

Tolkninger av likhetstegnet

En kvalitativ studie av hvilke tolkninger av likhetstegnet vi kan finne hos en gruppe åttendeklassinger

Ingrid Vågan Tøgersen

Master i realfag

Innlevert: juni 2015

Hovedveileder: Frode Rønning, MATH

Medveileder: Heidi Strømskag, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven i matematikdidaktikk marker min avslutning på lektorutdanningen i realfag ved NTNU i Trondheim. Masterarbeidet har vært krevende og utfordrende, men også lærerikt og spennende.

Jeg vil rette en veldig stor takk til min veileder Heidi Strømskag. Takk for gode og konstruktive tilbakemeldinger og oppmuntrende ord under hele prosessen, og for å få meg til å innse at hodeskader ikke er noe å spøke med.

Takk til læreren som stilte klassen sin til disposisjon og takk til elevene som deltok i undersøkelsen. Jeg vil også takke mine medstudenter på “Matteland” for et godt studiemiljø, mange gode diskusjoner og for mange fine studieår.

Takk til min familie for all støtte gjennom utdanningen min. Til slutt vil jeg takke min samboer Kai André for alle oppmuntrende samtaler gjennom masterarbeidet, og for å få meg til å se det positive i situasjoner.

Sammendrag

Denne studien har til hensikt å undersøke hvordan elever i ungdomsskolen oppfatter betydningen av likhetstegnet. Oppgaven skal besvare følgende forskningsspørsmål; *hvilke tolkninger av likhetstegnet kan vi finne hos en gruppe åttendeklassinger i arbeid med lineære likninger?*

Studien følger et kvalitativt forskningsdesign og gjennomføres ved en ungdomsskole i Nordland, hvor seks åttendeklassinger deltar i undersøkelsen. Studien benytter seg av flere datainnsamlingsmetoder. Elevene arbeider i par med et oppgavesett hvor de skal løse lineære likninger, og disse besvarelsene blir samlet inn og brukt i analysearbeidet og for å utforme intervjukjema. Det blir gjennomført et intervju per par av elever som deltar i undersøkelsen, og disse intervjuene blir filmet med videokamera. Intervjuet har til hensikt å undersøke elevenes begrunnelser for løsninger i oppgavesettet og deres tolkninger av likhetstegnet. I analysearbeidet er den konstant komparativ analysemetoden benyttet. Dette har ført til koder og kategorier som skal være med på å besvare forskningsspørsmålet.

Resultatene viser at tolkningene av likhetstegnet som vi kan finne hos en gruppe åttendeklassinger er flere varianter av *regn ut*-tolkningen, *det samme som*-tolkningen, og noen forekomster av *identitet*-tolkningen og *kan byttes ut med*-tolkningen. Funnene indikerer at elevene er i en overgangsfase mellom å forstå likhetstegnet som en kommando om å gjøre beregninger og å forstå det som et symbol som viser en relasjon.

Summary

The purpose of this study is to examine how students in eight grade perceive the meaning of the equal sign. This thesis is going to answer the following research question; *which interpretations of the equal sign can we find among a group of eight grade students working with linear equations?*

The study follows a qualitative research design and is conducted at a middle school in Nordland, where six eight grade students participate in the study. The study uses several data collection methods. Students work in pairs with an exercise sheet where they are to solve linear equations, and these responses are collected and used in the analysis and to design the interview form. An interview is being conducted per pair of students in the study, and these interviews are being videotaped. The purpose of the interview is to examine how the students justify their answers in the exercise sheet and their interpretations of the equal sign. In the analysis the constant comparative method is being used. This has led to codes and categories that will help answer the research question.

The results show that the interpretations of the equal sign that we can find among a group of eight grade students are several variants of the *compute* interpretation, *the same as* interpretation, and some occurrences of the *identity* interpretation and *can be exchanged for* interpretation. The findings indicate that the students are in a transition state between understanding the equal sign as a command to do computations and understanding the sign as a symbol that shows a relation.

Innhold

1	Innledning	1
1.1	Bakgrunn	1
1.2	Forskningsspørsmål	2
1.3	Oppgavens oppbygging	3
2	Teori	5
2.1	Prosess og objekt	5
2.2	Tegn og symboler i matematikken	6
2.3	Likhetstegnet	8
2.3.1	Tolkninger av likhetstegnet	8
2.3.2	Sammendrag av tidligere forskning på elevers oppfatninger av likhetstegnet	14
3	Metode	21
3.1	Utvalget	21
3.2	Forskningsdesign	22
3.3	Datainnsamling	24
3.3.1	Gjennomføring av undersøkelsen	24
3.3.2	Diskusjon av oppgavene	25
3.4	Analysemetode	28
3.4.1	Konstant komparativ analysemetode	28
3.4.2	Analyseprosess	29
3.5	Begrensninger ved metoden	31
3.6	Etiske betraktninger	32
4	Analyse og diskusjon	35
4.1	Likhetstegnet med befaling om prosess	35
4.1.1	Presentasjon av koder under kategorien <i>likhetstegnet med befaling om prosess</i>	36
4.1.2	Diskusjon av <i>likhetstegnet med befaling om prosess</i>	45

4.2	Likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter	48
4.2.1	Presentasjon av koder under kategorien <i>likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter</i>	48
4.2.2	Diskusjon av <i>likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter</i>	57
4.3	Diskusjon av kategoriene knyttet opp mot forståelse av lik- hetstegnet	60
4.4	Forekomster av kodene	61
4.4.1	Diskusjon av forekomsten av kodene	63
4.4.2	Koder og tolkninger typiske for visse oppgaver	66
5	Avslutning og perspektivering	71
	Referanser	74
A	Samtykkeskjema	77
B	Oppgavesett	79
C	Oppaver under intervju	83
D	Transkriberingsnøkkel	85

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn

I en av mine praksisperioder som lektorstudent underviste jeg en videregåendeklasse i matematikk. Dette var dyktige elever som hadde valgt teoretisk matematikk, 1T. Derfor ble jeg nokså overrasket da jeg oppdaget ved flere anledninger at flere av elevene hadde tendenser til å skrive lange utregninger med usanne likheter, som for eksempel $5 + 7 = 12 - 3 = 9$. Det så for meg ut som at de brukte likhetstegnet som en kobling mellom leddene i utregningene sine mens de holdt en løpende total, uten at det som sto på hver side av likhetstegnet nødvendigvis var likt. Jeg begynte å fundere på om alle elevene tolket likhetstegnet på samme måte som jeg gjør. Dersom de ikke gjør det, hvordan tolker de symbolet, og hvorfor har de en annen oppfatning? Man kan finne feiltolkninger av likhetstegnet blant elever i ungdomsskole, videregående og til og med på høyskole og universitet i følge Kieran (1981). Forståelsen av likhetstegnet er sentral i matematikken, men i følge Knuth, Stephens, McNeil og Alibali (2006) brukes det liten tid på symbolet etter tidlig barnetrinn.

Likhetstegnet er veldig viktig innenfor emnet algebra i matematikken, og dette emnet gjør norske skoleelever det dårlig på i tester som PISA (OECD, 2014). Forståelsen av likhetstegnet er et viktig grunnlag for videre matematikk. Det er blitt gjort mange undersøkelser på barneskoleelevers forståelse av likhetstegnet, altså før elevene begynner med algebraiske likninger. Man vet mye mindre om elevenes forståelse av likhetstegnet etter barneskoleårene (McNeil et al., 2006), og fordi likhetstegnet er veldig viktig i arbeid med

blant annet algebra, trengs det mer forskning på hvordan elever også i ungdomskolen tolker dette tegnet. Kanskje ligger mye av elevers vanskeligheter med algebra nettopp i en ufullstendig forståelse av likhetstegnet.

I læreplanen i matematikk fellesfag står det ingenting spesifikt om likhetstegnet, og dette til tross for at likhetstegnet brukes i så og si alle emner innen matematikken. Det står likevel noe om matematiske symboler i delen om grunnleggende ferdigheter. Blant annet står det om det å kunne skrive i matematikken at “det inneber å bruke matematiske symbol og det formelle matematiske språket til å løse problem og presentere løsninger” (Utdanningsdirektoratet, 2013). Matematiske symboler innebærer også likhetstegnet.

1.2 Forskningsspørsmål

I praksis har jeg observert episoder som tyder på at også eldre elever kan ha en ufullstendig forståelse av likhetstegnet. Derfor ville jeg undersøke hvordan elever på ungdomsskolen tolket dette symbolet, og kom fram til følgende forskningsspørsmål:

Hvilke tolkninger av likhetstegnet kan vi finne hos en gruppe åttendeklassinger i arbeid med lineære likninger?

Med tolkninger mener jeg både riktige forståelser av symbolet og mistolkninger. Likhetstegnet kan ha ulike betydninger i ulike kontekster, og flere forskjellige tolkninger kan være riktige. Men det er også funnet flere tolkninger av likhetstegnet som ikke stemmer (for eksempel Kieran, 1981). Tolkinger vil kunne vise seg gjennom direkte diskusjon om likhetstegnet, men også løsningsstrategier og fremgangsmåter i arbeid med likninger vil kunne avsløre hvordan elever tolker symbolet. For å svare på forskningsspørsmålet har jeg gjennomført en kvalitativ undersøkelse hvor seks åttendeklassinger har jobbet med lineære likninger. Disse elevene har jeg deretter intervjuet om betydningen av likhetstegnet, og om løsningsmetoder og tanker rundt oppgavene de hadde jobbet med. Elevene har også arbeidet med påstander om likhet i ulike kontekster, hvor de skulle begrunne om hvorfor påstandene var riktige eller gale. Jeg har valgt en kvalitativ metode fordi jeg mener at dersom jeg skal svare på forskningsspørsmålet og finne tolkninger av likhetstegnet må jeg gå i dybden. Selv om skriftlige besvarelser ville kunne gi meg

ulike løsningsstrategier i arbeid med likninger, vil en dialog kunne sikre at jeg får utdypet hvilke tolkninger som ligger til grunn for disse framgangsmåtene. Med en kvalitativ metode vil jeg kanskje også finne ut av om visse kontekster fremmer spesielle tolkninger av likhetstegnet.

1.3 Oppgavens oppbygging

Oppgaven består av i alt fem hovedkapitler. I kapittel 1 har jeg beskrevet bakgrunnen for undersøkelsen og hvorfor det er interessant å forske på tolkninger av likhetstegnet. Her har jeg også formulert et forskningsspørsmål, og utbrodert om hva jeg mener med spørsmålet og mine tanker om hvordan jeg best mulig kan gå fram for å finne svar på det.

I kapittel 2 vil jeg presentere et teoretisk rammeverk for oppgaven. Der vil jeg gå inn på teori om objekt og prosess i matematikken og presentere teori om matematiske tegn og symboler, som er viktig for forståelsen av vanskeligheter med tolkning av likhetstegnet. Her vil jeg også presentere teori om likhetstegnet, og gi en oversikt over hvilke tolkninger av likhetstegnet som finnes og som jeg mener det kan være mulig å finne i min undersøkelse. Til slutt i dette kapitlet vil jeg gi en kort oversikt over noe av forskningen som har blitt gjort tidligere på feltet.

I kapittel 3 skal jeg si noe om utvalget av elever for undersøkelsen, noe om metodene jeg har benyttet meg av og beskrive gjennomføringen av undersøkelsen. Her vil jeg også diskutere fordeler og begrensninger ved noen av oppgavene elevene fikk arbeide med. Deretter vil jeg presentere teori om analysemetoden jeg har brukt, for så å beskrive analyseprosessen. Til slutt vil jeg si noe om validiteten og reliabiliteten for studien, og noe om de etiske betraktningene knyttet til studien.

I kapittel 4 vil jeg analysere datamaterialet og diskutere funnene. I delkapittel 4.1 og 4.2 skal jeg presentere de to kategoriene jeg har kommet fram til, med tilhørende koder, og for hver av kategoriene følger en diskusjon av disse funnene. Jeg vil diskutere kategoriene knyttet opp mot forståelsen av likhetstegnet i delkapittel 4.3. Til sist i dette kapitlet, i delkapittel 4.4 vil jeg gi en oversikt over forekomster av kodene, også fordelt på grupper av elever og oppgaver, og diskutere disse resultatene.

Til sist vil jeg i kapittel 5 gi en kort oppsummering av hvilke tendenser undersøkelsen viser, samt refleksjoner rundt funnene i undersøkelsen.

Kapittel 2

Teori

I dette kapitlet vil jeg presentere teori som brukes i oppgaven. Først vil jeg gi en oversikt over hva prosess og objekt knyttet til matematikken er. Så skal jeg presentere teori for matematiske tegn og symboler, og si noe om ulike representasjonssystem og transformasjoner mellom representasjoner i matematikken. Til slutt vil jeg gi en oversikt over teori om likhetstegnet, forskjellige tolkninger av betydningen av likhetstegnet, og hva tidligere undersøkelser om tolkninger av likhetstegnet har resultert i.

2.1 Prosess og objekt

I dette delkapitlet vil jeg presentere noe teori om det vi kaller *prosess* og *objekt* i matematikken, som er med på å forklare kategoriene funnet i undersøkelsen. Der man i andre fag som for eksempel biologi har representasjoner, men også fysiske objekter som disse representasjonene skal forestille, har man i matematikken aldri direkte tilgang til objektene. Man kan kun se de matematiske objektene gjennom representasjoner av objektene (Sfard, 1991; Duval, 2006). Dette har ført til at elever ikke alltid ser på de som matematiske *objekter*, men heller som *prosesser*.

Dersom man refererer til et matematisk konsept som et abstrakt objekt, noe som eksisterer en plass i tid og rom, som en virkelig ting, ser man på det som et *objekt*. Dette betyr også at man gjenkjenner denne matematiske ideen gjennom ulike representasjoner og klarer å manipulere den som helhet. Den andre muligheten, at man ser på et matematisk konsept som en *prosess*,

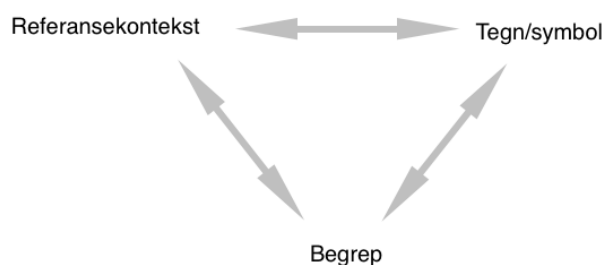
innebærer at en handling skal utføres. Det er altså et potensiale og kommer i eksistens kun etter en rekke handlinger er utført (Sfard, 1991). Et eksempel på å se på noe som en prosess i matematikken kan være dersom man ser på uttrykket $2 + 4$ som en beregning som skal utføres, slik at resultatet av handlingen blir 6. Når man ser på dette som et objekt vil man oppfatte $2 + 4$ som en annen representasjon av tallet 6. I kategoriene som presenteres i delkapittel 4.1 og 4.2 vil jeg skille mellom at man ser på likhetstegnet som en befaling om *prosess*, altså beregninger som skal utføres, og som likhet mellom to matematiske *objekter*, hvor altså uttrykkene på hver side av likhetstegnet oppfattes som objekter.

2.2 Tegn og symboler i matematikken

I dette delkapittelet vil jeg presentere noe teori om tegn og symboler i matematikken, som vil være viktig for å forstå opprinnelsen av ulike oppfatninger av betydningen av likhetstegnet. Som tidligere nevnt må matematiske objekter representeres, og dermed trenger man matematiske tegn. Et matematisk tegn har to funksjoner; en semiotisk funksjon og en epistemologisk funksjon.

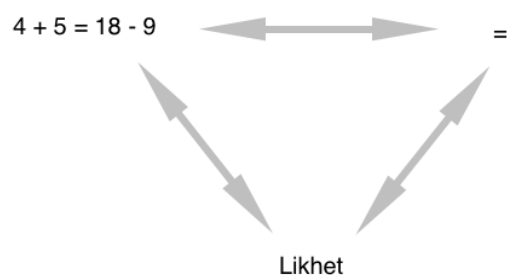
- Den semiotiske funksjonen er at tegnet står for noe annet. Altså at det representerer noe (et objekt eller en referansekontekst)
- Den epistemologiske funksjonen er at dette tegnet bærer med seg kunnskap

(Steinbring, 2006). En representasjon er “something that stands for something else” (Duval, 2006, s. 103), og sammenligner vi dette med den semiotiske funksjonen til matematiske tegn, ser vi at matematiske tegn er representasjoner. De matematiske tegnene brukes til å kode og beskrive den matematiske kunnskapen (Steinbring, 2006). De er verktøy som brukes for å produsere og kommunisere kunnskap (Duval, 2006). Disse tegnene har ingen betydning i seg selv, men kunnskapen må skapes av den som skal lære gjennom mediering mellom tegnet og en passende referansekontekst (Steinbring, 2006). Steinbring (2006) har beskrevet sammenhengen mellom tegn, referansekontekst og begrep ved hjelp av det han kaller den *epistemologiske trekanten*, som er vist i figur 2.1. Referansekonteksten er til venstre i trekanten, tegnet eller symbolet til høyre og begrepet under.



Figur 2.1: Den epistemologiske trekanten, tilpasset etter Steinbring (2006, s. 135).

Et eksempel på hva som kan fylles inn i de tre hjørnene av trekanten er vist i figur 2.2. Her er symbolet, som i dette tilfellet er likhetstegnet, plassert i høyre hjørne, og referansekonteksten er en likhet i venstre hjørne, mens begrepet er likhet.



Figur 2.2: Den epistemologiske trekanten med likhetstegnet.

Fordi også referansekonteksten vil være en representasjon av det matematiske objektet er det vanskelig å skape mening med tegnet, og man må passe på å skille begrepet fra referansekonteksten og symbolet. For å utvikle kunnskap om et matematisk begrep er det viktig at referansekonteksten (til venstre i figuren) som tegnet skal symbolisere varieres, slik at man ikke danner seg misoppfatninger når man medierer mellom referansekonteksten og tegnet. På denne måten vil man også etterhvert generalisere kunnskapen slik at man blir mer og mer uavhengig av referansekonteksten (Steinbring, 2006). Tegn og semiotiske representasjoner er sentrale i matematikken, og sentralt er også at representasjoner for de matematiske objektene kan byttes ut med andre

representasjoner (Duval, 2006). For eksempel er $4 + 5$, $3 + 6$ og 9 ulike representasjoner av det samme matematiske objektet tallet ni, og kan erstattes av hverandre.

2.3 Likhetstegnet

I dette delkapittelet vil jeg først gi en oversikt over forskjellige tolkninger av likhetstegnet, hvor jeg tar for meg tolkninger ulike forskere har skrevet om sammen med mine egne tanker rundt disse. Deretter vil jeg gi et sammen- drag av tidligere forskning på feltet. Det meste av forskningen på forståelsen av likhetstegnet er gjort på elever i barneskolealder, men det er også blitt gjort en del på elever på mellomtrinnet og i ungdomsskolen. Noen hevder at forståelsen av likhetstegnet er nært knyttet til alder og utviklingsnivå (for eksempel Kieran, 1981), mens andre igjen argumenterer for at alderen ikke er den viktigste faktoren for denne forståelsen (for eksempel McNeil et al., 2006; Cobb, 1987). Likhetstegnet er en konvensjon, og at det indikerer likhet er bestemt av matematikere. Derfor er det ingen logisk grunn til at tegnet ikke kan bety noe annet (Falkner, Levi & Carpenter, 1999), og det er naturlig at tegnet kan tolkes ulikt.

2.3.1 Tolknings av likhetstegnet

I denne delen vil jeg gi en oversikt over ulike tolkninger av likhetstegnet, som er nyttig for å sammenligne tolkninger jeg finner i mitt datamateriale med.

Regn ut-tolkning

Regn ut-tolkningen av likhetstegnet innebærer at man tolker likhetstegnet som en indikator på å regne ut uttrykket foran likhetstegnet og skrive ned et resultat rett etter likhetstegnet. Denne forståelsen legger vekt på resultatet av de aritmetiske operasjonene (Kieran, 1981).

Jeg vil dele *regn ut*-tolkningen i to forskjellige tolkninger avhengig av konteksten likhetstegnet befinner seg i. Den ene tolkningen innebærer at man oppfatter likhetstegnet som en befaling om å “regne ut” uansett hvilken kontekst man har med å gjøre. Det vil si at man vil løse oppgaven

$$4 + 8 = \square + 7$$

feil ved å sette tallet 12 i boksen. Men man vil også løse oppgaven

$$4 + 5 = \square$$

riktig ved å sette 9 i boksen. McNeil et al. (2006) sin undersøkelse viste at elever i sjette- til åttendeklasse hadde mindre sannsynlighet for å gi en relasjonell forklaring på likhetstegnet dersom de ble presentert for tegnet i konteksten “uttrykk = svar”. Med konteksten “uttrykk = svar” mener jeg en likhet som har et uttrykk som inneholder minst en aritmetisk operasjon på venstresiden av likhetstegnet og et tall på høyresiden. Med dette i bakholdet kan man kanskje også mistenke at noen elever vil gi en forklaring som samsvarer med *regn ut*-tolkningen av likhetstegnet bare dersom de blir presentert for konteksten “uttrykk = svar”, dermed er dette en annen variant av *regn ut*-tolkningen. Ser man på en besvarelse av den nederste oppgaven isolert vil man kanskje ikke kunne si noe om eleven har en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet eller ikke, men dette i sammenheng med andre oppgaver vil kunne indikere hvilken oppfattelse eleven har. Det vil likevel være vanskelig å oppdage om eleven har en *regn ut*-tolkning kun i konteksten “uttrykk = svar” som i den siste oppgaven ovenfor, da dette like gjerne kan indikere en *det samme som*-tolkning av likhetstegnet (som jeg vil komme tilbake til nedenfor). Likevel kan man muligens oppdage dette fenomenet i en intervjusituasjon dersom eleven forklarer at han eller hun forstår likhetstegnet på den måten i *denne* situasjonen, men ikke i andre sammenhenger. I konteksten “uttrykk = svar” mener jeg at en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet ikke er feil, men i likhet med McNeil et al. (2006) mener jeg at den blir overflødig dersom man oppnår en forståelse av likhetstegnet som et symbol for ekvivalens. Dette er fordi en slik forståelse kan anvendes i alle kontekster, i motsetning til *regn ut*-tolkningen.

Jones (2009) argumenterer for at begrepet *plassindikator* er et bedre ord for *regn ut*-tolkningen, da det legger vekt på notasjonsrollen til likhetstegnet. Dette er fordi mange barn tolker matematiske uttrykk som for eksempel $4 + 2$ slik at de skal “regne ut”, selv uten at det er etterfulgt av likhetstegnet. Derfor blir likhetstegnets rolle en plassindikator for resultatet av beregningen (Jones, 2009). I mine øyne henger dette tett sammen med *regn ut*-tolkningen av likhetstegnet og man vil løse oppgavene på samme måte. Men siden det kan tenkes at det også er elever som oppfatter det slik at det er *likhetstegnet* som indikerer at man skal utføre beregningene vil jeg skille mellom *regn ut*-

tolkningen og *plassindikator*-tolkningen. Dermed mener jeg at *plassindikator*-tolkningen hører inn under *regn ut*-tolkningen, men den blir ikke nøyaktig det samme.

Falkner et al. (1999) har beskrevet at det i en sjetteklasse var flere som skrev 17 i boksen for den ukjente (mange skrev også 12) i følgende likning;

$$4 + 8 = \square + 5$$

Dette tolker jeg som at disse elevene har lagt sammen alle tallene i regnestykket uavhengig av hvilken side av likhetstegnet de står på, og skrevet resultatet i boksen. Altså $4 + 8 + 5$, og resultatet av dette som er 17 blir plassert i boksen. Derfor mener jeg at det kan finnes en variant av *regn ut*-tolkningen hvor likhetstegnet blir oppfattet som et tegn som indikerer at man skal regne sammen alt i regnestykket uavhengig av hvilken side av likhetstegnet det står på.

Det samme som-tolkning

Jones (2009) beskriver *det samme som*-tolkningen av likhetstegnet som en sammenligning mellom verdien av hver side av likhetstegnet, og at man aksepterer en variasjon av ulike påstandsformer. En påstandsform som *det samme som*-tolkningen av likhetstegnet kan innebære aksept av er eksakte likheter, som for eksempel

$$5 = 5$$

Dette er den refleksive egenskapen til en ekvivalensrelasjon. *Det samme som*-tolkningen kan også innebære at man aksepterer former som er strukturelt like, altså som er resultatet av samme aritmetiske operasjon, som for eksempel

$$3 + 10 = 5 + 8$$

Men dette kan også igjen bære med seg at eleven ser seg nødt til å beregne hver side for å kontrollere denne numeriske likheten. I så fall kan det være at elevene ser på uttrykket på hver side av likhetstegnet som en *prosess*, en handling som må utføres og ikke som *objekter*.

Jones (2009) legger vekt på at dersom man skal ha en mer utviklet forståelse av likhetstegnet bør man kunne komme til et nivå hvor man utnytter strukturelle snarveier og aritmetiske fakta i sammenligningen for å minke behovet for beregninger (Jones, 2009). Dette kan innebære at man for eksempel *ser*

at uttrykkene på hver side av likhetstegnet i likheten under er like ved å sammenligne ledd, uten å måtte regne ut uttrykkene først for å sammenligne verdien.

$$23 + 42 = 42 + 23$$

Dette kan indikere at eleven i motsetning til forklaringen over, ser på uttrykkene på hver side av likhetstegnet som matematiske *objekter*, siden det ikke blir utført en prosess før det skjer en sammenligning mellom sidene.

Identitet-tolkning

I noen kontekster kan også likhetstegnet ses på som et symbol som viser en identitet, som for eksempel at summen av de n første oddetallene er lik det n 'te kvadrattallet;

$$1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

Det er jo slik at det vil være samme verdi på begge sider av likhetstegnet dersom vi setter inn et vilkårlig tall for n , men likhetstegnet viser også her en *identitet*. Vi har en identitet når den andre siden av likhetstegnet er en omforming av den første siden. Da vil likheten alltid være sann, uansett hvilke tall vi setter inn for de ukjente variablene. I skolesammenheng skal man gjerne bevise at slike identiteter gjelder i alle tilfeller, men man kan også få en slik sammenheng presentert for så å bruke disse sammenhengene i videre beregninger. Dermed mener jeg at denne tolkningen av likhetstegnet til dels henger sammen med likhetstegnet brukt til å definere sammenhenger.

For eksempel kan man i en oppgave få oppgitt at

$$x = 5$$

Da er x definert til å ha verdien 5, og man kan videre bruke denne sammenhengen. Det er på denne måten likhetstegnet er brukt i dataprogrammering, hvor objektet foran likhetstegnet tilegnes verdien som står bak likhetstegnet. Dette mener jeg stemmer overens med forståelsen av likhetstegnet som Jones (2009) har beskrevet ved å betrakte følgende likhet;

$$a = b$$

Han argumenterer for at man med *det samme som*-tolkningen av likhetstegnet ser på de interne strukturene til a og b for å etablere at denne likheten

stemmer. Videre mener han at alternativet er å se på likheten over som en gitt definisjon, og så kan man bruke a og b i denne relasjonen til videre tenkning. For denne forståelsen kan det være nødvendig å kunne se på a og b som forskjellige representasjoner for det samme objektet (Jones, 2009).

Kan byttes ut med-tolkning

Jones (2009) har foreslått *kan byttes ut med-tolkningen* av likhetstegnet som en komplementær betydning. Med dette menes at man ser at ekvivalente uttrykk kan byttes ut med hverandre, noe som er veldig nyttig blant annet i løsning av likninger. Et eksempel på hva som menes med *kan byttes ut med-tolkningen* er at man ser at man kan skrive om uttrykket

$$38 + 2 = 40$$

til

$$23 + 17 = 40$$

fordi $38 + 2 = 23 + 17$. Dette kommer av at uttrykkene på hver side av likhetstegnet er to ulike representasjoner av det samme matematiske objektet, de kan dermed erstattes av hverandre (Duval, 2006). Denne forståelsen går hånd i hånd med flere av de identifiserende egenskapene til en ekvivalensrelasjon, og da spesielt den transitive egenskapen (Jones, 2009). Ved definisjon er en ekvivalensrelasjon på en mengde en relasjon som tilfredsstillende følgende betingelser

- Hvert element i mengden er ekvivalent med seg selv (refleksivitet)
- Hvis elementet A er ekvivalent med B , da er også B ekvivalent med A (symmetri)
- Hvis A er ekvivalent med B , og B er ekvivalent med C , da er A ekvivalent med C (transitivitet)

(Kreyszig, 2006).

For de relle tallene har vi at symmetri betyr at dersom $15 = 5 + 10$ så er også $5 + 10 = 15$ og refleksivitet betyr at dersom $8 = 8$ så har vi at 8 er 8 . Den transitive egenskapen betyr at dersom vi har $2 + 3 = 1 + 4$, og $1 + 4 = 5$, så er også $2 + 3 = 5$ (Baroody & Ginsburg, 1983). Dette kan man se ligner på eksempelet på *kan byttes ut med-tolkningen*. Denne forståelsen av likhetstegnet er viktig å beherske fordi dette er veldig sentralt i algebraisk

manipulasjon, som igjen brukes innen utallige emner innenfor matematikken og andre fag.

Instrumentell og Relasjonell forståelse av likhetstegnet

Forskerne enes om at en *instrumentell forståelse* (Skemp, 1976) av likhetstegnet (ikke alle bruker dette begrepet) innebærer en *regn ut*-tolkning. En slik tolkning som overføres til en annen kontekst enn “uttrykk = svar” ender opp som en feiltolkning av tegnet. Det kan argumenteres for at dersom man har denne tolkningen kun i konteksten “uttrykk = svar”, så kan tolkningen gå under en *relasjonell forståelse* (Skemp, 1976) av likhetstegnet. Jeg mener at dersom det skal gjøre det må også eleven kunne se at *det samme som*-tolkningen vil gjelde i den samme konteksten, og at *regn ut*-tolkningen dermed blir overflødig. Det er flere ting som bør inngå i en relasjonell forståelse av likhetstegnet, og forskerne nevner noen forskjellige krav.

Knuth et al. (2006) definerer en relasjonell forståelse av likhetstegnet som å forstå likhetstegnet som “det samme som”, mens en instrumentell forståelse forklares som oppfattelse av at tegnet betyr “regn ut” eller “svaret”. De argumenterer for at en relasjonell forståelse av likhetstegnet er viktig for at transformasjoner man utfører på likninger skal være meningsfulle (Knuth et al., 2006). Jacobs, Franke, Carpenter, Levi og Battey (2007) legger til at en relasjonell forståelse av likhetstegnet involverer at man ser tegnet som indikator på en relasjon mellom to uttrykk. Og man bør forstå at ved å utføre de samme transformasjonene på begge uttrykkene vil relasjonen mellom dem være uendret (Jacobs et al., 2007).

Jones (2009) mener en *det samme som*-tolkning hvor man godtar forskjellige påstandsformer inngår i det han kaller en *grunnleggende relasjonell* forståelse. Han argumenterer for at en *fullstendig relasjonell* forståelse av likhetstegnet krever en dualitet som omfavner både *det samme som*- og *kan byttes ut med*-betydningen. Disse betydningene er komplementære og man må kunne bruke disse om hverandre. Jones kommenterer at en *fullstendig relasjonell* forståelse av likhetstegnet er mer komplisert og vagt enn en *grunnleggende relasjonell* forståelse, men at den involverer at man kan utnytte strukturelle snarveier og aritmetiske fakta på fleksible måter (Jones, 2009). Jeg er enig i hva Jones mener, og vil påstå at en *fullstendig relasjonell* forståelse vil kreve først og fremst en *det samme som*-tolkning og også en *kan byttes ut med*-tolkning, men det vil også kreve forståelse av likhetstegnets rolle som symbol for identitet. Jeg mener også at man også bør kunne bytte fleksibelt mellom disse

tolkningene.

Både *regn ut*-tolkningen og *det samme som*-tolkningen av likhetstegnet involverer beregninger og sammenligning av resultater, og disse er derfor kognitivt sammenlignbare (Jones, 2009). Dette er jeg enig i, men vil presisere at en mer utviklet *det samme som*-forståelse nødvendigvis ikke involverer beregninger. Den kan involvere sammenligninger og strukturelle snarveier, som forklart ovenfor, som minker behovet for beregning. Dette vil da begynne å nærme seg det Jones (2009) kaller det *fullstendig relasjonelle* synet. Kieran (1981) understreker viktigheten av at elever forstår at man kan erstatte hver likning med en ekvivalent likning for å ha en fullstendig forståelse av likhetstegnet. Det er også viktig at elever godtar de tre egenskapene til en ekvivalensrelasjon (Kieran, 1981; Baroody & Ginsburg, 1983).

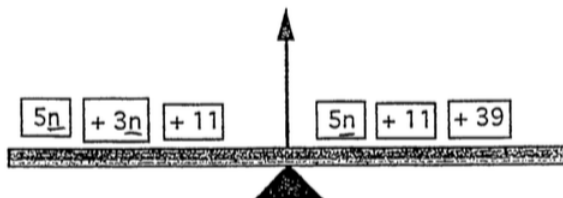
2.3.2 Sammendrag av tidligere forskning på elevers oppfatninger av likhetstegnet

I dette delkapittelet vil jeg presentere en oversikt over noe av forskningen som er blitt gjort på elevers tolkninger av likhetstegnet, som er nyttig for å sammenligne resultatene fra min undersøkelse med.

Kieran (1981) skrev en artikkel hvor hun ser på studier gjort i forbindelse med forståelsen av likhetstegnet i ulike alderstrinn, og trekker paralleller og ser på forskjeller mellom disse undersøkelsene. På barneskolen har elever ofte problemer med å akseptere setninger på formen $3 = 3$. Det viser seg at mange barn i alderen til og med ungdomsskolen oppfatter likhetstegnet som en kommando om å gjøre en beregning. Fra ulike studier slutter Kieran (1981) at elever i trettenårs alderen er i en slags overgangsperiode mellom å se likhetstegnet som en befaling om å “regne ut” og å oppfatte tegnet som et symbol på ekvivalens. Hun kommenterer også at elever i tolv- til fjortenårs alderen beskriver betydningen av likhetstegnet med vekt på begrepet “svar” (Kieran, 1981).

Linchevski og Herscovics (1996) gjorde en undersøkelse med seks elever fra en sjuendeklasse hvor de gjennomførte to tester og et intervju med elevene. Noen av disse elevene viste at de forsto likhetstegnet som et symbol som indikerer ekvivalens. Men undersøkelsene ga også eksempler på at noen elever foretrakk å skrive om likninger slik at venstresiden inneholdt et uttrykk, og at elevene så på denne som en prosess, mens høyresiden ble skrevet som et resultat av

denne prosessen. Ved hjelp av en balansemodell som vist i figur 2.3, så fem av de seks elevene som deltok i forsøket at like ledd kunne strykes, mens den siste eleven så kun at numeriske ledd (uten variabler) kunne strykes.



Figur 2.3: Balansemodell (Linchevski & Herscovics, 1996, s. 53).

Artikkelforfatterne fant også at elevenes oppfatning av ordet “solution” ikke var det samme som deres. Elevene forsto ordet som resultatet av en prosess, plassert på høyresiden av likhetstegnet (Linchevski & Herscovics, 1996).

Herscovics og Linchevski (1994) gjennomførte en undersøkelse ved en sjuendeklasse, før introduksjon til algebra. Det var 22 elever som deltok i forsøket, som besto av individuelle intervjuer. Selv om mange elever godtok at likhetstegnet ble brukt mellom to summer, satte de opp to separate likninger når de skulle vise at de var like. Ved løsning av likninger hvor kun addisjon eller multiplikasjon var operasjonene, viste det store flertallet av elevene at de brukte inverse operasjoner for å løse disse. Artikkelforfatterne konkluderte med at elevene opererte rundt den ukjente på et numerisk nivå (Herscovics & Linchevski, 1994).

En undersøkelse ble gjennomført av Knuth et al. (2006) med 177 elever fra femte- til åttendeklasse, hvor elevene svarte skriftlig på spørsmål om likhetstegnets betydning og løste likninger. Undersøkelsen viste at de fleste sjettede og åttendeklassinger ga definisjoner på likhetstegnet som “adder tallene” eller “svaret”, mens det blant syvendeklassinger var flere som uttrykte at likhetstegnet betydde “det samme som” enn det var som ga en instrumentell definisjon. Undersøkelsen viste dermed ikke tendenser til at sannsynligheten for en relasjonell forståelse av likhetstegnet øker med alderen. Elever med en relasjonell forståelse av likhetstegnet hadde større sannsynlighet for å løse likningene riktig, og hadde også større sannsynlighet for å bruke en algebraisk strategi, hvor man utfører de samme transformasjonene på begge sider av likhetstegnet. En metode hvor elevene jobbet seg baklengs gjennom problemet og gjorde inverse operasjoner på motsatt side av likhetstegnet, kalte

Knuth et al. (2006) for *unwind*, noe jeg har valgt å oversette til *nøste opp*. Resultatene tenderer til at relativt få elever på mellomtrinnet har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. De hevder at en grunn til at *regn ut*-tolkningen av likhetstegnet får slik grobunn er fordi likhetstegnet ofte blir presentert tidlig på barneskolen, og at man senere bruker liten tid på andre betydninger av tegnet (Knuth et al., 2006).

Det har også blitt gjennomført en undersøkelse blant sjetteklassinger som innebar pre- og posttester, intervjuer og undervisning (Banerjee & Subramaniam, 2012). Etter at elevene hadde hatt undervisning om aritmetikk og algebra var de i stand til å bedømme om uttrykk var like ved å se på strukturen i uttrykkene og sammenligne ledd. Noen komplementerte dette ved å regne ut uttrykkene for å være sikre på at verdiene ble de samme (Banerjee & Subramaniam, 2012).

Cobb (1987) intervjuet 34 førsteklasinger rundt oppfattelsen av likhetstegnet. Undersøkelsen viste at kun én av disse elevene aksepterte symmetriske former (for eksempel $10 + 5 = 5 + 10$), men eleven aksepterte også former som $20 - 5 = 5 + 20$. Dette tyder på at eleven fokuserte på mønstre i stedet for numeriske forhold. Halve utvalget gjorde konsekvent om setninger slik at de to første tallene var forbundet med en operator, etterfulgt av et likhetstegn og det siste tallet. Førsteklasingene tolket likhetstegnet som et “gjør noe”-signal (Cobb, 1987).

I Falkner et al. (1999) sin undersøkelse med Falkners egen barneskoleklasse over to år (første- til andreklasser), fant de at unge elever kan klare å forstå likhetsrelasjoner som involverer samlinger av objekter. Men elevene hadde vanskeligheter med å knytte dette til symbolske representasjoner som involverte likhetstegnet. Etter å ha arbeidet med disse elevene med forståelsen av likhetstegnet over en toårsperiode viste de fleste elevene en oppfattelse av likhetstegnet som et tegn som viste en relasjon, og ikke et signal om å utføre noe (Falkner et al., 1999). Dette mener jeg viser at alder ikke nødvendigvis behøver å være en begrensning for å forstå betydningen av likhetstegnet.

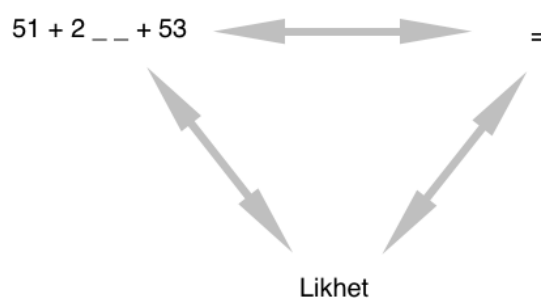
McNeil et al. (2006) utførte en todelt studie, hvor de i den ene delen undersøkte forekomsten av likhetstegnet i ulike kontekster i fire amerikanske lærebøker for mellomtrinnet. Det viste seg at likhetstegnet ofte ble presentert i konteksten “uttrykk = svar”, og sjelden i en “operasjoner på begge sider”-kontekst. Dette mener McNeil et al. (2006) er med på å forsterke elevens instrumen-

telle forståelse av likhetstegnet. I den andre delen undersøkte de forståelsen elever på mellomtrinnet hadde av likhetstegnet presentert i ulike kontekster, og det viste seg at elever presentert for konteksten “uttrykk = svar” hadde mindre sannsynlighet enn elever presentert for andre kontekster for å gi en relasjonell forklaring på likhetstegnets betydning. Sannsynligheten for å ha en relasjonell forståelse av symbolet økte med alderen. De fant at bare 44 % av elevene på mellomtrinnet hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet. McNeil et al. (2006) mener at flere elever kan forstå likhetstegnet på en relasjonell måte, men at likningene de blir presentert for gjør det vanskelig for dem å demonstrere dette. De argumenterer for at dersom vanskelighetene med forståelsen av likhetstegnet skyldes kunnskapen oppnådd fra tidlige erfaringer med likhetstegnet, så kan elevers evner til å tilegne seg relasjonell forståelse av likhetstegnet avhenge av læringskonteksten. Dette henger sammen med forklaringen Steinbring (2006) gir på viktigheten av variering av referansekonteksten ved læring av et matematisk symbol.

Såens-Ludlow og Walgamuth (1998) observerte en tredjeklasse i løpet av et skoleår. I studien fant de eksempler på at noen barn bruker likhetstegnet som en indikator på et sluttpunkt i hver delutregning, som for eksempel

$$15 + 30 = 35 + 5 = 40 + 1 = 41$$

Mange av barna tolket likhetstegnet som en kommando om å utføre de indikerte operasjonene. Undersøkelsen viste også at elevene selv etter undervisning om dette symboliserte likhet på forskjellige måter (Såens-Ludlow & Walgamuth, 1998). Dette mener jeg kan tyde på at elevene har vanskeligheter med å knytte begrepet og symbolet sammen. I figur 2.4 har jeg representert dette i en epistemologisk trekant med en av oppgavene som ble gitt under undersøkelsen som referansekontekst. Det var typisk at elevene kunne fylle inn det riktige tallet 0 i det siste tomme feltet, mens i det første var det mange som skrev for eksempel “equals” for å symbolisere likhet (Såens-Ludlow & Walgamuth, 1998). Dette mener jeg viser at elevene har klart å knytte referansekonteksten (til venstre) og begrepet (nederst) sammen, men de har ikke klart å knytte dette til symbolet (høyre hjørne).



Figur 2.4: Epistemologisk trekant med referanseobjekt fra Såens-Ludlow og Walgamuth (1998, s. 184).

Jones (2009) har skrevet en doktoravhandling hvor han gjennomførte en kvalitativ undersøkelse for å finne svar på følgende fire forskningsspørsmål;

- Fremmer *kan byttes ut med*-betydningen oppmerksomhet mot påstandformer?
- Er *kan byttes ut med*- og *det samme som*-betydningene for likhetstegnet pedagogisk distinkte?
- Kan barn koordinere *kan byttes ut med*- og *det samme som*-betydningene for likhetstegnet?
- Kan barn koble sin implisitte aritmetiske kunnskap med eksplisitte transformasjoner av notasjon?

To trettenårige jenter fikk jobbe med et dataprogram som Jones hadde designet, hvor de samarbeidet om å løse spesifiserte oppgavemål. Data ble samlet inn fra skjerm-interaksjonen og lydopptak under oppgavejobbingen. Kodingen av dataene fokuserte på hvilke ord og utsagn elevene brukte under arbeidet, og da særlig hvilke ord som ble brukt når de utførte transformasjoner på objektene på skjermen. Undersøkelsen viste at elevene hadde større vanskeligheter med likhetstegnet enn noe annet objekt på skjermen. Elevene fastslo balanse mellom to uttrykk ved å redusere disse til tall. Når de skrev setningene på papir skrev de nesten utelukkende ned setninger på formen “uttrykk = svar”. Jones (2009) gjennomførte undersøkelsen med tre par av fjerdeklasninger, og undersøkelsen viste at disse elevene hadde en intuitiv preferanse for “uttrykk = svar”-konteksten. Forskningsdeltakerne fikk arbeide med oppgaver hvor de ble presentert for ekvivalenspåstander. Oppgavene gikk ut på å transformere uttrykk ved å se etter like uttrykk brukt i andre ekvivalens-

påstander. For eksempel kunne elevene transformere $140 + 12 = 152$ til $87 + 65 = 152$. Dette gjorde de ved å bytte ut ekvivalente uttrykk ved hjelp av følgende likheter; $80 + 60 = 140$, $7 + 5 = 12$, $87 = 80 + 7$, $65 = 5 + 60$. Her fant Jones (2009) at elevene fokuserte på struktur snarere enn sannheten av påstandene om likhet. Fra undersøkelsene fant Jones ut at *det samme som*-betydningen er nyttig for å evaluere påstander om likhet utfra sannhet (riktig eller ikke), mens *kan byttes ut med*-betydningen er nyttig for å evaluere påstandene utfra struktur (Jones, 2009).

I dette kapitlet har jeg forklart hvordan matematiske konsepter kan ses på som *prosesser*, altså noe som skal eller har blitt utført, eller *objekter*. Jeg har også presentert teori om tegn og symboler i matematikken og hvordan man skaper mening med tegn. Deretter har jeg presentert hvilke ulike tolkninger av likhetstegnet som man tidligere har funnet hos elever; *regn ut*-tolkningen, *det samme som*-tolkningen, *identitet*-tolkningen og *kan byttes ut med*-tolkningen. Til sist har jeg gitt et sammendrag av noe av forskningen som har blitt gjort på elevers tolkninger av likhetstegnet.

Kapittel 3

Metode

I dette kapittelet vil jeg gi en beskrivelse av hvordan undersøkelsen og analysearbeidet ble gjennomført, og hvilke valg jeg har tatt i løpet av dette arbeidet. Valgene er blitt gjort slik at jeg best mulig kunne besvare forskningsspørsmålet;

Hvilke tolkninger av likhetstegnet kan vi finne hos en gruppe åttendeklassinger i arbeid med lineære likninger?

Først i dette kapittelet vil jeg si litt om hvilke elever som deltok i undersøkelsen og hvordan disse ble valgt. Deretter vil jeg si noe om forskningsdesignet jeg har valgt, og hvilke datainnsamlingsmetoder jeg har benyttet meg av. Så vil jeg si noe om selve gjennomføringen av datainnsamlingen, etterfulgt av en diskusjon rundt noen utvalgte oppgaver elevene fikk arbeide med, hvor jeg tar for meg hensikten med disse oppgavene og hvilke begrensninger de har. Videre vil jeg presentere teori om analysemetoden som er blitt brukt, for så å forklare hvordan jeg har analysert datamaterialet fra undersøkelsen. Til sist vil jeg si noe om reliabiliteten og validiteten for undersøkelsen og begrensninger ved metodene jeg har brukt, etterfulgt av noen etiske betraktninger.

3.1 Utvalget

I dette delkapittelet vil jeg beskrive hvordan utvalget av elever som deltok i undersøkelsen ble valgt, og noe om disse elevene. Før undersøkelsen fant sted hadde jeg bestemt meg for å undersøke tolkninger av likhetstegnet blant ungdomsskoleelever, og tok derfor kontakt med en ungdomsskole i en liten by i Nordland. Der ble jeg satt i kontakt med en lærer som var interessert i

at jeg kunne få gjennomføre undersøkelsen med hennes åttendeklasse. Denne klassen ble med andre ord valgt ut fra tilgjengelighet, og etter dette tilpasset jeg forsøket mitt til deres nivå. Et samtykkeskjema ble levert til alle elevene i klassen, og de som var interesserte i å delta fikk beskjed om å levere dette tilbake i underskrevet form. Samtykkeskjemaet er gitt i vedlegg A. Av elevene som viste interesse valgte jeg i samråd med læreren ut 6 elever som skulle få delta i undersøkelsen. Jeg ville ha 6 elever fordi dette var mange nok til at jeg kunne få interessante og varierende data, men få nok til at jeg kunne gjennomføre intervjuer med tre par av elever uten at tidsbegrensningen ble for stor. De seks elevene som ble valgt ut lå i følge læreren på varierende nivå i matematikken, men parene satte vi sammen slik at hver elev i et par lå på ca samme faglige nivå i matematikken. Dette var viktig for undersøkelsen fordi det var større sannsynlighet for at elevene ville samarbeide, og ikke slik at den ene eleven ville ta styringen. Alle elevene ble ansett for å være muntlig aktive, noe som også var viktig under intervjuet for å få nok data. Elevene som ble valgt ut til undersøkelsen har fått de fiktive navnene som følger:

Gruppe 1

Andreas og Silje

Gruppe 2

Torunn og Maria

Gruppe 3

Kristoffer og Sindre

3.2 Forskningsdesign

I dette delkapittelet vil jeg beskrive hvilket forskningsdesign og hvilke datainnsamlingsmetoder jeg har brukt i undersøkelsen. Jeg bestemte meg for å bruke et kvalitativt forskningsdesign, da jeg mener at en kvalitativ metode var best egnet til å besvare forskningsspørsmålet mitt. Et slikt design var også gunstig på grunn av tidsbegrensningen til prosjektet, og at det er lettere å få tilgang til elever dersom man ikke behøver så mange. I følge Robson (2011) kjennetegnes kvalitative undersøkelser ved at funn presenteres verbalt eller ved andre ikke-numeriske former, konteksten for undersøkelsen blir sett på som viktig for å forstå resultatene, det involverer som oftest få deltakere eller situasjoner, og at forskeren i noe grad vil påvirke undersøkelsen. På grunn av dette siste er det viktig at man er åpen om hvordan undersøkelse og analyse er gjennomført, og reflekterer over dette. I en kvalitativ undersøkelse er det også vanlig å bruke flere datainnsamlingsmetoder for å få flere perspektiv slik at man bedre kan besvare forskningsspørsmålet (Robson, 2011). Derfor valgte jeg i min undersøkelse å benytte meg av både intervju og oppgavesett som elevene skulle arbeide med.

Undersøkelsen vil jeg klassifisere som et kasusstudie med fleksibelt design. Et kasusstudie er begrenset i tid og rom, og involverer å gjøre empiriske undersøkelser av et fenomen i en kontekst. Et fleksibelt design på en undersøkelse kjennetegnes av at man underveis kan modifisere hvordan man samler inn og analyserer data, modifisering av forskningsspørsmålet og at man kan gjøre endringer for å følge interessante spor man opppdager (Robson, 2011). Min studie var tidsbegrenset innenfor en uke, og undersøkte tolkninger av likhetstegnet. Konteksten ble skapt utfra skolen, klassen og at oppgavene ble tilpasset elevenes nivå. I min undersøkelse har jeg både modifisert forskningsspørsmålet og jeg brukte besvarelsene fra oppgavesettet for å utforme intervjuguider.

Undersøkelsen var todelt, hvor første del var en økt på ca en skoletime (45 minutter) hvor elevene fikk arbeide i par med et oppgavesett utformet av meg. Hensikten med oppgavene var å finne ut av hvilke tolkninger elevene hadde av likhetstegnet og eventuelt om de avslørte noen løsningsstrategier. Til denne økten bestemte jeg meg for at alle gruppene kunne få arbeide med oppgavene samtidig, og jeg kunne få med meg mye av det som skjedde da det kun var seks personer til sammen. Jeg bestemte meg for at jeg skulle observere økten gjennom en ikke-deltakende observasjon, for å påvirke dem minst mulig. Likevel ville jeg være tilgjengelig for spørsmål angående oppgavene dersom noen synes formuleringene var uklare. Jeg ville også ta feltnotater under denne observasjonen for å hjelpe meg å utforme intervjuguidene jeg skulle lage etter økten med oppgaveløsning, og for å tolke de skriftlige besvarelsene.

Den andre delen av undersøkelsen besto av ett intervju (på ca 30 minutter) per gruppe med elever. Grunnen til at jeg ville la de jobbe i par var at dette muligens kunne virke betryggende på elevene under intervjuene. Hensikten med intervjuene var å undersøke hvilke tolkninger elevene hadde av likhetstegnet, finne ut av hvordan de hadde tenkt under arbeidet med oppgavene og finne ut hvilke løsningsstrategier elevene hadde brukt. I følge Robson (2011) er det vanlig med en myk inngang til intervjuer for at deltakerene skal føle seg trygge og at man får mest mulig av den informasjonen man trenger. Et semi-strukturert intervju slik som jeg ville bruke er kjennetegnet ved at intervjueren vanligvis har en sjekkliste over tema, formuleringer og rekkefølge på spørsmål, men står fritt til å modifisere dette underveis og komme med oppfølgingsspørsmål basert på hva som blir sagt i løpet av intervjuet (Robson, 2011). Jeg ville bruke oppgavene elevene hadde arbeidet med som basis for intervjuene, slik at elevene også muligens ville føle seg mer forberedt på inter-

vjusituasjonen. Under intervjuene ville jeg også gi elevene noen flere oppgaver som egnet seg bedre muntlig. Disse ville bli gitt mot slutten av intervjuene, slik at elevene forhåpentligvis hadde blitt litt mer trygge. Jeg valgte å ta videoopptak av intervjuene. Ettersom noen føler det som ubehagelig å bli filmet valgte jeg å la kamera peke ned på bordet slik at hendene til elevene ble med på opptaket, men ikke ansiktene, og slik kunne jeg få registrert både hva som ble sagt og gester. Ved å ikke gjøre det på denne måten kunne dette ha gjort elevene mer usikre, noe som igjen kunne ha påvirket datainnsamlingen. Etter undersøkelsen ville datamaterialet bestå av de skriftlige besvarelsene fra oppgaveløsningen og videoopptak fra de tre intervjuene.

3.3 Datainnsamling

I dette delkapittelet vil jeg først gi en beskrivelse av hvordan gjennomføringen av undersøkelsen skjedde, og så beskrive hensikten med noen utvalgte oppgaver fra undersøkelsen, samt begrensninger disse oppgavene har.

3.3.1 Gjennomføring av undersøkelsen

Dataene mine ble som nevnt ovenfor bestående av skriftlige besvarelser samt videoopptak fra intervjuene. Den første dagen jeg møtte elevene for gjennomføring av oppgavene ga jeg dem igjen informasjonen som de hadde fått i informasjonsskrivet. Det ble også lagt vekt på at de kom til å bli anonymisert. De fikk beskjed om at de skulle arbeide i gruppene, og at jeg ikke skulle hjelpe dem med oppgavene, men at jeg var tilgjengelig dersom de hadde spørsmål angående spørsmålsstillingen i oppgavene. Jeg ba dem levere én besvarelse per gruppe, men til tross for dette ga gruppe 3 bestående av Kristoffer og Sindre likevel inn hver sin besvarelse.

Jeg brukte besvarelsene og feltnotatene til å utforme intervjukjema tilpasset hver gruppe av elever. Grunnen til at jeg ville ha forskjellige intervjukjema var fordi, som jeg regnet med, at jeg fikk inn ulike besvarelser på oppgavene, og dermed lurte jeg på litt ulike ting for hver av gruppene. Noen felles spørsmål og oppgaver hadde jeg likevel til alle gruppene. Intervjuene ble gjennomført på slutten av samme uke som økten med oppgaveløsningen. Da hadde elevene oppgavene relativt ferskt i minne, men jeg kunne likevel risikere at de hadde glemt noe. Dette kompenserte jeg for ved å minne elevene på

ting de hadde sagt under økten med oppgavejobbingen, ved hjelp av feltnotatene. Elevene fikk beskjed om når jeg satte på videokameraet, at jeg var den eneste som kom til å se på opptakene, og at opptakene kom til å bli destruert ved prosjektets slutt. Jeg hadde beregnet 30 minutter på hver av gruppene for intervjuene, men den første gruppen med elevene Silje og Andreas brukte kun 20 minutter. Grunnen til dette var at de ikke diskuterte seg i mellom like mye som de andre gruppene, samt at de fant løsninger på oppgavene de fikk under intervjuet relativt raskt. Dette gjorde også at denne gruppen fikk tid til en ekstra oppgave som de andre gruppene ikke rakk å gjennomføre.

3.3.2 Diskusjon av oppgavene

I denne delen skal jeg presentere og diskutere noen av oppgavene som elevene ble bedt om å jobbe med under oppgaveløsnings-økten og under intervjuet. Jeg vil begrunne hvorfor disse oppgavene ble gitt og diskutere fordeler og begrensninger med de ulike oppgavene. Utvalget av elever var seks åttendeklassinger, og disse hadde ikke hatt temaene algebra eller likninger på tidspunktet undersøkelsen ble gjennomført. Dette betyr også at elevene ikke hadde lært om variabler på dette tidspunktet, og derfor er oppgavene utformet uten bruk av bokstavvariabler. Jeg brukte tomme bokser som symbol for ukjente, da dette ofte er brukt i oppgaver fra barneskolen. Oppgavesettet er gitt i sin helhet i vedlegg B, mens oppgavene som ble gitt under intervjuene er gitt i vedlegg C.

Flere likhetstegn

Oppgave 2

Hvilke tall skal stå i de tomme boksene i disse regnestykkene for at de skal bli riktige? Fyll inn tallene i boksene.

$$45 + 5 = \square + 30 = \square$$

$$20 + 180 = 50 + \square = \square$$

$$13 + \square = 17 + 3 = \square + 9 = \square$$

Oppgave 2 går ut på å fylle inn de ukjente tallene i boksene for å balansere likningene, og hensikten er å undersøke hvilke tolkninger av likhetstegnet elevene har. Begrunnelsen for å ha flere likhetstegn i et regnestykke er for å undersøke om elevene tolker det første og det siste likhetstegnet på samme måte. I tillegg er boksene plassert på litt ulike plasser, for å undersøke om

plasseringen av boksene har noe å si for tolkningen av tegnet. Oppgaven vil kunne oppleves som veldig lite krevende dersom elevene er sikre på betydningen av tegnet. Dette kan være en begrensning da det igjen kan føre til at elevene ikke blir motiverte til å arbeide med oppgavene. Likevel var det ikke elevenes aritmetiske regneferdigheter jeg ville undersøke og dermed ble det riktig å bruke slike typer oppgaver.

Sammenligne uttrykk

Oppgave 5

Hvilke tall skal stå i de tomme boksene? Vis hvordan dere kommer frem til svaret.

$$25 + 29 = \square + 29$$

$$43 + 8 = 8 + \square$$

$$17 + \square = 23 + 17$$

$$38 + 55 = \square + 56$$

Oppgave 5 har mye av den samme hensikten som oppgave 2, men er også laget for å undersøke om elevene kan *se* hva som skal stå i boksene uten å gjøre noen beregninger, ved å sammenligne uttrykkene på hver side. Ved å plassere boksen på litt forskjellige steder og omrokkere på rekkefølgen av leddene i uttrykkene, kan jeg også undersøke om elevene bare kontrollerer formen på de to uttrykkene eller om de sammenligner uttrykkene ved å lete etter like ledd. Den siste likningen brukes til å undersøke om elevene kan utnytte relasjoner mellom tallene for å løse likningen. Det kan likevel være slik at fordi denne oppgaven kommer etter mange veldig like oppgaver (likninger med én ukjent) at elevene automatisk begynner å løse denne oppgaven som de foregående, uten å oppdage at man kan sammenligne uttrykkene på hver side for like ledd. Så selv om de ikke løser oppgaven på en slik måte, behøver det ikke å bety at de ikke er i stand til det. En annen begrensning med denne oppgaven er at det kan være vanskelig å uttrykke seg skriftlig om hvordan de har løst oppgaven, men dette kan igjen kontrolleres i intervjuene.

Flere forekomster av den ukjente

Oppgave 6

Nedenfor er det gitt en utregning. Her står "tall" for et ukjent tall, og det er altså dette samme tallet som står tre ganger i denne utregningen.

Finne det ukjente tallet som kan byttes ut med “tall”.

$$2 \cdot \text{tall} + 10 = 2 \cdot \text{tall} + \text{tall}$$

I denne oppgaven vil jeg se om elevene klarer å utvide forståelsen av å kunne stryke like ledd til å gjelde like forekomster av den ukjente på hver side av likhetstegnet. Det er viktig at elevene forstår og leser oppgaveteksten nøye i denne oppgaven, da det i tidligere oppgaver i samlingen ikke er slik at flere forekomster av tomme bokser betyr at det er den samme ukjente i alle boksene, slik det er i denne. Dette er en begrensning med oppgaven. Det at den på en slik måte skiller seg fra tidligere oppgaver gjør at det lett kan oppstå misforståelser. Likevel hadde jeg ved gjennomføringen av oppgavene gjort det klart for elevene at jeg var tilgjengelig for spørsmål dersom de ikke forsto oppgavene, og jeg har representert den ukjente med et annet symbol. Siden elevene ikke har arbeidet med ukjente i form av bokstavvariabler tidligere, vil jeg med denne oppgaven kunne få et inntrykk av hvordan elevene spontant opererer med den ukjente.

Likning representert ved konkreter

Under intervjuet fikk elevene også arbeide med en oppgave med konkreter. Denne er forklart under.

Oppgave med konkreter under intervju

Elevene får fyrstikker og fyrstikkesker lagt foran seg i to separate bunkere som sammen representerer likningen $2x + 3 = x + 7$.



De får forklart at det ligger et antall fyrstikker i eskene som er det samme for alle de tre eskene som ligger på bordet. Hver av de to bunkene har til sammen like mange fyrstikker, det vil si alle fyrstikkene i eskene og

de fyrstikkene som ligger utenfor eskene. Jeg ber dem så om å finne ut hvor mange fyrstikker det er i hver eske, uten å kikke i dem.

Hensikten med denne oppgaven er å se hvordan elevene diskuterer og tenker for å løse likningen mens de arbeider med den. Jeg vil også se om elevene klarer å løse en likning representert ved noe annet enn matematiske symboler, da det kan være at noen elever klarer å forstå prinsippet med ekvivalens uten å være i stand til å representere dette som en likning i matematiske symboler. Oppgaven har sine begrensninger ved at elevene kan bli stresset av å løse en slik oppgave mens all min oppmerksomhet er rettet mot dem, siden dette foregår under intervjuet. I tillegg kan man ved representasjoner som denne ikke beskrive negative tall, vi får ikke representert et negativt antall fyrstikker.

3.4 Analysemetode

I dette delkapittelet vil jeg først presentere teori om analysemetoden *konstant komparativ metode* som jeg har brukt for å analysere datamaterialet. Deretter vil jeg gi en beskrivelse av analyseprosessen.

3.4.1 Konstant komparativ analysemetode

I min studie valgte jeg å bruke en *konstant komparativ metode*. Denne analysemetoden er en videreutvikling og oppmykning av reglene i analysemetoden *grounded theory*, som i følge Postholm (2010) skal være fullstendig induktiv. Det vil si at all analyse er gjort med grunnlag i datamaterialet uten spor av forskerens egne perspektiver. Innenfor konstant komparativ analysemetode derimot, blir det lagt mer vekt på interaksjonen mellom forskeren og empiri (Postholm, 2010). Metoden går ut på å sammenligne hendelser med hendelser, koder med koder og kategorier med kategorier med tanke på likheter og forskjeller. Dette skjer i tre ulike kodingsfaser, *åpen koding*, *aksial koding* og *selektiv koding*. Selv om disse ulike delene av analysen er forskjellige skal man ikke tenke på dem som en lineær prosess, de kan gjerne skje simultant (Corbin & Strauss, 2008).

Den første delen av analysearbeidet er *åpen koding*. Her skal man være åpen for hva dataene kan fortelle, selv om forskerens oppfatninger og erfaringer alltid til en viss grad vil farge analysen. Forskeren skal først se nøye gjennom

datamaterialet fra begynnelse til slutt for å prøve å forstå essensen av hva dataene forteller. Man skal så dele opp datamaterialet i håndterbare deler, lete etter fenomener og sette koder på disse som representerer fenomenene. Kodene grupperes så i kategorier, som er mer abstrakte begreper og omfatter flere koder med felles egenskaper (Corbin & Strauss, 2008).

Andre del av analysearbeidet er den *aksiale kodingen*, og her prøver man å relatere kategorier til hverandre. Den siste delen av analysearbeidet er den *selektive kodingen*. Her skal forskeren prøve å finne en kjernekategori som alle andre kategorier kan relateres systematisk til. Kjernekategorien skal være et resultat av forskningen og en abstraksjon av alle begrepene i koder og kategorier. Mens åpen koding deler opp datamaterialet til håndterlige bolker vil aksial og selektiv koding sette sammen bitene igjen (Corbin & Strauss, 2008).

Corbin og Strauss (2008) legger vekt på å bruke såkalte *memoer* under hele analysearbeidet, som er skriftlige notater av analyse. Det er her man stiller spørsmål og sammenligner, og skriver ned tankene og reaksjonene sine. Der- som forskeren skriver slike memoer er det her han eller hun finner begrepene og kategoriene (Corbin & Strauss, 2008).

3.4.2 Analyseprosess

I denne delen vil jeg gi en beskrivelse av hvordan jeg har analysert datamaterialet.

Etter arbeidsøkten med oppgavesettet satt jeg igjen med en besvarelse hver fra gruppe 1 og 2, og to besvarelser fra gruppe 3. Jeg valgte å ta med begge besvarelsene fra gruppe 3 videre i analysearbeidet fordi de ikke var identiske, og disse kunne gi meg forskjellige tolkninger av likhetstegnet som jeg ikke ville gå glipp av. Allerede samme dag som elevene fikk arbeide med oppgavene begynte analyseringsarbeidet, siden jeg brukte besvarelsene for å utforme intervju spørsmålene, noe som også betyr at jeg måtte analysere besvarelsene. Jeg lagde små memoer før jeg utformet spørsmålene til intervjuene, hvor jeg lagde hypoteser på hvordan elevene kunne ha tenkt for å løse oppgavene. Dette hjalp meg i å utforme spørsmål slik at jeg kunne finne ut om det faktisk var slik elevene hadde tenkt.

Jeg valgte å ta med data om oppgaven gruppe 1 arbeidet med under intervjuet, som ikke de andre gruppene rakk, i videre analysearbeid fordi dette var interessante data. Jeg var interessert i ulike tolkninger av likhetstegnet,

og ikke så mye om hvem som hadde fått til hvilke oppgaver. Etter å ha transkribert videoopptakene fra intervjuene (transkriberingsnøkkelen er gitt i vedlegg D) gikk jeg i gang med å skrive memoer i egne dokumenter fra hvert intervju, hvor jeg prøvde å beskrive hva som ble forklart og gjort. Ved hjelp av memoene begynte jeg å sette post-it lapper på transkripsjonene og på besvarelsene fra oppgaveløsningen, hvor jeg beskrev hva som skjedde med mine egne ord slik at jeg kunne relatere det til forståelsen av likhetstegnet. Deretter begynte jeg å sette nye lapper med forslag til koder på de ulike sekvensene og oppgavene. Jeg gikk gjennom disse flere ganger, endret på koder og slo sammen noen, mens andre igjen ble kuttet helt ut fordi de egentlig ikke hadde noe med elevenes oppfatning av likhetstegnet å gjøre.

Jeg strevde med å finne kategorier som kunne romme alle kodene mine. Noen potensielle kategorier var *instrumentell forståelse*, *grunnleggende relasjonell forståelse* og *fullstendig relasjonell forståelse*, og et annet sett med potensielle kategorier var de ulike tolkningene av likhetstegnet presentert i delkapittel 2.3.1. Begge disse alternativene måtte jeg bevege meg bort fra, da kodene var slik at noen ikke passet inn under noen av kategoriene og noen passet inn under flere. Jeg gikk derfor tilbake og arbeidet videre med kodene. Noen av de opprinnelige kodene beholdt jeg som de var, og dette var kodene *regn ut*, *uttrykk = svar*, *samme som eller likt*, *sammenligne sider*, *definisjon/identitet* og *ekvivalensegenskaper*. To av kodene endret jeg navnene på, fordi de nye navnene bedre beskrev innholdet av koden. Koden *verdi* ble endret til *sammenligne verdi*, og koden *prealgebraisk strategi* ble endret til *nøste opp*. Koden *regne sammen ledd på tvers av likhetstegnet* ble delt opp i to nye koder; *svartil slutt* og *regn sammen "alt"*, fordi det var visse forskjeller mellom disse som jeg gjerne ville tydeliggjøre. Jeg slo sammen kodene *balanse* og *likhet*, som var en kode som inneholdt forekomster av at elevene balanserte en likning i en annen representasjon enn en likning i matematiske symboler, og disse ble til koden *balanse*. Kodene *prosess* og *objekt* inneholdt deler fra datamaterialet som jeg etterhvert skjønte kunne plasseres innenfor forskjellige andre koder. Da ble jeg også oppmerksom på at kodene mine passet inn under kategorier som jeg kalte for *likhetstegnet med befaling om prosess* og *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*. Disse er presentert i kapittel 4.

3.5 Begrensninger ved metoden

I dette delkapittelet vil jeg si litt om validiteten og reliabiliteten til undersøkelsen, og diskutere begrensninger ved metodene jeg har brukt.

I kvalitative undersøkelser er forskeren selv et verktøy, noe som gjør at forskerens forforståelser i noe grad vil påvirke undersøkelsen. Reliabiliteten og validiteten til studiet vil ikke kunne kontrolleres på samme måte som den gjør i kvantitative undersøkelser. I kvantitative undersøkelser kontrolleres ofte validiteten ved å reprodusere forsøket og undersøke om det gir de samme resultatene, noe som ikke er mulig i kvalitative undersøkelser, da forholdene ikke vil være identiske og man derfor ikke kan få de samme resultatene. Validiteten til et kvalitativt studie kan ses på som hvor nøyaktig, korrekt eller sannferdig den er, noe som kan være vanskelig å være sikker på. Man må se på hva som gjør undersøkelsen god, hvilke situasjoner og forhold er det som sannsynliggjør validiteten, og hva kan ha truet validiteten til studien (Robson, 2011).

Jeg benyttet meg av videoopptak under intervjuene, noe som øker validiteten av undersøkelsen (Robson, 2011). På denne måten kan man i større grad sikre seg at dataene er nøyaktig gjengitt, og at man i mindre grad støtter seg på hukommelse som kan være selektiv. Dette gjorde også at jeg kunne gjengi sekvenser av data i analysen nøyaktig, og jeg kunne beskrive hvordan jeg har tolket elevens utsagn. Det er i følge Robson (2011) viktig for validiteten at man på grunn av sin forforståelse ikke tvinger rammeverk og teori på dataene, men lar dataene snakke for seg selv ved å tolke de åpent. Selv om min forforståelse kan påvirke hvordan jeg tolker og analyserer data, vil mine beskrivelser og begrunnelser sikre at leseren ser hvordan jeg har tolket og analysert, og dermed øker validiteten av studien. Dette har jeg også gjort med dataene fra oppgaveløsningen. Triangulering vil kunne motvirke flere trusler mot validiteten av studiet, inkludert forskerens forforståelse. Triangulering kan oppnås ved å bruke flere forskjellige datakilder (Robson, 2011). Dette har jeg gjort ved å samle inn de skriftlige besvarelsene til elevene fra arbeid med oppgavesettet, ta feltnotater under dette arbeidet (dette ble brukt til å utforme intervjuguider og tolke besvarelsene fra oppgavejobbingen), samt ta videoopptak fra intervjuene med elevene.

Reliabilitet i kvantitative studier handler om bruken av standardiserte forskningsinstrumenter, som for eksempel formelle tester og skalaer. Da kontrolleres reliabiliteten ved å undersøke om instrumentet produserer konsistente resultater. Dette er problematisk i kvalitative undersøkelser, da metodene

for disse type undersøkelser gjør at man ikke får gjennomført formell reliabilitetstesting. I kvalitative studier sikrer man reliabiliteten ved å være grundig, nøyaktig og ærlig i gjennomførelsen (Robson, 2011). Dette har jeg gjort ved å beskrive hvordan jeg har gjennomført undersøkelsen og hvordan jeg har analysert datamaterialet.

Begrensninger ved metodene jeg har brukt i undersøkelsen er flere. Under oppgaveløsningen fikk ikke elevene mulighet til å uttrykke seg muntlig, de måtte skrive ned besvarelser, noe som kan være en utfordring for noen. Noe av dette kompenserte jeg likevel for ved å bruke feltnotatene fra denne økten til å spørre elevene ut under intervjuet om det de hadde diskutert, men ikke uttrykt skriftlig under oppgaveløsnings-økten. Likevel kan jeg ha oversett noe av det fordi jeg observerte tre par med elever samtidig. Det at elevene satt i samme rom mens de løste oppgavene gjorde det også mulig for dem å overhøre hverandre, noe som kan ha påvirket dataene. Dette mener jeg løste seg ved at elevene under intervjuene måtte begrunne løsningene sine. En annen begrensning ved undersøkelsen er at det tok noen dager fra elevene jobbet med oppgavene til de ble intervjuet, der de ble spurt om begrunnelser for de samme oppgavene, noe som kan ha ført til at de hadde glemt hvordan de tenkte under den første økten. Det var likevel en nødvendighet å gjøre undersøkelsen på denne måten fordi jeg trengte disse dagene for å forberede intervjuene tilstrekkelig, og jeg kompenserte for det ved å minne elevene på ting de hadde sagt ved å bruke feltnotater og hjelpe dem med å tolke løsningene sine. Jeg kan ha påvirket resultatene med mine forforståelser da dette kan ha virket inn på hvilke spørsmål jeg har stilt under intervjuene. For å motvirke dette brukte jeg besvarelsene fra den første økten til å utforme noen av spørsmålene.

3.6 Ethiske betraktninger

I dette delkapittelet vil jeg reflektere over etiske betraktninger med undersøkelsen, og forklare hvilke hensyn jeg har tatt til dette. I forskning som involverer mennesker er det alltid etiske hensyn å ta (Robson, 2011), derfor har jeg fulgt de etiske retningslinjene som er nedfelt i Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene, 2014). Studien er meldt til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste og er blitt tildelt prosjektnummer 41591.

Et samtykkeskjema ble levert til alle i klassen, og de som var interesserte i

å delta i undersøkelsen tok denne med tilbake til skolen, ferdig signert av foreldre/foresatte. Informert samtykke går ut på at deltakere i en undersøkelse får relevant informasjon om undersøkelsen på forhånd og gir samtykke til deltakelse. Det er også viktig at de som deltar får muligheten til å trekke seg fra undersøkelsen når som helst (Robson, 2011). Skrivet inneholdt derfor informasjon om at de kunne trekke seg fra undersøkelsen uten å oppgi grunn på hvilket som helst tidspunkt. Det inneholdt også en beskrivelse av hva undersøkelsen gikk ut på, altså forskning på forståelsen av likhetstegnet. I følge Robson (2011) bør deltakere få detaljer om hva de skal være med på, dersom dette er mulig. Jeg valgte derfor å gi denne informasjonen for at deltakerne skulle vite hva undersøkelsen gikk ut på før de takket ja. Skrivet inneholdt også informasjon om at alle navn ville anonymiseres og at rådata fra undersøkelsen skulle destrueres etter at prosjektet var ferdig. Det anses som god etisk praksis å gi deltakere anonymitet (Robson, 2011), og derfor fikk deltakerne fiktive navn, i tillegg til at skole og by er anonymisert. I tillegg til dette valgte jeg å filme ned på bordet under intervjuene slik at ikke ansiktene til elevene ble med på videoopptakene. Dette var mest for at elevene ikke skulle føle ubehag, da det likevel kun var jeg som skulle se på opptakene. Under datainnsamlingen ble også informasjonen fra informasjonsskrivet gjentatt muntlig for elevene. Det vil alltid være fordeler og ulemper for deltakere ved å være med på en slik undersøkelse. Måter deltakelsen kan ha virket negativt for elevene på er at de ble tatt ut av undervisning for å delta. En annen negativ konsekvens var at ikke alle elevene som ønsket å delta i undersøkelsen fikk mulighet til det. Grunnen til dette var at jeg på grunn av tidsbegrensningen ikke kunne samle inn data fra flere elever, og hadde heller ikke tid til å analysere mer data. Positive effekter deltakelse kan ha hatt for elevene er at jeg kan finne ut noe om hvordan elevene oppfatter likhetstegnet, og dette kan gavne elevene ved at disse betraktningene kan påvirke undervisningen. Jeg mener at elevene kanskje også har fått utbytte av å være med på undersøkelsen ved å bli mer oppmerksom på likhetstegnets betydning, som vil være nyttig i blant annet arbeid med algebra.

Kapittel 4

Analyse og diskusjon

I dette kapittelet vil jeg presentere koder og kategorier jeg har kommet fram til og forklare sammenhenger mellom dem. Jeg har valgt å dele inn kodene mine i to hovedkategorier; *likhetstegnet med befaling om prosess* og *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*. Jeg vil så diskutere funnene og relatere de til teorien.

I delkapittel 4.1 vil jeg presentere kodene under kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess*, for så å diskutere disse funnene. Jeg vil så presentere kodene under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter* etterfulgt av en diskusjon av funnene under denne kategorien i delkapittel 4.2. I delkapittel 4.3 vil jeg gi en kort diskusjon av kategoriene knyttet opp mot forståelsen av likhetstegnet. Jeg vil så presentere en oversikt over forekomster av kodene i delkapittel 4.4, hvor jeg vil diskutere forekomstene av kodene og hva dette kan fortelle om tolkninger av likhetstegnet, og også forekomster av koder fordelt på grupper av elever og på de ulike oppgavene.

4.1 Likhetstegnet med befaling om prosess

I dette delkapittelet vil jeg først presentere kodene under kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess*. Deretter vil jeg diskutere disse funnene og relatere det til teorien. Kodene under denne hovedkategorien indikerer at elevene forstår likhetstegnet som en befaling om prosess, altså at noe skal utføres eller beregnes. Dermed ser elevene på de matematiske uttrykkene som *prosesser* (Sfard, 1991).

4.1.1 Presentasjon av koder under kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess*

Kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess* inneholder disse kodene: *regn ut*; *uttrykk = svar*; *svar til slutt*; *regn sammen "alt"*; *nøste opp*; og *sammenligne verdi*.

Regn ut

Denne koden har blitt satt på sekvenser der elevene har brukt en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet til å løse en lineær likning, eller de har forklart at likhetstegnet betyr at de skal regne ut eller sette et svar. De kan ha beskrevet en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet som gjelder generelt eller bare i konteksten hvor det er et uttrykk foran likhetstegnet og ingenting eller et resultat bak. Denne koden er plassert i kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess*, fordi likhetstegnet her blir oppfattet som at man skal *utføre* en beregning. Koden ble blant annet satt der elevene løste oppgavene under økten med oppgaveløsning med denne tankegangen. Denne likningen ble gitt i oppgave 1:

$$8 + 4 = \square + 5$$

Et av svarene ble gitt som følger:

$$8 + 4 = \boxed{12} + 5$$

Dette tolker jeg som at disse elevene har oppfattet likhetstegnet som en befaling om å regne ut uttrykket foran likhetstegnet og plassere resultatet i boksen rett bak, ettersom at resultatet av summen $8 + 4$ er 12. Da jeg ba en gruppe av elever om å forklare hvordan de hadde løst første del av oppgave 1;

$$40 + \square = 50$$

ble følgende forklaring gitt:

9. Ingrid: Så på den første oppgaven dere gjorde, hvordan var det dere tenkte først når dere så den? ... Når dere skulle løse den.
10. Torunn: Jeg tenkte på en måte at.. siden det.. på en måte er erlik der da (peker på det første likhetstegnet i oppgave 1), at det som er foran (peker på venstresiden av likhetstegnet) må bli det som er bak (peker på høyresiden av likhetstegnet).

Her begrunnes det med at det foran likhetstegnet må bli det som er bak, med presisering på at det er fordi det står er lik der. Derfor tolker jeg dette som en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet. Nærmere bestemt vil jeg klassifisere det som en *plassindikator*-tolkning av likhetstegnet, fordi forklaringen her viser at likhetstegnet bestemmer plasseringen av resultatet av beregningen. I denne oppgaven er likningen i konteksten “uttrykk = svar”. På denne delen av oppgave 2;

$$45 + 5 = \square + 30 = \square$$

ble følgende forklaring gitt på hvordan den ble løst:

- 112.Ingrid: Husker dere hvordan dere løste?
- 113.Sindre: Vi skulle jo sikkert ha plussset det først (peker på venstresiden av likhetstegnet), og så puttet det der (peker på boksen etter likhetstegnet), og så pluss tretti og så et svar (peker på den siste boksen).

Denne forklaringen samsvarer også med en *plassindikator*-tolkning av likhetstegnet, da jeg tolker dette utsagnet til at Sindre mener at resultatet fra å beregne uttrykket foran det første likhetstegnet skal plasseres i den første boksen (50), og at man så skal addere 30 til dette resultatet, slik at man får et “svar” (80) i den siste boksen. Dette samsvarer også med hvordan denne gruppen hadde løst oppgaven under økten med oppgaveregning. Følgende er et utsagn i forbindelse med den samme oppgaven, hvor jeg holder over ulike deler av regnestykket og spør om hva likhetstegnet betyr.

49. Ingrid:	Hva hvis jeg holder over den delen da? (holder over første del av regnestykket i oppgave 2).
-------------	--

50. Andreas:	Da blir det at du skal ha et svar på slutten.
--------------	---

Når Andreas blir bedt om å forklare likhetstegnets betydning i konteksten “uttrykk = svar”, forklarer han at det betyr at du skal ha et svar på slutten. Jeg tolker det slik at eleven med “svar” mener resultatet av beregningen, og dermed vil dette gå under en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet i denne konteksten.

Uttrykk = svar

Denne koden ligner en del på *regn ut*-koden, men her viser ikke utsagnene eller løsningene direkte en *regn ut*-tolkning. Noe indikerer likevel at de foretrekker at likhetstegnet blir brukt i konteksten “uttrykk = svar”. Denne koden ble satt på sekvenser hvor elevene har valgt å skrive om likheter til denne formen, gitt uttrykk for at sist i regnestykket er “svaret” eller at likhetstegnet bør være plassert bak i regnestykket. I oppgave 7 ble elevene bedt om å klassifisere en rekke påstander om likhet som riktige eller gale og gi begrunnelse på dette, og en av påstandene var følgende:

$$9 - 5 = 5 - 9$$

Denne ble klassifisert av gruppe 2 som feil, med begrunnelsen;

$$9 - 5 = 4$$

og

$$5 - 9 = -4$$

Dette er jo en god begrunnelse, men det at de har valgt å skrive om likheten til to likheter på formen “uttrykk = svar”, tolker jeg på en slik måte at dette kan være en form de foretrekker. Det vil si, det er ikke noe som tyder på at disse elevene ikke godtar at likhetstegnet brukes i andre kontekster, men jeg mener at det kan tyde på at dette er konteksten de føler seg mest komfortable med og som gir mest mening for dem. Når de ble bedt om å begrunne løsningen på denne delen av oppgave 3

$$5 \cdot \square = 50$$

svarte den ene gruppen som følger

168.Sindre:	Det_ der står jo svarene på_ På den første så står jo svaret. Og fem ganger ti er femti.
169.Ingrid:	OK, så med svaret så mener du femti? (Peker på tallet 50 til høyre for likhetstegnet).
170.Sindre:	Ja.

Fra utsagnet ser vi at Sindre sier at i denne oppgaven står “svaret”, og med dette så mener han tallet bak likhetstegnet og ikke løsningen på likningen, altså det ukjente tallet. Dette tolker jeg som at han oppfatter det som at likhetstegnet skal brukes i konteksten “uttrykk = svar”, hvor “svaret” bak likhetstegnet kanskje er det han har vært vant til å skulle finne. Et siste eksempel fra koden *uttrykk = svar* er følgende:

151.Ingrid:	Ja. Ehm.. Spiller det noen rolle.. på en måte hvor i regnestykket vi putter likhetstegnet?
152.Kristoffer:	Ja.
153.Ingrid:	Ja?
154.Sindre:	Det burde være på slutten.

Her ser vi at Sindre mener at likhetstegnet burde plasseres i slutten av et regnestykke, noe jeg tolker som at han foretrekker formen “uttrykk = svar”. Dette er fordi i den konteksten er likhetstegnet helt på slutten, kun etterfulgt av et tall.

Svar til slutt

Denne koden beskriver sekvenser der elevene tolker likhetstegnet som at de skal “regne ut”, men de regner sammen alle ledd uavhengig av hvilken side av likhetstegnet de står på. “Svaret” skal ikke nødvendigvis plasseres i boksen for den ukjente, men helt til slutt i regnestykket. Koden går under kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess* fordi likhetstegnet fortsatt blir sett på som et tegn som befaler utførelsen av en prosess, men likhetstegnet ser ikke ut til å være en *plassindikator* for resultatet i dette tilfellet. I følge tolkningen viser likhetstegnet ingen ekvivalens og har heller ingen notasjonsrolle når det kommer til å indikere plassen for resultatet, for resultatet skal uansett stå til sist. Fra datamaterialet er det eksempler både hvor den ukjente (boksen) er plassert helt til slutt i likningen og også rett etter likhetstegnet, dermed ser

det ikke ut til å være en sammenheng mellom denne måten å tenke på og plassering av boksen. Et eksempel er hentet fra en løsning av denne delen av oppgave 2;

$$20 + 180 = 50 + \square = \square$$

med følgende besvarelse;

$$20 + 180 = 50 + \boxed{250} = \boxed{250}$$

Her ser man at tallene foran likhetstegnet er addert sammen, men også tallet som følger etter likhetstegnet. Resultatet fra dette er så skrevet i begge boksene, som jo begge også kommer sist i regnestykket. Dette tolker jeg som at elevene oppfatter likhetstegnet som et symbol som betyr “regn ut”, men også at resultatet er et tall som står sist i regnestykket. Her er et eksempel fra en besvarelse på denne delen av oppgave 1;

$$48 + 3 = \square + 55$$

løst på denne måten av gruppe 3:

$$48 + 3 = \boxed{4} + 55$$

Denne løsningen tolker jeg som at de har lagt sammen 48 og 3 som er 51, og dermed skrevet 4 i boksen fordi $51 + 4 = 55$. Her ser vi også at selv om boksen er plassert rett etter likhetstegnet blir ledd lagt sammen uavhengig av hvilken side av likhetstegnet de står på, slik at resultatet er det aller siste tallet.

Regn sammen “alt”

Denne koden har blitt satt på sekvenser der elevene legger sammen ledd på tvers av likhetstegnet. Enten der hvor det ikke er noen ukjent slik at alt bare skal beregnes, eller der hvor det er en boks slik at alle ledd skal beregnes og resultatet plasseres i boksen. Koden har jeg valgt å plassere i kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess* fordi også her oppfattes likhetstegnet som en befaling om å regne, altså utføre en handling. Det første eksempelet fra datamaterialet er hentet fra da elevene fikk den praktiske oppgaven med

konkreter under intervjuet, hvor de altså skulle løse en likning ved hjelp av konkreter i form av fyrstikker og fyrstikkesker. I oppgaven fikk elevene to bunker med fyrstikker og fyrstikkesker foran seg. I den ene bunken lå det tre fyrstikker og to esker, og i den andre lå det syv fyrstikker og en eske. Hver eske inneholdt like mange fyrstikker og var den ukjente i likningen, og hver bunke hadde like mange fyrstikker totalt. Hensikten med oppgaven var å finne ut om elevene klarte å løse en likning i en kontekst hvor de ikke trengte å bruke matematiske symboler.

262.Torunn:	(Tar esken fra Maria) Det står ikke på utsiden hvor mange det er i dem da (begge ler). OK, vent.. Der er det sju (peker på høyresiden).
263.Maria:	Mm.
264.Torunn:	Her er det tre (tar på fyrstikkene til venstre).
265.Maria:	Til sammen blir det ti

Dette utsagnet viser at Maria vil legge sammen konkreter fra hver "side", som de har blitt forklart har like mange fyrstikker totalt. Her har vi ikke en likning i matematiske symboler, men i konkreter, og derfor er det ikke noe likhetstegn her. Elevene viser likevel en tolkning som likner på *regn ut*-tolkningen, bare at de her legger sammen alle fyrstikkene (som ikke befinner seg i eskene) på begge sider. Et annet eksempel fra datamaterialet er hentet fra når vi diskuterte løsningen på følgende del av oppgave 1

$$8 + 4 = \square + 5$$

hvor Sindre fra gruppe 3 har kommet fram til at deres originale løsning med tallet 12 som den ukjente var feil, og at de trenger et tall som addert med 5 er 12. Da sier Kristoffer fra samme gruppe følgende;

38. Kristoffer: Jeg tror det er lik sytten.. Blir det ikke det?... Jo.
Det blir sytten.
39. Ingrid: (Peker på boksen i oppgaven) Du tror at svaret blir sytten? Er det det du sier?
40. Kristoffer: Ja, jeg tenker det.
41. Ingrid: Du tenker det. Ja. Forklar hvordan_ hvorfor du tror at [det blir sytten.
42. Kristoffer: [Jeg tenker at jeg plusser.. Hvis jeg tenker åtte (peker på tallet 8 på venstresiden av likhetstegnet i andre linje i oppgave 1) pluss fire (peker så på tallet 4), pluss fem (peker på tallet fem på høyresiden av likhetstegnet).

Denne sekvensen viser at Kristoffer vil legge sammen alle tallene i denne likningen og skrive resultatet i boksen. Likhetstegnet ser ut til å tolkes slik at alt i regnestykket skal adderes, og det ser ikke ut til å avhenge av hvor likhetstegnet eller boksen befinner seg.

Nøste opp

Navnet på denne koden er hentet fra Knuth et al. (2006), som satte dette navnet på en prealgebraisk løsningsmetode for likninger. Denne metoden går ut på at elevene finner den ukjente i en lineær likning ved å jobbe seg baklengs gjennom problemet og utføre inverse operasjoner på andre siden av likhetstegnet, uten å forklare hvorfor de gjør dette. Jeg har valgt å plassere denne koden i kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess*, fordi selv om de forstår at det skal være likhet mellom uttrykkene på hver side av likhetstegnet, så gjennomfører de en prosess som de ikke begrunner i denne likheten. Eksempelet kommer fra da jeg spurte elevene i gruppe 2 om hvorfor de har trukket fra det ene tallet på motsatt side, i følgende del av oppgave 5:

$$25 + 29 = \square + 29$$

90. Ingrid:	Det tjue-tallet der. Hvorfor har dere lov til å ta minus tjue? Hvorfor har dere lov til å trekke i fra det (peker på tallet 29 på høyresiden) på den siden? (Peker på venstresiden av likhetstegnet).
91. Torunn:	For hvis vi trekker fra det på den siden (peker på oppgaven), da får vi jo.. det blir på en måte.. du har det der (peker på venstresiden av likhetstegnet) og tar bort det der (peker på tallet 29 på høyresiden av likhetstegnet), og da får du det som står der (peker på tallet 25 på venstresiden av likhetstegnet). Liksom. Det...
92. Ingrid:	OK.
93. Torunn:	er på en måte.. det blir det samme da.

Dette eksempelet viser at Torunn forklarer en slik løsningsmetode som en prosess, men hun klarer ikke å begrunne hvorfor de kan gjøre dette for å finne løsningen. Det kunne jo være at de hadde trukket fra 29 på begge sider av likhetstegnet uten å vise det, men siden de ikke forklarer dette når de får muligheten, velger jeg å tolke dette som at de ikke har helt kontroll på lovlige operasjoner på en likhet.

Sammenligne verdi

Den siste koden under kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess* er *sammenligne verdi*. Koden plasseres under denne kategorien fordi elevene her oppfatter likhetstegnet som en befaling om prosess da de *beregner* verdien på hver side av likhetstegnet for å sammenligne sidene. Det første eksempelet er hvor de forklarer at de “gjør det likt” eller “gjør at det blir det samme” på begge sider av likhetstegnet. Dette utsagnet er hentet fra når Andreas forklarer hvordan han løste oppgave 1.

27. Andreas:	Jeg tenkte liksom ikke så mye på det. Jeg bare kan det liksom. Jeg bare sjekket; OK, nå finner jeg ut at det skal være likt på begge sider (peker på arket, frem og tilbake mellom hver side av likhetstegnet). Så gjør vi det bare likt på begge sider.
--------------	--

Dette utsagnet viser at eleven forstår at det skal være likt, men at han *gjør* det likt. Det kan likevel være knyttet usikkerhet opp mot om det er likhets-

tegnet som oppfattes som en befaling om prosess, eller om det er den tomme boksen som gjør det. Koden ble også satt på sekvenser hvor elevene beregnet hver side av likhetstegnet for å verifisere numerisk likhet. Et eksempel fra datamaterialet er en forklaring på hvordan de løste følgende likning i oppgave 4;

$$8 \cdot 4 = \square + 30$$

241.Sindre: Ja, åtte ganger fire er.. trettito, og tretti pluss to er trettito.

Forklaringen Sindre gir er rett og slett bare en utregning av uttrykkene på hver side av likhetstegnet. På denne måten tolkes likhetstegnet som en *befaling om prosess*. Koden *sammenligne verdi* ble også brukt når elevene forklarte at verdien er forskjellig eller lik på grunn av fravær eller tilstedeværelse av en prosess, som i denne forklaringen på hvorfor påstanden nedenfor (oppgave 7) ikke stemmer.

$$12 = -12$$

379.Sindre: Tolv er ikke det samme som minus tolv. For da har du tatt bort tjuefire.

Her forklarer Sindre at sidene ikke er like fordi man har tatt bort 24, altså utført en prosess. Innen denne koden er det også sekvenser hvor elevene forklarer at noe er likt fordi det har samme "svar" (eller ikke likt fordi det ikke har samme svar). Som for eksempel forklaringen på hvordan gruppe 2 løste følgende del av oppgave 3;

$$4 \cdot 5 = \square \cdot 10$$

55. Torunn: Nei. Vi tok egentlig.. bare.. og fant liksom ut hva er det vi må gange med fem for å få femti. Og hva.. og hvor masse er fire ganger fem. Og så måtte vi finne ut hva svaret ble og så måtte vi.. liksom... finne ut hvor mange vi måtte gange ti med for å få det samme.. svaret.

Her ser vi at Torunn beregner hver side, hvor resultatet av hver beregning kalles “svar”. Det er også en prosess i og med at hun beregner uttrykket på hver side av likhetstegnet, for å så sammenligne verdien.

4.1.2 Diskusjon av *likhetstegnet med befaling om prosess*

I denne delen skal jeg diskutere hvilke tolkninger av likhetstegnet som har blitt funnet under kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess* og om disse går under en relasjonell forståelse av likhetstegnet eller ikke, og også relatere funnene til hva andre forskere har funnet på området.

I koden *regn ut* finner vi en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet. Noen tilfeller av denne koden viser en *regn ut*-tolkning kun i konteksten “uttrykk = svar”. Dette er sammenlignbart med at McNeil et al. (2006) i sine undersøkelser med sjette- til åttendeklassinger, fant at elever som ble presentert for likhetstegnet i konteksten “uttrykk = svar” hadde mindre sannsynlighet for å gi en relasjonell forklaring av symbolet. Siden noen elever viste en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet kun dersom de ble presentert for konteksten “uttrykk = svar”, kan dette tyde på at denne konteksten fremmer en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet. Likevel er flesteparten av forekomstene av *regn ut*-koden likninger som er løst feil, altså *regn ut*-tolkningen brukt i andre kontekster slik at det fører til feil løsning av likningene. I flere tilfeller samsvarer tolkningen med en *plassindikator*-tolkning, slik også Såens-Ludlow og Walgamuth (1998) fant eksempler på i sin undersøkelse. Knuth et al. (2006) fant at sannsynligheten for en relasjonell forståelse av likhetstegnet ikke økte med alderen. Når jeg har funnet eksempler på at noen åttendeklassinger løser likninger med en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet, kan disse funnene sammen med resultatene fra undersøkelsen til Knuth et al. (2006) tendere mot McNeil et al. (2006) sin hypotese om at alder ikke har så stor innflytelse på forståelsen av likhetstegnet som for eksempel Kieran (1981) mener. Da kan det tenkes at det er andre faktorer som har en mer avgjørende rolle.

Innen koden *uttrykk = svar* er det eksempler på *det samme som*-tolkningen, og eksempler som jeg mener tenderer mot en *plassindikator*-tolkning av likhetstegnet. Det så ut som elevene hadde en preferanse for konteksten “uttrykk = svar”, noe også Jones (2009) fant blant fjerdeklassinger. Noen elever viste at en påstand om likhet ikke stemte ved å dele denne likheten i to likheter på formen “uttrykk = svar”, for å kontrollere at resultatene av å beregne hvert uttrykk ble forskjellige. Denne måten å kontrollere påstander om likhet på

fant også Herscovics og Linchevski (1994) i sin undersøkelse, og Jones (2009) fant at to trettenårige jenter i hans undersøkelse utelukkende skrev ned likheter på denne formen. Selv om elevene ser ut til å foretrekke konteksten “uttrykk = svar”, viser de her en *det samme som*-tolkning av likhetstegnet. Denne tolkningen inngår i det Jones (2009) kaller den *grunnleggende relasjonelle* forståelsen av likhetstegnet, fordi elevene ikke ser ut til å for eksempel sammenligne leddene, men kun verdien av hver side. Andre eksempler viste at elevene mente at “svaret” skulle stå bakerst i et regnestykke, noe som kan indikere at noen elever hadde en *plassindikator*-tolkning av likhetstegnet. Elevene brukte ordet “svar” om tallet som kom bak likhetstegnet, og ikke om løsningen av likningen. Det samme fant Linchevski og Herscovics (1996) i sin undersøkelse blant syvendeklassinger, og Kieran (1981) kommenterer at elever i tolv- til fjortenårs alderen ofte beskriver likhetstegnet med vekt på begrepet “svar”. Jeg mener dette kan tyde på at selv i de tilfellene hvor elevene har en tolkning av at likhetstegnet betyr “det samme som”, så har kanskje en ensidig type referansekontekst for likhetstegnet gjort at de helst bruker konteksten “uttrykk = svar” dersom de skal uttrykke seg i matematisk symbolspråk. Med andre ord har de kanskje ikke generalisert kunnskapen nok når de har mediert mellom referansekonteksten og likhetstegnet, noe som kan skje dersom referansekonteksten ikke blir variert tilstrekkelig (Steinbring, 2006). Dermed ser det ut til at de forbinder likhetstegnet sterkt med konteksten “uttrykk = svar”.

Koden *svar til slutt* viser en tolkning av likhetstegnet jeg ikke hadde forventet å finne på forhånd av undersøkelsen, og som jeg ikke har funnet tilsvarende eksempler på i andre undersøkelser. Denne tolkningen likner litt på en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet som Falkner et al. (1999) fant eksempler på, hvor elevene regner sammen alle tall i likningen og plasserer resultatet i boksen. Men her ser det ut til å tolkes slik at det siste tallet i regnestykket er resultatet, uavhengig om dette er et kjent eller ukjent tall. Også denne tolkningen kan være forbundet med en ensidig type referansekontekst. Jeg mener denne tolkningen har likhetstrekk med den mye brukte konteksten “uttrykk = svar”, og at elevene kanskje har tatt med seg videre fra en slik referansekontekst en oppfatning om at svaret er noe som alltid skal være helt til sist i regnestykket. Dette vil i så fall bety at medieringen mellom symbol og referansekontekst har resultert i misoppfatninger, noe som kan skje dersom referansekonteksten ofte er ganske lik (Steinbring, 2006), og elevene forbinder egenskaper som kun gjelder én type referansekontekst med symbolet.

Versjonen av *regn ut*-tolkningen av likhetstegnet som Falkner et al. (1999)

fant eksempler på i sin undersøkelse, hvor elevene beregnet alle tall i likningen og plasserte resultatet i boksen, ligner veldig på noen av eksemplene under *regn sammen* "alt"-koden i min undersøkelse. Disse funnene hadde Falkner et al. (1999) blant førsteklasinger, og dermed er det interessant at jeg finner dette også hos åttendeklasinger. Elevene i min undersøkelse hadde på tidspunktet undersøkelsen fant sted ikke hatt undervisning i temaet algebra, hvor de arbeider med likninger som slike de fikk i denne undersøkelsen. I undersøkelsen til Falkner et al. (1999) fant de at etter undervisning med spesielt fokus på likhetstegnets betydning kunne de fleste elevene forstå likhetstegnet som et symbol som viser en relasjon. Dette kan igjen kanskje tyde på at alder ikke er den viktigste faktoren for å oppnå en relasjonell forståelse av likhetstegnet, men kanskje det har mer med fokus på likhetstegnet i undervisningen å gjøre.

Nøste opp-koden indikerer en *det samme som*-tolkning av likhetstegnet, da elevene her tydelig viste at de tolker det slik at hver side av likhetstegnet skal være like. De begrunner likevel ikke metoden i at sidene skal være like, men i at sidene *blir* like dersom de utfører det på denne måten. Dermed er dette en *grunnleggende relasjonell* forståelse av likhetstegnet da de ikke har kontroll på hvilke lovlige transformasjoner man kan utføre på en likhet. Til sammenligning fant Herscovics og Linchevski (1994) at det store flertallet av elevene i deres undersøkelse stort sett brukte en slik metode. Knuth et al. (2006) fant at de som hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet hadde større sannsynlighet for å bruke en algebraisk metode hvor de utførte like transformasjoner på begge sider av likhetstegnet. Dette kan tyde på at elevene som brukte *nøste opp*-metoden ikke hadde en *fullstendig relasjonell* forståelse av likhetstegnet slik Jones (2009) definerer det.

I koden *sammenligne verdi* har elevene vist en oppfattelse av at hver side av likhetstegnet skal ha samme verdi, og går derfor under *det samme som*-tolkningen av likhetstegnet. Resultatene under denne koden samsvarer med funnene til Herscovics og Linchevski (1994), som fant at de fleste syvendeklasingene i deres undersøkelse først beregnet hver side av likhetstegnet, for så å sammenligne verdien. Dette fant også Jones (2009) i arbeid med to trettenårige jenter. *Det samme som*-tolkningen elevene viser her går under en *grunnleggende relasjonell* forståelse av likhetstegnet, fordi innen denne koden klarer ikke elevene å vise at de utnytter egenskaper som viser at de har en *fullstendig relasjonell* forståelse av tegnet. Det må nevnes at det at elevene ikke klarer å vise noe mer enn en *grunnleggende relasjonell* forståelse kan i noen tilfeller ha sammenheng med hvilke oppgaver de har arbeidet med og konteksten likhetstegnet befinner seg i. Dersom den enkleste måten å vise

at sidene er like på er ved å sammenligne verdien, har kanskje oppgavene en begresning i at de ikke gjør det mulig for elevene å vise en *fullstendig relasjonell forståelse* av likhetstegnet. Dette vil i så fall samsvare med McNeil et al. (2006) sin argumentasjon om at likningene elevene blir presentert for kan gjøre det vanskelig for dem å demonstrere en relasjonell forståelse av likhetstegnet.

4.2 Likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter

I dette delkapittelet skal jeg først presentere kodene under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*. Deretter vil jeg diskutere disse funnene og relatere det til teorien. Kodene under denne kategorien indikerer at elevene tolker likhetstegnet som et symbol som viser likhet mellom to matematiske objekter. Det vil si at de ser på uttrykkene på hver side av likhetstegnet som representasjoner for det samme matematiske *objektet* (Sfard, 1991).

4.2.1 Presentasjon av koder under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*

Kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter* inneholder disse kodene: *algebraisk metode*; *definisjon/identitet*; *samme som eller likt*; *balanse*; *sammenligne sider*; og *ekvivalensgenskaper*.

Algebraisk metode

Denne koden ble brukt kun én gang, men jeg synes likevel den var såpass viktig at jeg ville ha den med som en helt egen kode under denne kategorien. Koden ble brukt når en likning (akkurat denne var en likning representert med konkreter) ble løst ved å utføre de samme operasjonene på de to ekvivalente uttrykkene, slik at ekvivalensen mellom sidene ble bevart. Koden *algebraisk metode* hører til kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter* fordi her blir uttrykkene på hver side av likhetstegnet sett på som to matematiske objekter som er ekvivalente. Dersom man har en forståelse for at å utføre det samme på begge sider av likhetstegnet (begge objektene) fører til at begge sidene fortsatt er ekvivalente, må man ha forstått likhetstegnet

4.2. LIKHETSTEGNET OPPFATTET SOM LIKHET MELLOM OBJEKTER⁴⁹

som et symbol som uttrykker en relasjon (Jacobs et al., 2007), og det er også derfor denne koden er så viktig. Eksempelet fra datamaterialet kommer fra oppgaven under intervjuet med en likning representert med konkreter i form av fyrstikker og fyrstikkesker, hvor jeg ba Andreas som foreslo en løsning om å forklare hvordan han kom fram til denne løsningen.

236.Andreas:	Fordi at her er det (peker på de løse fyrstikkene i den ene bunken) tre, og så..
237.Ingrid:	Dere skal bare bare flytte på dem også hvis dere vil.
238.Andreas:	Og så her.. hvis vi tar de tre i fra hver (tar tre fyrstikker fra hver side). Da er vi jo ferdige med dem. Da står det igjen fire her (peker på de fire fyrstikkene som er tilbake på den ene siden etter å ha fjernet tre), og da må det være fire her (peker på esken ved siden av) og fire her og fire her (peker på de to eskene i den andre bunken). Fordi at.. ja, det skal bli likt.

Fra eksempelet fra datamaterialet ser vi at Andreas utfører like operasjoner på begge sider for å finne den ukjente, noe jeg tolker som at han forstår hver side som ekvivalente objekter.

Definisjon/Identitet

Denne koden inneholder også veldig få sekvenser fra datamaterialet. Koden er likevel med fordi jeg synes den var interessant og viktig. Grunnen til dette er at jeg som nevnt tidligere, mener man bør kunne forstå likhetstegnet som et symbol som viser identitet for å ha en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Selv om muligheten til å få vist en slik forståelse avhenger av kontekstuell støtte, er det viktig å få med de få tilfellene hvor en slik forståelse ble indikert. Koden ble brukt når noe indikerte at likhetstegnet blir forstått som et symbol som viser en definisjon eller en identitet. Koden har jeg plassert under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*, da likhetstegnet brukt i forbindelse med definisjon og identitet krever at hver side av likhetstegnet ses på som ekvivalente matematiske objekter. Selv om det bare er to forekomster av denne koden i datamaterialet velger jeg å presentere begge to, i og med at de er litt forskjellige. Det første eksempelet er fra oppgaveløsningen som svar på oppgave 6.

Oppgave 6 Nedenfor er det gitt en utregning. Her står “tall” for et ukjent tall, og det er altså dette samme tallet som står tre ganger i denne utregningen. Finn det ukjente tallet som kan byttes ut med “tall”.

$$2 \cdot \text{tall} + 10 = 2 \cdot \text{tall} + \text{tall}$$

Som besvarelse skrev gruppe 3 bestående av Sindre og Kristoffer på det ene svararket “= 10” under den siste forekomsten av “tall” i likningen. Dette tolker jeg som at elevene har satt “tall” til å være 10, og det er dermed en definisjon. Det andre eksempelet fra datamaterialet under denne koden er fra når gruppe 1 bestående av Andreas og Silje, arbeidet med en oppgave under intervjuet, hvor de fikk en tallfølge som viste sammenhengen mellom summen av de n første oddetallene og det n’te kvadrattallet. De fikk oppgitt følgende:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 + 3 &= 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 4^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 5^2 \end{aligned}$$

Oppgaven deres var i første omgang å skrive ned den sjette linjen i følgen, hvorpå elevene skrev ned følgende:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$$

Dette ble etterfulgt av noen spørsmål fra min side om hvordan de kom fram til linjen med den sjette likheten. Dette utsagnet kom etter en diskusjon hvor de har kommet fram til at høyresiden av likhetstegnet er kvadrattallene (uten å bruke dette begrepet), og de har forklart at venstresiden består av de samme tallene som linjen før pluss det tallet du må ha for å få neste kvadrattall.

279.Silje:	Vi har en også likhet. Det er jo oddetall (hvisker litt).
280.Ingrid:	Hva sa du nå?
281.Silje:	Det er oddetall.

Silje påpeker her hvilke type tall det er på venstresiden og at vi har en *likhet*, men utfra utsagnet er det uklart om hun ser at det er *summen* av de n første

4.2. LIKHETSTEGNET OPPFATTET SOM LIKHET MELLOM OBJEKTER⁵¹

oddetallene som befinner seg på venstresiden. Jeg tolker dette slik at hun ser en sammenheng mellom oddetallene og kvadrattallene, men om hun oppfatter en identitet vil avhenge av om hun oppfatter at det faktisk er *summen* av oddetallene. Dette kan bety at hun er inne på å oppfatte en identitet, men utfra utsagnet kan man ikke si det med sikkerhet.

Samme som eller likt

Denne koden ble satt der elevene brukte ordene “det samme som” eller “likt” i sammenheng med likninger og likhetstegnet. Koden beskriver deler der hvor en løsning eller gyldigheten av en likhet blir begrunnet med at sidene er “like” eller at “det samme” er på begge sidene av likhetstegnet, der hvor en likhet blir beskrevet som noe som er “likt” eller “det samme som”, der hvor likhetstegnet blir beskrevet til å bety at det er “likt” eller “det samme som”, og når en likning blir lest opp at elevene sier “er det samme som” der hvor likhetstegnet står. Under intervjuet fikk elevene påstanden

$$43 + 7 = 50$$

foran seg, og ble spurt om den var sann;

460.Kristoffer: Det blir jo det samme.

461.Ingrid: Det blir det samme?

462.Kristoffer: Fordi om det ikke står på samme måte.

Dette utsagnet er et eksempel på hvordan “det samme som” blir brukt til å begrunne at en påstand om likhet stemmer. Akkurat dette utsagnet viser også godt at uttrykkene på hver side blir sett på som ulike representasjoner for det samme matematiske objektet, noe jeg tolker utfra at Kristoffer sier “fordi om det ikke står på samme måte”. I oppgave 8 ble elevene bedt om å beskrive en situasjon representert ved en figur med en balansevekt som en likhet, og i intervjuet spurte jeg også elevene om hva de mente med en likhet.

181.Ingrid:	De har dere jo her (peker på svararket). Og så på oppgave b så spurte jeg dere; kan dere velge ut ei løsning som dere kan prøve å skrive som en likhet. Og dere og de andre gruppene også, lurte litt på hva jeg mente med likhet. Husker dere det?
182.Silje:	Ja. Det betyr noe som liksom som er det.. som blir det samme. For å få (peker på figuren med vekten i oppgave 8) vekten på helt sam.. helt flatt.

I dette utsagnet gir Silje en forklaring på en likhet som noe som er “det samme”. Hun bruker også figuren til å forklare hva hun mener, at vekta skal være i balanse hvis det er det samme på begge sidene. I en diskusjon om hvorfor tallet i boksen i likningen

$$8 + 4 = \square + 5$$

skal være 7 og ikke 12 ble følgende sagt;

27. Ingrid:	Hvorfor er dette mer (peker på den nye regnestykket de har skrevet opp igjen) riktig?
28. Maria:	Fordi at.. ehm.. erlik det betyr jo det samme som.. eller.
29. Ingrid:	Det betyr det samme som?
30. Maria:	Ja. Det tror jeg.

I dette utsagnet kommer Maria selv med en forklaring på betydningen av likhetstegnet, uten et direkte spørsmål om dette fra meg, og beskriver det med ordene “det samme som”. Da vi i forbindelse med oppgave 8 (figur med balansevekt) i intervjuet snakket om hva en likhet var, valgte en av elevene å lese opp de likhetene han hadde skrevet ned, før jeg fikk stilt spørsmålet om hva de mente en *likhet* var;

399.Ingrid:	Ehm. Det er fint. Og så på oppgave b, så spurte jeg jo dere om dere kunne velge ut ei løsning og skrive den som en likhet. Og da lurte jo dere på, og alle de andre gruppene lurte jo også på, hva jeg mente med en likhet.
400.Sindre:	Fem er det samme som fem. To pluss tre er det samme som fem.

4.2. LIKHETSTEGNET OPPFATTET SOM LIKHET MELLOM OBJEKTER⁵³

Her ser vi at ordene “det samme som” blir brukt, og dette tolker jeg som at Sindre oppfatter likhetstegnet som “det samme som”. Alle typer sekvenser under denne koden mener jeg indikerer at elevene oppfatter likhetstegnet som et symbol for likhet mellom to matematiske objekter. Det kan kanskje argumenteres for at dette også kan tolkes slik at elevene mener at verdien er lik dersom man regner ut denne på hver side av likhetstegnet. Jeg velger likevel å skille denne koden fra koden *sammenligne verdi*, på grunn av at de i denne koden ikke gir forklaringer som tilsier at de regner ut verdien.

Balanse

Denne koden ble satt på sekvenser av datamaterialet hvor elevene balanserte de lineære likningene, men uten å vise utregning eller forklare løsningsmetode. Derfor ble den bare kalt *balanse*. Jeg valgte å plassere koden under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter* fordi de ikke har beregnet hver side av likhetstegnet, slik de kanskje ville gjort dersom de oppfattet likhetstegnet som befaling om prosess. Det finnes to ulike nyanser av denne koden. Den ene typen er fra oppgaveløsningen, hvor de bare har skrevet ned en løsning, slik som eksempelet fra besvarelsen på denne delen av oppgave 3;

$$12 - 8 = 20 - \square$$

$$12 - 8 = 20 - \boxed{16}$$

Den andre typen er utsagn fra intervjuene, hvor de har gitt en ny og riktig løsning eller “begrunner” en løsning med å bare si hva løsningen er. Eksempelet på dette er fra da løsningen på denne delen av oppgave 1 ble diskutert;

$$8 + 4 = \square + 5$$

57. Ingrid: Ja. Hva tror dere er det som er riktig? Tror dere det er riktig å gjøre det_
58. Kristoffer: Jeg tror egentlig at du skal... sette sju der jeg.

Fra min undersøkelse fant jeg at flesteparten av elevene løste likningene i oppgavesettet riktig, og de som ikke gjorde det kom i flere tilfeller med riktige løsninger under intervjuene.

Sammenligne sider

Denne koden ble brukt der hvor elevene har sammenlignet de to sidene av likhetstegnet ved å se på struktur, like ledd og tallrelasjoner. Koden skiller seg dermed fra *sammenligne verdi*, fordi i denne koden bruker de snarveier via å se på strukturer og ledd for å sammenligne uttrykkene. Dermed mener jeg også at koden tilhører kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*, fordi uttrykkene på hver side blir sammenlignet, det er ikke en beregning som utføres. Denne koden inneholder noen nyanser som jeg vil prøve å få frem ved hjelp av eksempler fra datamaterialet. Det første utdraget viser en sekvens hvor vi diskuterer følgende oppgave;

$$38 + 55 = \square + 56$$

- 116.Ingrid: Hvordan tenkte dere på den? Kan man se det også, uten å regne ut?
- 117.Maria: Ja.
- 118.Torunn: Man kan jo det. For at.. der er det (peker på tallet 55 på venstresiden av likhetstegnet) femtifem og der (peker på tallet 56 på høyresiden av likhetstegnet) er det femtiseks. Og da må det være.. siden det står trettiåtte der (peker på tallet 38 på venstresiden av likhetstegnet), og der (peker på tallet 56 igjen) er det en mer enn der (peker så på tallet 55), så må det der (peker på boksen de har skrevet 37 i) være en mindre da. For at da har på en måte en av de der (peker på tallet 38) gått over til den der (peker på tallet 56).

I denne sekvensen tolker jeg utsagn 118 slik at Torunn ser at 56 er en mer enn 55, og at tallet i boksen dermed må være en mindre enn 38 for at uttrykkene skal være like. Her bruker hun relasjoner mellom tallene og sammenligner uttrykkene på hver side av likhetstegnet for å finne løsningen på likningen. Da vi diskuterte denne oppgaven

$$25 + 29 = \square + 29$$

dukket følgende utsagn opp;

4.2. LIKHETSTEGNET OPPFATTET SOM LIKHET MELLOM OBJEKTER⁵⁵

- | | |
|--------------|--|
| 83. Ingrid: | Så du det på en måte, at det skulle stå tjuufem der da (peker på boksen de har skrevet 25 i)? Så dere det? |
| 84. Andreas: | Ja, fordi (peker på oppgaven) det står jo tjueni her (peker på høyresiden) og tjueni her (peker på venstresiden) så da må det jo være tjuufem. |

Dette utsagnet mener jeg viser at Andreas sammenligner uttrykkene for like ledd, og finner at han har tallet 29 på begge sidene. Han sier så at det ukjente tallet dermed må være 25, noe som står på andre siden av likhetstegnet. Andreas nevner ikke direkte at siden 29 og 29 er likt så må også tallet i boksen være lik 25, som er det andre tallet på andre siden av likhetstegnet. Men siden det er dette han kommer fram til, og han også nevner at vi har 29 på hver side, tolker jeg det slik at han har forstått dette. Utdraget under er hentet fra oppgaven under intervjuet med konkretene (fyrstikker og fyrstikkesker).

- | | |
|-------------|--|
| 258.Torunn: | Det er sju der (peker på bunken på høyresiden), tre her (tar på fyrstikkene på venstresiden) . . . Og her er det to esker (peker på eskene på venstresiden), der er det ei eske (peker på esken på høyresiden). . . (Flytter ei av eskene på venstresiden litt opp og de tre fyrstikkene). Hvis du gjør sånn da. Da har du.. |
| 259.Maria: | (Tar opp en eske og rister på den). |
| 260.Torunn: | mindre liksom her (peker på esken og fyrstikkene på venstresiden hun har flyttet) enn der (peker på høyresiden). (Flytter den siste esken på venstresiden opp ved siden av den andre og fyrstikkene). Og der er det like mange... |

Her ser man at Torunn prøver å finne en sammenheng mellom de to sidene av likhetstegnet for å kunne bruke dette til noe, men hvor hun ikke helt har lyktes. Grunnen til at dette er tatt med i denne koden er fordi hun likevel har forstått at sidene kan sammenlignes på denne måten, og at dersom de lykkes med dette kan de komme fram til en løsning av likningen. Hun sammenligner altså ikke verdien av uttrykkene, men prøver å finne en sammenheng ved like ledd og strukturer. Utsagnet nedenfor er hentet fra en diskusjon om hvordan man kommer fram til løsningen på oppgave 6;

329.Ingrid:	OK. Er det noen måte vi kan se at det skal være ti på? Uten å_
330.Sindre:	Det står ti der så... (Peker på tallet 10 på venstresiden av likhetstegnet).
331.Ingrid:	Det står ti der? Da må det være ti?
332.Sindre:	Ehm.. Ja, da er det logisk at det er ti der også (peker på "tall" på høyresiden av likhetstegnet).

Her ser vi at Sindre begrunner at "tall" skal være 10 med at dette tallet også står på venstresiden av likhetstegnet. Sindre sammenligner sidene, men han nevner ikke at dette kommer av at resten av uttrykkene ($2 \cdot tall$) på hver side av likhetstegnet er likt. Det er usikkert om han ser dette og ikke setter ord på det, eller om han bare sammenligner strukturen og mener at de siste leddene på hver side skal være like.

Ekvivalensegenskaper

Den siste koden innenfor denne kategorien har jeg valgt å kalle *ekvivalensegenskaper*, og den rommer altså sekvenser hvor disse egenskapene (refleksivitet, symmetri og transitivitet) aksepteres. Dette mener jeg hører til under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*, fordi disse egenskapene til likhetsrelasjonen krever at man ser på uttrykkene som matematiske objekter, og ikke som prosesser som skal utføres. Et eksempel på hvor elevene aksepterer den refleksive egenskapen til likhetsrelasjonen er fra denne delen av oppgave 7;

$$8 = 8$$

hvor gruppe 1 (Andreas og Silje) svarte følgende;

"R, fordi 8 er det samme som 8"

Dette viser at de aksepterer de refleksive egenskapene til likhetsrelasjonen. Det skal nevnes at det kan være enklere å se på hver side av likhetstegnet som like matematiske objekter når de faktisk er eksakt like. Men det skiller seg likevel fra å se på likhetstegnet som en befaling om prosess. Eksempel fra datamaterialet hvor elevene godtar den symmetriske egenskapen til likhetsrelasjonen er i forbindelse med denne delen av oppgave 7

4.2. LIKHETSTEGNET OPPFATTET SOM LIKHET MELLOM OBJEKTER⁵⁷

$$4 + 7 = 7 + 4$$

hvor Torunn og Maria har svart følgende:

“R, samme regnestykke”.

Den symmetriske egenskapen til likhetsrelasjonen sier at dersom det første uttrykket er likt det andre, så er også det andre likt det første. Når elevene skriver “samme regnestykke” tolker jeg det som at de mener at regnestykket på venstreside er likt det på høyreside og motsatt, og dermed er dette en forståelse for symmetri. Det siste eksempelet viser aksept av transitivitet, og er fra da jeg spurte elevene under intervjuet om jeg i likheten

$$47 + 3 = 50$$

kan bytte ut 50 med $25 + 25$.

463.Ingrid:	Mm. Her står det jo femti (sirkler rundt tallet 50 på høyresiden av likhetstegnet). Får jeg lov til å bytte ut det tallet der, med tjuefem pluss tjuefem?
464.Sindre:	Mm.
465.Ingrid:	Hvorfor får jeg lov til det?
466.Sindre:	Fordi det er det samme som.

Denne sekvensen mener jeg viser aksept av transitivitet, fordi de begrunner lovligheten av å bytte ut 50 med $25 + 25$ med at “det er det samme som”. Dette tolker jeg som at de setter likhet mellom disse, altså $50 = 25 + 25$, og dermed kan de igjen sette $47 + 3 = 25 + 25$, og vi har transitivitet.

4.2.2 Diskusjon av *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*

I denne delen skal jeg diskutere hvilke tolkninger av likhetstegnet som har blitt funnet under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*, om disse tolkningene går under en relasjonell forståelse av likhetstegnet eller ikke, og relatere disse funnene til teorien.

Det er interessant at det eneste tilfellet av koden *algebraisk metode* ble funnet under arbeid med en oppgave med konkreter. Det er mulig at elever lettere

ser at like operasjoner på begge sider (på begge objekter) lar relasjonen være uendret når det er fysiske objekter (konkreter) de arbeider med. Man kan sammenligne dette med at Linchevski og Herscovics (1996) i sine undersøkelser fant at nesten alle elevene så at de kunne stryke like ledd da de holdt på med en balansemodell, som jo også er en annen representasjon enn en likning i matematiske symboler. Også Falkner et al. (1999) fant blant første- og andreklassinger at de klarte å representere en likhet ved samlinger av fysiske objekter, men at de hadde problemer med å knytte ekvivalensrelasjoner til matematiske symboler. Dette tyder på at problemet kanskje ligger i å knytte forståelsen til de matematiske symbolene. Elevene som deltok i min undersøkelse hadde ikke hatt algebra da de deltok i dette forskningsprosjektet, og derfor er det kanskje ikke så overraskende at det bare er én forekomst av koden *algebraisk metode*. Likevel, dersom elevene hadde hatt en fullstendig relasjonell forståelse av likhetstegnet ville de kanskje forstått at ved å gjøre det samme på begge sidene av likhetstegnet ville uttrykkene fortsatt være like. Dette argumenterer Jacobs et al. (2007) for at eleven burde forstå for å ha en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Andreas viser en *det samme som*-tolkning av en likhet representert ved konkreter, som i dette tilfellet inngår i en *fullstendig relasjonell* forståelse. Det må likevel kommenteres at eleven ikke tydelig viser at han har knyttet denne forståelsen til symbolet likhetstegnet. Dette kan bety at eleven har klart å knytte begrepet og referansekonteksten sammen, men kanskje ikke mediert tilstrekkelig mellom symbolet (likhetstegnet) og referansekonteksten (Steinbring, 2006), siden eleven kun bruker denne metoden i en referansekontekst som ikke inneholder tegnet.

Det var veldig få tilfeller av koden *definisjon/identitet*, og den største grunnen til dette er nok at veldig få av oppgavene elevene fikk jobbe med i undersøkelsen fremmer en slik forståelse. Koden tilsvarende en *identitet*-tolkning av likhetstegnet. I det ene eksempelet viste gruppe 3 med Sindre og Kristoffer en tolkning av likhetstegnet som et symbol som viser en definisjon, som samsvarer med det Jones (2009) forklarer om å tolke likheter som en gitt definisjon som kan brukes til videre regning eller tenkning. I det andre eksempelet med Silje fra gruppe 1 er det litt mer usikkert om hun faktisk har en *identitet*-tolkning av likhetstegnet, da hun ikke tydelig viser dette. Det kunne være interessant å gjøre videre undersøkelser med oppgaver som fremmer denne tolkningen av likhetstegnet, for å se om man fikk flere forekomster av slike tolkninger.

Koden *det samme som* eller *likt* vil gå under *det samme som*-tolkningen av likhetstegnet, og under en *grunnleggende relasjonell* forståelse, hvor man

4.2. LIKHETSTEGNET OPPFATTET SOM LIKHET MELLOM OBJEKTER⁵⁹

aksepterer bruken av likhetstegnet i en variasjon av kontekster og hvor betydningen av likhetstegnet beskrives som “det samme som”. Knuth et al. (2006) fant blant sjette- til åttendeklassinger at et mindretall av elevene definerte likhetstegnet til å bety “det samme som”. Elevene har ved hjelp av mediering mellom referansekontekster og likhetstegnet klart å skape mening med tegnet (Steinbring, 2006), og har en oppfatning av at det betyr “det samme som”. Grunnen til at jeg ikke mener forklaringene kvalifiserer til en *fullstendig relasjonell* forståelse av likhetstegnet, er at de ikke inneholder noe informasjon om at elevene for eksempel er i stand til å utnytte strukturelle og aritmetiske snarveier, og de sier heller ingenting om at de aksepterer ekvivalenssegenskaper eller vet hvilke transformasjoner som er lovlige på en likning.

Det er vanskelig å si hvilken tolkning av likhetstegnet elevene viser under koden *balanse*. Elevene kan klare å balansere en likning i konteksten “uttrykk = svar” med en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet. I andre tilfeller må elevene i det minste ha en *grunnleggende relasjonell* forståelse av likhetstegnet med en *det samme som*-tolkning. Men hvordan de har løst oppgavene gir en større pekepinn på hvordan de tolker likhetstegnet, og om de har en mer utviklet forståelse av tegnet. Derfor vil andre koder enn denne være de utslagsgivende når det kommer til å forstå hvilken tolkning elevene har av tegnet. Knuth et al. (2006) fant en sterk sammenheng mellom forståelse av likhetstegnet og suksess i å løse likninger, og dermed kan man kanskje likevel anta at de elevene som stort sett klarte å balansere likningene også har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Det bør da nevnes at Knuth et al. (2006) definerer en relasjonell forståelse av likhetstegnet som tolkningen av at det betyr “det samme som”.

I en undersøkelse med sjetteklassinger fant Banerjee og Subramaniam (2012) at de fleste elevene kunne bedømme likhet/ekvivalens ved å fokusere på strukturen av uttrykkene, men noen av disse hadde også behov for å beregne disse uttrykkene. Dette ligner jo ganske mye på det jeg fant i min undersøkelse under koden *sammenligne sider*. Selv om elevene forklarte seg slik som her, ga mange av dem også forklaringer som viste at de hadde gjort beregninger i tillegg. Dette tyder på at elevene har en *fullstendig relasjonell* forståelse fordi de klarer å sammenligne sidene basert på strukturen, men de er fortsatt litt usikre da de må dobbeltsjekke om verdien virkelig er den samme. I motsetning til den ene eleven i Cobb (1987) sin undersøkelsen som kun så på mønstre i likheten når han sammenlignet uttrykkene, viste elevene i min undersøkelse også en forståelse av at verdien av hver side måtte være lik.

Innen koden *ekvivalenssegenskaper* finner vi to tolkninger av likhetstegnet. Ved refleksivitet og symmetri finner vi en *det samme som*-tolkning. Aksept av disse egenskapene er nødvendig for en relasjonell forståelse av likhetstegnet (Kieran, 1981; Baroody & Ginsburg, 1983). På barneskolen har elever ofte problemer med å akseptere setninger på formen $3 = 3$ (Kieran, 1981). Det at elevene i min undersøkelse her viser en aksept av likheter på andre former enn konteksten “uttrykk = svar”, tenderer mot at elever kan oppnå en *grunnleggende relasjonell* forståelse av likhetstegnet mellom barneskoleårene og til de begynner på ungdomsskolen. Om dette har med alder å gjøre eller andre faktorer er vanskelig å si ut fra denne undersøkelsen. Vi finner også *kan byttes ut med*-tolkningen av likhetstegnet innen koden *ekvivalenssegenskaper*. Denne tolkningen henger sammen med at ulike representasjoner av det samme matematiske objektet kan byttes ut med hverandre (Duval, 2006). Kieran (1981) argumenterer for at en relasjonell forståelse av likhetstegnet krever at man forstår at et uttrykk kan erstattes med et ekvivalent uttrykk. I følge Jones (2009) er det nødvendig å kunne bytte fleksibelt mellom denne tolkningen og *det samme som*-tolkningen for å ha en *fullstendig relasjonell* forståelse av likhetstegnet. Jones (2009) skiller mellom tolkningene *det samme som* og *kan byttes ut med*, mens elevene i min undersøkelse begrunnet den ene tolkningen med den andre. De begrunnet at man kunne bytte ut et uttrykk med et annet fordi “det er det samme”. Dette mener jeg kan tyde på at de ikke skiller mellom de to tolkningene. Likevel mener jeg dette kan ha sammenheng med oppgavetyperne, hvor oppgavene i min undersøkelse ikke ligner på de i Jones (2009) sin undersøkelse. For å finne ut av dette hadde jeg måtte hatt flere oppgaver som kunne fremme *kan byttes ut med*-tolkningen.

4.3 Diskusjon av kategoriene knyttet opp mot forståelse av likhetstegnet

I dette delkapittelet vil jeg gi en kort diskusjon av kategoriene i undersøkelsen knyttet opp mot forståelsen av likhetstegnet.

Man kan ikke koble kategoriene mine direkte opp mot én tolkning av likhetstegnet, fordi hver kategori har mange koder og disse igjen kan inneholde forskjellige tolkninger innenfor én kode. Likevel vil jeg påstå at kategoriene mine kan gi en pekepinn på om man har en relasjonell forståelse av likehtstegnet eller ikke. Biter av datamaterialet som er plassert i kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess* kan i beste fall klassifiseres som en *grunnleggende*

relasjonell forståelse, fordi dersom hver side av likhetstegnet ses på som en prosess (eventuelt kun venstresiden) vil man ikke ha en *fullstendig relasjonell* forståelse. Grunnen til dette er at dersom man ser på hver side som en prosess vil man ikke fleksibelt kunne bytte mellom *det samme som*-tolkningen og *kan byttes ut med*-tolkningen, og man vil heller ikke kunne forstå at man kan gjøre de samme transformasjonene på hver side av likhetstegnet. Dermed vil heller kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter* peke mot en *fullstendig relasjonell* forståelse av likhetstegnet, da man ved å se på uttrykkene på hver side av likhetstegnet som matematiske objekter har muligheten til å oppnå en slik forståelse.

4.4 Forekomster av kodene

I dette delkapittelet vil jeg gi en oversikt av forekomster av de ulike kodene, og deretter diskutere forekomster av de ulike kodene, og forekomster av koder og tolkninger knyttet til de forskjellige gruppene av elever. Til slutt vil jeg også gi en oversikt og diskusjon av forekomster av koder typisk for visse oppgaver.

Tabell 4.1 viser forekomstene av de ulike kodene totalt, samt forekomster av kodene innen de ulike parene av elever. I rutene i tabellen indikerer tallene antall sekvenser og/eller besvarelser hver av kodene er satt på, og tallet i parentes bak er hvor mange av disse igjen som er “riktige”. Med riktig så mener jeg at besvarelsen eller utsagnene gir riktig svar på oppgavene som er gitt, at elevene har tolket oppgavene rett, eller de gir en forklaring som er riktig generelt eller i konteksten de er presentert for.

Hver sekvens har blitt vurdert av meg, og dermed er tallene i parentes kun en pekepinn på hvor mye elevene har forstått, ettersom noen utsagn er vanskelige å vurdere som helt “riktig” eller “feil”. For eksempel under koden *regn ut* har jeg vurdert en *regn ut*-forklaring på betydningen av likhetstegnet som riktig dersom det blir forklart at en slik forståelse gjelder i konteksten “uttrykk = svar”. Dette er fordi jeg mener dette ikke er en feil tolkning i en slik kontekst, selv om tolkningen er overflødig dersom man har tilegnet seg en *det samme som*-oppfatning av likhetstegnet som gjør seg gjeldende i flere kontekster. En sekvens kan ha blitt vurdert som “feil” av meg dersom elevene for eksempel ikke kommer noen vei med en framgangsmåte de har brukt eller de har mistet et viktig poeng med oppgaven. For eksempel under koden *sammenligne verdi* har elevenes utsagn blitt vurdert som feil dersom de har kommet fram til feil løsning av en likning og ikke oppdager dette ved

Tabell 4.1: Forekomster av de forskjellige kodene totalt og fordelt på gruppene

Kode	Antall to- talt	Andreas og Silje	Torunn og Maria	Sindre og Kristoffer
Regn ut	36 (6)	4 (3)	12 (1)	20 (2)
Uttrykk = svar	10 (7)	1 (1)	5 (5)	4 (1)
Svar til slutt	10 (0)	0	0	10 (0)
Regn sammen “alt”	7 (0)	0	1 (0)	6 (0)
Unwind	5 (4)	0	3 (2)	2 (2)
Sammenligne verdi	55 (36)	24 (14)	14 (8)	17 (14)
Algebraisk metode	1 (1)	1 (1)	0	0
Definisjon/ identitet	2 (2)	1 (1)	0	1 (1)
Samme som eller likt	59 (58)	21 (21)	14 (14)	24 (24)
Balanse	113 (113)	46 (46)	45 (45)	22 (22)
Sammenligne sider	31 (21)	6 (4)	15 (9)	10 (8)
Ekvivalens- egenskaper	32 (27)	11 (11)	9 (7)	12 (9)

å sammenligne verdien (fordi de beregner hver side feil). Et annet eksempel er under *ekvivalensegenskaper* hvor noen av kodene er blitt vurdert som feil fordi selv om de skriver en likhet som viser refleksivitet, modellerte ikke likningen situasjonen de skulle beskrive (som “ $4 = 4$ ” til å modellere situasjonene med balansevekta, hvor det var 5 kg på hver side).

Hver gruppe fikk beskjed om å levere inn ett svarark. Gruppe 3 med elevene Sindre og Kristoffer skrev likevel på hvert sitt svarark under oppgaveløsningen, og leverte inn begge. Disse elevene hadde tydelig samarbeidet på alle oppgavene og var muntlig blitt enige om løsningene, men på noen av dem ble resultatene skrevet ned forskjellig, noe som i visse tilfeller ga opphav til ulike koder. Derfor så jeg meg nødt til å kode begge besvarelsene, og kompenserte for dette ved å doble antall forekomster av koder fra oppgavebesvarelsene fra de andre to gruppene. Dette gjorde jeg fordi jeg mener det vil gi en mer riktig fordeling av forekomster av de ulike kodene. Hvis jeg ikke hadde gjort

det slik, ville forholdet mellom antall forekomster av kodene gitt en feil indikasjon på hvilken forståelse av likhetstegnet som var vanligst blant disse elevene. I tabell 4.1 ville det også sett ut som at gruppe 3 hadde en mye større andel forekomster av for eksempel koden *regn ut* i forhold til de andre gruppene, enn det de faktisk hadde. En konsekvens dette har fått er at koder som *balanse* som stort sett er blitt satt på besvarelser fra oppgavejobbingen, og mindre fra selve intervjuene, har fått mange forekomster. Det vil jo også gjøre at det blir en overvekt av forekomster på oppgavene som ble gitt under oppgaveløsningen i forhold til de oppgavene som kun ble diskutert under intervjuet.

4.4.1 Diskusjon av forekomsten av kodene

I denne delen vil jeg diskutere forekomster av kodene, og også koder og tolkninger av likhetstegnet knyttet til de ulike gruppene av elever.

Det samme som-tolkningen er mest vanlig

Koden *samme som eller likt* er det mange forekomster av, noe som tyder på at *det samme som-tolkningen* er den mest utbredte blant disse åttendeklassingene. Men dette er også påvirket av oppgavene og spørsmålene jeg stilte forskningsdeltakerne. Man kan for eksempel se fra tabell 4.1 at det er få tilfeller av koden *definisjon/identitet*. Noe av grunnen til dette er at det var betydelig færre oppgaver og spørsmål som kunne fremprovosere en slik forståelse av likhetstegnet, kontra hva det var som kunne fremme koden *samme som eller likt*. De mange forekomstene av kodene *sammenligne verdi* og *sammenligne sider* er også med på å underbygge at *det samme som-tolkningen* er den mest vanlig blant disse åttendeklassingene. Til sammenligning fant Knuth et al. (2006) at relativt få elever på mellomtrinnet hadde en slik forståelse, og McNeil et al. (2006) fant at 44 % av elevene på mellomtrinnet i deres undersøkelse hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet.

Overgangsfase

Totalt er det flere koder under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter* (under den tykke linjen i tabell 4.1) enn det er under kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess*. Dette kan tyde på at elevene som

deltok i undersøkelsen stort sett ikke lengre har en instrumentell forståelse av likhetstegnet, og selv om de ikke har en fullstendig relasjonell forståelse så er de i en overgangsfase. Kieran (1981) argumenterer for at elever i trettenårs alderen (slik som elevene i min undersøkelse) ofte er i en slik overgangsfase mellom å forstå likhetstegnet som en kommando om å regne ut og å forstå det som en relasjon mellom to matematiske objekter. Dermed kan dette tyde på at mine resultater føyer seg til det Kieran (1981) konkluderer med.

Fra tabell 4.1 kan man se at gruppe 3 med elevene Sindre og Kristoffer sto for mesteparten av kodene *regn ut*, *svar til slutt* og *regn sammen "alt"*. Siden alle disse kodene vil gå under en instrumentell forståelse av likhetstegnet kan dette tyde på at disse elevene hadde en mindre utviklet forståelse av symbolet enn de andre gruppene. Likevel ser man at denne gruppen også hadde mange forekomster av koder som vil kunne gå under en relasjonell forståelse. Elevene så ut til å hoppe litt frem og tilbake mellom to tolkninger av symbolet, uten selv å være bevisst på at de vekslet mellom ulike tolkninger. Selv om det ikke var noen tydelig sammenheng mellom forståelse og type oppgaver de ble presentert for brukte de en *regn ut*-tolkning i begynnelsen av oppgaveregningen, og de første oppgavene hadde i all hovedsak likninger med den aritmetiske operasjonen addisjon. De løste så noen oppgaver riktig (også med addisjon), men falt tilbake til en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet i oppgave 5, hvor også operasjonene i uttrykkene var addisjon. Det kan være at operasjonen addisjon fremmer en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet hos disse elevene. Denne vekslingen frem og tilbake mellom en instrumentell og relasjonell forståelse av likhetstegnet kan tyde på at særlig denne gruppen er i overgangsfasen mellom å tolke likhetstegnet som en kommando om å regne ut og å tolke det som et symbol som viser en relasjon, slik som Kieran (1981) forklarer.

Fra tabell 4.1 kan man se at de fleste kodene gruppe 2 med elevene Torunn og Maria står for, ser ut til å gå under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*. Men de har også en del under blant annet koden *regn ut*, som befinner seg i kategorien *likhetstegnet med befaling om prosess*. Dette kan tyde på at disse elevene har en begynnende forståelse av likhetstegnet som en relasjon mellom matematiske objekter, men at noe av forståelsen av likhetstegnet som en befaling om prosess henger igjen.

Bevisstgjøring av betydningen av likhetstegnet

Fra tabell 4.1 kan man se at det er mange forekomster av koden *balanse*, noe som er naturlig fordi under oppgaveløsningen ble mange av likningene løst uten begrunnelse eller utregning. Forklaringen på løsningsmetoden kom gjerne under intervjuet. Gruppe 1 med elevene Andreas og Silje løste alle likningene i oppgavesettet riktig, og mange av disse gikk under koden *balanse*. Den siste gruppen med elevene Kristoffer og Sindre hadde betydelig mange feil under oppgaveløsningen. Denne gruppen fikk derimot flere forekomster av koden *balanse* under intervjuet fordi de mange ganger kunne se at de hadde gjort feil under oppgaveregningen og dermed kom med riktige løsninger under intervjuet. Dette mener jeg tyder på at ved å snakke om tolkningen av likhetstegnet og være mer bevisst på betydningen av symbolet, kan elever utvikle en relasjonell forståelse av symbolet. Falkner et al. (1999) fant blant første- og andreklassinger at etter undervisning med spesielt fokus på likhetstegnets betydning, hadde disse elevene en tolkning av tegnet som et symbol som viser en relasjon. Dette tyder på at kanskje fokus på og forhandling om tegnets betydning kan være en vel så viktig faktor i å oppnå en relasjonell forståelse av likhetstegnet som det alder er.

Tolkningen av likhetstegnet er avhengig av konteksten

Fra tabell 4.1 ser man at gruppe 1 med elevene Silje og Andreas har litt færre forekomster av koder generelt, i forhold til de andre gruppene. Grunnen til dette er at intervjuet med denne gruppen var litt kortere, da de ikke brukte så mye tid på å diskutere seg i mellom og de kom raskere fram til løsninger på oppgaver de ble presentert for under intervjuet. Denne gruppen har også flere forekomster av koder under kategorien *likhetstegnet oppfattet som likhet mellom objekter*, noe som kan tyde på at de har en ganske utviklet relasjonell forståelse av likhetstegnet. I tillegg vil jeg kommentere at flere av tilfellene under koden *regn ut* hos denne gruppen, var i konteksten “uttrykk = svar”. McNeil et al. (2006) fant i sine undersøkelser med sjettede- til åttendeklassinger at elever som ble presentert for likhetstegnet i konteksten “uttrykk = svar”, hadde mindre sannsynlighet for å gi en relasjonell forklaring av symbolet. Dermed kan oppfattelsen av betydningen av likhetstegnet avhenge av konteksten symbolet befinner seg i.

4.4.2 Koder og tolkninger typiske for visse oppgaver

I denne delen vil jeg gi en presentasjon av forekomstene av kodene fordelt på de ulike oppgavene, og gi en diskusjon av dette.

Tabell 4.2 og 4.3 viser forekomster av de ulike kodene fordelt på de ulike oppgavene. Oppgave 1 til 8 er oppgavene som ble gitt i oppgavesettet, mens oppgavene *bytte ut*, *konkreter* og *tallfølge* er oppgaver som ble gitt under intervjuene. Forekomster av koder som oppsto under intervjuene, men hvor det ble snakket om en av oppgavene fra oppgavesettet er plassert under den oppgaven som ble diskutert. Det er også tatt med en egen kolonne i tabell 4.3 som viser antall forekomster av de ulike kodene når det ikke var snakk om en spesiell oppgave, men generelt. For eksempel dersom jeg spurte elevene om hva likhetstegnet betyr, uten å knytte dette opp til en spesiell oppgave, ville svaret gå under denne kolonnen på den aktuelle koden. Tallene i parentes bak viser også i disse tabellene antall besvarelser/sekvenser som er blitt vurdert som riktige.

Tolkninger knyttet til ulike oppgaver

Koden *sammenligne verdi* er ganske godt fordelt på de ulike oppgavene, noe som kan tyde på at denne måten å tenke på, altså å sammenligne verdiene av uttrykkene på hver side av likhetstegnet, er den elevene foretrekker i mange tilfeller og som de klarer å bruke i flere kontekster. Koden *samme som eller likt* er også ganske jevnt fordelt på oppgavene, og dette kan tyde på at det er mange av oppgavene som fremmer en *det samme som*-tolkning av likhetstegnet, som nevnt tidligere. Men det at denne koden også ble funnet i forbindelse med *tallfølge*-oppgaven tolker jeg slik at *det samme som*-tolkningen er den mest utbredte forståelsen av likhetstegnet blant disse åttendeklassingene, slik som jeg også konkluderte med i delkapittel 4.4.1 utfra tabell 4.1. Til sammenligning fant Knuth et al. (2006) at relativt få elever på mellomtrinnet hadde en slik forståelse av likhetstegnet, dermed skiller mine resultater seg noe fra dette.

Koden *definisjon/identitet* som tilsvarer en *identitet*-tolkning, forventet jeg egentlig bare å finne i forbindelse med *tallfølge*-oppgaven, men jeg fant den også i oppgave 6. I tillegg var det bare gruppe 1 som rakk å jobbe med *tallfølge*-oppgaven, da denne var den siste oppgaven, og det kunne kanskje vært flere forekomster dersom de andre gruppene også hadde fått mulighet til å

Tabell 4.2: Forekomster av koder fordelt på oppgavene

Kode	Oppgave 1	Oppgave 2	Oppgave 3	Oppgave 4	Oppgave 5	Oppgave 6
Regn ut	10 (2)	8 (2)	4 (0)	0	10 (0)	0
Uttrykk = svar	2 (2)	1 (1)	1 (0)	0	0	0
Svar til slutt	5 (0)	3 (0)	0	0	2 (0)	0
Regn sammen "alt"	1 (0)	0	1 (0)	0	0	2 (0)
Unwind	0	1 (1)	3 (3)	0	1 (0)	0
Sammenlignede verdi	8 (7)	2 (2)	4 (3)	2 (2)	5 (4)	10 (6)
Algebraisk metode	0	0	0	0	0	0
Definisjon/identitet	0	0	0	0	0	1 (1)
Samme som eller likt	3 (3)	5 (5)	4 (4)	2 (2)	7 (7)	6 (6)
Balanse	19 (19)	12 (12)	16 (16)	24 (24)	18 (18)	7 (7)
Sammenlignede sider	0	0	0	0	14 (8)	8 (8)
Ekvivalens-egenskaper	0	0	0	0	0	0

jobbe med denne.

Koden *ekvivalensegenskaper* finner vi mest av i oppgave 7 og i *bytte ut*-oppgaven, noe jeg mener ikke er overraskende da oppgave 7 inneholder en eksakt likhet (refleksivitet) og *bytte ut*-oppgaven var konstruert for å kontrollere om de aksepterte transitivitet. Dette viser at elevene trengte en oppgave konstruert spesielt for *kan byttes ut med*-tolkningen for å kunne vise denne forståelsen, noe som også forekomstene av koden *definisjon/identitet* for *identitet*-tolkningen tenderer mot. Slik McNeil et al. (2006) argumenterer for at elever trenger kontekstuell støtte for å demonstrere en relasjonell forståelse av likhetstegnet, kan det se ut som elevene i denne undersøkelsen behøver

Tabell 4.3: Forekomster av koder fordelt på oppgavene

Kode	Oppgave 7	Oppgave 8	Bytte ut	Konkreter	Tallfølge	Generelt
Regn ut	0	0	0	0	0	4 (2)
Uttrykk = svar	4 (4)	0	0	0	0	2 (0)
Svar til slutt	0	0	0	0	0	0
Regn sammen "alt"	0	1 (0)	0	2 (0)	0	0
Unwind	0	0	0	0	0	0
Sammenli- gne verdi	11 (8)	1 (1)	0	6 (2)	6 (1)	0
Algebraisk metode	0	0	0	1 (1)	0	0
Definisjon/ identitet	0	0	0	0	1 (1)	0
Samme som eller likt	6 (6)	9 (9)	1 (1)	5 (5)	1 (0)	10 (10)
Balanse	0	14 (14)	0	3 (3)	0	0
Sammenli- gne sider	0	0	0	9 (5)	0	0
Ekvivalens- egenska- per	23 (21)	5 (2)	4 (4)	0	0	0

oppgaver som fremmer de ulike tolkningene av likhetstegnet for å være i stand til å demonstrere disse tolkningene.

Referansekonteksten må assosieres med begrepet

Som diskutert i delkapittel 4.2 indikerer muligens det at koden *algebraisk metode* kun ble funnet i oppgaven med konkretene, slik man ser i tabell 4.3, at Andreas hadde større problemer med å utføre det samme på matematiske symboler som han klarte med fysiske objekter. Men jeg fant også motsetninger på dette, fordi gruppe 2 og 3 så ut til å ha større problemer med å arbeide

med en likning representert med konkreter, enn de hadde med matematiske symboler. Dette kan også skyldes at elevene muligens ikke har arbeidet i stor grad med konkreter fra før. I så fall vil dette bety at de ikke har fått knyttet akkurat denne referansekonteksten til begrepet (Steinbring, 2006). Referansekonteksten med konkretene inneholder ikke likhetstegnet, og dersom elevene trenger dette tegnet for å assosiere en representasjon av en likhet med begrepet, kan dette være grunnen til at de trengte litt lengre tid før de forsto sammenhengen mellom representasjonen og begrepet likhet.

Opererer rundt den ukjente på et numerisk nivå

Tabell 4.2 og 4.3 viser at koden *sammenligne sider* ble funnet i oppgave 5, 6 og 9, og grunnen til dette mener jeg er fordi likningene i disse oppgavene inneholder like ledd på hver side av likhetstegnet, eller ledd som er nesten like. Dermed blir det naturlig å sammenligne sidene for like ledd og strukturen på uttrykkene i disse tilfellene. Ingen av elevene så ut til å sammenligne leddene i oppgave 6 til å begynne med, men gjorde dette etter noen spørsmål fra meg. Dette kan tyde på at de har vanskelig med å sammenligne ledd som inneholder den ukjente, noe som kan sammenlignes med at Herscovics og Linchevski (1994) fant at elever så ut til å operere rundt den ukjente på et numerisk nivå. Dette mener jeg også koden *nøste opp* understreker, da elevene også her arbeider rundt den ukjente. Fra tabell 4.2 og 4.3 ser man at denne koden ble brukt på oppgaver som inneholder likninger med én ukjent, noe som er naturlig da det er i slike tilfeller denne metoden vil fungere. Det ville vært interessant å se hvordan elevene arbeidet med likninger med flere forekomster av den ukjente etter introduksjonen til algebra.

Operasjoner innvirker på tolkningen av likhetstegnet

Regn ut-koden kan man se har forekomster fra oppgave 1, 2, 3 og 5, og dette er nok fordi disse oppgavene er lineære likninger som elevene skulle løse og det dermed er naturlig at den oppsto på slike typer oppgaver. Det som er interessant her er at det ikke er noen forekomster av denne koden på oppgave 4 som også inneholder likninger elevene skulle løse. Forskjellen på denne oppgaven og de resterende som denne koden er fordelt på er at oppgave 4 har forskjellige operasjoner i uttrykkene på hver side av likhetstegnet (for eksempel multiplikasjon på den ene siden og addisjon på den andre), mens de andre har samme operasjon i uttrykkene på begge sider av likhetstegnet. Det ser dermed ut som at elevene har lettere for å bruke eller forklare *regn ut*-

tolkningen av likhetstegnet dersom uttrykkene på hver side av likhetstegnet har samme operasjon. Grunnen til dette kan være at dersom elevene synes denne konteksten ligner mer på konteksten “uttrykk = svar”, kan mediering mellom en referansekontekst og symbol (Steinbring, 2006) ha ført til en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet dersom referansekonteksten har vært for ensformig. McNeil et al. (2006) argumenterer for at elevers evner til å tilegne seg en relasjonell forståelse av likhetstegnet kan avhenge av konteksten likhetstegnet blir gitt i, og mine resultater ser ut til å tendere til at det er lettere å oppfatte likhetstegnet på en relasjonell måte dersom det er gitt i en kontekst med forskjellige operasjoner på hver side av tegnet.

Man kan se fra tabell 4.2 og 4.3 at koden *svar til slutt* er fordelt på oppgave 1, 2 og 5. Det likningene i disse oppgavene har til felles er at de kun har operasjonen addisjon, og ut i fra dette tolker jeg at denne forståelsen av likhetstegnet blir fremprovosert av likninger med operasjonen addisjon. Dette kan henge sammen med at elevene kanskje er mest vant til likhetstegnet brukt i konteksten “uttrykk = svar”, hvor uttrykket er en sum.

Kapittel 5

Avslutning og perspektivering

I dette kapittelet skal jeg oppsummere hvilke tolkninger av likhetstegnet jeg fant i undersøkelsen, og oppsummere noen interessante funn. Jeg vil også reflektere rundt disse funnene.

Jeg har funnet eksempler på tolkningene *regn ut*, *det samme som*, *identitet* og *kan byttes ut med*. I tillegg til dette har jeg funnet noen varianter under *regn ut*-tolkningen av likhetstegnet, og flere forskjellige eksempler under *det samme som*-tolkningen som indikerer både en *grunnleggende relasjonell* forståelse og en *fullstendig*-relasjonell forståelse av likhetstegnet. Tolkningen av likhetstegnet som dominerte blant disse åttendeklassingene var *det samme som*-tolkningen, og her var det flest forekomster hvor de viste en *grunnleggende relasjonell* forståelse. Disse ulike tolkningene og forskjellene mellom dem mener jeg kan være nyttig å være oppmerksom på i arbeidet som lærer, da å forstå elevenes tolkninger er nyttig for å hjelpe elevene å utvikle forståelsen. Jeg mener det er særlig viktig å finne ut om, og skille mellom om elevene har en *det samme som*-tolkning som tilsvarer en *grunnleggende relasjonell* eller en *fullstendig relasjonell* forståelse av likhetstegnet, da forskjellen mellom disse kan være forskjellen mellom å lykkes i algebra og ikke.

Resultatene fra undersøkelsen indikerer at elevene er i en overgangsfase mellom å forstå likhetstegnet som et symbol som betyr “regn ut” og et symbol for ekvivalens. Jeg fant også data som sammen med hva andre forskere har funnet tenderer mot at alder ikke er en så viktig faktor for forståelsen av likhetstegnet som for eksempel Kieran (1981) mener. Andre data indikerte også at å bevisstgjøre elever rundt betydningen av likhetstegnet kan fremme

en relasjonell forståelse for tegnet. Dette betyr at fokus på betydningen av likhetstegnet i undervisningen tidlig på barneskolen, men også videre i elevenes skolegang gjennom ungdomsskolen, kan være svært viktig for elevenes forståelse av tegnet. Forhandling sammen med elevene om likhetstegnets betydning i stedet for å bare presentere tegnet vil være gunstig, skal man følge rådene til Knuth et al. (2006).

Jeg fant også indikasjoner på at konteksten “uttrykk = svar” fremmer en *regn ut*-tolkning av likhetstegnet, og det så ut til at denne konteksten var foretrukket hos noen av elevene. Dette er viktig å være klar over i arbeid som lærer, slik at man passer på å variere konteksten likhetstegnet befinner seg i, og også at man undersøker at lærebøkene elevene bruker ikke har for ensidig bruk av referansekontekster. Dette kan også være grunnlag for videre undersøkelser; i hvilke kontekster finner man likhetstegnet i norske lærebøker i matematikk? Det ville også være interessant å undersøke om lærere fokuserer på forståelsen av likhetstegnet i undervisningen både i barneskolen og ungdomsskolen. I tillegg; blir betydningen av likhetstegnet forhandlet eller bare presentert?

Jeg fant tendenser på at oppgavene påvirket hvordan elevene oppfattet betydningen av likhetstegnet. Det ville derfor vært interessant å undersøke tolkninger av likhetstegnet med flere oppgaver som fremmer tolkningene *identitet* og *kan byttes ut med*, for å se om man da hadde fått flere forekomster av disse tolkningene og om elevene hadde vært i stand til å veksle mellom de ulike tolkningene av likhetstegnet. I en slik undersøkelse hadde det også vært interessant å undersøke om elever skiller mellom betydningene *kan byttes ut med* og *det samme som*.

Undersøkelsen viste også tendenser til at elevene jobbet rundt den ukjente og ikke med og på den. Dette er viktig for elevene å mestre i arbeid med algebra. Det kan være nyttig å finne ut av om elever opererer på den ukjente eller ikke, og om bakgrunnen for dette er en manglende forståelse for likhetstegnet eller andre grunner, som en manglende forståelse av variabler. Dersom man som lærer kan finne ut av dette er det første skritt i å hjelpe elevene med å utvikle forståelsen. Det kunne vært interessant å se på hvordan dette endrer seg etter elevene har hatt undervisning i algebra. Dette kunne man ha gjort ved en før- og etterundersøkelse, før og etter introduksjonen til algebra.

Gjennom å arbeide med denne oppgaven har jeg fått innsikt i hvordan sym-

boler og begreper i matematikken som kan virke enkle, kan være svært komplekse for ungdomsskoleelever, og hvor viktig det er å bruke tid på å forhandle betydningen av tegn som likhetstegnet. Jeg har også forstått hvor viktig det er å sette seg inn i hvordan eleven tolker matematikken, både når de har en riktig forståelse og feiltolkninger, for å hjelpe dem å utvikle forståelsen. Dette er kunnskap som jeg kan ta med meg inn i mitt fremtidige arbeid i læreryrket.

Referanser

- Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 351–367.
- Baroody, A.J. & Ginsburg, H.P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, 84, 198-212.
- Cobb, P. (1987). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 109-124.
- Corbin, J. & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (3. utg.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene. (2014, 23. 06). *Generelle forskningsetiske retningslinjer*. Hentet 25.05.2015 fra <https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Generelle-forskningsetiske-retningslinjer/>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Falkner, K.P., Levi, L. & Carpenter, T.P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6, 232-236.
- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.
- Jacobs, V.R., Franke, M.L., Carpenter, T.P., Levi, L. & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 258-288.
- Jones, I. (2009). *Equality statements as rules for transforming arithmetic notation* (Doktoravhandling, University of Warwick). Institute of Education, University of Warwick.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Knuth, E.J., Stephens, A.C., McNeil, N.M. & Alibali, M.W. (2006). Does understanding the equal sign matter? evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 297-312.
- Kreyszig, E. (2006). *Advanced engineering mathematics* (9. utg.). Hoboken, NJ: Wiley.
- Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of

- equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65.
- McNeil, N.M., Grandau, L., Knuth, E.L., Alibali, M.W., Stephens, A.C., Hattikudur, S. & Krill, D.E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction*, 24, 367-385.
- OECD. (2014). Pisa 2012 results: What students know and can do - student performance in mathematics, reading and science. , *Volume I*.
- Postholm, M.B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Robson, C. (2011). *Real world research* (3. utg.). Chichester: Wiley.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? - an epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 133-162.
- Såens-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 153-187.
- Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet 20.05.2015 fra <http://www.udir.no/k106/MAT1-04>

Vedlegg A

Samtykkeskjema

Ingrid Vågan Tøgersen
tlf: xxx
e-post: xxx

Veileder:
Heidi Strømskag
tlf: xxx
e-post: xxx

Trondheim

Til foresatte for elever ved xxx skole

Anmodning om tillatelse til videoopptak og innsamling av elevtekster.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. I forbindelse med mitt masterprosjekt i matematikdidaktikk skal jeg gjøre en undersøkelse angående undomsskoleelevers forståelse av likhetstegnet.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å gi elevene et sett med oppgaver de skal arbeide med i par, som skal samles inn og analyseres. Deretter skal elevene intervjues i de samme parene med videoopptak. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne samle inn oppgaver og videoopptak av deres barn. Videokameraet vil rettes ned mot bordet elevene sitter ved og opptakene vil derfor ikke vise ansiktene til deltakerne. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Oppgavene elevene skal løse vil prøve å belyse hvilken forståelse elevene har for likhetstegnet. Det vil være viktig for meg å forsøke og forstå hvordan elevene har tenkt når de løser oppgavene. Deltakerne vil derfor bli bedt om å prøve å svare så utfyllende som mulig. Oppgavene vil kun bli sett av meg og min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 01.09.2015.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å la deres barn være med på prosjektet i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen

Ingrid Tøgersen

Tillatelse

Som del av min masteroppgave ber jeg om tillatelse til å bruke oppgaver utført av barnet ditt/deres samt gjøre videoopptak der han/hun er med.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i ruta dersom du/dere gir tillatelse:

Jeg/vi gir tillatelse. Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

Dato:

Elevens fornavn og etternavn:

Underskrift av foresatt(e):

Vennligst returner svarslippen til lærer xxx så snart som mulig.

Vedlegg B

Oppgavesett

Oppgave 1

Hvilke tall skal stå i de tomme boksene i disse regnestykkene for at de skal bli riktige? Fyll inn tallene i boksene.

$$40 + \square = 50$$

$$8 + 4 = \square + 5$$

$$36 + 57 = 28 + \square$$

$$48 + 3 = \square + 55$$

Oppgave 2

Hvilke tall skal stå i de tomme boksene i disse regnestykkene for at de skal bli riktige? Fyll inn tallene i boksene.

$$45 + 5 = \square + 30 = \square$$

$$20 + 180 = 50 + \square = \square$$

$$13 + \square = 17 + 3 = \square + 9 = \square$$

Oppgave 3

Hvilke tall skal stå i de tomme boksene i disse regnestykkene for at de skal bli riktige?

$$5 \cdot \square = 50$$

$$4 \cdot 5 = \square \cdot 10$$

$$12 - 8 = 20 - \square$$

Oppgave 4

Hvilke tall skal stå i de tomme boksene i disse regnestykkene for at de skal bli riktige?

$$8 \cdot 4 = \square + 30$$

$$6 + \square = 5 \cdot 2$$

$$12 \div 2 = \square + 3$$

$$8 + 16 = 30 - \square$$

Oppgave 5

Hvilke tall skal stå i de tomme boksene? Vis hvordan dere kommer frem til svaret.

$$25 + 29 = \square + 29$$

$$43 + 8 = 8 + \square$$

$$17 + \square = 23 + 17$$

$$38 + 55 = \square + 56$$

Oppgave 6

Nedenfor er det gitt en utregning. Her står "tall" for et ukjent tall, og det er altså dette samme tallet som står tre ganger i denne utregningen. Finn det ukjente tallet som kan byttes ut med "tall".

$$2 \cdot \text{tall} + 10 = 2 \cdot \text{tall} + \text{tall}$$

Oppgave 7 Nedenfor er det noen uttrykk. Disse kaller vi påstander om likhet i matematikken. De kan være riktige eller gale. Skriv i hvert tilfelle om de er riktige eller gale, og gi begrunnelse!

$$10 - 3 = 7$$

$$8 = 8$$

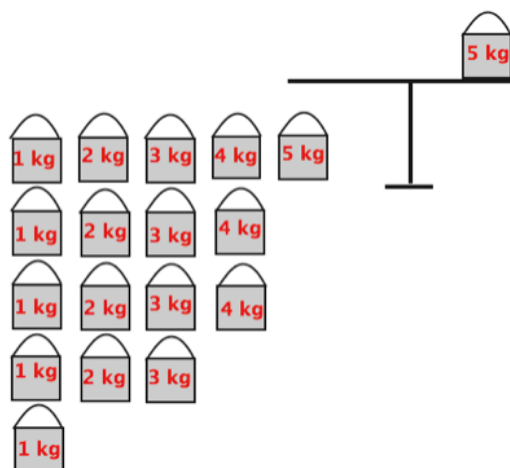
$$12 = -12$$

$$4 + 7 = 7 + 4$$

$$9 - 5 = 5 - 9$$

Oppgave 8

a) Nedenfor er gitt en figur av en balansevekt. På høyre side av vekta ligger det et lodd på 5 kg. Det finnes også en rekke andre lodd med forskjellig vekt. Disse loddene skal brukes til å legge på venstre side av vekta slik at den kommer i balanse. Flere lodd av samme vekt kan legges på.



Tegn på lodd på venstre side av vekta slik at den kommer i balanse. Finn så mange løsninger dere klarer (bare tegn opp flere figurer).

b) Velg ut én løsning. Klarer dere å skrive denne løsningen som en likhet?

Vedlegg C

Opppaver under intervju

Bytte ut:

Elevene blir presentert for likheten

$$43 + 7 = 50$$

Spørsmål: Er likheten riktig? Kan jeg bytte ut 50, med $25 + 25$? Hvorfor/Hvorfor ikke?

Konkreter:

Elevene får fyrstikker og fyrstikkesker lagt foran seg i to separate bunkere som sammen representerer likningen

$$2x + 3 = x + 7$$



De får forklart at det ligger et antall fyrstikker i eskene som er det samme for alle de tre eskene som ligger på bordet. Hver av de to bunkene har til sammen like mange fyrstikker, det vil si alle fyrstikkene i eskene og de fyrstikkene som

ligger utenfor eskene. Spørsmål: Klarer dere å finne ut hvor mange fyrstikker det er i hver av eskene, uten å åpne dem?

Tallfølge: Elevene blir presentert for tallfølgen

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

De får forklart at dette er et tallmønster, hvor de fem første elementene i tallfølgen er gitt. Spørsmål: Klarer dere å finne den sjette linjen i tallfølgen? Hvordan kom dere fram til denne siste linjen? Hva betyr likhetstegnet her?

Vedlegg D

Transkriberingsnøkkel

Tekst ... Tekst = Lengre pause på flere sekunder.

Tekst .. Tekst = Liten nøling.

(Tekst) = Beskrivelse av handlinger og gester.

Tekst_ = Avbrutt av seg selv eller andre.

[Tekst = Det blir snakket samtidig med en annen person.

[Tekst