

Beregningsmetoder for betongskall

Ole Kristian Kirud
Torger Nordgården

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2015

Hovedveileder: Svein Ivar Sørensen, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk

Forord

Denne masteroppgaven er utarbeidet som en del av det 5-årige masterstudiet Bygg- og miljøteknikk ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU).

Masteroppgaven er skrevet ved Institutt for konstruksjonsteknikk, våren 2015, og er utført over en periode på 20 uker. Arbeidet tilsvarer 30 studiepoeng, og er gjennomført i samarbeid mellom de to undertegnede.

Rapporten omhandler skallkonstruksjoner i betong. Temaet er valgt på bakgrunn av studentenes ønske om å tilegne seg kunnskap om beregningsmetoder innen fagområdet.

Begge forfattere har vært involvert i alle temaer i oppgaven. Dette har gitt et godt læringsutbytte for begge parter og gode diskusjoner rundt ulike problemstillinger.

Vi ønsker å takke professor Svein Ivar Sørensen ved Institutt for konstruksjonsteknikk for god veiledning gjennom semesteret.

Trondheim, juni 2015

Ole Kristian Kirud

Torger Nordgården

Sammendrag

Hensikten med oppgaven er å presentere og vurdere beregningsmetoder for skallkonstruksjoner i betong.

Opgaven studerer klassisk teori for aksesymmetriske skall som sylinderskall, kuleskall og sirkulære plater, og presenterer analytiske beregningseksempler der teorien er benyttet. Eksempelene omhandler sylindriske beholdere med plate- og kuletak, og sylindriske skalltak-konstruksjoner med og uten randbjelker.

Det er gjennomført analyser i FEM-programvaren DIANA hvor utgaven har et begrenset antall elementer til rådighet per modell. Analysene er gjennomført i de samme beregningseksempler som for analytiske løsninger og i andre relevante eksempler av skallkonstruksjoner. Resultatene fra de ulike beregningsmetodene sammenlignes og det diskuteres krav til elementmodell for å oppnå tilfredsstillende resultater. Det er gjennomført både lineære og ikke-lineære analyser, der armering er inkludert i den ikke-lineære analysen. Den dimensjonerte armeringen er basert på resultater fra den lineære analysen og gjeldende regelverk.

I arbeidet er det generelt funnet godt samsvar mellom analytiske resultater og resultater hentet fra FEM-analysene. Det konkluderes med at elementtype og elementstørrelse har betydning for nøyaktighet i resultatene og det observeres konvergens for økende antall elementer i modellen. En nærmere studie med ulik elementinndeling viser at en differensiert inndeling med flere elementer i områder der endringene i lastvirkningene er store, er fordelaktig der en ønsker en effektiv bruk av tilgjengelige elementer.

I de ikke-lineære analysene oppstår det ulike bruddtyper ved de forskjellige beregningseksempelene. Det observeres flytning i armering, trykkbrudd og skjærbrudd.

Abstract

The purpose of this study is to present and evaluate analysis methods for concrete shells.

The thesis is studying classical theory for shells of revolution as cylinder, domes and circular plates and presents analytical calculated examples where the theory is applied. The examples assess cylindrical vessels with plate- and spherical roof, and cylindrical shell roofs with and without edge beams.

There is made use of the finite element method software DIANA to analyze the examples numerically, where the edition has a limited amount of elements available per model. The analyses are performed in the same calculation examples as for analytical solutions, and other relevant shell structures. The results of the various calculation methods are compared and the requirements to achieve satisfying results for the element model are evaluated. It is performed both linear and nonlinear analysis, where reinforcement is included in the nonlinear analysis. The necessary reinforcement is designed based on results of the linear analysis and according to current regulations.

There is generally found good agreement between analytical results and results obtained from the FEM-analyses. It is concluded that element type and size is of great importance in terms of accuracy in the results. It is observed convergence by increasing the number of elements in the model. A closer study of different element models shows that a differentiated section with more elements is advantageous in areas where changes in load effects are large. This is beneficial for an efficient use of available elements.

Various fracture types occurs in the nonlinear analysis. It is observed yielding of reinforcement, compressive failure and shear failure.

Innhold

Innholdsliste	x
Tabelliste	xii
Figurliste	xv
1 Innledning	1
I Teori	3
2 Tynnskallteori	5
2.1 Sylinderskall	5
2.1.1 Sammenheng mellom tøyning og spenning	7
2.1.2 Sammenheng mellom forskyvninger og tøyninger	7
2.1.3 Sylinderens differensialligning	8
2.1.4 Løsning av differensialligningen	9
2.1.5 Dempingslengde	11
2.2 Kuleskall	12
2.2.1 Membrankrefter	12
2.2.2 Bøyetilstanden	16

2.3	Sirkulære plater	18
3	Om FEM-programvaren DIANA	21
3.1	Elementtyper	21
3.1.1	Aksesymmetriske elementer	21
3.1.2	Krumme skallelementer	22
3.2	Materialmodell i ikke-lineær analyse	23
3.3	Konvergens	24
II	Beregningseksempler av aksesymmetriske skall	25
4	Eksempel 1: Sylindrisk beholder med sirkulært platetak	27
4.1	Analytisk løsning	28
4.1.1	Beregninger	28
4.1.2	Diagrammer	32
4.2	Lineær analyse	36
4.2.1	Elementinndeling i modell	36
4.2.2	Resultater sylinder	37
4.2.3	Resultater plate	38
4.3	Diskusjon	39
5	Eksempel 2: Sylindrisk beholder med kuleformet tak	41
5.1	Analytisk løsning	42
5.1.1	Beregninger	42
5.1.2	Diagrammer	47
5.2	Lineær analyse	50

5.2.1	Resultater sylinder	50
5.2.2	Resultater kule	51
5.3	Ikke-lineær analyse	53
5.3.1	Dimensjonering av armering	53
5.3.2	Resultater	54
5.4	Diskusjon	57
III Beregningseksempler av skalltak		59
6	Eksempel 3: Buet skalltak med fast innspenne render	61
6.1	Lineær analyse	62
6.2	Ikke-lineær analyse	65
6.2.1	Dimensjonering av armering	65
6.2.2	Resultater	65
6.3	Diskusjon	69
7	Eksempel 4: Buet skalltak med randbjelker	71
7.1	Lineær analyse	72
7.2	Ikke-lineær analyse	76
7.2.1	Dimensjonering av armering	76
7.2.2	Resultater	77
7.3	Diskusjon	79
IV Avslutning		81
8	Konklusjon	83

Bibliografi	85
Vedlegg	89
Vedlegg A Oppgavetekst	89
Vedlegg B Beregninger knyttet til analytiske løsninger	91
B.1 Analytisk løsning - eksempel 1	91
B.2 Analytisk løsning - eksempel 2	96
Vedlegg C Dimensjonering av armering	105
C.1 Dimensjoneringsregler	105
C.2 Dimensjonering av armering - eksempel 2	108
C.3 Dimensjonering av armering - eksempel 3	119
C.4 Dimensjonering av armering - eksempel 4	124

Tabeller

4.1	Lastvirkning i sylinder med ulik inndeling	36
4.2	Lastvirkning i plate med ulik inndeling	37
4.3	Lastvirkninger i sylinder med L6AXI-elementer	37
4.4	Lastvirkninger i sylinder med CL9AX-elementer	37
4.5	Lastvirkninger i plate med L6AXI-elementer	38
4.6	Lastvirkninger i plate med CL9AX-elementer	38
5.1	Lastvirkninger i sylinder med L6AXI-elementer	50
5.2	Lastvirkninger i sylinder med CL9AX-elementer	51
5.3	Lastvirkninger ved kuleranden med L6AXI-elementer	51
5.4	Lastvirkninger ved kuleranden med CL9AX-elementer	51
5.5	Lastvirkninger ved kulesenteret med L6AXI-elementer	52
5.6	Lastvirkninger ved kulesenteret med CL9AX-elementer	52
5.7	Nødvendig armering av sylinder- og kuleskall i eksempel 2	54
6.1	Data for skalltak med fast innspente render	62
6.2	Nødvendig armering av skalltak med fast innspente render	65
7.1	Data for skalltak med randbjelker	72
7.2	Nødvendig armering av skalltak med randbjelker	76

7.3 Verdier ved antatt skjærbrudd i randbjelker 77

Figurer

2.1	Sylinderkrefter [8]	6
2.2	Dempingsfunksjoner	10
2.3	Lastvirkninger i kuleskall [6]	12
2.4	Deformasjoner i membrantilstanden [6]	14
2.5	Tabell for krefter i sirkulær plate [2]	18
2.6	Sirkulær plate [6]	19
3.1	Elementtyper [3]	22
3.2	Q8AXI-element [3]	22
3.3	Q20SH-element [3]	22
3.4	Materialmodeller [3]	23
3.5	Konvergens ved økende antall frihetsgrader [1]	24
4.1	Sylindrisk beholder med indre trykk	27
4.2	Rotasjon av fritt opplagt plate	30
4.3	Rotasjon som følge av randmoment	30
4.4	Momentvirkning fra sylinderbunn	32
4.5	Momentvirkning fra sylindertopp	32
4.6	Summert momentvirkning i sylinter	32

4.7	Skjærkraft fra sylinderbunn	33
4.8	Skjærkraft fra cylindertopp	33
4.9	Summert skjærkraft i sylindere	33
4.10	Ringkraft i sylindere	34
4.11	Randmoment	34
4.12	Moment om radiell retning	34
4.13	Skjærkraft i plate	35
4.14	Alternative inndelinger	36
5.1	Sylindrisk beholder med kulestak	41
5.2	Opplagring ved partikulærløsning [6]	45
5.3	Momentforløpet over sylinderehøyden	47
5.4	Skjærkrefter over sylinderehøyden	48
5.5	Ringkraft over sylinderehøyden	48
5.6	Momentvirkning i meridianretning i kule	48
5.7	Momentvirkning i ringretning i kule	49
5.8	Skjærkrefter i kule	49
5.9	Ringkraft i meridianretning i kule	49
5.10	Ringkraft i ringretningen i kule	49
5.11	DIANA-modell av beholderen med kulestak	50
5.12	Lastfaktor i forhold til forskyvning [mm]	54
5.13	Armeringsspenninger i horisontal retning [MPa]	55
5.14	Armeringsspenninger i vertikal retning [MPa]	55
5.15	Armeringsspenninger i ringretning [MPa]	56

5.16	Vertikalsnitt av opprissing i sylinderbunnen	56
6.1	Buet skalltak med fast innspente render	61
6.2	Momentvirkning over skallets bredde [Nmm/mm]	62
6.3	Membrankrefter over skallets bredde [kN/m]	63
6.4	Skjærkraft over skallets bredde, V_φ [kN/m]	63
6.5	Forskyvning u	64
6.6	Lastfaktor i forhold til forskyvning [mm]	65
6.7	Forskyvning over skallets bredde ved bruddlast [mm]	66
6.8	Spenninger i betongoverflatenes tverretning ved brudd [MPa]	66
6.9	Spenninger i armeringslagenes tverretning ved brudd [MPa]	67
6.10	Opprissing på skallets underside	67
6.11	Opprissing på skallets overside	68
7.1	Buet skalltak med randbjelker	71
7.2	Momentvirkninger i skalltak [Nmm/mm]	73
7.3	Membrankrefter i skalltak [kN/m]	73
7.4	Skjærkrefter i randbjelke ved hjørneopplegg [kN/m]	74
7.5	Skjærkrefter i randbjelke ved midtopplegg [kN/m]	74
7.6	Spenningsfordeling over bjelkehøyden ved hjørneopplegg, σ [MPa]	75
7.7	Spenningsfordeling over bjelkehøyden ved lengde $L/4$ fra bjelkeende, σ [MPa]	75
7.8	Lastfaktor i forhold til forskyvning [mm]	77
7.9	Opprissing i randbjelker ved hjørneopplegg	78
7.10	Opprissing i randbjelker ved midtopplegg	78

Kapittel 1

Innledning

Bruk av betongskall i konstruksjoner går langt tilbake i tid. En av de mest kjente bygningene er tempelet Pantheon i Roma, som stod ferdig i år 125 e.Kr. I moderne tid er betongskall blant annet brukt i sylinder-, kule- eller kjegleformede beholdere av ulike typer, som for eksempel i takkonstruksjoner, siloer og oljeplattformer. I tiden etter andre verdenskrig, perioden 1950 til 1970, var betongskall mye brukt i takkonstruksjoner. Konstruksjonsmetoden ga mulighet for store spenn og søylefrie arealer.

Tynne og buede betongskall har stor bæreevne, særlig på laster som virker vinkelrett på skallets flate. Skallet bærer kreftene hovedsaklig som membrankrefter, men også som bøyekrefter.

Hensikten med oppgaven er å bli kjent med beregningsmetoder for betongskall. Det er gjort gjennom å studere klassisk teori for aksesymmetriske skall, og analysere sammensatte skallkonstruksjoner analytisk og numerisk med elementmetodeprogrammet DIANA. Et viktig aspekt ved analyser gjort i FEM-programmer er å se hvordan resultatene blir påvirket av hvordan elementmodellen er bygd opp. Ved å studere en ikke-lineær analyse, får man et bilde av hvordan konstruksjonen vil oppføre seg når betongen er armert.

Programvaren benyttet i denne oppgaven er DIANA Teacher versjon 9.4.4, som har en begrensning på 1000 elementer per modell.

Rapporten er bygd opp i fire ulike deler. Den første delen omhandler den klassiske teorien som ligger til grunn for analytiske beregninger av aktuelle tynnskallkonstruksjoner. Delen inneholder også informasjon om DIANA, av utvalgte elementtyper og konvergensteori. I del to blir den presenterte teorien benyttet i to beregningseksempler med aksesymmetriske skall. Det er utført lineær analyse i DIANA

for å kunne sammenligne analytiske resultater mot numeriske resultater. For ett av eksemplene er det gjennomført dimensjonering av nødvendig armering og en ikke-lineær analyse i DIANA.

Del tre omhandler to beregningseksempler av buede skalltak. Det er utført dimensjonering av armering, lineær og ikke-lineær analyse av begge eksemplene. Det ene skalltaket har fast innspente render, mens det andre har randbjelker. I del fire blir det presentert en konklusjon.

Del I

Teori

Kapittel 2

Tynnskallteori

Skall er elementer som er påført membrankrefter og bøyekrefter, og kan være en del av plane eller buede konstruksjoner. Et betongskall består av betong og slakk- eller spennarmering.

Et buet skall defineres som et tynt skall når tykkelsen h er liten sammenlignet med andre dimensjoner og radiusen R til krumningen av skallet.

Tynnskallteori bygger på fire antagelser i følge Love-Kirchhoffs teori [8]:

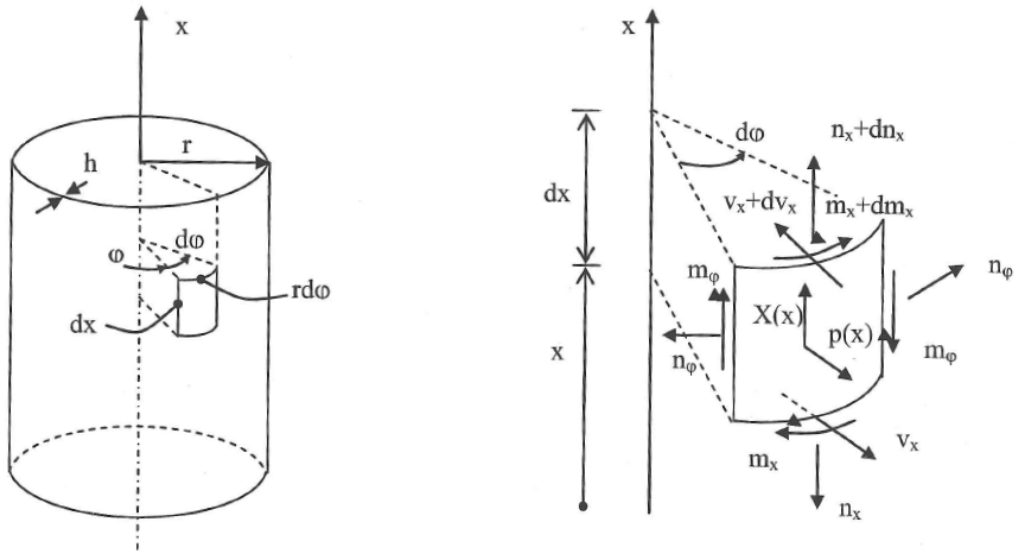
- Skalltykkelsen er neglisjerbar til sammenligning med krumningen til den midtre flaten i skallet
- Tøyninger og spenninger er små
- Rette linjer som er normale til middefflaten før deformasjon forblir rette under deformasjonen
- Spenninger normalt på middefflaten i skallet er neglisjerbare

2.1 Sylinderskall

Et sylinderskall er et aksesymmetrisk skall med tykkelse h og sylinderkoordinater x , r og φ . Lastvirkningene som oppstår er membrankreftene N_x og N_φ , bøyemomentene M_x og M_φ , og skjærkraften V_x .

Videre utledninger er hentet fra Sørensen [6].

Et generelt skall har tre kraftligninger og tre momentligninger. På grunn av aksesymmetrien blir membranskjærkraften $N_{\varphi x}$, torsjonsmoment $M_{\varphi x}$ og skjærkraft V_{φ} lik null. Likevekt av elementet gir følgende tre ligninger:



Figur 2.1: Sylinderekrefter [8]

$$\Sigma K_{radiell} = 0 : \quad \frac{dV_x}{dx} + \frac{1}{r} \cdot N_{\varphi} = p(x) \quad (2.1)$$

$$\Sigma M_{tangentiell} = 0 : \quad \frac{dM_x}{dx} - V_x = 0 \quad (2.2)$$

$$\Sigma K_x = 0 : \quad \frac{dN_x}{dx} + X = 0 \quad (2.3)$$

Ligning (2.3) er ikke koblet med ligning (2.1) og (2.2), hvilket betyr at ligningen kan løses separat. Det antas at $N_x = 0$. Ved innsetting av ligning (2.2) i ligning (2.1) gir dette likevektsligningen for sylinderen:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{1}{r} \cdot N_{\varphi} = p(x) \quad (2.4)$$

2.1.1 Sammenheng mellom tøyning og spenning

Ved hjelp av Hookes lov kan tøyningene i sylindersens lengderetning ϵ_x og ringretning ϵ_φ uttrykkes slik:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_\varphi) \quad (2.5)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu \cdot \sigma_x) \quad (2.6)$$

hvor σ_x og σ_φ er sylindersens membranspenning i henholdsvis lengderetning og ringretning. ν er tverrkontraksjonstallet for materialet. Ved forutsetningen $N_x = 0$ følger det at

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} = 0 \quad (2.7)$$

Dermed vil ligning (2.5) og (2.6) forenkles til følgende uttrykk:

$$\epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_\varphi = -\frac{\nu N_\varphi}{Eh} \quad (2.8)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{E} = \frac{N_\varphi}{Eh} \quad (2.9)$$

2.1.2 Sammenheng mellom forskyvninger og tøyninger

Ringtøyningen kan utledes ved å se på en radiell forskyvning w .

$$\epsilon_\varphi = \frac{(r+w)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{w}{r} \quad (2.10)$$

Krumninger for sylinderskallet:

$$\kappa_x = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.11)$$

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{r+w} - \frac{1}{r} = -\frac{w}{r(r+w)} \approx -\frac{w}{r^2} \approx 0 \quad (2.12)$$

2.1.3 Sylinderens differensialligning

Ved å kombinere ligning (2.9) og (2.10), kan ringkraften uttrykkes slik:

$$N_\varphi = \frac{Eh}{r} \cdot w \quad (2.13)$$

Sammenhengen mellom moment og krumning defineres som

$$M_x = D(\kappa_x - \nu\kappa_\varphi) \quad (2.14)$$

hvor platestivheten, D [10], er

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Ligning (2.11) og (2.12) settes inn i ligning (2.14), og uttrykket for momentet blir:

$$M_x = D \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.15)$$

Sylinderens differensialligning utledes ved hjelp av ligning (2.4), (2.13) og (2.15):

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{Dr^2} \cdot w = \frac{p(x)}{D} \quad (2.16)$$

Løsningen av differensialligningen kan deles opp i en partikulær og homogen løsning, der membranvirkningene og randvirkningene tilsvarer henholdsvis partikulær- og homogenløsningen. Den totale løsningen er $w = w_p + w_h$.

2.1.4 Løsning av differensialligningen

Partikulærløsning

Partikulærløsningen for ligning (2.16) er:

$$w_p = \frac{r^2}{Eh} \cdot p(x) \quad (2.17)$$

hvor $p(x)$ er et polynom opp til tredje grad.

Homogenløsning

Den homogene differensialligningen er

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{Dr^2} \cdot w = 0 \quad (2.18)$$

og kan omformuleres til

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 0 \quad (2.19)$$

ved å benytte det dimensjonsløse koordinatet $\xi = \frac{x}{l_e}$ og uttrykket for elastisk lengde l_e .

$$l_e = \sqrt[4]{\frac{4Dr^2}{Eh}} = \frac{\sqrt{rh}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}$$

Homogenløsningen er gitt ved:

$$w_h = e^{-\xi}(C_1 \cos(\xi) + C_2 \sin(\xi)) + e^{\xi}(C_3 \cos(\xi) + C_4 \sin(\xi)) \quad (2.20)$$

Uendelig lang sylinder

Når ξ går mot uendelig vil det første leddet i den homogene løsningen gå mot null og det andre leddet gå mot uendelig. Det er ikke logisk at randforstyrrelsene øker når avstanden til randen øker, og med hensyn til dette vil integrasjonskonstantene C_3 og C_4

være lik null. Dermed kan man definere sammenhengen mellom skallstørrelsene og randkreftene slik [6]:

$$\begin{bmatrix} w \cdot \frac{2D}{l_e^2} \\ N_\varphi \cdot \frac{l_e^2}{2r} \\ \frac{dw}{dx} \cdot \frac{2D}{l_e} \\ M_x \\ V_x \cdot l_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4(\xi) & g_1(\xi) \\ g_4(\xi) & g_1(\xi) \\ -2g_1(\xi) & -g_3(\xi) \\ g_3(\xi) & g_2(\xi) \\ -2g_2(\xi) & g_4(\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ V_0 \cdot l_e \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

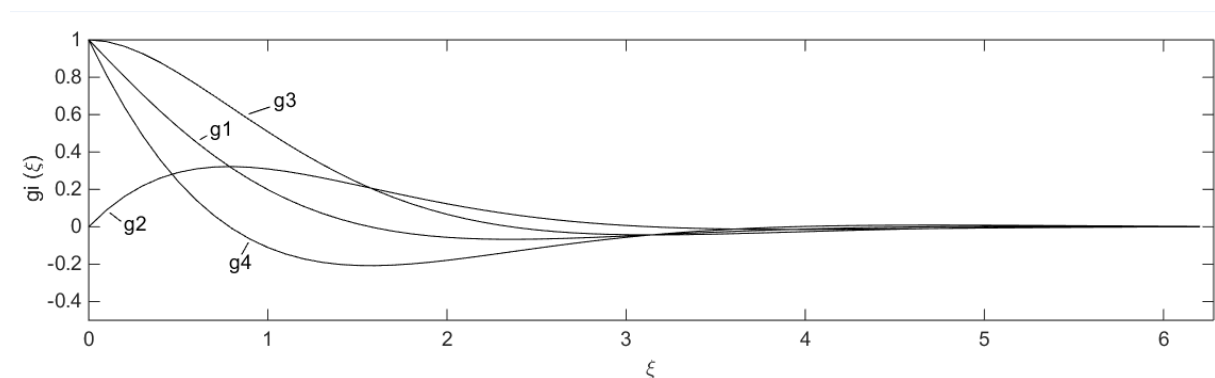
hvor M_0 og V_0 representerer randforstyrrelsene ved $\xi = 0$. G-funksjonenes oppførsel er vist i figur 2.2, og uttrykt slik:

$$g_1(\xi) = e^{-\xi} \cdot \cos(\xi)$$

$$g_2(\xi) = e^{-\xi} \cdot \sin(\xi)$$

$$g_3(\xi) = g_1(\xi) + g_2(\xi)$$

$$g_4(\xi) = g_1(\xi) - g_2(\xi)$$



Figur 2.2: Dampingsfunksjoner

Randforstyrrelser fra to render

Når det er teoretisk beregnet at det vil være randforstyrrelser fra to render, vil de homogene løsningene i ligning (2.22) være gjeldende for sylinderskallet.

Lengdekoordinatet η innføres, og begynner fra motsatt rand av ξ . Momentet M_{02} og skjærkraften V_{02} opptrer på motsatt rand i forhold til M_0 og V_0 .

$$\eta = \frac{L}{l_e} - \xi$$

$$\begin{bmatrix} w \cdot \frac{2D}{l_e^2} \\ N_\varphi \cdot \frac{l_e^2}{2r} \\ \frac{dw}{dx} \cdot \frac{2D}{l_e} \\ M_x \\ V_x \cdot l_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4(\xi) & g_1(\xi) & g_4(\eta) & g_1(\eta) \\ g_4(\xi) & g_1(\xi) & g_4(\eta) & g_1(\eta) \\ -2g_1(\xi) & -g_3(\xi) & 2g_1(\eta) & g_3(\eta) \\ g_3(\xi) & g_2(\xi) & g_3(\eta) & g_2(\eta) \\ -2g_2(\xi) & g_4(\xi) & 2g_2(\eta) & -g_4(\eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ V_0 \cdot l_e \\ M_{02} \\ V_{02} \cdot l_e \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.1.5 Dempingslengde

Dempingslengden, L_c , benyttes til å se om randforstyrrelsene vil påvirke skallstørrelsene.

Dersom:

$L \geq 2L_c$: Sylindren kan antas å være uendelig lang.

$L < 2L_c$: Randforstyrrelse fra begge render må tas hensyn til.

hvor

$$L_c = \pi \cdot l_e \quad (2.23)$$

Faktoren π som benyttes, er valgt ut i fra observasjoner av hvordan g-funksjonene oppfører seg, se figur 2.2. Når ξ nærmer seg en verdi på 3-4 er randforstyrrelsene svært små, og verdien $\xi = \pi$ er valgt som faktor.

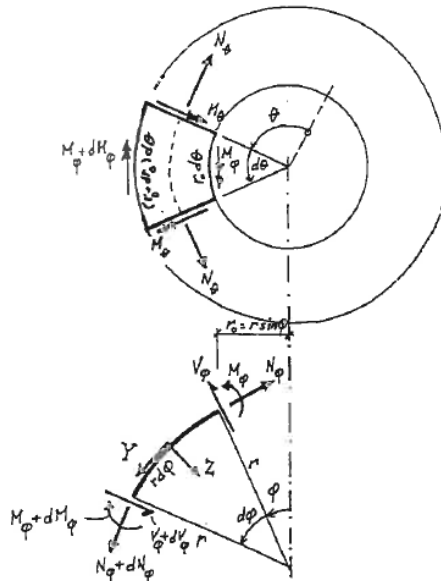
2.2 Kuleskall

Teorien om krefter i et kuleskall kan beskrives ved å betrakte et element av skallet definert av skjæringspunkter mellom parallellsirkel og meridian som vist i figur 2.3. Membrantilstanden og bøyetilstanden tilsvarer henholdsvis partikulær- og homogenløsningen i bestemmelse av lastvirkninger for et kuleskall, og disse løsningene betraktes hver for seg i dette delkapittelet.

Delkapittelet er utarbeidet med bakgrunn i Sørensen [6] og Woinowsky-Krieger og Timoshenko [10].

2.2.1 Membrankrefter

N_φ er definert som kraft i meridianretningen og uttrykket for kraften er funnet ved beregning av vertikal likevekt ved snitt av en kulekalott.



Figur 2.3: Lastvirkninger i kuleskall [6]

Den vertikale resultanten $R = R(\varphi)$ beskriver alle ytre krefter som virker på snittet.

Vertikal likevekt gir

$$N_\varphi \sin \varphi \cdot 2\pi r \sin \varphi + R = 0$$

som løst med hensyn på meridiankraften gir

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi r \sin^2 \varphi} \quad (2.24)$$

N_ϑ er definert som ringkraften. Denne kraften er funnet ved radiell likevekt av N_φ , N_ϑ og ytre krefter i elementet fra figur 2.3. Dette gir følgende sammenheng:

$$N_\varphi \cdot r_0 d\vartheta d\varphi + N_\vartheta \cdot r d\varphi d\vartheta \sin \varphi + Z \cdot r_0 d\vartheta r d\varphi = 0$$

som gir

$$N_\vartheta = -N_\varphi - Z \cdot r = \frac{R}{2\pi r \sin^2 \varphi} - Z \cdot r \quad (2.25)$$

der $r_0 = r \sin \varphi$ er horisontalprojeksjonen av radiusen og Z representerer ytre krefter som virker normalt på skallet.

For en konstruksjon påkjent av egenlast kan resultanten R defineres

$$R = 2\pi r^2 \rho h (1 - \cos \varphi_0) \quad (2.26)$$

der ρ er materialets tyngdetetthet.

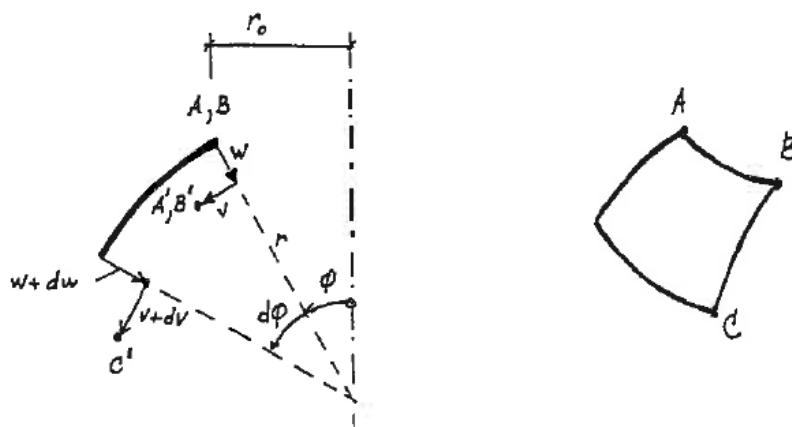
Ved betraktning av udeformert og deformert tilstand bestemmes membrantøyningene ϵ_ϑ og ϵ_φ . Disse representerer henholdsvis ringtøyningen og meridiantøyningen [9].

Ved hjelp av figur 2.4 kan endringen i radius r_0 beskrives som funksjon av den tangentielle forskyvningen v , den radielle forskyvningen w og vinkelen φ :

$$\Delta r_0 = v \cos \varphi - w \sin \varphi \quad (2.27)$$

Ringtøyningen kan dermed uttrykkes

$$\epsilon_\vartheta = \frac{\Delta r_0}{r_0} = \frac{v \cos \varphi - w \sin \varphi}{r_0}$$



Figur 2.4: Deformasjoner i membrantilstanden [6]

som gir

$$\epsilon_{\vartheta} = \frac{v}{r} \cot \varphi - \frac{w}{r} \quad (2.28)$$

Ved uttrykk av meridiantøyningen ϵ_{φ} blir det tatt hensyn til den radielle forskyvningen. Tøyningen i meridianretningen er derfor gitt som

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{(r-w)d\varphi - v + v + dv - rd\varphi}{rd\varphi}$$

som forenklet kan uttrykkes

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{r} \quad (2.29)$$

Ved kombinasjon av tøyninguttrykkene i ligning (2.28) og (2.29) dannes sammenhengen

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot \varphi = r(\epsilon_{\varphi} - \epsilon_{\vartheta}) \quad (2.30)$$

Hookes lov er i skiveteorien definert som

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi} &= \frac{N_{\varphi} - \nu N_{\vartheta}}{Eh} \\ \epsilon_{\vartheta} &= \frac{N_{\vartheta} - \nu N_{\varphi}}{Eh} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ved innsettelse av ligning (2.31) i ligning (2.30), gir dette differensialligningen

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot\varphi = \frac{1 + \nu}{Eh} \cdot r(N_\varphi - N_\vartheta) = f(\varphi) \quad (2.32)$$

Differensialligningen i ligning (2.32) kan vises å ha løsningen

$$v = \sin\varphi \int_0^\varphi \frac{f(\varphi)}{\sin\varphi} d\varphi \quad (2.33)$$

Videre kan den radielle forskyvningen w bestemmes ved hjelp av ligning (2.28), som omformet kan skrives som

$$w = v \cot\varphi - \epsilon_\vartheta r \quad (2.34)$$

Tangentdreiningen α er definert som dreiningen av kuleskallets tangent når det oppstår deformasjoner. Dreiningen kan uttrykkes

$$\alpha = \frac{dw}{rd\varphi} + \frac{v}{r} \quad (2.35)$$

Ved kombinasjon av ligning (2.35), (2.34) og (2.30) gir dette

$$\alpha = \cot\varphi \cdot (\epsilon_\varphi - \epsilon_\vartheta) - \frac{d\epsilon_\vartheta}{d\varphi} \quad (2.36)$$

Den horisontale forskyvningen ved randen av kuleskallet δ , kan uttrykkes

$$\delta = v \cos\varphi - w \sin\varphi$$

som kombinert med ligning (2.28) gir forskyvningen

$$\delta = \epsilon_\vartheta \cdot r \cdot \sin\varphi \quad (2.37)$$

2.2.2 Bøyetilstanden

For å uttrykke randkrefter i et kuleskall må det settes opp likevekt i vertikal og radiell retning i tillegg til momentlikevekt om parallellsirkel som beskrevet i figur 2.3.

Sammenhenger og likevektsuttrykk kan leses i Sørensen [6].

Nevnte sammenhenger og likevekter fører til følgende fjerdeordens differensialligning:

$$\frac{d^4 V_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{Ehr^2}{D} V_\varphi = 0 \quad (2.38)$$

Differensialligningen har forholdsvis kompliserte uttrykk, men en tilnærmet løsning gir gode resultater for $\varphi_0 \geq 20^\circ$ [6]. Uttrykket for ligningen med tilnærmet løsning kan uttrykkes

$$\frac{d^4 V_\varphi}{d\varphi^4} + 4\lambda^4 \cdot V_\varphi = 0 \quad (2.39)$$

der

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{1}{4} \cdot \frac{Ehr^2}{D}} = \sqrt[4]{3(1-\nu^2) \frac{r^2}{h^2}} \quad (2.40)$$

Den generelle løsningen av differensialligningen (2.39) er

$$V_\varphi = e^{\lambda\varphi}(A_1 \cos\lambda\varphi + A_2 \sin\lambda\varphi) + e^{-\lambda\varphi}(A_3 \cos\lambda\varphi + A_4 \sin\lambda\varphi) \quad (2.41)$$

Fordi det vil være mest hensiktsmessig å uttrykke løsningen som en funksjon der løsningen vil ha sitt startpunkt ved randen og dempes oppover i kuleskallet, innføres sammenhengen

$$\psi = \varphi_0 - \varphi \quad (2.42)$$

I tillegg innføres variabelen t som defineres

$$t = \lambda\psi \quad (2.43)$$

Løsningen presentert i ligning (2.41) kan dermed uttrykkes

$$V_\varphi = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \quad (2.44)$$

Alle skallstørrelsene kan beskrives som en funksjon av V_φ eller dens første-, andre- eller tredjederiverte med hensyn på φ . Detaljerte sammenhenger og overganger er beskrevet i Sørensen [6] og Woinowsky-Krieger og Timoshenko [10]. Dermed kan alle størrelser sammenfattes i et ligningssystem avhengig av integrasjonskonstantene C_1 og C_2 og g-funksjoner avhengige av t tilsvarende de som er presentert under teorien om sylinderskall (se figur 2.2). Ligningssystemet er presentert i ligning (2.45).

$$\begin{bmatrix} V_\varphi \\ N_\varphi \cdot \tan \varphi \\ N_\vartheta \cdot \frac{1}{\lambda} \\ M_\varphi \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \\ M_\vartheta \cdot \frac{Ehr}{2\nu\lambda^3 D} \\ \alpha \cdot \frac{Eh}{2\lambda^2} \\ \delta \cdot \frac{Eh}{\lambda r \sin \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ -g_1(t) & -g_2(t) \\ -g_3(t) & g_4(t) \\ g_4(t) & g_3(t) \\ g_4(t) & g_3(t) \\ g_2(t) & -g_1(t) \\ -g_3(t) & g_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

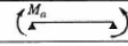


2.3 Sirkulære plater

Sirkulære plater kan være fritt opplagt eller monolittisk forbundet. Et aktuelt bruksområde for sirkulære plater kan være som en takkonstruksjon på en beholder.

Løsninger for symmetrisk bøyning av sirkulære plater er hentet fra Billington [2].

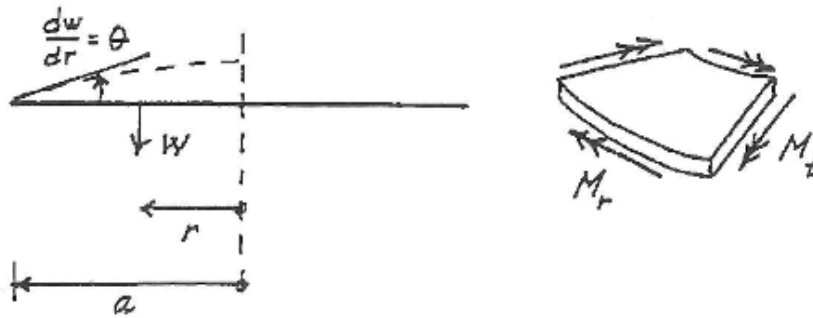
Figur 2.5 viser løsninger for tverrforskyvning w , vinkelendring $\frac{dw}{dr}$, krumning $\frac{d^2w}{dr^2}$, integrasjonskonstantene C_1, C_2, C_3 , og platemomentene M_r og M_t . Det er gitt løsning på et generelt tilfelle, og følgende konkrete tilfeller:

- moment på platerand
- jevnt fordelt last på fritt opplagt plate
- jevnt fordelt last på monolittisk forbundet plate

	General formulær			
w	$\frac{qr^4}{64D} + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \log \frac{r}{a} + C_3$	$\frac{M_0}{2D(1+\nu)}(a^2 - r^2)$	$\frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2$	$\frac{q}{64D}(a^2 - r^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right)$
$\frac{dw}{dr}$	$\frac{qr^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2} + C_2 \frac{1}{r}$	$-\frac{M_0 r}{D(1+\nu)}$	$-\frac{qr}{16D}(a^2 - r^2)$	$-\frac{qr}{16D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right)$
$\frac{d^2w}{dr^2}$	$\frac{3qr^2}{16D} + \frac{C_1}{2} - C_2 \frac{1}{r^2}$	$-\frac{M_0}{D(1+\nu)}$	$-\frac{q}{16D}(a^2 - 3r^2)$	$-\frac{q}{16D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} a^2 - 3r^2 \right)$
C_1		$-\frac{2M_0}{D(1+\nu)}$	$-\frac{qa^2}{8D}$	$-\frac{qa^2(3+\nu)}{8D(1+\nu)}$
C_2		0	0	0
C_3		$\frac{M_0 a^2}{2D(1+\nu)}$	$\frac{qa^4}{64D}$	$\frac{qa^4(5+\nu)}{64D(1+\nu)}$
M_r	$-D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)$	$+M_0$	$\frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)]$	$\frac{q}{16} (3+\nu)(a^2 - r^2)$
M_t	$-D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right)$	$+M_0$	$\frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]$	$\frac{q}{16} [a^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)]$
M_α		$+M_0$	$-\frac{qa^2}{8}$	0
M_β		$+M_0$	$\frac{qa^2}{16}(1+\nu)$	$\frac{qa^2}{16}(3+\nu)$

Figur 2.5: Tabell for krefter i sirkulær plate [2]

Figur 2.6 gir at a er lik platens radius, r er avstanden fra platens origo, w gir positiv forskyvning nedover og θ gir positiv vinkelendring mot klokken.



Figur 2.6: Sirkulær plate [6]

Utledning av skjærkraft for sirkulær plate med jevnt fordelt last er hentet fra Woinowsky-Krieger og Timoshenko [10]:

$$2\pi rV = \pi r^2 q \quad (2.46)$$

hvilket gir skjærkraften

$$V = \frac{qr}{2} \quad (2.47)$$

Kapittel 3

Om FEM-programvaren DIANA

FEM-programvaren DIANA er utviklet av TNO DIANA BV og TU Delft, og er basert på forskyvningsmetoden. Programvaren har muligheter for lineære og ikke-lineære analyser i 2D og 3D, og er godt egnet for analyse av betongkonstruksjoner. I denne oppgaven er versjonen DIANA Teacher benyttet, som er en begrenset versjon med en øvre grense på 1000 elementer per modell.

3.1 Elementtyper

Delkapittelet presenterer benyttede elementtyper, hvilket er tre ulike aksesymmetriske skallelementer og en type krummet skallelement.

3.1.1 Aksesymmetriske elementer

Det er benyttet to ulike numerisk integrerte aksesymmetriske skallelementer i de lineære analysene som er gjennomført:

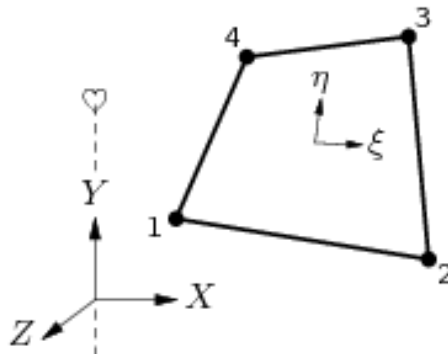
- L6AXI - et element med to noder
- CL9AX - et element med tre noder

Hver node har tre frihetsgrader u_x , u_y og φ_z som representerer henholdsvis horisontal forskyvning, vertikal forskyvning og rotasjon.



Figur 3.1: Elementtyper [3]

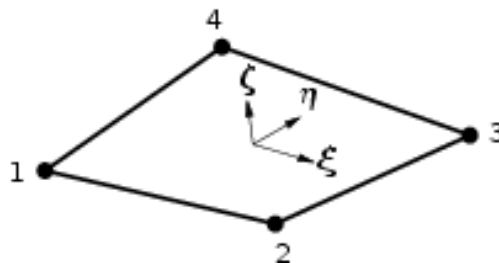
Ved den ikke-lineære analysen av eksempel 2 er det benyttet et firenoders isoparametrisk aksesymmetrisk ringelement av typen Q8AXI. Elementet er basert på lineær interpolasjon og Gauss-integrasjon.



Figur 3.2: Q8AXI-element [3]

3.1.2 Krumme skallelementer

Ved analyse av skalltakene i eksempel 3 og 4 er det benyttet en type firenoders isoparametrisk krummet skallelement, Q20SH. Dette elementet er basert på lineær interpolasjon og Gauss-integrasjon over elementarealet ($\xi\eta$ -planet, se figur 3.3). Integrasjon over elementtykkelsen kan baseres på enten Gauss- eller Simpson-integrasjon, og det er valgt Gauss-integrasjon i oppgavens analyser med denne elementtypen.



Figur 3.3: Q20SH-element [3]

3.2 Materialmodell i ikke-lineær analyse

Materialmodellen benyttet i DIANA er basert på "total strain rotating crack". Det vil si at rissretningene kan endres etter at rissene har oppstått. Modellen tar hensyn til at armeringsmengden i betongen ikke behøver å være den samme i ulike retninger, og dermed ikke når flytespenningen samtidig [5].

Strekkmodell

Ved modellering av betongens oppførsel ved strekk, er det benyttet "linear tension softening" basert på bruddenergi. Tension softening er betongens oppførsel etter opprissing, se figur 3.4a.

Crack bandwith er definert som karakteristisk lengde på elementet.

Betongens strekkfasthet: $f_{ctd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c}$

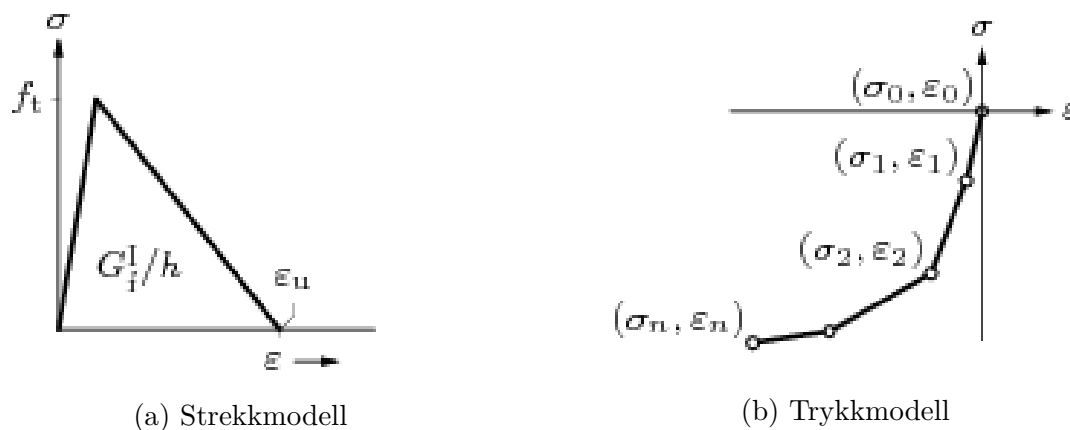
Armeringens flytetøyning: $\epsilon_u = \frac{f_{yd}}{E}$

Karakteristisk lengde: $h = \sqrt{A_{element}}$

Bruddenergi: $G_f = \frac{1}{2} \cdot f_{ctd} \epsilon_u h$

Trykkmodell

Betongens oppførsel ved trykk er definert gjennom bruk av modellen multi-linear, vist i figur 3.4b.

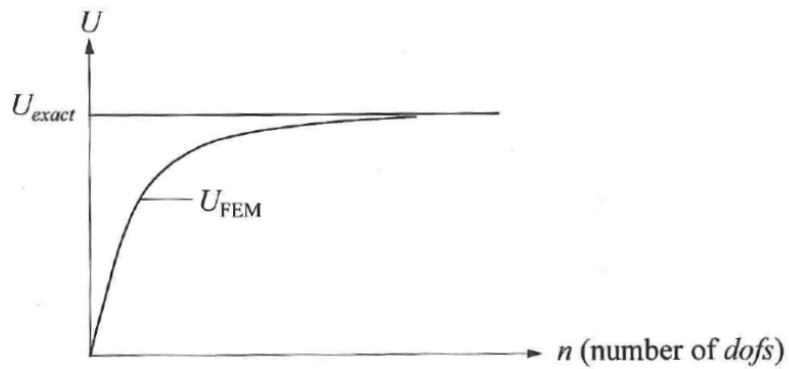


Figur 3.4: Materialmodeller [3]

3.3 Konvergens

Numeriske løsninger er ikke eksakte, men konvergerer mot eksakt løsning for økende antall frihetsgrader som vist i figur 3.5. Det er to ulike måter å øke antall frihetsgrader, i følge Bell [1]:

- H-konvergens - Beholder samme elementtype, men øker antall elementer. Dette medfører økt antall frihetsgrader.
- P-konvergens - Beholder elementinndeling, men øker antall frihetsgrader ved å endre elementtypen.



Figur 3.5: Konvergens ved økende antall frihetsgrader [1]

Del II

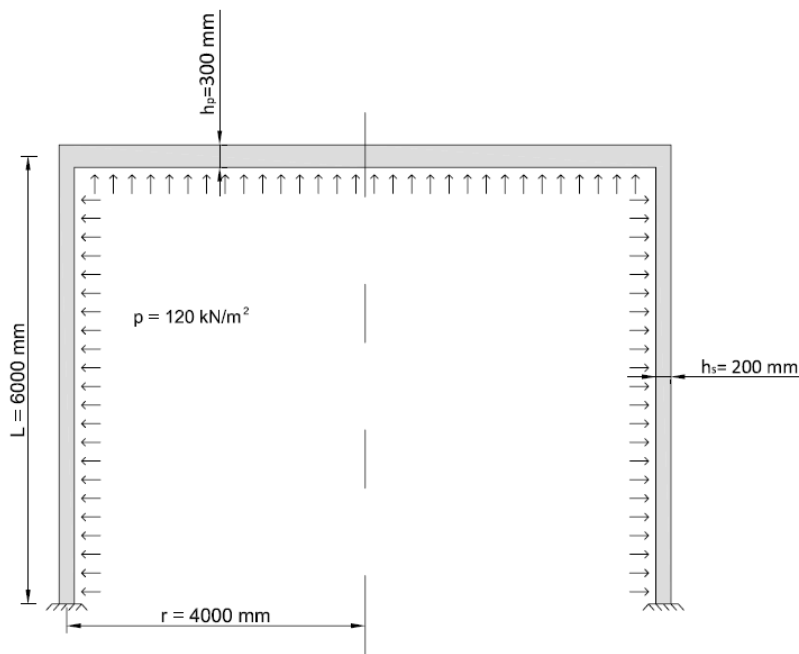
Beregningseksempler av aksesymmetriske skall

Kapittel 4

Eksempel 1: Sylindrisk beholder med sirkulært platetak

Den sammensatte skallkonstruksjonen består av en sylindrisk beholder med et sirkulært platetak, hvor sylindringen og platen er monolittisk forbundet. Beholderen er utsatt for et indre overtrykk p og egenlast fra platen.

Konstruksjonens geometri og last er vist i figur 4.1.



Figur 4.1: Sylindrisk beholder med indre trykk

Det er først gjennomført lineære beregninger analytisk og deretter numerisk ved bruk av programvaren DIANA. Løsningene er presentert og sammenlignet.

4.1 Analytisk løsning

Detaljerte beregninger knyttet til eksempelet kan leses i vedlegg B.1.

4.1.1 Beregninger

Innspenning sylinderbunn

Elastisk lengde l_e og demplingslengden L_c blir beregnet for å kunne avgjøre hvorvidt randforstyrrelser fra to render må tas hensyn til.

$$l_e = \frac{\sqrt{r \cdot h_s}}{[3(1 - \nu^2)]^{\frac{1}{4}}} = 687 \text{ mm}$$
$$L_c = \pi \cdot l_e = 2158 \text{ mm}$$

$$2 \cdot L_c = 4316 \text{ mm} < L = 6000 \text{ mm}$$

Dempingslengden er mindre enn halvparten av beholderens lengde, hvilket vil si at sylinderen kan analyseres som uendelig lang.

De homogene løsningene for sylindrens forskyvning og rotasjon er hentet fra ligning (2.21):

$$w_h = \frac{l_e^2}{2D_s} \left(g_4(\xi) \cdot M_0 + g_1(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e \right)$$
$$\frac{dw_h}{dx} = \frac{l_e}{2D_s} \left(-2g_1(\xi) \cdot M_0 - g_3(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e \right)$$

Innspenning i bunnen av sylinderen gir at forskyvningen og rotasjonen skal være lik null. Med $\xi = 0$, kan ligningene for den totale forskyvningen og rotasjonen settes opp.

$$w_{tot}(0) = \frac{pr^2}{Eh_s} + \frac{l_e^2}{2D_s}(M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{dw_{tot}(0)}{dx} = \frac{l_e}{2D_s} \cdot (2M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0 \quad (4.2)$$

Ved kombinasjon av ligning (4.1) og (4.2) kan randstørrelsene i sylinderbunnen beregnes som følger

$$M_0 = \frac{pl_e^2}{2} = 28,3 \text{ kNm/m}$$

$$V_0 = -pl_e = -82,4 \text{ kN/m}$$

Videre beregnes momentfordeling, skjærkraftfordeling og ringkraften langs sylinderen fra innspenningen i bunnen. Løsninger er hentet fra ligning (2.21).

$$M_x(\xi) = M_0 \cdot g_3(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_2(\xi) = \frac{pl_e^2}{2} \cdot g_4(\xi)$$

$$V_x(\xi) = \frac{-2M_0}{l_e} \cdot g_2(\xi) + V_0 \cdot g_4(\xi) = -pl_e \cdot g_1(\xi)$$

Ringkraften får et tillegg fra den partikulære løsningen, hvor w_p er hentet fra ligning (2.17)

$$N_{\varphi p} = \frac{Eh}{r} \cdot w_p = \frac{Eh}{r} \cdot \frac{pr^2}{Eh_s} = pr$$

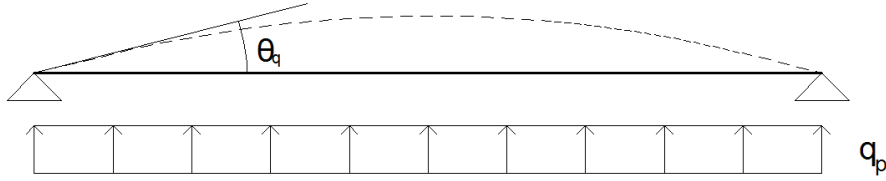
som gir

$$N_{\varphi}(\xi) = pr + \frac{2r}{l_e^2}(M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0 l_e \cdot g_1(\xi)) = pr(1 - g_3(\xi))$$

Sammenkobling mellom sylinder og plate

Platen sees på som fritt opplagt, som vist i figur 4.2.

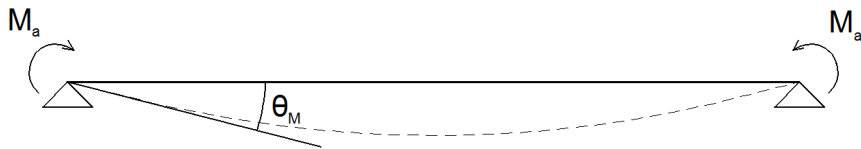
Rotasjonen θ_q skyldes lasten $q_p = p - g$, og er funnet i figur 2.5.



Figur 4.2: Rotasjon av fritt opplagt plate

$$\theta_q = \frac{q_p r^3}{16 D_p} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - 1 \right) = 1.07 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Randmomentet M_a gir en rotasjon av plateranden, som vist i figur 4.3.



Figur 4.3: Rotasjon som følge av randmoment

Rotasjonen θ_m er hentet fra figur 2.5.

$$\theta_m = \frac{M_a r}{D_p (1 + \nu)}$$

I sammenkoblingen mellom sylindere og platen må rotasjonen fra sylindere være lik rotasjonen til platen, og platen er uendelig stiv i planet. Momentlikevekt i sammenkoblingen gir at momentene M_0 og M_a må være like. Gitt de to følgende randbetingelsene, beregnes M_0 og V_0 .

Randbetingelse 1 gir:

$$\frac{dw_h(0)}{dx} = -\theta_q - \theta_m$$

$$\frac{l_e}{2D_s} (-2M_0 - V_0 l_e) = -1.07 \cdot 10^{-2} + \frac{M_a r}{D_p (1 + \nu)} \quad (4.3)$$

Randbetingelse 2 gir:

$$w_{tot}(0) = w_p + w_h(0) = 0$$

$$\frac{pr^2}{Eh_s} + \frac{l_e^2}{2D_s}(M_0 + V_0l_e) = 0 \quad (4.4)$$

Ligningene (4.3) og (4.4) løses og gir følgende:

$$M_0 = M_a = 174.7 \quad kNm/m$$

$$V_0 = -295.3 \quad kN/m$$

Videre kan skallkreftene i sylindringen uttrykkes slik: (ξ er definert fra toppranden og nedover i sylindringen)

$$M_x(\xi) = M_0 \cdot g_3(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_2(\xi) = 174.7 \cdot g_3(\xi) - 202.9 \cdot g_2(\xi)$$

$$V_x(\xi) = \frac{1}{l_e}(-2M_0 \cdot g_2(\xi) + V_0l_e \cdot g_4(\xi)) = -508.5 \cdot g_2(\xi) - 295.3 \cdot g_4(\xi)$$

$$N_\varphi(\xi) = pr + \frac{2r}{l_e^2}(M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0l_e \cdot g_1(\xi)) = 480 + 2961 \cdot g_4(\xi) - 3439 \cdot g_1(\xi)$$

Skallkreftene i platen beregnes ved hjelp av figur 2.5.

$$M_r = \frac{q_p}{16} \cdot (3 + \nu) \cdot (4^2 - r^2) - M_a = 22.5(16 - r^2) - 174.7$$

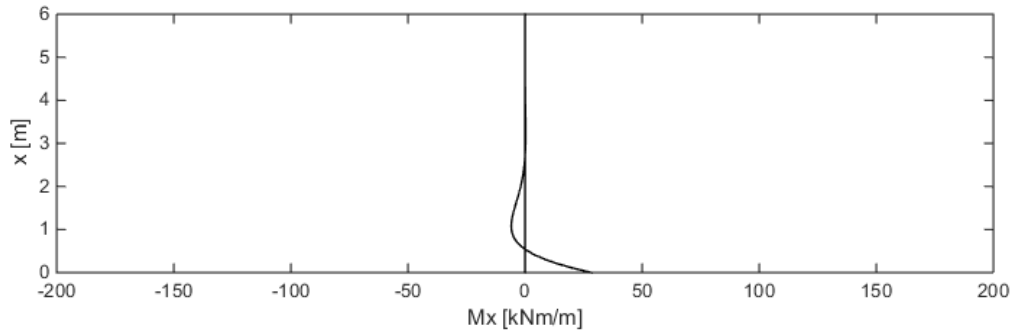
$$M_t = \frac{q_p}{16} \cdot (4^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)) - M_a = 7.03(51.2 - 1.6r^2) - 174.7$$

$$V_p = \frac{q_p}{2} \cdot r = 56.25 \cdot r$$

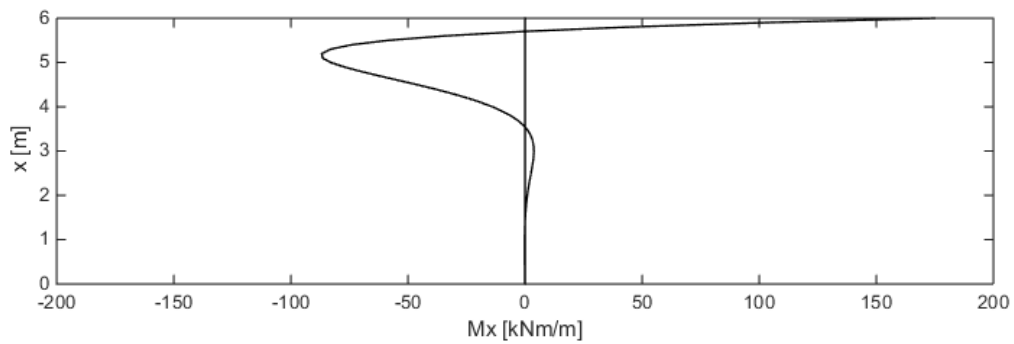
4.1.2 Diagrammer

Delkapittelet presenterer lastvirkningsdiagrammer for analytisk løsning.

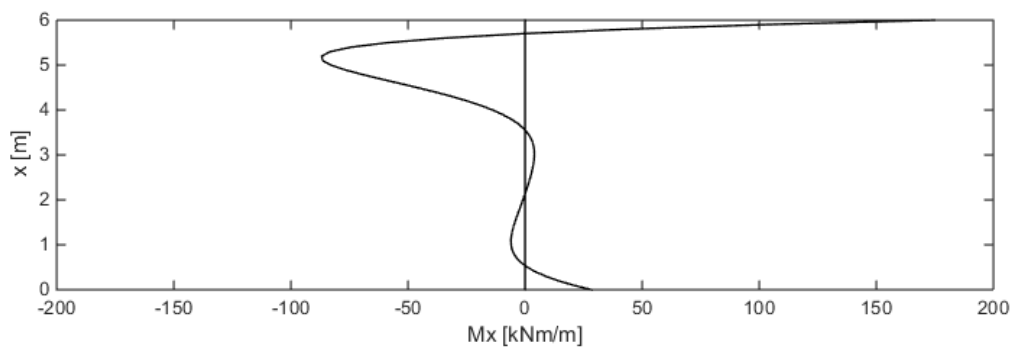
Skallkrefter over sylindrerhøyden



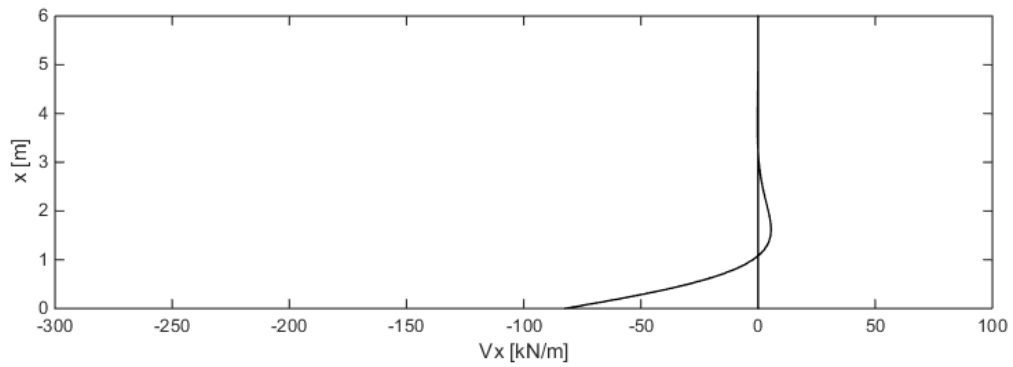
Figur 4.4: Momentvirkning fra sylinderbunn



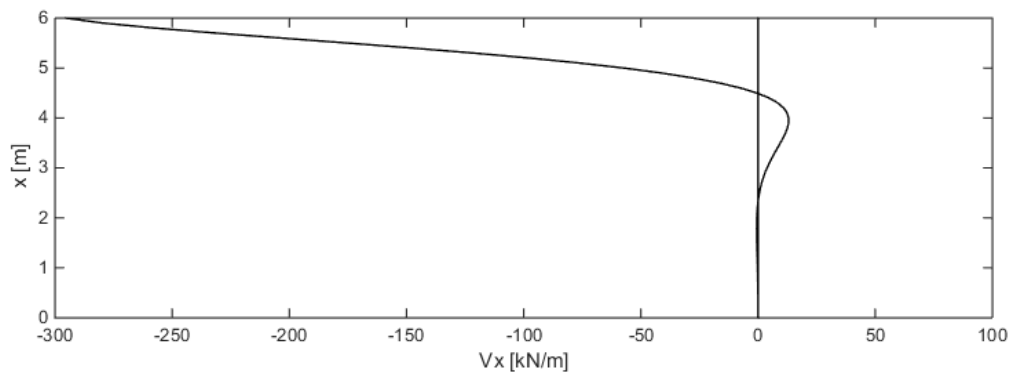
Figur 4.5: Momentvirkning fra sylindertopp



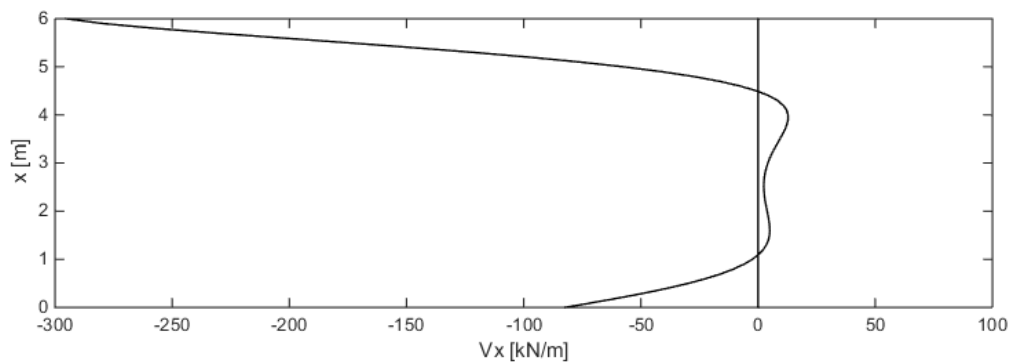
Figur 4.6: Summert momentvirkning i sylinder



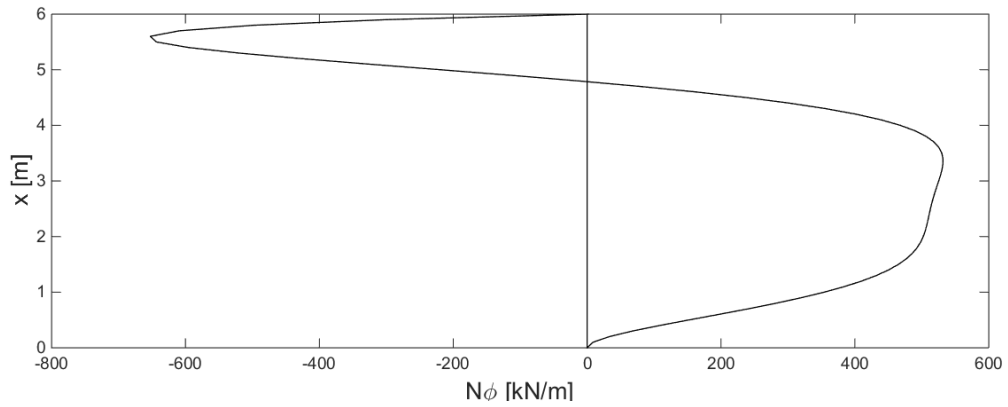
Figur 4.7: Skjærkraft fra sylinderbunn



Figur 4.8: Skjærkraft fra sylindertopp



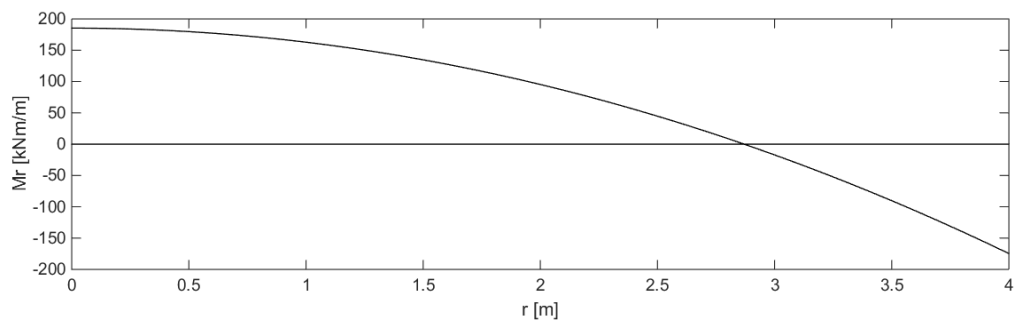
Figur 4.9: Summert skjærkraft i sylinder



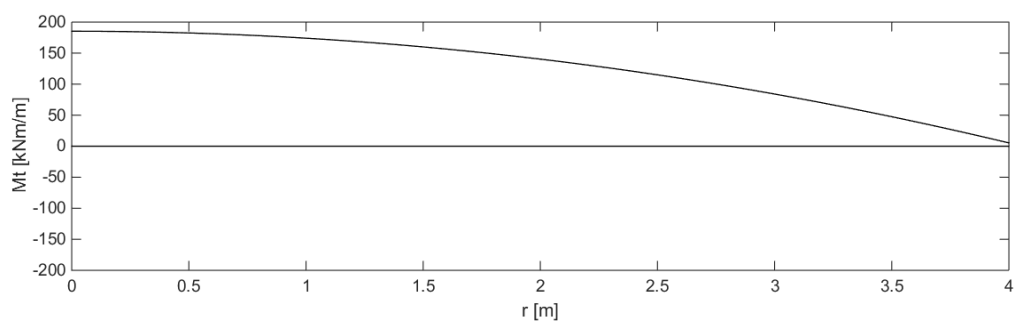
Figur 4.10: Ringkraft i sylinder

Skallkrefter i platen

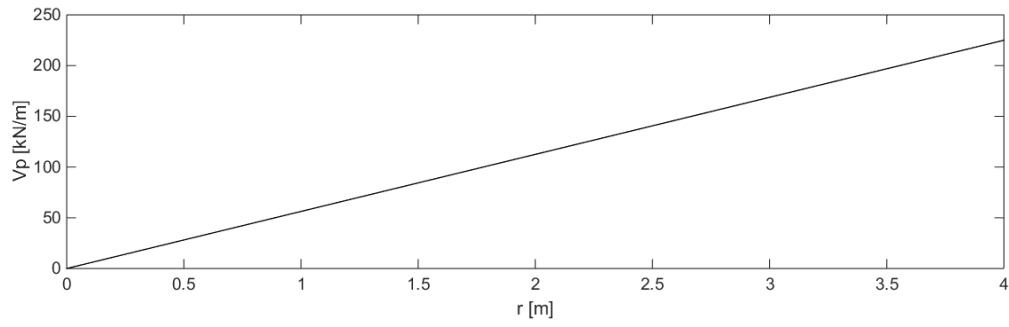
Radius r er avstanden fra platens origo.



Figur 4.11: Randmoment



Figur 4.12: Moment om radiell retning



Figur 4.13: Skjærkraft i plate

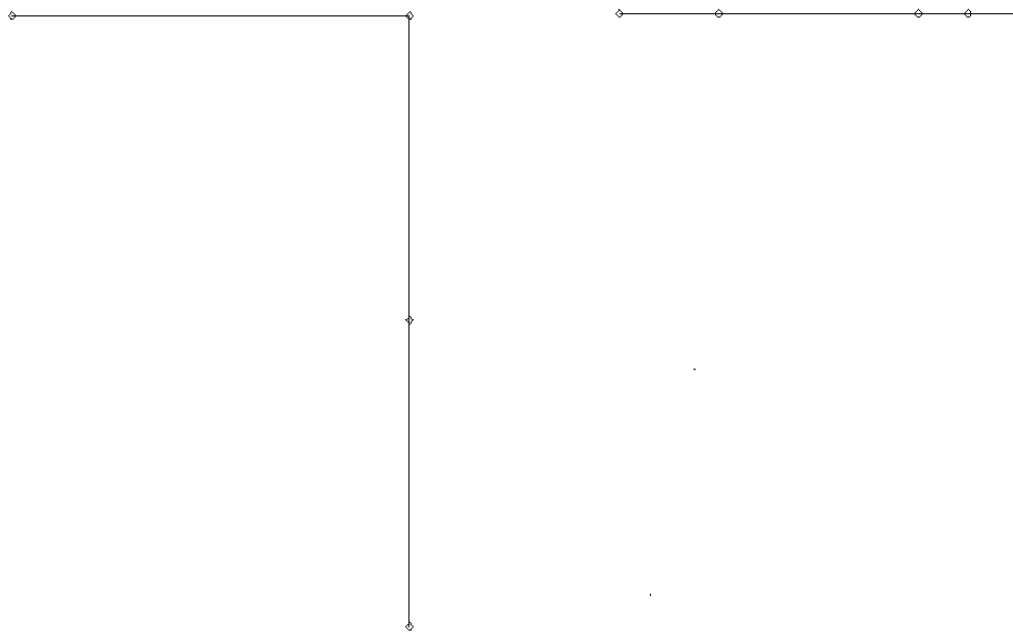
4.2 Lineær analyse

Resultater fra DIANA-analysen av eksempel 1 er presentert i tabell 4.3 til 4.6. Resultatene er basert på lineær, aksesymmetrisk analyse.

Kapittel 4.2.1 viser grunnlag for valg av elementmodell.

4.2.1 Elementinndeling i modell

For å vurdere effekten av ulik elementinndeling i modellen er det gjennomført analyser der det totale antallet elementer er likt, men fordelingen er ulik. For å kunne endre elementinndelingen, må modellen deles opp i flere segmenter på grunn av begrensning i antall elementer per segment. Resultater er presentert i tabell 4.1 og 4.2. På bakgrunn av resultatene brukes elementmodell B for videre analyse i 4.2.2 og 4.2.3.



(a) Inndeling A

(b) Inndeling B

Figur 4.14: Alternative inndelinger

	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]		Ringkraft [kN/m]	
	Topp	Bunn	Topp	Bunn	Max	Min
Inndeling A	165,50	285,35	24,65	-75,30	527,44	-623,97
Inndeling B	169,05	287,20	25,57	-76,75	527,75	-623,92
Analytisk løsning	174,65	295,29	28,28	-82,39	529,00	-652,50

Tabell 4.1: Lastvirkning i sylinder med ulik inndeling

	Platerand			Platesenter	
	M_r	M_t	V	M_r	M_t
	[kNm/m]	[kNm/m]	[kN/m]	[kNm/m]	[kNm/m]
Inndeling A	168,19	-9,59	-223,60	-187,50	-187,57
Inndeling B	170,40	-8,48	-224,30	-187,66	-187,66
Analytisk løsning	174,65	-5,32	-225,00	-185,35	-185,29

Tabell 4.2: Lastvirkning i plate med ulik inndeling

4.2.2 Resultater sylinder

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]		Ringkraft [kN/m]	
	Topp	Bunn	Topp	Bunn	Max	Min
21	169,05	25,57	287,20	-76,75	527,75	-623,92
41	170,84	26,05	288,03	-77,49	527,35	-624,17
61	171,43	26,21	288,29	-77,73	527,27	-624,21
81	171,73	26,29	288,42	-77,85	527,26	-624,22
100	171,91	26,33	288,49	-77,92	527,24	-624,22
Analytisk løsning	174,65	28,28	295,51	-82,44	529,00	-652,50

Tabell 4.3: Lastvirkninger i sylinder med L6AXI-elementer

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]		Ringkraft [kN/m]	
	Topp	Bunn	Topp	Bunn	Max	Min
21	172,61	26,51	288,96	-78,22	527,72	-623,98
41	172,63	26,53	288,84	-78,22	527,25	-624,47
61	172,63	26,53	288,82	-78,22	527,28	-624,24
81	172,63	26,53	288,81	-78,22	527,25	-624,28
99	172,63	26,53	288,49	-78,22	527,24	-624,22
Analytisk løsning	174,65	28,28	295,51	-82,44	529,00	-652,50

Tabell 4.4: Lastvirkninger i sylinder med CL9AX-elementer

4.2.3 Resultater plate

Noder per segment	Platerand			Platesenter	
	M_r [kNm/m]	M_t [kNm/m]	V [kN/m]	M_r [kNm/m]	M_t [kNm/m]
21	170,40	-8,48	-224,30	-187,66	-187,66
41	171,51	-7,93	-224,65	-187,45	-187,45
61	171,89	-7,74	-224,77	-187,40	-187,40
81	172,07	-7,65	-224,82	-187,39	-187,39
100	172,18	-7,59	-224,86	-187,38	-187,38
Analytisk løsning	174,65	-5,32	-225,00	-185,35	-185,29

Tabell 4.5: Lastvirkninger i plate med L6AXI-elementer

Noder per segment	Platerand			Platesenter	
	M_r [kNm/m]	M_t [kNm/m]	V [kN/m]	M_r [kNm/m]	M_t [kNm/m]
21	172,61	-7,38	-224,99	-187,81	-187,49
41	172,63	-7,37	-225,00	-187,48	-187,40
61	172,63	-7,37	-225,00	-187,41	-187,38
81	172,63	-7,37	-225,00	-187,39	-187,37
99	172,63	-7,37	-225,00	-187,39	-187,37
Analytisk løsning	174,65	-5,32	-225,00	-185,35	-185,29

Tabell 4.6: Lastvirkninger i plate med CL9AX-elementer

4.3 Diskusjon

Kommentarer til diagrammer

Figur 4.4 og 4.5 viser at momentvirkningene fra rendene dempes ut, som er i henhold til teorien. Dette gjelder også skjærkraften i figur 4.7 og 4.8. Maksimal momentvirkning og skjærkraft i konstruksjonen opptrer i sammenkoblingen mellom sylinder og plate.

Ringkraften har sin maksimale strekkraft ved omtrent halve høyden av sylindere og maksimal trykkraft oppstår omtrent en halv meter under øvre rand. Det observeres at ringkraften er lik null ved rendene som en konsekvens av at horisontal forskyvning er satt lik null i analysene.

Randmomentet i platen og momentvirkningen i toppen av sylindere er av samme verdi. Dette viser at momentet blir overført og at det er momentlikevekt i sammenføyningen. Maksimal skjærkraft i platen opptrer ved randen og har en lineær fordeling over radien med verdi lik null i platens origo. Moment om radiell retning har i likhet med randmomentet, ved platens origo, sin største absoluttverdi.

Ulik elementinndeling

Alle analyser er gjennomført med en segmentfordeling som vist i figur 4.14b. Fordelingen gjør at elementstørrelsen kan reduseres i områder der endringen i lastvirkningene er størst for å oppnå best mulig resultat. Tabell 4.1 og 4.2 viser resultater fra analyser som er gjennomført med de ulike inndelingene vist i figur 4.14. For både inndeling A og inndeling B er det brukt det samme antallet elementer (200 elementer totalt per modell), men fordelingen er ulik. For å oppnå en mest mulig effektiv analyse i forhold til regnekraften vil det derfor være gunstig å velge en gjennomtenkt modell med differensiert elementinndeling. Dette er særlig gunstig der analyseverktøyet har et begrenset antall elementer per modell, hvilket er tilfelle i denne oppgaven.

Resultatene fra analysene, gjennomført med modellene i figur 4.14, viser at modellen med differensiert elementinndeling generelt har løsninger som er nærmere den analytiske løsningen enn løsningen fra den homogene inndelingen.

Med bakgrunn i dette er det derfor inndeling B valgt i modellen. Ved å prioritere en finere elementinndeling rundt sylindrebunn og ved sammenføyning mellom kule og sylinder, oppnås generelt bedre resultater enn ved å velge samme elementinndeling over hele modellen.

Sammenligning av lineære analyser og elementtyper

Analyseresultatene viser generelt konvergens for økende antall noder per segment. Det er en tendens til at skjærkraften konvergerer raskere enn momentene, særlig i analysene med L6AXI-elementer.

Analysen med CL9AX-elementer viser generelt bedre resultater både med hensyn til nøyaktighet i forhold til analytisk løsning og med tanke på konvergensthastighet.

Generelt økende konvergens i løsningene for et økt antall noder per segment og for et høyere antall noder i hvert element, samsvarer med det teoretiske grunnlaget på området. Begge endringer i modellen medfører et økt antall frihetsgrader i modellen, men representerer to ulike konvergenstyper, som beskrevet i kapittel 3.3.

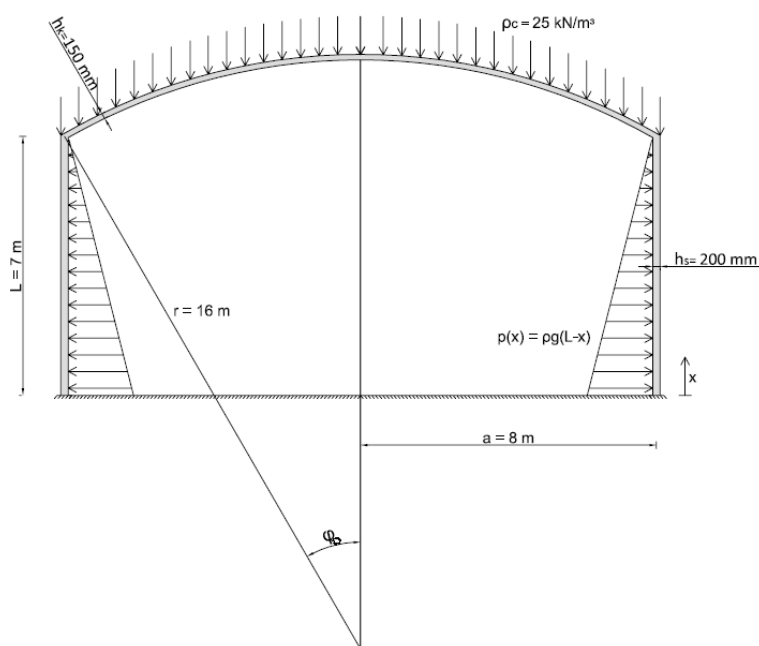
Resultatene fra analysene kan generelt anses som relativt gode i forhold til den analytiske løsningen. Med unntak av M_t ved plateranden, ligger alle resultater innenfor et avvik på 7% fra modell med høyest antall elementer til analytisk resultat, og omtrent halvparten av resultatene har et avvik på under 2% fra den analytiske løsningen.

Kapittel 5

Eksempel 2: Sylindrisk beholder med kuleformet tak

Skallkonstruksjonen består av en sylindrisk beholder med kuleformet tak, hvor sylindere og kuletaket er monolittisk forbundet. Beholderen utsettes for et indre hydrostatisk vanntrykk p og egenlast fra kuletaket.

Det er gjennomført lineære beregninger analytisk og numerisk, og en ikke-lineær analyse av eksemplet. Løsningene er presentert og sammenlignet. Konstruksjonens geometri og laster er vist i figur 5.1.



Figur 5.1: Sylindrisk beholder med kuletak

5.1 Analytisk løsning

Detaljerte beregninger knyttet til eksemplet kan leses i vedlegg B.2.

5.1.1 Beregninger

Elastisk lengde, l_e , og demplingslengden, L_c , blir beregnet for å kunne avgjøre hvorvidt randforstyrrelser fra to render må tas hensyn til.

$$l_e = \frac{\sqrt{a \cdot h_s}}{[3(1 - \nu^2)]^{\frac{1}{4}}} = 971 \text{ mm}$$

$$L_c = \pi \cdot l_e = 3050 \text{ mm}$$

$$2 \cdot L_c = 6101 \text{ mm} < L = 7000 \text{ mm}$$

Dempingslengden er mindre enn halvparten av beholderens lengde, hvilket vil si at sylinderen kan analyseres som uendelig lang.

Innspenning i bunnen av sylinderen gir at forskyvningen og rotasjonen skal være lik null.

$$w_{tot}(0) = \frac{p(0) \cdot r^2}{Eh_s} + \frac{l_e^2}{2D_s}(M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{dw_{tot}(0)}{dx} = \frac{dp(0)}{dx} \cdot \frac{a^2}{Eh_s} + \frac{l_e}{2D_s} \cdot (2M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0 \quad (5.2)$$

Kombinasjon av ligning (5.1) og (5.2) gir følgende løsning for randstørrelsene i sylinderbunnen:

$$M_0 = 27,9 \text{ kNm/m}$$

$$V_0 = -62,0 \text{ kN/m}$$

Membrankrefter

Membrankreftene N_φ og N_θ , henholdsvis kraften i meridianretningen og i ringretningen, er funnet ved hjelp av ligning (5.3) og (5.4).

$$N_\varphi(\varphi) = \frac{\rho_c R h_k}{1 + \cos(\varphi)} \quad (5.3)$$

$$N_\theta(\varphi) = \frac{\rho_c R}{E} \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos(\varphi)} - \cos(\varphi) \right) \quad (5.4)$$

Uttrykkene for horisontalforskyvningen $\delta_m(\varphi)$ og tangentdreiningen $\alpha_m(\varphi)$, er utledet under forutsetning om at kuleskallet ikke er fastholdt ved påkjenning av egenlast.

$$\delta_m(\varphi) = \epsilon_\theta(\varphi) \cdot R \cdot \sin(\varphi) \quad (5.5)$$

$$\alpha_m(\varphi) = -\frac{\rho_c R}{E} \cdot \sin(\varphi) \cdot (2 + \nu) \quad (5.6)$$

Homogene løsninger

De homogene løsningene for kuleskallet er hentet fra ligning (2.45).

Ved anvendelse av kuleligningene vil det være mest hensiktsmessig å uttrykke ligningene som funksjon av randkrefter. De omformulerte ligningene er vist i ligning (5.7) og utledningen kan leses i Sørensen [6, s. 3.74].

$$\begin{bmatrix} R_\varphi \cdot \sin\varphi \\ M_\varphi \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \\ V_\varphi \\ N_\varphi \cdot \tan\varphi \\ N_\vartheta \cdot \frac{1}{\lambda} \\ M_\vartheta \cdot \frac{Ehr}{2\nu\lambda^3 D} \\ \alpha \cdot \frac{Eh}{2\lambda^2} \\ \delta \cdot \frac{Eh}{\lambda r \sin\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4(t) & -g_2(t) \\ 2g_2(t) & g_3(t) \\ -g_4(t) & g_2(t) \\ g_4(t) & -g_2(t) \\ 2g_1(t) & g_4(t) \\ 2g_2(t) & g_3(t) \\ -g_3(t) & -g_1(t) \\ 2g_1(t) & g_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \cdot \sin\varphi \\ M_0 \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

der

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1-\nu^2) \frac{r^2}{h^2}}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

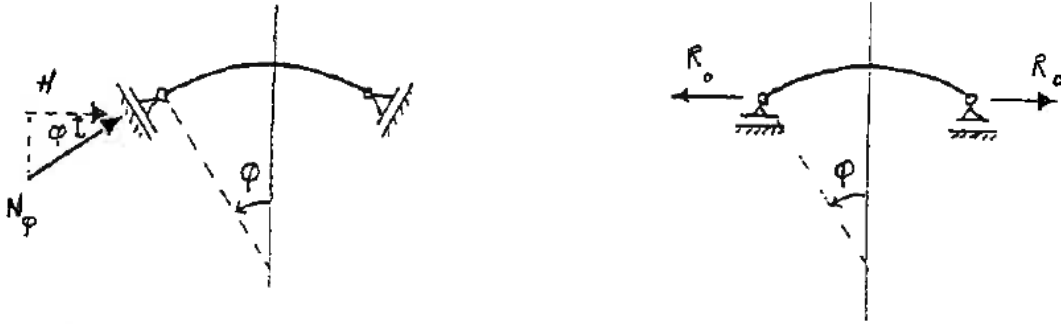
Dette gir følgende homogene løsninger for forskyvningen og tangentdreiningen av kula:

$$\delta_h(t, \varphi) = \frac{\lambda R \sin(\varphi)}{Eh_k} \cdot \left(2g_1(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{Eh_k R}{2\lambda^3 D_k} \right) \quad (5.8)$$

$$\alpha_h(t, \varphi) = \frac{2\lambda^2}{Eh_k} \cdot \left(-g_3(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) - g_1(t) \cdot M_0 \cdot \frac{Eh_k R}{2\lambda^3 D_k} \right) \quad (5.9)$$

Partikulære løsninger

Partikulærløsningen uttrykkes ved å benytte at $M_\varphi = V_\varphi = 0$ ved kuleranden, hvilket gir et system som er opplagret som vist til venstre i figur 5.2.



Figur 5.2: Opplagring ved partikulærløsning [6]

M_0 og R_0 innføres som randkrefter i kuleligningene for den homogene løsningen, og systemet løses ved at $\varphi = 30^\circ$ som gir $t = 0$, samt at $R_0 = -H$ og $M_0 = 0$. Dette skyldes at når R_0 er en integrasjonskonstant, må det finnes en løsning som tilsvarende $R_0 = 0$ i systemet, hvilket er definert som $H(\varphi)$.

$$H(\varphi) = N_\varphi(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

Nevnte sammenhenger er satt inn i ligningene (5.8) og (5.9). Dette gir følgende tillegg av partikulærløsningen:

$$\delta'(\varphi) = \frac{\lambda R \sin(\varphi)}{E h_k} \cdot (-2H(\varphi) \cdot \sin(\varphi)) \quad (5.10)$$

$$\alpha'(\varphi) = \frac{2\lambda^2}{E h_k} \cdot (H(\varphi) \cdot \sin(\varphi)) \quad (5.11)$$

De totale partikulære løsningene er summen av ligningene (5.5) og (5.10), og (5.6) og (5.11).

$$\delta_p(\varphi) = \delta_m(\varphi) + \delta'(\varphi)$$

$$\alpha_p(\varphi) = \alpha_m(\varphi) + \delta'(\varphi)$$

KAPITTEL 5. EKSEMPEL 2: SYLINDRISK BEHOLDER MED KULEFORMET TAK

Summasjon av partikulærløsningen og den homogene løsningen gir den totale horisontale forskyvningen og tangentdreiningen.

$$\delta_{tot} = \delta_p + \delta_h \quad (5.12)$$

$$\alpha_{tot} = \alpha_p + \alpha_h \quad (5.13)$$

I sammenkoblingen må den horisontale forskyvningen og vinkelendringen være lik for beholderen og kuletaket. Dette gir følgende randbetingelser og sammenhenger:

$$\begin{aligned} w_{tot}(0) &= \delta_{tot}(0) \\ \frac{dw_{tot}(0)}{dx} &= -\alpha_{tot}(0) \\ M_{0s} &= M_{0k} \\ V_{0s} &= -R_0 \end{aligned}$$

Dette gir ligningene:

$$\frac{l_e^2}{2D_s} (M_0 + V_0 \cdot l_e) = \frac{\lambda R \sin(\varphi)}{Eh_k} \cdot \left(2g_1(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{Eh_k R}{2\lambda^3 D_k} \right) + \delta_p \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp(x)}{dx} \cdot \frac{a^2}{Eh_s} + \frac{l_e}{2D_s} \cdot (-2M_0 - V_0 \cdot l_e) &= - \left(\frac{2\lambda^2}{Eh_k} \cdot \left(-g_3(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g_1(t) \cdot M_0 \cdot \frac{Eh_k R}{2\lambda^3 D_k} \right) + \alpha_p \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Skallstørrelsene i sammenkoblingen M_0 , V_0 og R_0 , beregnes ved å løse ligningene (5.14) og (5.15)

$$\begin{aligned} M_0 &= -4,5 \quad kNm/m \\ V_0 &= 12,3 \quad kN/m \\ R_0 &= -12,3 \quad kN/m \end{aligned}$$

Videre er uttrykkene for kraft- og momentforløp vist:

$$M_{\varphi}(t) = \frac{4\lambda^3 D_k}{E h_k R} \left(g_2(t) \cdot (R_0 - H) \cdot \sin(\varphi) \right) + g_3(t) \cdot M_0$$

$$M_{\varphi}(0) = 4,5 \quad \text{kNm/m}$$

$$M_{\theta}(t) = \nu \cdot M_{\varphi}(t)$$

$$M_{\theta}(0) = 0,9 \quad \text{kNm/m}$$

$$V_{\varphi}(t) = g_4(t) \cdot (H - R_0) \cdot \sin(\varphi) + g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E h_k r}{2\lambda^3 D_k}$$

$$V_{\varphi}(0) = -7,8 \quad \text{kN/m}$$

$$N_{\varphi}(t) = \frac{1}{\tan(\varphi)} \left(g_4(t) \cdot (R_0 - H) \cdot \sin(\varphi) - g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E h_k r}{2\lambda^3 D_k} \right) + N_{\varphi m}(\varphi)$$

$$N_{\varphi}(0) = -18,7 \quad \text{kN/m}$$

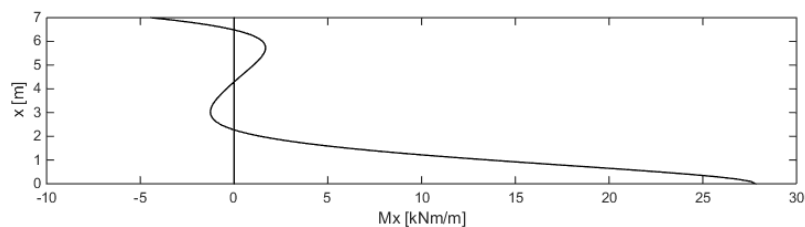
$$N_{\theta}(t) = \lambda \left(2g_1(t) \cdot (R_0 - H) \cdot \sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E h_k r}{2\lambda^3 D_k} \right) + N_{\theta m}(\varphi)$$

$$N_{\theta}(0) = 88,3 \quad \text{kN/m}$$

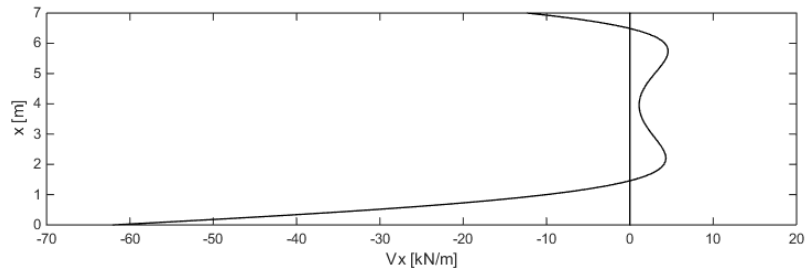
5.1.2 Diagrammer

Delkapittelet presenterer lastvirkningsdiagrammer for analytisk løsning.

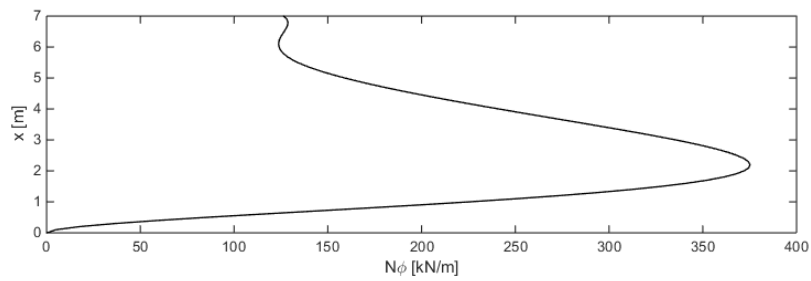
Skallkrefter over sylinderhøyden



Figur 5.3: Momentforløpet over sylinderhøyden



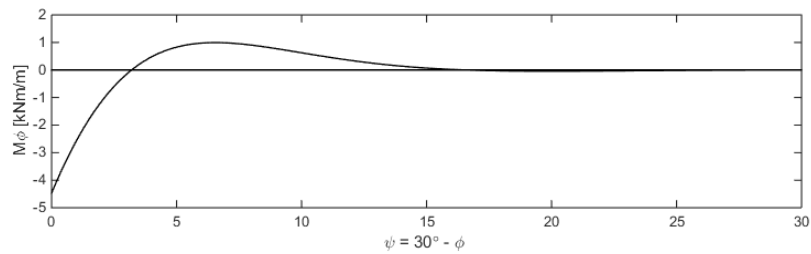
Figur 5.4: Skjærkrefter over sylinderhøyden



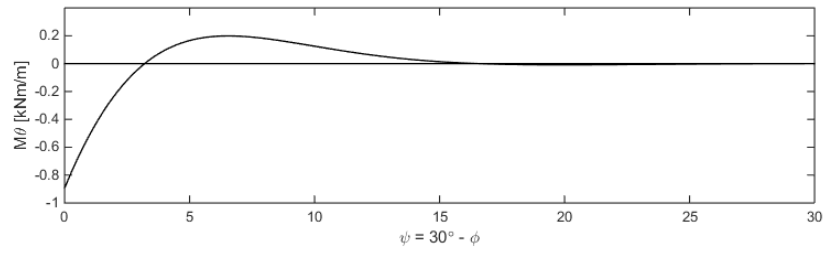
Figur 5.5: Ringkraft over sylinderhøyden

Skallkrefter i kula

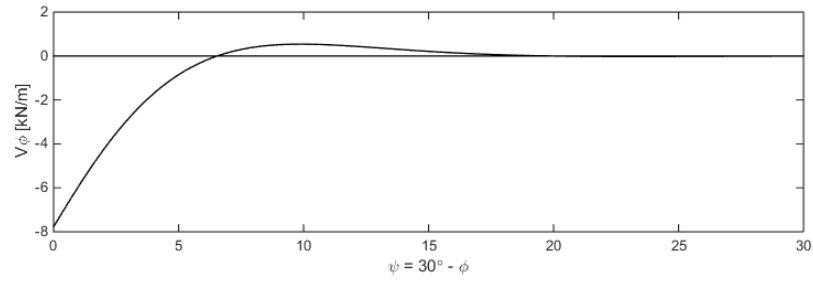
Vinkelen ψ har sitt nullpunkt ved randen.



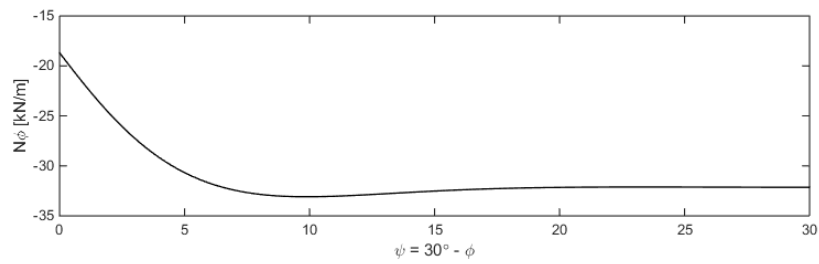
Figur 5.6: Momentvirkning i meridianretning i kula



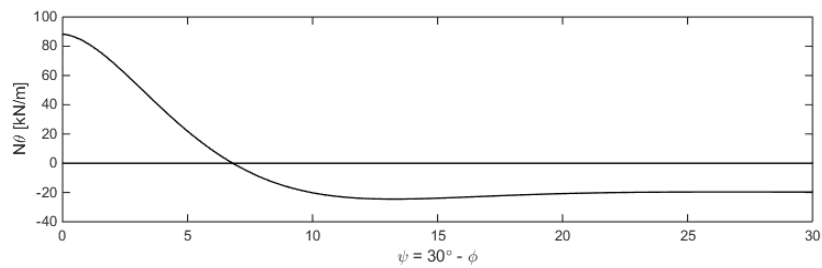
Figur 5.7: Momentvirkning i ringretning i kula



Figur 5.8: Skjærkrefter i kula



Figur 5.9: Ringkraft i meridianretning i kula

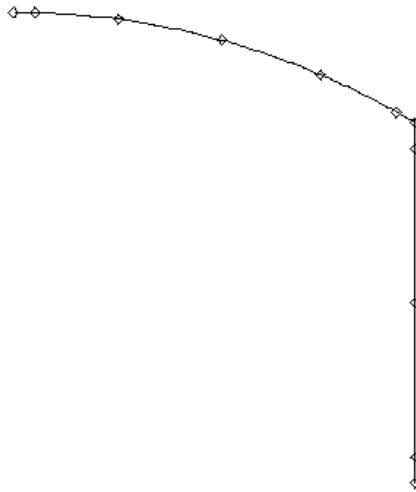


Figur 5.10: Ringkraft i ringretningen i kula

5.2 Lineær analyse

Konstruksjonen er modellert med kortere segmenter i bunnen av sylinderen, i sammenkoblingen mellom sylinderen og kula, og ved kulesenteret, som vist i figur 5.11. Dette er gjort for å få en finere inndeling og mulighet for å øke antall elementer i modellen. Modellen er påkjent av egenlast og vanntrykk. Det er kun halvparten av sylinderen og kula som er modellert, og roteres om y-aksen der $x=0$ for å lage hele konstruksjonen. Bunnen av sylinderen er fast innspent.

Det er utført analyser med ulikt antall elementer og elementtyper, for å se i hvilken grad resultatene blir påvirket. Resultatene er ført i tabeller sammen med den analytiske løsningen. Elementtypene benyttet i modellen er L6AXI og CL9AX, se figur 3.1.



Figur 5.11: DIANA-modell av beholderen med kuletak

5.2.1 Resultater sylinder

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]		Ringkraft [kN/m]	
	Topp	Bunn	Topp	Bunn	Topp	Bunn
21	-4,35	26,71	-11,61	-60,64	118,72	-2,79
41	-4,42	27,09	-11,71	-61,07	118,54	-3,04
61	-4,44	27,22	-11,74	-61,21	118,48	-3,11
81	-4,46	27,28	-11,75	-61,28	118,45	-3,14
100	-4,46	27,32	-11,76	-61,32	118,43	-3,15
Analytisk løsning	-4,46	27,87	-12,30	-62,03	124,50	0,00

Tabell 5.1: Lastvirkninger i sylinder med L6AXI-elementer

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]		Ringkraft [kN/m]	
	Topp	Bunn	Topp	Bunn	Topp	Bunn
21	-4,49	27,46	-11,80	-61,49	118,38	-3,41
41	-4,50	27,47	-11,80	-61,50	118,36	-3,26
61	-4,50	27,47	-11,80	-61,50	118,36	-3,24
81	-4,50	27,47	-11,80	-61,50	118,36	-3,23
99	-4,50	27,47	-11,80	-61,50	118,35	-3,22
Analytisk løsning	-4,46	27,87	-12,30	-62,03	124,50	0,00

Tabell 5.2: Lastvirkninger i sylinder med CL9AX-elementer

5.2.2 Resultater kule

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]	Ringkraft [kN/m]	
	M_φ	M_θ		N_φ	N_θ
21	-4,41	-0,83	7,95	-18,35	87,50
41	-4,45	-0,84	7,99	-18,30	87,50
61	-4,45	-0,85	8,00	-18,29	87,51
81	-4,47	-0,85	8,01	-18,28	87,52
100	-4,48	-0,86	8,01	-18,27	87,52
Analytisk løsning	-4,46	-0,89	7,77	-18,69	88,29

Tabell 5.3: Lastvirkninger ved kuleranden med L6AXI-elementer

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]	Ringkraft [kN/m]	
	M_φ	M_θ		N_φ	N_θ
21	-4,50	-0,86	8,02	-18,26	87,54
41	-4,50	-0,86	8,02	-18,26	87,53
61	-4,50	-0,86	8,02	-18,26	87,53
81	-4,50	-0,86	8,02	-18,26	87,53
99	-4,50	-0,86	8,03	-18,25	87,52
Analytisk løsning	-4,46	-0,89	7,77	-18,69	88,29

Tabell 5.4: Lastvirkninger ved kuleranden med CL9AX-elementer

KAPITTEL 5. EKSEMPEL 2: SYLINDRISK BEHOLDER MED KULEFORMET TAK

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]	Ringkraft [kN/m]	
	M_φ	M_θ	V_φ	N_φ	N_θ
21	0,01	0,01	0,02	-29,53	-29,53
41	0,01	0,01	0,01	-29,51	-29,51
61	0,01	0,01	0,00	-29,50	-29,50
81	0,01	0,01	0,01	-29,50	-29,50
100	0,01	0,01	0,01	-29,50	-29,50
Analytisk løsning	0,00	0,00	0,00	-32,15	-19,68

Tabell 5.5: Lastvirkninger ved kulesenteret med L6AXI-elementer

Noder per segment	Moment [kNm/m]		Skjærkraft [kN/m]	Ringkraft [kN/m]	
	M_φ	M_θ	V_φ	N_φ	N_θ
21	-0,01	-0,02	0,00	-29,45	-29,45
41	-0,02	-0,03	0,00	-29,45	-29,45
61	-0,01	-0,02	0,00	-29,45	-29,45
81	-0,01	-0,03	0,00	-29,45	-29,46
99	-0,01	-0,02	0,00	-29,45	-29,45
Analytisk løsning	0,00	0,00	0,00	-32,15	-19,68

Tabell 5.6: Lastvirkninger ved kulesenteret med CL9AX-elementer

5.3 Ikke-lineær analyse

Ikke-lineær analyse er kjørt i DIANA fordi det er ønskelig å se oppførselen til konstruksjonen med armert betong. Konstruksjonen er modellert med elementtypen Q8AXI. Det er lagt inn beregningsmessig nødvendig armering i modellen, men i praksis ville minimumsarmering vært gjeldende i flere områder.

5.3.1 Dimensjonering av armering

Det er gjennomført dimensjonering av nødvendig armering av sylinter- og kuleskall. Nødvendig armering er oppsummert i tabell 5.7. Dimensjoneringen er gjennomført med grunnlag i lineær elastisk teori og er i henhold til NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008. De gjennomførte beregninger er vist i vedlegg C.2.

Konstruksjonen er delt inn i tre deler, der armeringen er lik innenfor hver del:

- Sylinderbunn - omfatter nedre halvdel av sylinderen
- Sylindertopp - omfatter øvre halvdel av sylinderen
- Kule - omfatter hele kulen

Beregningene er konservative, og det er ekstremalverdiene av lastvirkningene innenfor hver av de tre konstruksjonsdelene som ligger til grunn for den nødvendige armeringen.

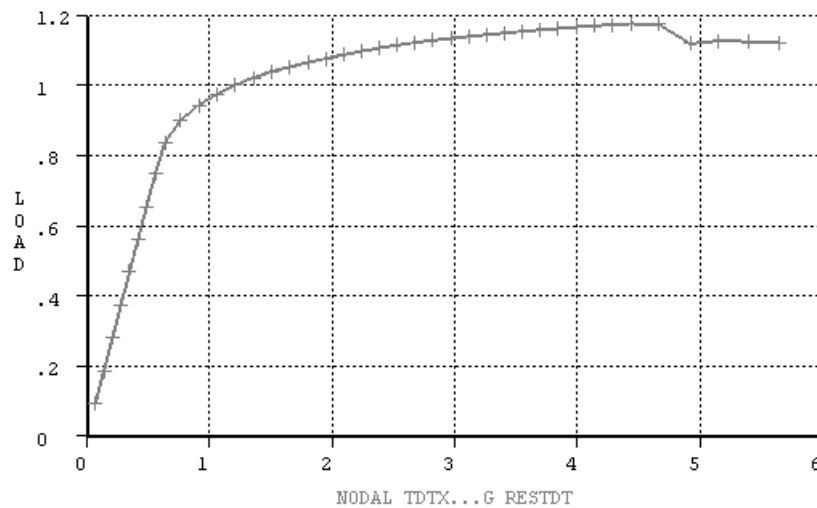
Dimensjoneringen viser at det ikke er behov for skjærarmering i konstruksjonen.

KAPITTEL 5. EKSEMPEL 2: SYLINDRISK BEHOLDER MED KULEFORMET TAK

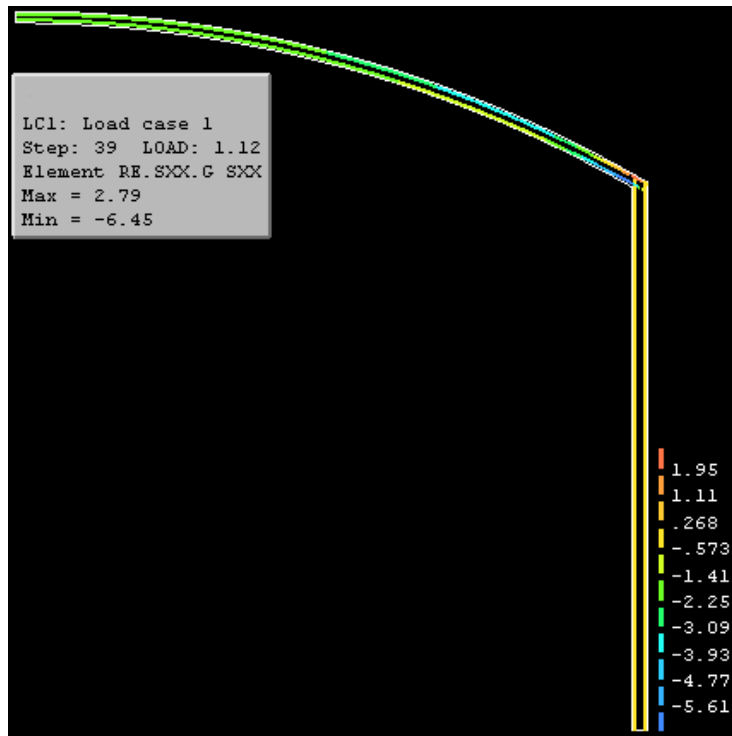
	Armeringstype	Beregnet armering [$\frac{mm^2}{m}$]	Minstearmoring [$\frac{mm^2}{m}$]
Sylinderbunn	Ringarmoring	864	275
	Bøyearmoring, indre lag	409	275
	Bøyearmoring, ytre lag	98	275
Sylindertopp	Ringarmoring	864	275
	Bøyearmoring, indre lag	65	275
	Bøyearmoring, ytre lag	3	275
Kule	Bøyearmoring for M_φ og N_φ , indre lag	224	191
	Bøyearmoring for M_θ og N_θ , indre lag	47	191
	Bøyearmoring for M_φ , ytre lag	94	191
	Bøyearmoring for M_θ , ytre lag	19	191

Tabell 5.7: Nødvendig armering av sylinder- og kuleskall i eksempel 2

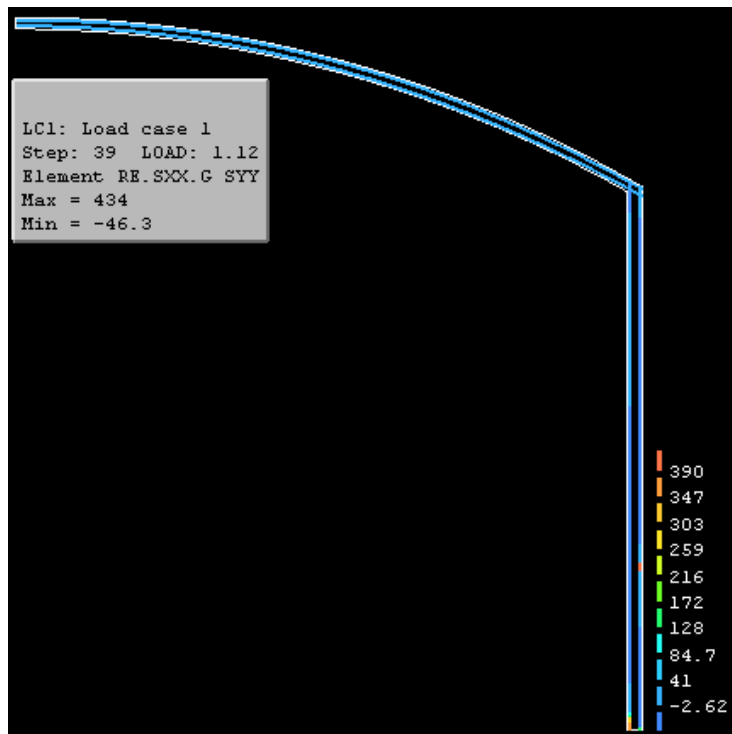
5.3.2 Resultater



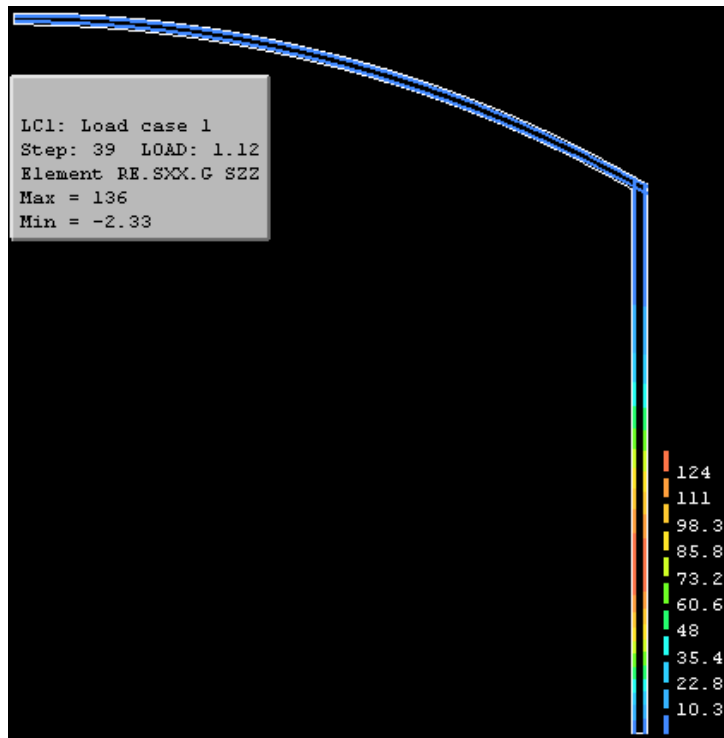
Figur 5.12: Lastfaktor i forhold til forskyvning [mm]



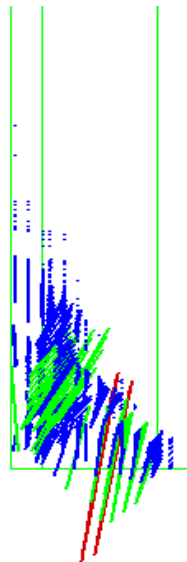
Figur 5.13: Armeringsspenninger i horisontal retning [MPa]



Figur 5.14: Armeringsspenninger i vertikal retning [MPa]



Figur 5.15: Armeringsspenninger i ringretning [MPa]



Figur 5.16: Vertikalsnitt av opprissing i sylinderbunnen

5.4 Diskusjon

Kommentarer til diagrammer

Figur 5.3 og 5.4 viser at de største moment- og skjærkraftvirkningene opptrer ved innspenningen i bunnen av sylindere. Moment- og skjærkraftvirkningene i kula dempes ut som vist i figur 5.6 til 5.8. Ringkreftene går mot partikulærløsningen for økende vinkel φ .

Sammenligning av lineære løsninger

For sylindere konvergerer løsningen med elementene CL9AX raskere enn L6AXI mot den analytiske løsningen. De numeriske løsningene til ringkraften i sylindrebunnen konvergerer ikke mot den analytiske delen. Det er vanskelig å slå fast hva dette skyldes. En mulig årsak er randforstyrrelser fra toppen av sylindere, til tross for at det teoretisk beregnet ikke oppstår randforstyrrelser.

Resultatene fra den lineære analysen stemmer godt overens med de analytiske løsningene for sylindere, med unntak av ringkraften ved bunnen.

For kula konvergerer løsningen med elementene CL9AX raskere enn L6AXI mot den analytiske løsningen. Ved kulesenteret er det gode resultater sammenlignet med den analytiske løsningen med både L6AXI- og CL9AX-elementer, med unntak av membrankraften i ringretning. Resultatene viser at momentene og skjærkraften reduseres når avstanden til randen øker, hvilket er i samsvar med den analytiske løsningen.

Økt antall noder per segment, og dermed flere elementer, gir i de fleste tilfellene bedre numeriske resultater målt mot den analytiske løsningen.

Ikke-lineær analyse

Et last-deformasjonsdiagram av konstruksjonen er gitt i figur 5.12. Diagrammet viser en ikke-lineær oppførsel. Hvert laststeg tilsvarer ti prosent av lasten. Ved laststeg 36 oppnås den høyeste påførte lasten, 1,18 ganger dimensjonerende last. Deretter oppstår det brudd ved at armeringen flyter. Maksimal deformasjon av konstruksjonen før brudd, er beregnet til å være cirka 5 mm.

Sylindere er delt på midten, i to soner av lik størrelse. Dette fører til at det i store områder av konstruksjonen er benyttet for stor armeringsmengde, grunnet bruk av ekstremalverdier ved dimensjoneringen.

Cirka to meter opp fra bunnen av sylindere på den ytre armeringen, lokaliseres det

KAPITTEL 5. EKSEMPEL 2: SYLINDRISK BEHOLDER MED KULEFORMET TAK

kritiske området. Figur 5.14 viser at armeringen har en spenning på 434 MPa, hvilket tilsvarer flytespenningen til stålet. Den indre armeringen i bunnen av sylindere oppnår en spenning på 388 MPa. Armeringen i ringretning, vist i figur 5.15, har beskjedne spenninger.

Utnyttelsesgraden av armeringen over kula er svært liten. Dette skyldes trykk-kreftene som oppstår i kula, og motvirker behovet for armering. Dimensjonert armeringsmengde over kula er svært liten, og det er dermed grunn til å tro at armeringen flere steder er overflødig. I praksis vil minstearmering bli lagt inn.

Figur 5.16 viser opprissingen i bunnen av sylindere. Figuren viser rissstøyningene normalt på rissretningen, hvor størrelse og lengde er vist som en vektor. Opprissingen er en følge av skjærkreftene som oppstår.

Del III

Beregningseksempler av skalltak

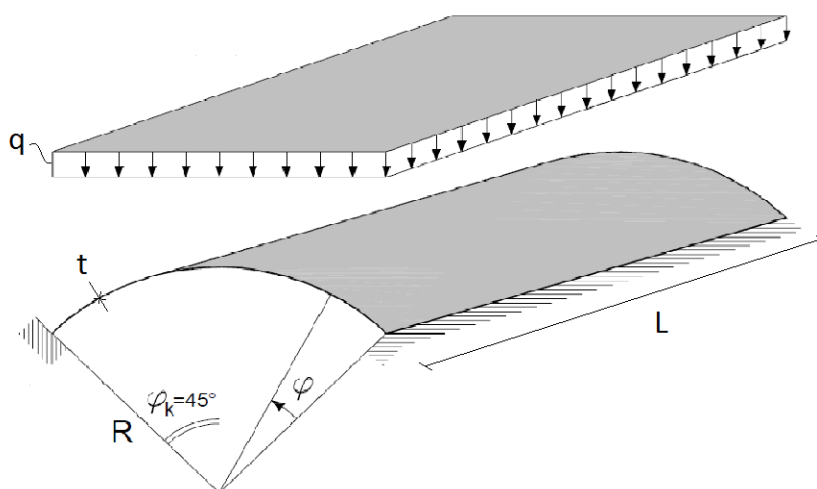
Kapittel 6

Eksempel 3: Buet skalltak med fast innspente render

Dette kapitlet tar for seg et beregningseksempel av et buet skalltak med fast innspente render i lengderetningen. Skallet er påkjent av en jevnt fordelt last, som vist i figur 6.1. Nødvendig data for skalltaket er oppgitt i tabell 6.1.

Eksempelen omfatter lineær og ikke-lineær analyse med tilhørende dimensjonering av armering.

Det er valgt å modellere konstruksjonen i full størrelse. Modellen kan også modelleres med symmetribetingelser og dermed øke antall elementer, som vil gi økt nøyaktighet i resultatene.



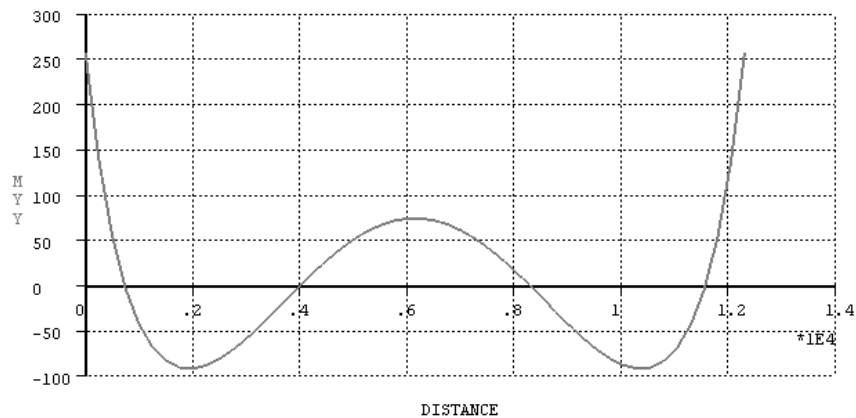
Figur 6.1: Buet skalltak med fast innspente render

Betongkvalitet	B25
Stålkvalitet	S415
q	3.25 kN/m ²
φ_k	45°
t	80 mm
L	26 670 mm
R	8 000 mm
E_c	25 000 N/mm ²
ν	0.2

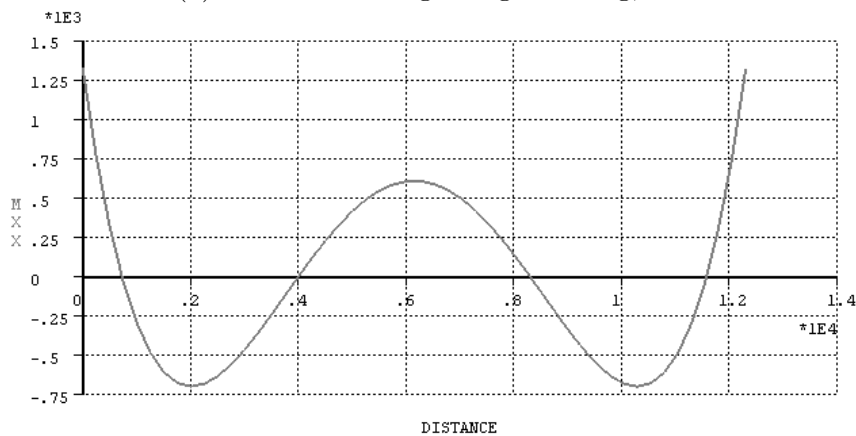
Tabell 6.1: Data for skalltak med fast innspente render

6.1 Lineær analyse

Det er utført lineær analyse av skalltaket vist i figur 6.1 med egenskapene gitt i tabell 6.1. Resultater som er presentert danner grunnlag for dimensjonering av armering.

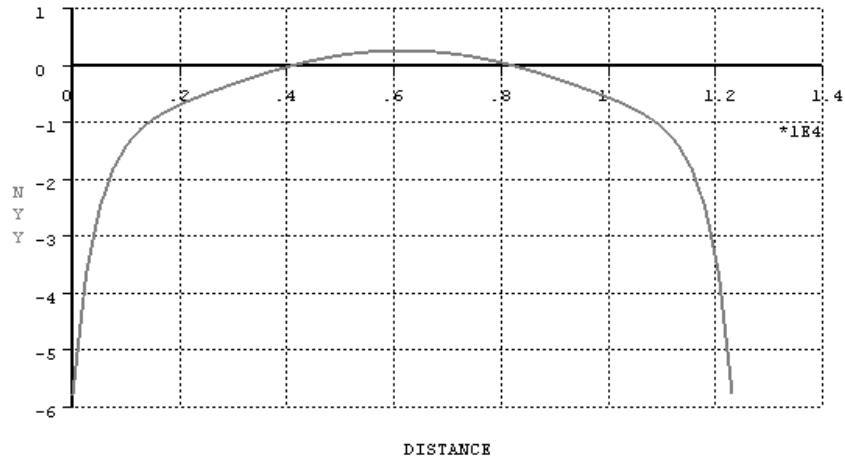
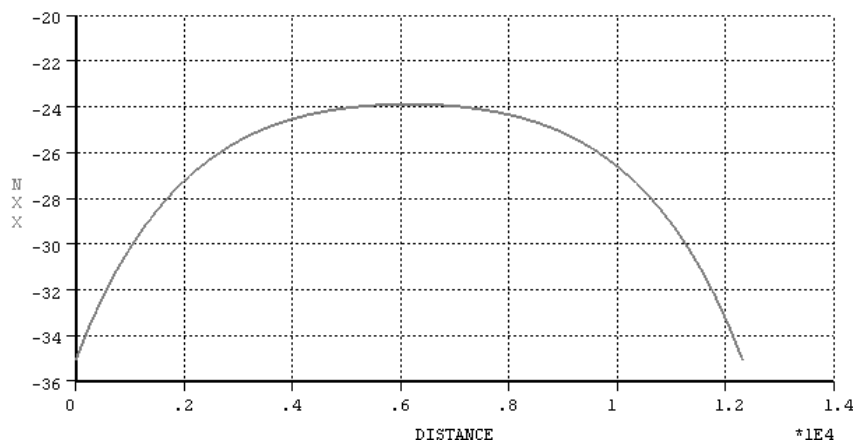
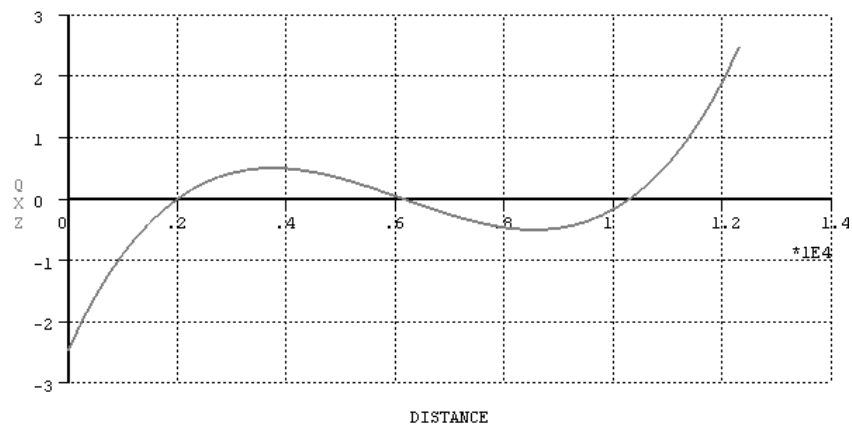


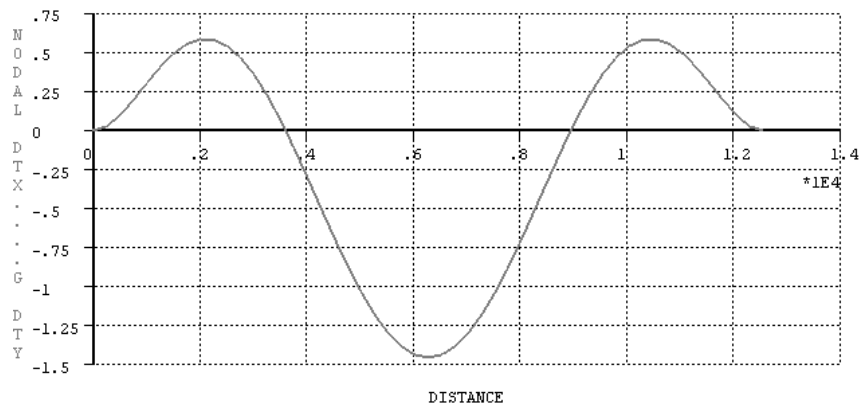
(a) Momentvirkning i lengderetning, M_x



(b) Momentvirkning i tverretning, M_φ

Figur 6.2: Momentvirkning over skallets bredde [Nmm/mm]

(a) Membrankrefter i lengderetning, N_x (b) Membrankrefter i tverretning, N_φ Figur 6.3: Membrankrefter over skallets bredde [kN/m]Figur 6.4: Skjærkraft over skallets bredde, V_φ [kN/m]



Figur 6.5: Forskyvning u
over skallets bredde ved $L/2$ [mm]

6.2 Ikke-lineær analyse

6.2.1 Dimensjonering av armering

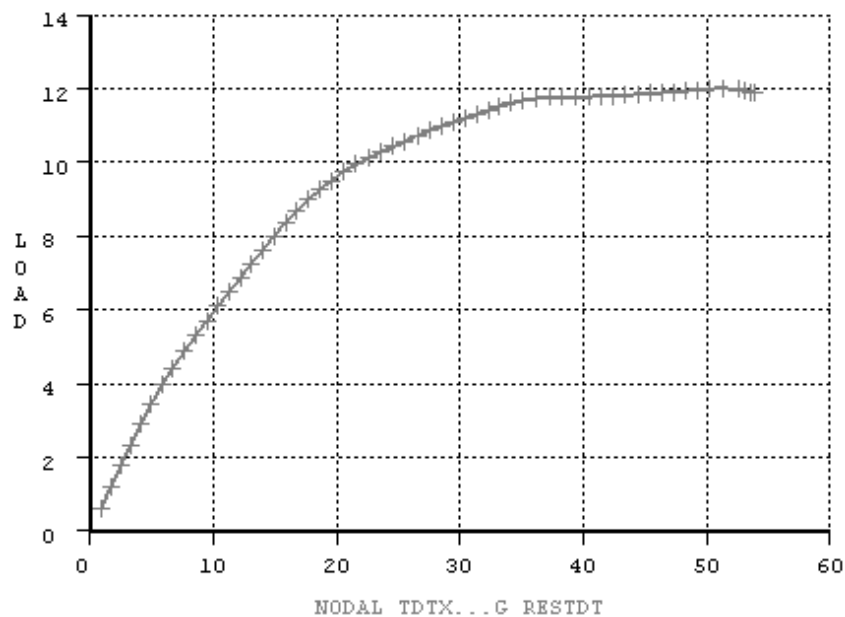
Det er gjennomført dimensjonering av nødvendig armering i skalltaket med fast innspente render. De dimensjonerende lastvirkningene er basert på den lineære analysen. Nødvendig armering er oppsummert i tabell 6.2. Dimensjoneringen er gjennomført med grunnlag i lineær elastisk teori og er i henhold til NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008. De gjennomførte beregninger er vist i vedlegg C.3.

Beregningene er konservative, og det er ekstremalverdiene av lastvirkningene som benyttes for beregning av den nødvendige armeringen.

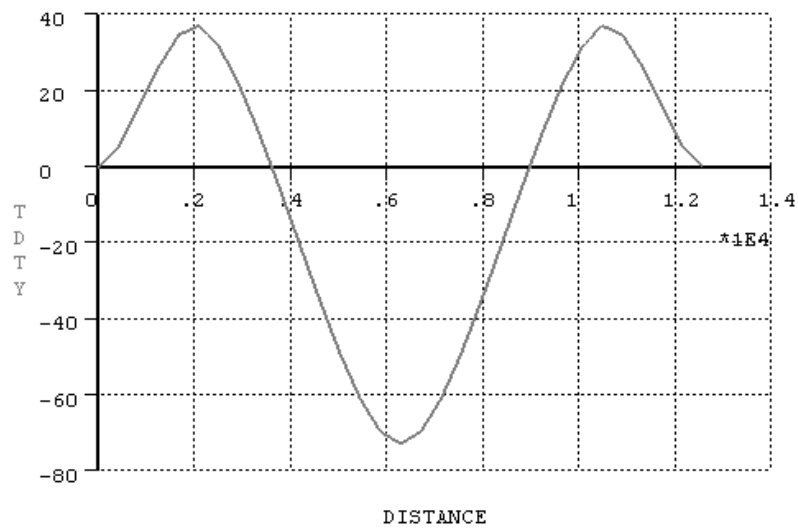
	Armeringsretning	Nødvendig armering [$\frac{mm^2}{m}$]
Armering overkant	Lengderetning	5
	Tverretning	34
Armering underkant	Lengderetning	12
	Tverretning	77

Tabell 6.2: Nødvendig armering av skalltak med fast innspente render

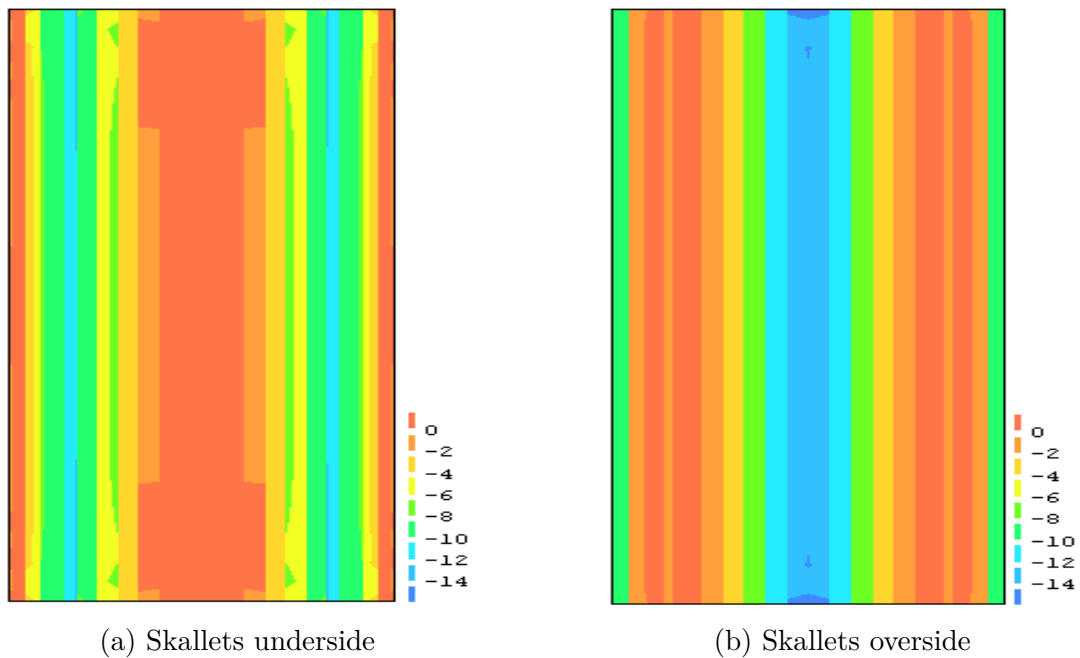
6.2.2 Resultater



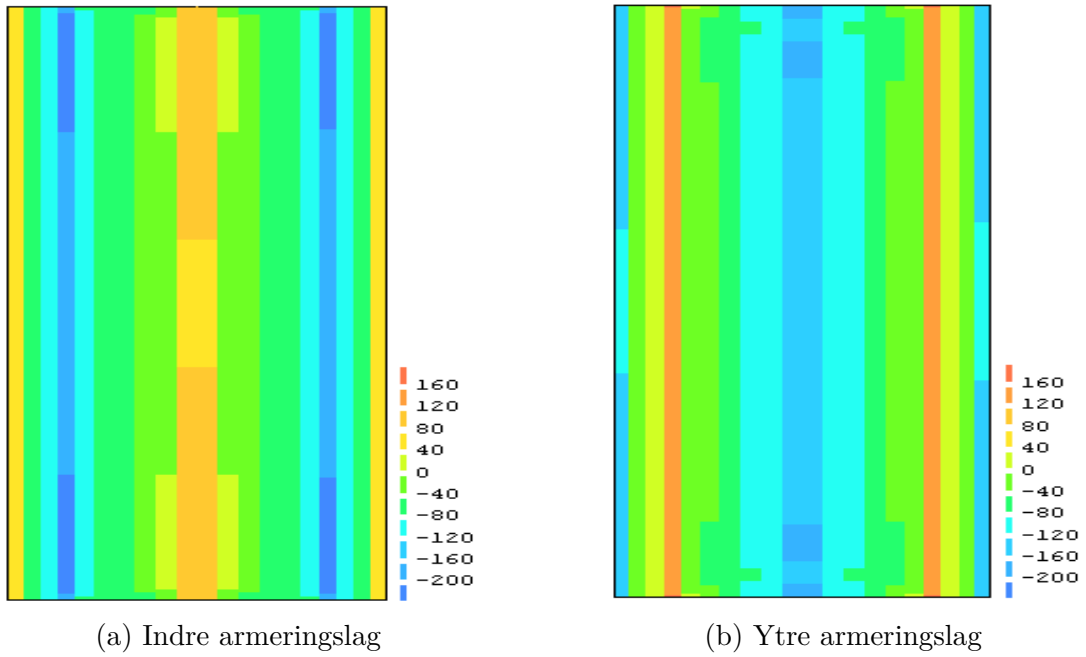
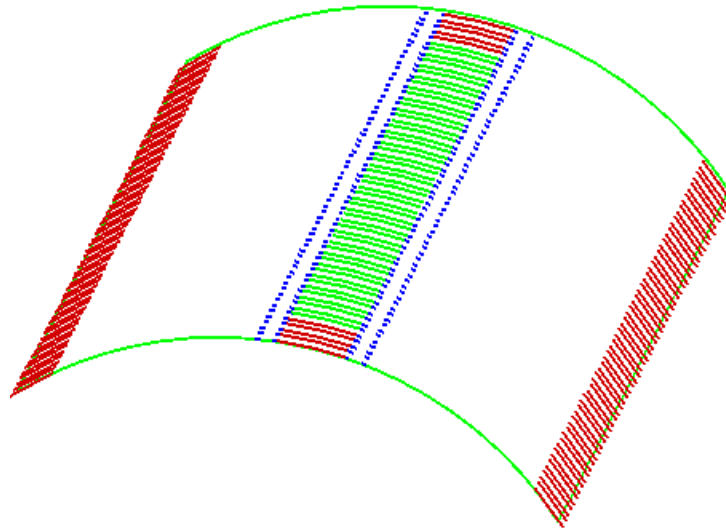
Figur 6.6: Lastfaktor i forhold til forskyvning [mm]



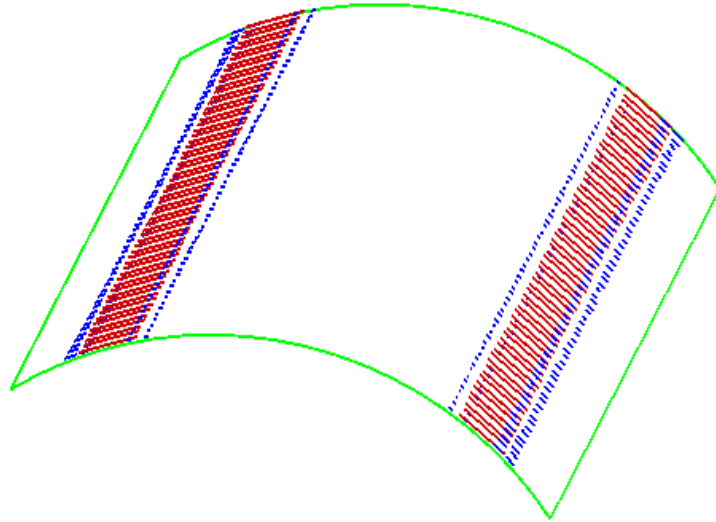
Figur 6.7: Forskyvning over skallets bredde ved bruddlast [mm]



Figur 6.8: Spenninger i betongoverflatenes tverretning ved brudd [MPa]

Figur 6.9: Spenninger i armeringslagenes tverretning ved brudd [MPa]

Figur 6.10: Opprissing på skallets underside



Figur 6.11: Opprissing på skallets overside

6.3 Diskusjon

Konstruksjonen viser en ikke-lineær oppførsel i last-deformasjonsdiagrammet, vist i figur 6.6. Betongen går til brudd når påsatt last tilsvarer elleve ganger dimensjonerende last. Når det oppnås brudd ved en så høy lastfaktor, tyder det på at konstruksjonen er kraftig overdimensjonert i forhold til den lasten som virker. Deformasjonen er beregnet til å være cirka 70 millimeter midt på taket ved brudd vist i figur 6.7.

Spenninger på betongskallets over- og underside i skallets tverretning er vist i figur 6.8. Betongens trykkspenning ved største påsatte last er beregnet til å være 14,4 MPa, og opptrer på mønet. Spenningen som oppstår er altså større enn betongens trykkapasitet på 14,17 MPa, og det er naturlig å anta et trykkbrudd i konstruksjonen.

Armeringsspenningene som oppstår som følge av påsatt last er under flytespenning, hvor maksimal opptredende strekkspenning er 165 MPa i det øvre armeringsnett. Spenningsene i armeringsnett er vist i figur 6.9. Membrankreftene som virker i skalltaket er trykkrefter, vist i figur 6.3, noe som er med på å redusere behovet for armering.

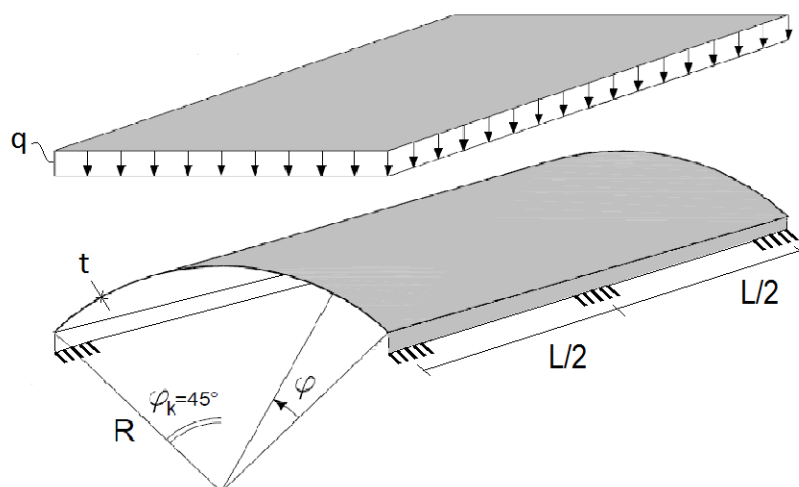
Opprissingen på underside og overside er vist henholdvis i figur 6.10 og 6.11. På betongskallets underside vil det oppstå riss ved oppleggene og i midtfeltet, hvor de største rissene opptrer ved opplegg. På oversiden dannes det riss der skallet har størst oppadrettet forskyvning i vertikal retning, se figur 6.7. Dette stemmer godt overens med hvor strekkspenningene oppstår i betongen.

Kapittel 7

Eksempel 4: Buet skalltak med randbjelker

Dette kapitlet tar for seg et beregningseksempel av et buet skalltak med randbjelker i takets lengderetning. Skallet er påkjent av en jevnt fordelt last, som vist i figur 7.1. Nødvendig data for skalltaket er oppgitt i tabell 7.1.

Eksempelen omfatter lineær og ikke-lineær analyse med tilhørende dimensjonering av armering. Randbjelken er modellert med en bredde på 250 millimeter. I følge Chandrashekhara [4, s.123] er det vanlig å bruke en bredde på randbjelken tilsvarende to til tre ganger tykkelsen på betongskallet.



Figur 7.1: Buet skalltak med randbjelker

Betongkvalitet	B25
Stålkvalitet	S415
q	3.25 kN/m^2
φ_k	45°
t	80 mm
L	26 670 mm
R	8 000 mm
E_c	$25\,000 \text{ N/mm}^2$
ν	0.2

Tabell 7.1: Data for skalltak med randbjelker

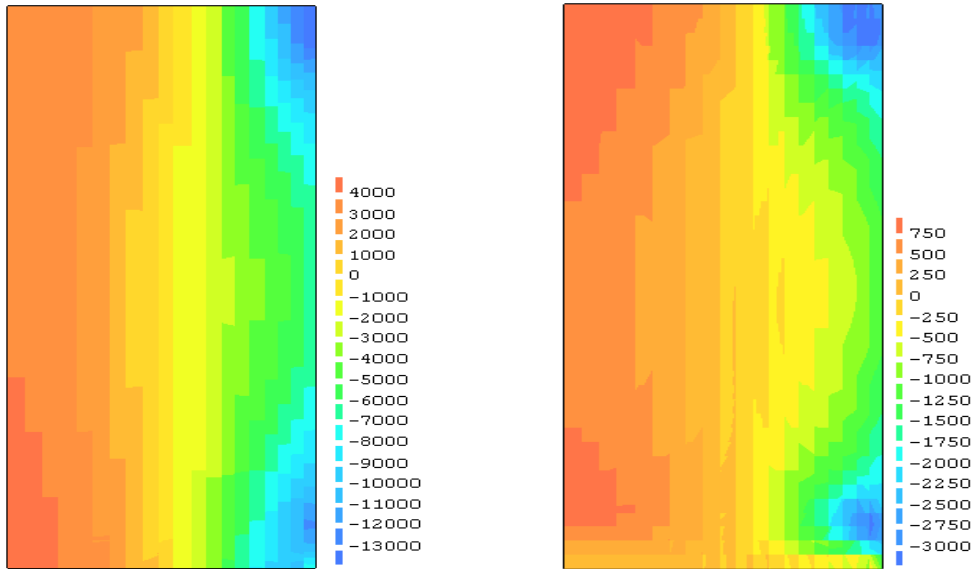
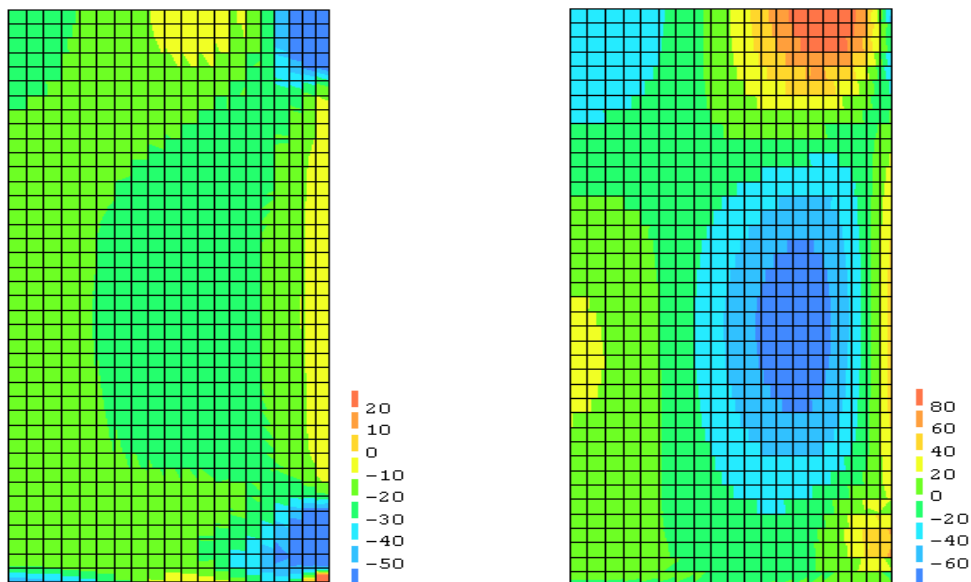
For en mest mulig effektiv bruk av regnekraft og antall elementer til rådighet, utnyttes det at konstruksjonen er symmetrisk om to akser. Den ene akse går i konstruksjonens lengderetning langs takets topp, mens den andre symmetriaksen ligger i en akse som går mellom de to randbjelkenes midtopplegg. Ved å innføre følgende randbetingelser er det tilstrekkelig å analysere en fjerdedel av den fysiske konstruksjonen:

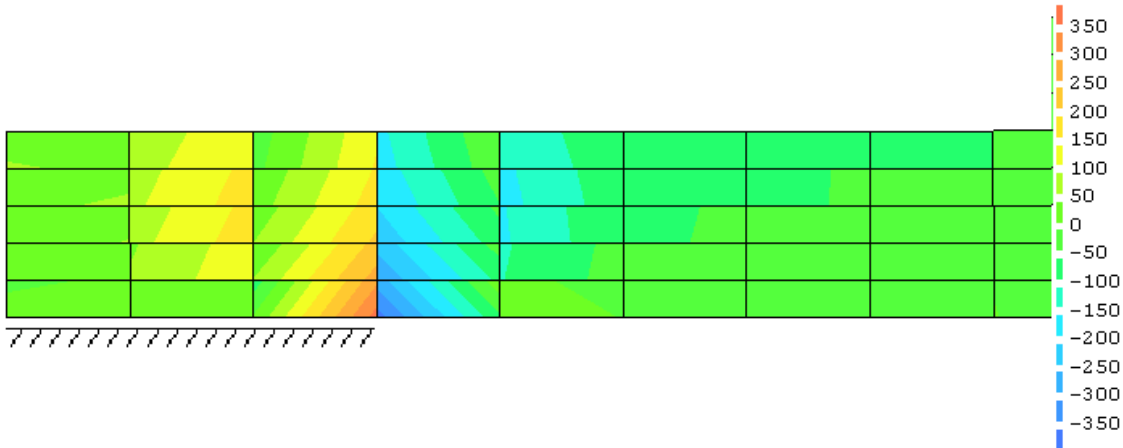
- Rotasjonen om symmetriaksene skal være lik null
- Fastholding i skallplanet normalt på symmetriaksene

7.1 Lineær analyse

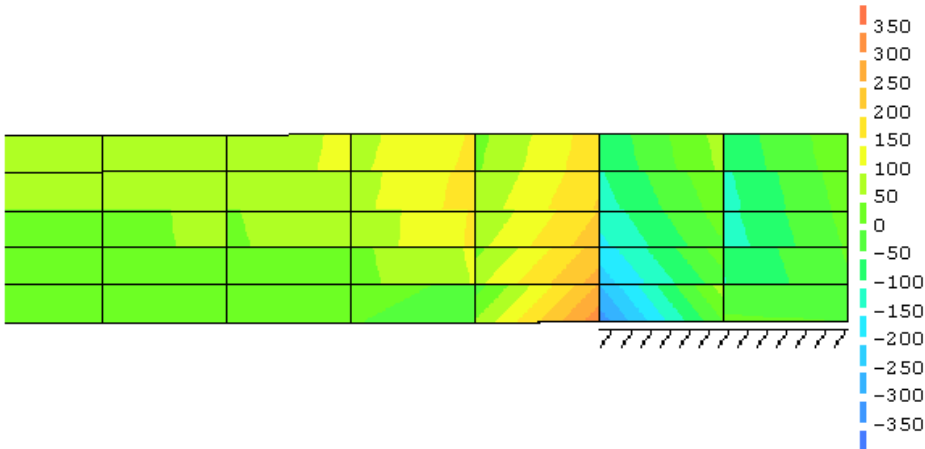
Dette delkapittelet presenterer relevante resultater fra den lineære analysen av konstruksjonen. Disse resultatene ligger til grunn for dimensjoneringen av armeringen som er gjennomført.

Momentvirkningene i skalltaket er presentert i figur 7.2. Utsnittene representerer en kvart del av takkonstruksjonen. Hjørneopplegget er nede i høyre hjørne av figurene og venstre kant av snittene sammenfaller med takets møne.

(a) Moment i tverretning, M_φ (b) Moment i lengderetning, M_x Figur 7.2: Momentvirkninger i skalltak [Nmm/mm](a) Membrankrefter tverretning, N_φ (b) Membrankrefter i lengderetning, N_x Figur 7.3: Membrankrefter i skalltak [kN/m]

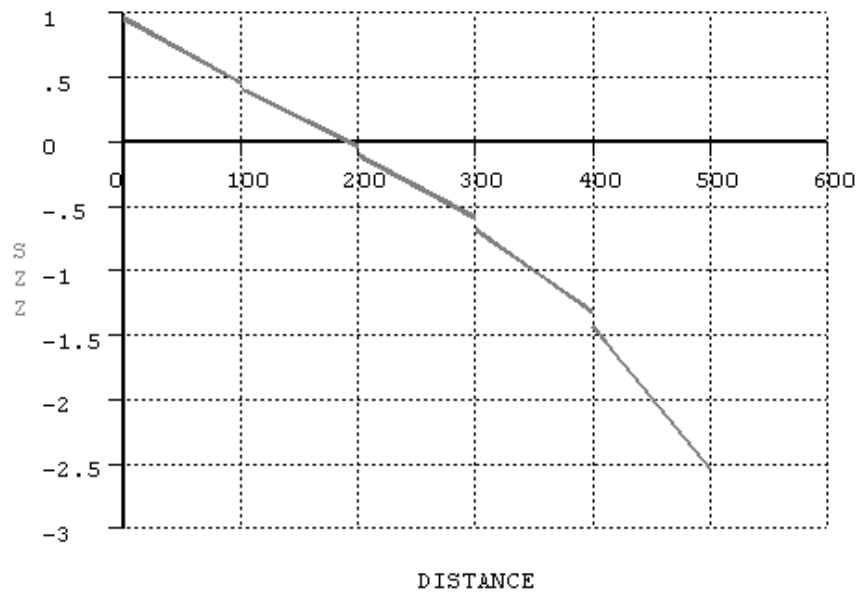


Figur 7.4: Skjærkrefter i randbjelke ved hjørneopplegg [kN/m]



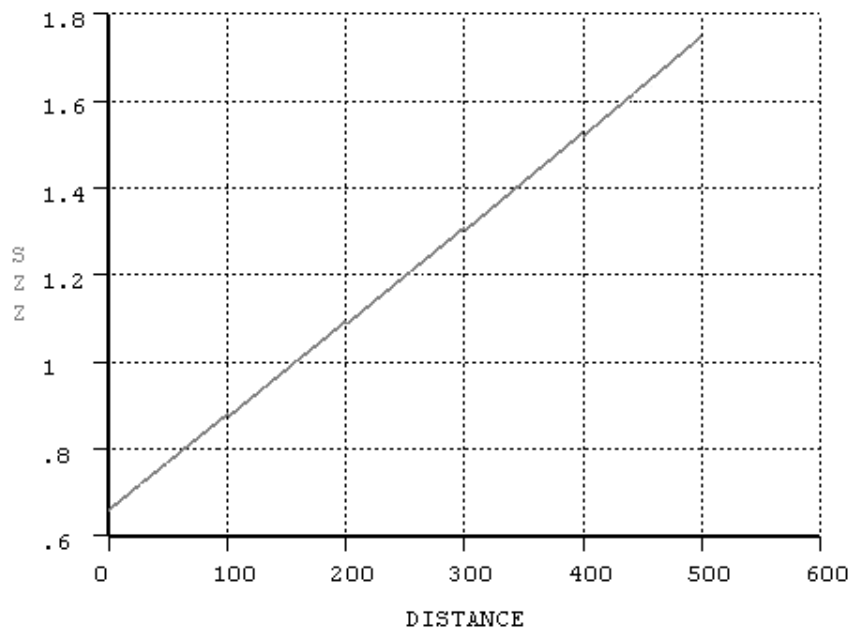
Figur 7.5: Skjærkrefter i randbjelke ved midtopplegg [kN/m]

Spenningsfordelingen over et snitt i randbjelkene ved et hjørneopplegg er presentert i 7.6. I diagrammet er bjelkens topp representert ved $x = 0$ og bjelkens underkant ved $x = 500$.



Figur 7.6: Spenningsfordeling over bjelkehøyden ved hjørneopplegg, σ [MPa]

Figur 7.7 presenterer spenningsfordelingen over et snitt i randbjelkene ved en lengde $L/4$ fra bjelkeende. I diagrammet er bjelkens topp representert ved $x = 0$ og bjelkens underkant ved $x = 500$.



Figur 7.7: Spenningsfordeling over bjelkehøyden ved lengde $L/4$ fra bjelkeende, σ [MPa]

7.2 Ikke-lineær analyse

7.2.1 Dimensjonering av armering

Det er gjennomført dimensjonering av nødvendig armering i skalltaket med randbjelker. De dimensjonerende lastvirkningene er basert på den lineære analysen og kan betraktes i kapittel 7.1. Armeringen av skalltaket er basert på opptredende momenter, mens armeringen av randbjelkene er basert på spenninger i kritiske snitt av bjelkene. Beregning av skjærarmering er basert på avlest maksimal skjærkraft i bjelkene. Nødvendig armering er oppsummert i tabell 7.2.

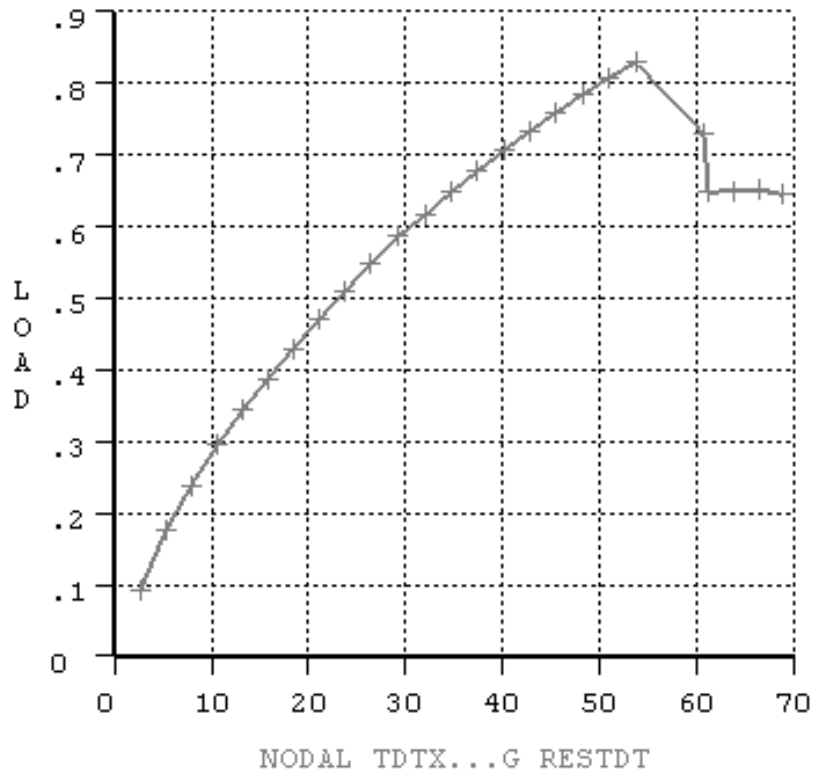
Dimensjoneringen er gjennomført med grunnlag i lineær elastisk teori og er i henhold til NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008. De gjennomførte beregninger er vist i vedlegg C.4. Beregningene er konservative, og det er ekstremalverdiene av lastvirkningene som benyttes for beregning av den nødvendige armeringen.

	Armeringstype	Nødvendig armering
Tak	Overkantarmring i lengderetning	182 $\frac{mm^2}{m}$
	Overkantarmring i tverretning	814 $\frac{mm^2}{m}$
	Underkantarmring i lengderetning	46 $\frac{mm^2}{m}$
	Underkantarmring i tverretning	334 $\frac{mm^2}{m}$
Bjelker	Underkantarmring	37 mm^2
	Overkantarmring ved hjørneopplegg	118 mm^2
	Skjærarmring	280 $\frac{mm^2}{m}$

Tabell 7.2: Nødvendig armering av skalltak med randbjelker

7.2.2 Resultater

Figur 7.8 viser relasjonen mellom påført last og forskyvning.



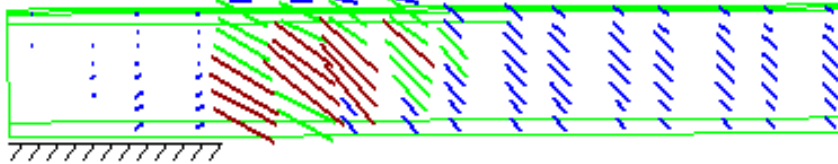
Figur 7.8: Lastfaktor i forhold til forskyvning [mm]

Tabell 7.3 viser verdier før og etter antatt skjærbrudd i randbjelkene.

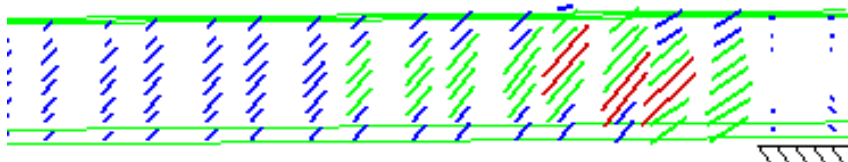
Laststeg nr.	Risstøyning	Andel av dim. last	Maksimal armeringsspenning
20	$2,03 \cdot 10^{-3}$	83%	159 MPa
21	$9,87 \cdot 10^{-3}$	73%	429 MPa

Tabell 7.3: Verdier ved antatt skjærbrudd i randbjelker

Figur 7.9 og 7.10 viser opprissing i randbjelkene ved henholdsvis hjørneoppleggene og midtoppleggene. Figurene viser risstøyningene normalt på rissretningen, hvor størrelse og lengde er vist som en vektor.



Figur 7.9: Opprissing i randbjelker ved hjørneopplegg



Figur 7.10: Opprissing i randbjelker ved midtopplegg

7.3 Diskusjon

Tabell 7.3 viser laststegene som representerer toppunktet, ved 0,83 ganger dimensjonerende last, på grafen i figur 7.8 og punktet til høyre for toppunktet. De presenterte risstøyningene er maksimale risstøyninger for konstruksjonen og oppstår ved kanten av hjørneoppleggene.

Basert på de resultater som framkommer i analysen, vil det være nærliggende å tro at konstruksjonens kapasitet begrenses av skjærbrudd i randbjelkene ved kanten av hjørneopplegget. Av rissutviklingen i figur 7.9 kan det observeres at rissene er størst fra oppleggskanten og på skrå oppover i bjelken, noe som kan karakteriseres som en typisk rissutvikling for skjærriss [7]. Ved siste laststeg før antatt brudd har de maksimale strekktøyningene i betongen nådd et kritisk høyt nivå. Som presentert i tabell 7.3, er tøyningene ved laststeg 21 over bruddtøyning.

Det observeres også rissutvikling ved randbjelkenes midtopplegg, se figur 7.10. Her observeres også den karakteristiske utviklingen som ved hjørneoppleggene, men rissviddene er mindre. Dette stemmer også overens med skjærkreftene som observeres ved oppleggene i den lineære analysen, der maksimal skjærkraft ved midtopplegget er noe lavere enn den maksimale skjærkraften ved hjørneoppleggene. Skjærkrefter er vist i figur 7.4 og 7.5.

Ved brudd oppstår et stort hopp i opptredende maksimal armeringsspenning, hvilket er presentert i tabell 7.3. Av ukjent grunn overskrides den fastsatte flytespenningen på 361 MPa.

Det er valgt å armere den krumme flaten med lik armering over hele arealet. Denne armeringen er dimensjonert ut fra maksimale lastvirkninger for flaten, og vil i store deler av flaten være overdimensjonert i forhold til de opptredende lastvirkninger i snittet. I praksis vil det være krav til minimumsarmering etter NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008.

Figur 7.3a viser at store deler av skallet står under trykk i tverretning. Det observeres i figur 7.2 at det primært er områdene rundt randbjelkenes opplegg at de store momentkreftene oppstår. Ved en optimalisering av konstruksjonen vil det derfor være aktuelt å dele skallet inn i flere soner der armeringen er tilpasset de lastvirkningene som opptrer innenfor hver av sonene. Det samme gjelder også randbjelkene, både med tanke på lengde- og skjærarmering.

Del IV

Avslutning

Kapittel 8

Konklusjon

I de to aksesymmetriske beregningseksempelene er det funnet et godt samsvar mellom den analytiske løsningen og FEM-analysen. De numeriske modellene er analysert ved å variere antall elementer og ulike elementtyper, for å se hvordan resultatene blir påvirket. Resultatene viser at det er avgjørende med fin elementinndeling der endringene i lastvirkningene er store, slik at skallkreftene beskrives på en god måte. Dette gjelder for eksempel i randområder mellom ulike skalltyper, og ved innspenninger og opplagringspunkter. Det observeres i de fleste tilfeller at den numeriske løsningen konvergerer mot den analytiske løsningen for økende antall elementer. Generelt gir CL9AX-elementer bedre resultater sammenlignet med L6AXI-elementer både med hensyn til nøyaktighet og konvergenshastighet.

Å analysere sammensatte skallkonstruksjoner analytisk er mer tidkrevende enn å modellere og beregne numerisk i DIANA. De numeriske løsningene viser seg å være tilfredstillende, og DIANA gir gode grafiske fremstillingsmuligheter for resultatene. Det er selvfølgelig nødvendig med relevant teorigrunnlag for å kunne vurdere resultatene.

I de ikke-lineære analysene oppstår det ulike bruddtyper ved de forskjellige beregningseksempelene. Det observeres flytning i armering, trykkbrudd og skjærbrudd.

Den ikke-lineære analysen av eksempel 2 viser at konstruksjonen oppfører seg ikke-lineært. Ved lasten 1,18 ganger dimensjonerende last flyter armeringen som lokaliseres i beholderen. Det er liten utnyttelsesgrad i armeringen over kuleskallet, samt i store deler av sylinderskallet. Dette skyldes konservativ dimensjonering med utgangspunkt i ekstremalverdier, og membrankreftene i kuleskallet reduserer behovet for armering.

Sylindertaket med fast innspente render tåler en last tilsvarende 11,0 ganger

dimensjonerende last. Trykkapasiteten til betongen er overskredet, hvilket indikerer at det er oppstått et trykkbrudd. Hele skalltaket har konstant armering i tverr- og lengderetning i hver av armeringslagene, hvilket gir liten utnyttelsesgrad i store deler av taket. Samtidig reduserer trykkreftene utnyttelsesgraden. Det utvikles riss på betongens overside og underside i de forventede områdene.

Den ikke-lineære analysen av det buede skalltaket med randbjelker viser at det oppstår et skjærbrudd i randbjelkene, noe som begrenser kapasiteten til konstruksjonen. Skjærbruddet inntreffer på 0,83 ganger dimensjonerende last. Det er presentert figurer som viser opprissingen i randbjelken, og rissutviklingen anses som karakteristisk for skjærriss.

Bibliografi

- [1] Kolbein Bell. *An engineering approach to finite element analysis of linear structural mechanics problems*. Akademika Publishing, 2013.
- [2] David P. Billington. *Thin shell concrete structures*. McGraw-Hill book company, 2. edition, 1982.
- [3] TNO DIANA BV. *User's Manual*. 9.4.4 edition.
- [4] K. Chandrashekhara. *Analysis of thin concrete shells*. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1986.
- [5] Linn Grepstad. *Numerisk simulering av betongkonstruksjoner med FEM-programmet DIANA - Lineære og ikke-lineære analyser*. Institutt for konstruksjonsteknikk, Masteroppgave 2006.
- [6] Svein Ivar Sørensen. *Beregningsgrunnlaget for betongkonstruksjoner, Del II, Aksesymmetriske skall*. 1999.
- [7] Svein Ivar Sørensen. *Betongkonstruksjoner*. Tapir Akademisk Forlag, 2010.
- [8] Svein Ivar Sørensen and Jan Arve Øverli. *TKT4222 Concrete structures 3 Autumn 2013 Compendium*.
- [9] Ansel C. Ugural. *Stresses in beams, plates, and shells*. CRC Press, 3. edition, 2009.
- [10] S. Woinowsky-Krieger and S. Timoshenko. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill book company, 2. edition, 1959.

Vedlegg

Vedlegg A

Oppgavetekst

MASTEROPPGAVE 2015

for

Ole Kristian Kirud

og

Torger Nordgården

Beregningsmetoder for betongskall

Analysis methods for concrete shells

Oppgaven går i korte trekk ut på følgende:

- Studere klassisk teori for aksesymmetriske skall, dvs. sylinder skall, kuleskall og sirkulære plater.
- Beregningseksempler med sammensatte skall.
- Benytte FEM-programmet DIANA for analyse av de samme eksemplene som er beregnet med klassisk teori. Vurdering av krav til elementmodeller for å oppnå tilfredsstillende resultater for effekt av randforstyrrelser.
- Dimensjonering (nødvendig armering) av et av eksemplene beregnet lineært elastisk med de aktuelle metodene.
- Ikke-lineær beregning av det siste eksempelet med DIANA.
- Dimensjonering (nødvendig armering) og analyse av buet skalltak i DIANA

Besvarelsen organiseres i henhold til gjeldende retningslinjer.

Veileder: Professor Svein Ivar Sørensen

Besvarelsen skal leveres til Institutt for konstruksjonsteknikk innen 10. juni 2015.

NTNU, 14. januar, 2015

Svein Ivar Sørensen
faglærer

Vedlegg B

Beregninger knyttet til analytiske løsninger

B.1 Analytisk løsning - eksempel 1

Nødvendige data

$$\begin{aligned}L &:= 6000 \text{ mm} & p &:= 120 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} & E &:= 30000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\r &:= 4000 \text{ mm} & g_p &:= 7.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} & \nu &:= 0.2 \\h_p &:= 300 \text{ mm} & q_p &:= p - g_p = 112.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \\h_s &:= 200 \text{ mm}\end{aligned}$$

Innspenning sylinderbunn

$$D_s := \frac{E \cdot h_s^3}{12 (1 - \nu^2)} = (2.08 \cdot 10^{10}) \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$D_p := \frac{E \cdot h_p^3}{12 (1 - \nu^2)} = (7.03 \cdot 10^{10}) \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$l_e := \frac{\sqrt{r \cdot h_s}}{(3 (1 - \nu^2))^{\frac{1}{4}}} = 687 \text{ mm}$$

$$L_c := \pi \cdot l_e = 2157 \text{ mm}$$

$$2 \cdot L_c = 4314 \text{ mm}$$

$$2 \cdot L_c < L$$

$$g_1(\xi) := e^{-\xi} \cdot \cos(\xi)$$

$$g_2(\xi) := e^{-\xi} \cdot \sin(\xi)$$

$$g_3(\xi) := g_1(\xi) + g_2(\xi)$$

$$g_4(\xi) := g_1(\xi) - g_2(\xi)$$

$$w_p := \frac{p \cdot r^2}{E \cdot h_s}$$

$$w_h := \frac{l_e^2}{2 \cdot D_s} (M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_1(\xi))$$

$$\xi := 0$$

$$\frac{dw_{tot}}{dx} = \frac{dw_p}{dx} + \frac{dw_h}{dx} = -(2 \cdot M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0$$

$$w_{tot} = \frac{p \cdot r^2}{E \cdot h_s} + \frac{l_e^2}{2 \cdot D_s} (M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0$$

$$M_0 := \frac{p \cdot l_e^2}{2} = 28.28 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$V_0 := -p \cdot l_e = -82.39 \frac{kN}{m}$$

$$M_x(\xi) := \frac{p \cdot l_e^2}{2} \cdot g_4(\xi)$$

$$V_x(\xi) := -p \cdot l_e \cdot g_1(\xi)$$

$$N_\varphi(\xi) := p \cdot r \cdot (1 - g_3(\xi))$$

Dreining ved platerand

$$\theta_q := \frac{q_p \cdot r^3}{16 \cdot D_p} \cdot \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - 1 \right) = 10.7 \cdot 10^{-3}$$

$$\theta_M := \frac{M_a \cdot r}{D_p \cdot (1 + \nu)}$$

Randbetingelse 1: Samme dreining av sylinder og platerand

$$\frac{dw_h(0)}{dx} = -\theta_q - \theta_M$$

$$\frac{l_e}{2 \cdot D_s} \cdot (-2 \cdot M_0 - V_0 \cdot l_e) = -10.7 \cdot 10^{-3} + \frac{M_a \cdot r}{D_p \cdot (1 + \nu)}$$

Randbetingelse 2: Platen antas uendelig stiv i planet

$$w_{tot}(0) = w_p + w_h(0) = 0$$

$$\frac{p \cdot r^2}{E \cdot h_s} + \frac{l_e^2}{2 \cdot D_s} \cdot (M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0$$

Randmoment i sylinder og plate må være like:

$$M_a := M_0$$

$$\frac{l_e}{2 \cdot D_s} (-2 M_0 - V_0 \cdot l_e) = -1.07 \cdot 10^{-2} + 4.742 \cdot 10^{-8} \cdot M_0$$

$$\frac{p \cdot r^2}{E \cdot h_s} + \frac{l_e^2}{2 \cdot D_s} \cdot (M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0$$

$$M_0 := 1$$

$$V_0 := 1$$

given

$$1.651 \cdot 10^{-8} (-2 M_0 - V_0 \cdot 687) = -1.07 \cdot 10^{-2} + 4.742 \cdot 10^{-8} \cdot M_0$$

$$0.32 + 1.1345 \cdot 10^{-5} \cdot (M_0 + V_0 \cdot 687) = 0$$

$$\mathbf{find} (M_0, V_0) = \begin{bmatrix} 174654.9 \\ -295.3 \end{bmatrix}$$

Skallstørrelsene beregnet fra sylindertopp og nedover i sylinder.

$$M_x(\xi) := M_0 \cdot g_3(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_2(\xi) = 174.7 \cdot g_3(\xi) - 202.9 \cdot g_2(\xi)$$

$$V_x(\xi) = \frac{1}{l_e} (-2 \cdot M_0 \cdot g_2(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_4(\xi)) = -508.5 \cdot g_2(\xi) - 295.3 \cdot g_4(\xi)$$

$$N_\varphi = p \cdot r + \frac{2 \cdot r}{l_e^2} \cdot (M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_1(\xi)) = 480 + 2961 \cdot g_4(\xi) - 3439 \cdot g_1(\xi)$$

Moment- og skjærkraftfordeling i plate

$$M_r = \frac{q_p}{16} (3 + \nu) \cdot (4^2 - r^2) - M_a = 22.5 (16 - r^2) - 174.7$$

$$M_t = \frac{q_p}{16} \cdot (4^2 (3 + \nu) - r^2 \cdot (1 + 3 \nu)) - M_a = 7.03 (51.2 - 1.6 \cdot r^2) - 174.7$$

$$V = \frac{q_p}{2} \cdot r = 56.25 \cdot r$$

B.2 Analytisk løsning - eksempel 2

Nødvendige data

$$L := 7000 \text{ mm}$$

$$\rho_w := 10 \frac{kN}{m^3}$$

$$r := 16000 \text{ mm}$$

$$\rho_c := 25 \frac{kN}{m^3}$$

$$a := 8000 \text{ mm}$$

$$h_k := 150 \text{ mm}$$

$$E := 34000 \frac{N}{mm^2}$$

$$h_s := 200 \text{ mm}$$

$$\nu := 0.2$$

$$p(x) := \rho_w \cdot (L - x)$$

Sylinder

$$D_s := \frac{E \cdot h_s^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = (2.361 \cdot 10^{10}) \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$l_e := \frac{\sqrt{a \cdot h_s}}{(3 \cdot (1 - \nu^2))^{\frac{1}{4}}} = 971 \text{ mm}$$

$$L_c := \pi \cdot l_e = 3050 \text{ mm}$$

$$2 \cdot L_c = 6101 \text{ mm}$$

$$2 \cdot L_c < L$$

$$\xi(x) := \frac{x}{l_e}$$

$$g_1(\xi) := e^{-\xi} \cdot \cos(\xi)$$

$$g_2(\xi) := e^{-\xi} \cdot \sin(\xi)$$

$$g_3(\xi) := g_1(\xi) + g_2(\xi)$$

$$g_4(\xi) := g_1(\xi) - g_2(\xi)$$

$$w_p(\xi) := \frac{p(x) \cdot a^2}{E \cdot h_s}$$

$$w_h(\xi) := \frac{l_e^2}{2 \cdot D_s} (g_A(\xi) \cdot M_0 + g_1(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e)$$

$$w_{tot}(\xi) := w_p(\xi) + w_h(\xi)$$

Sylinderen er innspent i bunnen, som vil si at forskyvning og rotasjonen er lik null.

$$\xi := 0$$

$$w_{tot}(0) = \frac{p(0) a^2}{E \cdot h_s} + \frac{l_e^2}{2 D_s} (M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0$$

$$\frac{dw_{tot}(0)}{dx} = \frac{dp(0)}{dx} \cdot \frac{a^2}{E \cdot h_s} + \frac{l_e}{2 D_s} \cdot (2 \cdot M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0$$

$$M_0 := 1$$

$$V_0 := 1$$

given

$$0.64612 + 1.9967 \cdot 10^{-5} (M_0 + V_0 \cdot 971) = 0$$

$$-9.2329 \cdot 10^{-5} + 2.0563 \cdot 10^{-8} (-2 M_0 - V_0 \cdot 971) = 0$$

$$\mathbf{Find} (M_0, V_0) = \begin{bmatrix} 27869.338 \\ -62.028 \end{bmatrix}$$

Kuleligninger

$$D_k := \frac{E \cdot h_k^3}{12 (1 - \nu^2)} = (9.961 \cdot 10^9) \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$g_k := \rho_c \cdot h_k$$

$$Z(\varphi) := g_k \cdot \cos(\varphi)$$

$$N_{\varphi m}(\varphi) := -\frac{\rho_c \cdot r \cdot h_k}{1 + \cos(\varphi)} \qquad N_{\varphi m}(30 \text{ deg}) = -32.154 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$N_{\theta} = -N_{\varphi} - Z(\varphi) \cdot r$$

$$N_{\theta} = -\frac{-2 \pi \cdot r^2 \cdot \rho_c \cdot h_k (1 - \cos(\varphi))}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot (\sin(\varphi))^2} - \rho_c \cdot h_k \cdot \cos(\varphi) \cdot r$$

$$N_{\theta} = \frac{\rho_c \cdot r \cdot h_k}{1 + \cos(\varphi)} - \rho_c \cdot h_k \cdot \cos(\varphi) \cdot r$$

$$N_{\theta m}(\varphi) := \rho_c \cdot r \cdot h_k \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos(\varphi)} - \cos(\varphi) \right) \qquad N_{\theta m}(30 \text{ deg}) = -19.808 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{N_{\theta m} - \nu \cdot N_{\varphi m}}{E \cdot h_k}$$

$$\varepsilon_{\theta}(\varphi) := \frac{\rho_c \cdot r}{E} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos(\varphi)} - \cos(\varphi) \right)$$

$$\delta_m(\varphi) := \varepsilon_{\theta}(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\varphi)$$

$$\delta_m(30 \text{ deg}) = -0.021 \text{ mm}$$

$$\alpha_m(\varphi) = \cot(\varphi) \cdot (\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_{\theta}) - \frac{d\varepsilon_{\theta}}{d\varphi}$$

der

$$\frac{d\varepsilon_{\theta}}{d\varphi} = \frac{\rho_c \cdot r}{E} \cdot \sin(\varphi) \left(\frac{1 + \nu}{(1 + \cos(\varphi))^2} + 1 \right)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E \cdot h_k} (N_\theta - \nu \cdot N_\varphi)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\rho_c \cdot r \cdot h_k}{E \cdot h_k} \left(-\frac{1}{1 + \cos(\varphi)} - \frac{\nu}{1 + \cos(\varphi)} + \nu \cdot \cos(\varphi) \right)$$

$$\varepsilon_\varphi(\varphi) := -\frac{\rho_c \cdot r}{E} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos(\varphi)} - \nu \cdot \cos(\varphi) \right)$$

$$\alpha_m(\varphi) := -\frac{\rho_c \cdot r}{E} \cdot \sin(\varphi) \cdot (2 + \nu)$$

$$\alpha_m(30 \text{ deg}) = -1.294 \cdot 10^{-5}$$

Tillegg i partikulærløsningen finnes ved bruk homogenløsning ved $t=0$, $R_0=-H$ og $M_0=0$.

$$H(\varphi) := N_{\varphi m}(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

$$H(30 \text{ deg}) = -27.846 \frac{N}{mm}$$

$$\lambda := \sqrt[4]{3 (1 - \nu^2) \frac{r^2}{h_k^2}} = 13.454$$

$$\delta'(\varphi) := \frac{\lambda \cdot r \cdot \sin(\varphi)}{E \cdot h_k} (-2 \cdot H(\varphi) \cdot \sin(\varphi))$$

$$\delta'(30 \text{ deg}) = 0.588 \text{ mm}$$

$$\alpha'(\varphi) := \frac{2 \cdot \lambda^2}{E \cdot h_k} (H(\varphi) \cdot \sin(\varphi))$$

$$\alpha'(30 \text{ deg}) = -9.884 \cdot 10^{-4}$$

Homogenløsning:

$$g_1(t) := e^{-t} \cdot \cos(t)$$

$$g_2(t) := e^{-t} \cdot \sin(t)$$

$$g_3(t) := g_1(t) + g_2(t)$$

$$g_4(t) := g_1(t) - g_2(t)$$

$$\delta_h(t, \varphi) := \frac{\lambda \cdot r \cdot \sin(\varphi)}{E \cdot h_k} \left(2 \cdot g_1(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right)$$

$$\alpha_h := \frac{2 \cdot \lambda^2}{E \cdot h_k} \left(-g_3(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) - g_1(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right)$$

$$\delta_p(\varphi) := \delta_m(\varphi) + \delta'(\varphi)$$

$$\delta_p(30 \text{ deg}) = 0.567 \text{ mm}$$

$$\alpha_p(\varphi) := \alpha_m(\varphi) + \alpha'(\varphi)$$

$$\alpha_p(30 \text{ deg}) = -0.001$$

$$\delta_{tot} = \delta_p + \delta_h$$

$$\alpha_{tot} = \alpha_p + \alpha_h = (\alpha + \alpha') + \alpha_h$$

I sammenkoblingen må den horisontale forskyvningen og vinkelendringen være lik for beholderen og kuletaket. Dette gir følgende randbetingelser og sammenhenger:

$$w_{tot}(0) - \delta_{tot}(0) = 0$$

$$\frac{dw_{tot}(0)}{dx} + \alpha_{tot}(0) = 0$$

$$M_{0s} = M_{0k}$$

$$V_{0s} = -R_0$$

Ved å benytte sammenhengene mellom forskyvning og vinkelendring, får man følgende ligninger:

$$\frac{l_e^2}{2 D_s} (M_0 + V_0 \cdot l_e) = \frac{\lambda \cdot r \cdot \sin(\varphi)}{E \cdot h_k} \left(2 \cdot g_1(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right) + \delta_p(\varphi)$$

$$\frac{dp(x)}{dx} \cdot \frac{a^2}{E \cdot h_s} + \frac{l_e}{2 D_s} (-2 M_0 - V_0 \cdot l_e) = \frac{2 \cdot \lambda^2}{E \cdot h_k} \left(-g_3(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) - g_1(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right) + \alpha_p(\varphi)$$

Innsetting av verdier og sammenhengen mellom skjærkraft i sylindere og kule, gir randstørrelsene ved sammenkoblingen.

$$t := 0 \quad \varphi := 30 \text{ deg}$$

$$M_0 := 1 \quad V_0 := 1$$

$$R_0 := 1$$

given

$$1.997 \cdot 10^{-5} (M_0 - R_0 \cdot 971) = 0.0211 (R_0 + M_0 \cdot 1.682 \cdot 10^{-3}) + 0.567$$

$$9.2329 \cdot 10^{-5} + 2.056 \cdot 10^{-8} (-2 \cdot M_0 + R_0 \cdot 971) = -(7.0984 \cdot 10^{-5} (-R_0 \cdot 0.5 - M_0 \cdot 1.682 \cdot 10^{-3}) - 0.001)$$

$$V_0 = -R_0$$

$$\mathbf{Find}(M_0, V_0, R_0) = \begin{bmatrix} -4465.7 \\ 12.3 \\ -12.3 \end{bmatrix}$$

Moment -og kraftforløp i sylinder, men ulike M_0 og V_0 for bunn og topp.

$$M_x(\xi) = g_3(\xi) \cdot M_0 + g_2(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e$$

$$V_x(\xi) = \frac{1}{l_e} (-2 \cdot g_2(\xi) \cdot M_0 + g_4(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e)$$

$$N_\varphi(\xi) = \frac{2 \cdot a}{l_e^2} (g_4(\xi) \cdot M_0 + g_1(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e)$$

Moment -og kraftforløp i kuleskallet

Ved beregning av totale moment -og kraftforløp må den totale partikulære løsningen summeres med den homogene løsningen.

$$M_{\varphi h}(t) = \frac{2 \lambda^3 \cdot D_k}{E \cdot h_k \cdot r} \left(2 \cdot g_2(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) + g_3(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right)$$

$$M'_\varphi(t) = \frac{2 \lambda^3 \cdot D_k}{E \cdot h_k \cdot r} (-2 \cdot g_2(t) \cdot H \cdot \sin(\varphi))$$

$$M_\varphi(t) = M_{\varphi h}(t) + M'_\varphi(t)$$

$$M_\varphi(t) = \frac{4 \lambda^3 \cdot D_k}{E \cdot h_k \cdot r} (g_2(t) \cdot (R_0 - H) \cdot \sin(\varphi)) + g_3(t) \cdot M_0$$

$$M_\theta(t) = \nu \cdot M_\varphi(t)$$

$$V_{\varphi h}(t) = -g_4(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) + g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k}$$

$$V'_\varphi(t) = g_4(t) \cdot H \cdot \sin(\varphi)$$

$$V_\varphi(t) = V_{\varphi h}(t) + V'_\varphi(t)$$

$$V_\varphi(t) = g_4(t) \cdot (H - R_0) \cdot \sin(\varphi) + g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k}$$

$$N_{\varphi h}(t) = \frac{1}{\tan(\varphi)} \left(g_4(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) - g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right)$$

$$N'_{\varphi}(t) = \frac{1}{\tan(\varphi)} (-g_4(t) \cdot H \cdot \sin(\varphi))$$

$$N_{\varphi}(t) = N_{\varphi h}(t) + N'_{\varphi}(t) + N_{\varphi m}(\varphi)$$

$$N_{\varphi}(t) = \frac{1}{\tan(\varphi)} \left(g_4(t) \cdot (R_0 - H) \cdot \sin(\varphi) - g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right) + N_{\varphi m}(\varphi)$$

$$N_{\theta h}(t) = \lambda \left(2 \cdot g_1(t) \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right)$$

$$N'_{\theta}(t) = \lambda (-2 \cdot g_1(t) \cdot H \cdot \sin(\varphi))$$

$$N_{\theta}(t) = N_{\theta h}(t) + N'_{\theta}(t) + N_{\theta m}(\varphi)$$

$$N_{\theta}(t) = \lambda \left(2 \cdot g_1(t) \cdot (R_0 - H) \cdot \sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k} \right) + N_{\theta m}(\varphi)$$

Vedlegg C

Dimensjonering av armering

C.1 Dimensjoneringsregler

Dimensjonerende trykkfasthet i betong:

$$f_{cd} := \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_C}$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
3.1.6(1)

Dimensjonerende strekkfasthet i betong:

$$f_{ctd} := \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ctk.0.05}}{\gamma_C}$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
3.1.6(2)

Dimensjonerende flytespenning i armering:

$$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

Betongkonstruksjoner [7]

Momentkapasitet normalarmert tverrsnitt:

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$$

Betongkonstruksjoner [7]

Beregningsmessig nødvendig armering:

$$A_{s.M} := \frac{M_{Ed}}{f_{yd} \cdot z}$$

Betongkonstruksjoner [7]

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} \right) \cdot d$$

$$z \leq 0.95 \cdot d$$

Beregningsmessig nødvendig ringarmering:

$$A_{s.N} := \frac{N_{Ed}}{f_{yd}}$$

Betongkonstruksjoner [7]

Minimumsarmering:

$$A_{s.min} := 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
NA.9.2.1.1(1)

$$A_{s.min} \geq 0.0013 \cdot b_t \cdot d$$

Dimensjonerende skjærstrekkkapasitet:

$$V_{Rd.c} := C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot b_w \cdot d$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
6.2.2(1)

$$C_{Rd.c} := \frac{0.18}{\gamma_c}$$

$$k := \min\left(1 + \sqrt{1 + \frac{200}{d}}, 2\right)$$

$$\rho_l := \min\left(\frac{A_{sl}}{b \cdot d}, 0.002\right)$$

Skjærkraftkapasitet med vertikal skjærarmring:

$$V_{Rd.s} := \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{ywd} \cdot \cot\theta$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
6.2.3(3)

Krav til minste overdekning:

$$c_{nom} := c_{min} + \Delta c_{dev}$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
4.4.1.1(2)

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
Tabell NA.4.4N

$$c_{min}$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
NA.4.4.1.3(1)

$$\Delta c_{dev}$$

Faktorer benyttet:

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
NA.3.1.6(1)

$$\alpha_{cc} := 0.85$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
NA.3.1.6(2)

$$\gamma_c := 1.5$$

NS-EN 1992-1-1:2004/NA2008
NA.2.4.2.4(1)

$$\gamma_s := 1.15$$

C.2 Dimensjonering av armering - eksempel 2

Nødvendige data

$$h_s := 200 \text{ mm}$$

$$f_{yk} := 500 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$h_k := 150 \text{ mm}$$

$$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{1.15} = 435 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$b := 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$$

$$f_{ck} := 35 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$E := 34000 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$f_{cd} := 0.85 \cdot \frac{f_{ck}}{1.5} = 19.833 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$c_{min} := 25 \text{ mm}$$

$$c_{dev} := 10 \text{ mm}$$

$$f_{ctm} := 3.2 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$c_{nom} := c_{min} + c_{dev} = 35 \text{ mm}$$

Sylinderbunn

Ringarmering

$$d := h_s - c_{nom} = 165 \text{ mm}$$

$$N_{\varphi.bunn} := 375.5 \frac{kN}{\text{m}}$$

$$A_{s\varphi.bunn} := \frac{N_{\varphi.bunn}}{f_{yd}} = 864 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$A_{s\varphi.bunn.min} := 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d = 275 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$A_{s\varphi.bunn} > A_{s\varphi.bunn.min}$$

Bøyearmering i indre lag

$$M_{bunn.indre} := 27.87 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - c_{nom} = 165 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 148.49 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{bunn.indre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right) = 157 \text{ mm}$$

$$A_{s.bunn.indre} := \frac{M_{bunn.indre}}{f_{yd} \cdot z} = 409 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min.indre} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right)$$

$$A_{s.min.indre} = 275 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.bunn.indre} > A_{s.min.indre}$$

Bøyearmering i ytre lag

$$M_{bunn.ytre} := 6.67 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - c_{nom} = 165 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 148.49 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{bunn.ytre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right)$$

$$z = 157 \text{ mm}$$

$$A_{s.bunn.ytre} := \frac{M_{bunn.ytre}}{f_{yd} \cdot z} = 98 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min} := \max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d\right)$$

$$A_{s.min} = 275 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.bunn.ytre} < A_{s.min}$$

Skjærstrekkapasitet

$$V_{Ed.bunn} := 62.03 \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := \min\left(1 + \sqrt{\frac{200 \cdot mm}{d}}, 2.0\right) = 2$$

$$\rho_L := \min\left(\frac{A_{s.bunn.indre}}{b \cdot d}, 0.02\right) = 0.00248$$

$$V_{Rd.c} := C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d$$

$$V_{Rd.c} := 81.21 \frac{kN}{m}$$

$$V_{Ed.bunn} < V_{Rd.c}$$

Sylindertopp

Ringarmering

$$d := h_s - c_{nom}$$

$$N_{\varphi.topp} := 375.5 \frac{kN}{m}$$

$$A_{s\varphi.topp} := \frac{N_{\varphi.bunn}}{f_{yd}} = 864 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s\varphi.topp.min} := 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d = 275 \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i indre lag

$$M_{topp.indre} := 4.46 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - c_{nom} = 165 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 148.49 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{topp.indre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right) = 157 \text{ mm}$$

$$A_{s.topp.indre} := \frac{M_{topp.indre}}{f_{yd} \cdot z} = 65 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min.indre} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right)$$

$$A_{s.min.indre} = 275 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.topp.indre} < A_{s.min.indre}$$

Bøyearmering i ytre lag

$$M_{topp.ytre} := 0.19 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - c_{nom} = 165 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 148.49 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{bunn.ytre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right)$$

$$z = 157 \text{ mm}$$

$$A_{s.topp.ytre} := \frac{M_{topp.ytre}}{f_{yd} \cdot z} = 3 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min.ytre} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right)$$

$$A_{s.min.ytre} = 275 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.topp.ytre} < A_{s.min.ytre}$$

Skjærstrekkapasitet

$$V_{Ed.topp} := 12.3 \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := \min\left(1 + \sqrt{\frac{200 \cdot mm}{d}}, 2.0\right) = 2$$

$$\rho_L := \min\left(\frac{A_{s.topp.indre}}{b \cdot d}, 0.02\right) = 0.0004$$

$$V_{Rd.c} := C_{Rd.c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d$$

$$V_{Rd.c} := 71.25 \frac{kN}{m}$$

$$V_{Ed.topp} < V_{Rd.c}$$

Kuleskall

$$d := h_k - c_{nom} = 115 \text{ mm}$$

$$N_\theta := 18.69 \frac{kN}{m}$$

$$A_{s,\theta N} := \frac{N_\theta}{f_{yd}} = 43 \frac{mm^2}{m}$$

$$N_\varphi := 88.29 \frac{kN}{m}$$

$$A_{s,\varphi N} := \frac{N_\varphi}{f_{yd}} = 203 \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i indre lag i meridianretning

$$M_{\varphi,indre} := 0.99 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 72.13 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{\varphi,indre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right) = 109 \text{ mm}$$

$$A_{s,\varphi M} := \frac{M_{\varphi,indre}}{f_{yd} \cdot z} = 21 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,\varphi N} = 203 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,\varphi,indre} := A_{s,\varphi M} + A_{s,\varphi N} = 224 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,min,indre} := \max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d\right)$$

$$A_{s,min,indre} = 191 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,\varphi,indre} > A_{s,min,indre}$$

Bøyearmering i ytre lag i kulas meridianretning

$$M_{\varphi,ytre} := 4.46 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_k - c_{nom} = 115 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 72.131 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min\left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{\varphi,ytre}}{M_{Rd}}\right) \cdot d, 0.95 \cdot d\right)$$

$$z = 109 \text{ mm}$$

$$A_{s,\varphi,ytre} := \frac{M_{\varphi,ytre}}{f_{yd} \cdot z} = 94 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,min,ytre} := \max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d\right)$$

$$A_{s,min,ytre} = 191 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,\varphi,ytre} < A_{s,min,ytre}$$

Bøyearmering i indre lag i ringretning

$$M_{\theta.indre} := 0.2 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_k - c_{nom} = 115 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 72.131 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{\theta.indre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right) = 109 \text{ mm}$$

$$A_{s.\theta M} := \frac{M_{\theta.indre}}{f_{yd} \cdot z} = 4 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.\theta N} = 43 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.\theta.indre} := A_{s.\theta M} + A_{s.\theta N} = 47 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min.indre} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right)$$

$$A_{s.min.indre} = 191 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.\theta.indre} < A_{s.min.indre}$$

Bøyearmering i ytre lag i ringretning

$$M_{\theta.ytre} := 0.89 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_k - c_{nom} = 115 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 72.131 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{\theta.ytre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right) = 109 \text{ mm}$$

$$A_{s,\theta,ytre} := \frac{M_{\theta,ytre}}{f_{yd} \cdot z} = 19 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,min,ytre} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right)$$

$$A_{s,min,ytre} = 191 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s,\theta,ytre} < A_{s,min,ytre}$$

Skjærstrekkapasitet

$$V_{Ed,kule} := 7.77 \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd,c} := 0.12$$

$$k := \min \left(1 + \sqrt{\frac{200 \cdot mm}{d}}, 2.0 \right) = 2$$

$$\rho_l := \min \left(\frac{A_{s,\varphi,indre}}{b \cdot d}, 0.02 \right) = 0.00195$$

$$V_{Rd,c} := C_{Rd,c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d$$

$$V_{Rd,c} := 52.33 \frac{kN}{m}$$

$$V_{Ed,kule} < V_{Rd,c}$$

C.3 Dimensjonering av armering - eksempel 3

Nødvendige data

$$h_s := 80 \text{ mm}$$

$$b := 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$$

$$f_{ck} := 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{cd} := 0.85 \cdot \frac{f_{ck}}{1.5} = 14.17 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{ctm} := 2.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{yk} := 415 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{1.15} = 361 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$E := 25000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$d := 55 \text{ mm}$$

Tverretning

Bøyearmering i indre lag

$$M_{indre} := 1.45 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 11.785 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{indre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right) = 52 \text{ mm}$$

$$A_{s,indre} := \frac{M_{indre}}{f_{yd} \cdot z} = 77 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$A_{s.min.indre} := \max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d\right)$$

$$A_{s.min.indre} = 90 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.indre} < A_{s.min.indre}$$

Bøyearmering i ytre lag

$$M_{ytre} := 0.64 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 11.785 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min\left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{ytre}}{M_{Rd}}\right) \cdot d, 0.95 \cdot d\right)$$

$$z = 52 \text{ mm}$$

$$A_{s.ytre} := \frac{M_{ytre}}{f_{yd} \cdot z} = 34 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min} := \max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d\right)$$

$$A_{s.min} = 90 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.ytre} < A_{s.min}$$

Skjærstrekkapasitet

$$V_{bunn} := 2.3 \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := \min \left(1 + \sqrt{\frac{200 \cdot mm}{d}}, 2.0 \right) = 2$$

$$\rho_L := \min \left(\frac{A_{s.min}}{b \cdot d}, 0.02 \right) = 0.00163$$

$$V_{Rd.c} := C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d$$

$$V_{Rd.c} := 21.1 \frac{kN}{m}$$

Lengderetning

Bøyearmering i indre lag

$$M_{indre} := 0.23 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 11.785 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min \left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{indre}}{M_{Rd}} \right) \cdot d, 0.95 \cdot d \right) = 52.25 \text{ mm}$$

$$A_{s.topp.indre} := \frac{M_{indre}}{f_{yd} \cdot z} = 12 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min.indre} := \max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d\right)$$

$$A_{s.min.indre} = 90 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.indre} < A_{s.min.indre}$$

Bøyearmering i ytre lag

$$M_{ytre} := 0.1 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 11.78 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := \min\left(\left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{ytre}}{M_{Rd}}\right) \cdot d, 0.95 \cdot d\right) = 52 \text{ mm}$$

$$A_{s.ytre} := \frac{M_{ytre}}{f_{yd} \cdot z} = 5 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min.ytre} := \max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d\right)$$

$$A_{s.min.ytre} = 90 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.ytre} < A_{s.min.ytre}$$

C.4 Dimensjonering av armering - eksempel 4

Dimensjonering av randbjelke

$$b := 250 \text{ mm}$$

$$f_{ck} := 25 \frac{N}{mm^2}$$

$$h := 500 \text{ mm}$$

$$f_{cd} := 0.85 \cdot \frac{f_{ck}}{1.5} = 14.17 \frac{N}{mm^2}$$

$$d := 450 \text{ mm}$$

$$f_{yk} := 415 \frac{N}{mm^2}$$

$$A_c := b \cdot h = 125000 \text{ mm}^2$$

$$W_c := \frac{b \cdot h^2}{6} = (10 \cdot 10^6) \text{ mm}^3$$

$$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{1.15} = 361 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{ctm} := 2.6 \frac{N}{mm^2}$$

Midtfelt ved L/4 fra bjelkeende

$$\sigma_{max} := 1.75 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{min} := 0.65 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_M := \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 0.55 \frac{N}{mm^2}$$

$$M_{Ed} := \sigma_M \cdot W_c = 5.73 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 197.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$z := \min \left(0.95 \cdot d, \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} \right) \cdot d \right) = 428 \text{ mm}$$

$$A_{s.M} := \frac{M_{Ed}}{f_{yd} \cdot z} = 37 \text{ mm}^2$$

Endeopplegg bjelke:

$$\sigma_{max} := 0.973 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{min} := -2.53 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_M := \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 1.75 \frac{N}{mm^2}$$

$$M_{Ed} := \sigma_M \cdot W_c = 18.24 \text{ kN} \cdot m$$

$$z := \min \left(0.95 \cdot d, \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} \right) \cdot d \right) = 428 \text{ mm}$$

$$A_s := \frac{M_{Ed}}{f_{yd} \cdot z} = 118 \text{ mm}^2$$

$$A_{s,min} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right) = 183 \text{ mm}^2$$

Skjærstrekkapasitet

$$b := 250 \text{ mm} \quad A_{sl} := A_s = 118 \text{ mm}^2$$

$$d := 450 \text{ mm}$$

$$v_{Ed} := 374 \frac{kN}{m}$$

$$V_{Ed} := v_{Ed} \cdot h = 187 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,c} := C_{Rd,c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d$$

$$C_{Rd,c} := 0.12$$

$$k := \min\left(1 + \sqrt{\frac{200 \cdot \text{mm}}{d}}, 2\right) = 1.67$$

$$\rho_L := \min\left(\frac{A_{st}}{b \cdot d}, 0.002\right) = 0.001$$

$$V_{Rd.c} := 30.6 \text{ kN}$$

$V_{Ed} > V_{Rd}$ Behov for skjærarmering

$$\cot\theta := 2.5$$

$$z := 0.83 \cdot d = 374 \text{ mm}$$

$$V_{Rd.s} := \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cot\theta = V_{Ed}$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{ywd} \cdot \cot\theta} = 0.28 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

Dimensjonering av sylindertak

$$h := 80 \text{ mm} \qquad d := 55 \text{ mm}$$

$$b := 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}} \qquad h' := 30 \text{ mm}$$

Bøyearmering i tverretning

$$M_{\text{max.overside}} := -13.92 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

$$M_{\text{max.underside}} := 4.38 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

$$M_{Rd} := 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 = 11.78 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

Bøyearmering overside

$$M_{max.overside} > M_{Rd} \quad \text{Behøver trykkarmering}$$

$$z := 0.83 \cdot d = 46 \text{ mm}$$

$$A_{s.overside} := \frac{M_{Rd}}{f_{yd} \cdot z} = 715 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Bøyearmering underside

$$z := \min \left(0.95 \cdot d, \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{max.underside}}{M_{Rd}} \right) \cdot d \right) = 52 \text{ mm}$$

$$A_{s.underside} := \frac{M_{max.underside}}{f_{yd} \cdot z} = 236 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\Delta M := |M_{max.overside}| - M_{Rd} = 2.14 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

$$A_s' := \frac{\Delta M}{f_{yd} \cdot h'} = 197 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Endelig bøyearmering tverretning

$$A_{s.indre} := A_{s.underside} + \frac{A_s'}{2} = 334 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$A_{s.ytre} := A_{s.overside} + \frac{A_s'}{2} = 814 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$A_{s.min} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right) = 90 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Bøyearmering i lengderetning

$$M_{max.overside} := -3.44 \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{max.underside} := 0.87 \frac{kN \cdot m}{m}$$

Bøyearmering overside

$$z := \min \left(0.95 \cdot d, \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{max.overside}}{M_{Rd}} \right) \cdot d \right) = 52 \text{ mm}$$

$$A_{s.overside} := \frac{|M_{max.overside}|}{f_{yd} \cdot z} = 182 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right) = 90 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.overside} < A_{s.min}$$

Bøyearmering underside

$$z := \min \left(0.95 \cdot d, \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{max.underside}}{M_{Rd}} \right) \cdot d \right) = 52 \text{ mm}$$

$$A_{s.underside} := \frac{M_{max.underside}}{f_{yd} \cdot z} = 46 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.min} := \max \left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d, 0.0013 \cdot b \cdot d \right) = 90 \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s.underside} < A_{s.min}$$