

Abstract

In this master thesis it is performed nonlinear FEM-analyses for three reinforced concrete structures using the FEM-program DIANA with various choices of mathematical material models and numerical solution methods. The different reinforced concrete structures analyzed includes a simply supported wall beam, a partially fixed slab and a curved shell. The main purpose of the paper has been to discuss and consider results from the nonlinear analyses with different use of material models and numerical solution methods, and then come with suggestions for the different structure types. Important factors for discussion of the results is each structures failure mechanism and correlation with hand calculations and design.

It was concluded that the most practical choice of material models was use of models that includes cracking. The cracking models total strain fixed crack and total strain rotating crack were the most suitable models. Analysis of different numerical solution methods included observation and consideration of the iteration methods Standard Newton-Raphson, Modified Newton-Raphson and Quasi-Newton using Crisfield.

The results showed that modeling using a total strain rotating crack model gave good and sufficient results, while use of a total strain fixed crack model overrated the failure load of the structure. A main reason for these results was that the FEM-models performed analyses on, in this paper, overrated the tension strength of the concrete by assuming no reduction of tension strength along the cracks after cracking.

All of the tested iteration methods were computationally efficient for every structure. The Quasi-Newton method showed large deviations from the Newton-Raphson methods when the solution demanded many iterations for each loadstep to obtain converge and became more unstable. Therefore it is concluded that a Standard and a Modified Newton-Raphson iteration method are the most effective for the structures evaluated in this report.

Innholdsfortegnelse

Sammendrag	iii
Abstract	v
Innledning	1
Del I Teori.....	3
1. Matematiske materialmodeller	5
1.1 Plastisitet.....	5
1.1.1 Generelle antagelser.....	5
1.1.2 Mohr-Coulomb	11
1.1.3 Drucker-Prager.....	15
1.1.4 Tresca og Von Mises.....	17
1.2 Opprissingsmodeller	19
1.2.1 Generelt.....	19
1.2.2 Fixed crack modeller.....	19
1.2.3 Rotating crack modeller	22
1.2.4 Strekkmodeller for betong	23
1.2.5 Trykkmodeller for betong	25
1.3 Armering	26
1.3.1 Embedded reinforcement	26
2. Numeriske løsningsmetoder	27
2.1 Ikke-lineær analyse.....	27
2.1.1 Inkrementell-iterativ løsningsmetode	28
2.2 Iterasjonsmetoder	29
2.2.1 Newton-Raphson.....	29
2.2.2 Modifisert Newton-Raphson.....	29
2.2.3 Quasi-Newton	30
2.2.4 Constant Stiffness	32

2.2.5 Line search	33
2.2.6 Konvergenzkriterier	33
2.3 Inkrementsprosedyrer	34
2.3.1 Generelt	34
2.3.2 Arc-length kontroll	35
2.4 Elementer	36
2.4.1 Membranelement	36
2.4.2 Skallelementer	36
Del II Analyse	39
3. Analyse - Generelt	41
4. Skive	45
4.1 Lineær analyse	45
4.2 Geometri	45
4.3 Dimensjonering	46
4.4 FEM-modell	48
5. Plate	51
5.1 Lineær analyse	51
5.2 Geometri	51
5.3 Dimensjonering	52
5.4 Bruddlinjeberegning	54
5.5 FEM-modell	57
6. Skall	59
6.1 Lineær analyse	59
6.2 Geometri	59
6.3 Dimensjonering	60
6.4 FEM-modell	63

7. Resultater	65
7.1 Skiveresultater	66
7.2 Plateresultater	71
7.3 Skallresultater	75
Del III Vurdering.....	79
8. Vurdering.....	81
8.1 Skive.....	81
8.1.1 Bruddmekanisme	81
8.1.2 Materialmodeller.....	82
8.1.3 Numeriske løsningsmetoder.....	84
8.2 Plate.....	86
8.2.1 Bruddmekanisme	86
8.2.2 Materialmodeller.....	88
8.2.3 Numeriske løsningsmetoder.....	90
8.3 Skall.....	91
8.3.1 Bruddmekanisme	91
8.3.2 Materialmodeller.....	91
8.3.3 Numeriske løsningsmetoder.....	93
9. Konklusjon	95
10.Forslag til videre arbeid.....	97
Referanser	99
Vedlegg A – Lineær analyse av skive	101
Vedlegg B – Lineær analyse av plate.....	103
Vedlegg C – Lineær analyse av skall.....	107

Figurliste

1.1: Flyteflate i spenningsrommet.	6
1.2: Friksjonsglidning langs et stasjonært plan.	11
1.3: Mohr's sirkel for én-aksialt trykk.	12
1.4: Flyteflate for Mohr-Columb og Drucker-Prager.	14
1.5: Flyteflate for Tresca og Von Mises.	18
1.6: Strekkoppførsel etter opprissing med $\beta = 1,0$ og $\beta = 0,5$	21
1.7: Tension-softening funksjoner for total-tøyningsmodeller i DIANA [3].	23
1.8: Trykk-funksjoner for total-tøyningsmodeller i DIANA [3].	25
2.1: Likevektbane som først utviser en lineær respons og etter hvert når et kritisk punkt [4].	27
2.2: Inkrementell-iterativ løsningsprosedyre [4].	28
2.3a: Modifisert Newton-Raphson med initialstivhetsmetoden [4]. (Venstre)	30
2.4: Quasi-Newton iterasjon.	30
2.5a,b): Lastkontroll og Deformasjonskontroll.	34
2.6: Last- og deformasjonskontroll feiler [4].	34
2.7a,b): Snap-through –oppførsel og Snap-back –oppførsel [3]	35
2.8: Skiveelement med plan spenning [3].	36
2.9: Q8MEM-element [3].	36
2.10: Kurvede skallelementer [3].	37
2.11: Q20SH-element [3].	37
2.12: CQ40S-element [3].	37
3.1: Multi-lineær trykkmodell med 17 MPa som trykkfasthet.	41
3.2: Spenning-tøyningsrelasjon for tension-softening og tension-stiffening.	42
4.1: Skivens geometri.	45
4.2: Strut-tie modell.	46
4.3: FEM-modell av skive med opplagerbetingelser og laster.	48
5.1: Platas geometri.	51
5.2: Antatt bruddlinjemønster.	54
5.2: FEM-modell av plate med opplagerbetingelser.	57
6.1: Fast innspent skall [9].	59
6.2: FEM-modell av buet skall med innspenninger.	63

6.3: Skjerm bilde fra dat.-filen til skallet som illustrerer måten armeringsplasseringen er definert på.	64
7.1: Last-forskyvningskurve i midtsnitt.	66
7.2: Armeringsspenninger i y-retning ved $1,02 \cdot$ referanselast, laststeg 15. Ingen flyt i armering hvor maksimal spenning er 326 MPa.	66
7.3: Armeringsspenninger i horisontal stangarmering ved $1,02 \cdot$ referanselast. Spenningene er langt unna flytegrensen med maksimal spenning på 101 MPa.	67
7.4: Armeringsspenninger i x-retning ved $1,02 \cdot$ referanselast. Ingen flyt i armering, hvor maksimal armeringsspenning er 389 MPa.	67
7.5: Riss vektor-plott ved $1,02 \cdot$ referanselast.	68
7.6: Betongspenninger ved $1,02 \cdot$ referanselast. Største trykkspenning på $6,84 \text{ N/mm}^2$	68
7.7: Armeringsspenninger i y-retning ved $1,06 \cdot$ referanselast. Spenningene nærmer seg armeringsstålets flytegrense på 434 MPa.	69
7.8: Armeringsspenninger i stangarmering ved bruddlast.	70
7.9: Armeringsspenninger i x-retning ved bruddlast.	70
7.10: Last-forskyvningskurve i midtpunkt.	71
7.11: Spenninger i overkantsarmering i y-retning ved referanselast. Armeringen flyter allerede og oppnår flyt ved $0,96 \cdot$ referanselast.	71
7.12: Spenninger i underkantsarmering i x-retning ved referanselast. Ingen flyt i armering. .	72
7.13: Riss vektor-plott på oversiden av plata ved referanselast.	72
7.14: Riss vektor-plott på undersiden av plata ved referanselast.	73
7.15: Spenninger i underkantsarmering ved $1,12 \cdot$ referanselast. Armeringen har oppnådd flytegrensen på 434 MPa.	73
7.16: Last-forskyvningskurve i midtpunkt.	75
7.17: Armeringsspenninger i y-retning ved $1,03 \cdot$ referanselast. Spenningene har en maksimal verdi på 160 MPa ved innspenningene og er under flytegrensen.	75
7.18: Riss vektor-plott i overkant ved $1,03 \cdot$ referanselast.	76
7.19: Riss vektor-plott i underkant ved $1,03 \cdot$ referanselast.	76
7.20: Betongspenninger i overkant ved $1,03 \cdot$ referanselast. Spenningene har overgått trykkfastheten på 17 MPa.	77
7.21: Betongspenninger i overkant ved $0,968 \cdot$ referanselast.	77
8.1: Last-forskyvningskurve i midtsnitt for total strain fixed crack og total strain rotating crack modeller.	82
8.2: Riss vektor-plott ved $1,01 \cdot$ referanselast med en total strain fixed crack betongmodell.	83
8.3. Last-forskyvningskurver for midtsnitt med Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton.	84
8.4: Deformasjonsform ved laststeg 30 med Quasi-Newton som iterasjonsmetode.	85
8.5: Rissmønstre ved $0,5 \cdot$ referanselast.	86
8.6: Utregnet bruddlast ved bruk av FEM-analyse, bruddlinjeteori og elastisitetsteori. Referanselast er 15 kN/m^2	87

8.7: Last-forskyvningskurver i platas midtpunkt for total strain fixed crack og total strain rotating crack modeller.	88
8.8: Last-forskyvningskurver for platens midtpunkt med Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton.	90
8.9: Last-forskyvningskurver i skallets midtpunkt for total strain fixed crack og total strain rotating crack modeller.	91
8.10: Last-forskyvningskurver for skallets midtpunkt med Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton.	93
A.1: Spenningsfordeling σ_x for fritt opplagt skive med $l/h = 1$	101
A.2: Spenningsfordeling σ_x tatt ut fra DIANA.	102
B.1: Randbetingelser for plata.	103
B.2: Nedbøyning på midten langs x-aksen.	104
B.3: Moment om x-aksen M_x	104
B.4: Moment om y-aksen M_y	105
C.1: Skall med innspenne langsider [9].	107
C.2: Moment om y-aksen [9].	108
C.3: Normalkrefter langs bredden [9].	108
C.4: Moment om y-akse langs bredden fra FEM-analyse.	109
C.5: Normalkrefter langs bredden fra FEM-analyse.	109

Tabelliste

4.1: Avvik mellom håndberegninger og FEM-analyse for skive.	45
5.1: Avvik mellom håndberegninger og skive for plate.	51
5.2: Randbetingelser for plata i FEM-modell.	58
6.1: Avvik mellom håndberegninger og FEM-analyse for skall.	59
6.2: Geometri og betingelser for skall.	60
6.3: Kraftresultanter fra lineær analyse.	60
8.1: Oversikt over utregnet bruddlast med elastisitetsteori og ikke-lineær FEM-analyse.	81
9.1: Oversikt over anbefalinger av materialmodeller og numerisk løsningsmetoder for de ulike konstruksjonene.	96

Innledning

På institutt for konstruksjonsteknikk på NTNU er FEM-programmet DIANA et hyppig brukt beregningsprogram for modellering og analyse av armert betong. DIANA er et program som kan utføre 2D- og 3D-analyser med mange muligheter for FEM-modellering, materialmodeller og numeriske løsningsprosedyrer. Beregningsprogrammet, som har mange likheter med andre FEM-analyseprogrammer, skiller seg ut ved at det er spesielt egnet for armerte betongkonstruksjoner. De mange variasjonene av modelleringsmuligheter og numeriske løsningsmetoder programmet tilbyr, fører til at det kan være nyttig å oppnå en oversikt over konsekvensene modelleringsvalg har på ulike konstruksjoner. Det er derfor utført en undersøkelse av hvordan ulike materialmodeller og numeriske løsningsmetoder påvirker resultatet av ikke-lineære analyser for ulike armerte betongkonstruksjoner.

Oppgaven går ut på teste ulike materialmodeller og numeriske løsningsmetoder for de armerte betongkonstruksjonene; en fritt opplagt skive, en delvis innspent plate og et buet skall. Konstruksjonene er dimensjonert etter relevante dimensjoneringsmetoder og deretter modellert med ulike materialmodeller og analysert med ulike numeriske løsningsmetoder. Sentrale faktorer for vurdering av resultatene er konstruksjonenes bruddmekanisme og samsvar med relevant håndberegning og dimensjonering. Avslutningsvis vil det forsøkes å gi en anbefaling av modeller og metoder for de ulike konstruksjonene.

Versjonen som benyttes i de ikke-lineære FEM-analysene er DIANA 9.6.0.

Del I Teori

1. Matematiske materialmodeller

Det er gjort et litteraturstudium om diverse numeriske materialmodeller, hvor det er valgt å presentere generelle aspekter og matematiske redegjørelser ved sentrale materialmodeller for betong og stål. Hensikten har vært å danne et godt grunnlag for hvordan analyseprogrammet DIANA implementerer materialmodeller i FEM-analysene, og studiet har vært nyttig for en generell forståelse til hvordan betong og stål oppfører seg. Litteratur benyttet til dette studiet som inkluderer plastisitetsmodeller, opprissingsmodeller og armeringsmodeller, har vært kompendiet *Lecture Notes* fra kurset TKT4135 Materialmekanikk av Hopperstad og Børvik [1], *Computational methods in non-linear solid mechanics* av Borst [2] og DIANA User's Manual [3].

1.1 Plastisitet

1.1.1 Generelle antagelser

Elasto-plastiske materialer er materialer som får elastiske deformasjoner ved små spenninger, men som etter hvert vil få plastiske deformasjoner ved et visst spenningsnivå. De totale tøyningene kan da dekomponeres til en elastisk og en plastisk del.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1.1)$$

Beskrivelsen av plastisitetsteorien her er fenomenologisk, som vil si at den er basert på eksperimentelle observasjoner, og er avgrenset til små deformasjoner og isoterme forhold. Det er antatt at materialoppførselen er hastighetsuavhengig, som betyr at spennings-tøyningsoppførselen er lik ved alle tøyningshastigheter. Denne antagelsen innebærer at denne plastisitetsteorien ikke kan beskrive viskøse fenomener, hvor belastningshastigheten er signifikant, som kryp og spenningsrelaksasjon. Prosesser hvor belastningshastigheten kan sees bort ifra kalles kvasi-statiske prosesser. Hovedingrediensene i beskrivelsen av plastisitetsteori er *flytekriteriet*, *flyteloven* og *fastning-oppførselen*, og er grunnleggende elementer for å beskrive de matematiske materialmodellene med plastisitet for stål og betong.

Flytekriteriet

Et legeme som er utsatt for spenninger vil først oppleve elastiske tøyninger og vi får en én-til-én relasjon mellom totale spenninger og elastiske tøyninger,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (1.2)$$

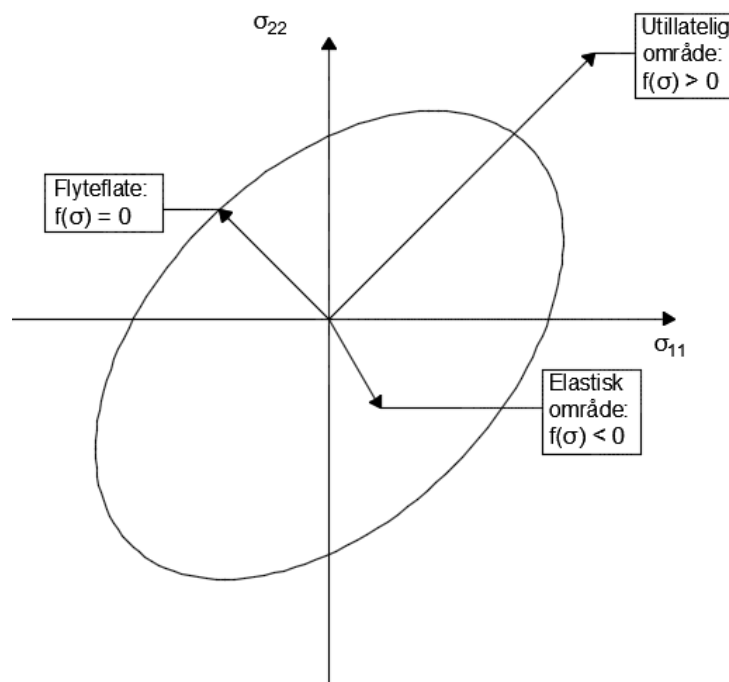
, hvor \mathbf{D} er materialstivhetsmatrisen. Ved bruk av totale og plastiske tøyninger kan likningen skrives som

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (1.3)$$

Etter hvert som spenningene øker vil materialet nå flytegrensen, hvor irreversible eller plastiske tøyninger oppstår. Overgangen fra elastisk til plastisk område varierer mellom type materiale, men generelt kan flytegrensen beskrives matematisk av flytekriteriet ved

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (1.4)$$

, hvor f er en funksjon av spenningene $\boldsymbol{\sigma}$ kalt flytefunksjonen. Likningen beskriver at vi er i det elastiske området når $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$. Det antas at ulikheten $f(\boldsymbol{\sigma}) > 0$ ikke er mulig, noe som vil si at plastiske deformasjoner kun oppstår når $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. For å beskrive alle mulige spenningstilstander kan vi skrive $f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$. Videre kan vi definere flytekriteriet $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ som en overflate i et spenningsrom, hvor denne overflaten er flyteflaten som vist på figur 1.1.



Figur 1.1: Flyteflate i spenningsrommet.

Flytegrensen varierer som nevnt mellom materialtype og defineres ulikt, så de ulike flytekriteriene vil bli nærmere beskrevet senere for aktuelle materialmodeller.

Flyteloven

For å oppnå plastiske deformasjoner er det ikke nok at spenningene ligger på flytegrensen, men de må forbli der over en «kort» periode. Plastiske tøyninger vil derfor bare oppstå hvis følgende kriterier er møtt samtidig:

$$f = 0 \text{ og } \dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (1.5)$$

Det siste kriteriet foreslår at flytekriteriet må tilfredsstilles i minst ett infinitesimalt lite tidsinkrement for at plastisk flyt kan oppstå og omtales ofte som *Prager's consistency* likning.

Den plastiske tøyningshastighets-vektoren kan skrives som

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (1.6)$$

, hvor $\dot{\lambda}$ er en positiv skalar kalt den plastiske parameteren og bestemmer størrelsen av den plastiske flyten, mens \mathbf{m} beskriver retningen til den plastiske flyten. Ettersom flytfunksjonen f kun avhenger av spenningstensoren $\boldsymbol{\sigma}$ kan *consistency*-kriteriet utarbeides til

$$\mathbf{n}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (1.7)$$

, hvor $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ er gradientvektoren til flytfunksjonen, som er vektoren vinkelrett på flyteflaten i det gjeldende spenningspunktet $\boldsymbol{\sigma}$. Differensiering av spenning-tøyingsrelasjonen kan nå gi følgende uttrykk av den plastiske parameteren $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{m}} \quad (1.8)$$

En lineær relasjon mellom spenningshastigheten og tøyningshastigheten kan nå formes

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{m} \mathbf{n}^T \mathbf{D}}{\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{m}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.9)$$

Hvis vektoren \mathbf{m} , som beskriver retningen til den plastiske flyten, er vinkelrett på flyteflaten, får vi den såkalte *assosierte flyteloven for plastisitet*:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{n} \quad (1.10)$$

Flytelover med vektorer som ikke er vinkelrett på flyteflaten kalles *ikke-assosierte*, og retningen til den plastiske flyten er for disse tilfellene gitt av

$$\mathbf{m} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.11)$$

, hvor g kalles «*the plastic potential function*». Den plastiske tøyningshastigheten kan da skrives som

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (1.12)$$

Den plastiske parameteren $\dot{\lambda}$ kan avgrenses av *the standard Kuhn-Tucker conditions*:

$$f \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} f = 0$$

Fastnings-oppførsel

Materialer som blir utsatt for plastiske tøyninger får ofte endringer i videre materialoppførsel noe som påvirker flytegrensen. Et eksempel på dette er flyt i armeringen, hvor materialet får endrede mekaniske egenskaper etter spenningene når flytegrensen. Flytfunksjonen definert her, har til nå kun vært avhengig av spenningstensoren og uavhengig av tidligere lasthistorie. Ved å innføre en skalar-basert fastning-parameter κ , kan vi utvide flytfunksjonen til å også være avhengig av materialets tøyningshistorie:

$$f = f(\sigma, \kappa) \quad (1.13)$$

Fastning-parameteren κ kan defineres ved en arbeidsfastning-hypotese hvor parameterens hastighet er lik

$$\dot{\kappa} = \sigma^T \dot{\epsilon}^p \quad (1.14)$$

, eller ved en tøynings-fastningshypotese:

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p} \quad (1.15)$$

Ettersom flytefunksjonen kun er avhengig av tøyningshistorien gjennom en skalar, vil flyteflaten kunne vokse eller krympe, men ikke flytte seg eller rotere i spenningsrommet. Denne type fastning er derfor kalt isotrop fastning. Mer passende beskrives tilfellet hvor flyteflaten krymper med voksende κ som isotrop *softening*. Ved å innføre en fastning-parameter i flytefunksjonen vil relasjonen mellom spenningsraten og tøyningssraten endres. *Consistency*-kriteriet vil nå kunne skrives som

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (1.16)$$

Ved å innføre en *plastisk fastning-modul*, $E_p = -\frac{1}{\dot{\lambda}} \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa}$, kan vi erstatte *consistency*-kriteriet med

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - E_p \dot{\lambda} = 0 \quad (1.17)$$

Fastning-modulen E_p regulerer den plastiske tøyningshastigheten på en lignende måte som Young's modul E bestemmer den elastiske tøyningshastigheten. Ved hjelp av *Sherman-Morrison's* formel vil spenningshastighet-tøyningshastighet-relasjonen utvides til

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{m} \mathbf{n}^T \mathbf{D}}{E_p + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{m}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.18)$$

Numerisk løsningsmetode

For å løse ligningene og dermed fremskaffe spenningene og tøyningene i en konstruksjon som er kombinert med laststeg, må den lineære relasjonen mellom spennings- og tøyningshastigheten integreres langs lastbanen. Den vanligste metoden å integrere de konstitutive ligningene er å bruke *Euler integrasjonsmetoder*. Først beregnes en prøvespenningstilstand $\boldsymbol{\sigma}_t$ ved å anta full elastisk oppførsel. Deretter projiseres prøvespenningen i flyteflatens retning; eller *mappes* tilbake. Integrasjonsmetoder av denne typen er derfor ofte kalt «*return-mapping algorithms*». Hvis prøvespenningen oppfyller flytekriteriet $f(\boldsymbol{\sigma}_t) \leq 0$, er antagelsen korrekt og prøvespenningen stemmer med den ekte løsningen. Hvis $f(\boldsymbol{\sigma}_t) > 0$, opplever vi plastisk flyt under tidssteget og prøvespenningstilstanden er i det utillatelige området hvor det må påføres en korreksjon. Denne prosessen kalles en «*elastic predictor-plastic corrector*» -prosess.

Den minst kompliserte måten å gjøre dette på er å benytte en eksplisitt *Euler forward integration rule*, hvor man antar at spenningene $\boldsymbol{\sigma}_0$ og verdien av fastningsparameteren κ_0 er kjent ved begynnelsen av et tøyningssinkrement ved tiden t_0 . *Elastic predictor-plastic corrector*-prosessen har følgende format for denne metoden:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \lambda \mathbf{D} \mathbf{m}_c \quad (1.19)$$

, hvor indeksen c denoterer at kvantiteten er evaluert ved *kontaktspenningen* $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_c$. $\boldsymbol{\sigma}_c$ er spenningene ved kontakt- eller krysningpunktet mellom den elastiske spenningsbanen og flyteflaten. En ulempe med denne eksplisitte metoden er at man må regne kontaktspenningen eksplisitt. Mengden plastisk flyt $\Delta \lambda$ i dette laststeget er gitt ved

$$\Delta \lambda = \frac{\mathbf{n}_c^T \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_B}{E_p + \mathbf{n}_c^T \mathbf{D} \mathbf{m}_c} \quad (1.20)$$

Problemet med å benytte denne metoden er at man ikke er garantert at prøvespenningen *mappes* tilbake på flyteflaten, for eksempel ved flyteflater med stor lokal kurvatur. Når man bruker store laststeg vil oppsamlingen av feil bli store, og kan føre til numerisk instabilitet av algoritmen. Løsningen til den eksplisitte *Euler forward integration rule*-metoden er bare stabil ved relativt små laststeg, og er derfor omtalt som *conditionally stable*.

For elementanalyser av elasto-plastiske materialer er den implisitte *Euler backward integration rule*-metoden den mest brukte. Metoden garanterer numerisk stabilitet uavhengig av størrelse på laststeg og er derfor *unconditionally stable*. Man antar i denne metoden at spenningsavhengige variabler er evaluert for σ_n og er kjent ved tiden t_n . *Elastic predictor-plastic corrector*-prosessen har følgende format for denne metoden:

$$\sigma_n = \sigma_0 + D\Delta\varepsilon - \Delta\lambda D\mathbf{m}_n \quad (1.21)$$

, og

$$\Delta\lambda = \frac{\mathbf{n}_n^T \Delta\sigma_t}{E_p + \mathbf{n}_n^T D\mathbf{m}_n} \quad (1.22)$$

Som man ser av uttrykkene behøves det ikke en utregning av den inelastiske delen av tøyningssinkrementet $\Delta\varepsilon_B$, eller kontaktspenningen σ_c . Disse ligningene utgjør totalt syv ikke-lineære ligninger med syv ukjente; de seks spenningskomponentene i σ_n og den plastiske parameteren $\Delta\lambda$.

Tangent formulasjon

De ikke-lineære likningene resulterer i en tangent-stivhetsmatrise som spiller en viktig rolle i ytelsen av *iterasjonsmetoden*, som vil bli beskrevet nærmere senere. Likning 1.21, som gir spenningsinkrementet en avhengighet av det forhåndsbestemte tøyningssinkrementet, er en total spenning-tøyningssrelasjon, og kan formuleres til:

$$\dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} - \lambda D \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \Delta\lambda D \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} \dot{\sigma} \quad (1.23)$$

Vi introduserer en modifisert elastisk stivhetsmatrise \mathbf{H} som inkluderer effekter av plastisk flyt gitt som

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{I} + \Delta\lambda D \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} \right]^{-1} D \quad (1.24)$$

Ratelikningen kan nå skrives som

$$\dot{\sigma} = \mathbf{H} \left(\dot{\varepsilon} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \quad (1.25)$$

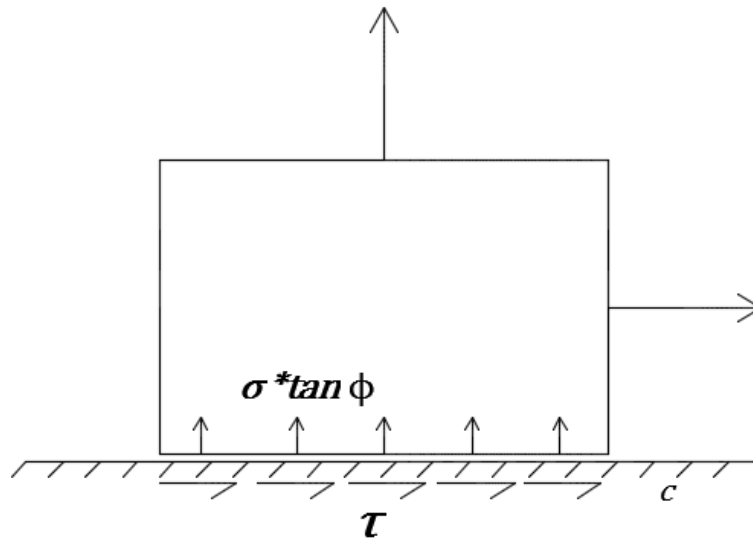
, og ved å involvere *consistency*-kriteriet får vi tangentstivhetsmatrisen:

$$\dot{\sigma} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{H}}{E_p + \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \mathbf{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \end{array} \right] \dot{\epsilon} \quad (1.26)$$

Denne tangentstivhetsmatrisen er kalt «*the consistent tangent stiffness matrix*». Ved en full *Newton-Rhapson prosedyre*, vil bruk av en *consistent tangent stiffness matrix* gi store fordeler i forhold til en konvensjonell tangentstivhetsmatrise som ikke inkluderer effektene av plastisk flyt. Bruken vil føre til at antall iterasjoner nødvendig for å oppnå en riktig konvergent løsning kan reduseres med en faktor 2.

1.1.2 Mohr-Coulomb

For å beskrive ulike flytekriterier bruker man ofte en modell med friksjonsglidning langs et stasjonært plan, hvor glidning vil representere plastiske tøyninger i et materiale.



Figur 1.2: Friksjonsglidning langs et stasjonært plan.

Av figuren kan man forstå at glidning vil skje når skjærspenningene τ overgår normalspenningene σ multiplisert med en friksjonskoeffisient $\tan \phi$, i tillegg til adhesjon med planet. Vi søker nå planet hvor kriteriet,

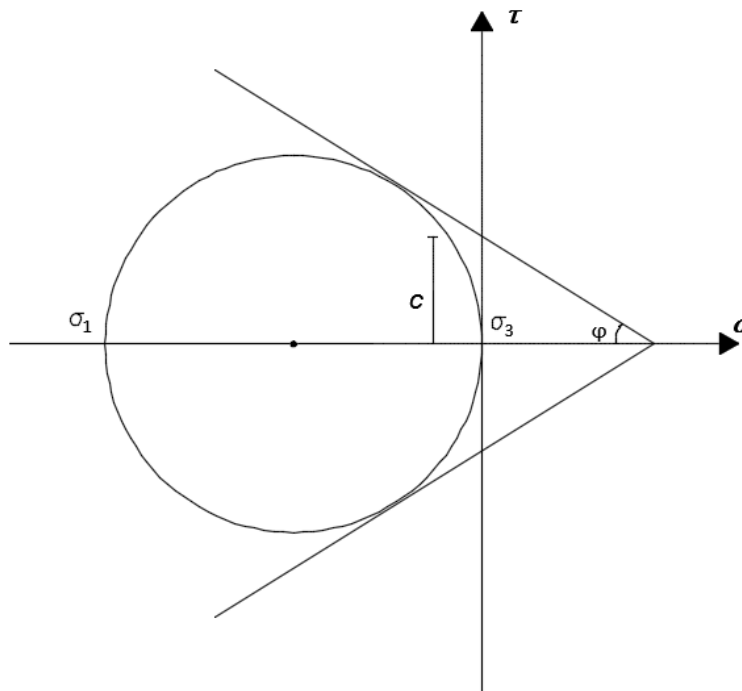
$$\tau + \sigma \tan \phi - c = 0 \quad (1.27)$$

, er tilfredsstillt for normalspenningene og skjærspenningene på det planet. Ved å betrakte modellens glidning tilknyttet plastiske tøyninger i et materiale, vil ϕ indikere materialets interne friksjonsvinkel og c representerer materialets kohesjon, hvor begge parameterne $\phi(\kappa)$ og $c(\kappa)$ er funksjoner av herdningsparameteren κ . Modellen egner seg til å beskrive

styrkeegenskapene til sand, drenert leire, stein eller betong. For stein og betong er typiske verdier for den interne friksjonsvinkelen mellom 30° og 40° . Når materialets interne friksjonsvinkel ϕ er kjent kan man regne materialets kohesjon c basert på énaksial testing av trykkfastheten f_c :

$$c = \frac{1 - \sin \phi}{2 \cos \phi} f_c \quad (1.28)$$

Ved å betrakte en to-dimensjonal spenningstilstand, kan vi tilknytte σ og τ til hovedspenningene ved å benytte Mohr's sirkel for én-aksialt trykk som vist på figur 1.3.



Figur 1.3: Mohr's sirkel for én-aksialt trykk.

, hvor $\sigma_1 = -\frac{2c \cdot \cos \phi}{1 - \sin \phi}$.

Hovedspenningene kan nå tas som

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\sin \varphi \quad (1.29)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\cos \varphi \quad (1.30)$$

, hvor σ_3 og σ_1 er henholdsvis de største og de minste hovedspenningene. Innsatt i kriteriet ovenfor får vi en to-dimensjonal formulering av Mohr-Coulombs flytekriterium:

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\sin \varphi - c * \cos \varphi = 0 \quad (1.31a)$$

Ved å utvide Mohr-Coulombs flytekriterium til en tre-dimensjonal spenningstilstand får vi til sammen seks likninger:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\sin \varphi - c * \cos \varphi = 0 \quad (1.31b)$$

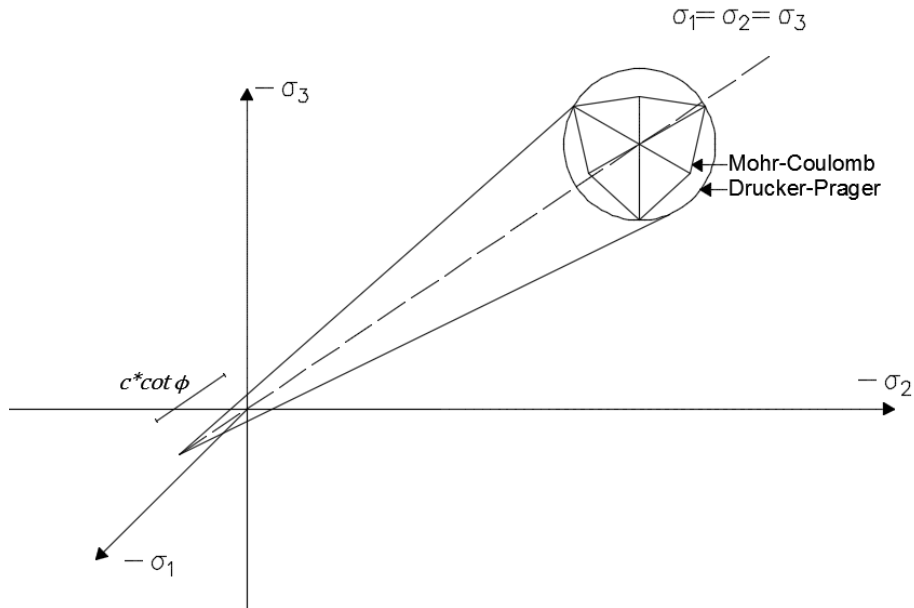
$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\sin \varphi - c * \cos \varphi = 0 \quad (1.31c)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin \varphi - c * \cos \varphi = 0 \quad (1.31d)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)\sin \varphi - c * \cos \varphi = 0 \quad (1.31e)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_2)\sin \varphi - c * \cos \varphi = 0 \quad (1.31f)$$

Hver av disse likningene representerer et plan i spenningsrommet. Sammen former de en kjegle med seks sider som møtes i spissen på $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c * \cot \varphi$. Dette representerer flyteflaten for Mohr-Coulomb som vist på figur 1.4.



Figur 1.4: Flyteflate for Mohr-Coulomb og Drucker-Prager.

Som man ser av figuren vil ikke kjeglen i hovedspenningsrommet strekkes uendelig ut langs akse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ i negativ retning. Flytfunksjoner som ikke har lik størrelse eller form på tverrsnittene i hvert plan som er ortogonale på romdiagonalen, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, kalles trykk-avhengige og avhenger av et hydrostatisk trykk. Et karakteristisk særpreg med trykk-avhengige flytefunksjoner er at de får en plastisk volumendring:

$$\dot{\varepsilon}_{vol}^p = \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p \neq 0 \quad (1.32)$$

Betong er et typisk materiale som foreviser en trykk-avhengig oppførsel. Formuleringen av flytekriteriet kan uttrykkes i hovedspenningsrommet ($\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) som

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\sin \varphi(\kappa) - c(\kappa)\cos \varphi_0 \quad (1.33)$$

, hvor φ_0 er opprinnelig friksjonsvinkel.

Flyteloven

Flyteloven for Mohr-Coulombs flytekriterium er gitt av en ikke-assosiert flytregel hvor *the plastic potential function* $g \neq f$. Eksperimentale bevis har gitt at g gitt som

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\sin \psi(\kappa) \quad (1.34)$$

, resulterer i en god forutsigelse i den plastiske volumendringen. ψ er en *dilatancy angle* som kontrollerer mengden plastiske, volumetriske tøyninger som dannes under plastisk skjær.

Bruk av denne plastiske funksjonen resulterer i en flytelov med en plastisk tøyningshastighetsvektor lik

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^p \\ \dot{\varepsilon}_2^p \\ \dot{\varepsilon}_3^p \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1 - \sin \psi) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \sin \psi) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Fastnings-oppførsel

Ved bestemmelse av fastningsparameteren κ for Mohr-Coulombs flytekriterium, bruker vi en tøyning-fastningshypotese:

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p \dot{\varepsilon}_3^p) \quad (1.36)$$

, som kan utarbeides til

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{1}{3}} (1 + \sin^2 \psi) \quad (1.37)$$

1.1.3 Drucker-Prager

En svakhet ved Mohr-Coulombs flytekriterium er at flyteflaten danner hjørner hvor gradientvektoren ikke lenger er entydig definert, noe som fører til vanskeligheter ved formuleringen av de inkrementelle spenning-tøyingsrelasjonene. Derfor har Drucker og Prager tilnærmet Mohr-Coulombs flyteflate til en sirkulær kjegle som vist på figur 1.4. På grunn av trykk-avhengigheten kan ikke den sirkulære konturen passere gjennom alle hjørnene, men det er vanlig å velge en tilnærming hvor flyteflaten passerer de ytterste hjørnene. Drucker-Prager's flytekriterium kan da defineres som

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} + \frac{1}{3} \alpha_f (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - kc(\kappa) \quad (1.38)$$

Uttrykket inni rottegnet er proporsjonalt med den andre invarianten av de deviatoriske spenningene J_2 . α_f og k er materialkonstanter som er definert av den interne friksjonsvinkelen ϕ :

$$\alpha_f = \frac{6 \sin \varphi(\kappa)}{3 - \sin \varphi(\kappa)} \quad , \quad k = \frac{6 \cos \varphi_0}{3 - \sin \varphi_0}$$

Flytfunksjonen kan nå forkortes til

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sqrt{3J_2} + \alpha_f p - kc(\kappa) \quad (1.39)$$

, hvor $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Flytelovent

Flytelovent for Drucker-Prager's flytekriterium er ogs a gitt av en ikke-assosiert flytelov hvor $g \neq f$. The plastic potential function er gitt som

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sqrt{3J_2} + \alpha_g p \quad (1.40)$$

Hvor α_g er en skalar definert av en dilatancy angle:

$$\alpha_g = \frac{2 \sin \psi(\kappa)}{3 - \cos \psi(\kappa)} \quad (1.41)$$

Den plastiske t yningsvektoren vil da bli

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \left\{ \frac{\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}}{2\Psi} + \alpha_g \boldsymbol{\pi} \right\} \quad (1.42)$$

Hvor \mathbf{P} og $\boldsymbol{\pi}$ er henholdsvis en projeksjonsmatrise og en projeksjonsvektor:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

, og skalaren Ψ er gitt som

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}$$

I sin helhet vil den plastiske tøyingsvektoren da kunne uttrykkes som

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1^p \\ \dot{\epsilon}_2^p \\ \dot{\epsilon}_3^p \end{pmatrix} = \dot{\lambda} \left(\frac{1}{2\Psi} \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 \\ -\sigma_1 & 2\sigma_2 & -\sigma_3 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & 2\sigma_3 \end{pmatrix} + \alpha_g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (1.43)$$

Fastnings-oppførsel

For bestemmelse av fastningsparameteren κ benytter vi her også en tøyings-fastninghypotese:

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}^p)^T \dot{\epsilon}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_1^p \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p \dot{\epsilon}_3^p)} \quad (1.44)$$

Ved innsetting av uttrykket for den plastiske tøyingsvektoren kan fastnings-parameterens hastighet utarbeides til

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \sqrt{1 + 2\alpha_g^2} \quad (1.45)$$

1.1.4 Tresca og Von Mises

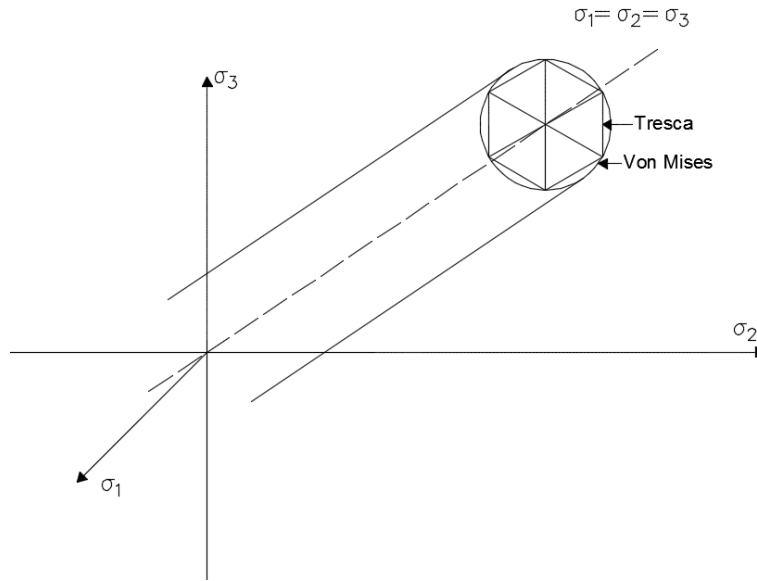
Tresca antok at metaller begynner å flyte når skjærfastheten har blitt utmattet i en retning:

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \tau_{max} \quad (1.46)$$

Tresca's flytekriterium kan uttrykkes som

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_3 - \sigma_1) - \bar{\sigma} \quad (1.47)$$

, hvor $\bar{\sigma}$ er flytegrensen i énaksialt strekk. Ved å benytte de ulike formene av flytekriteriet i tredimensjonale spenningstilstander kan flytegrensen uttrykkes grafisk som vist på figur 1.5.



Figur 1.5: Flyteflate for Tresca og Von Mises.

Resultatet er en sekskantet sylinder i hovedspenningsrommet, som strekkes uendelig langs aksene $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ i både positiv og negativ retning. Dette viser at flytekriteriet er trykkuavhengig. Som Mohr-Coulomb's flytekriterium danner sidene på sylindere hjørner som gir matematiske vanskeligheter ved formulering av spenning-tøyning relasjoner. En tilnærming en avrundet flyteflate er Von Mises' flytekriterium som vist på figur 1.5. Von Mises flytekriteriet gjelder for isotrope og trykkuavhengige materialer, noe som betyr at kriteriet passer bra for stål.

Von Mises' flytefunksjon kan uttrykkes som

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sqrt{3J_2} - \bar{\sigma}(\kappa) = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} - \bar{\sigma}(\kappa) \quad (1.48)$$

, hvor $\bar{\sigma}(\kappa)$ er den énaksiale flytegrensen som en funksjon av fastningsparameteren κ .

Flyteloven

Flyteloven er generelt gitt av en assosiert flytelov hvor $g = f$. Den plastiske tøyningshastighetsvektoren er da gitt som

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{2\bar{\sigma}} \quad (1.49)$$

Fastningsoppførsel

For bestemmelse av fastningsparameteren benytter vi her også en tøyings-fastninghypotese:

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p \dot{\varepsilon}_3^p)} \quad (1.50)$$

Ved innsetting av uttrykket for den plastiske tøyingsvektoren kan fastnings-parameterens hastighet utarbeides til

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda}$$

1.2 Opprissingsmodeller

1.2.1 Generelt

Det finnes hovedsakelig to metoder for å modellere opprissing i materialer som betong, stein og murverk kalt «*discrete crack*» modeller og «*smearred crack*» modeller. Her vil vi fokusere på *smearred crack* modeller, fordi i tillegg til at det er den mest regneeffektive og mest brukte metoden, benytter DIANA disse modellene. Konseptet går ut på at spenning- og tøyingsbegrepene fremdeles er gyldige ved opprissing i et legeme. Materialets oppførsel ved opprissing kan da beskrives med spenning-tøyingsrelasjoner, og etter opprissing kan man erstatte den isotrope spenning-tøyingsrelasjonen med en ortotrop spenning-tøyingsrelasjon. Den eksisterende element-inndelingen vil da bli vedlikeholdt, noe som er en sentral faktor til metodens regneeffektivitet.

Smearred crack modeller kan skilles mellom *fixed crack* modeller og *rotating crack* modeller. *Fixed crack* modeller går ut på at retningen av normalen til et riss er antatt fast etter initiering av risset, mens *rotating crack* modeller tillater normalen til et riss å rotere under opprissingsprosessen.

1.2.2 Fixed crack modeller

Fixed crack modeller kan betraktes med totale tøyninger eller med en dekomponering av tøyningene. Modeller som benytter konseptet med å dekomponere tøyningene er kalt *Multi-directional fixed crack* modeller. Det grunnleggende kjennetegnet med modellen er at de totale tøyningene dekomponeres i en elastisk del og en del for opprissingen. Fordelen med en modell som dekomponerer tøyningene er at den tillater å kombinere opprissing med andre ikke-lineære fenomener som kryp og termiske effekter. I denne oppgaven er ikke disse fenomenene aktuelle så denne modellen vil ikke her bli videre utdypet.

Før opprissing vil, i de fleste tilfeller, betong være tilstrekkelig korrekt modellert som et isotrop, lineært elastisk materiale, hvor spenningene er en funksjon av tøyningene. Når de største hovedspenningene overgår strekkfastheten vil det oppstå et riss vinkelrett på hovedspenningens retning. For en *fixed crack* modell vil risset som oppstår være fast, noe som

vil si at normalen ikke endrer seg under opprissingsprosessen. Etter opprissing vil det antas en ortotrop spenning-tøyningsrelasjon, hvor det oppstår en n -akse og en t -akse. n -aksen går i normalen til rissets retning, mens t -aksen går i tangenten til rissets retning. Overføringen fra et globalt x,y - til et riss-basert n,t -koordinatsystem fører til at vi får en ortotrop spenning-tøyningsrelasjon, hvor en plan spenning situasjon kan uttrykkes som:

$$\boldsymbol{\sigma}_{nt} = \mathbf{D}_{nt}^s \boldsymbol{\varepsilon}_{nt} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

, hvor \mathbf{D}_{nt}^s er kalt sekant-stivhetsmatrisen.

For å bestemme spenningene i det globale koordinatsystemet kan vi da benytte en transformasjonsmatrise \mathbf{T} , som i plan spenning kan skrives som:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_0 & \sin^2 \theta_0 & -\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ \sin^2 \theta_0 & \cos^2 \theta_0 & \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 & -2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 & \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \end{bmatrix}$$

, hvor θ_0 er en skjevheitsvinkel mellom x,y - og n,t -koordinatsystemene. Indeksen 0 indikerer at for en *fixed crack* modell er skjevheitsvinkelen konstant. Spenningene kan da tas ut fra

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy} = \mathbf{T}(\theta_0)^T \boldsymbol{\sigma}_{nt} \quad (1.52)$$

, og en total spenning-tøyningsrelasjon kan skrives som

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy} = \mathbf{T}(\theta_0)^T \mathbf{D}_{nt}^s \mathbf{T}(\theta_0) \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \quad (1.53)$$

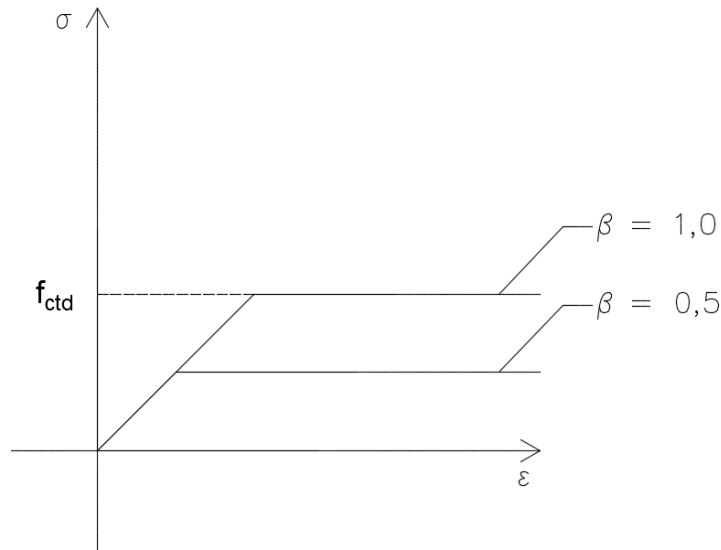
Tangent-stivhetsrelasjonen kan oppnås ved differensiering av likningen ovenfor

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{xy} = \mathbf{T}(\theta_0)^T \mathbf{D}_{nt} \mathbf{T}(\theta_0) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy} \quad (1.54)$$

, hvor \mathbf{D}_{nt} nå er material-tangentstivhetsmatrisen. For lineær-elastisk betongoppførsel er $\mathbf{D}_{nt}^s = \mathbf{D}_{nt}$.

Bruk av sekant-stivhetsmatrisen uten normalstivhet og skjærstivhet, angitt i spenning-tøyningsrelasjonen i likning 1.51, kan føre til konvergensproblemer hvor vi får feilrepresenterte og urealistiske riss-mønstre. Det er derfor innført en redusert skjærmodul βG i sekant-stivhetsmatrisen, som er med på å redusere numeriske problemer og gjøre modellen mer fysisk realistisk. *Shear retention*-faktoren β bestemmer hvor mye av skjærstivheten som blir redusert og er enten et tall mellom 0 og 1,0 eller definert av en kurve. Ved å sette $\beta = 1,0$ antas det at man beholder strekkfastheten langs rissene etter opprissing og ikke får en

reduksjon når strekkspenningene oppnår strekkfastheten. Dette er illustrert i spennings-tøyingsdiagrammet på figur 1.6.



Figur 1.6: Strekkoppførsel etter opprissing med $\beta = 1,0$ og $\beta = 0,5$.

Det er også inkludert en reduksjonsfaktor μ for å modellere *softening* i sekant stivhetsmatrisen hvor vi nå kan skrive den som:

$$\mathbf{D}_{nt}^s = \begin{bmatrix} \mu E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Softening er et fenomen vi opplever angående strekkfastheten i betong etter opprissing, og vil bli nærmere forklart senere.

Ved å inkludere Poisson-kobling etter opprissing får vi

$$\mathbf{D}_{nt}^s = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1 - \nu^2 \mu} & \frac{\nu \mu E}{1 - \nu^2 \mu} & 0 \\ \frac{\nu \mu E}{1 - \nu^2 \mu} & \frac{E}{1 - \nu^2 \mu} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

1.2.3 Rotating crack modeller

En *rotating crack* modell er også en total tøyning-modell og har ganske lik formulering som en *fixed crack* modell. Begge modeller kan beskrives i samme rammeverk hvor det grunnleggende konseptet er at spenningene evalueres i retningene gitt av risset.

Hovedforskjellen er som nevnt at aksene i en *rotating crack* modell kan rotere kontinuerlig under opprissingsprosessen, så de største hovedspenningsretningene og normalen til risset er i linje under hele prosessen. Skjevhetvinkelen θ vil derfor kunne variere og er ikke en konstant som tidligere. For denne modellen er det heller ikke nødvendig å definere en *shear retention* faktor β , fordi en implisitt tangent skjærstivhet utvikles naturlig fra rotasjonen hovedspenningsaksene. Den totale spenning-tøyningrelasjonen vil da få formen

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy} = \mathbf{T}(\theta)^T \mathbf{D}_{nt}^s \mathbf{T}(\theta) \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \quad (1.57)$$

, hvor indeksen 0 droppes fordi vinkelen ikke er konstant lenger. Det er verdt å legge merke til at det lokale n,t -koordinatsystemet er det samme som hovedspenningsretningens koordinatsystem, noe som fører til at skjærspenningen σ_{nt} alltid er null. Egenskapen om at hovedretningene til spennings- og tøyningstensorene sammenfaller gjennom hele opprissingsprosessen er ofte beskrevet som *koaksialitet* av spenning- og tøyningstensorene. Antagelsen om koaksialitet er nyttig ved at man formulerer en spenning-tøyningrelasjon med prinsipielle verdier i det samme koordinatsystemet.

Tangent stivhetsrelasjonen kan nå utvides til

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{xy} = \left[\mathbf{T}(\theta)^T \mathbf{D}_{nt} \mathbf{T}(\theta) + \frac{\partial \mathbf{T}^T(\theta)}{\partial \theta} \boldsymbol{\sigma}_{nt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}} \right)^T \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy} \quad (1.58)$$

Spenning-tøyningrelasjonen kan utarbeides i n,t -koordinatsystemet som

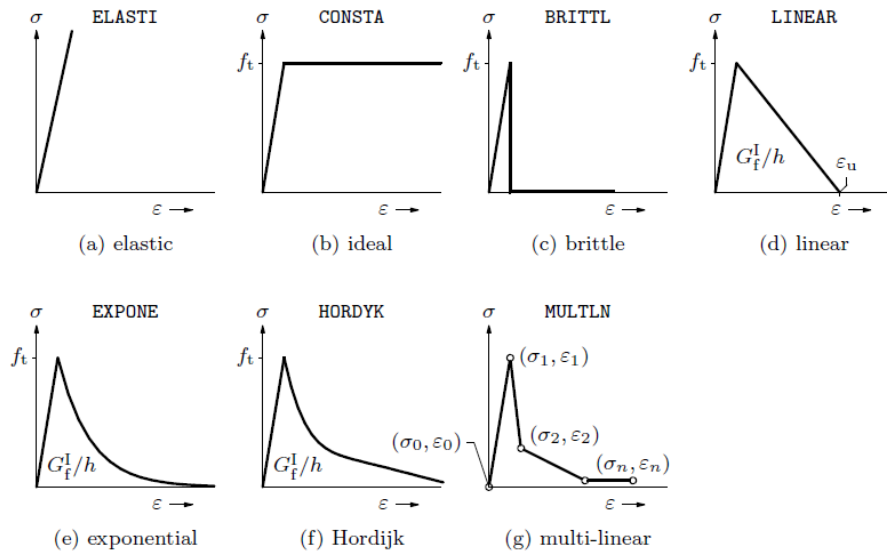
$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{nn} - \sigma_{tt}}{2(\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{tt})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

Tangent-skjærstivheten $\frac{\sigma_{nn} - \sigma_{tt}}{2(\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{tt})}$ oppstår automatisk fra roteringen av hovedspennings og – tøyningssaksene og fra kravet om koaksialitet mellom dem.

En stor fordel ved bruk av en *rotating crack* modell er som nevnt at man slipper å velge en *shear retention*-faktor. Man eliminerer også muligheten av at hovedspenningene overtrer risskriteriet i en retning skrått på det første risset. I stedet vil den maksimale hovedtrekkspenningen være korrekt kontrollert mens den roterer. Ulempen med denne modellen er at det er vanskeligere å ha kontakt med eksperimentell bruddforskning, noe som ofte resulterer i sofistikerte riss-matriser for et fast plan og ikke slik vi antar for en *rotating crack* modell.

1.2.4 Strekkmodeller for betong

At stivheten normalt på risset er satt til null fører til en brå nedgang av strekkspenningene fra betongens strekkfasthet f_{ct} til null ved opprissing, noe som også er urealistisk og kan føre til numeriske problemer. Deformasjonskontrollert strekktesting viser at man får en gradvis nedstigende spenning-tøyningsgraf etter opprissing, et fenomen kalt «*tension-softening*». *Tension-softening* er en metode brukt til å modellere strekk i ren betong. Man kan benytte ulike *softening/stiffening* funksjoner for å modellere denne effekten som vist på figur 1.7, hvor man kan velge forhåndsdefinerte funksjoner i DIANA.



Figur 1.7: Tension-softening funksjoner for total-tøyningsmodeller i DIANA [3].

En liknende metode for å modellere effekten om at man får en gradvis nedgang av strekkfasthet kalles en «*tension-stiffening*» modell. Denne metoden betrakter materialoppførselen som strekk i armert betong. Etter opprissing vil kun en liten del av armerings-stangen i betongelementet være eksponert, men langs store deler av stangen kan betongen fremdeles belastes med strekkspenninger og det kan være skjærspenninger mellom betongen og armeringen. Betongen mellom rissene bidrar altså betydelig med strekkfasthet i elementet.

Begge modeller fører til en gradvis nedgang i spenning-tøyningsdiagrammet for betongen, men har en totalt ulik forklaring på fenomenet. *Tension-softening* modellen antar at den gradvise nedgangen skyldes gradvis skade av rene betongseksjoner, mens *tension-stiffening* modellen kun er mulig for armerte betongkonstruksjoner og antar at stivhetsbidraget kommer fra den intakte betongen mellom rissene. Det er fortsatt uenighet i hvilken effekt som bidrar mest til denne oppførselen, og begge modellene kan brukes for armerte betongkonstruksjoner. I Borst [2] er det foreslått at det er best å bruke *tension-softening* for konstruksjoner med få dominerende armeringsstenger. Disse konstruksjonene svikter som regel av én eller noen få hovedriss, og det vil være mer realistisk med et energi-basert konsept. *Tension-stiffening* bør brukes for tettere armerte membraner, plater og skall, som viser et finere, distribuert

rissmønster ved konstruksjonssvikt. En hyppig brukt og tilstrekkelig *softening/stiffening* funksjon er den lineære som vist på figur 1.7d.

I DIANA kan man enten velge å definere en *Ultimate strain based* materialparameter eller en bruddenergiparameter G_f for *Fracture energy based* funksjonen. Bruddenergien er definert som mengden energi nødvendig for å lage én enhet areal av et kontinuerlig riss og er en fundamental kvantitet for å bestemme risspredning. Parameteren G_f kan regnes ut som arealet av spenning-tøyningsgrafene etter toppunktet og blir for det lineære tilfellet:

$$G_f = \frac{1}{2} \cdot f_t \cdot \varepsilon \cdot h \quad (1.60)$$

, hvor f_t er betongens strekkfasthet, ε er bruddtøyning og h er *crack bandwidth* som for firkantede elementer kan regnes som:

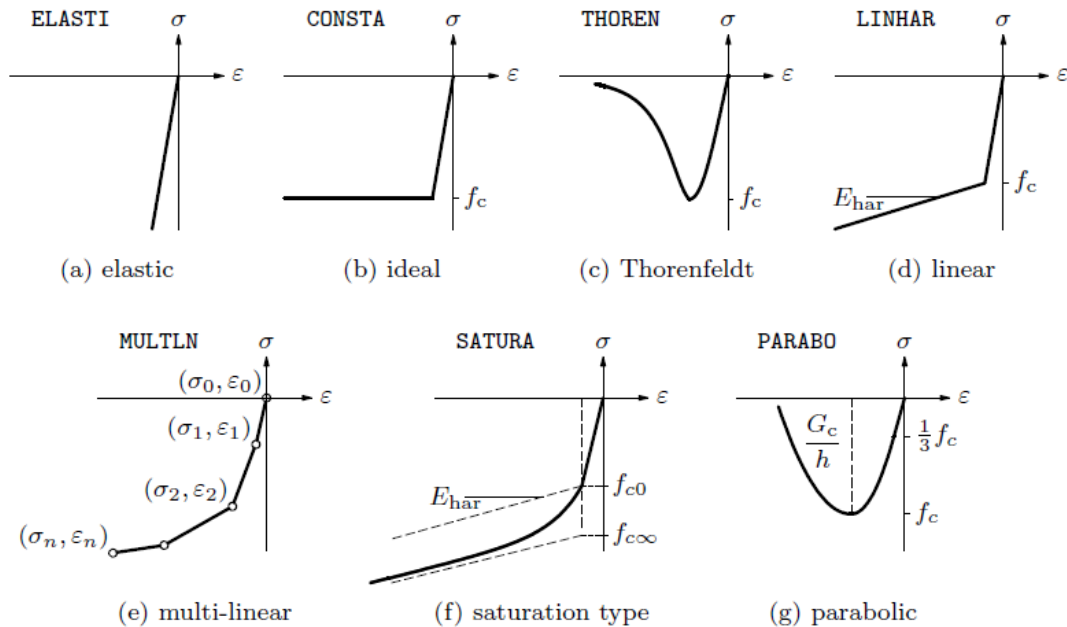
$$h = \sqrt{A} \quad (1.61)$$

, hvor A er elementets overflateareal.

Ved bruk av *Ultimate strain based* funksjonen må man kun angi en bruddtøyning, som avhenger av om man modeller med en *tension-softening* eller *tension-stiffening* effekt.

1.2.5 Trykkmodeller for betong

For å modellere trykkoppførselen i total-tøyningsmodeller finnes det ikke-lineære spenning-tøyningsfunksjoner i en viss retning. I DIANA kan man benytte forhåndsdefinerte trykkfunksjoner som vist på figur 1.8:



Figur 1.8: Trykk-funksjoner for total-tøyningsmodeller i DIANA [3].

, hvor man da velger funksjon etter hva slags trykk-modell man velger å følge. Det kan også antas at trykk-oppførselen påvirkes av *lateral confinement* og *lateral cracking*, og måten man inkorporer dette på må spesifiseres i DIANA. *Lateral confinement* beskriver betongens økning av trykkfasthet ved økende, isotropiske spenninger. I opprisset betong vil store strekktøyninger vinkelrett på hovedtrykkspenningens retning redusere betongens trykkfasthet. Dette modelleres i DIANA med *lateral cracking*. En forenkling av trykk-modellen vil være å se bort i fra disse effektene, noe man kan gjøre i DIANA ved å velge «*No lateral confinement behavior*» og «*No lateral cracking reduction*».

Ved opprissing vil *Poisson*-effekten til materialet opphøre. Strekking i en risset retning vil derfor ikke føre til sammentrekning vinkelrett på risset lenger. For å modellere dette fenomenet har man tilpasset *Poisson*-forholdet til en ortotropisk formulering, hvor *Poisson*-forholdet reduseres. Dette kan også neglisjeres i DIANA ved å velge «*No Poisson reduction*».

1.3 Armering

1.3.1 Embedded reinforcement

Den vanligste måten å inkludere armering i en modell av armert betong er ved å bruke antagelsen om *perfect bond*. Man antar i denne modellen at armeringen får like deformasjoner som betongelementene den er innebygget i. En armeringsstang eller –nett er altså utsatt for lik tøyningstilstand som et betongfiber som er på linje med stangen eller nettet. Armering innsatt i modellen på denne måten kalles «*embedded reinforcement*». Denne antagelsen virker realistisk i uopprisset tilstand, men kan være utilstrekkelig når riss oppstår. Hvis målet med analysen er å fremskaffe presise prediksjoner på rissvidde og rissavstand på et detaljert nivå, er det nødvendig å benytte spesielle *interface*-elementer som modellerer kontakten mellom stål og omliggende betong. Relasjonen mellom relative deformasjoner og spenninger kommer nå fra et *bond-slip*-fenomen og ikke fra en bruddprosess. Bruk av *bond-slip*-elementer er lite økonomisk ettersom det krever bruk av ytterligere elementer, i tillegg til at det kreves at grensene til elementene er i linje med armeringen. Derfor burde *bond-slip*-modellering kun benyttes hvis det er en klar indikasjon på at man ikke kan fremskaffe nødvendige løsninger uten bruk av den. Ellers er bruk av *embedded reinforcement* tilstrekkelig for armert betong.

Ideen om *embedded reinforcement* antyder at det er to ulike bidrag til det interne virtuelle arbeidet, hvor man kan dele opp spenningene til betongen og armeringen i to ulike deler. Fordelen med dette er at man kan spesifisere spenning-tøyningsegenskapene til betongen og armeringen uavhengig av hverandre. For betongen kan man benytte hvilken som helst materialmodell, og kan inkludere ikke-lineære fenomener som opprissing eller plastisitet. Armeringsstålet kan modelleres med lineært-elastiske materialegenskaper eller med elasto-plastiske modeller med fastning som for eksempel Von Mises plastisitet.

2. Numeriske løsningsmetoder

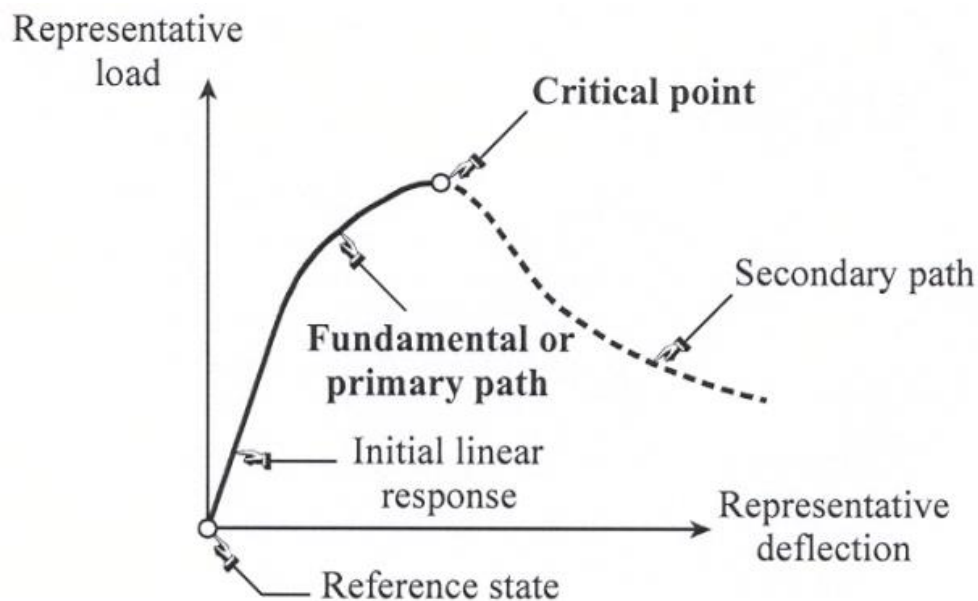
Litteratur benyttet for studie av ulike numeriske løsningsmetoder har vært Forelesninger fra kurset TKT4197 Ikke-lineær elementanalyse [4] og DIANA User's Manual [3].

2.1 Ikke-lineær analyse

For ikke-lineære FEM-problemer er ikke relasjonen mellom last- og deformasjonsvektoren lineær, og avhenger ofte av deformasjonshistorien. Stivhetsmatrisen \mathbf{K} og lastvektoren \mathbf{R} kan nå være funksjoner av deformasjonsvektoren \mathbf{u}

$$[\mathbf{K}(\mathbf{u})]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{u})\} \quad (2.1)$$

Generelt er målet med analysen er å regne ut deformasjonsvektoren som bringer de interne og eksterne kreftene i likevekt. For å bestemme likevektstilstanden diskretiserer vi problemet med lastinkrementer, som betyr at vi påfører last trinnvis. Ved hvert lasttrinn eller lastinkrement regner vi ut tangent-stivhetsmatriser og deformasjoner hvor vi da får frem en grafisk fremstilling av responsen kalt *likevektbanen* eller *equilibrium path* som vist på figur 2.1.



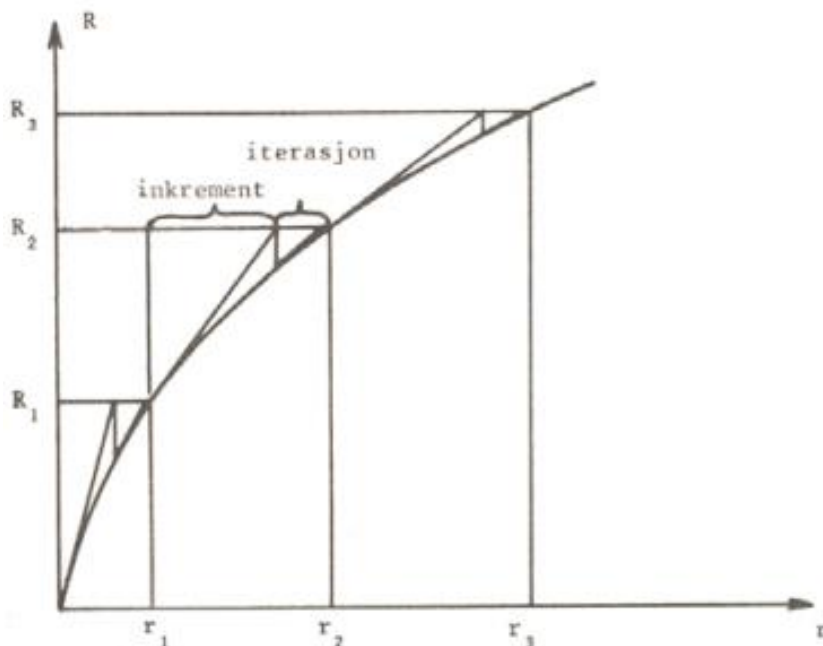
Figur 2.1. Likevektbane som først utviser en lineær respons og etter hvert når et kritisk punkt [4].

2.1.1 Inkrementell-iterativ løsningsmetode

For å oppnå likevekt på slutten av hvert lasttrinn benytter vi diverse iterasjonsmetoder. Disse fremgangsmåtene kalles derfor inkrementelle-iterative løsningsmetoder og er metoden DIANA benytter for å løse ikke-lineære systemer. En inkrementell-iterativ løsningsmetode kan ha følgende prosedyre [4]:

1. Etter å ha oppnådd tilfredsstillende likevekt mellom påført last og interne krefter i et lasttrinn $n-1$, forutsier man deformasjonen \mathbf{u}_i^n basert på den konvergente deformasjonen \mathbf{u}^{n-1} basert på forrige lastinkrement. Iterasjonsnummeret i settes lik 0.
2. Evaluer *ubalansert last* eller *residual force* \mathbf{r}_i^n basert på utregnet deformasjon i nåværende lasttrinn n : $\mathbf{r}_i^n = \mathbf{R}^{ext} - \mathbf{R}^{int}(\mathbf{u}_i^n)$
3. Sjekk om man får konvergens av et forhåndsbestemt konvergenzkriterium. Hvis løsningen konvergerer kan man gå til neste inkrement $n+1$ og gjenta prosessen fra punkt 1.
4. Hvis løsningen ikke konvergerer re-evaluerer man tangentstivheten $\mathbf{K}_{T_i}^n$ basert på utregnet deformasjon i nåværende lasttrinn n .
5. Evaluer den iterative deformasjonen $\delta\mathbf{u}$ i nåværende lasttrinn n : $\delta\mathbf{u}_i^n = (\mathbf{K}_{T_i}^n)^{-1} \mathbf{r}_i^n$
6. Oppdater deformasjonen $\mathbf{u}_{i+1}^n = \mathbf{u}_i^n + \delta\mathbf{u}_i^n$. Iterasjonsnummeret settes til $i = i + 1$, og man går tilbake til punkt 2.

En grafisk fremstilling av prosessen er vist på figur 2.2.



Figur 2.2: Inkrementell-iterativ løsningsprosedyre [4].

2.2 Iterasjonsmetoder

De ulike iterasjonsmetodene varierer med måten man finner den iterative deformasjonen $\delta \mathbf{u}$ på. Prosedyren vist ovenfor bruker en *Newton-Raphson* metode og er én av tre iterasjonsmetoder DIANA benytter. De to andre er *Quasi-Newton* metoden og *Constant stiffness* metoden.

2.2.1 Newton-Raphson

Newton-Raphson metoder finner den iterative deformasjonen ved

$$\delta \mathbf{u}_i^n = (\mathbf{K}_{T_i}^n)^{-1} \mathbf{r}_i^n \quad (2.2)$$

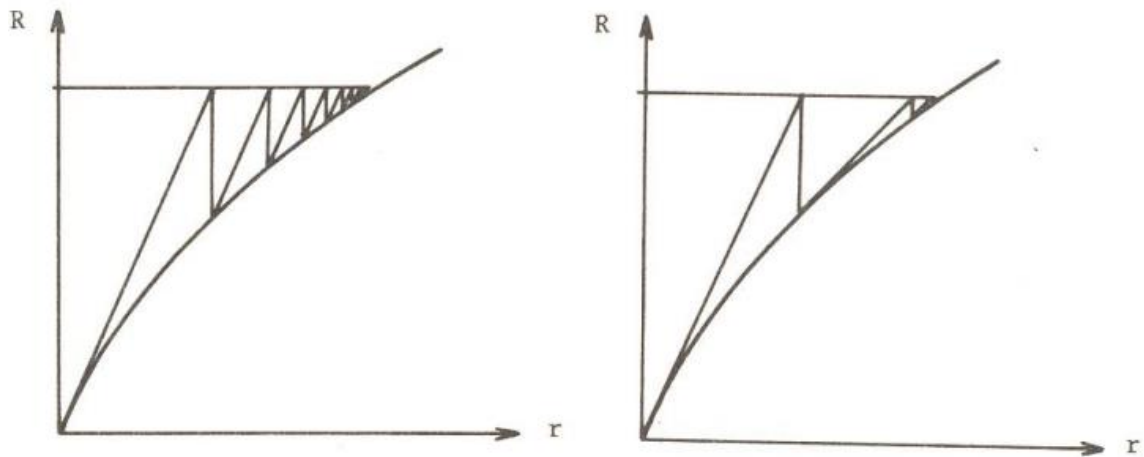
, hvor $\mathbf{K}_{T_i}^n$ og \mathbf{r}_i^n representerer henholdsvis systemets tangent-stivhetsmatrise og ubalansert lastvektor for iterasjon i og lastinkrement n . Generelt kan vi skille mellom to ulike varianter av Newton-Raphson; en *Standard Newton-Raphson* metode og en *Modifisert Newton-Raphson* metode.

I en standard Newton-Raphson iterasjon oppdateres tangent-stivhetsmatrisen $\mathbf{K}_{T_i}^n$ for hver iterasjon, som i prosedyren vist i kapittel 2.1.1. Dette betyr at den iterative deformasjonen $\delta \mathbf{u}_i^n$ er basert på den senest kjente tilstanden, selv om dette ikke er en likevektstilstand. En standard Newton-Raphson metode er effektiv i mange tilfeller og kan forevise kvadratisk konvergens, men er ikke nødvendigvis den mest økonomiske løsningsmetoden. Ved å evaluere og faktorisere $\mathbf{K}_{T_i}^n$ ved hver iterasjon vil det kreve stor beregningsinnsats og «data-tid» hvis antallet frihetsgrader er høyt. En standard Newton-Raphson metode krever derfor vanligvis få iterasjoner, men hver iterasjon er relativt tidskrevende. Metoden kan kun garantere kvadratisk konvergens hvis det er brukt en korrekt stivhetsmatrise og man kan oppleve divergens hvis for eksempel likevektbanen inneholder kritiske punkter.

2.2.2 Modifisert Newton-Raphson

En modifisert Newton-Raphson metode skiller seg fra standard Newton-Raphson ved at tangent-stivhetsmatrisen $\mathbf{K}_{T_i}^n$ bare oppdateres innimellom. Hvis $\mathbf{K}_{T_0}^n$ aldri oppdateres etter at initialstivheten er bestemt, kalles metoden *initialstivhetsmetoden*. Denne metoden kan føre til tregere konvergensthastighet, men krever kortere beregningstid da kun de iterative inkrementelle deformasjonene og den interne lastvektoren må regnes ut ved hver iterasjon. En modifisert Newton-Raphson med initial stivhet trenger derfor vanligvis flere iterasjoner, men hver iterasjon er raskere enn i standard Newton-Raphson.

For å oppnå raskere konvergens kan man også oppdatere $\mathbf{K}_{T_i}^n$ én gang per inkrement.

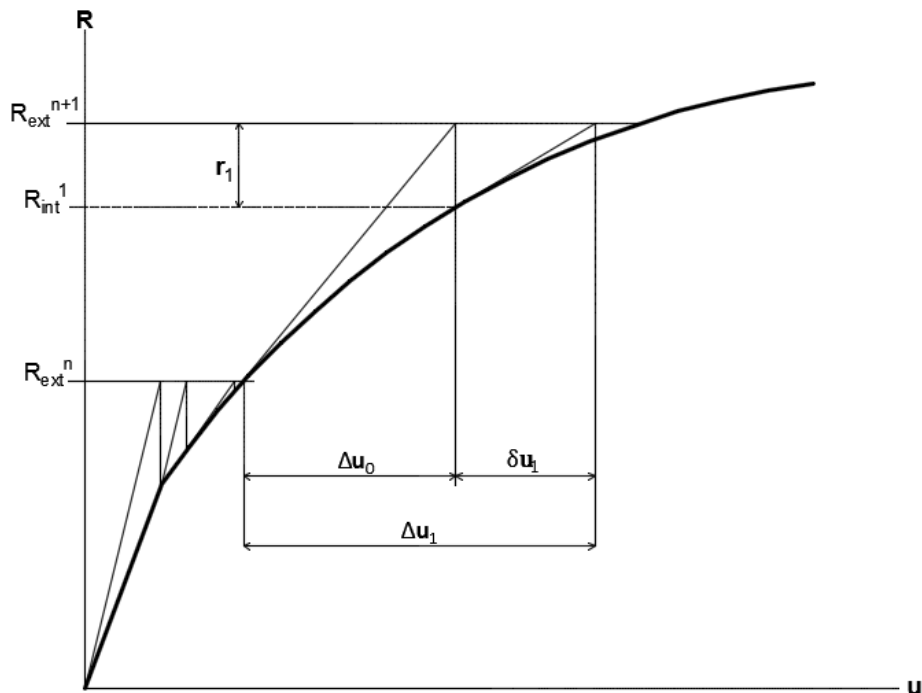


Figur 2.3a: Modifisert Newton-Raphson med initialstivhetsmetoden [4]. (Venstre)

Figur 2.3b: Modifisert Newton-Raphson hvor $K_{T_i}^n$ oppdateres én gang per inkrement [4]. (Høyre)

2.2.3 Quasi-Newton

Den grunnleggende idéen til Quasi-Newton metodene, som også er kalt *sekant-metoden*, er at man benytter informasjon fra tidligere utregnede løsningsvektorer og restlastsvektorer i løpet av inkrementet for å oppnå en bedre tilnærming. Denne metoden regner ikke ut en ny stivhetsmatrise ved hver iterasjon, men systemets stivhet bestemmes av kjente posisjoner på likevektbanen.



Figur 2.4: Quasi-Newton iterasjon.

Quasi-Newton relasjonen kan uttrykkes som

$$\mathbf{K}_{T_{i+1}}^n \delta \mathbf{u}_i^n = \delta \mathbf{r}_i^n \quad (2.3)$$

, hvor $\delta \mathbf{r}_i^n$ er endringen i ubalansert lastvektor:

$$\delta \mathbf{r}_i^n = \mathbf{r}_{i+1}^n - \mathbf{r}_i^n \quad (2.4)$$

Ved å benytte en stivhetsmatrise $\mathbf{K}_{T_i}^n$ som oppfyller Quasi-Newton relasjonen ovenfor, kan man regne ut den iterative deformasjonen med $\delta \mathbf{u}_i^n = (\mathbf{K}_{T_i}^n)^{-1} \mathbf{r}_i^n$.

Ved innsetting kan det vises at følgende matriser oppfyller Quasi-Newton relasjonen.

$$\mathbf{K}_{T_{i+1}}^n = \mathbf{K}_{T_i}^n + \frac{(\delta \mathbf{r}_i^n - \mathbf{K}_{T_i}^n \delta \mathbf{u}_i^n) \mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T \delta \mathbf{u}_i^n} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T_{i+1}}^n = \mathbf{K}_{T_i}^n + & \frac{(\delta \mathbf{r}_i^n - \mathbf{K}_{T_i}^n \delta \mathbf{u}_i^n) \mathbf{c}^T + \mathbf{c} (\delta \mathbf{r}_i^n - \mathbf{K}_{T_i}^n \delta \mathbf{u}_i^n)^T}{\mathbf{c}^T \delta \mathbf{u}_i^n} \\ & - \frac{(\delta \mathbf{r}_i^n - \mathbf{K}_{T_i}^n \delta \mathbf{u}_i^n)^T \delta \mathbf{u}_i^n \mathbf{c} \mathbf{c}^T}{(\mathbf{c}^T \delta \mathbf{u}_i^n)^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

, hvor \mathbf{c} er en valgfri vektor.

DIANA benytter tre ulike varianter kalt *Broyden*, *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)* og *Crisfield*. De ulike Quasi-Newton metodene er effektive fordi den inverse til den nye stivhetsmatrisen kan uttrykkes direkte fra forrige sekantstivhetsmatrise og oppdateringsvektorene ved å bruke Sherman-Morrisons formel.

Broyden

Hvis vektoren \mathbf{c} i likning 2.5 erstattes med $\delta \mathbf{u}_i^n$ og $\mathbf{K}_{T_{i+1}}^n$ inverteres, resulterer Broyden-metoden i

$$\mathbf{K}_{T_{i+1}}^{n-1} = \mathbf{K}_{T_i}^{n-1} + \frac{(\delta \mathbf{u}_i^{n-1} - \mathbf{K}_{T_i}^{n-1} \delta \mathbf{r}_i^n) \delta \mathbf{u}_i^{nT} \mathbf{K}_{T_i}^{n-1}}{\delta \mathbf{u}_i^{nT} \mathbf{K}_{T_i}^{n-1} \delta \mathbf{r}_i^n} \quad (2.7)$$

Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)

Innsetting av $\delta \mathbf{u}_i^n$ for \mathbf{c} i den nederste Quasi-Newton relasjonen vist over og invertering av $\mathbf{K}_{T_{i+1}}^n$ resulterer i

$$\mathbf{K}_{T_{i+1}}^{n-1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\delta \mathbf{u}_i^n \delta \mathbf{r}_i^{nT}}{\delta \mathbf{u}_i^{nT} \delta \mathbf{r}_i^n} \right) \mathbf{K}_{T_i}^{n-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\delta \mathbf{r}_i^n \delta \mathbf{u}_i^{nT}}{\delta \mathbf{u}_i^{nT} \delta \mathbf{r}_i^n} \right) + \frac{\delta \mathbf{u}_i^n \delta \mathbf{u}_i^{nT}}{\delta \mathbf{u}_i^{nT} \delta \mathbf{r}_i^n} \quad (2.8)$$

De inverse stivhetmatrisene for Broyden og BFGS regnes ikke ut eksplisitt, men den iterative deformasjonen kan regnes ut direkte ved innsetting av $\mathbf{K}_{T_{i+1}}^{n-1}$ i $\delta \mathbf{u}_i^n = (\mathbf{K}_{T_i}^n)^{-1} \mathbf{r}_i^n$. Ved suksessiv bruk av de ulike metodenes $\mathbf{K}_{T_{i+1}}^{n-1}$ kan den korrekte sekantstivheten så regnes ut fra initialstivheten brukt på starten av hvert inkrement $\mathbf{K}_{T_0}^n$ og en oppdateringsvektor for hver iterasjon. For høye iterasjonstall vil det kreve mer lagringsplass for oppdateringsvektorene siden det må lagres en ytterligere vektor med en størrelse lik antall frihetsgrader i systemet for hver mellomliggende iterasjon. Datatidsbruk og nødvendig lagringsplass vil derfor øke med antall iterasjoner for Broyden og BFGS.

Crisfield

Crisfield foreslo kun å bruke den seneste oppdateringsvektoren, for å unngå de høye lagringsplass- og datatidskravene i Broyden og BFGS metodene.

De tre Quasi-Newton metodene kan bruke for hvilket som helst valg av initialstivhetsmatrise $\mathbf{K}_{T_0}^n$, og har vanligvis en konvergenshastighet og datatidsbruk på et sted mellom en standard Newton-Raphson og en modifisert Newton-Raphson.

2.2.4 Constant Stiffness

Constant Stiffness metoden benytter den sist utregnede stivhetsmatrisen fra forrige lastinkrement. Denne metoden kan være ønskelig å bruke hvis noen av de tidligere forklarte metodene blir ustabile eller hvis man ønsker å beholde visse egenskaper. Man kan for eksempel benytte *Newton-Raphson* iterasjon i den første fasen og *Constant Stiffness* iterasjon i den andre fasen. Stivheten i den andre fasen vil da være lik den sist utregnede stivheten i *Newton-Raphson* iterasjonen. Hvis *Newton-Raphson* eller *Quasi-Newton* feiler etter et antall vellykkede inkremerter, kan *Constant Stiffness* metoden benyttes videre. Ved bruk av denne prosessen fra første inkrement vil metoden kalles *Linear Stiffness metoden*.

2.2.5 Line search

Det finnes også variasjoner man kan kombinere med vanlige iterasjonsmetoder for å forbedre resultatet. DIANA tilbyr variantene *Continuation-iterasjon* og *Line Search*. For kontinuerlige deformasjonsprosesser kan man benytte Continuation iterasjon, men for problemer som inkluderer en hurtig endring i stivhet, som i opprissing eller armeringsflyt for armert betong, kan Line Search være nyttig. I tillegg til å øke konvergensthastigheten, kan bruk av Line Search også oppnå konvergens hvor det ikke er mulig uten bruk av metoden [4].

Ved Line Searches oppnås en optimal inkrement-lengde ved å redusere restkreftene i retningen til Δr til et minimum. Metoden kan brukes med alle de nevnte iterasjonsmetodene: standard og modifisert Newton-Raphson, Quasi Newton og Constant Stiffness.

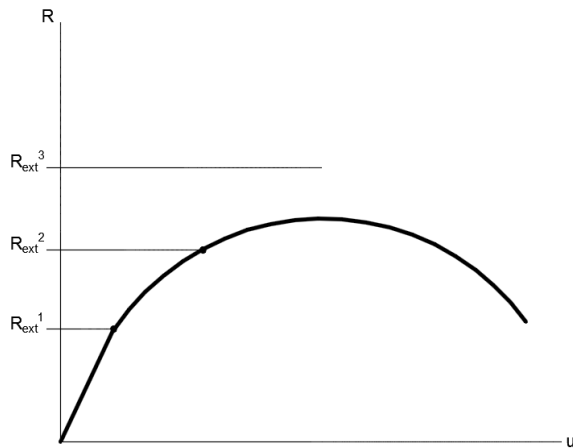
2.2.6 Konvergenzkriterier

Et konvergenzkriterium måler hvor godt den oppnådde løsningen tilfredsstillende likevekt. I ikke-lineære elementanalyser er konvergenznormene vanligvis basert på deformasjoner, restkrefter eller energi. I tillegg til å stoppe iterasjonene ved konvergens, kan konvergenzkriteriene også kontrollere at iterasjonsprosessen stopper hvis et spesifisert antall iterasjoner oppnås eller hvis iterasjonen tydelig fører til divergens. I DIANA er det også mulig å velge at analysen skal fortsette selv om løsningen ikke konvergerer. Konvergenzkriteriet og toleranser velges for å sørge for en presis, men økonomisk løsning. Hvis konvergenzkriteriet er for «løst» vil man få unøyaktige resultater, men hvis det er for «stramt» kan man bruke mye datatid for å oppnå unødvendig nøyaktighet.

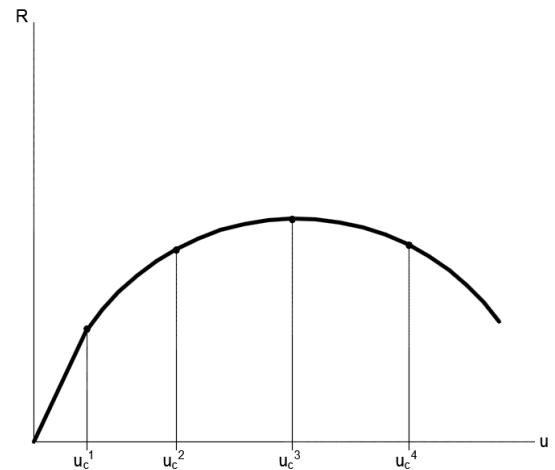
2.3 Inkrementprosedyrer

2.3.1 Generelt

I den inkrementelle-iterative løsningsprosedyren forklart i kapittel 2.1.1 har last blitt påført trinnvis på starten av inkrementene ved å øke den eksterne lastvektoren. Dette kalles *lastkontroll*. En annen måte å påføre last på en konstruksjon er ved å foreskrive deformasjoner u_c , noe som beskrives som *deformasjonskontroll*.

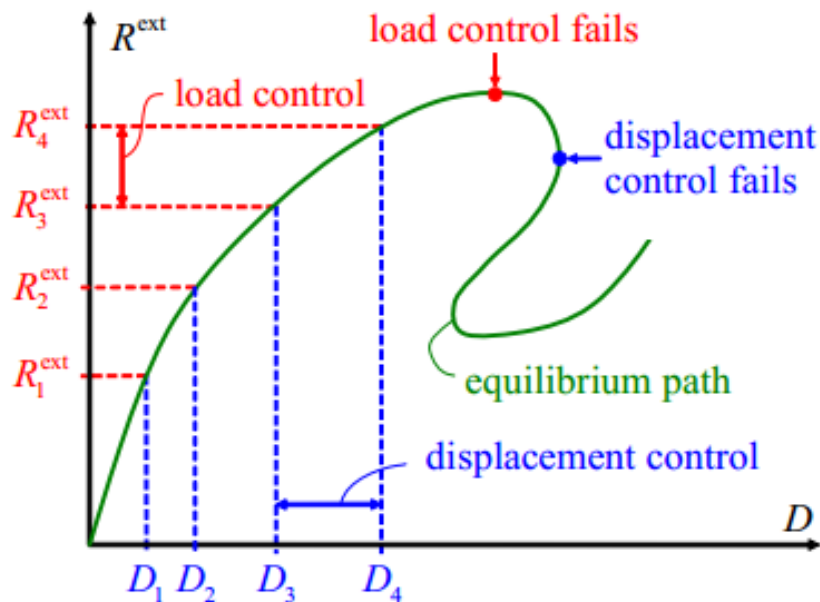


Figur 2.5a: Lastkontroll.



b) Deformasjonskontroll.

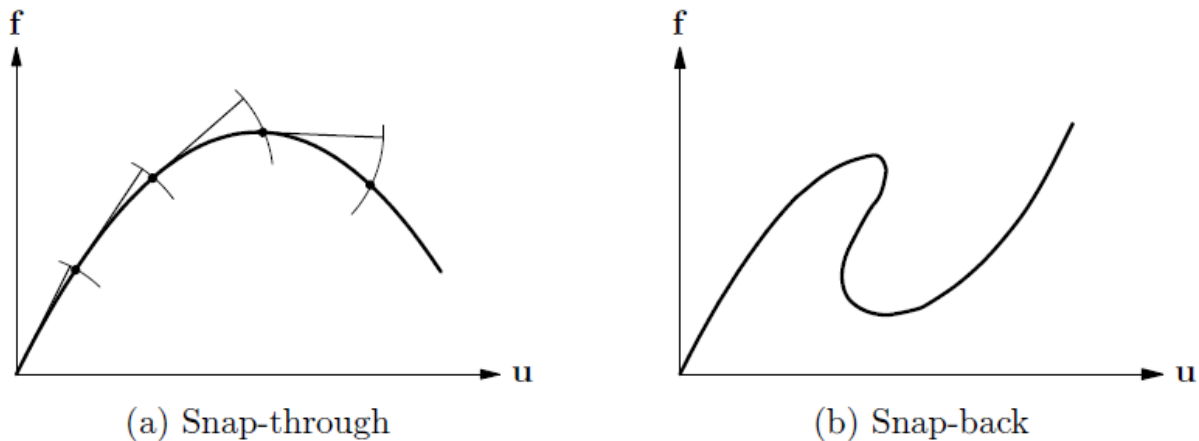
For last-forskyvningskurver som inneholder kritiske punkter, vil ikke lastkontroll eller deformasjonskontroll klare å følge likevektbanen som illustrert på figur 2.6.



Figur 2.6: Last- og deformasjonskontroll feiler [4].

2.3.2 Arc-length kontroll

For å kunne spore likevektbanen forbi kritiske punkter trengs det en metode hvor deformasjon og last kontrolleres samtidig. Disse metodene er kalt *arc-length*-metoder hvor buelengden til et kombinert deformasjons-lastinkrement kontrolleres under likevekts-iterasjonene. Denne fremgangsmåten fører til at vi kan løse problemer hvor vi opplever *snap-through* oppførsel hvor lastkontroll feiler eller *snap-back* oppførsel hvor deformasjonskontroll feiler, som vist på figur 2.7.



Figur 2.7a: Snap-through –oppførsel [3]

b) Snap-back –oppførsel [3]

Den grunnleggende idéen bak arc-length metoden er at både last- og deformasjonsinkrementer modifiseres under iterasjoner, i stedet for å være fast. Alle varianter av metoden består av en prediksjonsfase og en korreksjonsfase [4]:

1. Prediksjonsfasen:

Under prediksjonsfasen etableres et estimat av likevektbanens neste punkt fra en kjent konvergent løsning på likevektbanen.

2. Korreksjonsfasen:

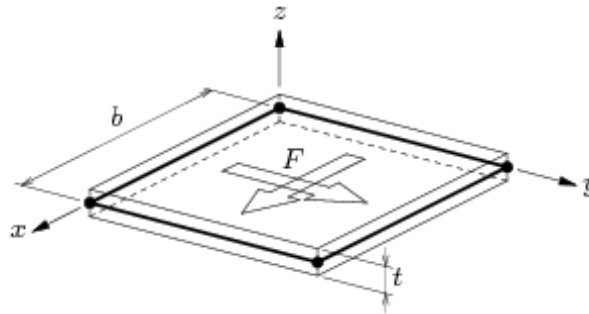
Fra dette estimatet anvendes Newton-Raphson iterasjoner under korreksjonsfasen for å finne et nytt punkt på likevektskurven, basert på inkrementelle likevektlikninger og en restriksjonslikning.

Arc-length metoder begrenser normen til deformasjonsinkrementet til en forhånds-gitt verdi gjennom restriksjonslikninger. Forskjellen mellom metodene er formen restriksjonslikningen får. I DIANA kan man velge arc-length kontroll med *Updated normal plane* eller *Spherical path*.

2.4 Elementer

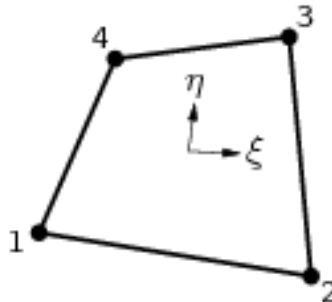
2.4.1 Membranelement

For skiver er det naturlig å benytte plan spennings-elementer, også kjent som membranelementer. Membranelementer kan kun ha noder med koordinater i elementets xy -plan, tykkelsen må være liten i forhold til elementets dimensjoner og all belastning må virke i elementets plan. Disse elementene kan kun brukes når det ikke er bøyning ut av konstruksjonens plan som for vegger og høye bjelker.



Figur 2.8: Skiveelement med plan spenning [3].

For modellering av skive kan det brukes et firkantet, isoparametrisk membranelement kalt Q8MEM. Dette elementet har fire noder med to translasjonsfrihetsgrader i hver node.

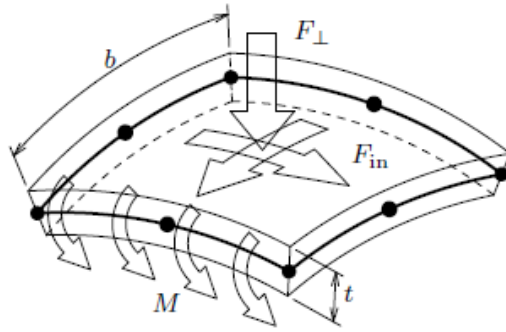


Figur 2.9: Q8MEM-element [3].

DIANA benytter 2x2 Gauss-integrasjon, men kan velge å benytte redusert 1x1 Gauss-integrasjon for å unngå null-energi moder.

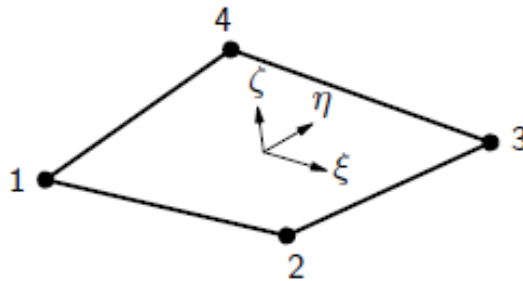
2.4.2 Skallelementer

Avhengig av hva slags resultater analysen er ment for, er det flere ulike elementer som kan benyttes for modellering av plater. For plater hvor Cauchy-spenninger er interessant kan man benytte kurvede skallelementer. Disse elementene er også gunstig å benytte for skallanalyser. Som membranelementer må tykkelsen være liten i forhold til elementets dimensjoner, men krefter kan virke i retninger mellom normalen til planet og planet. Momenter burde virke om en akse som er i elementets koordinatsystem.



Figur 2.10: Kurvede skallelementer [3].

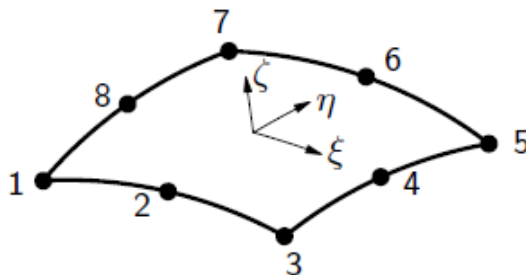
Plateanalysen benytter et firkantet, isoparametrisk kurvet skallelement med lineær interpolasjon over elementet kalt Q20SH. Dette elementet har fire noder med fem frihetsgrader i hver node; tre translasjonsfrihetsgrader og to rotasjonsfrihetsgrader.



Figur 2.11: Q20SH-element [3].

DIANA benytter redusert 2x2 Gauss-integrasjon over elementets overflate og 3-punkts Simpson-integrasjon over tykkelsen. Integrasjon over tykkelsen i kun 3 punkter kan gi urealistiske resultater i en ikke-lineær analyse, så det er derfor anbefalt å benytte flere punkter noe man gjør ved å endre dat.-filen. Plateanalysen benytter 7-punkts Simpson-integrasjon over tykkelsen for bedre nøyaktighet.

For skallanalysen er det valgt et 8-nodet firkantet, isoparametrisk kurvet skallelement med kvadratisk interpolasjon kalt CQ40S. Dette elementet har 8 noder med 5 frihetsgrader i hver node.



Figur 2.12: CQ40S-element [3].

Dette elementet er valgt for å få flere noder langs konstruksjonen og er nødvendig for ønsket nøyaktighet. Her benyttes også redusert 2x2 Gauss-integrasjon over elementet. For bedre nøyaktighet benyttes en 9-punkts Simpson-integrasjon over elementets tykkelse.

Del II

Analyse

3. Analyse - Generelt

De ulike konstruksjonene vil først analyseres lineært hvor resultatene verifiseres i henhold til lineær elastisitetsteori for å sikre et godt grunnlag for ikke-lineær analyse. Konstruksjonene er ved lineær analyse modellert som rene betongseksjoner i DIANA og det benyttes en felles betongkvalitet B30. Ved ikke-lineær analyse dimensjoneres først armeringen i konstruksjonene og det benyttes armeringsstål B500NC. Etter innsetting av armering og ikke-lineariteter i modellen beregnes en bruddlast som sammenlignes med påsatt dimensjonerende last. Ulike materialmodeller og numeriske løsningsmetoder vil prøves og kommenteres.

Felles materialparametere:

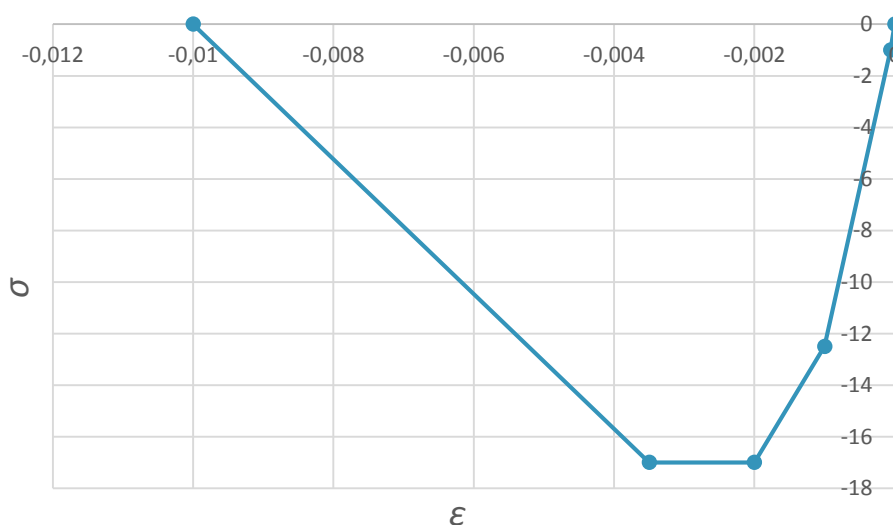
Betong

For den lineært elastiske delen varierer valget av parameterne elastisitetsmodul E og Poisson-forhold ν , og er angitt i beskrivelsen i hver konstruksjon. Med betong B30 blir dimensjonerende flytespenning i trykk og strekk:

$$f_{cd} = 0,85 \cdot \frac{30}{1,5} = 17 \text{ MPa} \quad (3.1)$$

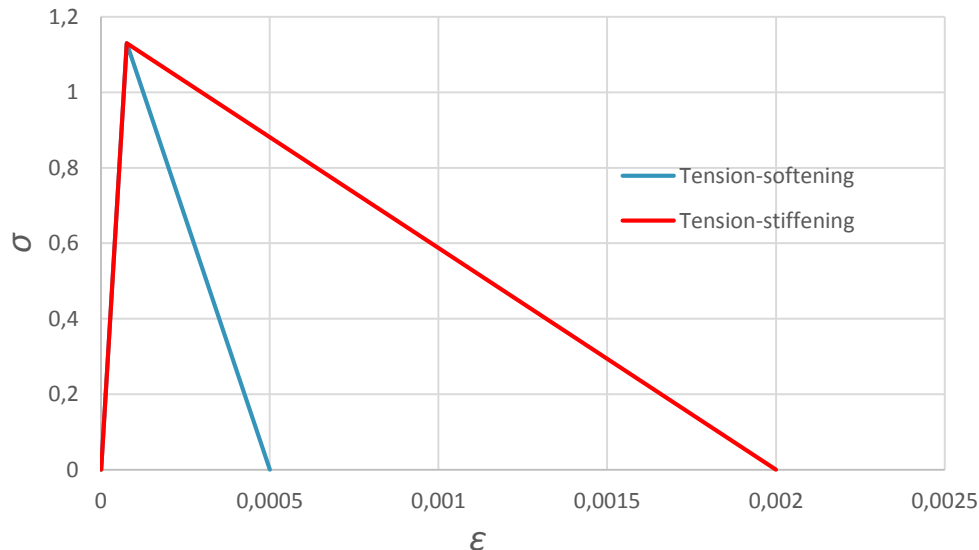
$$f_{ctd} = 0,85 \cdot \frac{2,0}{1,5} = 1,13 \text{ MPa} \quad (3.2)$$

For den ikke-lineære analysen er det valgt å benytte en multi-lineær modell i trykk som vist på figur 3.1 og lineær *softening/stiffening* i strekk.



Figur 3.1: Multi-lineær trykkmodell med 17 MPa som trykkfasthet.

Modellering av *tension-stiffening* som beskrevet i kapittel 1.2.4, gjøres ved å definere bruddtøyningen i betongen tilnærmet lik flyttøyningen til armeringen, som her er antatt til å være $\varepsilon = 0,002$. *Tension-softening* modelleres ved å definere bruddtøyningen til betongens bruddtøyning, som her er satt til $\varepsilon = 0,0005$. Dimensjonerende flytespenning i trykk og strekk for betong B30 blir da:



Figur 3.2: Spenning-tøyningsrelasjon for *tension-softening* og *tension-stiffening*.

For å kunne bestemme en best mulig og realistisk bruddlast for de armerte betongkonstruksjonene, benyttes det opprissingsmodeller for ikke-lineære analyser av armert betong, og vil variere mellom *total strain fixed crack*- og *total strain rotating crack*-modeller. Plastisitets-modellene for betong beskrevet i kapittel 1.1, er lite hensiktsmessige for bruddlastanalysene gjort i denne oppgaven da disse ikke inkluderer opprissing, og vil derfor ikke benyttes.

Materialmodellene som analyseres vil også variere mellom bruk av *fracture energy based*- og *ultimate strain based*-funksjoner som beskrevet i kapittel 1.2.4.

Armering

I FEM-modellene benyttes *embedded reinforcement* som beskrevet i kapittel 1.3, kombinert med Von Mises plastisitet. For den lineært elastiske delen er antagelsen om *perfect bond* brukt med en elastisitetsmodul $E = 200\,000$ MPa. Dimensjonerende flytespenning for strekk for armering B500NC blir da

$$f_{yd} = \frac{500}{1,15} = 434 \text{ MPa} \quad (3.3)$$

Ikke-lineært er armeringen modellert med en Von Mises plastisitetsmodell med flytegrense lik 434 MPa.

Numeriske løsningsmetoder

De lineære analysene er utført som statiske, lineære analyser med direkte løsning, mens de ikke-lineære analysene benytter inkrementelle-iterative løsningsmetoder. Iterasjonsmetodene varierer mellom Standard og Modifisert *Newton-Raphson*, samt *Quasi-Newton* (sekantstivhet) med *Crisfield*-varianten da denne krever minst lagringsplass. Alle analysene vil benytte *arc-length* kontroll av typen *updated normal plane*, ettersom alle analysene vil oppleve *snap-through*- eller *snap-back*-oppførsel.

Det velges manuelt laststeg på 0,1 av påsatt last i antall nødvendige steg. Antall iterasjoner for hvert laststeg som benyttes for hver konstruksjon vurderes og justeres for å få best mulig konvergens. Konvergenormen velges som forskyvningsbasert med en konvergenstoleranse på 0,01, og analysen fortsetter selv om konvergens ikke inntreffer.

4. Skive

4.1 Lineær analyse

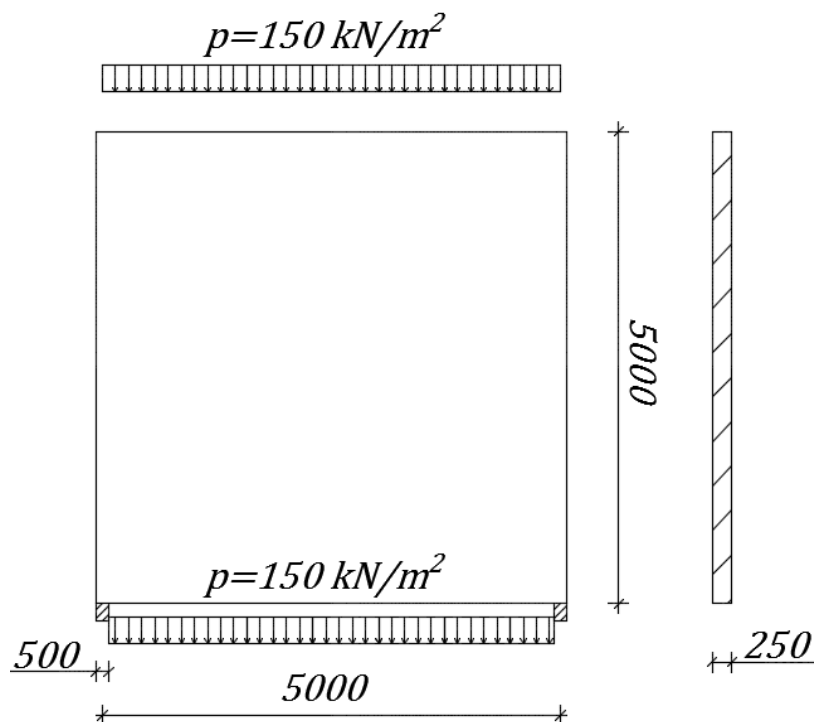
Det er utført en lineær analyse av en 5x5 meters fritt opplagt betongskive, hvor spenningsfordelingen på midten er verifisert i henhold til lineær, elastisk teori angitt i Leonhardt [5]. Resultatene viste god overenstemmelse med teorien for spenningene i bunnen av skiven med et avvik på -0,83 % ved bruk av et Poisson-forhold på 0,2. For maksimale spenninger i felt gir FEM-analysen et avvik på 7,78 %, hvor det er mulig å få bedre nøyaktighet ved å endre Poisson-tall, men samtidig fører til lavere nøyaktighet for spenningene i bunn. Ettersom en ikke-lineær analyse mest sannsynlig vil få brudd i bunnen av skiven, aksepteres resultatene med et Poisson-forhold 0,2 og vil danne grunnlag for ikke-lineær analyse. Detaljerte resultater kan sees i Vedlegg A.

Tabell 4.1: Avvik mellom håndberegninger og FEM-analyse for skive.

Skive	Håndberegninger	FEM-analyse	Avvik
Spenninger i bunn	0,96 N/mm ²	0,952 N/mm ²	-0,83 %
Spenninger i felt	0,18 N/mm ²	0,194 N/mm ²	7,78 %

4.2 Geometri

Skiven er som i den lineære analysen en 5x5 meters fritt opplagt betongskive med opplagerbredde 500 mm og tykkelse på 250 mm. For den ikke-lineære analysen er det påsatt en jevnt, fordelt linjelast på 150 kN/m på øvre og nedre kant av skiven.

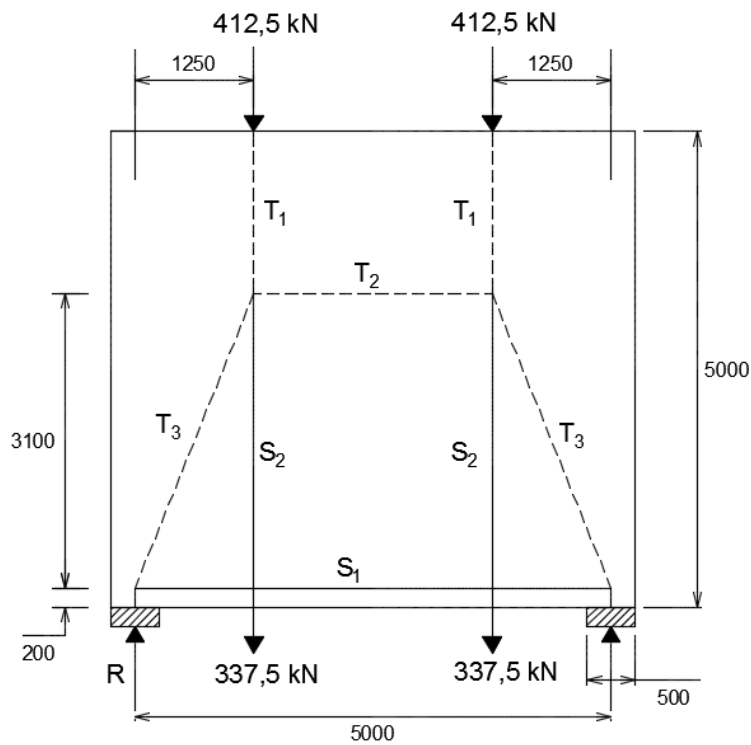


Figur 4.1: Skivens geometri.

4.3 Dimensjonering

Laster i skiva er regnet ut med en «Strut-tie» -modell som vist i betongkompendiet fra TKT4222 Betongkonstruksjoner 3 av Øverli og Sørensen [6] og dimensjonering av skivens armering er gjort i henhold til EC2 [7].

Velger at horisontal armering er valgt over 400 mm fra nedre kant, og at indre momentarm er $z = 0,62h = 3100$ mm.



Figur 4.2: Strut-tie modell.

Utregning av vinkel φ :

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3100}{1250}\right) = 68^\circ$$

Punktlaster på øvre kant:

$$\frac{q_{Ed}L_{total}}{2} = \frac{150 \cdot 5,5}{2} = 412,5 \text{ kN}$$

Punktlaster på nedre kant:

$$\frac{q_{Ed}(L - 0,5)}{2} = \frac{150 \cdot (5 - 0,5)}{2} = 337,5 \text{ kN}$$

Opplagerkrefter:

$$R = \frac{2q_{Ed}L_{total}}{2} = 150 \cdot 5,5 = 825 \text{ kN}$$

Strekk- og trykkrefter i skiven:

$$T_3 = \frac{R}{\sin \varphi} = \frac{825}{\sin 68} = 889,8 \text{ kN}$$

$$S_1 = T_3 \cos \varphi = 889,8 \cdot \cos 68 = 333,3 \text{ kN}$$

$$S_2 = \frac{q_{Ed}(L - 0,5)}{2} = \frac{150 \cdot (5 - 0,5)}{2} = 337,5 \text{ kN}$$

$$T_1 = 412,5 \text{ kN}$$

$$T_2 = S_1 = 333,3 \text{ kN}$$

Nødvendig horisontal armering:

$$A_{sh} = \frac{S_1}{f_{yd}} = \frac{333 \cdot 300}{434} = 768 \text{ mm}^2 \rightarrow 4\phi 16 \rightarrow A_{sh} = 804 \text{ mm}^2$$

Nødvendig vertikal armering:

$$A_{sv} = \frac{2S_2}{f_{yd}} = \frac{2 \cdot 337 \cdot 500}{434} = 1556 \text{ mm}^2 \rightarrow \phi 12s325 \text{ langs } 4,5 \text{ m} = 1566 \text{ mm}^2$$

$$A_{sv} = \frac{1566 \text{ mm}^2}{4,5 \text{ m}} = 348 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Bredde av trykkraft T_3 ved opplager:

$$\frac{t_1}{500} = \sin 68 \rightarrow t_1 = 463,6 \text{ mm}$$

$$\frac{t_2}{400} = \cos 68 \rightarrow t_2 = 149,8 \text{ mm}$$

$$t = t_1 + t_2 = 613,4 \text{ mm}$$

Redusert betongstyrke etter EC2 2.1.10:

$$\sigma_{Rd,max} = 0,85 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot 17 = 12,7 \text{ N/mm}^2$$

Trykkspenninger ved opplager:

$$\sigma_{c1} = \frac{R}{b \cdot 500} = \frac{825 \cdot 000}{250 \cdot 500} = 6,6 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{Rd,max} \text{ OK!}$$

Trykkspenninger ved trykkraft T_3 :

$$\sigma_{c2} = \frac{T_3}{b \cdot t} = \frac{889 \cdot 800}{250 \cdot 613,4} = 5,8 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{Rd,max} \text{ OK!}$$

Minimumsarmering i henhold til EC2 NA.9.6.2 og EC2 NA.9.6.3:

$$A_{sv,min} = 0,002A_c = 0,002 \cdot 250 \cdot 1000 = 500 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$A_{sh,min} = \max \left\{ 0,25A_{sv} ; \frac{0,3A_c f_{ctm}}{f_{yk}} \right\} = \max \left\{ 0,25 \cdot 500 ; \frac{0,3 \cdot 250000 \cdot 2,9}{500} \right\} \\ = 435 \text{ mm}^2/\text{m}$$

På grunn av redusert kapasitet på grunn av skjærbrudd er det nødvendig med horisontal armering i hele skiven. Valg av armering:

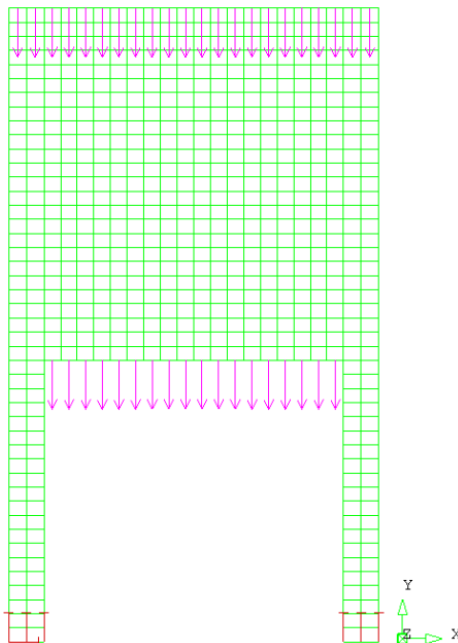
Horisontal stangarmering: **804 mm²**

Armeringsnett over skiven:

- Vertikal armering: **500 mm²/m**
- Horisontal armering: **435 mm²/m**
-

4.4 FEM-modell

Skiven er modellert som 2D-konstruksjon ettersom det kun virker krefter i xy-planet. For å inkludere opplagerbredden på 500 mm er skiven oppdelt i 22 elementer i x-retning, hvor elementlengden da blir $5500/22 = 250$ mm. Elementene i y-retning er delt opp så vi får en elementlengde på 200 mm, noe som er avstanden armeringen plasseres fra bunnen av skiva. Dette tilsvarer en oppdeling på $5000/200 = 25$ elementer. Det benyttes Q8MEM-elementer over hele skiven, med 2x2 Gauss-integrasjon over elementene.



Figur 4.3: FEM-modell av skive med opplagerbetingelser og laster.

Det er valgt å modellere opplagrene som søyler slik at konstruksjonen oppfører seg som en fritt opplagt skive med opplagerbredde på 500 mm. Skiven er også forsøkt modellert med opplagere direkte på skivens bunn, hvor det var små avvik for resulterende bruddlast.

Horisontal stangarmering er innsatt i modellen som *reinforcement bar* med en verdi 804 mm² som tverrsnittsareal, og er plassert i armeringens tyngdepunkt som er 200 mm fra skivens bunn. Vertikal armering og horisontal minimumsarmering er lagt inn som *reinforcement grid* over hele skiven med verdier for ekvivalent tykkelse 0,500 i y-retning og 0,435 i x-retning.

Lasten er påsatt som en linjelast på øvre kant og nedre kant av skiven med en verdi 150 kN/m.

For betongen er det benyttet en elastisitetsmodul $E = 20000 \text{ N/mm}^2$ og Poisson-forhold 0,2. Det er modellert med en multi-lineær trykkmodell som vist på figur 1.8e. For betong i strekk er det modellert med en *tension-softening* effekt, hvor bruddtøyningen er satt til $\varepsilon = 0,0005$. Det er antatt ingen effekt av *lateral confinement* oppførsel, opprissingsreduksjon eller Poisson-reduksjon.

Opprissingsmodeller med en *ultimate strain based*-funksjon er *Mode 1 tensile strain* satt til 0,0005. For opprissingsmodeller med en *fracture energy based*-funksjon er følgende parametere benyttet:

Elementene er rektangulære med dimensjoner 250x200 mm. *Crack bandwidth* blir da:

$$h = \sqrt{b \cdot h} = \sqrt{250 \cdot 200} = 224 \text{ mm}$$

Bruddenergien kan da regnes ut som:

$$G_f = \frac{1}{2} \cdot f_t \cdot \varepsilon \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1,13 \cdot 0,0005 \cdot 224 = 0,06328$$

For *total strain fixed crack* modellene antas det at skjærstivheten ikke reduseres ved opprissing ved å definere *shear retention* faktoren som $\beta = 1,0$.

5. Plate

5.1 Lineær analyse

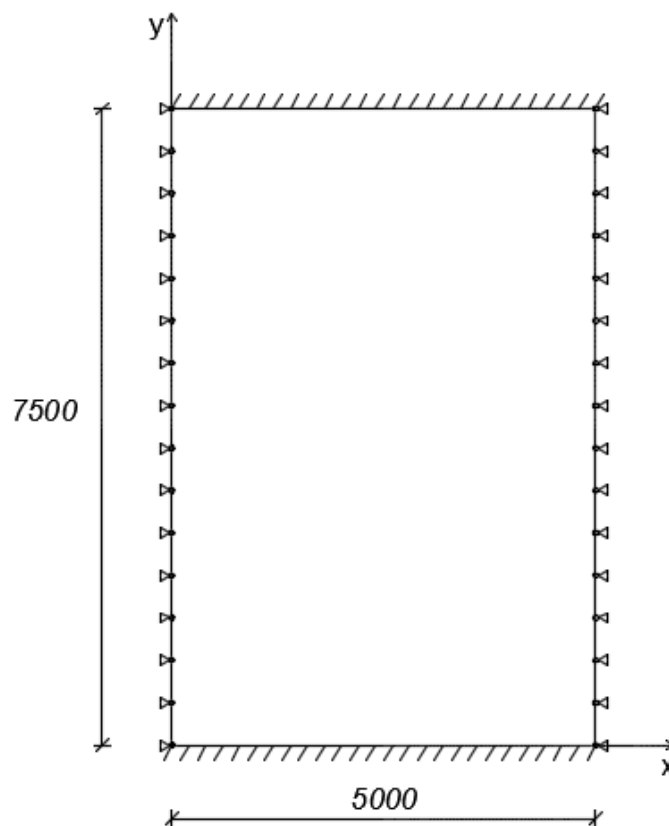
Det er utført en lineær analyse av en 5x7,5 meter betongplate, hvor momenter og nedbøyning på midten er verifisert i henhold til formler basert på lineær, elastisk teori angitt i Betonkalender [8]. FEM-analysen viste meget god overenstemmelse med teorien for både moment og nedbøyning og resultatene hadde små avvik. Detaljerte resultater er presentert i Vedlegg B.

Tabell 5.1: Avvik mellom håndberegninger og skive for plate.

Plate	Håndberegninger	FEM-analyse	Avvik
Nedbøyning	8,88 mm	8,91 mm	0,33 %
M_{xm}	-18382,35 Nmm	-18500,00 mm	0,64 %
M_{ym}	-11682,24 Nmm	-11700,00 mm	0,15 %

5.2 Geometri

Plata er som i den lineære analysen en rektangulær betongplate hvor langsiden er fritt opplagt og kortsidene er fast innspent. Tykkelsen på plata er satt til 150 mm og det er påsatt en jevnt, fordelt flatelast på 15 kN/m².



Figur 5.1: Platas geometri.

5.3 Dimensjonering

Momenter i plata er regnet ut etter lineær, elastisk teori fra Beton-kalender [8] og armeringen er dimensjonert i henhold til EC2 [7].

Momenter i underkant fra Beton-kalender:

$$M_x = \frac{pl_x^2}{20,4} = \frac{15 * 5^2}{20,4} = 18,38 \text{ kN/m}$$

$$M_y = \frac{pl_x^2}{32,1} = \frac{15 * 5^2}{32,1} = 11,68 \text{ kN/m}$$

Moment ved innspenning fra Beton-kalender:

$$M_y = \frac{pl_x^2}{9,5} = \frac{15 * 5^2}{9,5} = 39,47 \text{ kN/m}$$

Overdekning i henhold til EC2 4.4.1.1(1). Antar eksponeringsklasse XC2:

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev} = 25 + 10 = 35 \text{ mm}$$

Antar $\phi 10$ for underkantarmering og at armering i x- og y-retning ligger på samme nivå. Effektiv høyde for underkantarmering:

$$d^{underkant} = h - c_{nom} - \phi/2 = 150 - 35 - 5 = 110 \text{ mm}$$

Antar $\phi 16$ for overkantarmring. Effektiv høyde for overkantarmring:

$$d^{overkant} = h - c_{nom} - \phi/2 = 150 - 35 - 8 = 107 \text{ mm}$$

Momentkapasitet i betong:

$$M_{Rd}^{underkant} = 0,275 f_{cd} b d^{underkant} = 0,275 \cdot 17 \cdot 10^3 \cdot 110 = 56,57 \text{ kN/m}$$

$$M_{Rd}^{overkant} = 0,275 f_{cd} b d^{overkant} = 0,275 \cdot 17 \cdot 10^3 \cdot 107 = 53,52 \text{ kN/m}$$

Indre momentarmer:

$$z_x^{underkant} = \left(1 - 0,17 * \frac{18,38}{56,57}\right) d = 0,945d = 104 \text{ mm}$$

$$z_y^{underkant} = \left(1 - 0,17 * \frac{11,68}{56,57}\right) d = 0,95d = 105 \text{ mm}$$

$$z_y^{overkant} = \left(1 - 0,17 * \frac{39,47}{53,52}\right) d = 0,87d = 93,6 \text{ mm}$$

Nødvendig armering i underkant:

$$A_{sx} = \frac{18,38 * 10^6}{104 * 434} = 407 \text{ mm}^2/m \rightarrow \phi 10s190 = \mathbf{413 \text{ mm}^2/m}$$

$$A_{sy} = \frac{11,68 * 10^6}{105 * 434} = 256 \text{ mm}^2/m \rightarrow \phi 10s300 = \mathbf{262 \text{ mm}^2/m}$$

Nødvendig armering i overkant:

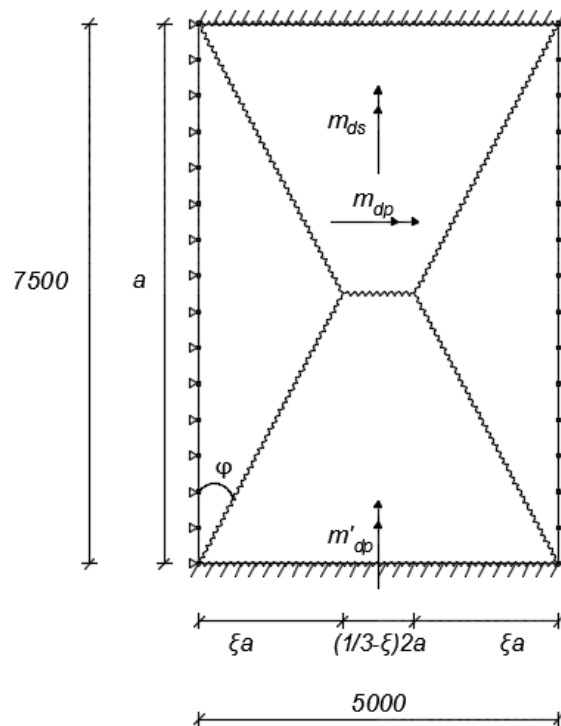
$$A_{sy} = \frac{39,47 * 10^6}{93,6 * 434} = 977 \text{ mm}^2/m \rightarrow \phi 16s200 = \mathbf{1005 \text{ mm}^2/m}$$

Minimum overkantarmring i x-retning i henhold til EC2, NA.9.2.1.1(1):

$$A_{s,min} = 0,26 * \frac{2,9}{500} * 1000 * 107 = \mathbf{162 \text{ mm}^2/m}$$

5.4 Bruddlinjeberegning

Det er utført en håndberegning for plata basert på bruddlinjeteori. Bruddlinjeberegning bestemmer bruddlasten til konstruksjonene ved å anta en kollapsmekanisme som er kompatibel med randbetingelsene. Momentene ved de plastiske hengselslinjene er bruddmomentkapasiteten til snittene og bruddlasten bestemmes av prinsippet om virtuelt arbeid. Bruddlinjeteorien er en øvre grense metode, hvor bruddlasten som regnes ut forventes å være enten korrekt eller for høy [6].



Figur 5.2: Antatt bruddlinjemønster.

Momentkapasiteter:

Underkant:

$$m_{dp} = A_{sx} \cdot f_{yd} \cdot z_x = 407 \cdot 434 \cdot 104 = 18,37 \cdot 10^6 \text{ Nmm/m}$$

$$m_{ds} = A_{sy} \cdot f_{yd} \cdot z_y = 256 \cdot 434 \cdot 104 = 11,67 \cdot 10^6 \text{ Nmm/m} = 0,64 \cdot m_{dp}$$

Overkant:

$$m_{dp}' = A_{sy} \cdot f_{yd} \cdot z_y = 977 \cdot 434 \cdot 93,6 = 39,69 \cdot 10^6 \text{ Nmm/m} = 2,16 \cdot m_{dp}$$

Ytre arbeid:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\xi a \cdot a \cdot w + \frac{1}{2} \cdot a \cdot w \cdot \left(\frac{1}{3} - \xi\right) \cdot 2a = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\xi\right) \cdot a^2 w$$

$$A_y = q \cdot V = q \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\xi\right) \cdot a^2 w$$

Lengde av skrå bruddlinjer:

$$L^{skrå} = \sqrt{(\xi a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\xi a}{a \cdot \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{4}}}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{\xi^2}{\xi^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\cos \varphi = \frac{a/2}{a \cdot \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{4}}}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{\xi^2 + \frac{1}{4}}$$

Momentkapasitet langs skrå bruddlinjer:

$$m_{\varphi} = m_{dp} (\sin^2 \varphi + 0,64 \cos^2 \varphi) = m_{dp} \frac{6,25\xi^2 + 1}{6,25\xi^2 + 1,5625}$$

Indre arbeid:

Langs midtlinje:

$$A_i = 2 \cdot 0,64 m_{dp} \cdot \left(\frac{1}{3} - \xi\right) \cdot 2a \cdot \frac{w}{0,5a} = 5,12 \left(\frac{1}{3} - \xi\right) \cdot w \cdot m_{dp}$$

Langs skrålinjer:

$$A_i = m_{\varphi} \cdot \xi a \cdot \frac{w}{0,5a} + m_{\varphi} \cdot 0,5a \cdot \frac{w}{\xi a} = m_{\varphi} \left(2\xi + \frac{1}{2\xi}\right) \cdot w$$

$$A_i = m_{dp} \frac{6,25\xi^2 + 1}{6,25\xi^2 + 1,5625} \cdot \left(2\xi + \frac{1}{2\xi}\right) \cdot w = \frac{6,25\xi^2 + 1}{3,125\xi} \cdot m_{dp} \cdot w$$

Langs bruddlinjer i overkant:

$$A_i = 2 \cdot 2,16m_{dp} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{w}{0,5a} = 5,76 \cdot m_{dp} \cdot w$$

Totalt indre arbeid:

$$A_i^{totalt} = A_i^{midt} + 4A_i^{skrå} + A_i^{overkant}$$

$$A_i^{totalt} = (7,47 + 2,88\xi + \frac{1,28}{\xi}) \cdot m_{dp} \cdot w$$

Arbeidslikevekt:

$$A_y = A_i$$

$$q \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\xi\right) \cdot a^2w = (7,47 + 2,88\xi + \frac{1,28}{\xi}) \cdot m_{dp} \cdot w$$

$$q = \frac{(7,47 + 2,88\xi + \frac{1,28}{\xi}) \cdot m_{dp} \cdot w}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\xi\right) \cdot a^2}$$

Minste verdi av q:

$$\frac{dq}{d\xi} = 0$$

$$\frac{\left(2,88 - \frac{1,28}{\xi^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\xi\right) - \left(7,47 + 2,88\xi + \frac{1,28}{\xi}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\xi\right)^2} = 0$$

Dette gir 2.gradslikningen:

$$3,45\xi^2 + 0,86\xi - 0,43 = 0$$

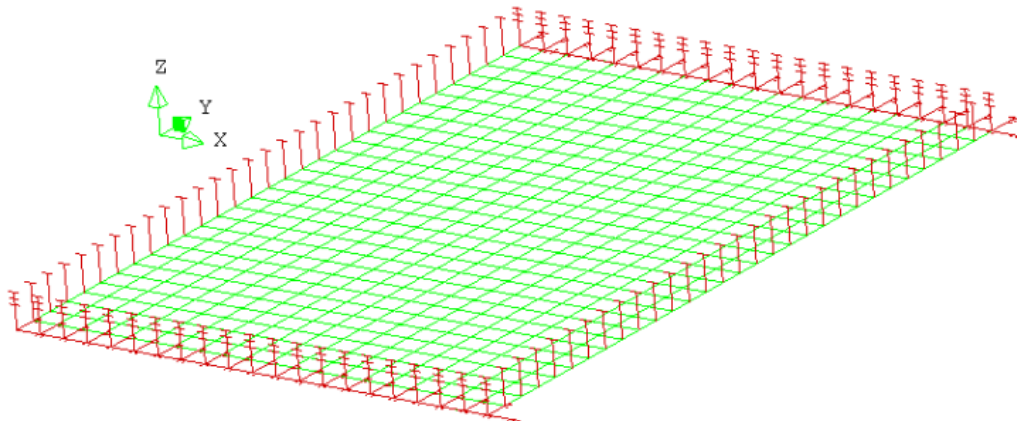
$$\xi = \frac{-0,86 + \sqrt{0,86^2 + 4 \cdot 3,45 \cdot 0,43}}{2 \cdot 3,45} = 0,25$$

Minste bruddlast blir:

$$q_{min} = \frac{(7,47 + 2,88 \cdot 0,25 + \frac{1,28}{0,25})}{(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0,25)} \cdot \frac{18,37 \cdot w}{7,5^2} = 17,39 \text{ kN/m}^2$$

5.5 FEM-modell

Plata er modellert som en 3D-konstruksjon ettersom det virker krefter normalt på xy-planet. Elementstørrelsen er valgt til en tilfeldig størrelse på 250 mm i både x- og y-retning, noe som tilsvarer en elementinndeling på 20x30 elementer. Det benyttes Q20SH-elementer over hele plata med 2x2 Gauss-integrasjon over elementet. Over tykkelsen benyttes 7-punkts Simpson-integrasjon for best mulig nøyaktighet.



Figur 5.2: FEM-modell av plate med opplagerbetingelser.

Randbetingelsene til plata, hvor langsidenes er fritt opplagt og kortsidene er fast innspente, er modellert som vist i tabell 5.2. Tabellen forteller at langsidenes kun er fastholdt mot translasjon i z-retning, mens kortsidene er fastholdt mot rotasjon i x-, y- og z-retning i tillegg til translasjon i z-retning. Det er et hjørne som er helt fastholdt mot all translasjon og rotasjon, mens hjørnet ved siden av kan beveges i x-retning. Det har vist seg å modellere innspenningen på denne måten gir en mer realistisk modell. Ved bruk av full fastholdning av både rotasjon og translasjon ved begge innspenninger, oppstår tvangskrefter og vi får en ufornuftig oppførsel av plata.

Tabell 5.2: Randbetingelser for plata i FEM-modell.

Koordinat	(X,0)	(X,7500)	(0,Y)	(5000,Y)	(0,7500)	(5000,7500)
Translasjon	$Z = 0$	$Z = 0$	$Z = 0$	$Z = 0$	$X = 0, Y = 0, Z = 0$	$Y = 0, Z = 0$
Rotasjon	$RX = 0,$ $RY = 0,$ $RZ = 0$	$RX = 0,$ $RY = 0,$ $RZ = 0$			$RX = 0,$ $RY = 0,$ $RZ = 0$	$RX = 0,$ $RY = 0,$ $RZ = 0$

Underkantarming er satt inn som *reinforcement grid* med verdier for ekvivalent tykkelse 0,413 i x-retning og 0,262 i y-retning, og er plassert 110 mm fra toppen av betongplata. Overkantarming er satt inn på lik måte med verdier for ekvivalent tykkelse 0,162 i x-retning og 1,005 i y-retning, og er plassert 43 mm fra toppen av betongplata.

Lasten er påsatt som en flatelast over betongoverflaten med en verdi 0,015 N/mm².

For betongen er det benyttet en elastisitetsmodul $E = 20000 \text{ N/mm}^2$ og Poisson-forhold 0,0. Betongen er modellert med en multi-lineær trykkmodell som vist på figur 1.8e. I strekk er det antatt at betongen får en *tension-stiffening* effekt, hvor bruddtøyningen har en verdi 0,002. Det er antatt ingen effekt av *lateral confinement* oppførsel, opprissingsreduksjon eller Poisson-reduksjon.

Opprissingsmodeller med en *ultimate strain based*-funksjon er *Mode I tensile strain* satt til 0,002. For opprissingsmodeller med en *fracture energy based*-funksjon er følgende parametere benyttet:

Med en valgt elementinndeling på 20x30 får elementene dimensjoner 250x250 mm. *Crack bandwidth* blir da:

$$h = \sqrt{b \cdot h} = \sqrt{250^2} = 250 \text{ mm}$$

Bruddenergien kan da regnes ut som:

$$G_f = \frac{1}{2} \cdot f_t \cdot \varepsilon \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1,13 \cdot 0,002 \cdot 250 = 0,2825$$

For *total strain fixed crack* modellene antas det at skjærstivheten ikke reduseres ved opprissing ved å definere *shear retention* faktoren som $\beta = 1,0$.

6. Skall

6.1 Lineær analyse

Det er utført en lineær analyse av en buet skallkonstruksjon i betong. Resultatene er verifisert i henhold til studien «*Design aids for fixed support reinforced concrete cylindrical shells under uniformly distributed loads*» av Chandrasekaran, Gupta og Carrante [9]. Denne studiens formål var å utvikle matematiske modeller for tynne betongskallkonstruksjoner basert på klassisk krumningsteori, og dermed utarbeide forslag til grafer man kan benytte til dimensjonering av armerte betongskall.

Detaljerte resultater kan sees i Vedlegg C.

Tabell 6.1: Avvik mellom håndberegninger og FEM-analyse for skall.

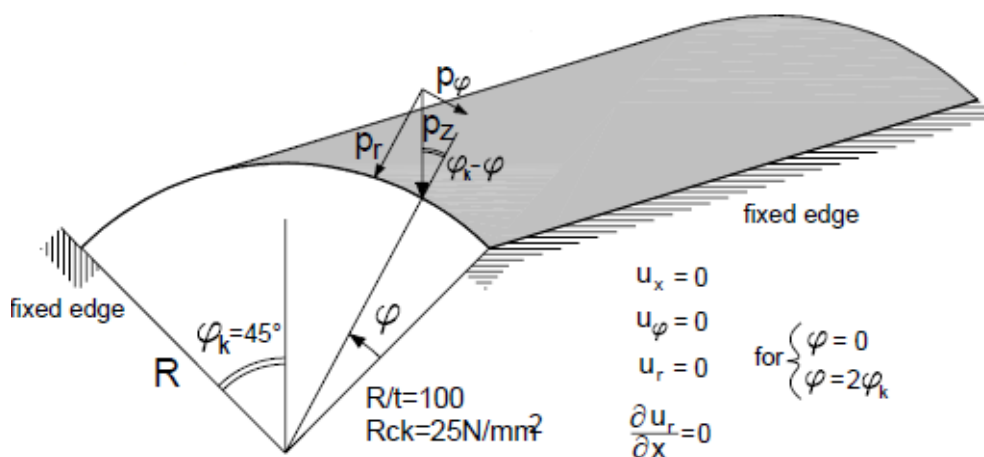
Skall	Beregninger fra studie	FEM-analyse	Avvik
Normalkraft	-31,177 N/mm	-30,6 N/mm	-1,8 %
Moment om y-akse	1477 Nmm/m	1360 Nmm/m	-7,9 %

Resultatene gir gode indikasjoner på at modellen oppfører seg fornuftig. Dimensjoneringen vil derfor baseres på FEM-modellens beregning av moment og normalkrefter, som vil danne grunnlaget for den ikke-lineære analysen.

6.2 Geometri

Skallet er et fast innspent, buet betongskall med frie rander i lengderetningen. Det er påsatt en flatelast med en verdi $p_z = 45 \text{ kN/m}^2$, som virker over hele arealet til skallets overflate.

Detaljert geometri er presentert i tabell 6.2 hvor definisjon av ulike parametere er illustrert på figur 6.1.



Figur 6.1: Fast innspent skall [9].

Tabell 6.2: Geometri og betingelser for skall.

Φ_k	45°
Lengde, L	26.67 meter
Radius, R	8.0 meter
Tykkelse, t	80 mm
Flatelast, p_z	45 kN/m ²
E-modul, E	20 000 N/mm ²
Poisson-tall, ν	0.2

6.3 Dimensjonering

Buede betongskall er konstruksjoner som i prinsippet har lite behov for strekkarmering. Grunnen til dette er at skallet vil få trykkrefter som vil redusere strekkreftene som oppstår fra bøyemomentene. Det er gjort et forsøk på å dimensjonere skallet basert på to-lagsmetoden, også kalt membranmetoden. Dette er en simpel metode for dimensjonering av betongskall hvor skallelementet deles opp i to lag eller membraner. Momenter og normalkrefter i skallet erstattes så av ekvivalente normalkrefter og armeringen dimensjoneres så ved bruk av trykkfeltsteori. En detaljert utledning og fremgangsmåte av metodene kan sees i kompendiet for betongkonstruksjoner [6]. Det må legges vekt på at to-lagsmetoden er en forenklet metode med flere mangler og antagelser, som for eksempel at det ikke er tøyingskompatibilitet eller at opprissing sjekkes på midtplanet av membranene og ikke på overflaten.

Det er først gjort en lineær analyse av skallet i ren betong med påsatt last 45 kN/m². Nødvendige krefter er så tatt ut fra analysen for dimensjonering med to-lagsmetoden og er presentert i tabell 6.3. Kombinasjonen av momenter og normalkrefter vil endres langs det buede skallet, men det er valgt å dimensjonere for kreftene ved innspenningene da det er her det oppstår størst krefter.

Tabell 6.3: Kraftresultanter fra lineær analyse.

Kraftresultant	Verdi kN/m, kNm/m
n_x	-84,80
n_y	-424,00
n_{xy}	2,82
m_x	3,76
m_y	18,80
m_{xy}	0

Antar uoppriisset i begge lag. Membran 1 og 2 er henholdsvis nederste og øverste lag. Membrantykkelsene, faktorene k og indre momentarm blir da:

$$t_1 = t_2 = \frac{h}{2} = 40 \text{ mm}$$

$$k_1 = k_2 = 0,5$$

$$z = \frac{h}{2} = 40 \text{ mm}$$

Ekvivalente membrankrefter kan da regnes ut med formlene:

Membran 1, nederste lag:

$$n_{x1} = k_1 n_x + \frac{m_x}{z} = 0,5 \cdot (-84,80) + \frac{3,76}{0,04} = 51,6 \text{ kN/m}$$

$$n_{y1} = k_1 n_y + \frac{m_y}{z} = 0,5 \cdot (-424,00) + \frac{18,80}{0,04} = 258 \text{ kN/m}$$

$$n_{xy1} = k_1 n_{xy} + \frac{m_{xy}}{z} = 0,5 \cdot 3,76 + \frac{0}{0,04} = 1,41 \text{ kN/m}$$

Membran 2, øverste lag:

$$n_{x2} = k_2 n_x - \frac{m_x}{z} = 0,5 \cdot (-84,80) - \frac{3,76}{0,04} = -136,4 \text{ kN/m}$$

$$n_{y2} = k_2 n_y - \frac{m_y}{z} = 0,5 \cdot (-424,00) - \frac{18,80}{0,04} = 682 \text{ kN/m}$$

$$n_{xy2} = k_2 n_{xy} - \frac{m_{xy}}{z} = 0,5 \cdot 3,76 - \frac{0}{0,04} = 1,41 \text{ kN/m}$$

Største hovedkrefter i membraner. Overdekningen er $c = 35 \text{ mm}$:

Membran 1:

$$n_{11}^1 = \frac{n_{x1} + n_{y1}}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_{x1} - n_{y1}}{2}\right)^2 + n_{xy1}^2}$$

$$n_{11}^1 = 258 > 0 \rightarrow \text{oppriisset} \rightarrow t_1 = 2c = 2 \cdot 35 = 70 \text{ mm}$$

$$k_1 = \frac{0,25h}{0,75h - c} = 0,8$$

Membran 2:

$$n_{11}^2 = \frac{n_{x2} + n_{y2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_{x2} - n_{y2}}{2}\right)^2 + n_{xy2}^2}$$

$$n_{11}^2 = -137 < 0 \rightarrow \text{uopprisset} \rightarrow t_2 = \frac{h}{2} = 40 \text{ mm}$$

For tilfellet med én membran opprisset og det andre uopprisset får vi:

$$k_1 = \frac{0,25h}{0,75h - c} = 0,8$$

$$k_2 = 1 - k_1 = 0,2$$

$$z = 0,75h - c = 25 \text{ mm}$$

Ekvivalente membrankrefter blir nå:

$$n_{x1} = 82,6 \text{ kN/m}$$

$$n_{y1} = 412,8 \text{ kN/m}$$

$$n_{xy1} = 2,3 \text{ kN/m}$$

$$n_{x2} = -167,4 \text{ kN/m}$$

$$n_{y2} = -836,8 \text{ kN/m}$$

$$n_{xy2} = 0,6 \text{ kN/m}$$

Antar armeringsforhold:

$$\frac{A_{sx}}{A_{sy}} = 0,5$$

Rissvinkel for opprisset membran:

$$\tan^2 \varphi + \left(\frac{n_{x1}}{n_{xy1}} - \frac{n_{y1}}{n_{xy1}} \cdot \frac{A_{sx}}{A_{sy}} \right) \tan \varphi - \frac{A_{sx}}{A_{sy}} = 0$$

$$\tan^2 \varphi + \left(\frac{82,6}{2,3} - \frac{412,8}{2,3} \cdot 0,5 \right) \tan \varphi - 0,5 = 0$$

Løsning av andregradslikningen gir:

$$\tan \varphi = 54,9 \rightarrow \varphi = 89^\circ$$

Indre krefter:

$$F_{sx} = n_x + n_{xy} \tan \varphi = 206 \text{ kN/m}$$

$$F_{sy} = n_y + n_{xy} \cot \varphi = 537 \text{ kN/m}$$

Nødvendig armering:

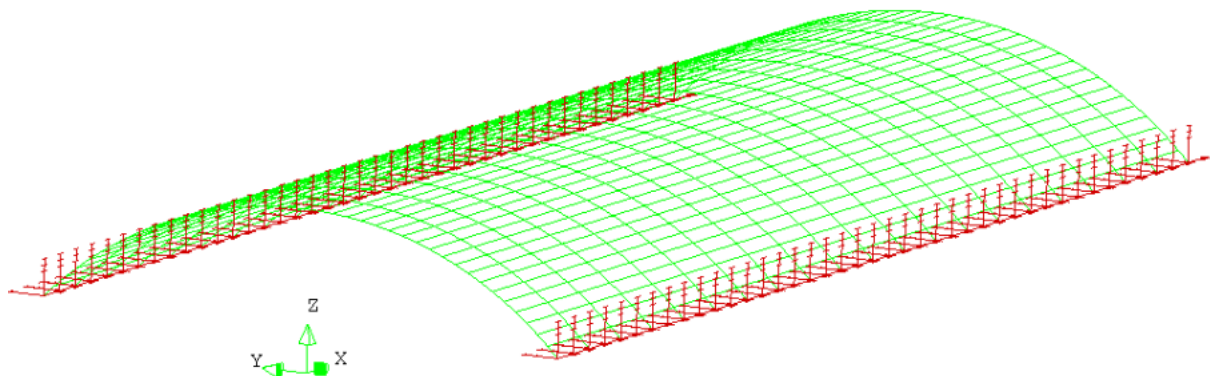
$$A_{sx} = \frac{F_{sx}}{f_{yd}} = \frac{206 \cdot 10^3}{434} = 476 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$A_{sy} = \frac{F_{sy}}{f_{yd}} = \frac{537 \cdot 10^3}{434} = 1237 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Det velges å kun armere membranen som fikk opprissing, som ved innspenningen ble det nederste laget. Armeringen plasseres da 35 mm fra bunnen av skallet.

6.4 FEM-modell

Det buede skallet er modellert som en 3D-konstruksjon ettersom konstruksjonen er utsatt for krefter som virker i retninger mellom normalen til planet og planet. Elementnettet er delt opp i 20 elementer i x-retning og 40 elementer i y-retning. Det er valgt å ha flere elementer i y-retning for å få den ønskede nøyaktigheten for resultater over buelengden. Elementtypen som benyttes er CQ40S-elementer med 2x2 Gauss-integrasjon over elementet og 9-punkts Simpson-integrasjon over tykkelsen. Innspenningene er modellert helt fastholdt mot rotasjon og translasjon som illustrert på figur 6.2.



Figur 6.2: FEM-modell av buet skall med innspenninger.

Armeringen er satt inn i modellen som *reinforcement grid* over hele skallet med verdier for ekvivalent tykkelse 0,476 i x-retning og 1,237 i y-retning. Plasseringen er satt til 45 mm fra toppen av skallet, hvor det er gjort endringer i dat.-filen for å få armeringen til å virke på

ønsket måte i modellen. Et skjermbilde fra dat.-filen på figur 6.3 illustrerer hva som er redigert i filen.

```

MATERIALS
/ 1-800 / 1
GEOMETRY
/ 1-800 / 1
'REINFORCEMENTS'
LOCATI
  2 GRID
    LOCALZ
      / 1-800 / -45

```

Figur 6.3: Skjermbilde fra dat.-filen til skallet som illustrerer måten armeringsplasseringen er definert på.

Lasten er påsatt som en flatelast over hele arealet til skallet men en verdi $-0,045 \text{ N/mm}^2$.

Betongen er modellert med en elastisitetsmodul $E = 20\,000 \text{ N/mm}^2$ og Poisson-forhold 0,2. Betongen er modellert med en multi-lineær trykkmodell som vist på figur 1.8e. I strekk er det antatt at betongen får en *tension-stiffening* effekt, hvor bruddtøyningen har en verdi 0,002. Det er antatt ingen effekt av *lateral confinement* oppførsel, opprissingsreduksjon eller Poisson-reduksjon.

Opprissingsmodeller med en *ultimate strain based*-funksjon er *Mode 1 tensile strain* satt til 0,002. For opprissingsmodeller med en *fracture energy based*-funksjon er følgende parametere benyttet:

Med en valgt elementinndeling på 20×40 får elementene dimensjoner $1334 \times 314 \text{ mm}$. *Crack bandwidth* blir da:

$$h = \sqrt{b \cdot h} = \sqrt{314 \cdot 1334} = 647 \text{ mm}$$

Bruddenergien kan da regnes ut som:

$$G_f = \frac{1}{2} \cdot f_t \cdot \varepsilon \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1,13 \cdot 0,002 \cdot 647 = 0,7311$$

For *total strain fixed crack* modellene antas det at skjærstivheten ikke reduseres ved opprissing ved å definere *shear retention* faktoren som $\beta = 1,0$.

7. Resultater

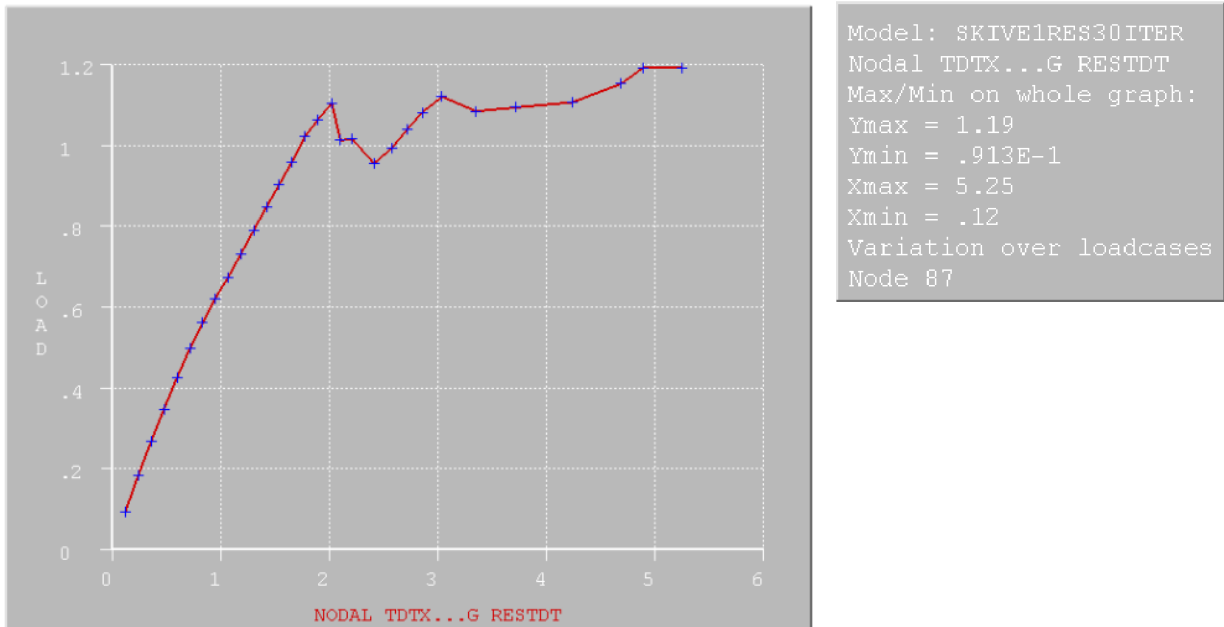
I denne delen vil resultatene til de ikke-lineære FEM-analysene for de ulike konstruksjonene utført i DIANA presenteres. Prosessen for analysen er gjort som følger:

- Hver konstruksjon er modellert med fire ulike materialmodeller og varierer fra hverandre som:
 - *Total strain rotating crack* som opprissingsmodell med en *ultimate strain based*-funksjon.
 - *Total strain rotating crack* som opprissingsmodell med en *fracture energy based*-funksjon.
 - *Total strain fixed crack* som opprissingsmodell med en *ultimate strain based*-funksjon.
 - *Total strain fixed crack* som opprissingsmodell med en *fracture energy based*-funksjon.
- Alle modellene er i første omgang analysert ikke-lineært med en Standard Newton-Raphson iterasjonsprosedyre.
- Resultatene fra hver analyse er tolket og etter en vurdering av hvilken modell som gir best mulig og mest fornuftige resultater, vil resultatene fra denne modellen presenteres.
- Resultater som presenteres vil være de mest relevante for hver aktuelle konstruksjon og består av:
 - Last-nedbøyningsgraf ved midtsnitt
 - Armeringsspenninger ved referanselast
 - Relevante riss-mønstre
 - Armeringsspenninger ved bruddlast.
 - Evt. Betongspenninger ved referanselast
- Den valgte modellen som presenteres vil deretter analyseres med ulike iterasjonsmetoder og varierer mellom:
 - Standard Newton-Raphson
 - Modifisert Newton-Raphson
 - Quasi-Newton (sekant-stivhet) med Crisfield-varianten
- Iterasjonsmetodene vil sammenlignes hvor nøyaktighet og konvergenshastighet vil kommenteres.

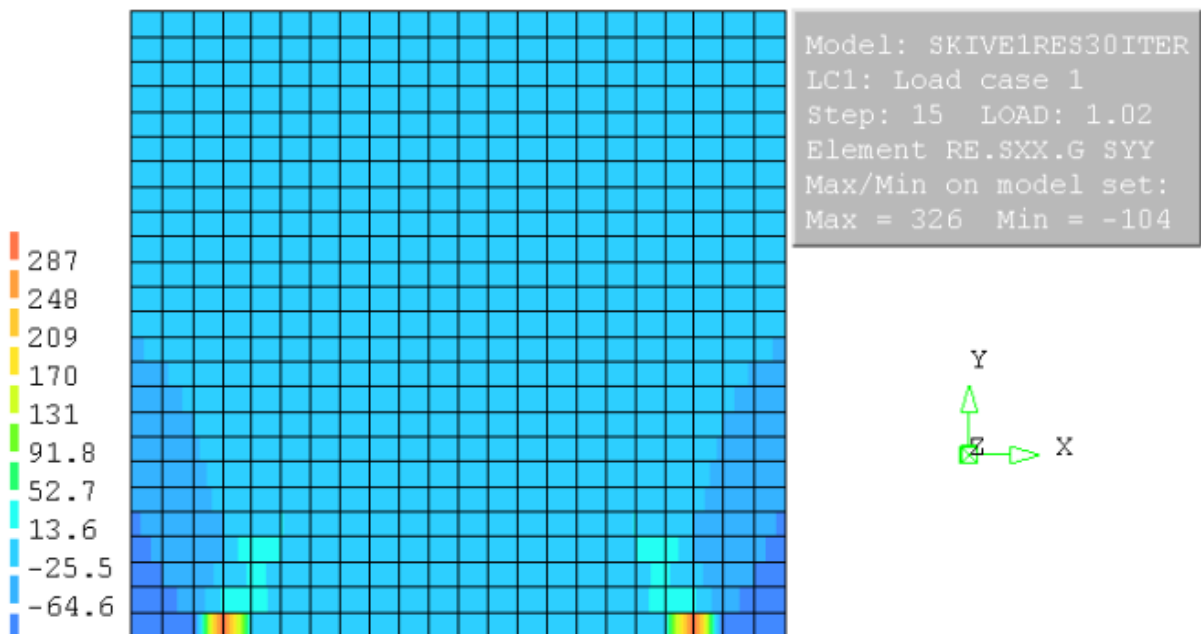
Vurdering av de presenterte resultatene og resultatenes forskjeller mellom de ulike materialmodellene og numeriske løsningsmetoder vil drøftes og vurderes i kapittel 8.

7.1 Skiveresultater

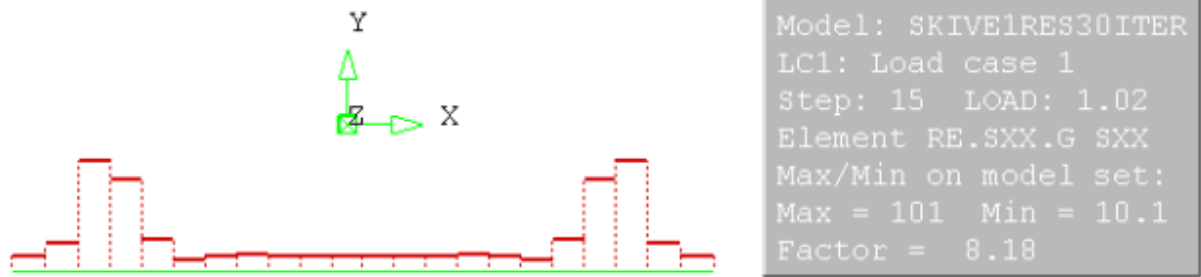
For skivekonstruksjonen er det valgt å presentere resultater fra analysen med en *total strain rotating crack* modell med en *ultimate strain based*-funksjon. Benyttet iterasjonsmetode er Standard Newton-Raphson med 30 iterasjoner for hvert laststeg.



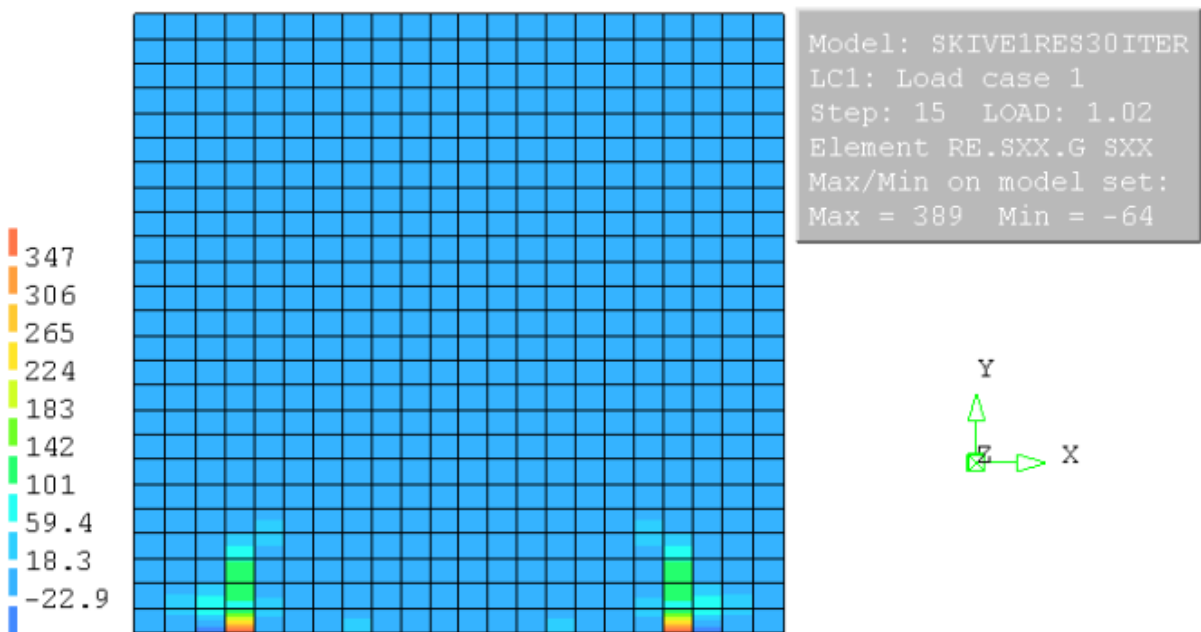
Figur 7.1: Last-forskyvningskurve i midtsnitt.



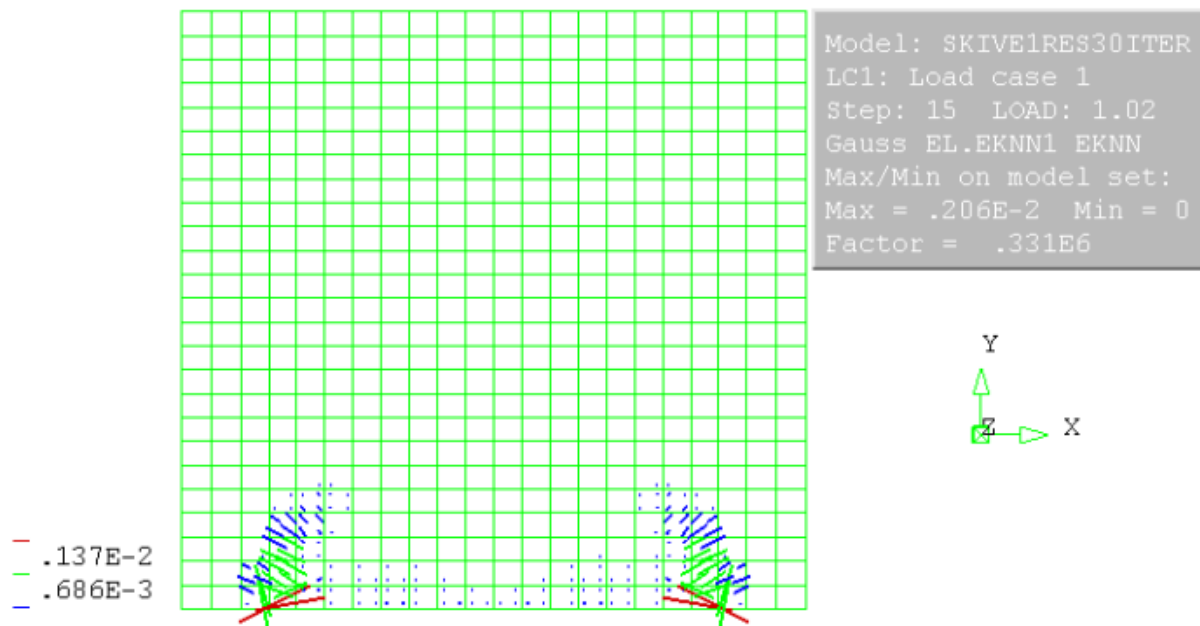
Figur 7.2: Armeringsspenninger i y-retning ved 1,02 · referanselast, laststeg 15. Ingen flyt i armering hvor maksimal spenning er 326 MPa.



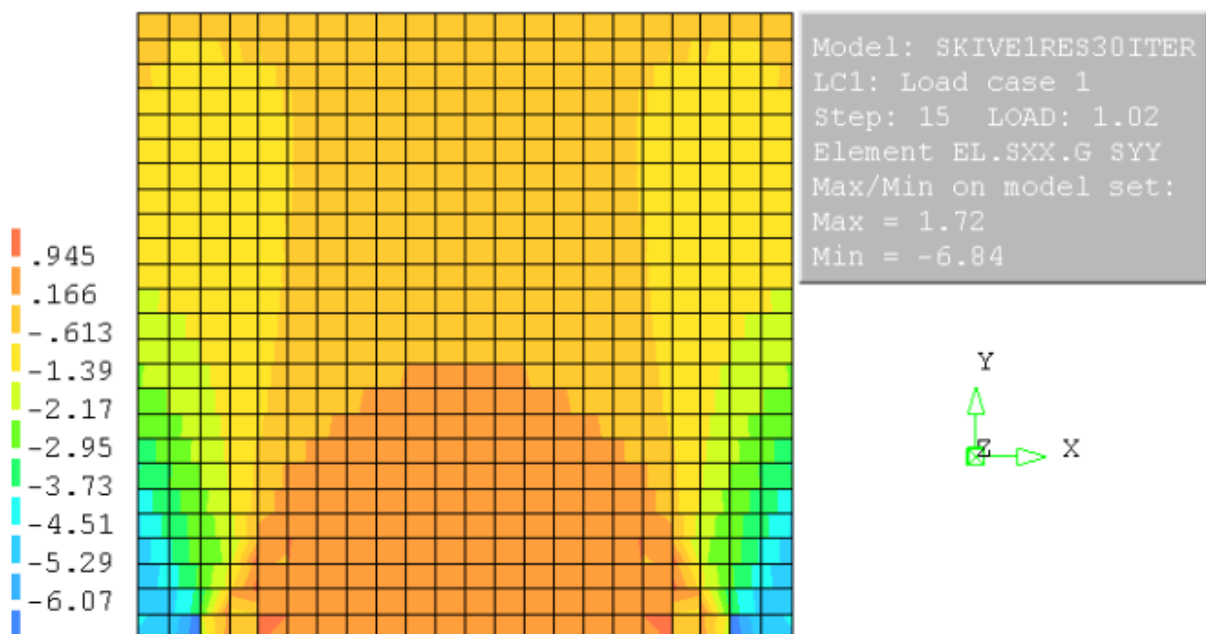
Figur 7.3: Armeringsspenninger i horisontal stangarmering ved 1,02 · referanselast. Spenningene er langt unna flytegrensen med maksimal spenning på 101 MPa.



Figur 7.4: Armeringsspenninger i x-retning ved 1,02 · referanselast. Ingen flyt i armering, hvor maksimal armeringsspenning er 389 MPa.

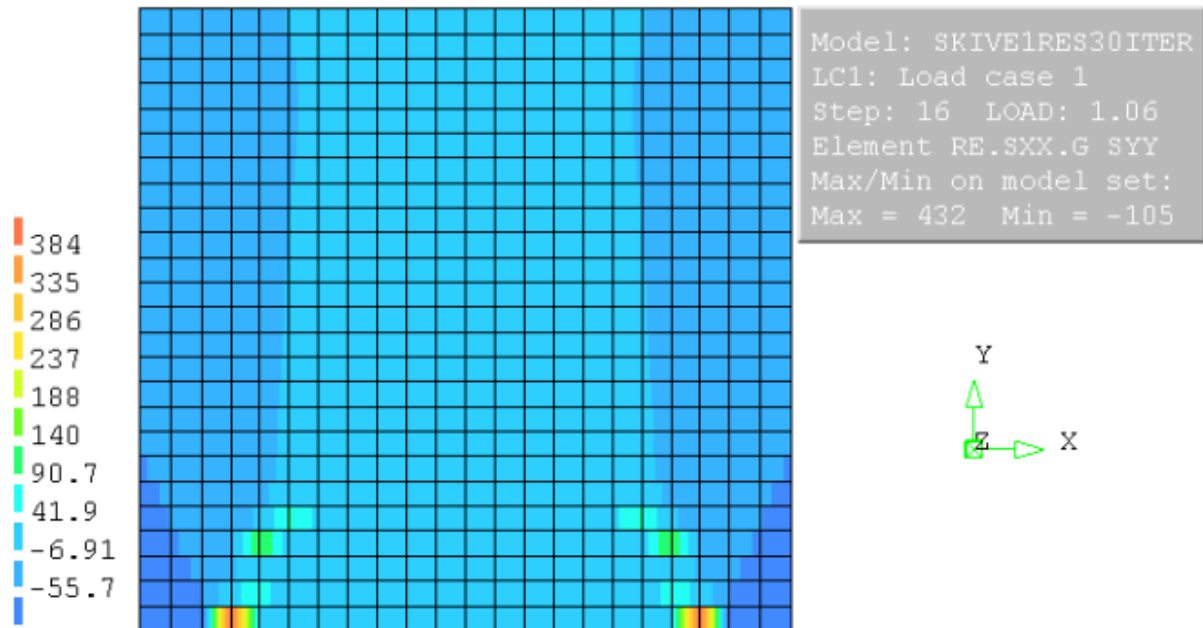


Figur 7.5: Riss vektor-plott ved 1,02 · referanselast.



Figur 7.6: Betongspenninger ved 1,02 · referanselast. Største trykkspenning på 6,84 N/mm².

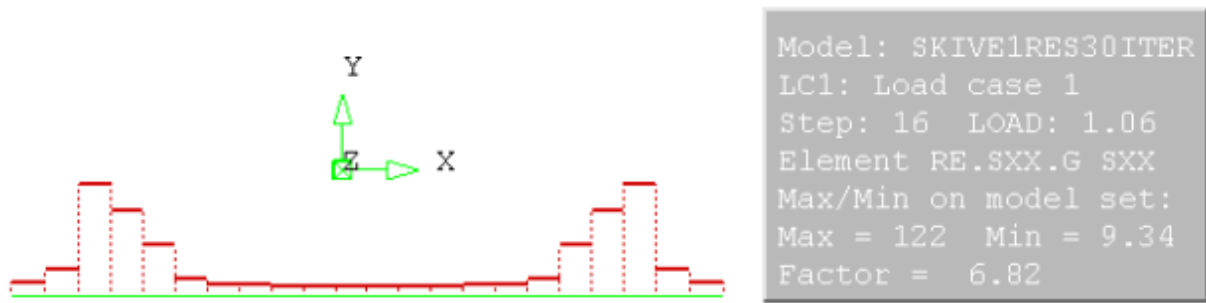
Av last-forskyvningskurven kan man se en indikasjon på at lastkapasiteten til skiven er høyere enn referanselasten på 150 kN/m, ettersom vi hverken får flyt i armeringen eller for store trykkspenninger ved opplagrene. Last-forskyvningskurven får sin første «knekk» ved laststeg 16, hvor lastfaktoren er $1,06 \cdot$ referanselast. Det er derfor interessant å se på armeringsspenningene ved dette laststeget:



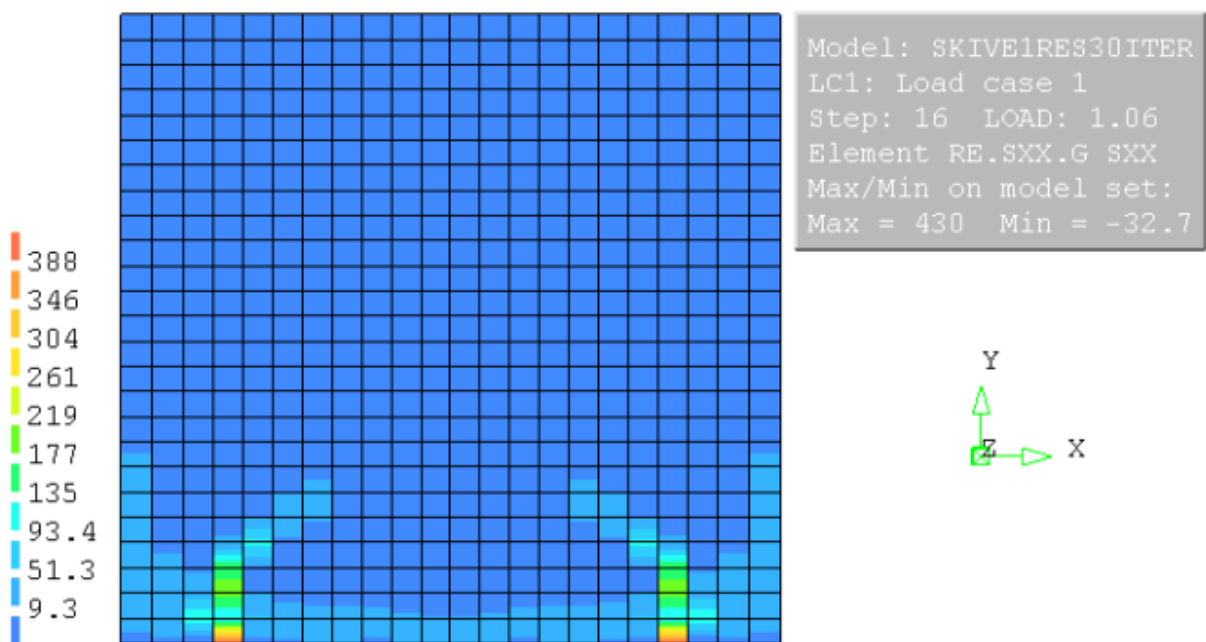
Figur 7.7: Armeringsspenninger i y-retning ved $1,06 \cdot$ referanselast. Spenningene nærmer seg armeringsstålets flytegrense på 434 MPa.

Armeringen i y-retning oppnår flyt ved laststeg 16 med lastfaktor på 1,06. Trykkspenningene i betongen er da fortsatt under dimensjonerende flytespenning i trykk på 17 MPa. En lastfaktor på 1,06 tilsvarer en bruddlast på 159 kN/m.

Ved undersøkelse av armeringsspenningene i x-retning over skiven og den horisontale stangarmeringen ved bruddlasten på 159 kN/m, vil vi observere at det er oppnådd flyt i den horisontale minimumsarmeringen, mens den horisontale stangarmeringen har relativt lave armeringsspenninger godt under flytegrensen. Figur 7.8 og figur 7.9 viser spenningene i de nevnte armeringene ved bruddlast. Dette er uforventede resultater som vil vurderes videre i kapittel 8.1.



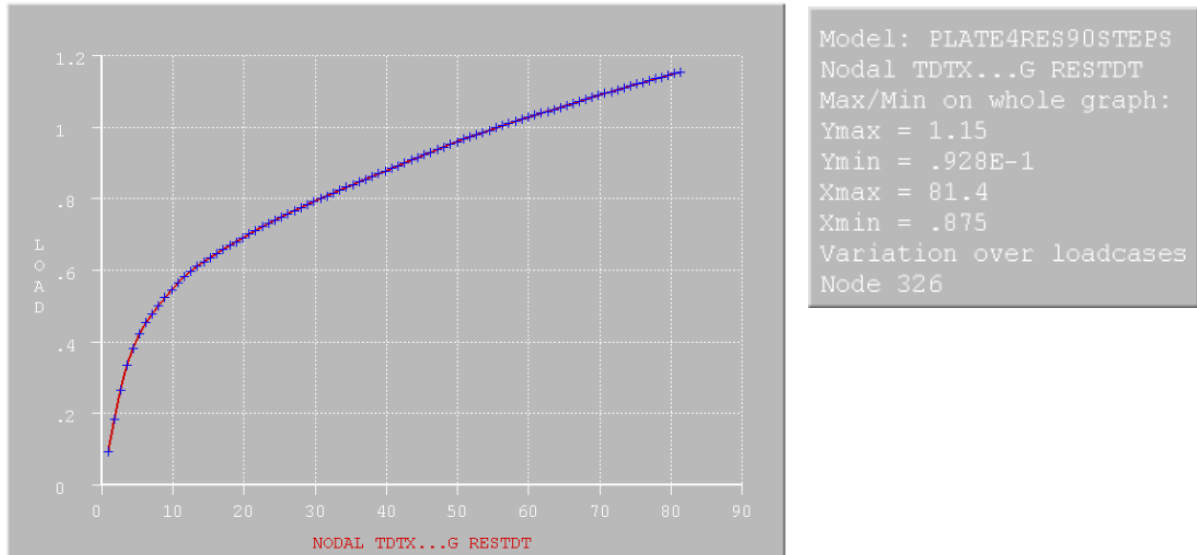
Figur 7.8: Armeringsspenninger i stangarmering ved bruddlast.



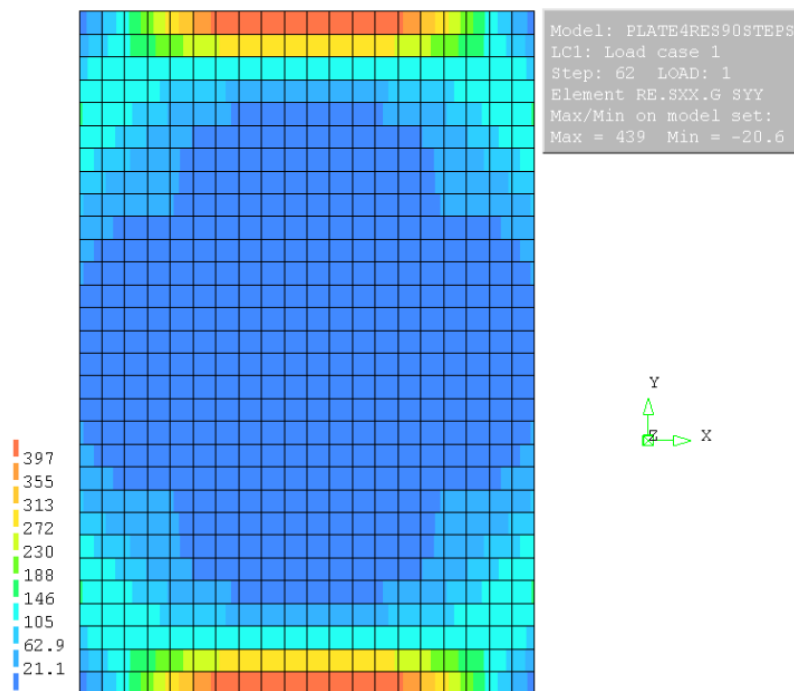
Figur 7.9: Armeringsspenninger i x-retning ved bruddlast.

7.2 Plateresultater

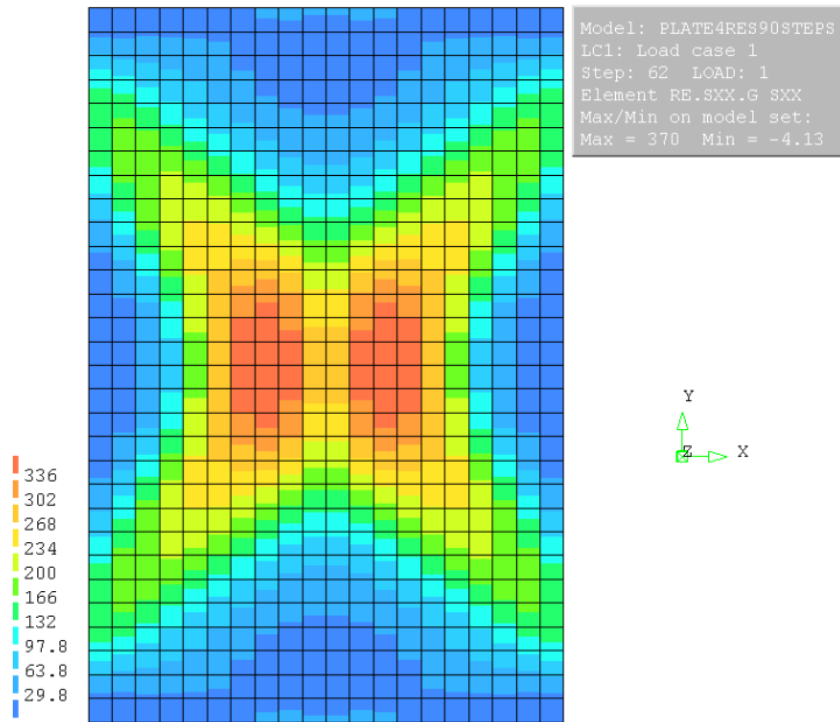
For platekonstruksjonen er det valgt å presentere resultater fra analysen med en *total strain fixed crack* opprissingsmodell og en *fracture energy based*-funksjon. Benyttet iterasjonsmetode er Standard Newton-Raphson med 10 iterasjoner for hvert laststeg.



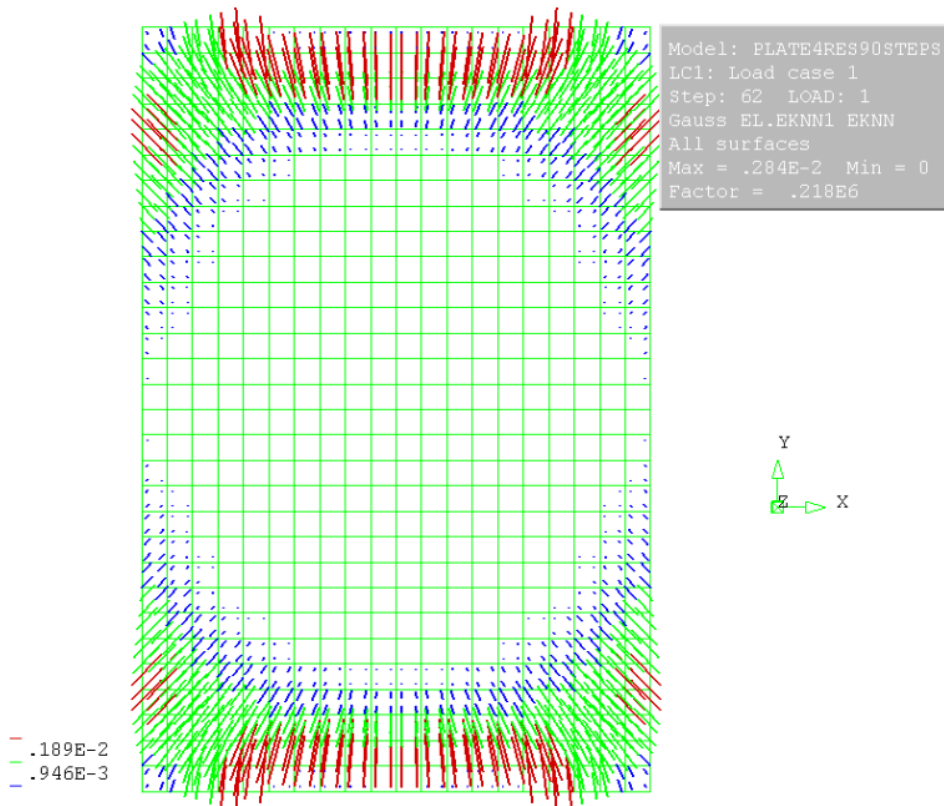
Figur 7.10: Last-forskyvningskurve i midtpunkt.



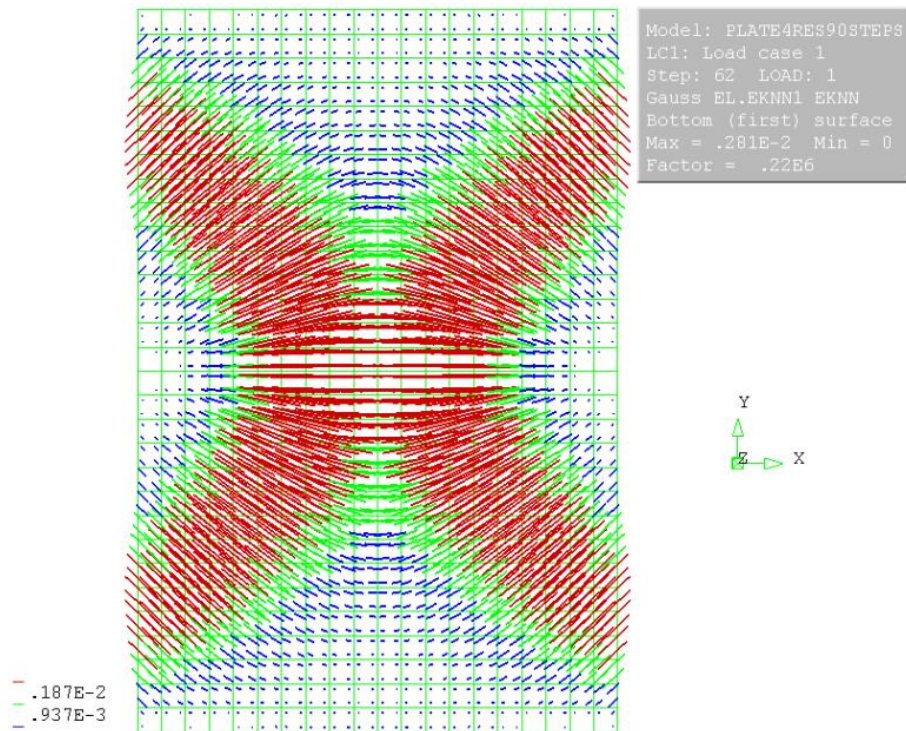
Figur 7.11: Spenninger i overkantsarmering i y-retning ved referanselast. Armeringen flyter allerede og oppnår flyt ved $0,96 \cdot$ referanselast.



Figur 7.12: Spenninger i underkantsarmering i x-retning ved referanselast. Ingen flyt i armering.

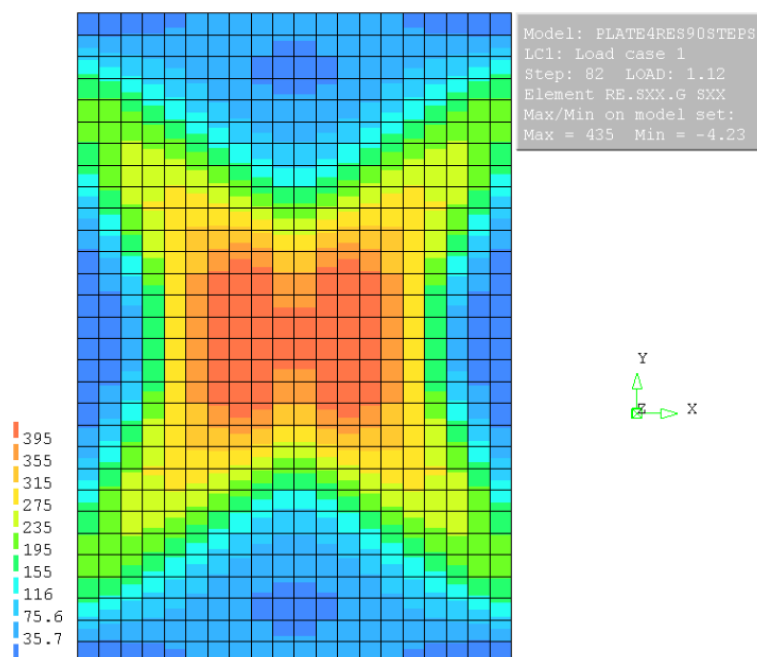


Figur 7.13: Riss vektor-plott på oversiden av plata ved referanselast.



Figur 7.14: Riss vektor-plott på undersiden av plata ved referanselast.

Armeringsspenningene ved referanselast på 15 kN/m^2 viser at overkantsarmeringen i y-retning har begynt å flyte og oppnår flyt ved $0,96 \cdot$ referanselast, mens underkantsarmeringen i x-retning fortsatt er i det elastiske området. Det er interessant å undersøke hvilken lastfaktor som gir flyt i underkantsarmering i x-retning.

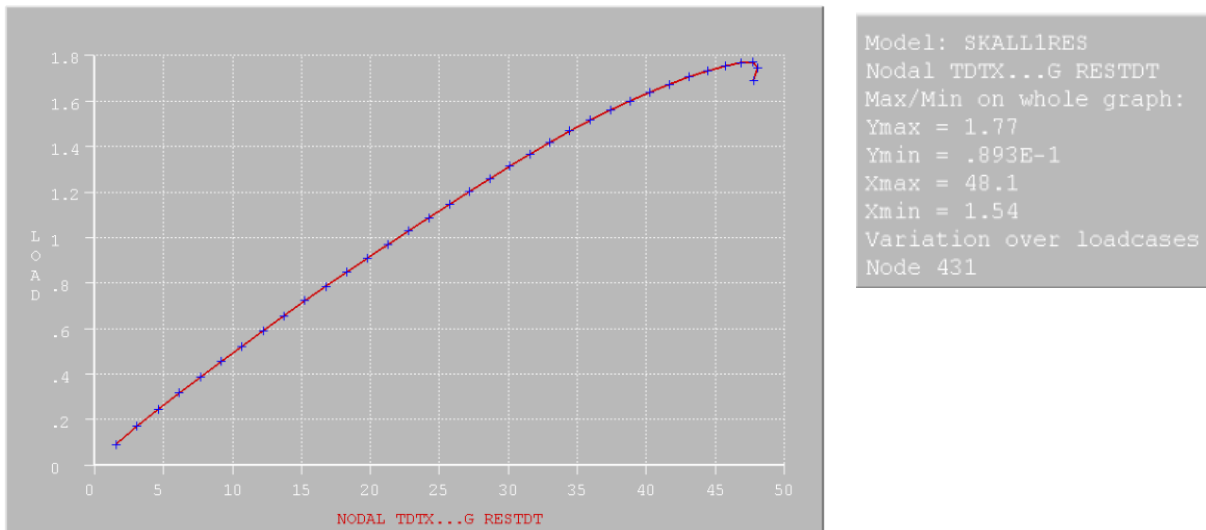


Figur 7.15: Spenninger i underkantsarmering ved $1,12 \cdot$ referanselast. Armeringen har oppnådd flytegrensen på 434 MPa .

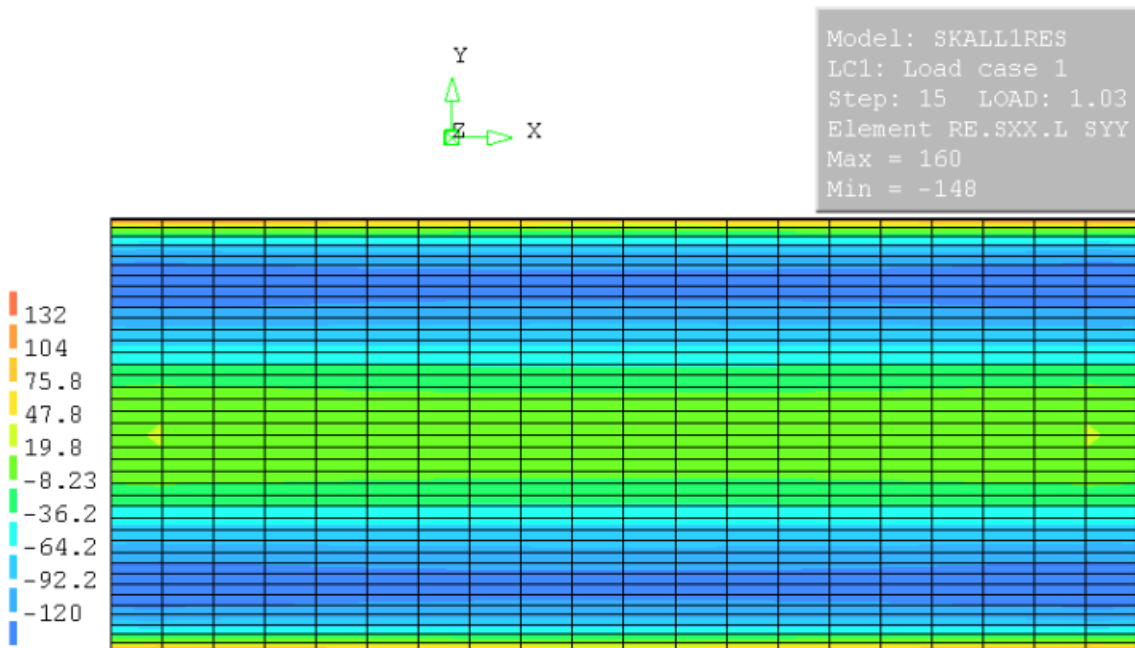
Underkantsarmeringen i x-retning oppnår flyt ved lastfaktor 1,12 noe som tilsvarer en last på $16,8 \text{ kN/m}^2$. Over- og underkantsarmeringen har nå oppnådd flytegrensen på 434 MPa og det konkluderes derfor med at bruddlasten er $16,8 \text{ kN/m}^2$.

7.3 Skallresultater

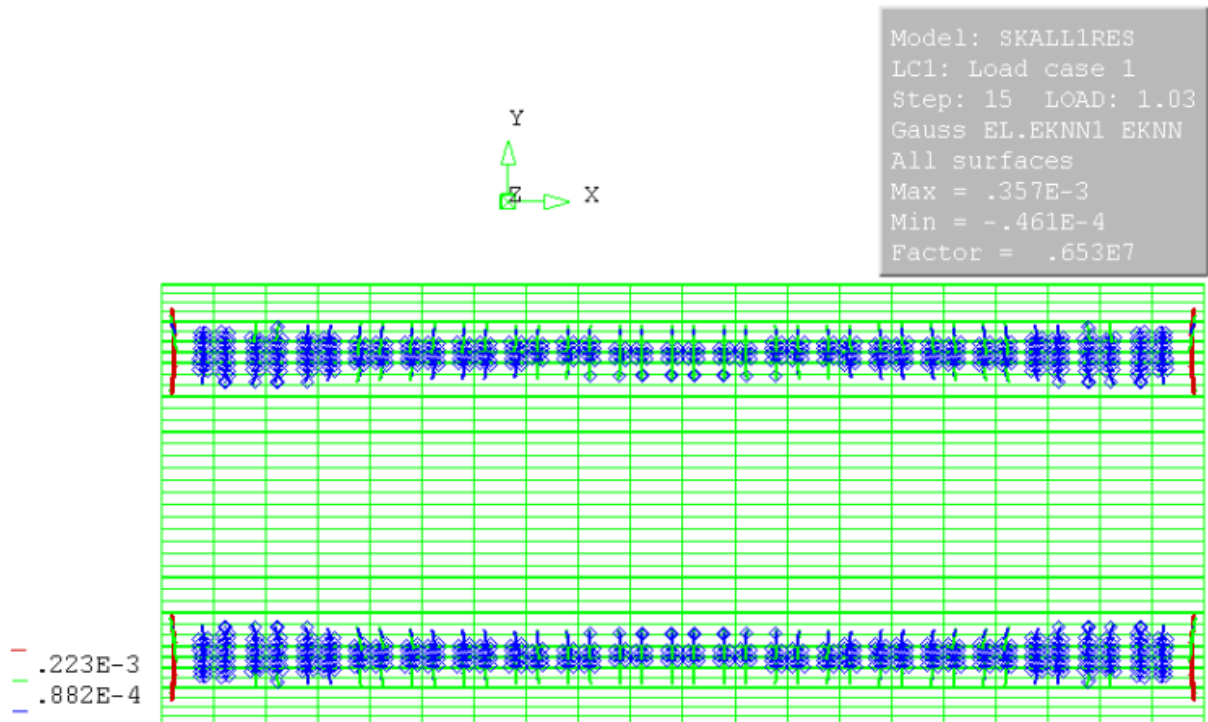
For skallkonstruksjonen er det valgt å presentere resultater fra analysen med en *total strain rotating crack* opprissingsmodell og en *ultimate strain based*-funksjon. Benyttet iterasjonsmetode er Standard Newton-Raphson med 10 iterasjoner for hvert laststeg. På grunn av skallets geometri er spenninger i armering og betong betraktet lokalt for hvert element for få en riktig fremstilling av spennings-verdier og -fordeling



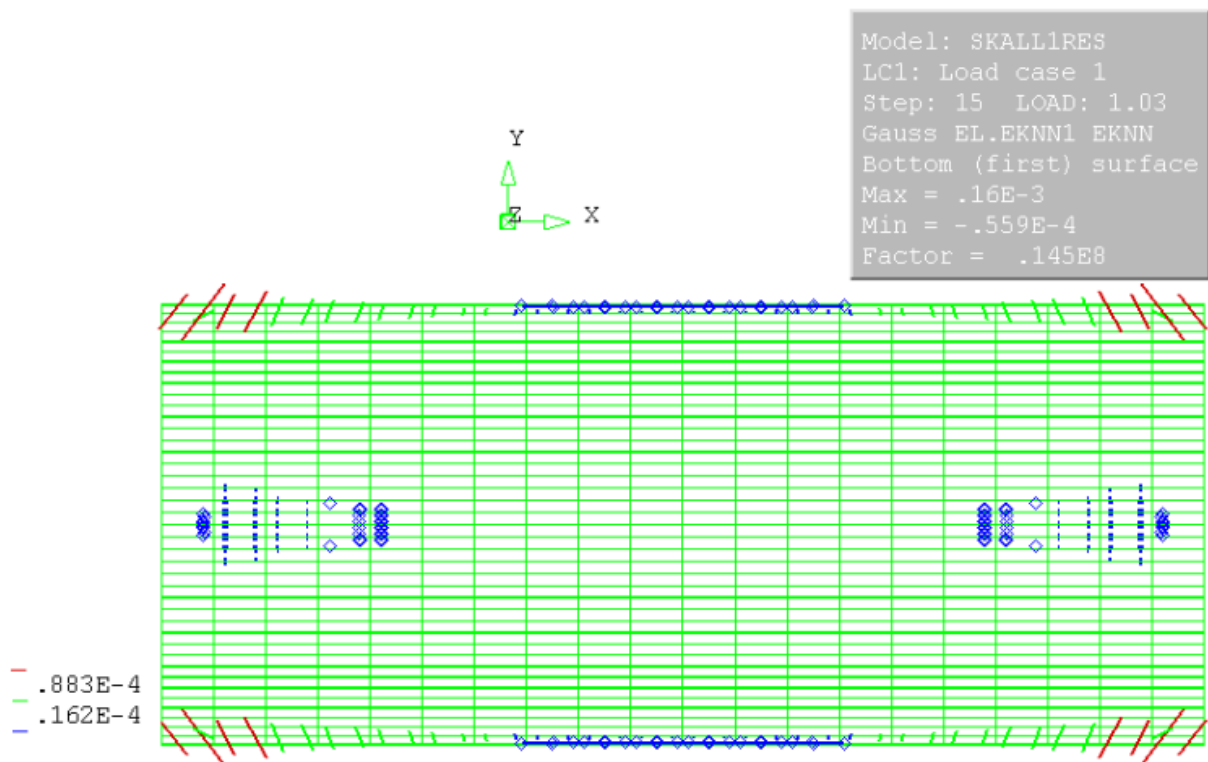
Figur 7.16: Last-forskyvningskurve i midtpunkt.



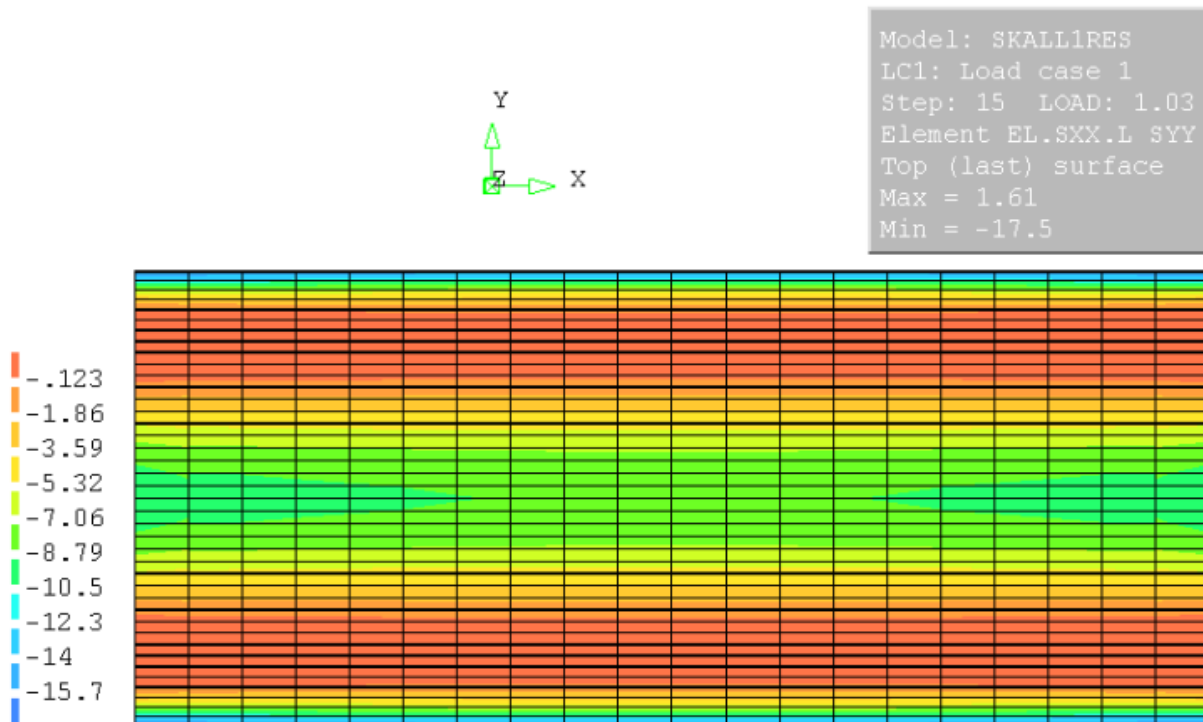
Figur 7.17: Armeringsspenninger i lokal y-retning ved 1,03 · referanselast. Spenningene har en maksimal verdi på 160 MPa ved innspenningene og er under flytegrensen.



Figur 7.18: Riss vektor-plott i overkant ved 1,03 · referanselast.

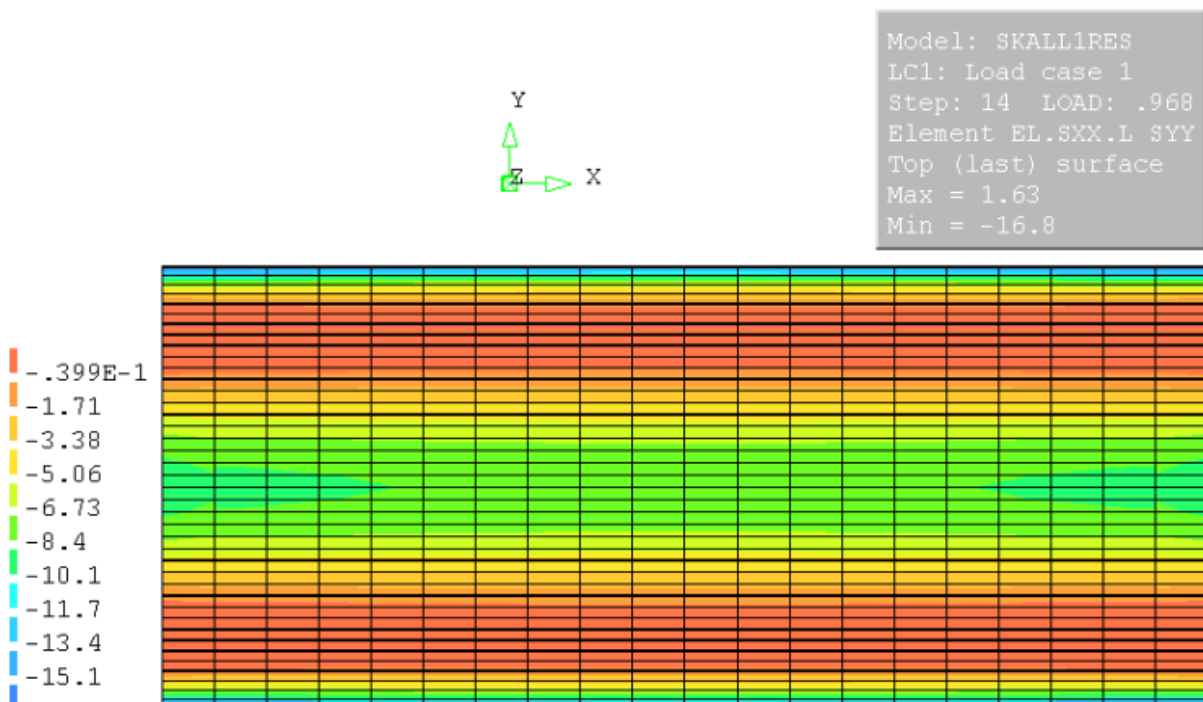


Figur 7.19: Riss vektor-plott i underkant ved 1,03 · referanselast.



Figur 7.20: Betongspenninger lokal y-retning i overkant ved 1,03 · referanselast. Spenningene har overgått trykkfastheten på 17 MPa.

Undersøkelse av armering- og betongspenningene ved 1,03 · referanselast er det tydelig at det først vil oppstå et trykkbrudd i betongen før armeringen flyter. Ettersom trykkspenningene i overkant av betongskallet har overgått trykkfastheten på 17 MPa, er det interessant å undersøke ved hvilken lastfaktor dette først skjer.



Figur 7.21: Betongspenninger i lokal y-retning i overkant ved 0,968 · referanselast.

Det viser seg at betongspenningene ved $0,968 \cdot$ referanselast nærmer seg trykkfastheten med maksimale trykkspenninger på 16,8 MPa i overkant av betongskallet ved innspenningene. Bruddlasten skyldes trykkbrudd i betongen og vil for denne konstruksjonen skje ved en last 43,5 kN/m².

Del III

Vurdering

8. Vurdering

8.1 Skive

8.1.1 Bruddmekanisme

Av last-forskyvningskurven på figur 7.1 ser vi at kurven fortsetter lineært med belastning over referanselasten på 150 kN/m. Først ved en lastfaktor på omtrent $1,06 \cdot$ referanselast, som tilsvarer 159 kN/m, vil vi oppnå flyt i den vertikale armeringen. Trykkspenningene i betongen for denne belastningen er 6,9 MPa og er godt under dimensjonerende flytespenning på 17 MPa. Det konkluderes derfor med at bruddlasten for skiven med en opprissingsmodell *total strain rotating crack* og *ultimate strain based*-funksjon er 159 kN/m, og forekommer av flyt i vertikal armering.

Resultatene fra modellen samsvarer bra med håndberegningene gjort med *Strut-Tie* modellen. Selv om last-forskyvningskurven kan følges opp til en lastfaktor på 1,19, antas disse resultatene til å være uvirkelige. Grunnen til dette er at inkrementene etter laststeg 16 ikke oppnår konvergens, selv med et høyt iterasjonsantall på 30 iterasjoner, og det er derfor fornuftig å anta at en lastfaktor på 1,06 gir brudd da vertikal armeringen flyter. Figur 7.6 viser at betongspenningene ved opplagrene for $1,02 \cdot$ referanselast er 6,84 N/mm², noe som stemmer bra med den utregnede betongspenningen på 6,6 N/mm² ved referanselast. En bruddlast som er noe høyere enn referanselasten er fornuftig, med tanke på at innsatt minimumsarmering er høyere enn den utregnede nødvendige armeringen med *Strut-Tie* modellen og dimensjoneringen er derfor på sikker side.

Tabell 8.1: Oversikt over utregnet bruddlast med elastisitetsteori og ikke-lineær FEM-analyse.

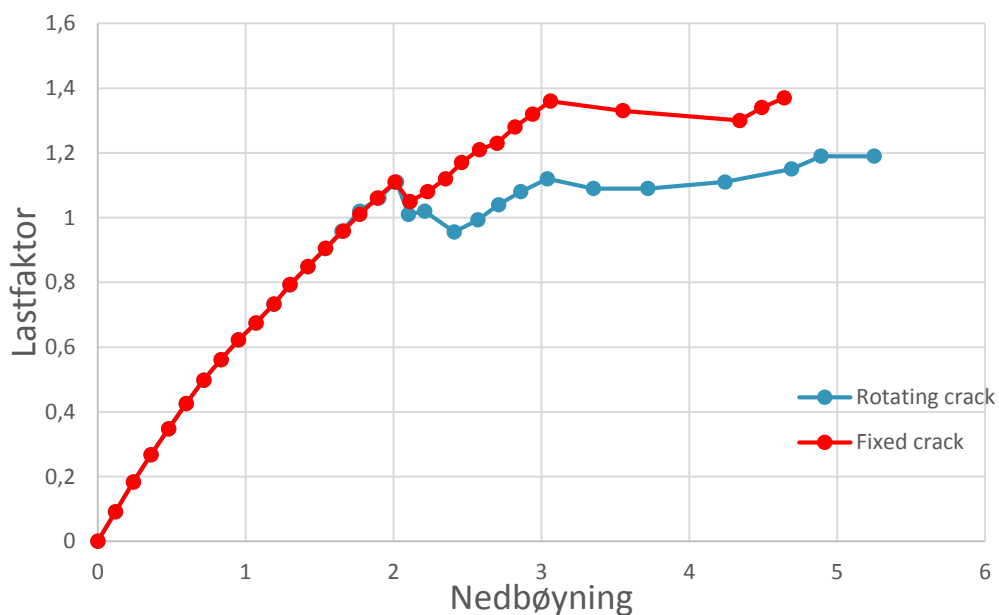
	Bruddlast
Elastisitetsteori	150 kN/m
Ikke-lineær FEM-analyse	159 kN/m

Undersøkelse av armeringspenningene i øvrig armering ga uforventede resultater, hvor spenningene i stangarmeringen fikk lave verdier og horisontal minimumsarmering fikk høye verdier, noe som ikke samsvarer med dimensjoneringen. Etersom den horisontale minimumsarmeringen over skiven er ment for å unngå skjærbrudd og ikke til å ta opp kreftene i bunnen av skiven, virker det som om virkningene av armeringene i modellen ikke fungerer som tenkt. Resultatene antyder at minimumsarmeringen tar opp en andel av strekkreftene som er ment til stangarmeringen, noe som fører til høyere spenninger i den horisontale armeringen over skiven og lavere spenninger i stangarmeringen som vist på figur 7.8 og figur 7.9. Dette vurderes som en svakhet i modellen og det har ikke lyktes med å justere modellen så øvrig armering oppfører seg på ønsket måte. Det er interessant om en analyse hvor horisontal armering opptrer på ønsket måte vil gi en annen bruddlast, og er noe det er verdt å undersøke nærmere for videre arbeid.

8.1.2 Materialmodeller

Det er utført analyser med ulike materialmodeller for betongen, mens det er valgt å presentere resultater fra skivemodellen som samsvarer best med håndberegningene. For skivekonstruksjonen var dette analysen med en *total strain rotating crack* opprissingsmodell, og denne hadde betydelige avvik fra analysene ved bruk av en *total strain fixed crack* modell.

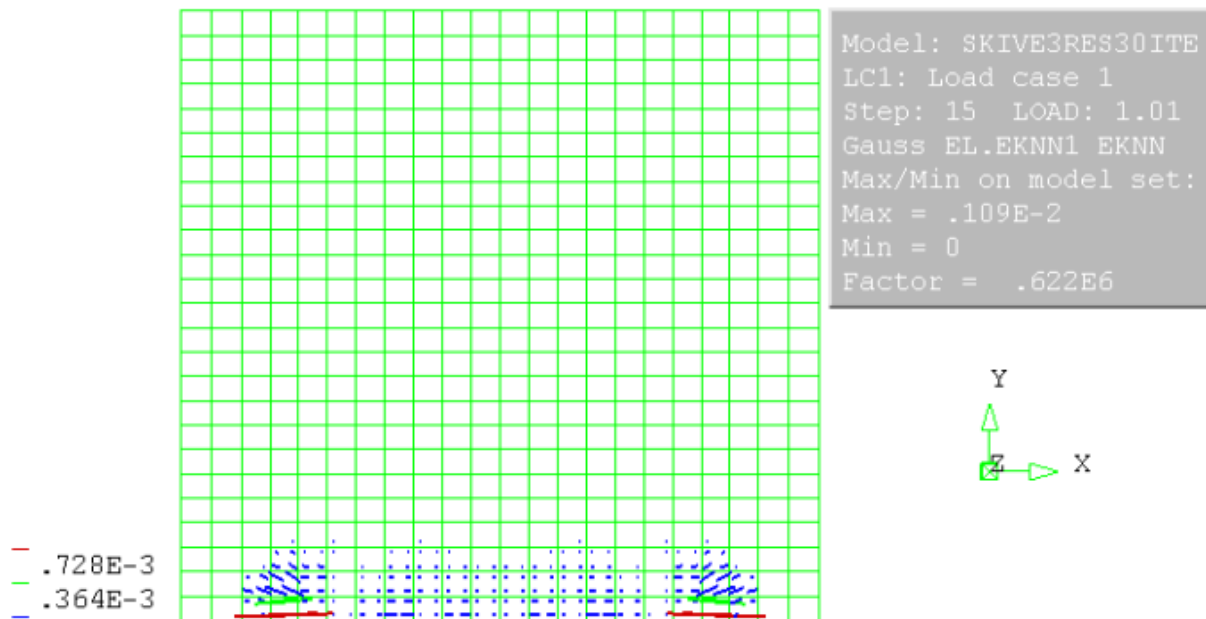
Resultatene med en *fixed crack* modell viser at spenningene i vertikal armering ved referanselast er 39,9 MPa. Armeringsspenningene vil etter hvert øke til flytegrensen ved en lastfaktor på $1,36 \cdot$ referanselast, noe som tilsvarer en bruddlast på 204 kN/m. Figur 8.1 illustrer forskjellen mellom last-forskyvningskurvene til de to ulike opprissingsmodellene.



Figur 8.1: Last-forskyvningskurve i midtsnitt for total strain fixed crack og total strain rotating crack modeller.

Last-forskyvningskurvene viser at begge opprissingsmodellene oppfører seg likt frem til bruddlasten til *rotating crack* modellen ved en lastfaktor på 1,06, hvor man da har oppnådd flyt i armeringen. Kurven for *fixed crack* modellen fortsetter så til en «knekk» ved lastfaktor 1,36, hvor vi her oppnår flyt i armeringen. En forklaring på hvorfor analysen med en *fixed crack* modell resulterer i en høyere bruddlast, kan være at det er benyttet en *shear retention* faktor $\beta = 1,0$. Man antar da at strekkfastheten langs rissene ikke reduseres, noe som kan resultere i et stivere system. De lave armeringsspenningene i den vertikale armeringen på 39,9 MPa ved referanselast kan tyde på at dette er tilfelle, da strekkfastheten i rissene som oppstår vil bidra til å ta opp strekkraftene i armeringen.

Ved å betrakte rissmønstrene på figur 7.5 og figur 8.2 oppstår de største rissene ved opplagrene for begge opprissingsmodellene. Forskjellen er at de vertikale rissene som først oppstår forblir vertikale for *fixed crack* modellen, mens de etter hvert vil rotere for *rotating crack* modellen som beskrevet i kapittel 1.2 om opprissingsmodeller. Analysen med *rotating crack* ender opp med flere riss enn *fixed crack*, noe som kan forklares med at det oppstår flere nye riss med et roterende, lokalt aksesystem, mens et stasjonært aksesystem fortsetter opprissing over gamle riss. *Output*-filene viser at det er flere aktive riss ved referanselasten med en *fixed crack* opprissingsmodell, noe som også antyder at en opprissingsmodell med et roterende aksesystem opplever flere riss.



Figur 8.2: Riss vektor-plott ved $1,01 \cdot$ referanselast med en total strain fixed crack betongmodell.

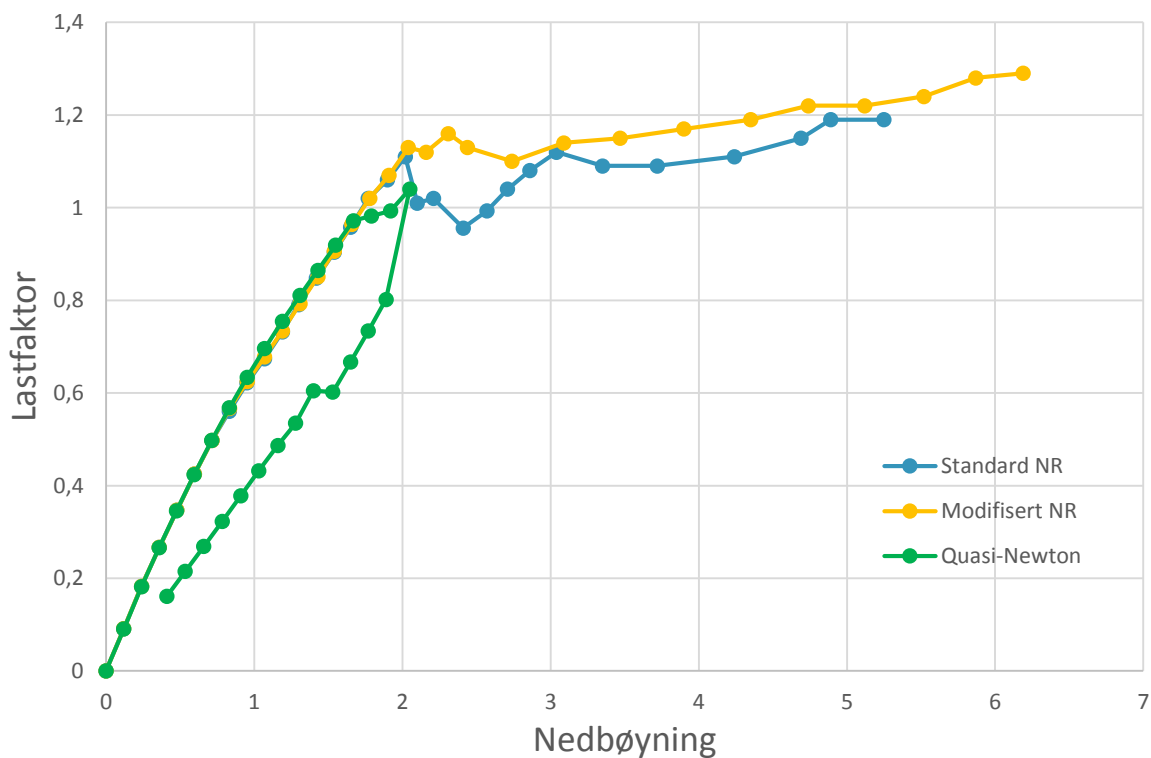
Bruken av *ultimate strain based*- og *fracture energy based*-funksjoner ga helt like resultater for last-forskyvningskurver, armeringsspenninger, rissmønstre og betongspenninger for både *rotating crack* og *fixed crack* modeller.

Skiven er forsøkt modellert med både en *tension-softening* og en *tension-stiffening* effekt. Det er tidligere foreslått at konstruksjoner med tett armering bør modelleres med en *tension-stiffening* effekt, noe som kan virke fornuftig for den modellerte skiven hvor det er lagt inn armeringsnett i tillegg til armeringsstenger i bunnen av skiven. For denne skiven viser det imidlertid seg at en *tension-softening* effekt gir mer fornuftige resultater, mens en *tension-stiffening* effekt virker å overestimere bruddlasten hvor man ikke oppnår flyt i armering selv ved svært høy belastning. En grunn til at modellen viser mer fornuftige resultater med en *tension-softening* effekt kan være at skiven viser et opprissingsmønster med få hovedriss i bunnen av skiven, i stedet for et fint, distribuert rissmønster. For konstruksjoner som svikter av noen få hovedriss er det mer hensiktsmessig å benytte en *tension-softening* effekt, noe denne skiven er et godt eksempel på.

8.1.3 Numeriske løsningsmetoder

For skiven benytter DIANA generelt kort beregningstid for å løse de ikke-lineære likningene for systemet hvor det kun er 30 laststeg. En sentral faktor for den korte beregningstiden er at elementnettet er delt opp i relativt store elementer noe som fører til færre likninger for beregningsprogrammet å regne. Bruken av Q8MEM-elementer er også hensiktsmessig og regneeffektiv ettersom denne elementtypen kun har 8 frihetsgrader. Elementet er tilstrekkelig for konstruksjonstypen og ønskede resultater, da belastning kun virker i skivens plan og bøyning ut av planet ikke er aktuelt.

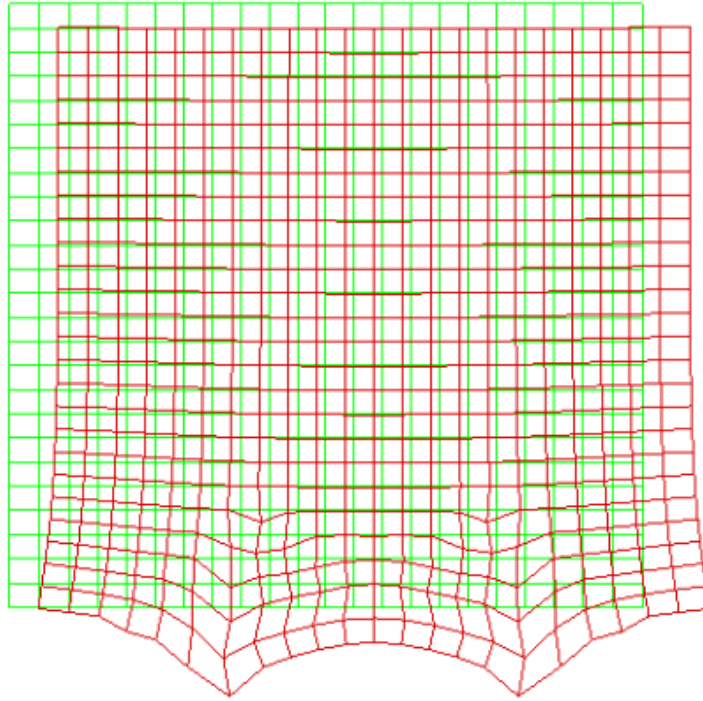
Det er utført analyser hvor iterasjonsmetoder som er benyttet varierer mellom Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton av typen Crisfield. De ulike iterasjonsmetodene som er testet, er analysert med den aktuelle modellen det er valgt å presentere resultater fra i forrige kapittel, som for skiven er med en *total strain rotating crack* opprissingsmodell og en *ultimate strain based*-funksjon. Figur 8.3 illustrerer last-forskyvningskurvene for skivens midtsnitt for hver iterasjonsmetode.



Figur 8.3. Last-forskyvningskurver for midtsnitt med Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton.

Last-forskyvningskurvene til de to Newton-Raphson metodene oppfører seg relativt likt frem til bruddlasten, hvor begge metodene slutter å oppnå konvergens for laststegene rett etter laststeget som gir brudd. Det er verdt å merke seg at metoden med Modifisert Newton-Raphson resulterer i en noe høyere bruddlast med en lastfaktor 1,13 enn Standard Newton-Raphson med lastfaktor 1,06. Begge metodene krever mange iterasjoner for å oppnå konvergens for laststegene rett før vi oppnår bruddlasten.

Last-forskningskurven til analysen med Quasi-Newton som iterasjonsmetode får en brå «vending» på kurven etter en lastfaktor på 1,04, hvor det neste laststeget etter ikke oppnår konvergens. Metoden viser avvik fra Newton-Raphson metodene når løsningen blir mer ustabil og krever mange iterasjoner for å oppnå konvergens. Mekanismen som oppstår i modellen hvor man opplever mindre nedbøyning er illustrert på figur 8.4, og er en meget urealistisk oppførsel av skiven.



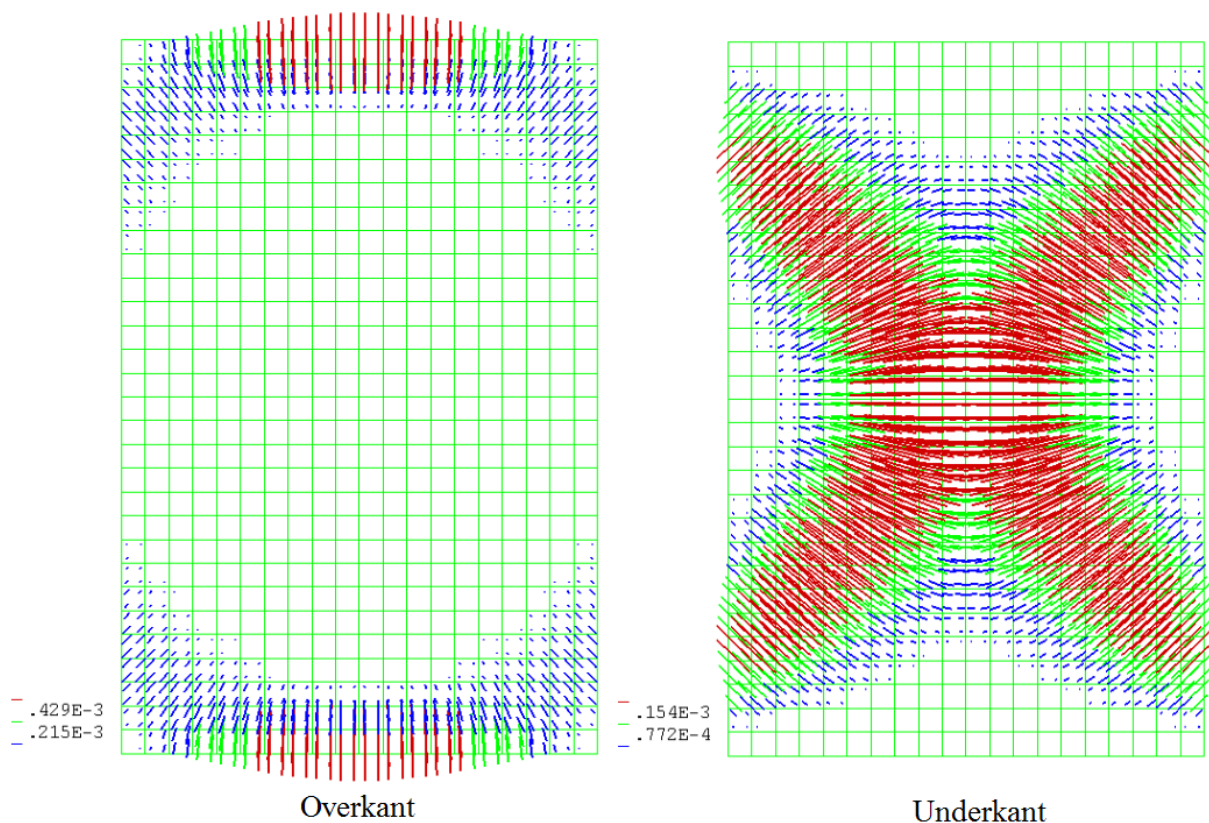
Figur 8.4: Deformasjonsform ved laststeg 30 med Quasi-Newton som iterasjonsmetode.

I teorikapittelet om numeriske løsningsmetoder er det beskrevet at en Standard Newton-Raphson iterasjonsmetode vanligvis krever færre iterasjoner enn Modifisert Newton-Raphson. En undersøkelse av antall iterasjoner hver metode krever for å oppnå konvergens viser imidlertid at det ikke er merkverdige forskjeller mellom iterasjonsmetodene. En begrunnelse for dette kan være at lastforskningskurven er tilnærmet lineær før kurven får en «knekk», noe som vil kreve få iterasjoner for begge metoder.

8.2 Plate

8.2.1 Bruddmekanisme

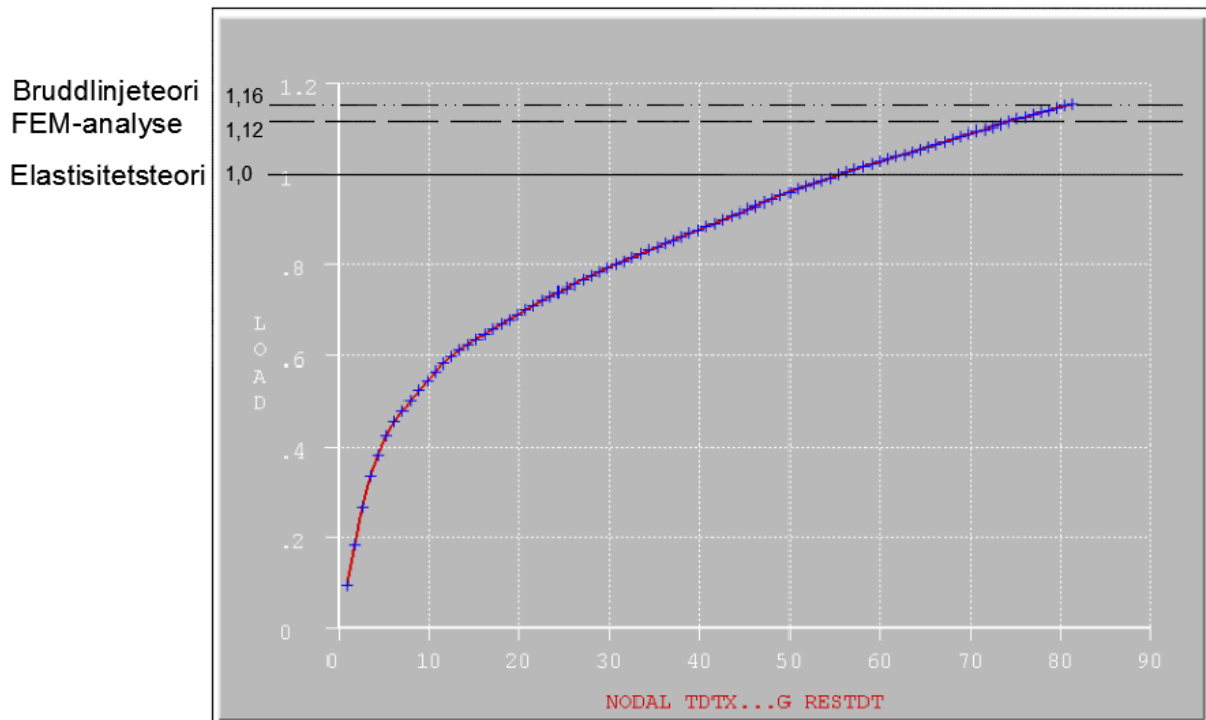
Last-forskyvningskurven på figur 7.10 viser først en lineær stigning før det oppstår en endring ved lastfaktorer mellom 0,4-0,6. En undersøkelse av rissmønstrene i over- og underkant av plata ved denne belastningen tyder på at mekanismen som oppstår skyldes at bruddlinjemønsteret i betongen er fullstendig. Ved å sammenligne rissmønstrene ved referanselast på figur 7.13 og 7.14 med opprissingen ved $0,5 \cdot$ referanselast på figur 8.5, kan man se at rissmønstrene endrer seg lite, noe som antyder at bruddlinjemønsteret i betongen oppstår mellom lastfaktor 0,4-0,6.



Figur 8.5: Rissmønstre ved $0,5 \cdot$ referanselast.

Ved referanselasten på 15 kN/m^2 er det oppnådd flyt i overkantsarmeringen ved innspenningene, noe som forekommer ved en lastfaktor på $0,96 \cdot$ referanselast. For underkantsarmeringen er spenningene i både x- og y-retning fortsatt under flytegrensen på 434 MPa , hvor maksimal armeringsspenning forekommer i x-retning på 370 MPa . Ettersom det har oppstått flyteledd ved innspenningene kan man nå betrakte systemet til plata, som opprinnelig har faste innspenninger ved kortsidene, til å være en fritt opplagt, rektangulær plate. Ved en slik betraktning vil det være fornuftig å anta at en bruddmekanisme plata forekommer når underkantsarmeringen oppnår flytegrensen i x- eller y-retning. Undersøkelse av laststegene etter referanselast viser at armeringen i x-retning oppnår flyt ved en lastfaktor på $1,12 \cdot$ referanselast, noe som tilsvarer en bruddlast på $16,8 \text{ kN/m}^2$.

Plata er dimensjonert etter elastisitetsteori med en dimensjonerende last på 15 kN/m^2 , mens en håndberegning med anvendelse av bruddlinjeteori regnet ut en bruddlast på $17,4 \text{ kN/m}^2$. Bruddlinjeteori er som nevnt en øvre grense metode hvor bruddlasten som regnes ut enten er korrekt eller for høy. Vurderingen av den ikke-lineære FEM-analysen ut en bruddlast på $16,8 \text{ kN/m}^2$. Figur 8.6 illustrerer en oversikt over de ulike metodenes bruddlaster.

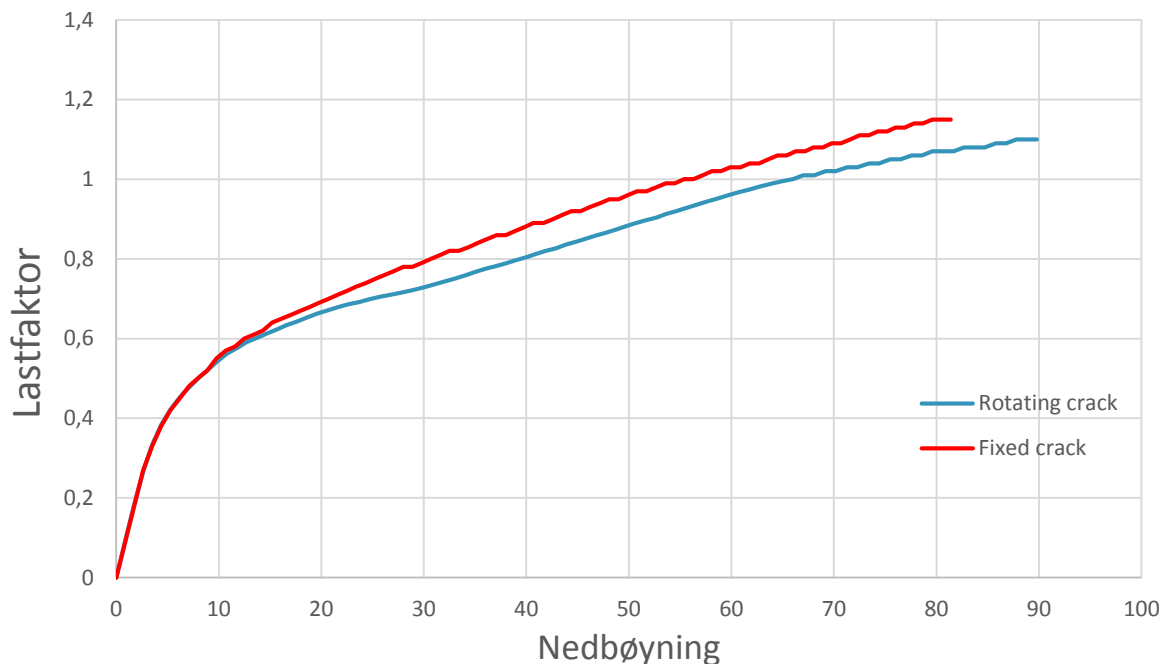


Figur 8.6: Utreget bruddlast ved bruk av FEM-analyse, bruddlinjeteori og elastisitetsteori. Referanselast er 15 kN/m^2 .

Den ikke-lineære FEM-analysen skal i prinsippet simulere den virkelige oppførselen til plata, og regner ut en bruddlast som samsvarer godt med bruddlinjeteorien. De utregnede bruddlastene er noe høyere enn den dimensjonerende lasten etter elastisitetsteori, noe som kan begrunnes med at samvirke av den totale konstruksjonen vil påvirke resultatene på en måte man ikke tar hensyn til ved dimensjoneringen.

8.2.2 Materialmodeller

Valget av å presentere resultater fra analysen med en *total strain fixed crack* opprissingsmodell er gjort på grunnlag av at den ikke-lineære FEM-analysen viste god overenstemmelse med bruddlinjeteorien. Analysene resulterte i en bruddlast som var like under referanselasten. Last-forskyvningskurvene til opprissingsmodellene er illustrert på figur 8.7.



Figur 8.7: Last-forskyvningskurver i platas midtpunkt for total strain fixed crack og total strain rotating crack modeller.

De ulike analysenes last-forskyvningskurver kan tolkes med at begge modellene oppnår et fullstendig bruddlinjemønster i betongen mellom lastfaktorer 0,4-0,6. Videre observeres det at *rotating crack* modellen belastes med lavere lastfaktor for lik nedbøyning som *fixed crack* modellen. Dette kan tyde på at armeringsspenningene i *rotating crack* modellen har høyere verdier for lik belastning enn for *fixed crack* modellen, noe som også viser seg å være tilfelle. En undersøkelse av armeringsspenningene viser at det er oppnådd flyt i under- og overkantsarmeringen ved en lastfaktor 0,988. At analysen med en *rotating crack* opprissingsmodell resulterte i en lavere bruddlast enn for *fixed crack* modellen, er fornuftig med tanke på at *shear retention* faktoren er satt til 1,0 og betongen bidrar med mer strekkfasthet.

Grunnen til at analysen med en *rotating crack* modell får en bruddlast under referanselasten på 15 kN/m² er det ikke lyktes med å begrunne helt sikkert. Platen som er modellert er noe mer «utradisjonell» enn en fritt opplagt, kvadratisk plate, hvor flere faktorer som

innspenninger og overkantsarmering spiller inn, og oppførselen av den totale konstruksjonen har vært vanskeligere å forutse. Det er derfor noen usikkerhetsmomenter til hvorfor *rotating crack* modellen resulterer i en for lav bruddlast, men resultatene er ikke langt unna den dimensjonerende lasten på 15 kN/m^2 med en lastfaktor på 0,988 som tilsvarer en last på $14,82 \text{ kN/m}^2$.

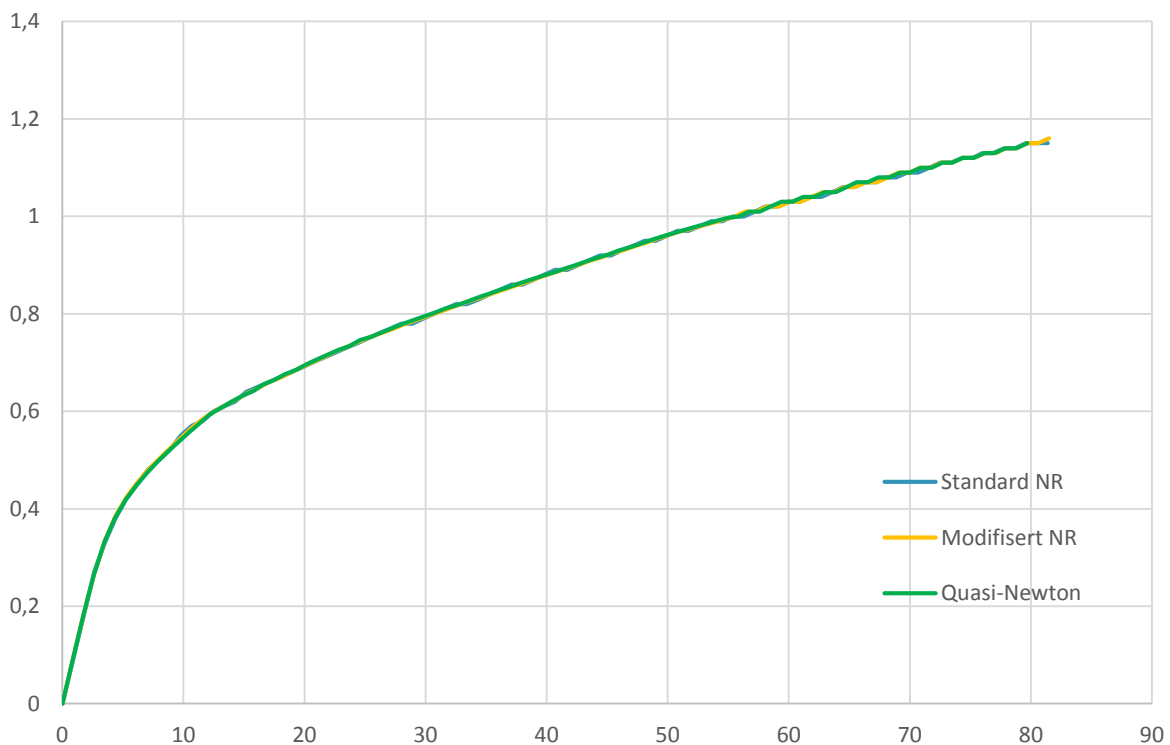
Resultatene fra de ulike opprissingsmodellene viste heller ikke her noen forskjeller mellom bruk av *fracture energy based*- og *ultimate strain based*-funksjoner.

Platen er her også forsøkt modellert med både en *tension-softening* og en *tension-stiffening* effekt. Ettersom platen er tett armert og viser et fint, distribuert opprissingsmønster er det naturlig å anta at modellering med en *tension-stiffening* effekt er hensiktsmessig. Dette viser seg også være tilfellet, da modellering med en *tension-softening* effekt resulterer i at armeringen i både over- og underkant ikke oppnår flyt selv ved svært høye belastninger, noe som virker urealistisk.

8.2.3 Numeriske løsningsmetoder

Analysene i DIANA for platen benytter noe lengre beregningstid enn skiven for å løse de ikke-lineære likningene i systemet, noe som er naturlig da det er kjørt analyser med 90 laststeg. Alle iterasjonsmetodene bruker generelt kort tid per laststeg med få iterasjoner for å oppnå konvergens. Konstruksjonen er delt opp i relativt store elementer, men tilstrekkelig nok for ønsket nøyaktighet, noe som også reduserer beregningstiden. Bruken av Q20SH-elementer er effektiv og tilstrekkelig for plateanalysen hvor vi opplever belastning normalt på planet og elementene har de nødvendige rotasjonsfrihetsgradene for bøyning av platen.

Modellen som er analysert med de ulike iterasjonsmetodene Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton benytter en *fixed crack* opprissingsmodell og en *fracture energy based*-funksjon. Figur 8.8 illustrerer de ulike iterasjonsmetodenes last-forskyvningskurve for midtpunktet på plata.



Figur 8.8: Last-forskyvningskurver for platens midtpunkt med Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton.

Last-forskyvningskurvene for de ulike iterasjonsmetodene viser en tilnærmet identisk oppførsel. Bruddlasten hvor det oppnås flyt i vertikal armering er også lik for hver metode. Konvergensthastigheten er også god gjennom hele analysen hvor Newton-Raphson metodene krever maksimalt 2 iterasjoner for å oppnå konvergens, og Quasi-Newton opplever noen unntak hvor det kreves 3 iterasjoner. Grunnen til iterasjonsmetodenes regneeffektivitet kan være at last-forskyvningskurven er jevn og systemet oppfører seg stabilt uten plutselige brudd i konstruksjonen under analysen.

8.3 Skall

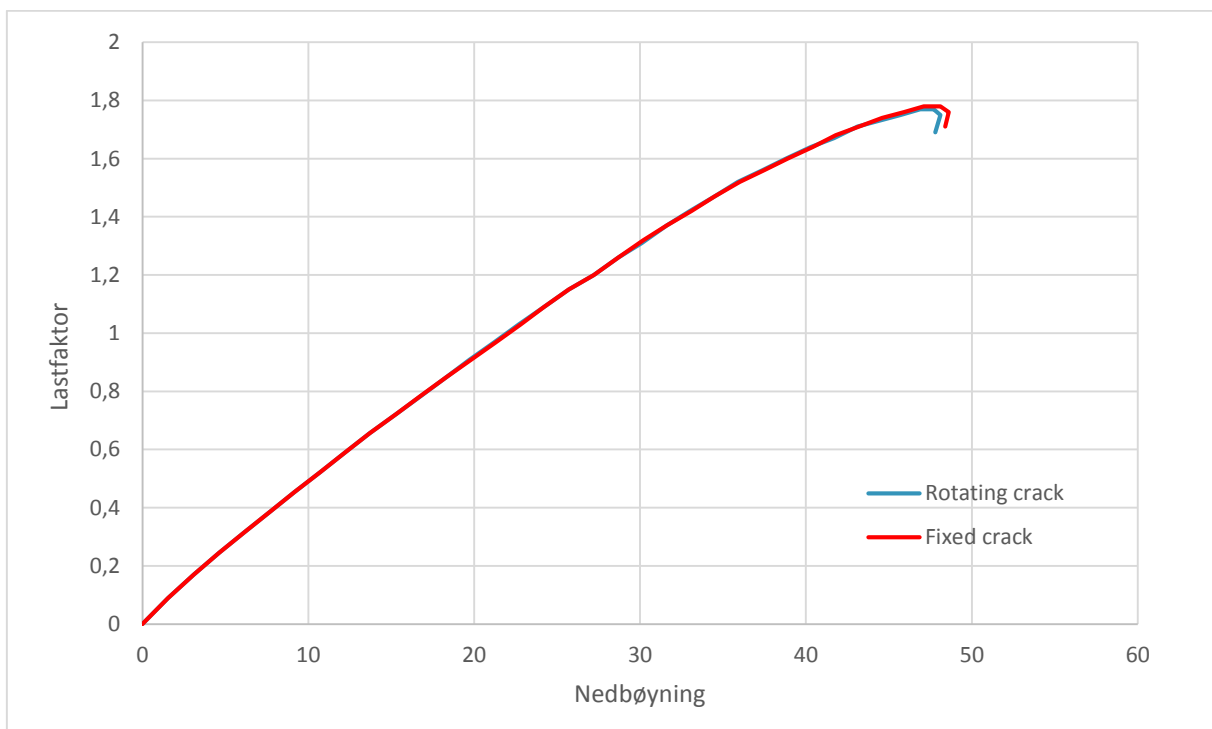
8.3.1 Bruddmekanisme

Last-forskyvningskurven i midtpunktet av skallet på figur 7.16 viser en jevn stigende kurve før det oppstår en topp ved lastfaktor 1,77. Laststegene som følger vil ikke oppnå konvergens. Ved lastfaktor 0,968 viser det seg at trykkspenningene i overkant av betongen ved innspenningene nærmer seg trykkfastheten på 17 MPa, og ved neste laststeg har spenningene overgått denne verdien. Resultatene viser at armeringen konstruksjonen er dimensjonert for oppnår spenninger som er langt under flytegrensen ved referanselast, og vil heller ikke oppnå flyt med økende lastfaktor for resten av analysen. Det konkluderes derfor med at brudd i den buede skallkonstruksjonen forekommer på grunn av trykkbrudd i betongen for en bruddlast på rundt 44 kN/m^2 , med en opprissingsmodell *total strain rotating crack* og *ultimate strain based*-funksjon.

Etter de ikke-lineære FEM-analysene er det klart at skallkonstruksjonen er overdimensjonert. To-lagsmetoden er i utgangspunktet en meget konservativ metode med flere antagelser og mangler, og resultatene viser at metoden ikke egner seg for av denne typen buede skallkonstruksjoner. Det er også verdt å nevne at den høye armeringsmengden bidrar med betydelig trykkapasitet for konstruksjonen.

8.3.2 Materialmodeller

Det er presentert resultater fra analysen med en *total strain fixed crack* opprissingsmodell, men resultatene fra en *fixed crack* modell resulterte i få avvik. Last-forskyvningskurvene til opprissingsmodellene er illustrert på figur 8.9.



Figur 8.9: Last-forskyvningskurver i skallets midtpunkt for *total strain fixed crack* og *total strain rotating crack* modeller.

Last-forskyvningsgrafene til de to ulike opprissingsmodellene viser tilnærmet identisk oppførsel, noe som også gjelder også armering- og trykkspenningene. Resultatene kan tyde på at valget av opprissingsmodell ikke vil påvirke konstruksjonsoppførselen. En forklaring på dette kan være at betongen vil oppleve store trykkrefter, mens armeringen får relativt lave spenninger. Likheten av resultatene mellom opprissingsmodellene kan da tolkes som at rissenes bidrag med strekkfasthet til armeringen for *fixed crack* modellen ikke vil påvirke systemets oppførsel, da det først vil oppnås trykkbrudd i betongen.

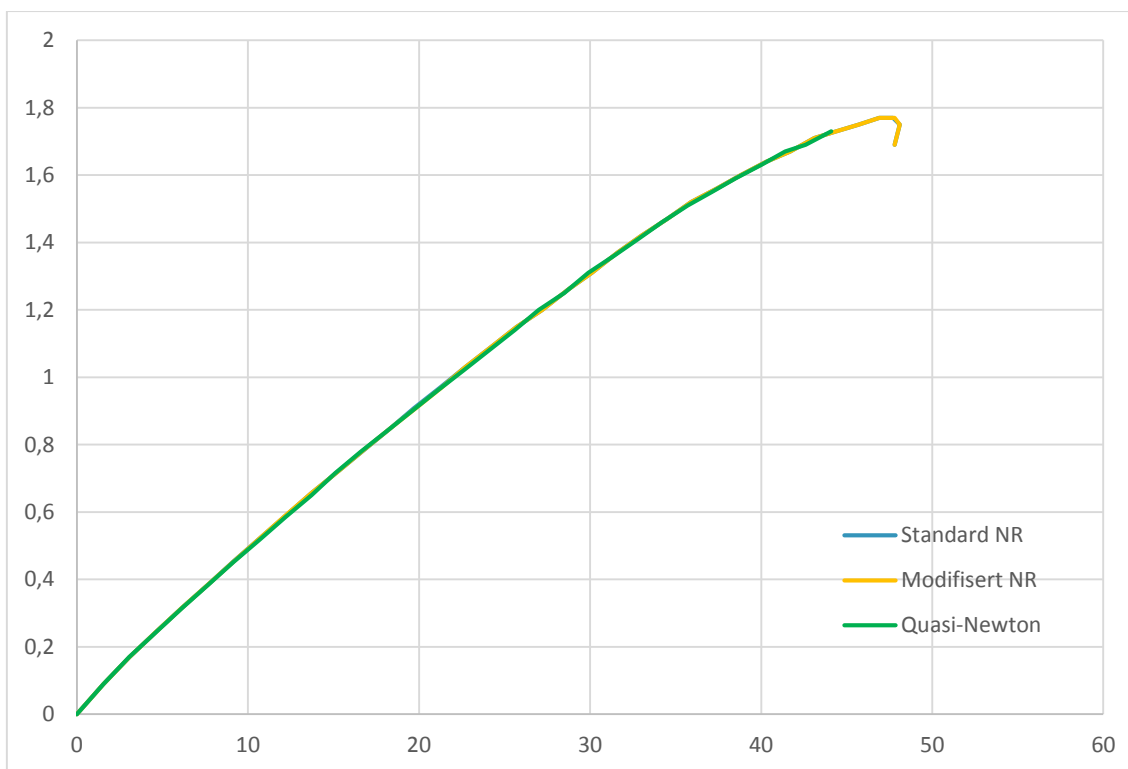
Bruken av *ultimate strain based*- og *fracture energy based*-funksjoner ga helt like resultater for last-forskyvningskurver, armeringsspenninger, rissmønstre og betongspenninger for både *rotating crack* og *fixed crack* modeller.

Skallet er forsøkt modellert med både en *tension-softening* og en *tension-stiffening* effekt. Ettersom skallet er tett armert og viser et fint, distribuert opprissingsmønster er det naturlig å anta at modellering med en *tension-stiffening* effekt er hensiktsmessig. En *tension-softening* effekt resulterte i ganske like resultater, noe som her også kan begrunnes med at konstruksjonen svikter ved trykkbrudd og ikke flyt i armering. Strekkfastheten i betongen vil derfor ha mindre å si og bruk av *tension-stiffening* og -softening vil påvirke resultatene i liten grad.

8.3.3 Numeriske løsningsmetoder

For skallet bruker DIANA noe lengere beregningstid per laststeg for å løse de ikke-lineære likningene i systemet enn skiven og platen. En viktig faktor til dette er at det benyttes CQ40S-elementer som har et høyt antall frihetsgrader på 40, noe som øker størrelsen på det ikke-lineære ligningssystemet. Bruken av CQ40S-elementer er nødvendig for å oppnå ønsket nøyaktighet over skallbuen, hvor det viste seg at bruk av Q20SH-elementer resulterte i utilstrekkelige kraftdiagram med ikke-kontinuerlige grafer.

Modellen som er analysert med de ulike iterasjonsmetodene Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton benytter en *rotating crack* opprissingsmodell og en *ultimate strain based*-funksjon. Figur 8.10 illustrerer de ulike iterasjonsmetodenes last-forskyvningskurve for midtpunktet på plata.



Figur 8.10: Last-forskyvningskurver for skallets midtpunkt med Standard Newton-Raphson, Modifisert Newton-Raphson og Quasi-Newton.

De ulike iterasjonsmetodene viser tilnærmet lik oppførsel frem til toppunktet hvor løsningen blir ustabil og laststegene ikke oppnår konvergens. Før toppunktet er alle metodene regneeffektive og krever maksimalt to iterasjoner for å oppnå konvergens. En grunn til dette er at last-forskyvningskurven har en lineær oppførsel, noe som krever få iterasjoner for å oppnå konvergens. Noe som er verdt å merke seg er at Quasi-Newton iterasjonsmetoden får meget urealistiske resultater når løsningen blir ustabil. Når laststegene for denne metoden ikke oppnår konvergens blir ser det ut til at løsningen divergerer last-forskyvningskurven får ekstreme avvik fra resten av kurven. De tre siste laststegene for Quasi-Newton er derfor ikke inkludert i figur 8.10.

9. Konklusjon

De ikke-lineære FEM-analysene som er utført for de ulike konstruksjonene gir resultater som ved noen tilfeller viser samsvar med benyttet dimensjoneringsmetode, mens andre tilfeller viser avvik som det kun har lyktes å begrunne med en viss usikkerhet.

Skiveanalysen med en *total strain rotating crack* opprissingsmodell resulterer i en bruddlast som samsvarer bra med dimensjoneringen utført med en *Strut-tie* modell. Undersøkelse av FEM-analysen viser at bruddmekanismen for denne konstruksjonen var flyt i vertikal armering. Dimensjoneringen av den horisontale stangarmeringen skal i prinsippet også oppnå flyt rundt referanselasten, men det lyktes ikke å modellere dette fullstendig på ønsket måte. Mekanismen som oppstår i FEM-modellen er at den horisontale minimumsarmeringen som skal hindre skjærbrudd, tar opp en andel av strekkraftene som er ment for stangarmeringen og ikke oppfører seg på ønsket måte. Ved prøving av ulike opprissingsmodeller observeres det forventede resultater, hvor en *total strain fixed crack* modell resulterer i en noe høyere bruddlast, på grunn av effekten av å definere *shear retention* faktoren β som 1,0. Det er også interessant at modellering med en *tension-softening* effekt ga best resultater, noe som kan begrunnes med at skiven viser et opprissingsmønster med få hovedriss i bunnen av skiven, i stedet for et fint, distribuert rissmønster. Analyser med ulike iterasjonsmetoder viser små forskjeller mellom bruk av Standard og Modifisert Newton-Raphson. Bruk av Quasi-Newton resulterer i betydelige avvik fra de andre iterasjonsmetodene når løsningen blir mer ustabil og krever mange iterasjoner for å oppnå konvergens.

Plateanalysen med en *total strain fixed crack* opprissingsmodell resulterer i en bruddlast, hvor både over- og underkantsarmering flyter, som samsvarer bra med håndberegningene utført med bruddlinjeteori. Bruddlinjeteorien regner ut en bruddlast som forventet er noe høyere enn referanselasten benyttet for dimensjoneringen. Bruk av en *total strain rotating crack* opprissingsmodell resulterte i en bruddlast som var nærmere referanselasten. Det er ikke lyktes å begrunne helt sikkert hvorfor FEM-analysene og bruddlinjeteorien resulterer i bruddlast som viser betydelige avvik fra dimensjoneringen, og konstruksjonen er en mer «utradisjonell» plate hvor den totale oppførselen av hele systemet er noe problematisk å forutse. Tidligere arbeid utført viser at bruk av en *rotating crack* opprissingsmodell viser gode resultater og samsvarer bra med dimensjoneringen for en fritt opplagt plate. Prøving av ulike numeriske løsningsmetoder resulterte i tilnærmet identiske resultater for alle iterasjonsmetodene, noe som kan begrunnes med at løsningen viser meget god stabilitet med få iterasjoner for å oppnå konvergens ved hvert laststeg gjennom hele analysen.

Skallanalysen viser klare tegn på at konstruksjonen er overdimensjonert med to-lagsmetoden. Armeringen er langt unna å oppnå flyt gjennom analysen, hvor det først oppstår et trykkbrudd i betongen. Resultatene tyder på at to-lagsmetoden ikke er en egnet metode for dimensjonering av slike buede skallkonstruksjoner analysert i denne oppgaven. Analyser med ulike opprissingsmodeller gir tilnærmet identisk oppførsel med lik bruddlast, og kan begrunnes med at rissenes bidrag med strekkfasthet til armeringen for *fixed crack* modellen ikke vil påvirke systemets oppførsel, da det først vil oppnås trykkbrudd i betongen. Alle de

ulike iterasjonsmetodene viser god konvergensthastighet, frem til løsningen blir ustabil og slutter å konvergere. Quasi-Newton iterasjonsmetoden vil da divergere og regne ut ekstreme avvik fra resten av kurven.

Generelt vil bruk av en *total strain rotating crack* modell gi lavere kapasitet for konstruksjoner hvor bruddmekanismen avgjøres av flyt i armering. Dette er forventet i analysene gjort i denne oppgaven, da det er benyttet en *shear retention* faktor β 1,0 for analysene med en *total strain fixed crack* modell. For en mer realistisk modell med *fixed crack* kan man definere en lavere verdi eller en kurve for *shear retention* faktoren og dermed modellere effekten av *stiffening/softening*, noe det ikke er gjort i denne oppgave. For konstruksjoner hvor bruddmekanismen avgjøres av trykkbrudd i betongen, viser det seg at valg av opprissingsmodell har lite å si. Bruk av en *ultimate strain based*-funksjon eller en *fracture energy based*-funksjon i DIANA resulterte i identiske resultater, så fremt man legger inn korrekte verdier. Det konkluderes derfor med at bruk av en *rotating crack* opprissingsmodell vil gi tilstrekkelige resultater og er på sikker side i forhold til en *fixed crack* opprissingsmodell hvor man definerer *shear retention* faktoren som 1,0, og valg av *ultimate strain based* eller *fracture energy based* i DIANA gir identiske resultater.

Valg av ulike numeriske løsningsmetoder viser at det er små forskjeller for resultatet mellom de ulike iterasjonsmetodene så lenge løsningen er stabil og konvergerer. Konvergensthastighetene er også relativt like og det er ikke merkbare forskjeller for analysene gjort for konstruksjonene i denne rapporten. Standard og Modifisert Newton-Raphson viser tilnærmet like resultater for alle konstruksjonene, mens Quasi-Newton har en tendens til oppleve ufornuftige resultater når løsningen blir ustabil. Det konkluderes derfor med at begge Newton-Raphson iterasjonsmetodene egner seg best for ikke-lineær analyse av de aktuelle konstruksjonene. Tabell 9.1 viser en oversikt over anbefalingene det er konkludert med på bakgrunn av resultatene i denne rapporten.

Tabell 9.1: Oversikt over anbefalinger av materialmodeller og numerisk løsningsmetoder for de ulike konstruksjonene.

Konstruksjon	Opprissingsmodell	Iterasjonsmetode
Fritt opplagt skive	<i>Rotating crack</i>	Standard og Modifisert Newton-Raphson
Delvis innspent plate	<i>Fixed crack/rotating crack</i>	Standard og Modifisert Newton-Raphson
Buet skall	<i>Fixed crack/rotating crack</i>	Standard og Modifisert Newton-Raphson

10.Forslag til videre arbeid

Analysene utført har vært nyttig for en studie av effektene ulike opprissingsmodeller og iterasjonsmetoder har for ulike konstruksjoner. Det har likevel oppstått noen usikkerheter det kan være interessant undersøke videre.

Skiveanalysen har ikke lyktes med å modellere den horisontale minimumsarmeringen og stangarmering på ønsket måte, og det kan derfor være hensiktsmessig å undersøke om dette i stor grad har påvirket den utregnede bruddlasten. Videre arbeid og analyse av platekonstruksjonen kan også være hensiktsmessig med tanke på de ulike usikkerhetsmomentene som oppstod under vurderingen av resultatene.

For skallanalysen kan det være interessant og finne en dimensjoneringsmetode som fungerer for buede skall, med tanke på at dimensjonering med to-lagsmetoden tydelig resulterer i en overdimensjonering. Ettersom valg av opprissingsmodell ikke påvirker resultatene i stor grad, kan det også være verdt å teste andre matematiske materialmodeller som ikke inkluderer opprissing og undersøke om dette kan gi bedre resultater.

Det er benyttet en *arc-length* kontroll med *updated normal plane* metode for alle analysene og det kan være interessant og undersøke effekten av å benytte en *spherical path* metode.

Referanser

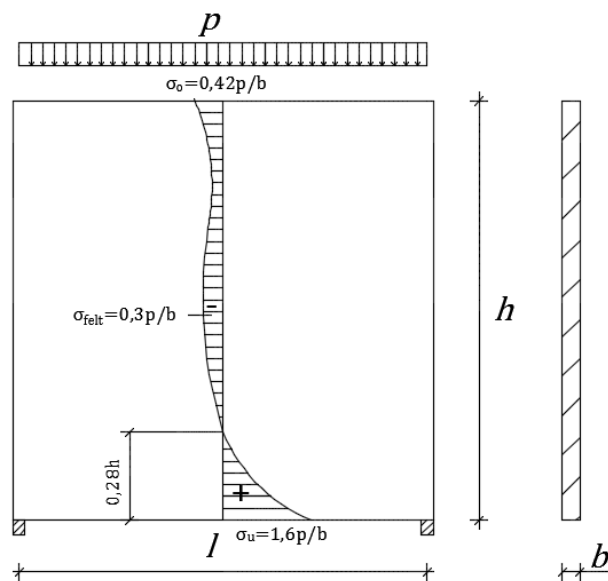
1. Hopperstad O.S, B.T., *Lecture Notes*. 2014, NTNU, Institutt for konstruksjonsteknikk.
2. R. de Borst., *Computational methods in non-linear solid mechanics, Part 2: Physical non-linearity*. 1991.
3. BV, T.D., *DIANA User's manual - Release 9.4.4*.
4. K.M, M., *TKT 4197 Ikke-lineær elementanalyse, Forelesninger*. 2014.
5. Leonhardt F. , M., E., *Sonderfälle der Bemessung im Stahlbetonbau*. Vol. 2. 1975, Berlin: Springer. VII, 141 s.
6. Øverli J.A, S.S.I., *TKT4222 Concrete structures 3: atumn 2011 ; compendium*. 2011, Trondheim: NTNU, Department of Structural Engineering. 205 s. : ill.
7. Standard, N., *Eurokode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 1-1, Allmenne regler og regler for bygninger*. 2008, Lysaker: Standard Norge. 225, 24, 19 s. : ill.
8. Karlsruhe, P.D.-I.G.F., ed. *Beton-Kalender 1972*. Taschenbuch für beton- und stahlbetonbau und die verwandten fachër. 1972.
9. Srinivasan Chandrasekaran, S.K.G., Federico Carannante, *Design aids for fixed support reinforced concrete cylindrical shells under uniformly distributed loads*. 2009.

Vedlegg A – Lineær analyse av skive

Dersom høyden på en vegg overskrider en viss størrelse, vil spenningsfordelingene endre seg i forhold til dem vi kjenner fra bjelker. For å kunne oppfatte bæresystemet som en skive må slankheten være $\frac{l}{h} < 2$.

Skiven er modellert som en fritt opplagt homogen isotrop skive med jevnt fordelt linjelast på øvre kant. Det er valgt en 5x5 meter skive med tykkelse $b = 250$ mm påsatt en last $p = 150$ kN/m. Spenningsfordelinger for ulike l/h -forhold er angitt i Leonhardt [5], men det er ikke spesifisert hvilket Poisson-tall som benyttes. Med en prøve-feile metode er det kommet frem til at et Poisson-tall 0.2 gir best spenninger i bunn av skiven. Ettersom en fritt opplagt skive vil ha kritiske områder i bunn er det fokusert på å ha mest nøyaktighet her. Opplagerbredden er presisert som $0,1 * l = 0,1 * 5000 = 500$ mm. Det er brukt en elastisitetsmodul $E = 20000$ N/mm².

For en skive med slankhetsforholdet $l/h = 1$ angir Leonhardt et spenningsforhold σ_x på midten som vist på figur A.1.



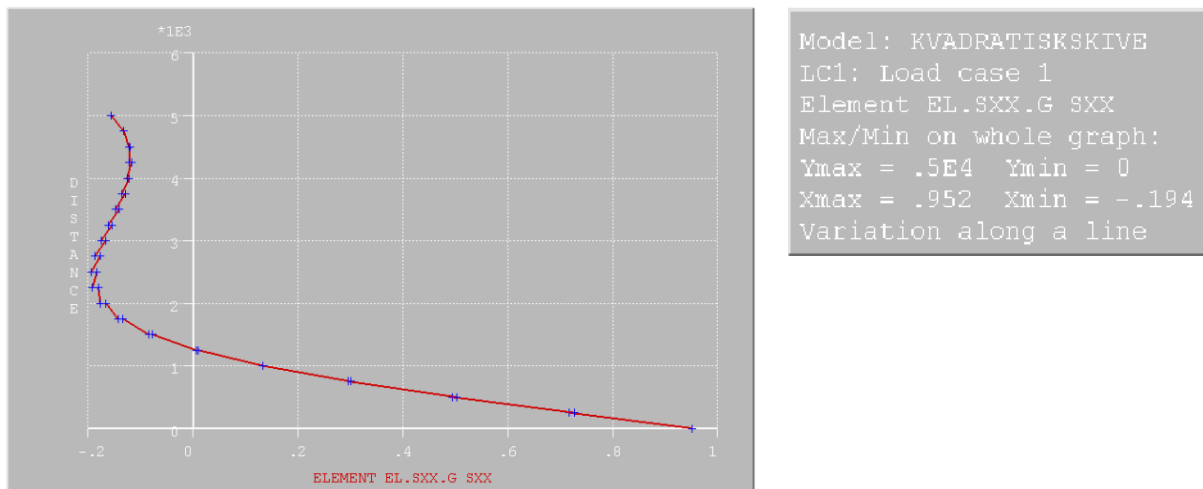
Figur A.1: Spenningsfordeling σ_x for fritt opplagt skive med $l/h = 1$.

Spenningene i skivens bunn og felt blir:

$$\sigma_u = 1,6 \frac{p}{b} = 1,6 \frac{150}{250} = 0,96 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{felt} = 0,3 \frac{p}{b} = 0,3 \frac{150}{250} = 0,18 \text{ N/mm}^2$$

Skiven er modellert med elementtypen Q8MEM i et elementnett 22x20 for å inkludere opplagerbredden i modellen. Det er utført en lineær, statisk analyse med direkte løsning. Spenningsfordelingen σ_x med angitte forhold tatt ut fra DIANA er vist på figur A.2.

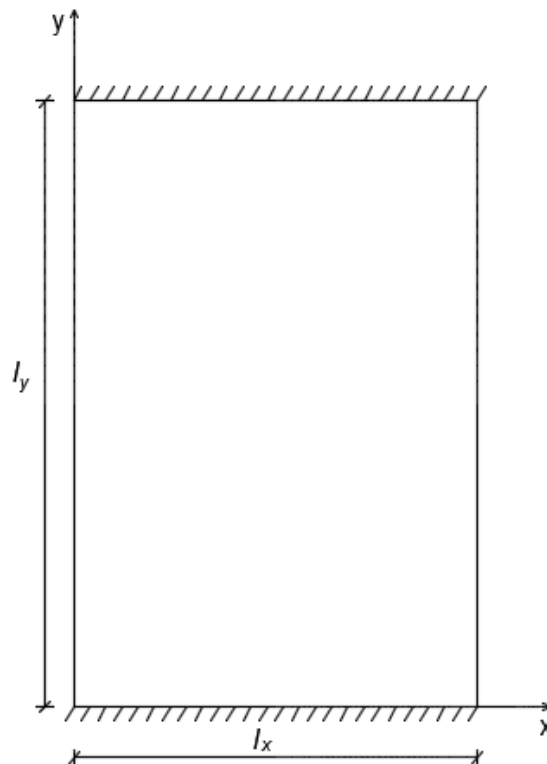


Figur A.2: Spenningsfordeling σ_x tatt ut fra DIANA.

Den lineære FEM-analysen gir en spenning på 0,952 N/mm² i bunn, noe som er et avvik på -0,83 % fra håndberegningene. Maksimal spenning i feltet ble beregnet til 0,194 N/mm², noe som gir et avvik på 7,78 %. Fra grafen er det mulig å se at spenningene på toppen også vil få betydelige avvik fra håndberegningene. Det er forsøkt å modellere med ulike Poisson-tall som gir bedre verdier for spenningene i feltet, men dette gir samtidig et større avvik for spenningene i bunn. Resultatene med Poisson-tall 0,2 aksepteres og vil danne grunnlag for videre ikke-lineær analyse.

Vedlegg B – Lineær analyse av plate

Plata er modellert som en homogen isotrop plate påsatt en jevnt fordelt overflatelast normalt på planet. Det er valgt en 5x7,5 meter plate med tykkelse $h = 150$ mm påsatt en last $p = 15$ kN/m². Beton-Kalender 1972 [8] angir tabeller med nedbøyninger og momenter for plater med ulike l_y/l_x - forhold og randbetingelser. Poisson-tall som benyttes er presisert som 0,0. Randbetingelser for plata er valgt som at kortsidene er fast innspent og langsiden er fritt opplagt. Det er valgt en E-modul = 20000 N/mm².



Figur B.1: Randbetingelser for plata.

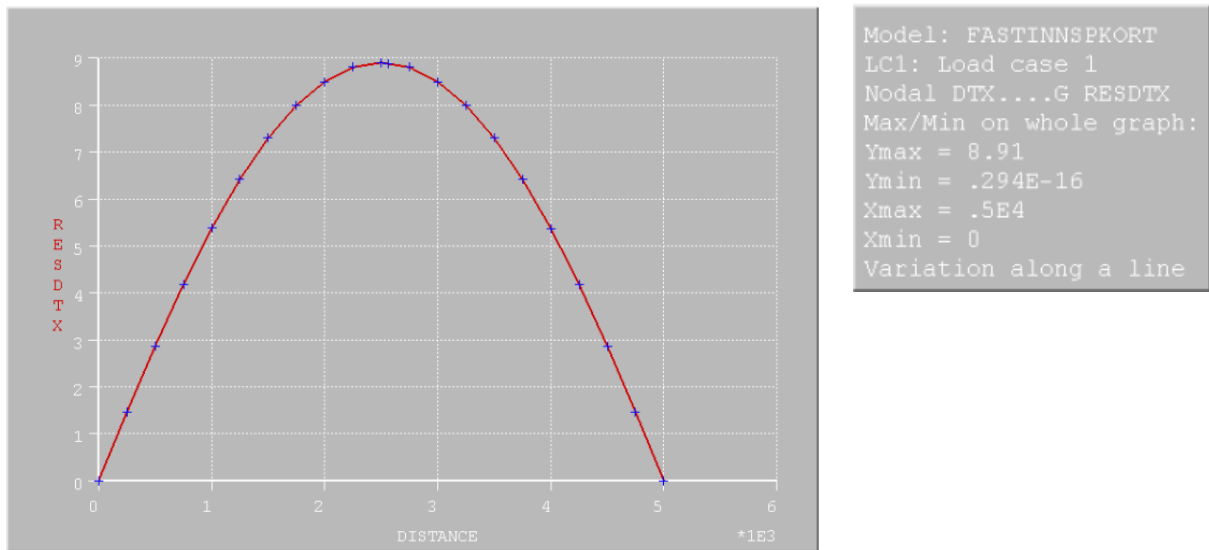
Med $l_y/l_x = 7500/5000 = 1,5$ og angitte randbetingelser, viser tabell 2.2.3. i Beton-Kalender følgende verdier for nedbøyning u_m og moment m_{xm} på midten:

$$u_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h^3} \cdot 0,0639 = \frac{0,015 \cdot 5000^4}{20000 \cdot 150^3} \cdot 0,0639 = 8,88 \text{ mm}$$

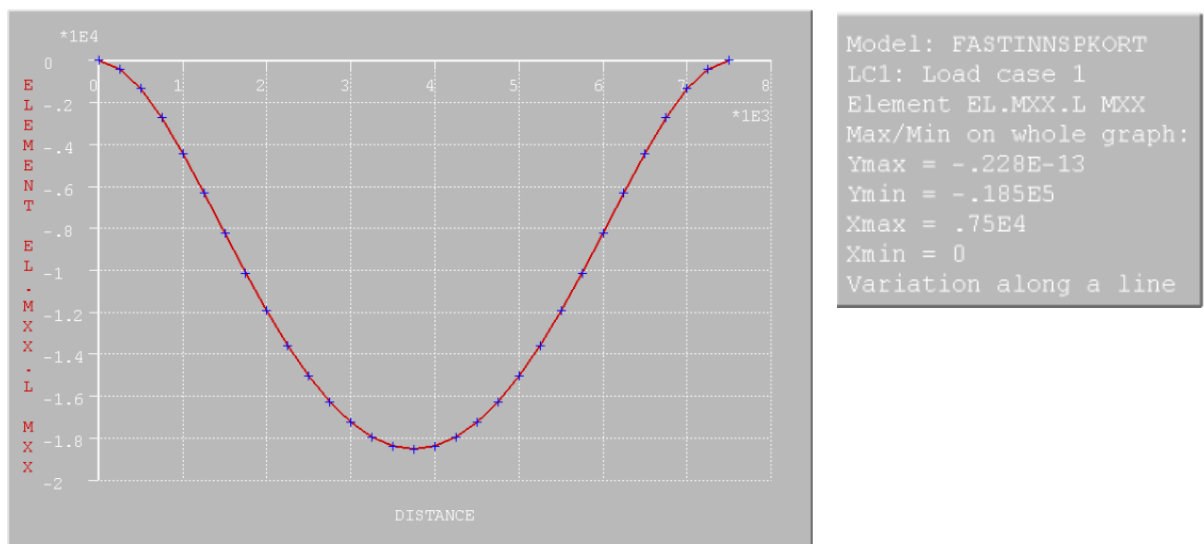
$$M_{xm} = -\frac{p \cdot l_x^2}{20,4} = -\frac{0,015 \cdot 5000^2}{20,4} = -18382,35 \text{ Nmm}$$

$$M_{ym} = -\frac{p \cdot l_x^2}{32,1} = -\frac{0,015 \cdot 5000^2}{32,1} = -11682,24 \text{ Nmm}$$

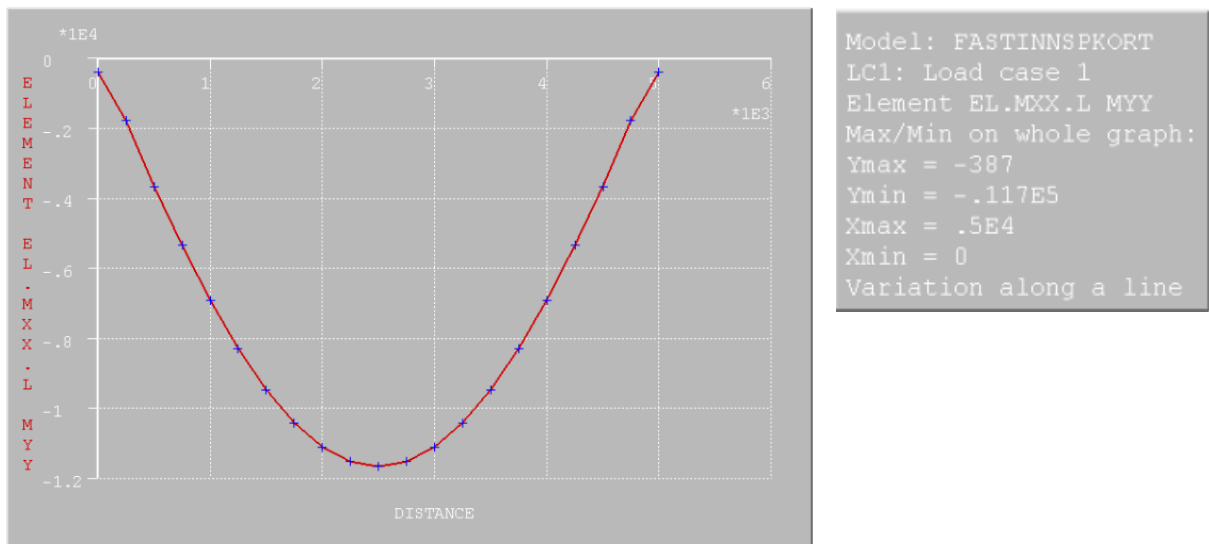
Plata er modellert med et elementnett 20x30 med elementtype Q20SH, og det er utført en statisk, lineær analyse med direkteløsning. Figur B.2, B.3 og B.4 viser grafer av platas nedbøyning og momenter med tilhørende maksverdier tatt ut fra DIANA.



Figur B.2: Nedbøyning på midten langs x-aksen.



Figur B.3: Moment om x-aksen M_x .



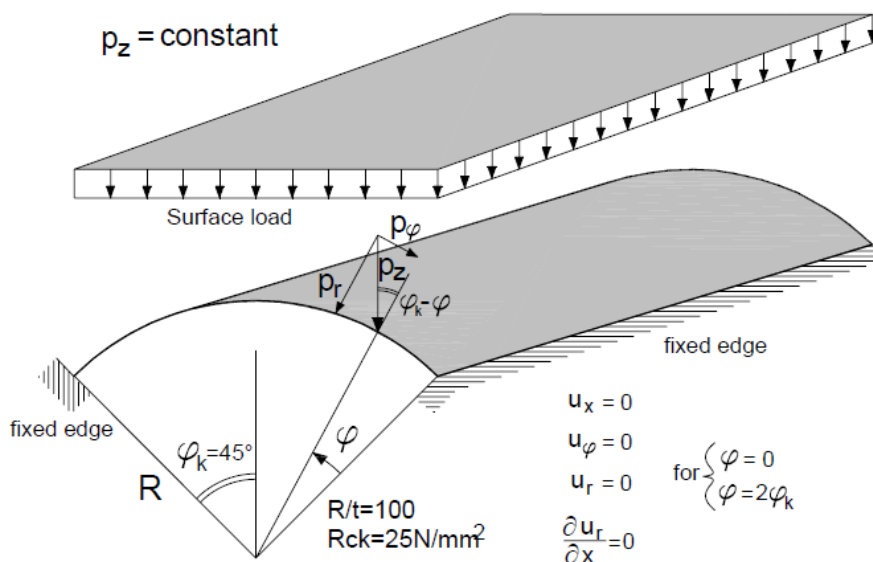
Figur B.4: Moment om y-aksen M_y .

Den lineære FEM-analysen gir en nedbøyning på 8,91 mm på midten og momenter $M_x = -18500$ Nmm og $M_y = -11700$ Nmm. Dette gir et avvik fra håndberegningene på 0,34 % for nedbøyning og 0,64 % for M_x og 0,15% for M_y . Lineær FEM-analyse viser meget god overenstemmelse med håndberegningene og danner et godt grunnlag for ikke-lineær analyse.

Vedlegg C – Lineær analyse av skall

Den lineære analysen av skallkonstruksjoner er verifisert på bakgrunn av studien «*Design aids for fixed support reinforced concrete cylindrical shells under uniformly distributed loads*» av Chandrasekaran, Gupta og Carrante [9]. Denne studiens formål var å utvikle matematiske modeller for tynne betongskallkonstruksjoner basert på klassisk krumningsteori, og dermed utarbeide forslag til grafer man kan benytte til dimensjonering av armerte betongskall.

Skallet som er modellert har fast innspente langsider og er påsatt en vertikal flatelast. Detaljert geometri og betingelser er vist i tabell C.1.

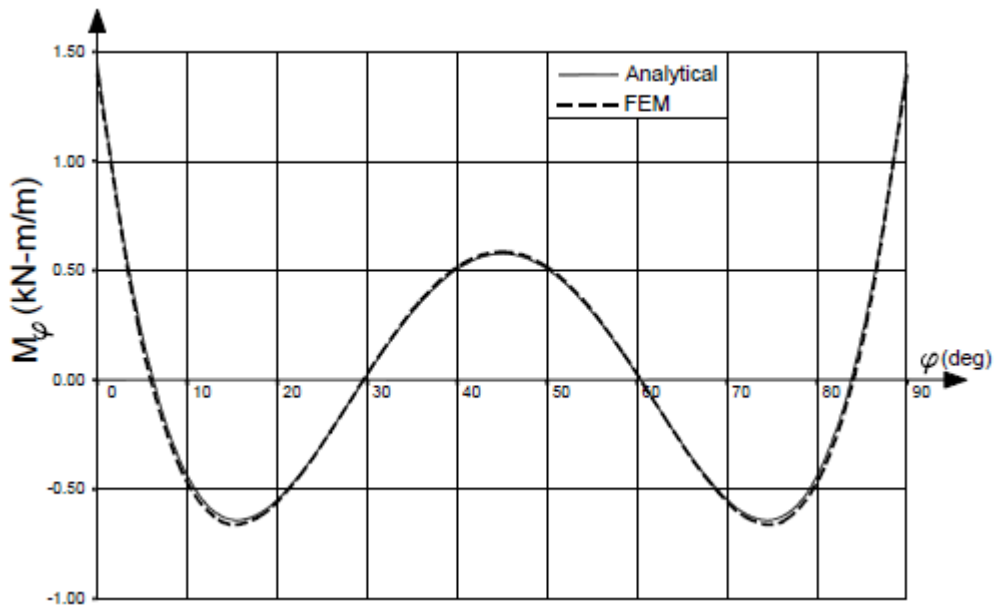


Figur C.1: Skall med innspente langsider [9].

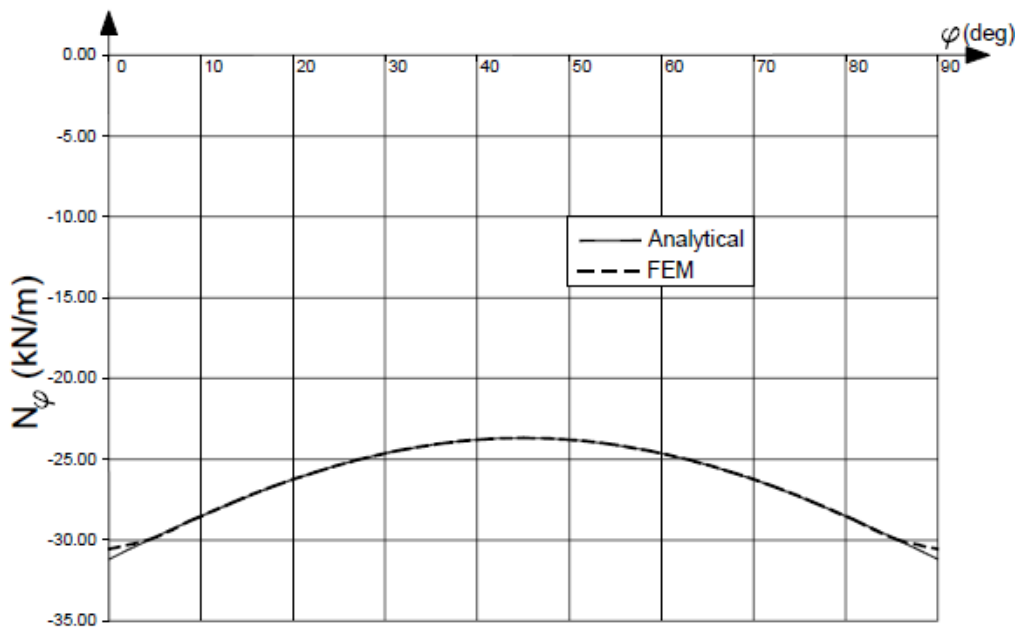
Tabell C.1: Geometri og betingelser

ϕ_k	45°
L	26.67 meter
R	8.0 meter
T	80 mm
p_z	3.25 kN/m ²
E-modul	25000 N/mm ²
Poisson-tall	0.2

Studien har utarbeidet grafer for ulike krefter langs skallbredden hvor utvalgte grafer for moment om x-aksen og normalkrefter er vist i figurene nedenfor.

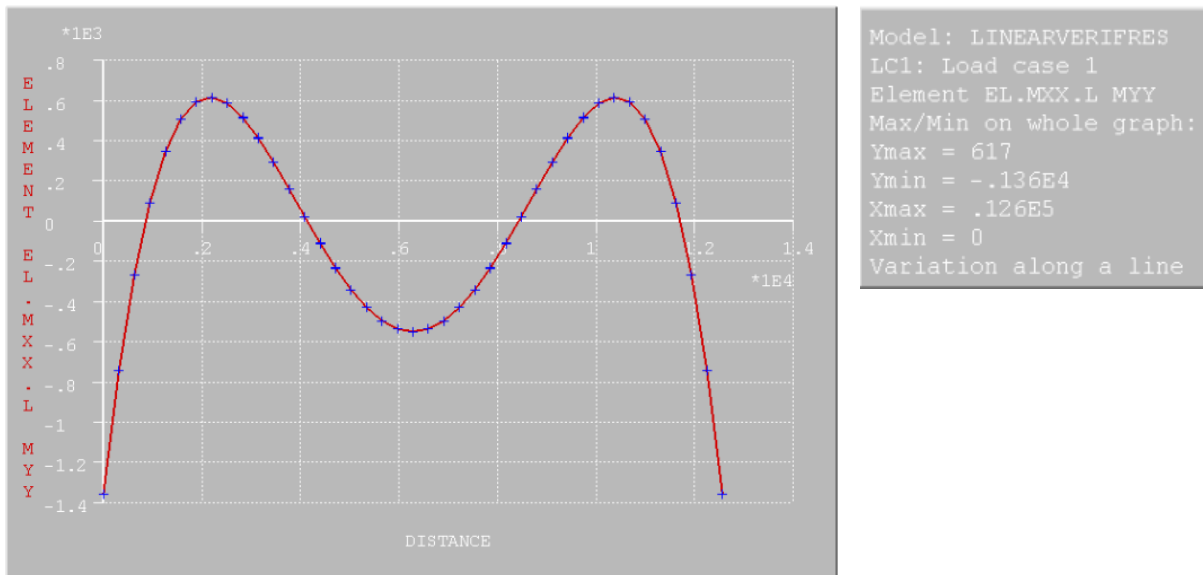


Figur C.2: Moment om y-aksen [9].

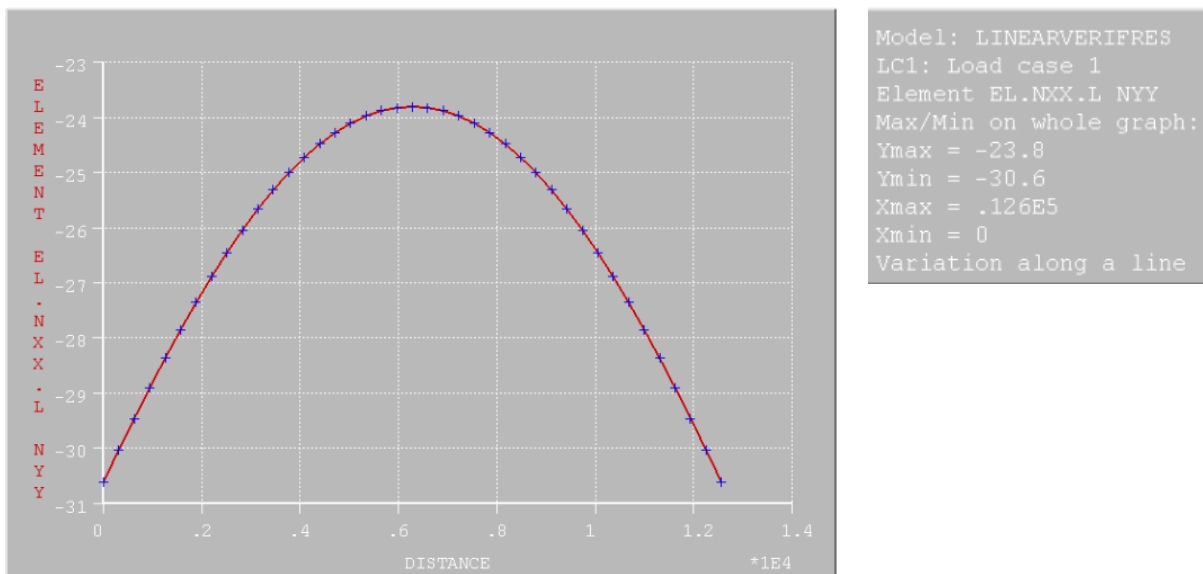


Figur C.3: Normalkrefter langs bredden [9].

Skallet er modellert med et elementnett 40x80 med elementtype CQ40S, og det er utført en statisk, lineær analyse med direkteløsning. Minste elementlengde blir da $100\pi = 315$ mm. Grafer langs bredden tatt ut fra DIANA er vist nedenfor.



Figur C.4: Moment om y-akse langs bredden fra FEM-analyse.



Figur C.5: Normalkrefter langs bredden fra FEM-analyse.

Den lineære FEM-analysen gir normalkrefter ved innspenning på -30,6 N/mm, mens tabell 2 i studien angir en verdi på -31,177 N/mm. Dette tilsvarer et avvik på -1,86 %. For momentet ved innspenningen angir tabell 2 en verdi på 1477 Nmm/m, mens FEM-analysen gir et

moment på 1360 Nmm/m. Dette tilsvarer et avvik på -7,9 %. Dette er gode indikasjoner på at beregningsmodellen oppfører seg fornuftig, og momentene og normalkreftene tatt ut fra modellen vil danne grunnlag for dimensjonering og videre ikke-lineær analyse.