptredende skjærkraften (CEN 2004, 6.2.1(8)).

En annen forklaring på denne lastreduksjonen er at området innenfor avstanden  $d$  fra opplegget vil være en D-region, jfr. avsnitt 3.2, og at uttrykkene for skjærkapasiteten gjelder i B-regioner.

Med belastning på oversiden av konstruksjonsdelen innenfor en avstand  $0.5d \leq a_v \leq 2.0d$  fra opplegget kan (5.1) kontrolleres for en redusert skjærkraft. Bidraget til skjærkraften fra laster innenfor denne avstanden kan multipliseres med faktoren  $\beta = a_v/2d$ . For  $a_v \leq 0.5d$  begrenses faktoren til  $\beta = 0.25$ . For jevnt fordelt last vil dette tilnærmet tilsvare lastreduksjonen ovenfor (CEN 2004, 6.2.2(6)).

For konstruksjonsdeler med beregningsmessig nødvendig skjærarmering kan skjærstrekkkapasiteten kontrolleres etter følgende uttrykk for en tilsvarende lastreduksjon uttrykt ved  $\beta$  der  $A_{sw}$  er skjærarmeringsarealet som krysser et diagonalt riss innefor en lengde  $0.75a_v$  (CEN 2004, 6.2.3(8)).

$$V_{Ed} \leq A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha \quad (5.18)$$

### 5.1.5 Tilleggskraft i lengdearmering

For en konstruksjonsdel uten beregningsmessig nødvendig skjærarmering, men med minimumsarmering, kan den indre kraftoverføringen visualiseres med en  $45^\circ$  fagverksmodell. I henhold til denne modellen vil det ved opplegget oppstå diagonale riss med  $45^\circ$  helning. Dette fører til at lengdearmeringen ved opplegget utsettes for en strekkraft tilsvarende momentet som opptrer i en avstand  $d$  fra opplegget. Eurokode 2 spesifiserer at det kan tas høyde for dette ved å forskyve omhylningskurven fra  $M_{Ed}$  en avstand  $d$  i ugunstig retning (CEN 2004, 6.2.2(5) og 9.2.1.3(2)).

Som vist i avsnitt 4.1 og 4.2 vil det for konstruksjonsdeler med beregningsmessig nødvendig skjærarmering måtte overføres en tilleggskraft i lengdearmeringen på grunn av skjærkraften. Eurokode 2 spesifiserer at lengdearmeringen må kontrolleres for en økt kraft gitt av følgende uttrykk der  $M_{Ed,max}$  er største moment langs bjelken (CEN 2004, 6.2.3(7)).

$$F_{td} = M_{Ed}/z + \Delta F_{td} \leq M_{Ed,max}/z \quad (5.19)$$

Der

$$\Delta F_{td} = 0.5V_{Ed} (\cot \theta - \cot \alpha) \xrightarrow{\alpha=90^\circ} 0.5V_{Ed} \cot \theta \quad (5.20)$$

$V_{Ed}$  er skjærkraften beregnet uten reduksjonen gitt i forrige avsnitt.

### 5.1.6 Dimensjoneringsprosedyre

En konstruksjonsdel med kjent belastning, kjente dimensjoner, lengdearmering og betongkvalitet kan dimensjoneres ved hjelp av følgende prosedyre.

1. Kontroller kapasiteten for konstruksjonsdel uten skjærarmering gitt av (5.1) og (5.6). Hvis tverrsnittet antas urisset i bøyning må også (5.4) sjekkes. Sjekk lengdearmeringen i henhold til avsnitt 5.1.5. Hvis kapasiteten er tilfredsstillende legges det inn minimumsarmering og prosedyren avbrytes. Hvis kapasiteten ikke er tilfredsstillende fortsettes prosedyren i punkt 2.
2. Beregn  $\theta$  fra (5.8) innsatt for kjent skjærkraft.
3. Beregn nødvendig skjærarmering fra (5.7), beregn største senteravstand med (5.16) og (5.17) og kontroller at denne er større en minimumsarmeringen beregnet i punkt 1.
4. Kontroller lengdearmeringen med (5.19). Hvis kapasiteten ikke er tilfredsstillende må lengdearmeringen økes.

## 5.2 NS 3473

NS 3473 gir tre metoder for skjærkraftdimensjonering (Sørensen 2005):

1. En forenklet metode der betongen og lengdearmeringens skjærstrekkapasitet uten skjærarmering beskrives av empirisk tilpassede uttrykk som tar hensyn til at bruddlasten er noe høyere enn lasten som gir skråriss, den positive innvirkningen fra en aksiell trykkraft og den negative innvirkningen fra en aksiell strekkraft. Skjærtrykkapasiteten og eventuelt nødvendig skjærarmering beregnes basert på en  $45^\circ$  fagverksmodell. Konstruksjonsdelens totale skjærstrekkapasitet beregnes som summen av bidraget fra betongen og lengdearmeringen, og skjærarmeringsbidraget.
2. En fagverksmodell med variabel helning. Med denne metoden skal kun skjærarmeringskapasitet tas med i beregningen av konstruksjonsdelens skjærstrekkapasitet.
3. En generell metode for konstruksjonsdeler utsatt for krefter i planet basert på trykkfeltsteori. Hvis det tas høyde for at betongen kan overføre en begrenset gjennomsnittlig strekkspenning på tvers av riss vil denne metoden tilsvare modifisert trykkfeltsteori. NS 3473 gir ingen direkte kapasitetsuttrykk for bjelker beregnet med denne metoden og vil ikke bli behandlet i det følgende.

Kapasitetene beregnet fra NS 3473 gjelder for bjelker, avstivere, plater og skall der forholdet mellom spennvidde og dybde er minst 3.0 for to-sidige opplegg og minst 1.5 for utkragere.

Kapasitetene er gitt for tilfeller der det er antatt at konstruksjonsdelen er belastet på oversiden med lastretning normalt på overflaten slik at betongen under lasten vil være i trykk. Hvis belastningen er påført på en måte som forårsaker strekkspenninger direkte under lasten, må det legges inn armering som kan overføre dette strekket (Standard Norge 2003, 12.3.1.3). Dette gjelder for eksempel i tilfeller der lasten er påført på undersiden av bjelker som en opphengt last, eller der belastningen skyldes væsketrykk som kan penetrere inn i overflateriss og belastningen må betraktes som en opphengt last.

Konstruksjonsdeler skal beregnes uten skjærarmering hvis skjærarmeringsmengden er mindre enn minimumsarmeringen beskrevet i avsnitt 5.2.3 (Standard Norge 2003, 12.3.1.5) der kun armeringen som danner  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  skal regnes med. For bjelker skal minst halvparten av den beregningsmessig nødvendige skjærarmeringen legges inn i form av bøyler, resten kan bestå av oppbøyde stenger.

### 5.2.1 Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler uten beregningsmessig behov for skjærarmering

Skjærkraftkapasiteten for konstruksjonsdeler uten beregningsmessig behov for skjærarmering beregnes ved hjelp av den forenklete metoden. Det antas at skjærstrekkkapasiteten er høyere enn skjærkraften som forårsaker skråriss. Noe av skjærkraften antas derfor å bæres av den urissede trykksone (Sørensen 2005). Kapasiteten for et betongtverrsnitt ved strekkbrudd,  $V_{co}$ , er gitt av følgende uttrykk (Standard Norge 2003, 12.3.2.1):

$$V_{co} = 0.3(f_{td} + \frac{100A_s}{\gamma_c bd})bdk_v \leq 0.6f_{td}bdk_v \quad (5.21)$$

Der  $A_s$  er lengdearmingen på strekksiden med tilstrekkelig forankring og  $k_v$  er skalaeffekten for bjelker og plater uten skjærarmering gitt av  $1.0 \leq 1.5 - d \leq 1.4$  der  $d$  settes inn med enhet meter. Ved å sammenligne denne med skalaeffekten i Eurokode 2, jfr. avsnitt 5.1.1, kan det sees at skalafaktoren  $k$  for Eurokode 2 generelt ligger høyere enn  $k_v$  for NS 3473 og at Eurokode 2 relativt sett gir større gevinst for små høyder.

Omskrevet kan (5.21) uttrykkes på følgende form:

$$V_{co} = 0.3f_{td}(bd + \frac{100}{f_{tn}}A_s)k_v \leq 0.6f_{td}bdk_v \quad (5.22)$$

Dette uttrykket sier at  $\frac{100}{f_{tn}}A_s \leq bd$ , eller med andre ord at bidraget fra lengdearmingen maksimalt kan regnes som det effektive betongtverrsnittet, og at det for en høyere fasthetsklasse kan regnes med større bidrag fra lengdearmingen.

Ved å ta hensyn til den positive innvirkningen av en aksiell trykkraft og den negative innvirkningen av en aksiell strekkraft kan skjærstrekkkapasiteten beregnes fra følgende uttrykk:

$$V_{cd} = \begin{cases} V_{co} + 0.8M_o \left| \frac{V_f}{M_f} \right| \leq \left( f_{td}k_v - \frac{0.25N_f}{A_c} \right) bz_1 & N_f < 0 \\ V_{co} & N_f = 0 \\ \max \left[ V_{co} \left( 1 - \frac{N_f}{1.5f_{td}A_c} \right), V_{co} \left( 1 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{sy}} \right) \right] \geq 0 & N_f > 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Der  $M_o = -N_f W_c / A_c$  er rissmomentet;  $N_f$ ,  $V_f$  og  $M_f$  er dimensjonerende krefter i kontrollsnittet;  $W_c$ ,  $I_c$  og  $S_c$  er det urissede betongtverrsnittets motstandsmoment med hensyn til mest påkjente strekkfiber, andre arealmoment og første arealmoment av en halvdel av tverrsnittet om tverrsnittets arealsenter; og  $z_1 = \max[0.7d, I_c / S_c]$ . Utledningen av rissmomentet er vist i avsnitt 3.8. Den aksielle trykkraften settes inn med negativt



fortegn. Uttrykket for skjærstrekkkapasiteten med en aksiell trykkraft gir kapasiteten for hovedtrekkbrudd i steget i en bjelke.

NS 3473 angir en begrensning av den numeriske verdien av trykkraften gitt av  $\sigma_{cx} = N_f/A_c \leq 0.4f_{cd}$ . Dette er av samme grunn som beskrevet i avsnitt 5.1.1 hvis det antas at hovedtrykkspenningen begrenses av  $f_{c2d} = 0.8f_{cd}$  i trykkfelt, jfr. avsnitt 2.3.1.

Hvis kapasiteten beregnet i dette avsnittet ikke er tilstrekkelig må det legges inn skjærarmering.

En konstruksjonsdel skal også kontrolleres for skjærtrykkbrudd. Denne kapasiteten er gitt av følgende uttrykk (Standard Norge 2003, Ligning 12.3.2.5):

$$V_{ccd} = 0.3f_{cd}bz(1 + \cot \alpha) \leq 0.45f_{cd}bz \quad (5.24)$$

Dette uttrykket følger av (5.8), innsatt for  $\cot \theta = 1$  som tilsvarer en rissvinkel på  $45^\circ$ . Armeringen som krysser risset vil hindre betongen i å utvide seg ortogonalt på risset, og i følge (2.23) vil betongens dimensjonerende fasthet i trykkfeltet bestemmes av tøyningen ortogonalt på risset.  $\alpha = 90^\circ$  vil føre til at armeringen i følge (5.24) ikke får noen innvirkning på kapasiteten. Her vil kapasiteten kunne bestemmes direkte av (4.7) ved å sette inn den forenklete dimensjonerende fastheten for betong i trykkfelt  $f_{c2d} = 0.6f_{cd}$ .

### 5.2.2 Skjærkraftkapasitet for konstruksjonsdeler med beregningsmessig behov for skjærarmering

Skjærkraftkapasiteten for konstruksjonsdeler med beregningsmessig behov for skjærarmering kan beregnes ved hjelp av både den forenklete metoden og fagverksmodellen med variabel helning.

Ved å basere beregningene på den forenklete modellen skal kapasitetsbidraget fra skjærarmeringen  $V_{sd}$  legges til betongens bidrag  $V_{cd}$  innsatt for  $k_v = 1.0$ . Skjærarmeringens bidrag beregnes fra følgende uttrykk som har samme bakgrunn som (5.7) innsatt for  $\cot(\theta) = 1$ :

$$V_{sd} = \frac{A_{sv}}{s} z f_{sd} (1 + \cot \alpha) \sin \alpha \quad (5.25)$$

Ved å måle spenningen i skjærarmeringen for en betongbjelke i en skjærttest kan det observeres at spenningene ikke følger lineært av pålastningen, men at de vokser lineært først når de diagonale rissene oppstår (Leonhardt & Mönnig 1974). Differansen mellom skjærkraften og den vertikale kraften i skjærarmeringen antas å kunne tilskrives betongens bidrag. Dette er bakgrunnen for kapasitetsaddisjonen ved forenklet metode.

Skjærtrykkkapasiteten beregnes fra (5.24).

Ved å basere beregningene på fagverksmodellen med variabel helning skal *ikke* kapasitetsbidraget fra betongen tas med i den totale skjærstrekkkapasiteten. Skjærstrekk- og trykkkapasiteten er på samme form som i Eurokode 2, bortsett fra at skjærtrykkkapasiteten ikke går mot null for store aksielle spenninger og at betongfastheten i trykkfelt begrenses av  $f_{c2d}$ . Vinkelen  $\theta$  skal velges mellom  $25^\circ$  og  $60^\circ$  (Standard Norge 2003, 12.3.3.1). Ettersom skjærstrekkkapasitetsuttrykket er det samme som i Eurokode 2, jfr. (5.7), vil kun skjærtrykkkapasiteten gjengis her i følgende uttrykk (Standard Norge 2003, 12.3.3.2):

$$V_{ccd} = f_{c2d}bz \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \quad (5.26)$$

### 5.2.3 Krav til armeringsmengde og senteravstand

NS 3473 gir følgende krav til minste skjærarmering i bjelker (Standard Norge 2003, 18.3.6):

$$A_s \geq \frac{0.2A_c f_{tk} \sin \alpha}{f_{sk}} = \frac{0.2b_s f_{tk} \sin \alpha}{f_{sk}} \quad (5.27)$$

Betongens strekkfasthet skal ikke settes inn med lavere verdi enn 2.55 MPa og vinkelen  $\alpha$  skal ikke velges lavere enn  $45^\circ$ . Minimumsarmeringen skal legges inn som bøyer som omslutter alle stengene i strekkarmeringen. I hvert av en bøyels hjørner skal det plasseres en armeringsstang med diameter minst lik bøyelens diameter. For lettere å kunne sammenligne kravene i de forskjellige standardene kan (5.27) skrives om til:

$$\rho_{w,min} = 0.2 \frac{f_{tk}}{f_{sk}} \quad (5.28)$$

I konstruksjonsdeler der høyden er større enn 1200 mm skal det legges inn overflatearmering i lengderetningen på hver side. Denne armeringen skal være minst lik den nødvendige skjærarmeringen. Når skjærarmeringen beregnes som et behov per lengdeenhet over lengden beregnes overflatearmeringen som et behov per lengdeenhet over høyden.

Generelt skal den maksimale senteravstanden mellom skjærarmeringsenheter oppfylle følgende krav (Standard Norge 2003, 12.3.1.5) der  $h'$  er avstanden mellom arealsenterene i armeringen i over- og underkant:

$$s_{l,max} = 0.6h'(1 + \cot \alpha) \quad (5.29)$$

Avstanden i bredderetningen mellom skjærarmeringsenheter skal oppfylle følgende krav, men kan økes til 800 mm hvis kapasiteten er tilfredsstillende uten skjærarmering:

$$s_{b,max} = \min \begin{cases} h' \\ 600 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.30)$$

For forspente bjelker der kapasiteten er tilstrekkelig uten skjærarmering eller skjærkraften per enhetsbredde er mindre enn  $f_{td}d$  kan kravet økes til det følgende gitt at bjelkens kapasitet er tilstrekkelig uten skjærarmering:

$$s_{l,max} = \min \begin{cases} 0.8h'(1 + \cot \alpha) \\ 500 \text{ mm} \\ h' \end{cases} \quad (5.31)$$

Hvis skjærkraften er større enn  $2f_{td}bd$  eller at skjærkraften kombinert med andre snittkrefter gir signifikant aksielt strekk skal avstanden begrenses til:

$$s_{l,max} = \min \begin{cases} 0.4h'(1 + \cot \alpha) \\ 0.7h' \end{cases} \quad (5.32)$$

Skjærarmering som omslutter lengdearmering i trykk skal ha en maksimal avstand lik femten ganger diameteren til trykkarmeringen (Standard Norge 2003, 18.3.8). I brede bjelker skal avstanden mellom armeringsenheter i bredderetningen være mindre enn dybden  $d$ .

#### 5.2.4 Reduksjon av laster

For konstruksjonsdeler belastet hovedsaklig med en jevnt fordelt last kan skjærstrekkkapasiteten kontrolleres i en avstand  $d$  fra opplegg (Standard Norge 2003, 12.3.1.4).

For punktlaster påført i en avstand  $a \leq 2d$  fra opplegg kan denne lastens bidrag til skjærkraften multipliseres med en faktor  $\frac{a}{2d}$ .

Skjærtrykkapasiteten skal kontrolleres for skjærkraften uten reduksjon.

#### 5.2.5 Tilleggskraft i lengdearmering

Tilleggskraften i lengdearmeringen beregnes på samme måte som i Eurokode 2. NS 3473 gir tre uttrykk for tilleggskraften: beregnet ved forenklet metode med og uten beregningsmessig nødvendig skjærarmering og beregnet ved fagverksmetoden (Standard Norge 2003, 12.3.4.1 og 12.3.4.2). Disse uttrykkene følger direkte fra fagverksmodellen og er gitt av følgende uttrykk:

$$F_{sv} = \begin{cases} V_f & \text{forenklet metode uten nødvendig skjærarmering,} \\ V_f - 0.5V_{sd}(1 + \cot \alpha) & \text{forenklet metode med nødvendig skjærarmering,} \\ 0.5V_f(\cot \theta - \cot \alpha) & \text{fagverksmodell.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Tilleggskraften skal antas å virke i armeringen i over- og underkant, men kan antas å ikke være større en kraften forårsaket av det største momentet innenfor den delen av momentkurven kontrollsnittet befinner seg i.

### 5.3 CSA A23.3

Den canadiske betongstandarden CSA A23.3 (CSA 2004) tillater at B-regioner skal dimensjoneres for skjærkraft ved hjelp av enten en modell basert på den forenklede modifiserte trykkfeltsteorien eller en stavmodell. Dette avsnittet vil ta for seg modellen basert på den forenklede modifiserte trykkfeltsteorien, jfr. avsnitt 4.4.

For en konstruksjonsdel uten spennarmering kan skjærkapasiteten skrives på følgende form der  $V_c$  er betongbidraget,  $V_s$  er bidraget fra skjærarmeringen,  $\phi_c$  er materialfaktoren for betong beskrevet i avsnitt 2.3.2,  $f'_c$  er sylindrefastheten og  $d_v = 0.9d$  (Bentz & Collins 2006) er den indre momentarmen (CSA 2004, Ligning 11-4 og 11-5):

$$V_r = V_c + V_s \leq 0.25\phi_c f'_c b d_v \quad (5.34)$$

Den øvre begrensningen av kapasiteten er basert på knusning av betongen i den diagonale trykksonen (Bentz & Collins 2006). Uttrykket kommer direkte fra (4.7) for 45° fagverksmodell hvis det antas at betongtrykkspenningen begrenses av verdien  $0.5f'_c$ .

#### 5.3.1 Betongbidraget $V_c$

Som beskrevet i avsnitt 4.4 avhenger betongens bidrag til skjærkapasiteten av rissenes evne til å overføre skjærspenninger ved hjelp av aggregate interlock. Uttrykket for betongbidraget i CSA A23.3 baserer seg på tre hovedantakelser (Bentz & Collins 2006):

1. Dybeleffekten fra lengdearmeringen neglisjeres.
2. Bidraget fra aggregate interlock kan evalueres i én dybde og kan representere hele rissoverflaten.
3. Det antas at skjærspenningskapasiteten til den urissede betongtrykksonen er høyere enn den rissede sonen, og at skjærkraftkapasiteten til konstruksjonsdeler uten skjærarmering derfor begrenses av bidraget fra aggregate interlock.

Betongbidraget kan beregnes fra følgende uttrykk (CSA 2004, Ligning 11-6):

$$V_c = \phi_c \lambda \beta \sqrt{f'_c} b d_v \quad (5.35)$$

I (5.35) skal ikke  $\sqrt{f'_c}$  settes inn med større verdi enn 8 MPa. Faktoren  $\beta$  forklares i avsnitt 5.3.3 og  $\lambda$  er beskrevet i avsnitt 2.3.2.

#### 5.3.2 Armeringsbidraget $V_s$

Bidraget til skjærkraftkapasiteten fra skjærarmeringsenheter med helning  $\alpha$  kan beregnes fra følgende uttrykk der også tilfellet med vertikale skjærarmeringsenheter er vist (CSA 2004, Ligning 11-7 og 11-8):

$$V_s = \frac{\phi_s A_v f_y d_v (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha}{s} \xrightarrow{\alpha=90^\circ} \phi_s \frac{A_v}{s} d_v f_y \cot \theta \quad (5.36)$$

$\phi_s$  er materialfaktoren for armeringsstål beskrevet i avsnitt 2.3.2,  $A_v$  er arealet av én skjærarmeringsenhet,  $f_y$  er flytespenningen og  $s$  er avstanden mellom skjærarmeringsenhetene målt langs lengdeaksen. (5.36) har samme form som kapasitetsbidraget fra skjærarmeringen i Eurokode 2 gitt av (5.7). Beregning av rissvinkelen  $\theta$  er vist i avsnitt 5.3.4. Armeringsbehovet beregnet fra (5.36) skal være større enn minimumskravet beskrevet i avsnitt 5.3.5.

### 5.3.3 Faktoren $\beta$

Faktoren  $\beta$  beskriver hvor stor skjærspenning den rissede betongen kan overføre som en funksjon av tøyning i lengderetningen og ekvivalent rissavstand.  $\beta$  kan generelt bestemmes fra følgende ligning (CSA 2004, Ligning 11-11):

$$\beta = \frac{0.4}{1 + 1500\epsilon_x} \frac{1300}{1000 + s_{ze}} \quad (5.37)$$

$s_{ze}$  er den ekvivalente rissavstanden som kan settes lik 300 mm for konstruksjonsdeler med skjærarmeringsmengde minst lik minimumsarmeringen definert i avsnitt 5.3.5. Avhengigheten av den ekvivalente rissavstanden beskriver skalaeffekten for konstruksjonsdeler uten skjærarmering og det kan observeres at skalaeffekten i (5.37) forsvinner for konstruksjonsdeler med skjærarmering når  $s_{ze} = 300$  mm (Bentz & Collins 2006). I tilfeller med mindre skjærarmering kan  $s_{ze}$  beregnes fra følgende uttrykk der  $s_z$  velges som den minste av  $d_v$  og den største vertikale avstanden mellom lag av fordelt lengdearmering, der hvert lag med lengdearmering skal ha et areal minst lik  $0.003bs_z$  (CSA 2004, Ligning 11-10):

$$s_{ze} = \frac{35s_z}{15 + a_g} \geq 0.85d_v \quad (5.38)$$

$a_g$  er største tilslagsstørrelse i betongen. Når betongen har tilstrekkelig høy sylindrefasthet vil rissene ha en tendens til å splitte tilslagskorn i stedet for å gå langs dem. Tilslagsstørrelsen vil dermed ikke ha noen signifikant betydning for skjærkapasiteten (Bentz & Collins 2006). For  $60 \text{ MPa} \leq f'_c \leq 70 \text{ MPa}$  skal  $a_g$  derfor reduseres lineært til 0 og for  $f'_c \geq 70 \text{ MPa}$  skal  $a_g$  settes lik 0. (5.38) er basert på (4.35) der den eneste forskjellen er tallet 15 i nevneren. Grunnen til at dette tallet er forandret er at CSA definerer tilslag med *runde* tilslagsdiametre. Uttrykkene er basert på tester utført på skjærpaneler med  $a_g = 20$  mm, og innsatt for denne verdien kan det sees at (5.38) ikke gir noen korreksjon av  $s_z$ .

Noen faktorer som det er kjent at påvirker skjærkapasiteten er lengdearmering og påført moment, skjærkraft og aksialkraft. Alle disse faktorene kan samles opp i en parameter; tøyningen i lengderetningen (Bentz & Collins 2006). En stor tøyning fører til store rissvidder og dermed lavere evne til å overføre skjærspenning ved hjelp av aggregate interlock. Ved å innføre lengdetøyningen tar altså  $\beta$  høyde for tøyningseffekten beskrevet i avsnitt 3.7. Tøyningen skal beregnes midt i tverrsnittshøyden og kan antas lik halvparten av tøyningen i strekkarmeringen. CSA A23.3 angir følgende uttrykk for beregningen av

$\epsilon_x$  for en konstruksjonsdel uten spennarmering som tilsvarende (4.40) (CSA 2004, Ligning 11-13):

$$\epsilon_x = \frac{M_f/d_v + V_f + 0.5N_f}{2E_s A_s} \quad (5.39)$$

$V_f$ ,  $N_f$  og  $M_f$  er opptredende snittkrefter der  $V_f$  og  $M_f$  settes inn med positivt fortegn og  $N_f$  er positiv for strekk (CSA 2004, 11.3.6.4).  $M_f$  skal ikke settes inn med mindre verdi enn  $V_f d_v$ .  $A_s$  er arealet av strekkarmeringen med tilstrekkelig forankring. Hvis  $\epsilon_x$  beregnes som negativ skal den enten settes lik 0 eller beregnes på nytt med betongbidraget  $2E_c A_{ct}$  lagt til i nevneren, der  $A_{ct}$  er betongarealet i strekksonen.  $\epsilon_x$  skal uansett ikke velges mindre enn  $-0.0002$ . Hvis den aksielle strekkraften er tilstrekkelig stor til at betongtrykksonen risser, er ikke tilnærmingen om at tøyningen midt i tverrsnitt er lik halvparten av tøyningen i strekkarmeringen gyldig. CSA tillater at  $\epsilon_x$  beregnet fra (5.39) dobles hvis det ikke er tilgang til mer nøyaktige beregninger. Beregningen av  $\beta$  kan baseres på større verdier av  $\epsilon_x$  enn den beregnet fra (5.39), men betingelsen  $\epsilon_x \leq 0.003$  skal alltid oppfylles.

Hvis lengdearmeringen har flytespenning lavere enn 400 MPa, sylindrefastheten er lavere enn 60 MPa og konstruksjonsdelen ikke er utsatt for signifikante aksielle strekkrefter, kan  $\beta$  forenklet settes lik 0.18 hvis konstruksjonsdelen inneholder mer skjærarmering enn minimumskravet. For konstruksjonsdeler med mindre skjærarmering og største tilslagsstørrelse mindre enn 20 mm kan følgende forenkling benyttes (CSA 2004, Ligning 11-9):

$$\beta = \frac{230}{1000 + d_v} \quad (5.40)$$

I uttrykket over kan  $d_v$  erstattes av  $s_{ze}$  beregnet fra (5.38) med samme begrensninger som beskrevet ovenfor for tilslagsstørrelser større enn 20 mm.

I bjelker med høyde mindre enn 250 mm kan  $\beta$  settes lik 0.21 (CSA 2004, 11.3.6.2).

### 5.3.4 Rissvinkelen $\theta$

Rissvinkelen  $\theta$  kan forenklet bestemmes fra følgende uttrykk (CSA 2004, Ligning 11-12):

$$\theta = 29^\circ + 7000\epsilon_x \quad (5.41)$$

Der  $\epsilon_x$  beregnes ved hjelp av (5.39). Som beskrevet i avsnitt 5.1.2 vil en lav rissvinkel føre til store trykkspenninger i trykkdiagonalen og at flere armeringsenheter krysser risset, det motsatt er tilfellet for en høy rissvinkel. Ved å kjøre en full analyse over høyden av et tverrsnitt med ligningene for modifisert trykkfeltsteori er det vist at rissvinkelen øker for økende verdi av  $\epsilon_x$  (Bentz & Collins 2006). Ved å forlange den øvre kapasiteten gitt av (5.34) og forlange at skjærarmeringen flyter eller at trykkdiagonalen ikke knuses før denne kapasiteten er nådd ble den lineære sammenhengen gitt av (5.41) funnet.

Med samme kriterier som for  $\beta$  kan  $\theta$  forenklet settes lik  $35^\circ$  (CSA 2004, 11.3.6.3), og for bjelker med høyde mindre enn 250 mm kan  $\theta$  settes lik  $42^\circ$  (CSA 2004, 11.3.6.2).

### 5.3.5 Krav til armeringsmengde og senteravstand

CSA A23.3 angir et minimumskrav til skjærarmering i B-regioner der den påførte skjærkraften  $V_f$  er større enn betongbidraget  $V_c$  og i bjelker der høyden er større enn 750 mm (CSA 2004, 11.2.8.1). Minimumskravet er gitt av følgende uttrykk (CSA 2004, Ligning 11-1):

$$A_v = 0.06 \sqrt{f'_c} \frac{bs}{f_y} \quad (5.42)$$

Omskrevet til samme form som (5.13):

$$\rho_{v,min} = 0.06 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} \quad (5.43)$$

Avstanden mellom vertikale armeringsenheter  $s$  skal ikke overskride den minste av  $0.7d_v$  og 600 mm (CSA 2004, 11.3.8.1). Skrå armeringsenheter skal legges inn med en avstand som fører til at en linje som danner en vinkel  $35^\circ$  med lengdeaksen fra midt i tverrsnittshøyden til strekkarmeringen krysses av minst én effektiv armeringsenhet (CSA 2004, 11.3.8.2). For skrå skjærarmeringsenheter med en vinkel  $30^\circ$  eller mer skal bare de midtre 75% av lengden av hver armeringsenhet antas effektive.

Hvis den påførte skjærkraften overskrider  $0.125\lambda\phi_c f'_c b d_v$  skal den maksimale avstanden beskrevet over halveres (CSA 2004, 11.3.8.3).

### 5.3.6 Reduksjon av laster

Snitt som ligger nærmere kanten av et opplegg en avstanden  $d_v$  skal kontrolleres for skjærkraften i avstanden  $d_v$  hvis opplagerkraften i samme retning som skjærkraften fører til trykkspenninger i konstruksjonsdelen og det ikke påføres konsentrerte laster med resulterende skjærkrefter større enn  $0.3\lambda\phi_c \sqrt{f'_c} b d_v$  innenfor avstanden  $d_v$  (CSA 2004, 11.3.2).

$\epsilon_x$  innenfor en avstand  $d_v$  fra kanten av opplegget kan beregnes for snittkreftene i snittet i avstand  $d_v$  (CSA 2004, 11.3.6.4(d)).

### 5.3.7 Kontroll av lengdearmeringen

I utledningen av uttrykkene for  $\beta$  og  $\theta$  ble det antatt at bøyebrydd ikke inntraff før skjærbrudd (Bentz & Collins 2006). For å sjekke at lengdearmeringen er tilstrekkelig til at skjærbrudd skjer før bøyebrydd må lengdearmeringen kontrolleres for den økte strekkraften på grunn av skjær.

Hvis konstruksjonsdelen ikke er utsatt for signifikante strekkrefter kan strekkarmeringen forlenges en avstand  $d_v \cot \theta$  fra punktet der den er beregningsmessig nødvendig på grunn av moment alene (CSA 2004, 11.3.9.1). Armeringen på strekksiden kan kontrolleres ved hjelp av følgende uttrykk der  $F_{lt} = \phi_s f_y A_s$  er største tillatte kraft i armeringen (CSA 2004, Ligning 11-14):

$$F_{lt} \geq \frac{M_f}{d_v} + 0.5N_f + (V_f - 0.5V_s) \cot \theta \quad (5.44)$$

Hvis (5.44) ikke er tilfredsstillt kan armeringsmengden økes for at verdien på venstre side skal bli større, eller  $\epsilon_x$  kan økes for å redusere verdien på høyre side (Bentz & Collins 2006). En høyere verdi for  $\epsilon_x$  vil føre til lavere  $\beta$  og høyere  $\theta$  noe som fører til lavere belastning av lengdearmeringen, men samtidig større nødvendig mengde skjærarmering. Den øvre grensen for  $\epsilon_x$  beskrevet i avsnitt 5.3.3 er innført for å begrense omfordelingen av krefter som følge av økningen av  $\epsilon_x$ .

Hvis  $M_f/d_v$  er mindre enn summen av bidragene fra aksialkraft og skjærkraft skal det legges inn armering på trykksiden tilstrekkelig til å overføre strekkraftene som oppstår. Armeringen på trykksiden kan kontrolleres ved hjelp av følgende uttrykk (CSA 2004, Ligning 11-15):

$$F_{lc} = 0.5N_f + (V_f - 0.5V_s) \cot \theta - \frac{M_f}{d_v} \quad (5.45)$$

I områder nær punkt med maksimalt moment skal ikke lengdearmeringen kontrolleres for noen økning av strekkraft på grunn av skjær forutsatt at den påførte lasten eller opplagerreaksjonen i samme område innfører trykkspenninger i betongen på trykksiden (CSA 2004, 11.3.9.4).

## 5.4 Model Code 2010

Model Code 2010 er den tredje i serien av standarder utarbeidet av CEB-FIP. Model Code har som oppgave å synliggjøre utviklingen innen forskning, forskningsretninger og dimensjoneringsanbefalinger for betong og er en veiledning i utviklingen av nye nasjonale standarder (CEB-FIP 2010a).

Model Code 2010 angir fire tilnæringsnivåer for å beregne skjærkapasiteten til en konstruksjonsdel. Nivåene skilles fra hverandre ut fra nøyaktighet, tidsbruk og kompleksitet (CEB-FIP 2010b, 7.3.3.2).

### Nivå I:

Kan benyttes i konseptfasen og som basis for effektiv dimensjonering av konstruksjoner både med og uten skjærarmering. Nivå I er avledet fra Nivå III ved å anta at  $\epsilon_x$  kan settes litt lavere enn halvparten av armeringens flytetøyning.

### Nivå II:

Kan benyttes ved dimensjonering av nye konstruksjoner og ved kortfattet analyse av eksisterende. Metoden er basert på en fagverksmodell med variabel helning. Metoden forutsetter at konstruksjonen har skjærarmering som oppfyller kravet til minimumsarmering.

### Nivå III:

Kan benyttes ved dimensjonering av nye konstruksjoner med kompliserte lasttilfeller og i utvidede analyser av eksisterende. Metoden er basert på den forenklete modifiserte trykkfeltsteorien og kan benyttes for konstruksjonsdeler både med og uten skjærarmering.



**Nivå IV:**

Kan benyttes i samme tilfeller som nivå III. Metoden tillater at konstruksjonsdeler utsatt for skjær alene eller i kombinasjon med torsjon kan dimensjoneres etter plastisitetsteori og ved å oppfylle tøyingskompatibilitet der det benyttes kjente sammenhenger mellom spenning og tøyning for armering og risset betong. En slik metode kan for eksempel være en full analyse med modifisert trykkfeltsteori. Model Code 2010 gir ingen eksplisitte uttrykk for dette nivået, og det vil derfor ikke bli behandlet videre.

Videre skiller Model Code 2010 mellom konstruksjonsdeler som er risset og urisset på grunn av bøyning (CEB-FIP 2010b, 7.3.3.4). Kapasitetesuttrykket for konstruksjonsdeler som antas urisset som følge av en aksiell trykkraft er det samme som i Eurokode 2 og vil ikke bli gjentatt her, jfr. (5.4).

Generelt skal skjærkapasiteten beregnes fra (5.46) (CEB-FIP 2010b, Ligning 7.3-9) der  $V_{Rd,c}$  er betongbidraget som følge av aggregate interlock,  $V_{Rd,s}$  er bidraget fra skjærarmeringen og  $V_{Rd,max}$  er skjærtrykkapasiteten.

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \leq V_{Rd,max} \quad (5.46)$$

$V_{Rd,c}$ ,  $V_{Rd,s}$  og  $V_{Rd,max}$  kan beregnes fra henholdsvis (5.47), (5.48) og (5.49) (CEB-FIP 2010b, Ligning 7.3-13, 7.3-12 og 7.3-10). Faktorene  $k_c$ ,  $k_v$  samt rissvinkelen  $\theta$  avhenger av hvilket tilnæringsnivå som benyttes og vil bli presentert i de tre neste avsnittene. I (5.49) skal  $\theta = 45^\circ$  for Nivå I og III.  $\sqrt{f_{ck}}$  skal ikke settes inn med større numerisk verdi enn 8 i (5.47) ettersom det observeres stor spredning i skjærkapasiteten til konstruksjonsdeler med høy sylinderefasthet, spesielt uten skjærarmering. Kun skjærarmering som oppfyller minimumskravet presentert i avsnitt 5.4.4 skal inkluderes i (5.48).  $z = 0.9d$  er en gyldig tilnærming i alle nivåene.

$$V_{Rd,c} = k_v \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b z \quad (5.47)$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s_w} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha \xrightarrow{\alpha=90^\circ} \frac{A_{sw}}{s_w} z f_{ywd} \cot \theta \quad (5.48)$$

$$V_{Rd,max} = k_c \frac{f_{ck}}{\gamma_c} b z \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \xrightarrow{\alpha=90^\circ} k_c \frac{f_{ck}}{\gamma_c} b z \frac{1}{\tan \theta + \cot \theta} \xrightarrow{\theta=45^\circ} \frac{1}{2} k_c \frac{f_{ck}}{\gamma_c} b z \quad (5.49)$$

**5.4.1 Nivå I**

I nivå I skal  $\theta = 36^\circ$  som følge av antakelsen om lengdetøyningen beskrevet i innledningen ovenfor. For konstruksjonsdeler uten signifikante aksialkrefter,  $f_{ck} \leq 64$  MPa,  $f_{yk} \leq 500$  MPa og  $d_g \geq 10$  mm, der  $d_g$  er tilslagsstørrelsen, kan  $k_c$  og  $k_v$  beregnes fra (5.50) og (5.51) (CEB-FIP 2010b, Ligning 7.3-17 og 7.3-18). Betingelsene er innført for å unngå at betingelsene presentert i nivå III skal komme i konflikt med forenklingen i nivå I.

$$k_c = 0.5 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 0.5 \quad (5.50)$$

$$k_v = \begin{cases} \frac{200}{1000 + 1.3z} \leq 0.15 & \rho_w = 0 \\ 0.15 & \rho_w \geq \rho_{w,min} \end{cases} \quad (5.51)$$

#### 5.4.2 Nivå II

I nivå II skal ikke betongbidraget til skjærkapasiteten tas med. Lengdetøyningen kan enten antas lik 0.001 eller beregnes fra (5.55) med en minsteverdi  $-0.0002$ .  $\theta$ ,  $k_c$  og  $k_v$  kan beregnes fra henholdsvis (5.52), (5.53) og (5.54) (CEB-FIP 2010b, Ligning 7.3-19, 7.3-21 og 7.3-20).

$$20^\circ + 10000\epsilon_x \leq \theta \leq 45^\circ \quad (5.52)$$

$$k_c = 0.55 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 0.55 \quad (5.53)$$

$$k_v = 0 \Rightarrow V_{Rd,c} = 0 \quad (5.54)$$

#### 5.4.3 Nivå III

I nivå III kan  $\epsilon_x$ ,  $\theta$ ,  $k_c$  og  $k_v$  beregnes fra henholdsvis (5.55), (5.56), (5.57) og (5.58) (CEB-FIP 2010b, Ligning 7.3-23, 7.3-22, 7.3-24 og 7.3-25),  $k_{dg}$  er gitt av (5.59) (CEB-FIP 2010b, Ligning 7.3-26) og  $d_g$  er tilslagsstørrelsen.

$$\epsilon_x = \frac{M_{Ed}/z + V_{Ed} + 0.5N_{Ed}}{2E_s A_s} \quad (5.55)$$

$$\theta = 29^\circ + 7000\epsilon_x \quad (5.56)$$

$$k_c = 0.55 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 0.55 \quad (5.57)$$

$$k_v = \begin{cases} \frac{0.4}{1 + 1500\epsilon_x} \frac{1300}{1000 + 0.7k_{dg}z} & \rho_w = 0 \\ \frac{0.4}{1 + 1500\epsilon_x} & \rho_w \geq \rho_{w,min} \end{cases} \quad (5.58)$$

$$k_{dg} = \frac{48}{16 + d_g} \geq 1.15 \quad (5.59)$$

For nivå III gjelder betingelser tilsvarende som i avsnitt 5.3.3. Disse oppsummeres kort i det følgende (CEB-FIP 2010b, 7.3.3.3). For utfyllende forklaringer henvises det til avsnitt 5.3.3.

$V_{Ed}$  og  $M_{Ed} \geq V_{Ed}z$  skal settes inn med positivt fortegn. Kun armering som er tilstrekkelig forankret skal inkluderes i  $A_s$ . Hvis  $\epsilon_x \leq 0$  beregnet fra (5.55) skal betongens bidrag til stivheten tas med i betraktningen, men  $\epsilon_x$  skal samtidig ikke velges mindre enn  $-0.0002$ . Hvis konstruksjonsdelen utsettes for en aksiell strekkraft som får trykksiden til å risse kan lengdetøyningen beregnet fra (5.55) dobles. Det er tillatt å velge høyere verdier av  $\epsilon_x$ , men ikke høyere enn  $0.003$ . For  $f_{ck} \geq 70$  MPa skal  $d_g$  settes lik  $0$  og for  $64 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 70 \text{ MPa}$  skal  $d_g$  lineært reduseres til  $0$ .

#### 5.4.4 Krav til armeringsmengde og senteravstand

Kravene til minimumsarmering avhenger av om det er en ny eller en eksisterende konstruksjon som analyseres. Hvis en eksisterende konstruksjon har tilstrekkelig skjærtrykkapasitet kan minimumsarmeringen beregnes fra (5.60) (CEB-FIP 2010*b*, Ligning 7.3-11). Kravet for nye konstruksjoner beregnes fra (5.61) (CEB-FIP 2010*b*, Ligning 7.13-8). For nivå I og III skal nødvendig armering oppfylle kravet til minimumsarmering, men hvis  $V_{Ed} \leq V_c$  kan minimumsarmeringen sløyfes. For nivå II skal armering i alle tilfeller oppfylle kravet til minimumsarmering. Den maksimale avstanden mellom armeringsenhetene kan beregnes fra (5.62) (CEB-FIP 2010*b*, 7.13.5.2).

$$\rho_{w,min} = 0.08 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \quad (5.60)$$

$$\rho_{w,min} = 0.12 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \quad (5.61)$$

$$s_{l,max} = \min(0.6d, 500 \text{ mm}) \quad (5.62)$$

Skjærarmeringen kan bestå av blant annet vertikale bøylor, oppbøyde stenger med vinkel på minst  $30^\circ$  eller T-hodestenger som er dokumentert å kunne oppnå flytespenning. Bøylene skal omslutte strekkarmeringen og være tilstrekkelig forankret slik at hele den nødvendige bøylekraften virker over en høyde lik den indre momentarmen i tverrsnittet.

#### 5.4.5 Reduksjon av laster

Skjærkapasiteten kan kontrolleres i en avstand  $z$  fra kanten av opplegg, tverrslaster og geometriske diskontinuiteter. Der lasten innfører trykkspenninger i betongen kan snitt nærmere enn avstanden  $z$  kontrolleres for samme kraft (CEB-FIP 2010*b*, 7.3.3.1).

Hvis det kan antas at lasten overføres direkte til opplegg kan bidraget til skjærkraften reduseres ved hjelp av passende metoder, jfr. avsnitt 5.1.4.

#### 5.4.6 Kontroll av lengdearmeringen

Lengdearmeringen skal kontrolleres for en økt strekkraft på grunn av skjærkraften. Den dimensjonerende strekkraften i strekkarmering kan beregnes fra følgende uttrykk (CEB-FIP 2010*b*, Ligning 7.3-14):

$$F_{td} = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{V_{Ed}}{2}(\cot \theta - \cot \alpha) + \frac{V_c}{2}(\cot \theta + \cot \alpha) \leq \frac{M_{Ed,max}}{z} \quad (5.63)$$

## 6 Evaluering av standarder

Når det utvikles metoder for hvordan skjærkapasiteten til betong kan beregnes, er det viktig at de kan evalueres ut fra et bredt spekter av forsøksresultater. Hvis metoden er tilpasset forsøksserier med liten variasjon i parameterne som antas å ha innvirkning på skjærkapasiteten vil den sannsynligvis vise stor usikkerhet utenfor intervallene den er tilpasset til.

I dette avsnittet vil det bli gjort en evaluering av standardene presentert i kapittel 5. Evalueringen vil bli gjort ved hjelp av to databaser med testresultater fra forsøk på rektangulære bjelker: en uten skjærarmering (Reineck, Kuchma, Kim & Marx 2003) og en med skjærarmering (Cladera & Mari 2007). Det har blitt utarbeidet et robust MatLab-skript (MathWorks 2011) med mulighet for å sortere databasene, beregne kapasiteten gitt av de ulike standardene og analysere hvor godt standardene klarer å beskrive forsøksresultatene. MatLab-skriptet er beskrevet nærmere i vedlegg C.

### 6.1 Databaser

I dette avsnittet vil databasene med forsøksresultater med og uten skjærarmering bli presentert. Det innledes med en betraktning av materialparameterne.

#### 6.1.1 Materialparametere

Trykkfastheten som er oppgitt i databasene,  $f_{1c}$ , er den gjennomsnittlige fastheten fra forsøk gjort i forbindelse med hvert av bjelkeforsøkene. Den karakteristiske sylindrefastheten kan beregnes fra (6.1) (Reineck et al. 2003, Tabell 1 og ligning 2).

$$f_{ck} = \frac{f_{1c}}{0.95} - 4 \quad (6.1)$$

Den midlere strekkfastheten kan beregnes fra trykkfastheten, og det er vist at følgende uttrykk kan benyttes for å finne den midlere strekkfastheten (Reineck et al. 2003, Ligning 6b og 7):

$$f_{ctm} = \begin{cases} 0.302 \left( \frac{f_{1c}}{0.95} - 4 \right)^{2/3} & f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.115 \left( \frac{f_{1c}}{0.95} - 4 \right)^{1/3} & f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.2)$$

Den karakteristiske strekkfastheten kan dermed beregnes fra (2.8).

Armeringens flytespenning som er oppgitt i databasene benyttes direkte som den karakteristiske flytespenningen.

De ulike standardene innfører materialfaktorer, for eksempel  $\gamma_c$ ,  $\gamma_s$  eller  $\phi_c$ , for å ta hensyn til at materialegenskapene avviker ugunstig fra den karakteristiske verdien, usikkerheter i tverrsnittgeometri eller usikkerhet i beregningsmodellen (CEN 2004, Standard Norge 2003, CSA 2004, CEB-FIP 2010a). For å kunne evaluere standardene med hensyn på beregningsmodellenes sikkerhet er det derfor ikke hensiktsmessig å innføre materialfaktorene, og den karakteristiske fastheten blir dermed benyttet direkte.

Eurokode 2 og Model Code 2010 innfører i tillegg faktoren  $\alpha_{cc}$  og  $\alpha_{ct}$  som tar hensyn til langtidsvirkninger av belastningen og ugunstige effekter av hvordan lasten påføres (CEN 2004, 3.1.6). På samme måte benytter NS 3473 konstruksjonsfastheter for å finne den dimensjonerende fastheten. Bakgrunnen for å benytte disse stegene er at forholdene i konstruksjoner avviker fra de ideelle forholdene som kan oppnås i et laboratorieforsøk. Ettersom standardene her skal evalueres med bakgrunn i laboratorieforsøk antas det at det kan sees bort fra denne fasthetsreduksjonen. Den karakteristiske fastheten beregnet fra (6.1) benyttes dermed for alle fire standarder uten videre reduksjon. Et annet argument for å se bort fra denne fasthetsreduksjonen er at den anbefalte verdien for  $\alpha_{cc}$  og  $\alpha_{ct}$  er 1.0 (CEN 2004, CEB-FIP 2010b, 3.1.6 og 7.2.3.1.4). Det observeres også at det kun er NS 3473 som benytter denne fasthetsreduksjonen i uttrykket for betongens skjærkapasitet.

For å kunne gjøre en entydig sammenligning av de ulike standardene må det tas hensyn til hvor lav eller hvor høy sylindrefasthet hver standard tillater å benytte. CSA A23.3 har det strengeste kravet,  $20 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 80 \text{ MPa}$ , jfr. avsnitt 2.3.2, og alle forsøk som ikke havner innenfor dette intervallet vil derfor bli utelatt.

Lignende gjelder for armeringens flytespenning, der Eurokode 2 angir at dimensjoneringen er gyldig for  $400 \text{ MPa} \leq f_{yk} \leq 600 \text{ MPa}$ , jfr. avsnitt 2.2.1. CSA A23.3 angir at den høyeste verdien som kan settes inn for flytespenningen er 500 MPa. I beregninger gjort med denne standarden vil derfor armering med høyere flytespenning bli tilegnet verdien 500 MPa. Begrensningen av  $f_{yk}$  kan ha sammenheng med at armering med høy fasthet har lavere tendens til full utnyttelse av flytespenningen (Yu & Bazant 2011).

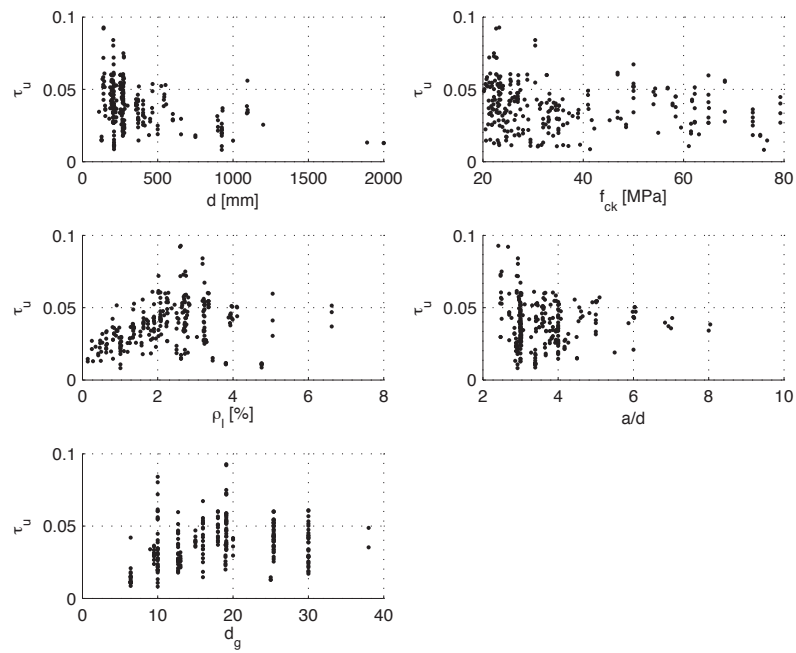
### 6.1.2 Uten skjærarmering

For å gjøre det lettere å evaluere modeller for skjærkapasiteten til betongbjelker uten skjærarmering ble resultater fra over 1000 forsøk av typen vist i figur 1.5 samlet i en database (Reineck et al. 2003). Databasen inneholder tverrsnittsgeometri, trykkfasthet, lengdearmeringsforhold,  $a/d$ -forhold, tilslagsdiameter og last ved kollaps. Kun forsøksresultater som oppfyller følgende krav er tatt med i databasen:

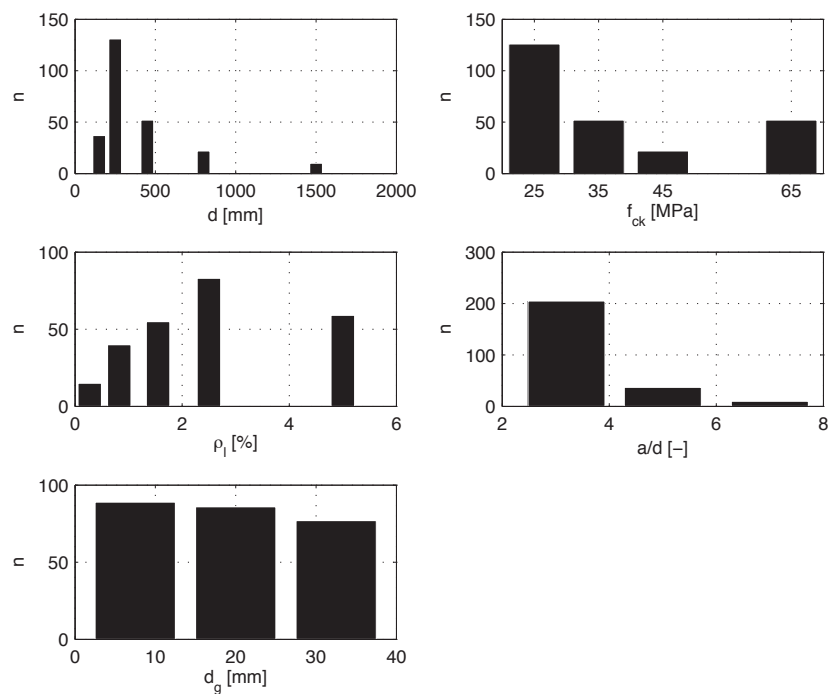
- $f_{1c} > 12 \text{ MPa}$
- $b > 50 \text{ mm}$
- $h > 70 \text{ mm}$
- $a/d > 2.40$  for å sikre at bjelken var slank og at buevirkning kunne neglisjeres
- Kollaps skyldtes skjærkraft og ikke moment eller forankringsbrudd
- Bjelken var ikke armert med glatt armeringsstål

Ved å utelate forsøksresultatene der tilslagsstørrelsen ikke var oppgitt og innføre kravene til sylindrefasthet fra forrige avsnitt består databasen av totalt 271 resultater.

Figur 6.1 viser den dimensjonsløse skjærspenningen  $\tau_u = V_u/(bdf_{1c})$  plottet mot dybde, lengdearmeringsforhold, trykkfasthet,  $a/d$ -forhold og tilslagsdiameter. Det observeres at



**Figur 6.1:** Dimensjonsløs skjærspenning for database uten skjærarmering

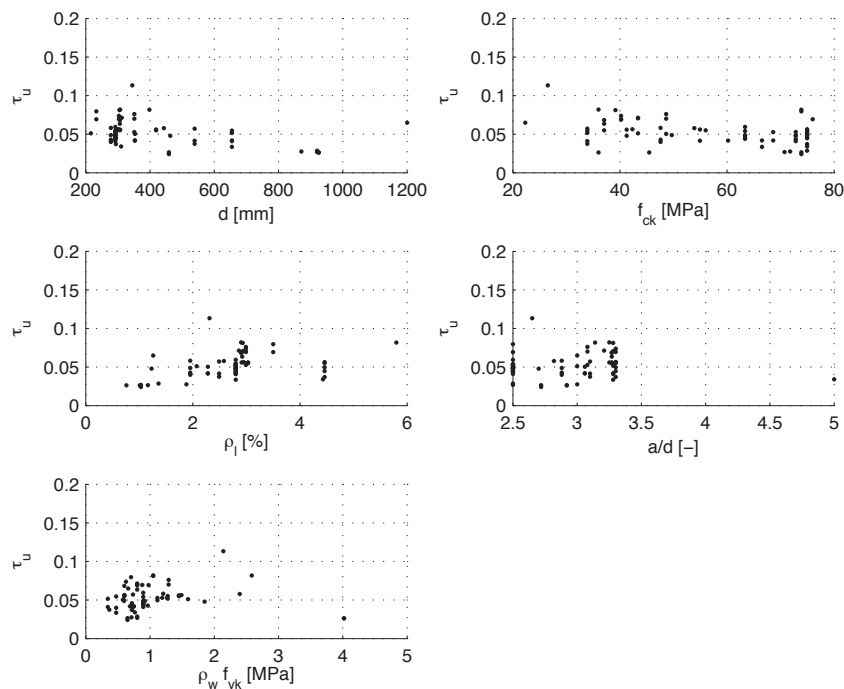


**Figur 6.2:** Spredning i parametere for database uten skjærarmering

$\tau_u$  har stor spredning. Fra figuren ser det ut til at den dimensjonsløse skjærspenningen har en tendens til å avta for økende dybde og  $a/d$ -forhold og øke for økende verdi av lengdearmeringsforholdet. Det ser også ut til at  $\tau_u$  holder seg relativt konstant med en svak tendens til økning for økende tilslagsstørrelse.

Figur 6.2 viser spredningen i parameterne for databasen uten skjærarmering. Intervallene tilsvarende inndelingen i tabellene i vedlegg B. Det kan sees at parameterne dekker et bredt spekter og at hovedtyngden av forsøkene har sylindrefastheter i intervallet 20 - 30 MPa, og dybder i intervallet 200 - 300 mm. Dette antas å være de vanligste intervallene.

### 6.1.3 Med skjærarmering



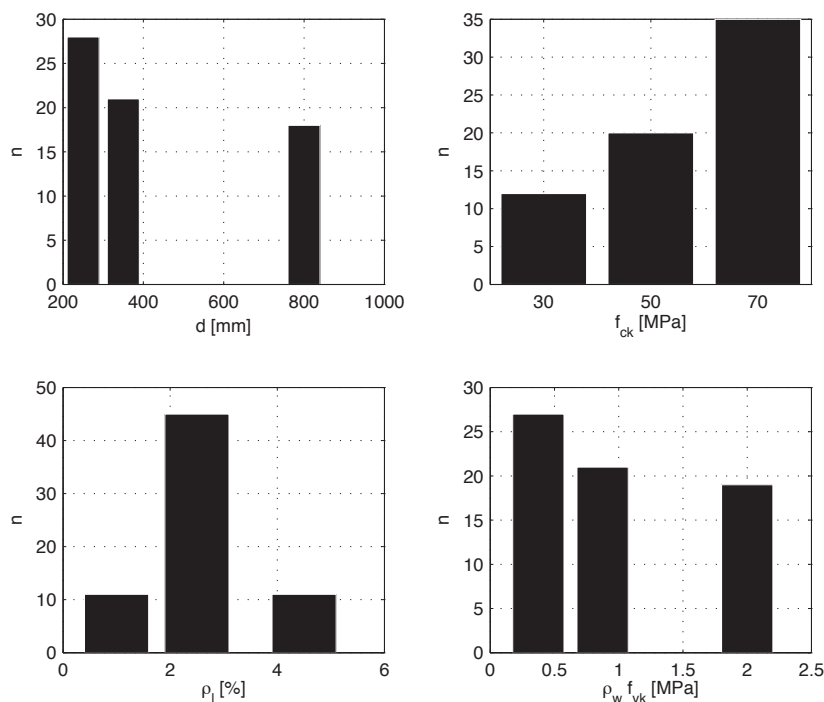
**Figur 6.3:** Dimensjonsløs skjærspenning for database med skjærarmering

For å kunne gjøre en evaluering av Eurokode 2 ble det samlet inn over 200 forsøksresultater fra rektangulære bjelker med skjærarmering, belastet med en eller to punktlaster (Cladera & Mari 2007). Forsøksresultatene inneholdt tverrsnittsgeometri, trykkfasthet, lengdearmeringsforhold,  $a/d$ -forhold, skjærarmeringsforhold, armeringens flytespenning og last ved kollaps.

På samme måte som databasen uten skjærarmering ble også denne redusert med hensyn på bøyebrydd. Cladera & Mari sier ingenting om de utelukket glatt armering, men det antas her at dette er tilfelle.



Cladera & Mari påpeker at de utelukkete testresultatene som hadde mindre skjærarmring enn minimumsarmeringen gitt av CSA A23.3, jfr. (5.43), ettersom dette var det minste kravet i standardene som ble undersøkt i deres studie, og at det hadde vist seg å gi tilstrekkelig reservekapasitet etter diagonal opprissing. Ved å sammenligne (5.13), (5.28), (5.43) og (5.60) kan det vises at kravet fra CSA A23.3 er det minste også i denne oppgaven. Det vil derfor ikke bli gjort noen ytterligere reduksjon av forsøksresultatene med hensyn på minimumsarmeringen.



**Figur 6.4:** Spredning i parametere for database med skjærarmring

Ved å innføre begrensningen av betongens sylindrefasthet og armeringens flytespenning som beskrevet i avsnitt 6.1.1 består den endelige databasen av 69 resultater. Figur 6.3 viser den dimensjonsløse skjærspenningen plottet mot dybde, lengdearmeringsforhold, trykkfasthet,  $a/d$ -forhold og fordelt armeringsspenning  $\rho_w f_{yk}$ . Figuren viser spredning i resultatene, men ikke på langt nær like stor spredning som i forsøkene uten skjærarmring. Fra figuren kan det sees at den dimensjonsløse skjærspenningen holdes relativt konstant med hensyn på trykkfasthet, lengdearmeringsforhold og  $a/d$ -forhold. Selv om det ble argumentert i avsnitt 3.7 for at skalaeffekten forsvinner ved å innføre minimumsarmering ser det ut til at den dimensjonsløse skjærspenningen har en avtakende tendens med økende dybde.

Figur 6.4 viser spredningen i parameterne for databasen med skjærarmring. Intervallene tilsvarer inndelingen i tabellene i vedlegg B. Det kan sees at et stort intervall er dekket av alle parameterne bortsett fra  $a/d$ -forholdet, som er utelatt i denne figuren ettersom

resultatene som vist i figur 6.3 dekker et relativt lite intervall. Databasen kan derfor ikke si noe om hvor godt de ulike standardene tar hensyn til  $a/d$ -forholdet.

## 6.2 Analysemetode

For å kunne evaluere hver standard for seg vil det for hvert forsøksresultat beregnes en kapasitet basert på uttrykket i standarden. Forholdet mellom forsøksresultatet og den beregnede kapasiteten, sikkerhetsfaktoren  $\gamma_{mod}$  gitt av (6.3), vil så bli beregnet.

På grunn av den viste spredningen i forsøksresultatene og at materialparameterne benyttet som grunnlag for den beregnede kapasiteten er basert på et begrenset utvalg i hvert forsøk vil ikke  $\gamma_{mod}$  beregnet for hvert enkelt tilfelle gi noen god representasjon av kvaliteten. I tillegg beregnes den gjennomsnittlige sikkerhetsfaktoren  $\gamma_{mod,m}$  gitt av (6.4), standardavviket  $s$  gitt av (6.5), variasjonskoeffisienten  $c_v = s/\gamma_{mod,m}$  (Reineck et al. 2003, Ligning 17) og tilhørende 5%-fraktil  $\gamma_{mod,5\%}$  gitt av (6.6) (Reineck et al. 2003, Ligning 16). Standardavviket og variasjonskoeffisienten er tegn på spredningen. Hvis  $\gamma_{mod,5\%} > 1.0$  er uttrykket for den beregnede kapasiteten på sikker side (Reineck et al. 2003).

En lav verdi for  $\gamma_{mod,5\%}$  vil ikke nødvendigvis bety at det er mange lave verdier i fordelingen. Derfor vil også  $\gamma_{mod,95\%}$  gitt av (6.7) (Reineck et al. 2003, Ligning 18),  $\gamma_{mod,min}$  og  $\gamma_{mod,max}$  bli beregnet. Hvis  $\gamma_{mod,5\%}$  er lavere enn  $\gamma_{mod,min}$  og  $\gamma_{mod,95\%}$  er veldig høy kan dermed den lave verdien for  $\gamma_{mod,5\%}$  forklares med høye avvik i positiv retning. Dette vil også indikeres av standardavviket.

En høy variasjonskoeffisient vil uansett indikere at uttrykket i standarden er usikkert, og at det er sannsynlig at det ikke bygger på en teori som kan beskrive problemet godt nok.

$$\gamma_{mod} = \frac{V_{test}}{V_{standard}} \quad (6.3)$$

$$\gamma_{mod,m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_{mod,i} \quad (6.4)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\gamma_{mod,i} - \gamma_{mod,m})^2} \quad (6.5)$$

$$\gamma_{mod,5\%} = \gamma_{mod,m} - 1.645s \quad (6.6)$$

$$\gamma_{mod,95\%} = \gamma_{mod,m} + 1.645s \quad (6.7)$$

Det som i det følgende omtales som et positivt avvik er når  $\gamma_{mod} > 1.0$ . Motsatt gjelder for det som omtales som et negativt avvik. Det bemerkes at  $\gamma_{mod,m}$  beskriver trenden og at  $\gamma_{mod,5\%}$  beskriver sikkerhetsnivået.

### 6.3 Response-2000

Analyseprogrammet Response-2000 (Bentz 2001) er designet for å analysere bjelker og søyler med modifisert trykkfeltsteori. Programmet gir brukeren muligheten til å definere kompliserte tverrsnitt, ulike typer belastninger og randbetingelser samt komplekse materialmodeller. Brukeren kan velge mellom en tverrsnittsanalyse eller en full analyse av konstruksjonsdelen ved å utnytte symmetrier.

Noen av forsøkene som ble analysert ga resultater som krevde en grundigere analyse enn det MatLab-skriptet beskrevet i vedlegg C kunne gi svar på. På grunn av brukervennlighet og høy nøyaktighet ble Response-2000 brukt til å kontrollere disse forsøksresultatene. Det kan vises at Response-2000 beregner både kapasitet og last-forskyvning med høy nøyaktighet (Collins et al. 2007).

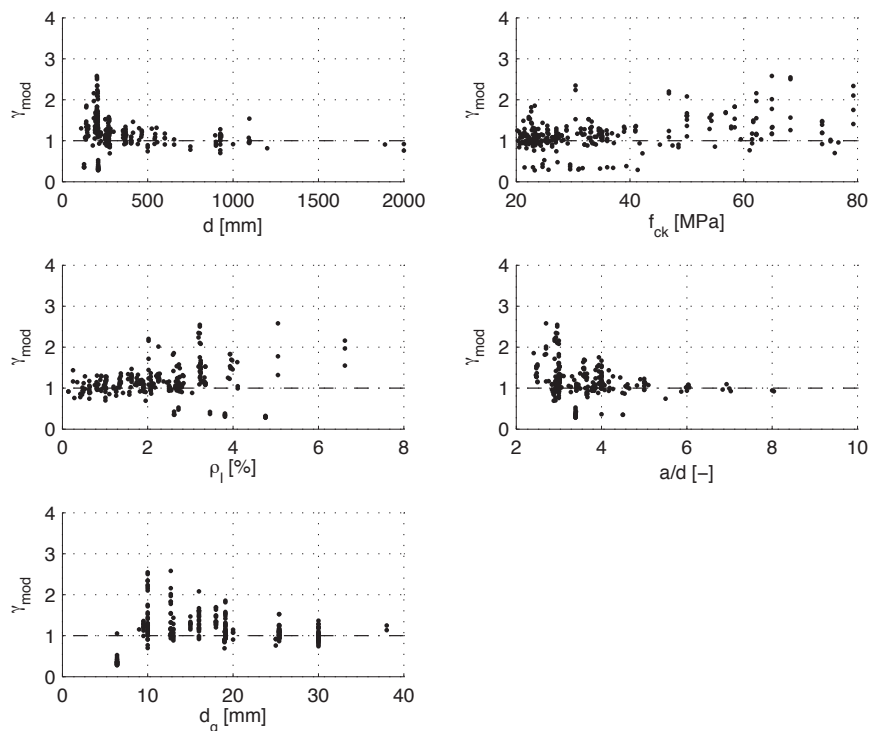
I analysene ble det valgt en materialmodell som tilsvarende modellen beskrevet i avsnitt 2.3.4 og tverrsnitt, materialegenskaper og  $a/d$ -forhold ble angitt i henhold til databasene. En full analyse av konstruksjonsdelen ble så gjennomført for å ta med virkningen av  $a/d$ -forholdet og å få frem det resulterende rissmønsteret.

Det skal bemerkes at Response-2000 antar at plane tverrsnitt forblir plane og ser bort fra spenningene i tverretningen. Dette medfører at D-regioner, og dermed bjelker med  $a/d \leq 2.0$ , ikke kan analyseres.

## 6.4 Uten skjærarmering

I dette avsnittet vil resultatene fra evalueringen av standardene uten skjærarmering bli presentert for hver standard før de oppsummeres mot hverandre i avsnitt 6.4.6. Tabellene i vedlegg B oppsummerer resultatene detaljert.

### 6.4.1 Korrupte forsøksresultater



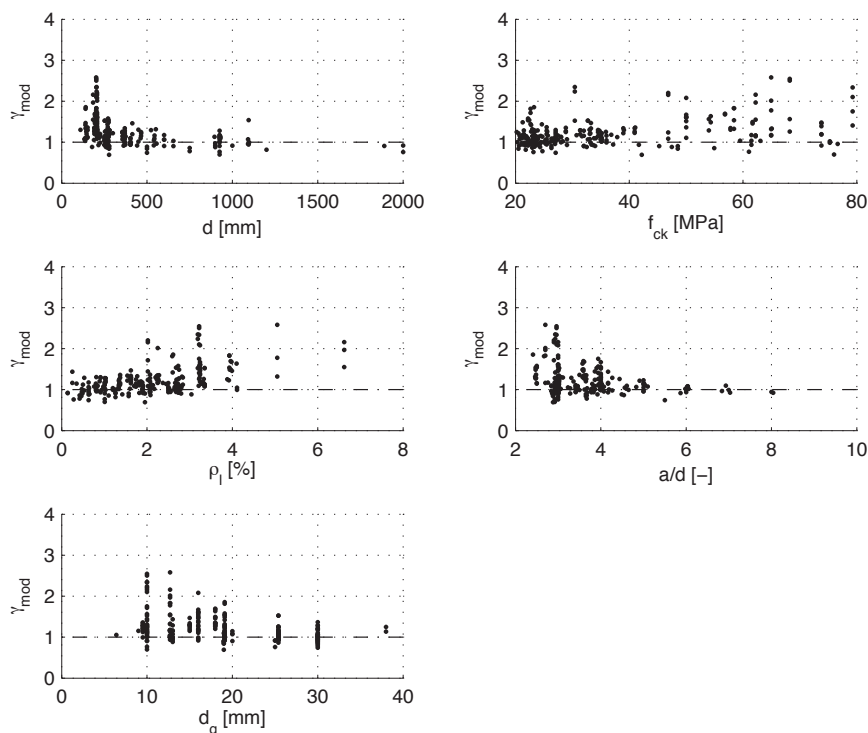
**Figur 6.5:**  $\gamma_{mod}$  for Eurokode 2 uten skjærarmering, inkludert korrupte forsøksresultater

Ved å plote  $\gamma_{mod}$  for de forskjellige standardene ble det observert at en gruppe resultater lå mye lavere enn det som så ut til å være vanlig. Figur 6.5 viser dette for Eurokode 2, der det observeres en klynge med lave  $\gamma_{mod}$  for lave  $d$ .

Alle disse verdiene viste seg å stamme fra to forsøksserier. Analyser av stikkprøver fra disse seriene med Response-2000 viste at de rapporterte resultatene var veldig lave. Med bakgrunn i denne observasjonen og sammenligningen med de fire standardene utelukkes derfor disse forsøkene i den følgende analysen. Ut fra analysen med Response-2000 kan det se ut til at de rapporterte bruddlastene er lasten som initierer diagonale riss og ikke den maksimale lasten ved kollaps. Dette er bare grove spekulasjoner, avviket kan også skyldes at det ble brukt glatt armering selv om databasen skal ha utelukket forsøk der dette er tilfelle.

Med denne reduksjonen består databasen som benyttes videre av 252 forsøksresultater.

## 6.4.2 Eurokode 2



**Figur 6.6:**  $\gamma_{mod}$  for Eurokode 2 uten skjærarmering

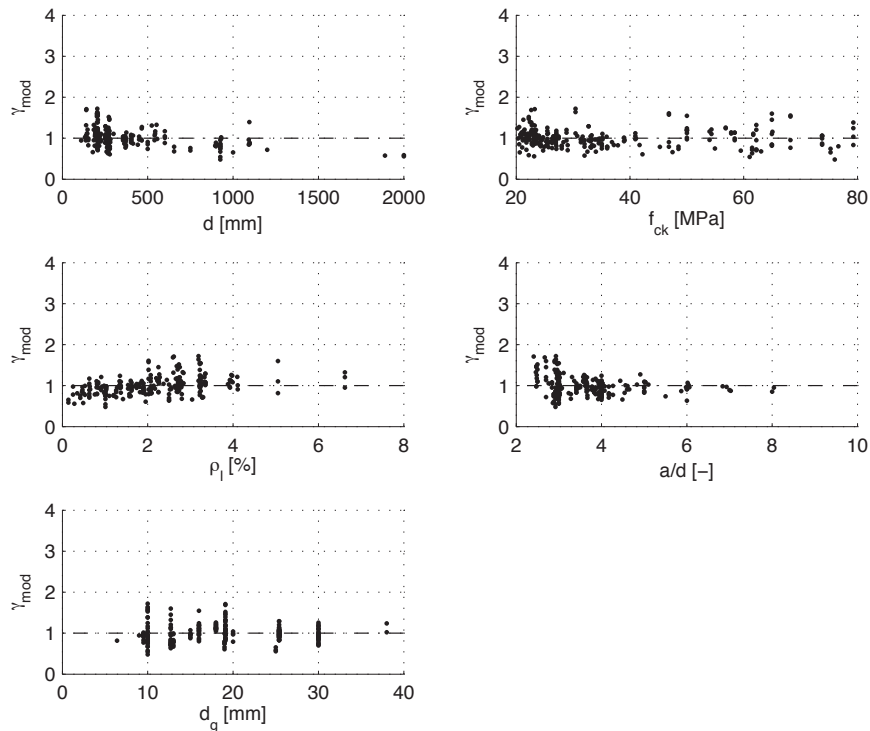
Skjærkraftkapasiteten for Eurokode 2 ble beregnet som den minste av kapasitetene gitt av (5.1) og (5.6).  $v_{min}$  ble beregnet fra standardens hoveduttrykk og ikke fra uttrykket i det nasjonale tillegget som antas å være feil, jfr. avsnitt 5.1.1.

For å ta hensyn til tilslagsstørrelsen ble verdien av  $k_2$  i (5.1) valgt avhengig av om  $d_g \geq 16$  mm eller ikke.

Figur 6.6 viser  $\gamma_{mod}$  for Eurokode 2 plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $d_g$ . Fra figuren kan det sees at Eurokode 2 har en tendens til positive avvik for lave verdier av  $d$ , høye  $f_{ck}$ , høye  $\rho_l$ , lave  $a/d$  og lave  $d_g$ . Ved å begrense  $\rho_l$  nedad til 2% ble det tydeligere at de positive avvikene hadde sammenheng med lave  $a/d$ -forhold.

Eurokode 2 viser ingen klare tendenser til negative avvik, men det observeres hele 57 tilfeller med  $\gamma_{mod} < 1.0$ . De negative avvikene for  $\gamma_{mod,5\%}$  skyldes derfor høye positive avvik som gir høyt standardavvik.

## 6.4.3 NS 3473



**Figur 6.7:**  $\gamma_{mod}$  for NS 3473 uten skjærarmering

Skjærkraftkapasiteten for NS 3473 ble beregnet som den minste av (5.22) og (5.24).  $z = 0.9d$  ble antatt i (5.24).

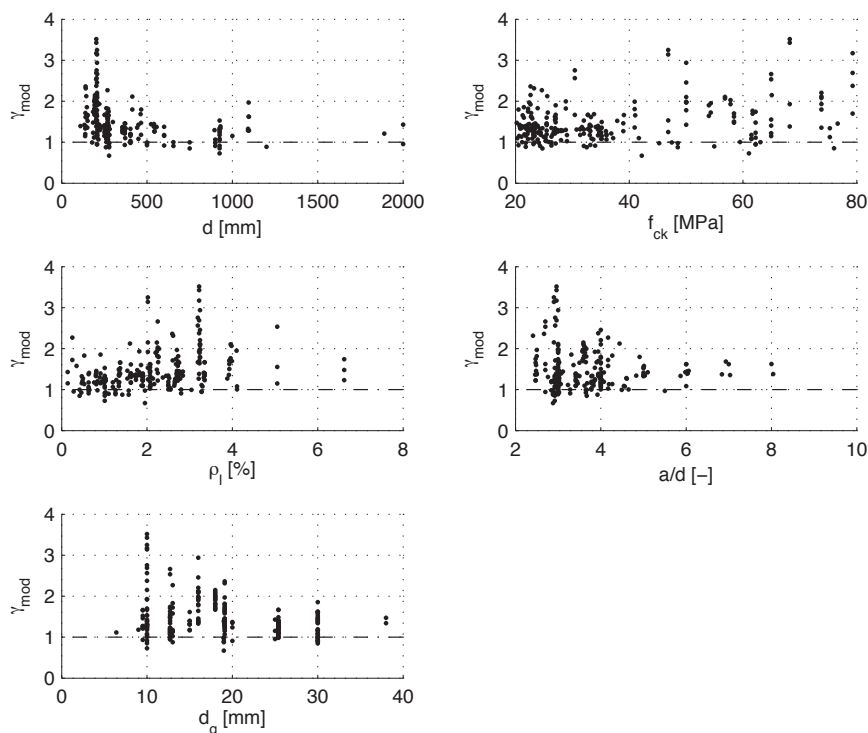
Figur 6.7 viser  $\gamma_{mod}$  for NS 3473 plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $d_g$ . Fra figuren kan det sees at verdiene ligger noe lavere enn for Eurokode 2, men samtidig er  $\gamma_{mod,5\%}$  på størrelse med verdien for de andre standardene. Dette skyldes at NS 3473 har et lavere standardavvik.

NS 3473 ser ikke ut til å ha noen klare tendenser til hverken positive eller negative avvik. Den har en liten tendens til positive avvik for lave  $d$  og negative avvik for høye  $d$ . Når resultatene plottes mot  $\rho_l$  kan det se ut til at NS 3473 har negative avvik for lave verdier, positive avvik for mellomstore verdier og ubetydelige avvik for høye verdier. For lave  $a/d$  har standarden en tendens til både positive og negative avvik.

Negative avvik for  $\gamma_{mod,5\%}$  ser ut til å kunne skyldes både positive og negative avvik for  $\gamma_{mod}$ .

$\gamma_{mod} < 1.0$  i 148 av forsøksresultatene.

## 6.4.4 CSA A23.3



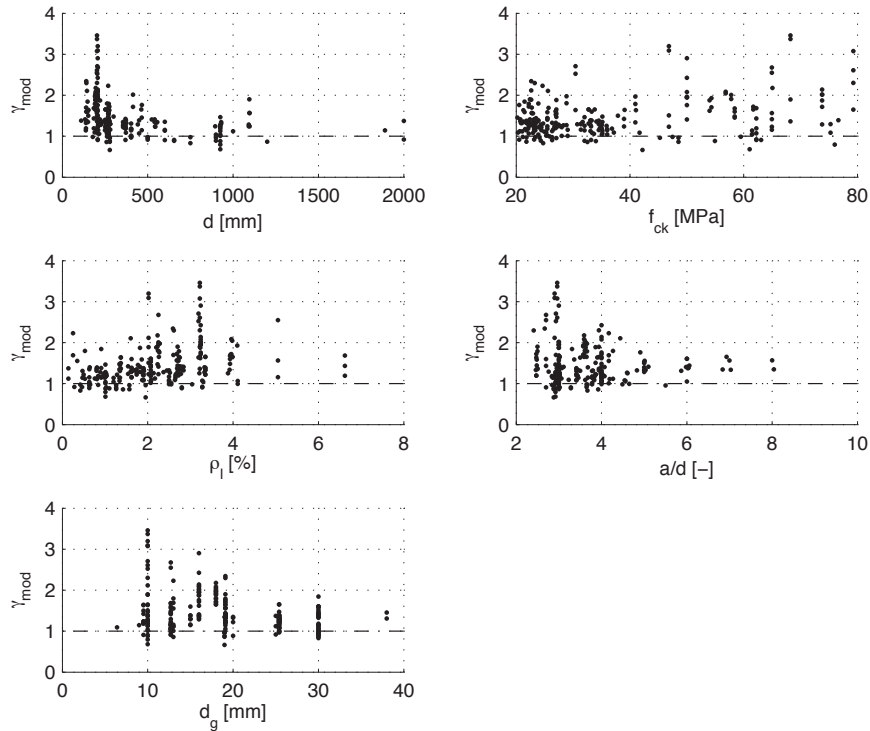
**Figur 6.8:**  $\gamma_{mod}$  for CSA A23.3 uten skjærarmering

Skjærkraftkapasiteten for CSA A23.3 ble beregnet fra (5.34) og (5.35).  $z = 0.9d$  ble antatt i begge uttrykkene. Den midlere rissavstanden  $s_{ze}$  som tar hensyn til tilslagsstørrelsen ble beregnet fra (5.38), der  $s_z$  ble satt lik  $z$  ettersom det ikke var oppgitt om lengdearmeringen var fordelt over høyden. Bøyemomentet ble beregnet i et snitt i avstanden  $z$  fra lasten og ikke tatt mindre enn  $Vz$ , der  $V$  er skjærkraften ved kollaps hentet fra databasen. Forenklingene presentert i avsnitt 5.3 ble ikke benyttet.

Figur 6.8 viser  $\gamma_{mod}$  for CSA A23.3 plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $d_g$ . Standarden har ingen tendenser til negative avvik, men det observeres 27 tilfeller med  $\gamma_{mod} < 1.0$ .

CSA A23.3 har derimot tendenser til relativt store positive avvik for lave  $d$ ,  $a/d$  og  $d_g$  og mellomstore  $\rho_l$ . Ved å utelukke intervaller der det ikke ser ut til å være store positive avvik kan det sees at standarden spesielt har en tendens til positive avvik for kombinasjonen høye  $f_{ck}$  og lave  $d_g$  og at tendensen blir ekstra tydelig for lave  $d$  og  $a/d$  og økende  $\rho_l$ .

## 6.4.5 Model Code 2010



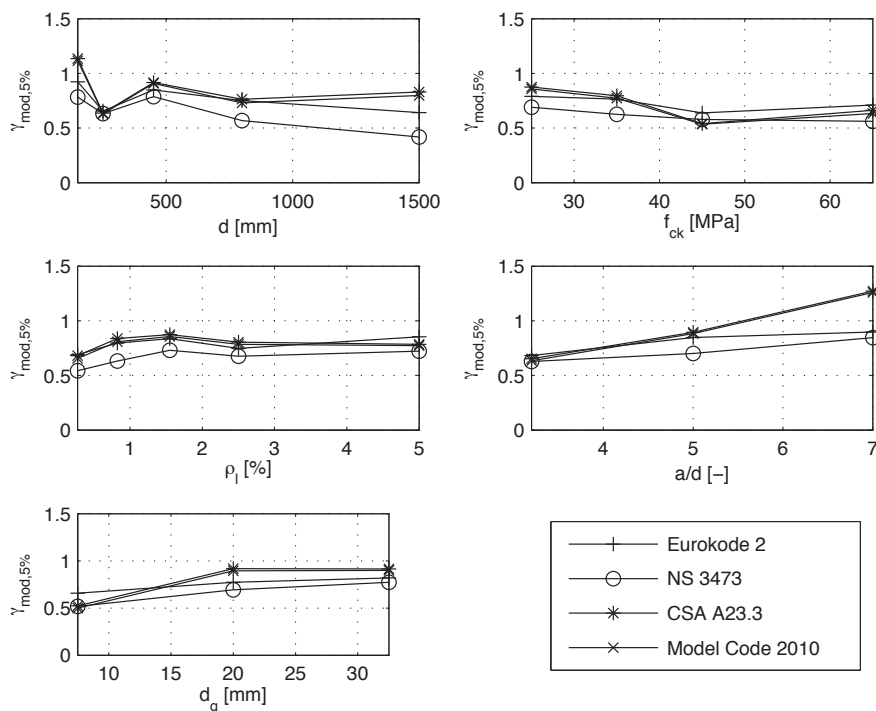
**Figur 6.9:**  $\gamma_{mod}$  for Model Code 2010 uten skjærarmering

Skjærkraftkapasiteten for Model Code 2010 ble beregnet ved hjelp av Nivå III og valgt som den minste av (5.47) og (5.49).  $z = 0.9d$  ble antatt i begge uttrykkene. Bøyemomentet ble som for CSA A23.3 beregnet i et snitt i en avstand  $z$  fra lasten og ikke valgt mindre enn  $Vz$ . Nivå III ble valgt fordi Nivå I er en forenkling av Nivå III og ville ha ført til at mange av forsøkene måtte ha blitt utelatt som følge av betingelsene presentert i avsnitt 5.4.1.

Figur 6.9 viser  $\gamma_{mod}$  for Model Code 2010 plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $d_g$ . Resultatene følger samme trender som for CSA A23.3 og 29 av forsøkene ga  $\gamma_{mod} < 1.0$ .



## 6.4.6 Oppsummering



**Figur 6.10:**  $\gamma_{mod,5\%}$  for standardene uten skjærarmering

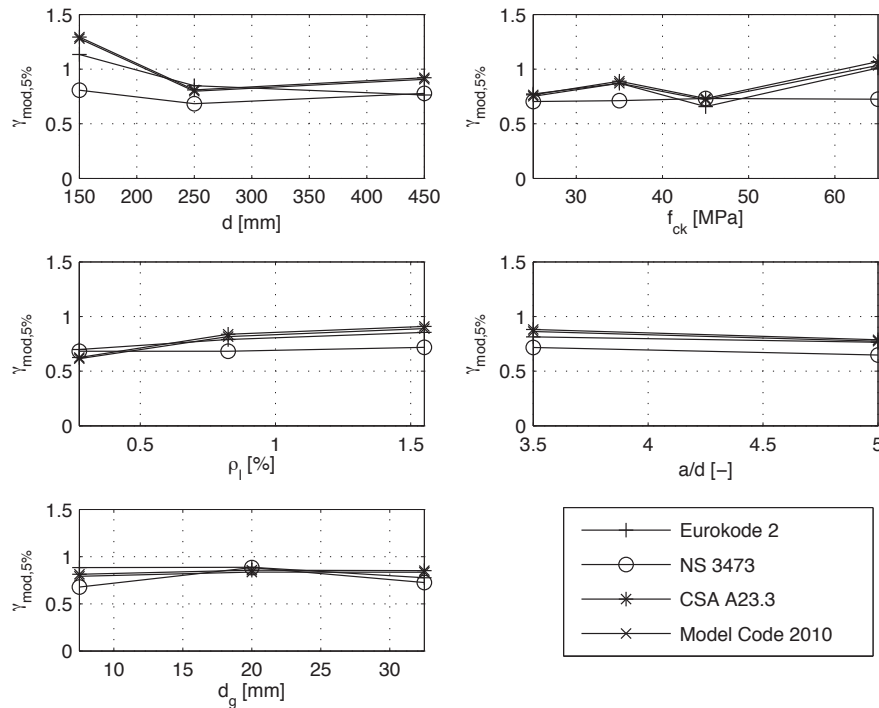
Figur 6.10 viser  $\gamma_{mod,5\%}$  plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $d_g$  for de fire standardene. Verdiene av  $\gamma_{mod,5\%}$  er hentet fra tabell B.1, B.2, B.3, B.4 og B.5. Tabell 6.1 viser de samlede resultatene uten å sortere i intervaller. Det bemerkes at de korrupte resultatene er utelatt. Det kan sees at alle standardene ligger på usikker side og at variasjonskoeffisientene er relativt høye. NS 3473 har den laveste verdien for  $\gamma_{mod,5\%}$ , men samtidig den laveste variasjonskoeffisienten.

Hvis standarden bygger på en teori som tar hensyn til alle viktige parametere bør kurvene i figur 6.10 være glatte, det vil si at standarden bør kunne predikere kapasiteter som er konsistente med forsøksresultatene. Hvis kurvene er glatte, men med en helning i den ene eller andre retningen, kan det bety at standarden tar hensyn til parameteren og behøver justering. Som det går frem av figuren er ikke kurvene for  $d$ ,  $f_{ck}$  og  $\rho_l$  glatte. De to resterende er glattere, men her divergerer de ulike standardene noe fra hverandre.

Hvis denne figuren sammenlignes med figurene 6.6, 6.7, 6.8 og 6.9 kan årsaken til avvikene sees å være store positive avvik for  $\gamma_{mod}$ , det vil si at standarden underestimerer kapasiteten. I figurene 6.6, 6.7, 6.8 og 6.9 kommer det frem at alle de høyeste positive avvikene tilsvarer tilfellene der  $a/d < 3.0$  og  $\rho_l > 2\%$ . Tabell 6.2 viser resultatene når disse tilfellene utelates. Det kan tydelig sees at  $\gamma_{mod,5\%}$  ligger høyere og  $c_v$  ligger lavere for alle standardene hovedsaklig som følge av at  $\gamma_{mod,max}$  ligger lavere.

Figur 6.11 viser en lignende fremstilling som figur 6.10, men her er  $\rho_l > 2\%$  og  $a/d < 3$  utelatt. I denne figuren er kurvene noe glattere og det kan sees at Eurokode 2 ligger relativt jevnt med CSA A23.3 og Model Code 2010 for  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$  og  $a/d$ . NS 3473 gir de glatteste kurvene og ser ut til å ha det mest konsistente sikkerhetsnivået. Etersom mange forsøksresultater ble sortert ut i denne fremstillingen er noen av intervallene tomme og andre justert i mindre grad.

Tabell 6.3 viser resultatene når materialfaktorene presentert i kapittel 2 inkluderes.



**Figur 6.11:**  $\gamma_{mod,5\%}$  for standardene uten skjærarmoring med  $\rho_l < 2\%$  og  $a/d > 3$

**Tabell 6.1:** Resultater for standardene uten skjærarmering

	<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
$\gamma_{mod,m}$	1.2208	0.9981	1.4660	1.4403
$\gamma_{mod,5\%}$	0.6765	0.6364	0.6947	0.6772
$\gamma_{mod,95\%}$	1.7650	1.3597	2.2372	2.2034
$\gamma_{mod,min}$	0.6943	0.4787	0.6725	0.6632
$\gamma_{mod,max}$	2.5797	1.7188	3.5171	3.4604
$c_v$	0.2710	0.2203	0.3198	0.3221
$s$	0.3309	0.2198	0.4689	0.4639

**Tabell 6.2:** Resultater for standardene uten skjærarmering for  $a/d > 3.0$  og  $\rho_l < 2\%$ 

	<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
$\gamma_{mod,m}$	1.0611	0.8911	1.3074	1.2873
$\gamma_{mod,5\%}$	0.8028	0.6995	0.8089	0.7926
$\gamma_{mod,95\%}$	1.3195	1.0828	1.8060	1.7820
$\gamma_{mod,min}$	0.7421	0.6708	0.8484	0.8321
$\gamma_{mod,max}$	1.4371	1.2109	2.2696	2.2312
$c_v$	0.1480	0.1307	0.2318	0.2336
$s$	0.1571	0.1165	0.3031	0.3007

**Tabell 6.3:** Resultater for standardene uten skjærarmering inkludert materialfaktorer

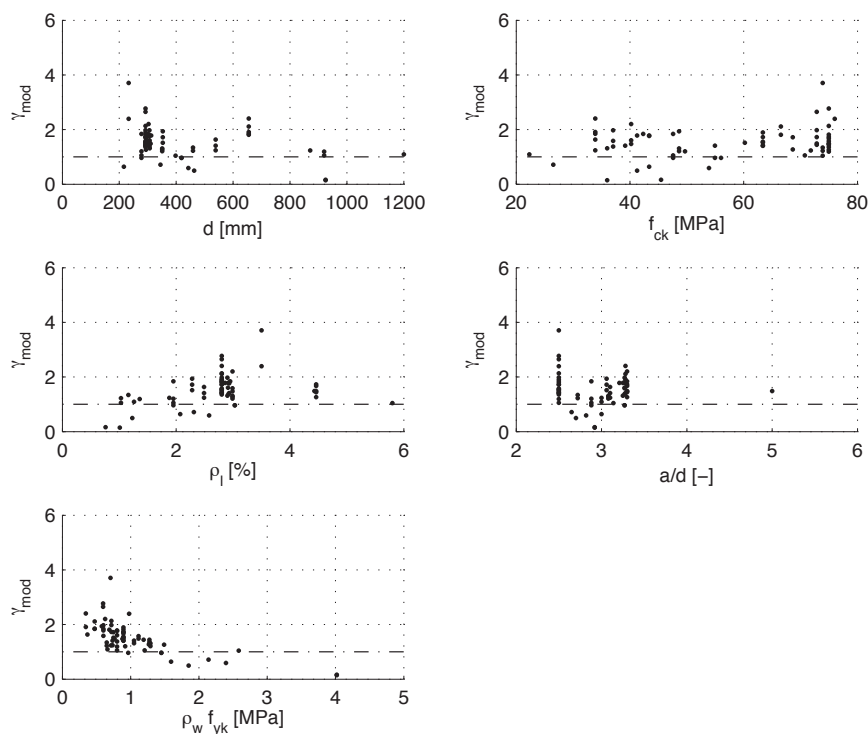
	<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
$\gamma_{mod,m}$	1.8311	1.3973	2.2554	2.1605
$\gamma_{mod,5\%}$	1.0147	0.8910	1.0688	1.0158
$\gamma_{mod,95\%}$	2.6475	1.9036	3.4419	3.3051
$\gamma_{mod,min}$	1.0414	0.6702	1.0346	0.9948
$\gamma_{mod,max}$	3.8696	2.4063	5.4109	5.1906
$c_v$	0.2710	0.2203	0.3198	0.3221
$s$	0.4963	0.3078	0.7213	0.6958

## 6.5 Med skjærarmering

I dette avsnittet vil resultatene fra evalueringen av standardene med skjærarmering bli presentert for hver standard før de oppsummeres mot hverandre i avsnitt 6.5.8. Tabellene i vedlegg B oppsummerer resultatene detaljert.

### 6.5.1 Korrupte forsøksresultater

Ved å plote  $\gamma_{mod}$  for de forskjellige standardene ble det observert at to resultater lå noe lavere enn det som så ut til å være vanlig. Figur 6.12 viser dette for Eurokode 2, helt til høyre der  $\gamma_{mod}$  er plottet mot  $\rho_w f_{yk}$ .



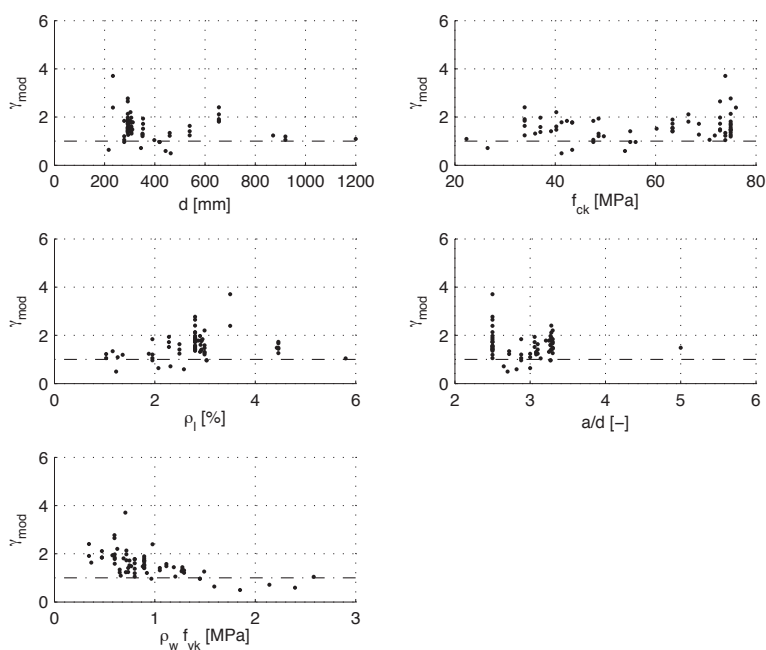
**Figur 6.12:**  $\gamma_{mod}$  for Eurokode 2 med skjærarmering, inkludert korrupte forsøksresultater

Begge resultatene kommer fra en forsøksserie med høy verdi av  $\rho_w f_{yk}$ . De to tilfellene ble analysert med Response-2000 og det viste seg at de var utført med så mye skjærarmering at bjelkene kollapset på grunn av bøyning. Begge tilfellene blir derfor utelukket i det følgende.

Med denne reduksjonen består databasen som benyttes videre av 67 forsøksresultater.

### 6.5.2 Eurokode 2

Skjærkraftkapasiteten for Eurokode 2 ble valgt som den minste av kapasitetene beregnet fra (5.7) og (5.8) begge innsatt for  $\alpha = 90^\circ$  og  $z = 0.9d$ . Vinkelen  $\theta$  ble funnet ved å sette de to uttrykkene lik hverandre og innføre øvre og nedre begrensning på den beregnede verdien. Vinkelen kan også finnes ved å enten sette skjærkraften ved kollaps lik skjærstrekkkapasiteten eller skjærtrykkkapasiteten. Det ble observert at skjærstrekkkapasiteten som regel var dimensjonerende og  $\nu_1$  ble derfor beregnet fra (2.13) ettersom spenningen i skjærarmeringen som regel så ut til å ligge over 80% av flytespenningen.



**Figur 6.13:**  $\gamma_{mod}$  for Eurokode 2 med skjærarmering

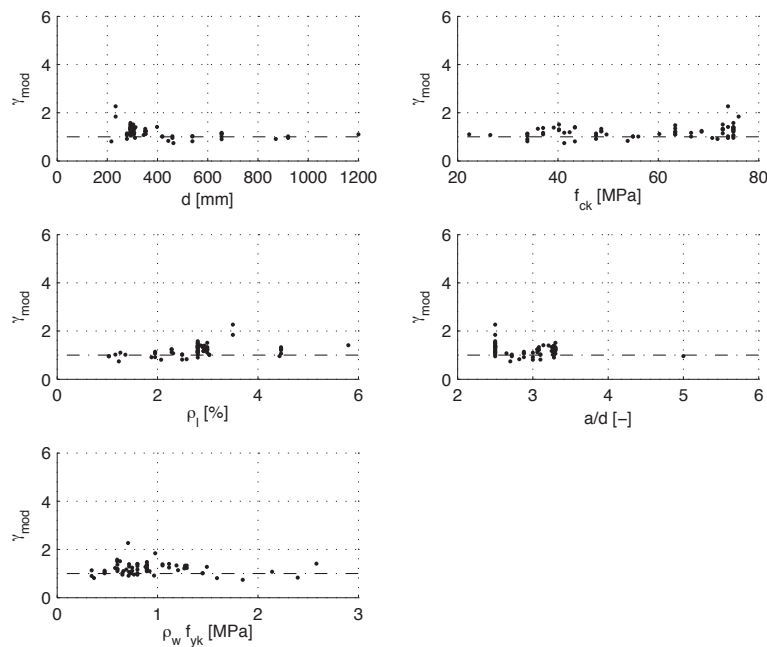
Figur 6.13 viser  $\gamma_{mod}$  for Eurokode 2 plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $\rho_w f_{yk}$ . Det kan sees at tendensen til positive og negative avvik stort sett bestemmes av  $\rho_w f_{yk}$ . For lave  $\rho_w f_{yk}$  er  $\gamma_{mod,max}$  og standardavviket høye, noe som fører til  $\gamma_{mod,5\%}$  i underkant av 1. For høye  $\rho_w f_{yk}$  er  $\gamma_{mod,min}$  lavere. Dette fører til  $\gamma_{mod,5\%}$  i nærheten av 0.6. For lave  $\rho_w f_{yk}$  kan det sees én positiv verdi som skiller seg i stor grad fra de andre, denne har kombinasjonen lav  $\rho_w f_{yk}$ , lav  $d$ , lav  $a/d$  og høy  $f_{ck}$ . 7 av forsøkene hadde  $\gamma_{mod} < 1.0$ .

### 6.5.3 NS 3473

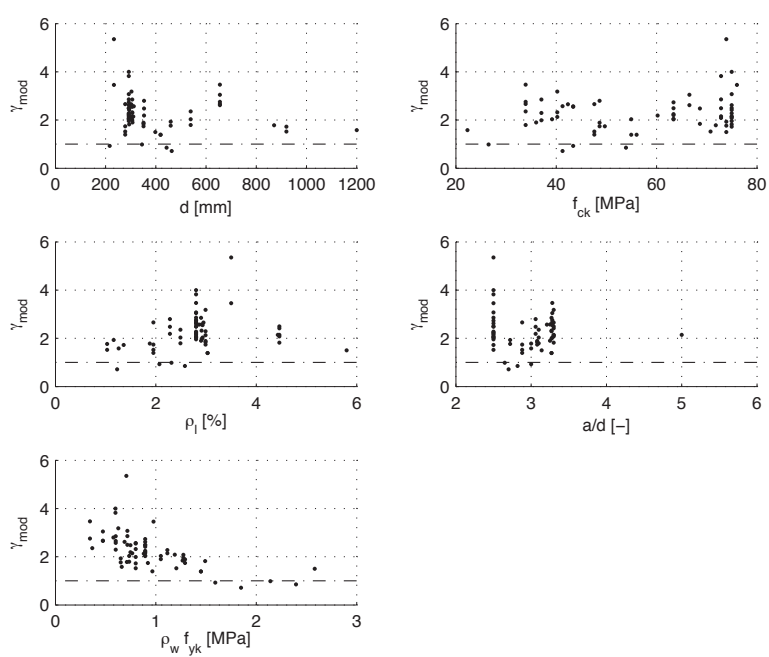
Skjærkraftkapasiteten for NS 3473 ble beregnet både med forenklet metode og fagverksmodellen. Med forenklet metode ble kapasiteten beregnet som den minste av (5.24) og summen av (5.25) og (5.22) med  $k_v = 1$ . Det ble antatt at  $z = 0.9d$ . Med fagverksmodellen ble vinkelen  $\theta$  funnet på samme måte som for Eurokode 2 og kapasiteten ble beregnet som den minste av (5.7) og (5.26). For å forenkle beregningen ble  $\theta$  begrenset nedad til  $30^\circ$ , jfr. avsnitt 2.3.1, slik at  $f_{c2d} = 0.6f_{cd}$ .

Figur 6.14 og 6.15 viser  $\gamma_{mod}$  for NS 3473 med henholdsvis forenklet metode og fagverksmetode plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $\rho_w f_{yk}$ . For den forenklede metoden kan det sees at resultatene ligger ganske godt samlet i alle intervallene. Negative avvik kommer av høy  $\rho_w f_{yk}$  og positive avvik kommer for kombinasjonen  $\rho_w f_{yk}$  i underkant av 1 og høy  $f_{ck}$ .

Fagverksmodellen følger samme trender som Eurokode 2, men ligger generelt høyere. De to metodene hadde henholdsvis 10 og 4 tilfeller med  $\gamma_{mod} < 1.0$ .



**Figur 6.14:**  $\gamma_{mod}$  for forenklet metode i NS 3473 med skjærarmering

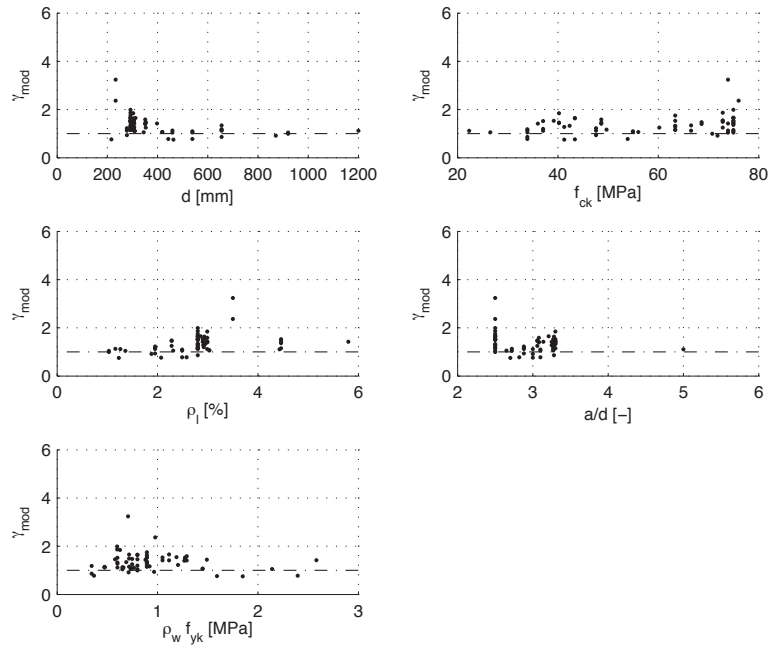


**Figur 6.15:**  $\gamma_{mod}$  for fagverksmodellen i NS 3473 med skjærarmering

### 6.5.4 CSA A23.3

Skjærkraftkapasiteten for CSA A23.3 ble beregnet fra (5.34). Bøyemomentet,  $\epsilon_x$  og  $\beta$  ble beregnet på samme måte som for evalueringen uten skjærarmering og  $s_{ze}$  ble satt til 300 mm. Vinkelen  $\theta$  ble beregnet fra (5.41).  $z = 0.9d$  ble antatt i alle beregningene.

Figur 6.16 viser  $\gamma_{mod}$  for CSA A23.3 plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $\rho_w f_{yk}$ . De positive avvikene ser ut til å komme av lav  $d$  og høy  $f_{ck}$ . Hvis disse tilfellene utelates ser det ut til at resten av resultatene er godt samlet. 8 av forsøkene hadde  $\gamma_{mod} < 1.0$ .



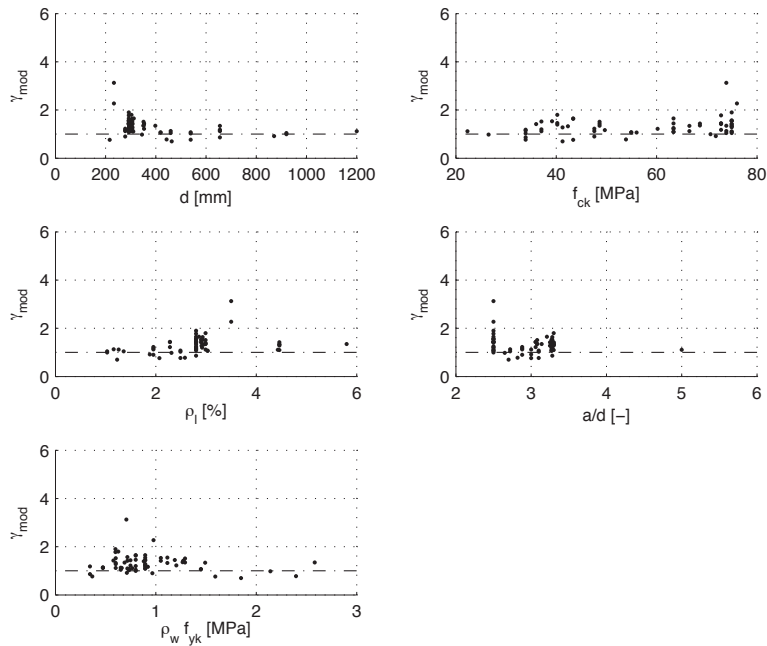
Figur 6.16:  $\gamma_{mod}$  for CSA A23.3 med skjærarmering



### 6.5.5 Model Code 2010

Skjærkraftkapasiteten for Model Code 2010 ble beregnet ved hjelp av Nivå III som den minste av (5.49) og summen av (5.47) og (5.48).  $z = 0.9d$  ble antatt i alle uttrykkene og bøyemomentet ble beregnet på samme måte som for evalueringen uten skjærarmering.

Figur 6.17 viser  $\gamma_{mod}$  for Model Code 2010 plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$ ,  $a/d$  og  $\rho_w f_{yk}$ . Model Code viser samme tendenser til avvik som CSA A23.3. 9 av forsøkene hadde  $\gamma_{mod} < 1.0$ .



**Figur 6.17:**  $\gamma_{mod}$  for Model Code 2010 med skjærarmering

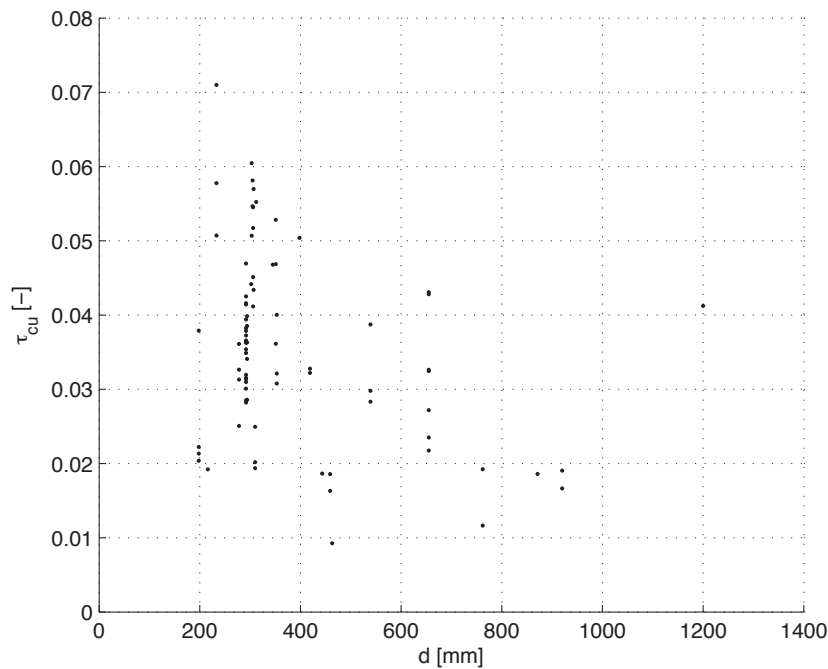
### 6.5.6 Skalaeffekten

Som beskrevet i avsnitt 3.7 antas det at skalaeffekten forsvinner så fort skjærarmeringen oppfyller minimumskravet. For å undersøke dette ble det gjort to ulike analyser av forsøksresultatene for bjelker med skjærarmering.

I den første analysen antas det at rissvinkelen er konstant med verdien  $\theta = 45^\circ$ , at skjærarmeringen er fullt utnyttet ved maksimal last og at skjærkapasiteten består av et betongbidrag og et armeringsbidrag på følgende form basert på uttrykkene i de fire standardene:

$$V_u = V_{cu} + V_{su} = V_{cu} + \rho_w f_{yk} b z \quad (6.8)$$

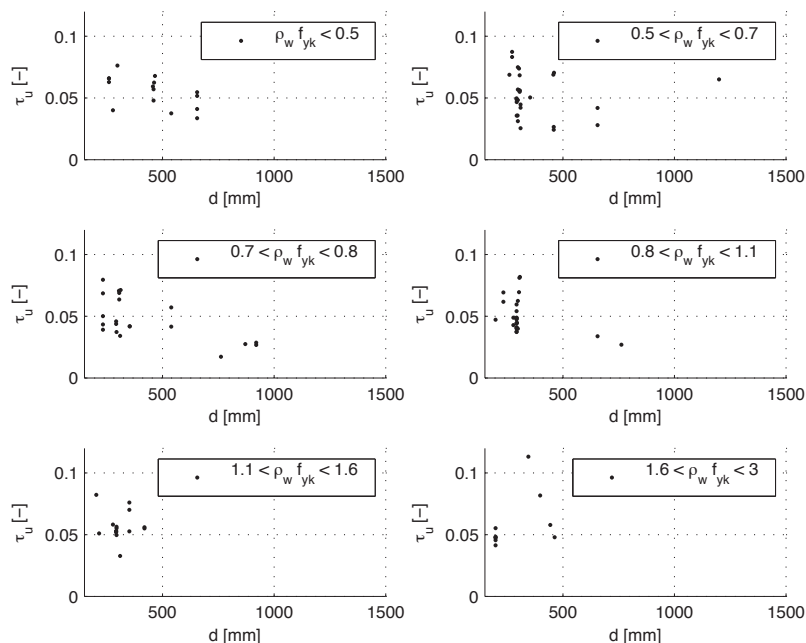
For hvert av forsøksresultatene ble betongbidraget  $V_{cu}$  beregnet fra (6.8), og den dimensjonsløse skjærspenningen  $\tau_{cu} = V_{cu}/(bdf_{1c})$  ble beregnet. Figur 6.18 viser  $\tau_{cu}$  plottet mot  $d$ . Figuren viser at det er stor spredning i resultatene. Noe av spredningen kan skyldes at dataene ikke er sortert med hensyn på de andre parameterne og at det er variasjon i for eksempel  $a/d$ -forholdet og lengdearmeringsmengden. Selv om analysen kan forbedres ved å sortere ut resultater for å oppnå en konstant midlere verdi av parameterne, viser figuren en tendens til at skalaeffekten fortsatt er til stede selv om bjelkene er utført med skjærarmering. Denne metoden er forenklet basert på metoden presentert av Yu & Bazant (2011).



**Figur 6.18:**  $\tau_{cu}$  for forsøksresultatene med skjærarmering uten armeringsbidraget

I den andre analysen ble ikke betong- og armeringsbidraget betraktet hver for seg, men forsøksresultatene ble sortert i intervaller med hensyn på den fordelte armeringsspenningen

$\rho_w f_{yk}$ . Intervallene er valgt med tanke på å oppnå liten effekt av ulike armeringsbidrag innenfor hvert intervall og at hvert intervall skulle inneholde nok verdier til å dekke relativt store intervaller for dybden.



**Figur 6.19:**  $\tau_u$  for forsøksresultatene med skjærarmering sortert for  $\rho_w f_{yk}$

Figur 6.19 viser den dimensjonsløse skjærspenningen  $\tau_u = V_u / (bdf_{1c})$  plottet mot dybden for seks intervaller av  $\rho_w f_{yk}$ . For de fire laveste intervallene kan det sees en tendens til at skalaeffekten fortsatt er til stede. De to høyeste intervallene dekker for lite intervall for  $d$  til at det kan sees noen tendens.

Hverken den første eller den andre analysen tar hensyn til andre viktige faktorer som  $a/d$ -forholdet, tilslagsstørrelsen og lengdearmeringen, men gir allikevel en indikasjon på at skalaeffekten fortsatt er til stede selv om bjelkene inneholder skjærarmering som minst oppfyller det laveste minimumskravet i de fire standardene.

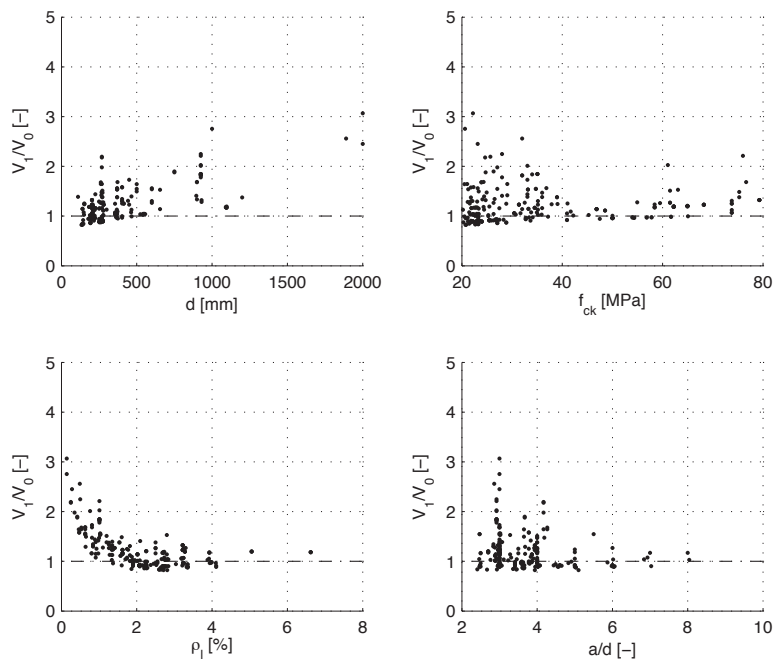
### 6.5.7 Effekten av minimum skjærarmering

Som beskrevet i avsnitt 3.9 skal minimumskravet til skjærarmering øke bjelkens duktilitet og hindre kollaps rett etter at det oppstår diagonale riss. Minimumsarmeringen angir også grensen for når en bjelke kan beregnes med eller uten skjærarmering. Ved å legge inn minimumsarmeringen forventes det at bjelken skal få høyere kapasitet. I dette avsnittet vil dette bli undersøkt ved å beregne kapasiteten for bjelkene i databasen uten skjærarmering,  $V_0$ , før minimumsarmeringen i henhold til hver standard blir lagt inn og kapasiteten med minimumsarmering,  $V_1$ , blir beregnet i hvert tilfelle. Det ble valgt å legge inn armeringsbøyler med  $f_{yk} = 500$  MPa.

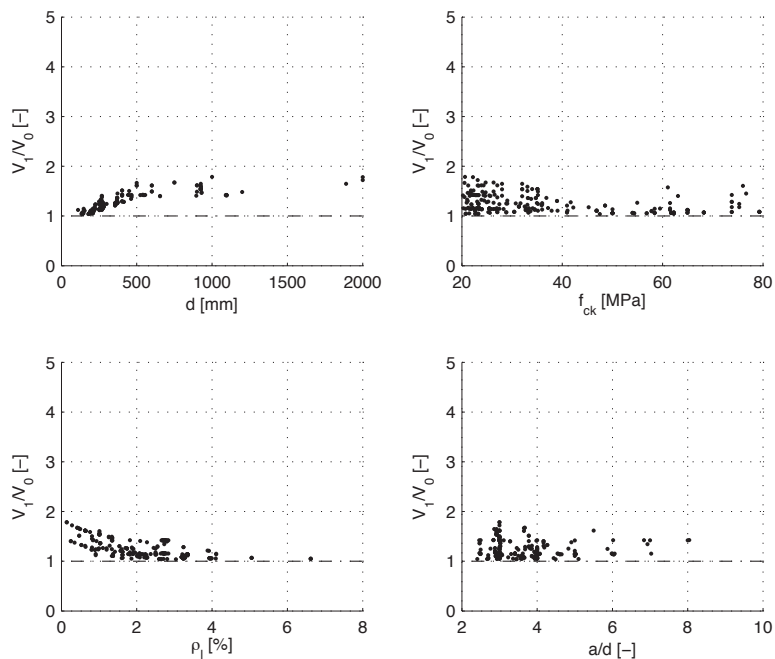
Forholdet mellom de to kapasitetene,  $V_1/V_0$ , forventes å være større enn 1.0 ettersom kapasiteten skal øke når det legges inn armering. Hvis  $V_1/V_0 < 1.0$  betyr det at det ikke oppnås noen gevinst ved å legge inn minimumsarmeringen og at kapasiteten i følge standarden feilaktig reduseres.

Minimumsarmeringen gitt av Eurokode 2 ble benyttet for NS 3473 der kun den forenklete metoden ble betraktet. For Model Code 2 ble minimumsarmeringskravet for nye konstruksjoner benyttet, og kun Nivå III ble betraktet. I utregningen av kapasiteten for bjelkene med minimumsarmering for CSA A23.3 og Model Code 2010 ble skjærkraften ved kollaps fra databasen uten skjærarmering brukt i utregningen av  $\epsilon_x$ .

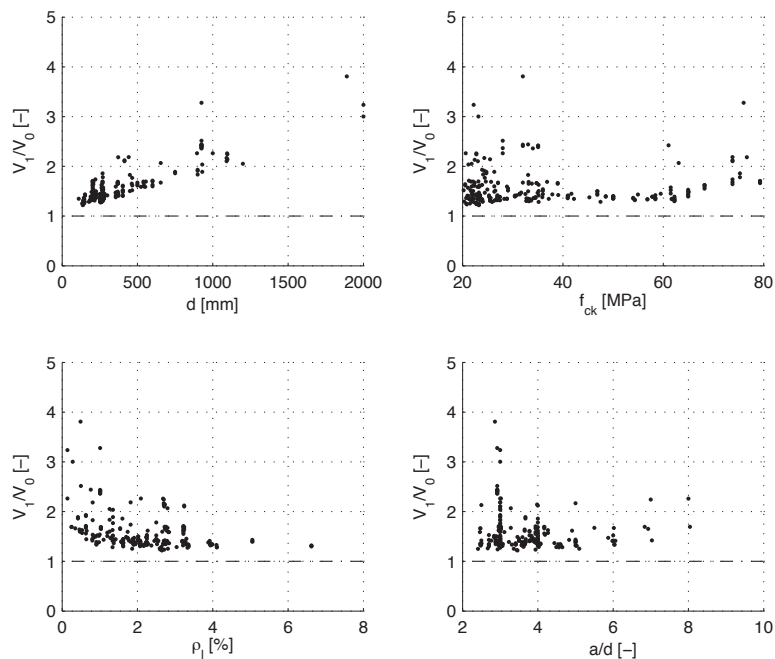
Figur 6.20, 6.21, 6.22 og 6.23 viser forholdet  $V_1/V_0$  for de fire standardene plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$  og  $a/d$ . Det observeres at 93 av bjelkene beregnet med Eurokode 2 har  $V_1/V_0 < 1.0$ . For de øvrige standardene er  $V_1/V_0 \geq 1.0$  i alle tilfellene. Figurene viser at resultatene følger samme trender som kan sees i tabellene i vedlegg B og det ser ut til at forholdet  $V_1/V_0$  hovedsaklig er avhengig av  $d$  og  $\rho_l$ .



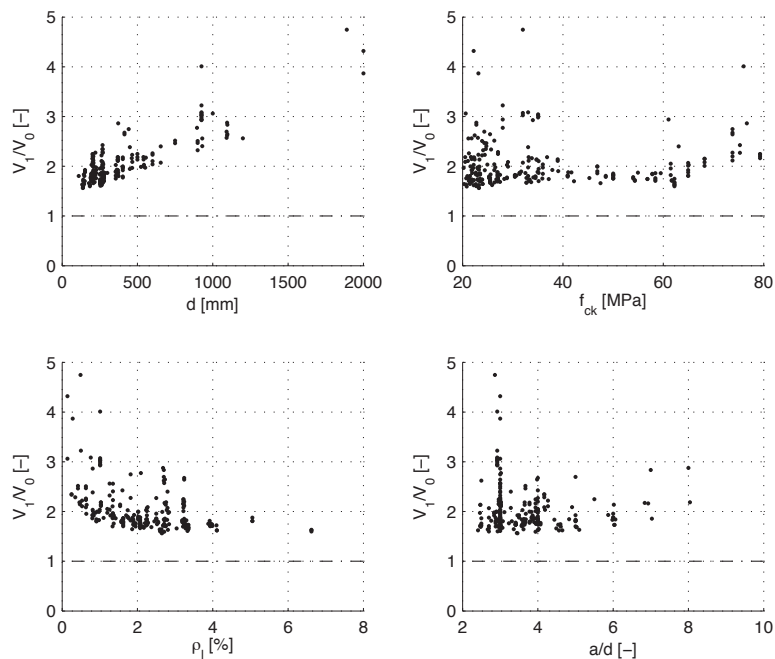
Figur 6.20: Effekten av minimum skjærarmering for Eurokode 2



Figur 6.21: Effekten av minimum skjærarmering for NS 3473

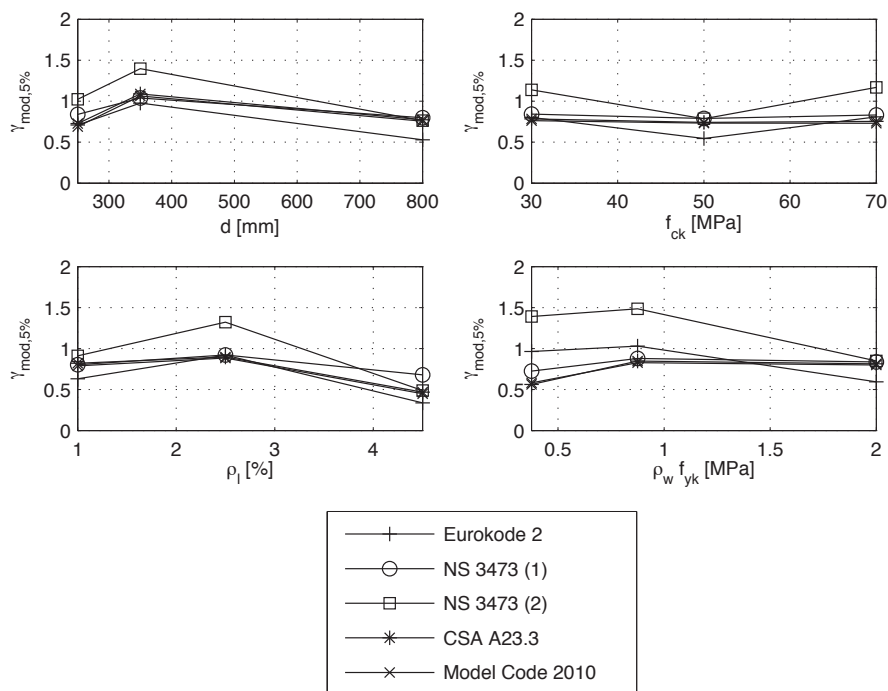


Figur 6.22: Effekten av minimum skjærarmering for CSA A23.3



Figur 6.23: Effekten av minimum skjærarmering for Model Code 2010

## 6.5.8 Oppsummering



Figur 6.24:  $\gamma_{mod,5\%}$  for standardene med skjærarmering

Figur 6.24 viser  $\gamma_{mod,5\%}$  plottet mot  $d$ ,  $f_{ck}$ ,  $\rho_l$  og  $\rho_w f_{yk}$  for de fire standardene. Sammenligningen mot  $a/d$  ble utelatt ettersom alle resultatene lå i intervallet  $2.5 < a/d < 3.5$ . Verdiene av  $\gamma_{mod,5\%}$  er hentet fra tabell B.6, B.7, B.8 og B.9. Tabell 6.4 viser de samlede resultatene uten å sortere i intervaller.

Fagverksmodellene med variabel helning kan sees å være nesten parallelle i alle sorteringene og at de har positive avvik spesielt for lave verdier av  $\rho_w f_{yk}$  og motsatt for høye verdier av  $\rho_w f_{yk}$ . Modellene med betongbidrag ser ut til å ha det mest konsistente sikkerhetsnivået med en tendens til negative avvik for lave verdier av  $\rho_w f_{yk}$ . Det skal også bemerkes at modellene med betongbidrag gir lavere variasjonskoeffisienter enn fagverksmodellene.

Den forenklete betraktningen av skalaeffekten viser at alle forsøksresultatene med skjærarmering har en tendens til lavere dimensjonsløs skjærspenning for økende tverrsnittshøyde.

Forenklet metode i NS 3473, CSA A23.3 og Model Code 2010 Nivå III beregner alle en økning av kapasiteten med minimum skjærarmering sammenlignet med tilsvarende bjelker uten skjærarmering. 37% av bjelkene beregnet med Eurokode 2 viste en redusert kapasitet med minimumsarmering. Det ble observert at økningen av kapasiteten var størst

for lave  $\rho_l$  og høye  $d$  ettersom disse parameterne henholdsvis virker positivt og negativt på kapasiteten uten skjærarmering.

Tabell 6.5 viser resultatene når materialfaktorene presentert i kapittel 2 inkluderes.

**Tabell 6.4:** Resultater for standardene med skjærarmering

	<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473(1)</b>	<b>NS 3473(2)</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
$\gamma_{mod,m}$	1.5630	1.2022	2.2552	1.3466	1.3064
$\gamma_{mod,5\%}$	0.7030	0.8050	1.0118	0.7139	0.7099
$\gamma_{mod,95\%}$	2.4231	1.5994	3.4987	1.9794	1.9029
$\gamma_{mod,min}$	0.4958	0.7390	0.7156	0.7543	0.6999
$\gamma_{mod,max}$	3.7080	2.2647	5.3521	3.2404	3.1263
$c_v$	0.3345	0.2008	0.3352	0.2856	0.2776
$s$	0.5228	0.2415	0.7559	0.3847	0.3626

**Tabell 6.5:** Resultater for standardene med skjærarmering inkludert materialfaktorer

	<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473(1)</b>	<b>NS 3473(2)</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
$\gamma_{mod,m}$	1.7996	1.6197	2.8191	1.8076	1.7054
$\gamma_{mod,5\%}$	0.8159	1.0777	1.2647	0.9427	0.9153
$\gamma_{mod,95\%}$	2.7833	2.1618	4.3734	2.6726	2.4954
$\gamma_{mod,min}$	0.5702	0.9656	0.8945	0.9532	0.8594
$\gamma_{mod,max}$	4.2642	3.0803	6.6901	4.4095	4.1305
$c_v$	0.3323	0.2034	0.3352	0.2909	0.2816
$s$	0.5980	0.3295	0.9449	0.5258	0.4803



## 6.6 Diskusjon av resultater

I dette avsnittet vil resultatene bli diskutert med hensyn på tilfellene uten og med skjærarmoring hver for seg. Årsaker til avvik vil bli kommentert og det vil bli gjort forsøk på å foreslå utbedringer.

### 6.6.1 Uten skjærarmoring

De fire standardene kan deles i to grupper: empirisk tilpasset og teoretisk basert. Eurokode 2 og NS 3473 er empirisk tilpasset til forsøk og CSA A23.3 og Model Code 2010 bygger begge på modifisert trykkfeltsteori. En interessant observasjon fra forrige avsnitt er at begge de to empirisk tilpassede metodene både har  $\gamma_{mod,m}$  nærmere 1.0 og lavere variasjonskoeffisienter enn de to teoretisk baserte modellene.

Ingen av metodene har klare tendenser til negative avvik, men de positive avvikene som observeres kan føre til at standardene sterkt underestimerer kapasiteten. Dette kan igjen føre til at det tilsynelatende er behov for skjærarmoring, noe som får både økonomiske og praktiske konsekvenser. Samtidig er de positive avvikene for CSA A23.3 og Model Code 2010 sterke argumenter for at den modifiserte trykkfeltsteorien, eller i hvert fall den forenklete versjonen som standardene bygger på, ikke er egnet i alle tilfeller.

For å undersøke bakgrunnen for de positive avvikene for Eurokode 2 ble det gjort noen modifikasjoner for å sjekke følsomheten av de ulike parameterne. Ved å utelate begrensningen av den innsatte verdien av  $f_{ck}$  og ta vekk den øvre begrensningen av skalafaktoren observeres det ikke noen tydelig forandring. Den øvre grensen for  $\rho_l$  ser derimot ut til å ha større betydning og det samme ser ut til å gjelde for faktoren  $k_2$  som tar hensyn til tilslagsstørrelsen. Ved å innføre begge disse endringene observeres en betydelig reduksjon av  $\gamma_{mod,max}$ , en noe lavere  $\gamma_{mod,min}$  og en lavere variasjonskoeffisient. Metoden har allikevel en tendens til positive avvik for lave  $a/d$ . Ved å innføre de to sistnevnte forandringene og samtidig utelate tilfellene der  $a/d \leq 3.0$  resulterer det i  $\gamma_{mod,m} = 1.00$ ,  $\gamma_{mod,5\%} = 0.75$ ,  $\gamma_{mod,max} = 1.42$  og  $c_v = 0.15$ .

Det skal bemerkes at en stor del av de utelatte elementene har lav  $d$ . Det vil si at det ikke nødvendigvis betyr at det er  $a/d$ -forholdet som er bestemmende, skalaeffekten kan også spille inn. En annen observasjon som skal bemerkes er at  $\gamma_{mod}$  for de utelatte verdiene varierer fra nærme 1.0 til over 2.0 og at de ikke ser ut til å ha noen direkte sammenheng med  $\rho_l$  og  $f_{ck}$ , jfr. figur 6.6. Variasjonen kan for eksempel skyldes uregelmessigheter i utførelsen av forsøkene eller at det finnes en sammenheng mellom parameterne som ikke kommer frem i formuleringen i standarden. En slik sammenheng mellom parametere kan for eksempel være at skalaeffekten ikke bare er avhengig av tverrsnittets høyde.

Virkingen av  $v_{min}$  ble også undersøkt. Det viser seg at den nedre grensen for skjærkapasiteten ikke ble begrenset av  $v_{min}$  i noen av tilfellene, hverken med uttrykket i standardens hoveddel eller i det nasjonale tillegget.

Etttersom den største variasjonen ble observert for  $100 \leq d \leq 200$  ble disse tilfellene gransket nærmere. Av disse var det tilfellene der  $2 \leq a/d \leq 3$  som ga størst variasjon. Ved å begrense utvalget ytterligere viste resultatene en tendens til positive avvik for økende  $\rho_l$  og avtakende  $d_g$ .

NS 3473 innfører i (5.22) en begrensning av bidraget fra lengdearmeringen som en funksjon av betongens strekkfasthet, jfr. avsnitt 5.2.1. I analysen ble det funnet at denne begrensningen ble gjeldende i omtrent 50% av tilfellene og at lav  $f_{ck}$  og høy  $\rho_l$  var bestemmende. En interessant observasjon fra dette er at standarden kobler to parametre sammen på en annen måte enn for eksempel Eurokode 2, og at dette ser ut til å føre til en lav variasjonskoeffisient. Det kan sees at variasjonskoeffisienten er høyere i intervallet  $2 < a/d < 3$  enn ellers. Dette kan komme av den store variasjonen i forsøksresultatene for lave  $a/d$ -forhold som kan sees i figur 6.1, eller variasjonen av de andre parameterne.

NS 3473 tar heller ikke direkte hensyn til  $a/d$ -forholdet, dette kan være grunnen til at den ser ut til å underestimere kapasiteten noe for lave  $a/d$ -forhold. Hvis tilfellene der  $2 \leq a/d \leq 3$  granskes nærmere observeres det at variasjonen ser ut til å være uavhengig av  $f_{ck}$  og  $d_g$ . Derimot ser det ut til at resultatene har en tendens til positive avvik for økende  $\rho_l$ .

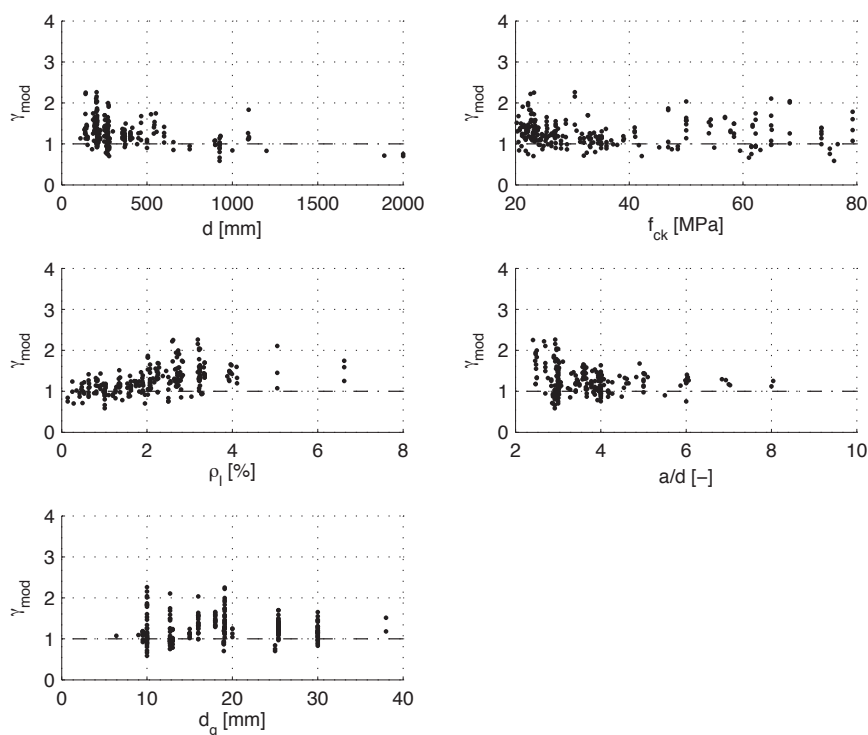
Jevnt over har NS 3473 en tendens til negative avvik, det kan komme av at standarden er kalibrert til konstruksjonsfastheter, noe som fører til at den overestimerer kapasiteten med karakteristiske fastheter. For å undersøke dette ble forsøksresultatene uten skjærarmring analysert med et gjennomsnittlig forhold mellom konstruksjonsfastheten og den karakteristiske sylindrefastheten,  $(f_{cn}/f_{cck})_m \approx 0.76$ . Det kan vises at dette forholdet stemmer godt for B45 som er en relativt vanlig fasthetsklasse. Resultatet av analysen er vist i figur 6.25. Som det går frem av figuren fører fasthetsreduksjonen til at verdiene fra figur 6.7 forskyves vertikalt slik at de beregnede kapasitetene ser ut til å stemme bedre med forsøksresultatene. Ved å forenklet innføre konstruksjonsfastheten resulterte analysen i  $\gamma_{mod,5\%} = 0.76$ .

De store avvikene som observeres for CSA A23.3 og Model Code 2010 er overraskende ettersom standardene bygger på en anerkjent teori og burde være mer nøyaktige. Som vist i avsnitt 4.4 antas det at evnen til å overføre skjærspenninger ved hjelp av aggregate interlock er bestemmende for skjærkapasiteten. Samtidig antas det at trykksonekapasiteten er høyere enn kapasiteten til den rissede andelen av tverrsnittet. Hvis dette sammenlignes med teorien beskrevet i avsnitt 3.5 neglisjeres dermed den økte kapasiteten som kan oppnås ved buevirkning for lave  $a/d$ -forhold. Dette kan bekreftes av resultatene som sier at CSA A23.3 og Model Code 2010 har en tendens til positive avvik for lave  $a/d$ -forhold.

CSA A23.3 angir at uttrykkene som er benyttet her kan benyttes i B-regioner. Med utbredelsen antatt i avsnitt 3.2 vil dette si at uttrykkene kan benyttes for bjelker med  $a/d \geq 2.0$ . Uttrykkene er altså i henhold til standarden gyldige i alle forsøkene.

Som beskrevet i avsnitt 3.4 antas det at rissenes ruhet, og dermed evnen til aggregate interlock, avtar for økende  $f_{ck}$  og mindre tilslagsstørrelse. Det er nettopp i disse ekstremtilfellene at standardene har en tendens til positive avvik. Dette kan tyde på at effekten av aggregate interlock overvurderes eller at reduksjonen i evne til aggregate interlock overestimeres. De store avvikene ser ut til å forekomme for  $100 \leq d \leq 250$ . Ved å granske disse tilfellene nærmere kommer det frem at CSA A23.3 har en tendens til positive avvik for  $d_g < 15$  og høye  $f_{ck}$ . Hvis  $d_g < 15$  utelukkes observeres det en svak trend til positive avvik for økende  $\rho_l$  og lave  $a/d$ -forhold.

Hvis  $\beta$  tilnærmes med (5.40) observeres det at CSA A23.3 har en tendens til positive avvik for økende  $\rho_l$ . Med (5.37), som også tar hensyn til lengdearmeringen via tøyings-



**Figur 6.25:**  $\gamma_{mod}$  for NS 3473 uten skjærarmoring, beregnet med konstruksjonsfastheter

bidraget, korrigeres resultatene og det kan tyde på at antakelsen om at  $\epsilon_x$  eller  $\epsilon_1$  er en skadeindikator er rett, jfr. avsnitt 4.4. Tøyningen bestemmes i én høyde som antas å kunne beskrive hele tverrsnittet. Dette fører til at det antas riss, hvor effekten av aggregate interlock virker, med konstant rissvinkel over høyden. Som beskrevet i avsnitt 3.3 er ikke rissvinkelen konstant over høyden, men avtar nærme trykksonen. Hvordan dette eventuelt påvirkes hvis rissvinkelen ikke antas konstant, men varieres med høyden kan ikke kommenteres uten å kjøre en analyse med modifisert trykkfeltsteori med flere elementer over høyden av tverrsnittet.

En slik analyse ble gjort for et utvalg av forsøksresultatene med  $a/d = 3.0$  med Response-2000. Analysene med Response-2000 viser en klart bedre tendens til å treffe forsøksresultatene og utvalget endte opp med  $\gamma_{mod,m} = 1.37$ ,  $\gamma_{mod,5\%} = 1.27$  og  $c_v = 0.04$ . Det samme utvalget beregnet med standardens uttrykk endte opp med  $\gamma_{mod,m} = 1.72$ ,  $\gamma_{mod,5\%} = 1.12$  og  $c_v = 0.21$ . Avviket mellom de to metodene skyldes sannsynligvis en mer nøyaktig beregning av rissvinkelen i programmet ettersom denne baserer seg på den komplette modifiserte trykkfeltsteorien uten forenklinger.

Som beskrevet i avsnitt 5.1 og 5.2 antas det i Eurokode 2 og NS 3473 at kollaps inntrer rett etter at de diagonale rissene oppstår. Dette skal stemme godt for omtrent  $a/d > 2$ , altså en Type II-bruddform, jfr. avsnitt 3.5. For lavere  $a/d$ -forhold vil den økte bukapasiteten føre til at bjelken kan fortsette å bære større laster etter at de diagona-

le rissene oppstår, altså en Type III-bruddform. Denne effekten er større for høyere  $\rho_l$  ettersom bukapasiteten da øker på grunn av ett sterkere strekkbånd i underkant. Dette kan være årsaken til at Eurokode 2 og NS 3473 underestimerer skjærkapasiteten for lave  $a/d$ -forhold, ettersom ingen av standardene direkte tar hensyn til  $a/d$ -forholdet, men er tilpasset *slanke* bjelker. Slanke bjelker vil kollapse rett etter at diagonale riss oppstår, jfr. avsnitt 3.5. Fra resultatene i denne oppgaven ser det ut til at grensen for slanke bjelker bør settes nærmere  $a/d = 3$ .

CSA A23.3 og Model Code 2010 vil ikke predikere kollaps rett etter opprissing, men tar heller ikke høyde for bukapasiteten i formuleringen. En full analyse med modifisert trykkfeltsteori uten å se bort fra spenningene i tverretningen og uten antakelsen om at plane tverrsnitt forblir plane skal kunne ta med innvirkningen av bukapasiteten, men ettersom hverken standardene eller Response-2000 har anledning til dette kan det ikke bekreftes her.

Ettersom avstanden mellom eventuelt fordelte lag med lengdearming ikke var spesifisert i databasen kan ikke effekten av dette tas hensyn til i beregningen av  $\beta$  og kapasiteten med CSA A23.3.

Hvis alle forsøkene også hadde blitt analysert med stavmodeller, ville dette ha gitt bukapasiteten. Skjærkapasiteten kan dermed bestemmes som den største av verdien beregnet her og verdien beregnet med stavmodell. Ved å gjøre dette og undersøke for hvilken kombinasjon av  $a/d$  og  $\rho_l$  bukapasiteten ville være bestemmende kan det argumenteres for en ny grense for slanke bjelker. Det kan eventuelt vise seg at grensen bør defineres som en kombinasjon av  $a/d$ -forholdet og  $\rho_l$  og ikke  $a/d$ -forholdet alene.

I figur 6.1 ser det heller ikke ut til at lavere  $d_g$  gir stor reduksjon av  $\tau_u$ . Dette er et argument for at reduksjonen av aggregate interlock overvurderes i CSA A23.3 og Model Code 2010.

Som det kommer frem i tabell 6.1 er alle standardene på usikker side når sikkerhetsnivået beskrives av  $\gamma_{mod,5\%}$ , det vil si at alle beregningsmodellene har usikkerhet knyttet til seg. For å undersøke hvor godt materialfaktorene tar høyde for usikkerheten i beregningsmodellene ble det gjennomført en analyse der materialfaktorene presentert i kapittel 2 ble inkludert. Resultatene er oppsummert i tabell 6.3. Her kan det sees at alle standardene bortsett fra NS 3473 er på sikker side når materialfaktorene inkluderes. Hvis konstruksjonsfastheten forenklet innføres for NS 3473 som beskrevet ovenfor resulterer det i  $\gamma_{mod,5\%} = 1.06$ , altså på sikker side med materialfaktorer inkludert.

Tabell 6.6 viser en oversikt over de viktige parameterne for skjærkraftkapasiteten og hvilke parametere som tas hensyn til av hver av standardene.

**Tabell 6.6:** Parametere som standardene tar hensyn til

	<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3/Model Code 2010</b>
<b>Strekfasthet</b>	Ikke direkte	Ja	Ikke direkte i formuleringen, men i utledningen
$\rho_l$	Ja	Ja	Ja
$a/d$	Nei	Nei	Ja, men kun for å finne bøyemomentet
<b>Skalaeffekt</b>	Ja	Ja	Ja
<b>Tilslagsstørrelse</b>	Ja	Nei	Ja
<b>Aksialkraft</b>	Ja	Ja	Ja

### 6.6.2 Med skjærarmering

Standardene som ble vurdert kan deles i to grupper: fagverksmodell med og uten betongbidrag. Forenklet metode i NS 3473 samt CSA A23.3 og Model Code 2010 har betongbidrag, mens Eurokode 2 og fagverksmodellen i NS 3473 ikke har betongbidrag. Alle metodene har i intervaller klare tendenser til positive avvik. Dette fører som tidligere nevnt til både økonomiske og praktiske konsekvenser, men har liten risiko knyttet til seg. Samtidig gir det en indikasjon på at metodene ikke er entydige og bygget på rasjonelle teorier som egner seg i alle tilfeller.

Den andre store forskjellen på metodene er hvordan vinkelen  $\theta$  beregnes. I evalueringen av Eurokode 2 og fagverksmodellen i NS 3473 ble det antatt at vinkelen  $\theta$  kunne bestemmes ved å sette skjærstrekkkapasiteten lik skjærtrykkkapasiteten. Dette ble valgt for å ta hensyn til både betongen og skjærarmeringen, da begge bidragene antas å ha innvirkning på rissvinkelen. Ved å bestemme  $\theta$  fra kun skjærstrekkkapasiteten og forsøksresultatet sikres det optimal utnyttelse av skjærarmeringen samtidig som prosedyren presentert i avsnitt 5.1.6 følges baklengs. Om utnyttelsen blir optimal eller ikke avhenger selvsagt av om den beregnede vinkelen faller innenfor det tillatte intervallet. Det observeres at de aller fleste tilfellene gir  $\cot \theta = 2.5$  uansett hvordan vinkelen beregnes, altså begrenset av øvre grense, eller med andre ord, nedre grense for  $\theta$ . For å undersøke konsekvensene av hvordan  $\theta$  beregnes, ble Eurokode 2 analysert med de to beregningsmetodene for  $\theta$  hver for seg og antallet tilfeller som havnet under øvre grense ble registrert. Ved å sette skjærstrekkkapasiteten lik skjærtrykkkapasiteten havnet ett tilfelle under øvre grense. Syv tilfeller havnet under ved å beregne  $\theta$  fra skjærstrekkkapasiteten.

Den mest signifikante forskjellen på de to beregningsmetodene for  $\theta$  er at  $\gamma_{mod,min} = 0.50$  når vinkelen bestemmes ved å sette skjærtrykkkapasiteten lik skjærstrekkkapasiteten og  $\gamma_{mod,min} = 1.00$  når vinkelen bestemmes fra skjærstrekkkapasiteten og forsøksresultatet. Ved å beregne  $\theta$  fra skjærstrekkkapasiteten bestemmer brukeren selv at modellen skal gi god utnyttelse av skjærarmeringen. Dette kan medføre at brukeren dimensjonerer for en *ufysisk* oppførsel og får resultater som er ønskelige selv om rissvinkelen i virkeligheten vil være en annen. Hvis  $\theta$  beregnes som gjort i analysen i avsnitt 6.5.2 antas det at resultatene blir mer *fysisk* riktige.

Med den forenklete metoden i NS 3473 settes  $\theta = 45^\circ$  uavhengig av sylindrefasthet og skjærarmering. Ved å gjøre dette antas det at de første diagonale rissene danner  $\theta = 45^\circ$  og at bjelken kollapser duktilt med konstant rissvinkel. Den laveste rissvinkelen som kan antas i Eurokode 2 er betydelig lavere enn  $45^\circ$ . Dette kan føre til at det ved lav vinkel og lav  $\rho_w f_{yk}$  delvis kompenseres for at betongbidraget utelates ved at flere armeringsenheter krysser risset og gir bidrag til kapasiteten. Ettersom det for fagverksmodellen i NS 3473 ble valgt å sette nedre grense til  $30^\circ$  for å forenkle utregningene observeres det av samme årsak høyere positive avvik for lave  $\rho_w f_{yk}$  for fagverksmodellen i NS 3473 enn for Eurokode 2. Fra disse antakelsene kan det se ut til at de positive avvikene for Eurokode 2 og fagverksmodellen i NS 3473 kommer av at betongbidraget utelates.

Hvis det antas at betongbidraget følger samme tendenser som i figur 6.1 kan det sees at fagverksmodellene uten betongbidrag har store positive avvik i de områdene der  $\tau_u$  er stor; lave  $d$  og høye  $\rho_l$ .

Model Code 2010 og CSA A23.3 beregner rissvinkelen fra tøyningen i lengdearmingen som igjen er en funksjon av de opptredende snittkreftene. Begge disse standardene har lavere positive avvik enn Eurokode 2 og fagverksmodellen i NS 3473. Dette kommer sannsynligvis som en kombinasjon av at standardene tar med betongbidraget og at vinkelen beregnes ulikt. For å undersøke hvordan beregningen av vinkelen påvirker fagverksmodellen med variabel helning ble det også gjort en vurdering av Nivå II i Model Code 2010 som er en fagverksmodell uten betongbidrag der vinkelen beregnes fra de opptredende snittkreftene, men på en annen måte som gir lavere rissvinkel enn i Nivå III. Det observeres at Nivå II beregner  $\theta$  mellom  $27^\circ$  og  $34^\circ$  og dermed har en tendens til positive avvik på størrelse med, men høyere enn, fagverksmodellen i NS 3473.

CSA A23.3 og Nivå III i Model Code 2010 beregner rissvinkelen til å være i intervallet  $33^\circ \leq \theta \leq 39^\circ$ , altså høyere enn for fagverksmodellene. Høyere rissvinkel kombinert med betongbidrag, der rissvinkelen og betongbidraget bidrar i hver sin retning på avviket, gir som forventet lavere positivt avvik enn Eurokode 2. De to forsøksresultatene som ga høyest positivt avvik beregnet med CSA A23.3 og Model Code 2010 ble analysert med Response-2000 for å kontrollere resultatene. Begge tilfellene var bjelker med lavt relativt lav  $\rho_w f_{yk}$  og  $d$  og høy  $\rho_l$  og  $f_{ck}$ , altså tilfeller der betongbidraget sannsynligvis ville påvirke kapasiteten i stor grad. Analysen med Response-2000 ga resultater som viste  $\theta \approx 45^\circ$  og  $\gamma_{mod}$  i nærheten av det som ble beregnet med den forenklete metoden i NS 3473. Det skal ikke sees bort fra at de fortsatt positive avvikene også kan ha en sammenheng med lavt  $a/d$ -forhold og høy  $\rho_l$  på samme måte som det ble antatt i avsnitt 6.6.1.

Alle standardene ser bort fra skalaeffekten når det innføres skjærarmring. Ved å gjøre  $\theta$  og  $\beta$  i CSA A23.3 avhengig av  $s_{ze} = 0.85z$  via (4.39) og (5.37) observeres det lavere spredning i resultatene. Denne endringen fører til at betongbidraget blir større for lave tverrsnitt og at armeringsbidraget blir mindre for høye tverrsnitt. Resultatet av analysen av alle forsøksresultatene med denne endringen ble  $\gamma_{mod,m} = 1.33$ ,  $\gamma_{mod,5\%} = 0.78$ ,  $c_v = 0.25$ ,  $\gamma_{mod,min} = 0.70$  og  $\gamma_{mod,max} = 2.98$ . Etttersom databasen ikke inkluderte tilslagsstørrelsen kunne ikke denne bli tatt med i betraktningen.  $\gamma_{mod,min}$  ble redusert noe, men lavere  $c_v$ , høyere  $\gamma_{mod,5\%}$  og bare 6 tilfeller med  $\gamma_{mod} < 1.0$  viser at tiltaket førte til en forbedring.

Skalaeffekten ble også forsøkt innført for den forenklete metoden i NS 3473 med skjærarmring. Dette ble gjort ved å beregne  $k_v$  på samme måte som i tilfellene uten skjærarmring. Resultatene viser betydelig lavere positive avvik og lavere spredning uttrykt ved  $\gamma_{mod,m} = 1.09$ ,  $\gamma_{mod,5\%} = 0.79$ ,  $c_v = 0.17$ ,  $\gamma_{mod,min} = 0.71$  og  $\gamma_{mod,max} = 1.88$ . Endringen førte også til 20 tilfeller med  $\gamma_{mod} < 1.0$ . Dette kommer igjen av at uttrykket for betongbidraget er tilpasset til konstruksjonsfastheter.

Av viktige parametere tar alle standardene med skjærarmeringsmengden og flytespenningen i beregningene, men det er kun den forenklete metoden i NS 3473 samt CSA A23.3 og Model Code 2010 som tar med betongbidraget og dermed de øvrige parameterne som er viktige for skjærkapasiteten. Ingen av standardene tar hensyn til  $a/d$ -forholdet med unntak av i beregningen av  $\epsilon_x$  i CSA A23.3 og Model Code 2010.

Den forenklete betraktningen av skalaeffekten for bjelker med skjærarmring viser tendenser til at effekten fortsatt er til stede. For å kunne isolere skaleffekten er det viktig at de andre parameterne har tilnærmet konstant middelvei i alle intervallene der det

sorteres for tverrsnittshøyden. En slik sortering var ikke mulig med MatLab-skriptet som ble utviklet i forbindelse med denne rapporten, men det henvises til arbeidet gjort av Yu & Bazant (2011) der det vises at skalaeffekten er betydelig for bjelker med skjærarmering.

Som beskrevet i avsnitt 6.5.7 ser effekten av minimum skjærarmering ut til hovedsaklig å være avhengig av  $d$  og  $\rho_l$ . Kapasitetsuttrykkene presentert i kapittel 5 viser at lengdearmeringen gir bidrag i uttrykkene for betongbidraget. Dette fører til at nevneren i forholdet  $V_1/V_0$  øker med hensyn på  $\rho_l$ , mens telleren relativt øker mindre når betongbidraget adderes til skjærarmeringsbidraget og ikke øker for fagverksmodellen i Eurokode 2 der skjærarmeringen antas å bære all skjærkraften. Samtidig påvirkes ikke den beregnede kapasiteten med skjærarmering av skalaeffekten, dette fører til at forholdet  $V_1/V_0$  har en økende tendens med hensyn på  $d$ .

Fra tabell B.9 kan det sees at Eurokode 2 har størst tendens til positive avvik for lave  $\rho_w f_{yk}$  uttrykt med  $\gamma_{mod,m}$ . NS 3473 har den laveste tendensen. Dette gjenspeiles i figur 6.20, 6.21, 6.22 og 6.23 der Eurokode 2 estimerer at 37% av tilfellene får lavere kapasitet ved å innføre minimumsarmeringen. Det bemerkes at CSA A23.3 beskriver kapasitetsøkningen bedre enn Eurokode 2 selv om minimumsarmeringen i CSA A23.3 er 60% av minimumsarmering i Eurokode 2. Denne fremstillingen viser at Eurokode 2 gir mindre kostnadseffektiv dimensjonering enn de øvrige standardene.

I tabell 6.4 er alle standardene bortsett fra fagverksmodellen i NS 3473 på usikker side når sikkerhetsnivået beskrives av  $\gamma_{mod,5\%}$ . På samme måte som for bjelkene uten skjærarmering ble det gjennomført en analyse der materialfaktorene fra kapittel 2 ble inkludert. Resultatene fra denne analysen er presentert i tabell 6.5. I tabellen er det tydelig at det kun er NS 3473 som er på sikker side når materialfaktorene inkluderes. Som vist i figur 6.13, 6.16 og 6.17 skyldes usikkerheten at standardene har en tendens til å overestimere kapasiteten for bjelker med høy andel av skjærarmering og relativt høye variasjonskoeffisienter som følge av at spesielt ett forsøksresultat underestimeres. Som vist i tabell 6.4 og 6.5 har CSA A23.3 og forenklet metode i NS 3473 de høyeste verdiene for  $\gamma_{mod,min}$ . For NS 3473 kan dette komme som følge av at vinkelen settes til  $45^\circ$ , men for CSA A23.3 skyldes det sannsynligvis heller at armeringens flytespenning ikke settes inn med høyere verdi enn 500 MPa. Det kan derfor antas at bjelker med høye fordelte armeringsspenninger,  $\rho_w f_{yk}$ , ikke når flytespenningen i skjærarmeringen ved kollaps, og at dermed kapasiteten overestimeres.

Hvis konstruksjonsfastheten forenklet innføres i NS 3473 som beskrevet i avsnitt 6.6.1 resulterer det i  $\gamma_{mod,5\%} = 0.97$  og  $\gamma_{mod,5\%} = 1.29$  for forenklet metode med og uten materialfaktorer, og  $\gamma_{mod,5\%} = 1.01$  og  $\gamma_{mod,5\%} = 1.26$  for fagverksmodellen med og uten materialfaktorer. Altså nesten på sikker side til og med uten materialfaktorer for forenklet metode.



## 7 Konklusjoner

I dette kapitlet vil det trekkes konklusjoner fra resultatene presentert i kapittel 6.

De lave verdiene av  $\gamma_{mod}$  for den forenklete metoden i NS 3473 kan tyde på at kapasitetsuttrykkene for betongbidraget er tilpasset til de reduserte konstruksjonsfasthetene. Dette er vist i avsnitt 6.6.1. Dette fører til at standarden ikke egner seg godt til sammenligning med de øvrige standardene. Det ble observert at den forenklete metoden i NS 3473 totalt hadde de laveste variasjonskoeffisientene. Dette tyder på at standarden har det mest konsistente sikkerhetsnivået av de fire som ble vurdert. Ut fra den forenklete innføringen av konstruksjonsfastheten så det allikevel ut til at standarden hadde det høyeste sikkerhetsnivået og selv med karakteristiske fastheter var metodene i NS 3473 de eneste som oppnådde  $\gamma_{mod,5\%} > 1.0$  da materialfaktorene ble inkludert.

Med bakgrunn i at analysene er utført med karakteristiske sylindrefastheter er det valgt å ikke trekke flere konklusjoner fra analysen av NS 3473. Eurokode 2, CSA A23.3 og Model Code 2010 er derfor de eneste standardene som behandles videre.

### 7.1 Uten skjærarmering

For de tre andre standardene som ble vurdert viser analysene at de underestimerer kapasiteten til bjelker uten skjærarmering som følge av to årsaker:

#### **Buevirkning:**

De største tendensene til å underestimere kapasiteten ble observert i tilfeller med lave  $a/d$ -forhold. Denne tendensen var større for økende lengdearmeringsforhold. Dette stemmer godt med teorien om hvordan skjærkraftkapasiteten avhenger av disse parameterne og kapasitetsuttrykkene bør derfor ta dette med i betraktningen. De aller fleste underarmerte betongbjelker vil ikke påvirkes av dette. For konstruksjoner med større armeringsbehov derimot, for eksempel innen offshore der strenge krav til risviddebegrensning fører til høye armeringsmengder, vil standardene underestimere kapasiteten, noe som kan få både praktiske og økonomiske konsekvenser.

#### **Tilslagsstørrelse:**

Eurokode 2, CSA A23.3 og Model Code 2010 angir at skjærkraftkapasiteten reduseres hvis tilslagsstørrelsen reduseres eller sylindrefastheten økes slik at de diagonale rissene splitter tilslagskornene i stedet for å gå rundt dem. Begge årsakene til reduksjon begrunnes med at rissoverflatene får lavere ruhet og at effekten av aggregate interlock blir mindre. Analysene viste at spesielt CSA A23.3 og Model Code 2010 underestimerer kapasiteten for lave tilslagsstørrelser og høye sylindrefastheter. Dette kan bety at effekten av aggregate interlock overvurderes i standardene som tar hensyn til tilslagsstørrelsen. Det anbefales derfor at uttrykkene som korrigerer for tilslagsstørrelsen justeres, jfr.  $s_{ze}$  i (5.38) og  $k_{dg}$  i (5.59).

De høye variasjonskoeffisientene som observeres med CSA A23.3 og Model Code 2010 ser ut til å ha sammenheng med forenklingen av den modifiserte trykkfeltsteorien ettersom

analysene med Response-2000 viste seg å ligge nærmere forsøksresultatene. Spesielt ser det ut til at å beregne  $\epsilon_x$  i kun ett punkt gir opphav til usikkerhet.

Totalt beregnet CSA A23.3 og Model Code 2010 lavere kapasitet enn Eurokode 2, men på grunn av høyere variasjonskoeffisienter har CSA A23.3, Model Code 2010 og Eurokode 2 omtrent samme sikkerhetsnivå uttrykt ved  $\gamma_{mod,5\%} \approx 0.7$ . Analysene viste også at Eurokode 2 overestimerte kapasiteten i 23% av tilfellene mot 11% og 12% for CSA A23.3 og Model Code 2010.

Ved å inkludere materialfaktorene for betong og stål oppnådde alle tre standardene  $\gamma_{mod,5\%} > 1.0$ . Materialfaktorene tar altså høyde for usikkerheten i beregningsmodellene for bjelker uten skjærarmering.

## 7.2 Med skjærarmering

I analysen av Eurokode 2 ble det vist at standarden underestimerer skjærkraftkapasiteten i de tilfellene der bjelkens egenskaper vil føre til høyt betongbidrag. Det vil si for lave  $d$ , høye  $\rho_l$  og lave  $\rho_w f_{yk}$ . Det antas at årsaken til at standarden underestimerer er at betongbidraget utelates i fagverksmodellen med variabel helning. Den nedre tillatte grensen for  $\theta$  kompenserer noe for dette, men fører også til at vinkelen som antas i dimensjoneringen ikke stemmer med den fysiske rissvinkelen som kan observeres i bjelken ved brudd. Rissvinkelen i Eurokode 2 kan ikke sees på som den fysiske vinkelen, men som en parameter som kompenserer for at betongbidraget ikke inkluderes for lave  $\rho_w f_{yk}$ . For bjelker med høy fordelt armeringsspenning  $\rho_w f_{yk}$  fører den nedre grensen for  $\theta$  til at Eurokode 2 overestimerer kapasiteten. Hvis den nedre grensen økes vil det hindre modellen i å overestimere kapasiteten for høy  $\rho_w f_{yk}$ , men det vil føre til at bjelker med lav  $\rho_w f_{yk}$  beregnes med alt for lav kapasitet.

CSA A23.3 og Model Code 2010 beregner høyere verdier for  $\theta$  som stemmer bedre med virkeligheten. Dette fører til at armeringsbidraget blir lavere, men ettersom standardene også har med et betongbidrag på grunn av aggregate interlock har de en lavere tendens til å underestimere kapasiteten enn Eurokode 2. Den mer fysiske rissvinkelen fører også til at standardene ikke har en like klar tendens som Eurokode 2 til å overestimere for høye  $\rho_w f_{yk}$ .

Sikkerhetsnivået uttrykt med  $\gamma_{mod,5\%} \approx 0.7$  er omtrent det samme i de tre standardene. For Eurokode 2, CSA A23.3 og Model Code 2010 ble det observert henholdsvis 7, 8 og 9 tilfeller med  $\gamma_{mod} < 1.0$ . Den mest signifikante forskjellen med tanke på risiko er  $\gamma_{mod,min} = 0.50$  for Eurokode 2,  $\gamma_{mod,min} = 0.75$  for CSA A23.3 og  $\gamma_{mod,min} = 0.70$  for Model Code 2010. Eurokode 2 har altså en betydelig større tendens til å overestimere kapasiteten for bjelker med høy  $\rho_w f_{yk}$ .

Ved å innføre materialfaktorene for betong og stål oppnådde ingen av disse standardene  $\gamma_{mod,5\%} > 1.0$ , og lå altså fortsatt på usikker side. Det antas at dette skyldes at bjelker med høye  $\rho_w f_{yk}$  ikke oppnår flytespenning i skjærarmeringen og at derfor beregningsmodellene overestimerer kapasiteten. Antakelsen ser ut til å kunne bekreftes av resultatene fra CSA A23.3, der den innsatte flytespenningen begrenses til 500 MPa, ettersom de laveste  $\gamma_{mod}$  for CSA A23.3 ligger høyere enn for de andre standardene.

Den forenklete analysen av skalaeffekten for bjelker med skjærarmering viste tendenser

til at effekten fortsatt var til stede. Dette bekreftes av CSA A23.3 der det ble forsøkt å innføre skalaeffekten i tilfellene med skjærarmering. Ved å ta hensyn til skalaeffekten ble sikkerhetsnivået uttrykt med  $\gamma_{mod,5\%} = 0.79$  høyere, samtidig som kun 6 bjelker fikk  $\gamma_{mod} < 1.0$ . Skalaeffekten ser derfor ut til å spille en rolle for bjelker med skjærarmering.

Eurokode 2 viste seg å gi dårlig effekt av å innføre minimum skjærarmering da hele 37% av tilfellene fikk redusert kapasitet med armering. De øvrige standardene beregnet en betydelig økning av kapasiteten. Analysen av effekten av minimumsarmeringen viste den store betydningen som betongbidraget har på kapasiteten med skjærarmering.

### 7.3 Samlet vurdering

Når materialfaktorene inkluderes gir skjærkraftkapasiteten beregnet med Eurokode 2 et tilfredsstillende sikkerhetsnivå for bjelker uten skjærarmering, men lavt sikkerhetsnivå for bjelker med skjærarmering og en begrenset fysisk forståelse av problemet. CSA A23.3 og Model Code 2010 tilbyr derimot et formelverk for å beregne skjærkraftkapasitet der brukeren får innsikt i den bakenforliggende teorien og kan se den fysiske konsekvensen av å modifisere parametere, og der resultatet av dimensjoneringen blir mer økonomisk enn med Eurokode 2. Hvis modellene justeres for følsomheten for skalaeffekt og tilslagsstørrelse er det vist tendenser til at sikkerhetsnivået kan øke.

Det anbefales en inndeling som vist i Model Code 2010 der brukeren selv kan velge sikkerhetsnivået som skal benyttes ut fra konstruksjonens kompleksitet og tidsbruken som er til rådighet. Brukeren må uansett være klar over begrensningene beskrevet ovenfor.



## 8 Forslag til videre arbeid

Med denne oppgaven som grunnlag kan det utføres videre arbeid med å vurdere metoder for beregning av skjærkapasiteten til bjelker.

I avsnitt 6.6.2 ble det påpekt at de ulike fagverksmetodene beregnet rissvinkelen forskjellig og at den beregnede rissvinkelen i større eller mindre grad kunne tolkes som den fysiske rissvinkelen. Det kan være interessant å gjøre forsøk på bjelker med og uten skjærarmoring og undersøke hvordan den fysiske rissvinkelen påvirkes av bjelkens egenskaper.

Det har blitt antatt at en av grunnene til at standardene overestimerer kapasiteten for bjelker med høye verdier for  $\rho_w f_{yk}$  er at de ikke oppnår flytespenning i skjærarmoringen før kollaps. Det kan derfor være interessant å undersøke hvor høy spenning slike tungt armerte bjelker oppnår og om det kan settes noen øvre grense for hvor stor verdi av  $\rho_w f_{yk}$  som kan benyttes i beregningsmodellene.

Hvordan aksialkraften påvirker skjærkapasiteten ble forenklet beskrevet i avsnitt 3.8. De ulike standardene har forskjellige metoder for å ta hensyn til virkningen av aksialkraft som det kan være interessant å gjøre en sammenligning av.

Modifisert trykkfeltsteori ble beskrevet i avsnitt 4.4 og det ble presentert en iterativ metode for beregning av skallelementer med krefter i planet. For å oppnå bedre forståelse av modifisert trykkfeltsteori kan det være interessant å utvikle et eget dataprogram for beregning av betongskall. Hvis det utvikles en robust algoritme som beregner skallelementer kan denne utvides til å behandle bjelker sammensatt av flere skallelementer langs lengden og over høyden. En full analyse som beskrevet i avsnitt 4.4 kan brukes i både B- og D-regioner.

I avsnitt 6.6.1 og 6.6.2 og kapittel 7 ble det påpekt at de fire standardene hadde en tendens til å underestimere skjærkapasiteten for lave  $a/d$ -forhold og store lengdearmemengder. For å undersøke dette nærmere kan dimensjonering med stavmodeller også inkluderes i analysen. Ved å gjøre dette kan antakelsen om når en bjelke kan betraktes som slank vurderes nærmere.

Skalaeffekten for bjelker med skjærarmoring ble analysert i avsnitt 6.5.6. Det ble påpekt at den observerte tendensen til redusert dimensjonsløs skjærspenning ved økende dybde kan skyldes variasjon i de andre parameterne som påvirker kapasiteten. Ved å videreutvikle MatLab-skriptet som ble utviklet i dette arbeidet kan det gjøres en sortering som sørger for at de øvrige parameterne har konstant middelvei i intervallene der det sorteres for dybden. Det henvises til arbeidet gjort av Yu & Bazant (2011).

I kapittel 6.6.1 ble det påpekt at metodene basert på den forenklede modifiserte trykkfeltsteorien hadde en tendens til å underestimere kapasiteten for konstruksjonsdeler med liten tilslagsstørrelse. For å undersøke dette nærmere kan det gjøres et studie av faktorene som korrigerer for tilslagsstørrelsen, jfr.  $s_{ze}$  gitt av (5.38) og  $k_{dg}$  gitt av (5.59).

Alle metodene presentert i denne oppgaven antar at skjærkapasiteten kan beregnes ut fra en kritisk skjærspenning. Det oppfordres til å inkludere alternative metoder i fremtidige studier. Det vises til arbeidet gjort av Kotsovovs & Pavlovic (1999).

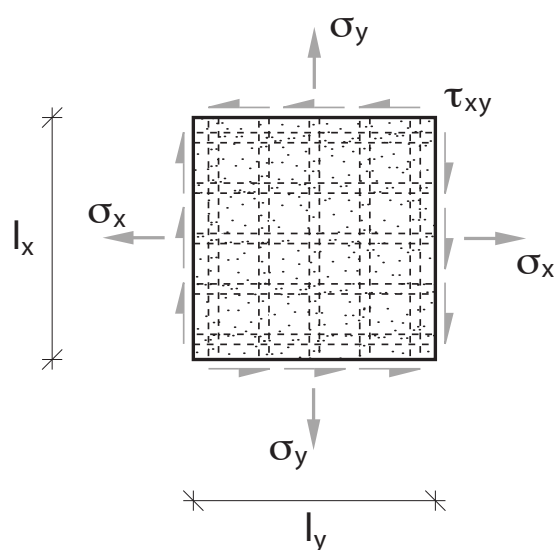


# Vedlegg

## Vedlegg A Betraktning av betongelement

Dette vedlegget vil ta for seg likevekt og tøyningsskompatibilitet for et betongelement, og spenningstilstanden i diagonale riss i et betongelement. Utledningene er basert på arbeidet gjort av Vecchio & Collins (1986).

### A.1 Likevekt



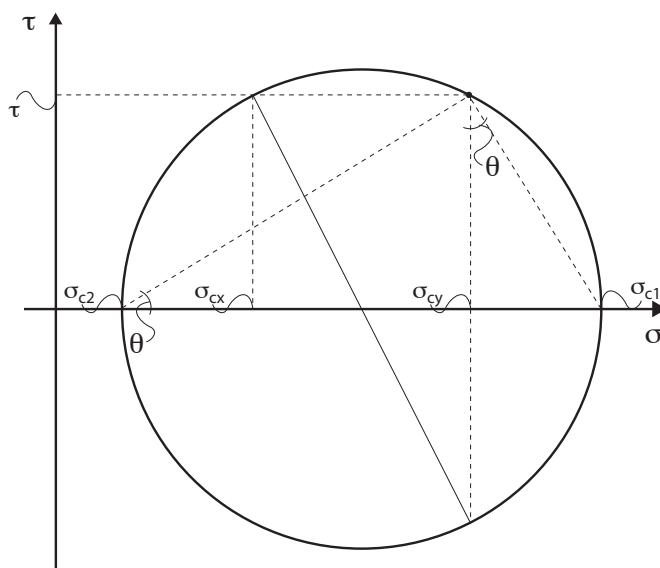
**Figur A.1:** Ortogonalt armert betongelement belastet i planet (Vecchio & Collins 1986, etter Fig. 4)

Figur A.1 viser et betongelement med tykkelse  $b$  og *ortogonal* armering. Elementet er belastet med en skjærspenning og normalspenninger i x- og y-retningen. Ved å snitte elementet langs x- og y-aksen og samtidig anta at armeringens dybeleffekt kan neglisjeres vil de følgende ligningene beskrive likevekten mellom de ytre spenningene og de indre *gjennomsnittlige* spenningene  $\sigma_{cx}$ ,  $\sigma_{cy}$ ,  $\tau_{cxy}$ ,  $\sigma_{sx}$  og  $\sigma_{sy}$ .  $\rho_x = A_{sx}/bl_x$  og  $\rho_y = A_{sy}/bl_y$  er armeringstettheten i henholdsvis x- og y-retning.

$$\sigma_x = \sigma_{cx} + \rho_x \sigma_{sx} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_y = \sigma_{cy} + \rho_y \sigma_{sy} \quad (\text{A.2})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{cxy} \quad (\text{A.3})$$



**Figur A.2:** Gjennomsnittlige betongspenninger fremstilt ved hjelp av Mohrs sirkel (Vecchio & Collins 1986, etter Fig. 5 c))

Figur A.2 viser betongspenningene fremstilt ved hjelp av Mohrs sirkel. Alle spenninger er antatt positive for å kunne utlede generelle uttrykk. Fra figuren kan følgende sammenhenger utledes der  $\sigma_{c1}$  og  $\sigma_{c2}$  er største og minste hovedspenning og  $\theta$  er minste hovedspenningsretning. Ligningene benytter seg av (A.3).

$$\tan \theta = \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{cy}}{\tau_{xy}} \quad (\text{A.4})$$

$$\cot \theta = \frac{\sigma_{cy} - \sigma_{c2}}{\tau_{xy}} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{cx} + \sigma_{cy} = \sigma_{c1} + \sigma_{c2} \quad (\text{A.6})$$

Ved å benytte (A.5), (A.4) og (A.6) finnes følgende sammenhenger.

$$\sigma_{cx} = \sigma_{c1} - \tau_{xy} \cot \theta \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{cy} = \sigma_{c1} - \tau_{xy} \tan \theta \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_{c2} = \sigma_{c1} - \tau_{xy}(\tan \theta + \cot \theta) \quad (\text{A.9})$$

(A.7) og (A.8) innsatt i (A.1) og (A.2) gir følgende sammenheger.

$$\sigma_x = \sigma_{c1} - \tau_{xy} \cot \theta + \rho_x \sigma_{sx} \quad (\text{A.10})$$

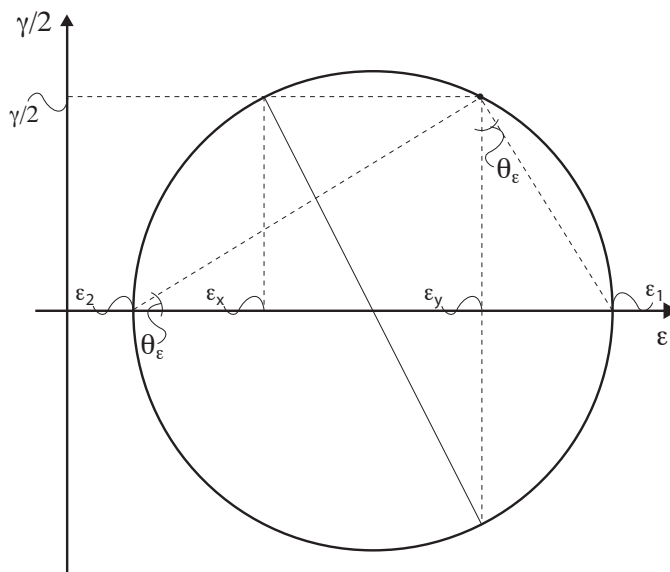
$$\sigma_y = \sigma_{c1} - \tau_{xy} \tan \theta + \rho_y \sigma_{sy} \quad (\text{A.11})$$



$$\tau_{xy} = (\sigma_{c1} - \sigma_y + \rho_y \sigma_{sy}) \cot \theta \quad (\text{A.12})$$

## A.2 Tøyningsskompatibilitet

Det antas at de *gjennomsnittlige* tøyningene i betongen i figur A.1 i x-retning er lik tøyningene i armeringen i x-retning og elementets gjennomsnittlige tøyninger i x-retningen, altså  $\epsilon_x = \epsilon_{sx} = \epsilon_{cx}$  og tilsvarende for y-retning. Figur A.3 viser betongtøyningene fremstilt ved hjelp av Mohrs sirkel. Fra figuren kan følgende uttrykk utledes der  $\theta_\epsilon$  er minste hovedtøyningsretning:



**Figur A.3:** Tøyningstilstand fremstilt ved hjelp av Mohrs sirkel (Vecchio & Collins 1986, etter Fig. 3)

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (\text{A.13})$$

$$\tan \theta_\epsilon = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_y}{\gamma/2} \quad (\text{A.14})$$

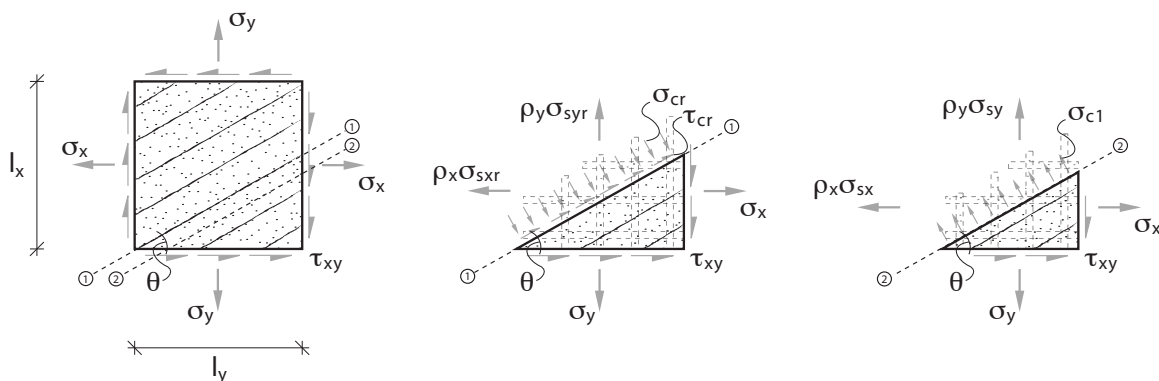
$$\cot \theta_\epsilon = \frac{\epsilon_y - \epsilon_2}{\gamma/2} \quad (\text{A.15})$$

Ved å kombinere de foregående uttrykkene finnes følgende sammenhenger mellom tøyningene og  $\theta_\epsilon$ :

$$\tan^2 \theta_\epsilon = \frac{\epsilon_x - \epsilon_2}{\epsilon_y - \epsilon_2} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_y}{\epsilon_1 - \epsilon_x} \quad (\text{A.16})$$

### A.3 Spenninger i riss

Figur A.4 viser hvordan betongelementet i figur A.1 kan risse opp. I figuren er det indikert to snitt: 1-1 som går gjennom risset parallelt med rissretningen og 2-2 som går i den urissede betongen parallelt med rissretningen. Spenninger med indeks  $r$  er spenninger som virker i armeringen og betongen i risset. Spenningstilstanden som er vist er gyldig hvis det antas at betongen overfører strekkspenninger og at spenninger overføres på tvers av rissene ved hjelp av *aggregate interlock*.



**Figur A.4:** 1-1: Spenningstilstand i riss, 2-2: Spenningstilstand i urissede betong (Vecchio & Collins 1986, etter Fig. 12)

Likevekt i x- og y-retning av snitt 1-1 gir følgende uttrykk:

$$\sigma_x + \tau_{xy} \cot \theta = \rho_x \sigma_{sxr} - \sigma_{cr} - \tau_{cr} \cot \theta \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_y + \tau_{xy} \tan \theta = \rho_y \sigma_{syr} - \sigma_{cr} + \tau_{cr} \tan \theta \quad (\text{A.18})$$

Likevekt i x- og y-retning av snitt 2-2 gir følgende uttrykk:

$$\sigma_x + \tau_{xy} \cot \theta = \sigma_{c1} + \rho_x \sigma_{sx} \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma_y + \tau_{xy} \tan \theta = \sigma_{c1} + \rho_y \sigma_{sy} \quad (\text{A.20})$$

## Vedlegg B Resultater fra evaluering av standarder

Dette vedlegget inneholder detaljerte resultater fra evalueringen av standardene med og uten skjærarmering. Tallene i parentes angir hvor mange forsøksresultater som inngår i hvert intervall.

**Tabell B.1:** Resultater uten skjærarmering sortert etter  $f_{ck}$

$f_{ck}$ [MPa]		<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
20 - 30 (126)	$\gamma_{mod,m}$	1.1072	1.0106	1.3706	1.3490
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7902	0.6907	0.8745	0.8570
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.4243	1.3306	1.8666	1.8411
	$\gamma_{mod,min}$	0.7421	0.5590	0.8484	0.8321
	$\gamma_{mod,max}$	1.8558	1.7106	2.3623	2.3440
	$c_v$	0.1741	0.1924	0.2200	0.2217
	$s$	0.1927	0.1945	0.3015	0.2991
30 - 40 (52)	$\gamma_{mod,m}$	1.2102	0.9531	1.3432	1.3169
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7640	0.6247	0.7951	0.7728
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.6564	1.2816	1.8913	1.8611
	$\gamma_{mod,min}$	0.8827	0.5743	0.8752	0.8607
	$\gamma_{mod,max}$	2.3461	1.7188	2.7533	2.7098
	$c_v$	0.2241	0.2095	0.2481	0.2512
	$s$	0.2713	0.1997	0.3332	0.3308
40 - 50 (22)	$\gamma_{mod,m}$	1.3452	1.0421	1.7371	1.7143
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.6388	0.5786	0.5398	0.5342
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.0516	1.5057	2.9344	2.8943
	$\gamma_{mod,min}$	0.6943	0.6073	0.6725	0.6632
	$\gamma_{mod,max}$	2.2005	1.6076	3.2508	3.1991
	$c_v$	0.3192	0.2704	0.4190	0.4185
	$s$	0.4294	0.2818	0.7278	0.7173
50 - 80 (52)	$\gamma_{mod,m}$	1.4537	0.9940	1.7052	1.6690
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7103	0.5610	0.6624	0.6328
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.1971	1.4270	2.7481	2.7051
	$\gamma_{mod,min}$	0.6992	0.4787	0.7287	0.6824
	$\gamma_{mod,max}$	2.5797	1.6001	3.5171	3.4604
	$c_v$	0.3109	0.2648	0.3718	0.3774
	$s$	0.4519	0.2632	0.6340	0.6299

**Tabell B.2:** Resultater uten skjærarmering sortert etter  $d$ 

$d$ [mm]		<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
100 - 200 (37)	$\gamma_{mod,m}$	1.3749	1.1103	1.6984	1.6791
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.9226	0.7832	1.1349	1.1153
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.8272	1.4375	2.2618	2.2429
	$\gamma_{mod,min}$	0.8847	0.6609	0.9942	0.9847
	$\gamma_{mod,max}$	2.1601	1.7106	2.3623	2.3440
	$c_v$	0.2000	0.1791	0.2017	0.2041
	$s$	0.2749	0.1989	0.3425	0.3427
200 - 300 (131)	$\gamma_{mod,m}$	1.2829	1.0178	1.5400	1.5179
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.6558	0.6316	0.6369	0.6301
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.9101	1.4040	2.4432	2.4056
	$\gamma_{mod,min}$	0.6943	0.6073	0.6725	0.6632
	$\gamma_{mod,max}$	2.5797	1.7188	3.5171	3.4604
	$c_v$	0.2972	0.2306	0.3565	0.3555
	$s$	0.3812	0.2348	0.5490	0.5397
300 - 600 (52)	$\gamma_{mod,m}$	1.0929	0.9926	1.2860	1.2584
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8483	0.7866	0.9158	0.9083
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.3375	1.1986	1.6562	1.6085
	$\gamma_{mod,min}$	0.7421	0.7379	0.9195	0.9042
	$\gamma_{mod,max}$	1.4622	1.3253	2.1124	2.0142
	$c_v$	0.1361	0.1261	0.1750	0.1691
	$s$	0.1487	0.1252	0.2250	0.2128
600 - 1000 (22)	$\gamma_{mod,m}$	0.9980	0.7835	1.1082	1.0661
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7515	0.5684	0.7631	0.7301
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.2444	0.9985	1.4533	1.4021
	$\gamma_{mod,min}$	0.6992	0.4787	0.7287	0.6824
	$\gamma_{mod,max}$	1.2819	1.0212	1.5273	1.4641
	$c_v$	0.1501	0.1668	0.1893	0.1916
	$s$	0.1498	0.1307	0.2098	0.2042
1000 - 2000 (10)	$\gamma_{mod,m}$	0.9910	0.8247	1.3590	1.3101
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.6412	0.4174	0.8301	0.7980
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.3408	1.2319	1.8880	1.8222
	$\gamma_{mod,min}$	0.7583	0.5590	0.8890	0.8664
	$\gamma_{mod,max}$	1.5397	1.3935	1.9675	1.9008
	$c_v$	0.2146	0.3002	0.2366	0.2376
	$s$	0.2127	0.2476	0.3216	0.3113

**Tabell B.3:** Resultater uten skjærarmering sortert etter  $\rho_l$ 

$\rho_l$ [%]		<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
0 - 0.55 (15)	$\gamma_{mod,m}$	1.0046	0.7796	1.3211	1.2895
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.6896	0.5429	0.6813	0.6560
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.3196	1.0162	1.9609	1.9231
	$\gamma_{mod,min}$	0.7583	0.5590	0.8484	0.8321
	$\gamma_{mod,max}$	1.4371	0.9947	2.2696	2.2312
	$c_v$	0.1906	0.1845	0.2944	0.2987
	$s$	0.1915	0.1439	0.3889	0.3851
0.55 - 1.1 (40)	$\gamma_{mod,m}$	1.0532	0.8848	1.1873	1.1588
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7970	0.6316	0.8374	0.8087
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.3095	1.1380	1.5372	1.5089
	$\gamma_{mod,min}$	0.6992	0.4787	0.7287	0.6824
	$\gamma_{mod,max}$	1.3064	1.2109	1.8549	1.8449
	$c_v$	0.1479	0.1740	0.1791	0.1837
	$s$	0.1558	0.1539	0.2127	0.2129
1.1 - 2 (55)	$\gamma_{mod,m}$	1.1008	0.9310	1.2911	1.2698
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8367	0.7300	0.8730	0.8569
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.3649	1.1320	1.7092	1.6827
	$\gamma_{mod,min}$	0.6943	0.6073	0.6725	0.6632
	$\gamma_{mod,max}$	1.4687	1.2376	2.1239	2.1049
	$c_v$	0.1458	0.1312	0.1969	0.1977
	$s$	0.1605	0.1222	0.2542	0.2510
2 - 3 (83)	$\gamma_{mod,m}$	1.1955	1.0598	1.5194	1.4970
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7476	0.6761	0.8050	0.7844
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.6433	1.4435	2.2337	2.2096
	$\gamma_{mod,min}$	0.8661	0.6320	0.9098	0.8873
	$\gamma_{mod,max}$	2.2005	1.7106	3.2508	3.1991
	$c_v$	0.2277	0.2201	0.2858	0.2894
	$s$	0.2722	0.2333	0.4343	0.4332
3 - 7 (59)	$\gamma_{mod,m}$	1.5367	1.1062	1.7797	1.7487
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8539	0.7217	0.7852	0.7732
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.2194	1.4906	2.7741	2.7241
	$\gamma_{mod,min}$	0.8847	0.6609	0.9429	0.9102
	$\gamma_{mod,max}$	2.5797	1.7188	3.5171	3.4604
	$c_v$	0.2701	0.2113	0.3397	0.3391
	$s$	0.4150	0.2337	0.6045	0.5930

**Tabell B.4:** Resultater uten skjærarmering sortert etter  $a/d$ 

$a/d$ [-]		<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
2.40 - 4 (205)	$\gamma_{mod,m}$	1.2599	1.0125	1.4804	1.4537
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.6827	0.6278	0.6534	0.6348
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.8370	1.3972	2.3074	2.2726
	$\gamma_{mod,min}$	0.6943	0.4787	0.6725	0.6632
	$\gamma_{mod,max}$	2.5797	1.7188	3.5171	3.4604
	$c_v$	0.2785	0.2310	0.3396	0.3424
	$s$	0.3509	0.2339	0.5028	0.4978
4 - 6 (37)	$\gamma_{mod,m}$	1.0619	0.9291	1.3842	1.3654
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8464	0.7002	0.8946	0.8826
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.2774	1.1580	1.8737	1.8483
	$\gamma_{mod,min}$	0.7421	0.6320	0.9694	0.9552
	$\gamma_{mod,max}$	1.4371	1.2737	2.2696	2.2312
	$c_v$	0.1234	0.1498	0.2150	0.2150
	$s$	0.1310	0.1391	0.2976	0.2935
6 - 8 (10)	$\gamma_{mod,m}$	1.0069	0.9581	1.4732	1.4426
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8972	0.8454	1.2722	1.2586
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.1167	1.0709	1.6742	1.6267
	$\gamma_{mod,min}$	0.9219	0.8514	1.3558	1.3376
	$\gamma_{mod,max}$	1.0968	1.0668	1.6853	1.6513
	$c_v$	0.0663	0.0716	0.0829	0.0775
	$s$	0.0667	0.0686	0.1222	0.1119

**Tabell B.5:** Resultater uten skjærarmering sortert etter  $d_g$ 

$d_g$ [mm]		<b>Eurokode 2</b>	<b>NS 3473</b>	<b>CSA A23.3</b>	<b>Model Code 2010</b>
0 - 15 (89)	$\gamma_{mod,m}$	1.3555	0.9500	1.5231	1.4977
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.6580	0.5176	0.5235	0.4987
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.0529	1.3825	2.5227	2.4827
	$\gamma_{mod,min}$	0.6992	0.4787	0.7287	0.6824
	$\gamma_{mod,max}$	2.5797	1.7188	3.5171	3.4604
	$c_v$	0.3128	0.2767	0.2990	0.4045
	$s$	0.4240	0.2629	0.6077	0.6030
15 - 25 (86)	$\gamma_{mod,m}$	1.2254	1.0611	1.5934	1.5654
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7731	0.6935	0.9173	0.8950
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.6777	1.4286	2.2695	2.2358
	$\gamma_{mod,min}$	0.6943	0.5590	0.6725	0.6632
	$\gamma_{mod,max}$	2.0820	1.7106	2.9403	2.9046
	$c_v$	0.2264	0.2106	0.2579	0.2603
	$s$	0.2750	0.2234	0.4110	0.4075
25 - 40 (77)	$\gamma_{mod,m}$	1.0599	0.9833	1.2577	1.2424
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8197	0.7730	0.9150	0.8991
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.3001	1.1936	1.6004	1.5857
	$\gamma_{mod,min}$	0.7421	0.7008	0.8484	0.8321
	$\gamma_{mod,max}$	1.5244	1.2909	1.8549	1.8449
	$c_v$	0.1378	0.1300	0.1656	0.1680
	$s$	0.1460	0.1278	0.2083	0.2087

Tabell B.6: Resultater med skjærarmring sortert etter  $d$ 

$d$ [mm]	Eurokode 2	NS 3473 (1)	NS 3473 (2)	CSA A23.3	Model Code 2010
200 - 300 (28)	$\gamma_{mod,m}$	1.7093	1.2984	1.5038	1.4302
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.7086	0.8391	0.7280	0.6899
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.7100	1.7576	2.2796	2.1705
	$\gamma_{mod,min}$	0.6414	0.8098	0.7647	0.7647
	$\gamma_{mod,max}$	3.7080	2.2647	3.2404	3.1263
	$c_v$	0.3559	0.2150	0.3559	0.3147
300 - 400 (21)	$s$	0.6083	0.2792	0.8780	0.4716
	$\gamma_{mod,m}$	1.5397	1.2587	2.2200	1.4092
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.9761	1.0384	1.3961	1.0881
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.1034	1.4790	3.0438	1.7302
	$\gamma_{mod,min}$	0.7173	0.9610	0.9839	1.0565
	$\gamma_{mod,max}$	2.2047	1.5121	3.1822	1.8457
400 - 1200 (18)	$c_v$	0.2225	0.1064	0.2256	0.1385
	$s$	0.3426	0.1339	0.5008	0.1951
	$\gamma_{mod,m}$	1.3626	0.9867	1.9668	1.0293
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.5288	0.7984	0.7632	0.7732
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.1965	1.1750	3.1703	1.2853
	$\gamma_{mod,min}$	0.4958	0.7390	0.7156	0.7543
400 - 1200 (18)	$\gamma_{mod,max}$	2.4038	1.1649	3.4696	1.3439
	$c_v$	0.3720	0.1160	0.3720	0.1512
	$s$	0.5069	0.1145	0.7316	0.1557
					0.1620



Tabell B.7: Resultater med skjærarmering sortert etter  $f_{ck}$

$f_{ck}$ [MPa]	Eurokode 2	NS 3473 (1)	NS 3473 (2)	CSA A23.3	Model Code 2010	
20 - 40 (12)	$\gamma_{mod,m}$	1.5430	1.1278	2.2228	1.1667	1.1575
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8015	0.8430	1.1384	0.7835	0.7631
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.2844	1.4126	3.3073	1.5498	1.5520
	$\gamma_{mod,min}$	0.7173	0.8139	0.9839	0.7800	0.7689
	$\gamma_{mod,max}$	2.4038	1.3823	3.4696	1.5325	1.5325
	$c_v$	0.2921	0.1535	0.2966	0.1997	0.2072
40 - 60 (20)	$s$	0.4507	0.1731	0.6592	0.2329	0.2398
	$\gamma_{mod,m}$	1.3520	1.1351	1.9514	1.2537	1.2351
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.5445	0.7884	0.7859	0.7420	0.7317
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.1954	1.4817	3.1169	1.7655	1.7385
	$\gamma_{mod,min}$	0.4958	0.7390	0.7156	0.7543	0.6999
	$\gamma_{mod,max}$	2.2047	1.5121	3.1822	1.8457	1.7982
60 - 80 (35)	$c_v$	0.3631	0.1856	0.3631	0.2481	0.2478
	$s$	0.4909	0.2107	0.7085	0.3111	0.3060
	$\gamma_{mod,m}$	1.6905	1.2661	2.4400	1.4614	1.3982
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.8089	0.8313	1.1676	0.7529	0.7303
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.5720	1.7009	3.7124	2.1699	2.0660
	$\gamma_{mod,min}$	1.0418	0.9090	1.5036	0.9192	0.9192
60 - 80 (35)	$\gamma_{mod,max}$	3.7080	2.2647	5.3521	3.2404	3.1263
	$c_v$	0.3170	0.2088	0.3170	0.2947	0.2904
	$s$	0.5359	0.2643	0.7735	0.4307	0.4060

Tabell B.8: Resultater med skjærarmering sortert etter  $\rho_l$ 

$\rho_l$ [%]	Eurokode 2	NS 3473 (1)	NS 3473 (2)	CSA A23.3	Model Code 2010	
0 - 2 (11)	$\gamma_{mod,m}$	1.1550	0.9922	1.6671	1.0418	1.0339
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.6309	0.8035	0.9106	0.8208	0.7886
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.6791	1.1808	2.4235	1.2629	1.2791
	$\gamma_{mod,min}$	0.4958	0.7390	0.7156	0.7543	0.6999
	$\gamma_{mod,max}$	1.8415	1.1406	2.6580	1.2249	1.2249
	$C_v$	0.2758	0.1156	0.2758	0.1290	0.1442
2 - 3 (45)	$s$	0.3186	0.1147	0.4598	0.1344	0.1491
	$\gamma_{mod,m}$	1.6415	1.2222	2.3682	1.3684	1.3263
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.9196	0.9221	1.3220	0.8974	0.8852
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.3634	1.5222	3.4143	1.8395	1.7674
	$\gamma_{mod,min}$	0.5902	0.8098	0.8519	0.7647	0.7647
	$\gamma_{mod,max}$	2.7718	1.5755	4.0007	1.9924	1.8994
3 - 6 (11)	$C_v$	0.2674	0.1492	0.2685	0.2093	0.2022
	$s$	0.4389	0.1824	0.6359	0.2864	0.2681
	$\gamma_{mod,m}$	1.6500	1.3306	2.3815	1.5623	1.4973
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.3381	0.6792	0.4880	0.4684	0.4496
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.9618	1.9820	4.2750	2.6562	2.5451
	$\gamma_{mod,min}$	0.9632	0.9610	1.3903	1.0682	1.0682
3 - 6 (11)	$\gamma_{mod,max}$	3.7080	2.2647	5.3521	3.2404	3.1263
	$C_v$	0.4833	0.2976	0.4833	0.4256	0.4254
	$s$	0.7975	0.3960	1.1511	0.6650	0.6369

**Tabell B.9:** Resultater med skjærarmring sortert etter  $\rho_w f_{yk}$

$\rho_w f_{yk}$ [MPa]	Eurokode 2	NS 3473 (1)	NS 3473 (2)	CSA A23.3	Model Code 2010
0 - 0.75 (27)	$\gamma_{mod,m}$	1.8756	2.7071	1.3560	1.3294
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.9646	1.3922	0.5630	0.5817
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.7866	4.0221	2.1489	2.0771
	$\gamma_{mod,min}$	1.0943	1.5795	0.7800	0.7689
	$\gamma_{mod,max}$	3.7080	5.3521	3.2404	3.1263
	$c_v$	0.2953	0.2953	0.3555	0.3419
0.75 - 1 (21)	$s$	0.5538	0.7993	0.4820	0.4545
	$\gamma_{mod,m}$	1.5491	2.2360	1.3815	1.3350
	$\gamma_{mod,5\%}$	1.0294	1.4858	0.8469	0.8281
	$\gamma_{mod,95\%}$	2.0689	2.9862	1.9161	1.8420
	$\gamma_{mod,min}$	0.9657	1.3938	0.9357	0.9022
	$\gamma_{mod,max}$	2.3961	3.4585	2.3701	2.2732
0.75 - 1 (19)	$c_v$	0.2040	0.2040	0.2352	0.2308
	$s$	0.3160	0.4561	0.3250	0.3082
	$\gamma_{mod,m}$	1.1342	1.6344	1.2949	1.2420
	$\gamma_{mod,5\%}$	0.5949	0.8498	0.8147	0.8004
	$\gamma_{mod,95\%}$	1.6735	2.4190	1.7751	1.6837
	$\gamma_{mod,min}$	0.4958	0.7156	0.7543	0.6999
1 - 3 (19)	$\gamma_{mod,max}$	1.5777	2.2772	1.6604	1.5509
	$c_v$	0.2891	0.2918	0.2254	0.2162
	$s$	0.3278	0.4770	0.2919	0.2685



## Vedlegg C MatLab-skript

Dette vedlegget beskriver to programmer som ble utviklet i forbindelse med denne rapporten.

Programmene er skrevet i MatLab og gir brukeren muligheten til å sammenligne skjærkapasiteten beregnet med Eurokode 2 (CEN 2004), NS 3473 (Standard Norge 2003), CSA A23.3 (CSA 2004) og Model Code 2010 (CEB-FIP 2010*b*) med to databaser med testresultater for bjelker med og uten skjærarmering.

### C.1 Databaser

Databasene som hentes inn i programmene heter *dbuarm.txt* og *dbmarm.txt* for henholdsvis uten (Reineck et al. 2003) og med skjærarmering (Cladera & Mari 2007). Databasene må være på formen gitt i tabell C.1 og tabell C.2 for henholdsvis uten og med skjærarmering.

**Tabell C.1:** Struktur for *dbuarm.txt*

Kolonne	Parameter
1	Bredde [mm]
2	Dybde [mm]
3	Sylinderfasthet [MPa]
4	Lengdearmeringsforhol [%]
5	$a/d$ -forhold [-]
6	$V_{test}$ [kN]
7	Tilslagsstørrelse [mm]

**Tabell C.2:** Struktur for *dbmarm.txt*

Kolonne	Parameter
1	Bredde [mm]
2	Dybde [mm]
3	Sylinderfasthet [MPa]
4	Lengdearmeringsforhol [%]
5	$a/d$ -forhold [-]
6	$V_{test}$ [kN]
7	Skjærarmeringsmengde [%]
8	Armeringens flytespenning [MPa]

## C.2 db\_hoved

*db\_hoved* er et program som sammenligner de ulike standardene med forsøksresultatene fra databasene. Programmet er delt inn i to deler: en del med inndata og kjøring, og en del med bearbeiding som kaller andre funksjoner.

Inndata defineres i følgende rekkefølge:

1. Velg om det skal beregnes med eller uten skjærarmring
2. Velg standard
3. Velg hvilke parametere databasen skal sorteres for
4. Velg grenser for sorteringen
5. Velg om det skal beregnes statistikk
6. Velg om programmet skal generere grunndataplott og/eller statistikkplott

Etter at inndata er definert, kjører programmet i følgende rekkefølge:

1. Databasen hentes inn og lagres som variabelen *db\_tot*
2. Skjærkraften fra forsøkene regnes om til Newton
3. Den dimensjonsløse skjærspenningen  $\tau_u = V_{test}/(bdf_{1c})$  beregnes
4. Den karakteristiske sylindrefastheten beregnes
5. Hvis det er valgt å beregne med skjærarmring, beregnes den fordelte armeringspenningen  $\rho_w f_{yk}$
6. Programmet eliminerer forsøksresultatene som ikke oppfyller de angitte sorteringsgrensene
7. Den dimensjonerende verdien fra den valgte standarden og forholdet  $\gamma_{mod} = V_{test}/V_{standard}$  settes inn
8. Hvis det er valgt at programmet skal beregne statistikk, beregnes gjennomsnittlig  $\gamma_{mod}$ , største og minste verdi, 5%- og 95%-fraktiler, standardavvik og variasjonskoeffisient
9. De valgte plottene genereres
10. Koden gir brukeren muligheten til å *db\_tot* til en tekstfil

Når programmet har kjørt, har *db\_tot* strukturen vist i tabell C.3 og C.4 for henholdsvis uten og med skjærarmring.

**Tabell C.3:** Struktur for *db\_tot* uten skjærarmering

Kolonne	Parameter
1	Bredde [mm]
2	Dybde [mm]
3	Sylinderfasthet [MPa]
4	Lengdearmeringsforhol [%]
5	$a/d$ -forhold [-]
6	$V_{test}$ [N]
7	Tilslagsstørrelse [mm]
8	Dimensjonsløs skjærspenning [-]
9	Karakteristisk sylinderfasthet [MPa]
10	$V_{standard}$ [N]
11	$\gamma_{mod}$ [-]

**Tabell C.4:** Struktur for *db\_tot* med skjærarmering

Kolonne	Parameter
1	Bredde [mm]
2	Dybde [mm]
3	Sylinderfasthet [MPa]
4	Lengdearmeringsforhol [%]
5	$a/d$ -forhold [-]
6	$V_{test}$ [N]
7	Skjærarmeringsmengde [%]
8	Armeringens flytespenning [MPa]
9	Dimensjonsløs skjærspenning [-]
10	Karakteristisk sylinderfasthet [MPa]
11	Fordelt armeringsspenning [MPa]
12	$V_{standard}$ [N]
13	$\gamma_{mod}$ [-]

### C.3 *db\_minarm*

*db\_minarm* er et program som tar inn databasen uten skjærarmering, beregner kapasiteten uten skjærarmering, legger inn minimum skjærarmering og beregner kapasiteten med minimumsarmering. Programmet er delt inn i to deler: en del med inndata og kjøring og en del med bearbeiding som kaller andre funksjoner.

Inndata defineres i følgende rekkefølge:

1. Velg standard
2. Velg hvilke parametere databasen skal sorteres for

### 3. Velg grenser for sorteringen

Etter at inndata er definert, kjører programmet i følgende rekkefølge:

1. Databasen hentes inn og lagres som variabelen  $db\_tot$
2. Skjærkraften fra forsøkene regnes om til Newton
3. Den dimensjonsløse skjærspenningen  $\tau_u = V_{test}/(bdf_{1c})$  beregnes. Denne verdien benyttes ikke videre i denne utgaven av programmet.
4. Den karakteristiske sylindrefastheten beregnes
5. Programmet eliminerer forsøksresultatene som ikke oppfyller de angitte sorteringsgrensene
6. Den dimensjonerende verdien uten skjærarmering fra den valgte standarden
7. Kapasiteten uten skjærarmering lagres som variabelen  $V_0$  og forsøksresultatet lagres som  $V_u$ . Forsøksresultatet benyttes ikke videre i denne utgaven av programmet.
8. Minimumsarmeringen beregnes med flytespenning 500 MPa
9.  $db\_tot$  restruktureres så den er på formen gitt i tabell C.4
10. Kapasiteten med skjærarmering beregnes
11. Kapasiteten med skjærarmering lagres som variabelen  $V_1$
12. Forholdet mellom kapasiteten med og uten minimumsarmering,  $V_1/V_0$ , beregnes
13.  $db\_tot$  restruktureres så den er på formen gitt i tabell C.5
14. Programmet genererer plott

Når programmet har kjørt, har  $db\_tot$  strukturen vist i tabell C.5.

## C.4 Funksjoner

Programmene  $db\_hoved$  og  $db\_minarm$  kaller en del funksjoner. Funksjonene beskrives her i alfabetisk rekkefølge.

### ***funcottan:***

Itererer for å finne  $\theta$  for fagverksmodell med variabel helning hvis  $\theta$  bestemmes fra skjærtrykkkapasiteten.

### ***minarm:***

Beregner minimumsarmeringen for hver av standardene. Armeringens flytespenning kan forandres her.



**Tabell C.5:** Struktur for *db\_tot* med minimumsarmering

Kolonne	Parameter
1	Bredde [mm]
2	Dybde [mm]
3	Karakteristisk sylindrefasthet [MPa]
4	Lengdearmeringsforhol [%]
5	<i>a/d</i> -forhold [-]
6	Skjærarmeringsmengde [%]
7	Armeringens flytespenning [MPa]
8	Kapasitet uten armering [N]
9	Kapasitet med minimumsarmering [N]
10	$V_1/V_0$ [-]

**plotdata:**

Plotter grunndata og statistikk avhengig av hva som er gitt i inndata. Figurenes utseende kan forandres her.

**skjærspenning:**

Beregner dimensjonsløs skjærspenning.

**sort\_medarm:**

Sorterer databasen med beregnet kapasitet uten skjærarmering til formen som kreves for å beregne skjærkapasiteten med skjærarmering.

**sorter\_ad, sorter\_d, sorter\_dg, sorter\_fc, sorter\_fy, sorter\_rhol, sorter\_rhovfy:**

Utelukker forsøksresultater som ikke oppfyller de definerte grensene for henholdsvis *a/d*-forhold, dybde, tilslagsstørrelse, sylindrefasthet, armeringens flytespenning, lengdearmeringsmengde og fordelt armeringsspenning.

**statistikk:**

Beregner  $\gamma_{mod,m}$ ,  $\gamma_{mod,5\%}$ ,  $\gamma_{mod,95\%}$ ,  $\gamma_{mod,min}$ ,  $\gamma_{mod,max}$ , *s* og *c<sub>v</sub>* fra  $\gamma_{mod}$  beregnet for hvert forsøksresultat.

**sylindrefasthet:**

Beregner karakteristisk sylindrefasthet med fremgangsmåten presentert av Reineck et al. (2003).

**v\_csa:**

Beregner kapasiteten fra CSA A23.3.

**v\_ek2:**

Beregner kapasiteten fra Eurokode 2.

**v\_mc2010:**

Beregner kapasiteten fra fib Model Code 2010. Brukeren kan velge Nivå her.

***v\_ns:***

Beregner kapasiteten fra NS 3473. Brukeren kan velge metode her.

## Referanser

- Bazant, Z. P. & Kazemi, M. T. (1991), 'Size Effect on Diagonal Shear Failure of Beams without Stirrups', *ACI Structural Journal* **88**(3), 268 – 276.
- Bazant, Z. P., Ozbolt, J. & Eligehausen, R. (1994), 'Fracture Size Effect: Review of Evidence for Concrete Structures', *Journal of Structural Engineering* **120**(8), 2377 – 2398.
- Bentz, E. C. (2001), 'Response 2000 - Version 1.0.5', User Manual.
- Bentz, E. C. & Buckley, S. (2005), 'Repeating a Classic Set of Experiments on Size Effect in Shear of Members without Stirrups', *ACI Structural Journal* **102**(6), 832 – 838.
- Bentz, E. C. & Collins, M. P. (2006), 'Development of the 2004 Canadian Standards Association (CSA) A23.3 shear provisions for reinforced concrete', *Canadian Journal of Civil Engineering* **33**(5), 521 – 534.
- Bentz, E. C., Vecchio, F. J. & Collins, M. P. (2006), 'Simplified modified compression field theory for calculation shear strength of concrete elements', *ACI Structural Journal* **103**(4), 614–624.
- CEB-FIP (2010a), *fib Model Code, First complete draft - Volume 1*, CEB-FIP.
- CEB-FIP (2010b), *fib Model Code, First complete draft - Volume 2*, CEB-FIP.
- CEN (2001), *NS-EN 12390-1: Prøving av herdnet betong, Del 1: Form, mål og andre krav til prøvelegemer og former*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- CEN (2002), *NS-EN 12620: Tilslag for betong*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- CEN (2004), *NS-EN 1992-1-1: Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- CEN (2005a), *NS-EN 10080: Armeringsstål, Sveisbar armering, Del 1: Generelle krav*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- CEN (2005b), *NS-EN 1992-2: Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 2: Bruer*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- CEN (2006), *NS-EN 1992-3: Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 2: Siloer og beholdere*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- CEN (2009a), *NS-EN 12390-3: Prøving av herdnet betong, Del 3: Prøvelegemers trykkfasthet*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- CEN (2009b), *NS-EN 12390-6: Prøving av herdnet betong, Del 6: Prøvelegemers spaltestrekkfasthet*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.

- CEN (2011), *NS-EN 197-1: Sement Del 1: Sammensetning, krav og samsvarskriterier for ordinære sementtyper*, Den europeiske standardiseringsorganisasjonen.
- Cladera, A. & Mari, A. R. (2007), 'Shear strength in the new Eurocode 2. A step forward?', *Structural Concrete* **8**(2), 57 – 66.
- Collins, M. P. (1978), 'Towards a Rational Theory for RC Members in Shear', *Journal of the Structural Division* **104**(4), 649 – 666.
- Collins, M. P., Bentz, E. C. & Sherwood, E. G. (2008), 'Where is Shear Reinforcement Required? Review of Research Results and Design Procedures', *ACI Structural Journal* **105**(5), 590–600.
- Collins, M. P., Bentz, E. C., Sherwood, E. G. & Xie, L. (2007), An Adequate Theory for the Shear Strength of Reinforced Concrete Structures, in 'Morley Symposium on Concrete Plasticity and its Application', pp. 75 – 94.
- Collins, M. P. & Kuchma, D. (1999), 'How Safe Are Our Large, Lightly Reinforced Concrete Beams, Slabs and Footings?', *ACI Structural Journal* **96**(4), 482 – 490.
- Collins, M. P. & Mitchell, D. (1991), *Prestressed Concrete Structures*, Prentice Hall.
- Collins, M. P., Mitchell, D., Adebar, P. & Vecchio, F. J. (1996), 'A General Shear Design Method', *ACI Structural Journal* **93**(1), 36 – 45.
- CSA (2004), *CSA A23.3-04: Design of concrete structures*, Canadian Standards Association.
- CSA (2009), *CSA A23.1-09: Concrete materials and methods of concrete construction*, Canadian Standards Association.
- Hsu, T. T. C. & Mo, Y. L. (2010), *Unified Theory of Concrete Structures*, John Wiley & Sons, Ltd.
- Jacobs, J.-P., ed. (2008), *Commentary Eurocode 2*, European Concrete Platform ASBL.
- Jensen, B. C. & Lapko, A. (2009), 'On Shear Reinforcement Design of Structural Concrete Beams on the Basis of Theory of Plasticity', *Journal of Civil Engineering and Management* **15**(4), 395 – 403.
- Kani, M. W., Huggins, M. W. & Wittkopp, R. R. (1979), *Kani on shear in reinforced concrete*, Department of Civil Engineering, University of Toronto.
- Kotsovos, M. & Pavlovic, M. (1999), *Ultimate limit-state design of concrete structures: a new approach*, Thomas Telford.
- Leonhardt, F. & Mönning, E. (1974), *Vorlesungen über Massivbau: Grundlagen zum Bewehren im Stahlbetonbau*, Springer Verlag.

- MathWorks (2011), ‘MatLab, 7.12.0.635 (R2011a)’, Release Notes.
- Morley, C. (2007), When Plasticity?, in ‘Morley Symposium on Concrete Plasticity and its Application’, pp. 1 – 10.
- Mörsch, E. (1909), *Concrete-Steel Construction (Der Eisenbetonbau)*, 3 edn, The Engineering News Publishing Company.
- Mosley, B., Bungey, J. & Hulse, R. (2007), *Reinforced Concrete Design to Eurocode 2*, 6 edn, Palgrave MacMillan.
- Nedrelid, H. (2012), Towards a better understanding of the ultimate behaviour of lightweight aggregate concrete in compression and bending, PhD thesis, NTNU.
- Reineck, K.-H., Kuchma, D., Kim, K. S. & Marx, S. (2003), ‘Shear Database for Reinforced Concrete Members without Shear Reinforcement’, *ACI Structural Journal* **100**(2), 240 – 249.
- Schlaich, J., Schäfer, K. & Jenneswein, M. (1987), ‘Special Report: Toward a Consistent Design of Structural Concrete’, *PCI Journal* **32**(3), 74 – 150.
- Sørensen, S. I. (2005), *Betongkonstruksjoner: Armert betong og spennbetong*, 2 edn, Tapir Akademisk Forlag.
- Sørensen, S. I. (2010), *Betongkonstruksjoner: Beregning og dimensjonering etter Eurocode 2*, Tapir Akademisk Forlag.
- Standard Norge (2003), *NS 3473: Design of concrete structures. Design and detailing rules*, 6 edn, Standard Norge.
- Standard Norge (2005a), *NS 3576-1: Armeringsstål, Mål og egenskaper, Del 1: Kamstenger B500NA*, Standard Norge.
- Standard Norge (2005b), *NS 3576-4: Armeringsstål, Mål og egenskaper, Del 4: Sveiste armeringsnett*, Standard Norge.
- Standard Norge (2006), *NS-EN ISO 19903: Petroleum- og naturgassindustri - Faste offshorekonstruksjoner i betong*, Standard Norge.
- Standard Norge (2012a), *NS 3576-2: Armeringsstål, Mål og egenskaper, Del 2: Kamstenger B500NB*, Standard Norge.
- Standard Norge (2012b), *NS 3576-3: Armeringsstål, Mål og egenskaper, Del 3: Kamstenger B500NC*, Standard Norge.
- Vecchio, F. J. & Collins, M. P. (1986), ‘The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear’, *ACI Journal* **83**(2), 219 – 231.
- Wight, J. K. & MacGregor, J. G. (2009), *Reinforced Concrete: Mechanics and Design*, 5 edn, Pearson Education, Inc.

Yu, Q. & Bazant, Z. P. (2011), 'Can Stirrups Suppress Size Effect on Shear Strength of RC Beams?', *Journal of Structural Engineering* **137**(5), 607 – 617.