

concept

Kjell Austeng, Vibeke Binz og Frode Drevland

# Usikkerhetsanalyse – Feilkilder i metode og beregning

Concept rapport Nr 13

 **NTNU**  
Det skapende universitet



Concept

Kjell Austeng, Vibeke Binz og  
Frode Drevland

# Usikkerhetsanalyse - Feilkilder i metode og beregning

Concept rapport Nr 13



© Concept-programmet 2005

Concept rapport nr. 13

## **Usikkerhetsanalyse - Feilkilder i metoder og beregning**

*Kjell Austeng, Vibeke Binz og Frode Drevland*

ISSN: 0803-9763 (papirversjon)

ISSN: 0804-5585 (nettversjon)

ISBN: 978-82-92506-32-5 (papirversjon)

ISBN: 978-82-92506-33-2 (elektronisk versjon)

*Sammendrag:* Rapporten søker å belyse hvorvidt, og i hvilken grad, tre antatte feilkilder i kostnadsanalyse med usikkerhet virkelig bidrar til feil i sluttresultatene fra analysen. Disse mulige feilkildene er å ikke ta hensyn til korrelasjon, antakelsen om normaltilnærming, og uhensiktsmessig oppdeling.

For å belyse virkningen av mulig korrelasjon er det studert en case. Resultatene fra casen viser oss at i praksis, med realistisk vurdering av størrelsen på korrelasjonen, vil feilen antakelig ligge godt under 30 % av forventet standardavvik, mens i teorien og noen ganger kanskje også i praksis, kan feilen bli mange hundre prosent.

Antakelsen om at sluttresultatet av en stokastisk kalkyle er normalfordelt er basert på sentralgrenseteoremet. Hovedkonklusjonen er at vi i nesten alle praktiske sammenhenger trygt kan bruke normalfordelingen som substitutt for den virkelige sannsynlighetsfordelingen til totalresultatet fra kostnadskalkyler.

Når det gjelder detaljering av analyseobjektet er konklusjonen den at det finnes ikke en standardinndeling som vil være god uansett prosjekt og fase. En god inndeling vil være ulik fra gang til gang, og det er viktig at dette vurderes ut fra hva som er mest hensiktsmessig i det aktuelle prosjektet i forhold til formålet med analysen. En for detaljert oppdeling har en tendens til å introdusere korrelasjon som ikke blir håndtert, og bidrar derved til en undervurdering av usikkerheten.

Dato: 1.12.2005

*Utgiver:*

*Concept-programmet*

*Institutt for bygg, anlegg og transport*

*Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet*

*Høgskoleringen 7A*

*7491 NTNU - Trondheim*

*Tel. 73594640*

*Fax. 73597021*

*<http://www.concept.ntnu.no>*

Ansvaret for informasjonen i rapportene som produseres på oppdrag fra Concept-programmet ligger hos oppdragstaker. Synspunkter og konklusjoner står for forfatterens regning og er ikke nødvendigvis sammenfallende med Concept-programmets syn.

---

# Forord

Denne rapporten er en av en serie på fem innenfor delprosjekt Usikkerhetsanalyser som en del av Concept-programmet. Concept er et forskningsprogram finansiert av Finansdepartementet, og har som formål å utvikle ny kunnskap om planlegging og gjennomføring av store offentlige prosjekter.

Innføring av ekstern kvalitetssikring av store statlige investeringer har bidratt til en utvikling i retning av en viss standardisering av usikkerhetsanalysene, og derav økt fokus på det teoretiske grunnlaget disse bygger på.

Noen sentrale forhold knyttet til kostnadsanalyser med usikkerhet er antatt å være kilder til feil i sluttresultatene fra analysen. Rapporten søker å belyse hvorvidt, og i hvilken grad, dette er riktig.

Målgruppen for rapporten er mennesker som enten deltar i praktiske usikkerhetsanalyser i forbindelse med prosjektarbeid, eller som har behov for resultatene fra slike analyser.

Sivilingeniør Vibeke Binz hadde hovedtemaene i rapporten som sin masteroppgave ved NTNU. Store deler av rapporten er basert på hennes resultate.

Trondheim/NTNU 01.12.2005

Kjell Austeng

Prosjektleder for Concept delprosjekt "Usikkerhetsanalyser"

# Sammendrag

*Kjell Austeng, Vibeke Binz og Frode Drevland*

## **Usikkerhetsanalyse - Feilkilde og metoder i beregning**

Concept rapport nr. 13

Rapporten søker å belyse hvorvidt, og i hvilken grad, tre antatte feilkilder i kostnadsanalyser med usikkerhet virkelig bidrar til feil i sluttresultatene fra analysen. Disse mulige feilkildene er korrelasjon som ikke blir tatt hensyn til, antakelsen om normaltilnærming, og uhensiktsmessig oppdeling.

Hvis utgangspunktet vårt er at postene i en kalkyle er stokastisk uavhengige, og denne forutsetningen er feil, vil vi undervurdere usikkerheten i kalkylen. I rapporten er usikkerheten målt i størrelsen på standardavviket. Forventningsverdien er derimot ikke påvirket av mulig korrelasjon mellom elementene. For å belyse virkningen av mulig korrelasjon inneholder rapporten en teoretisk betraktning om hvor stor feil som kan være realistisk mulig. Det finnes ingen kjent empiri som kan understøtte denne betraktningen, og gir oss en pekepinn på hvor det "riktig" området ligger. Det er følgelig ikke grunnlag for å trekke noen fast konklusjon om dette.

Den andre måten å nærme seg problemområdet korrelasjon på har vært å studere en case. Her er det gjort forskjellige forsøk med å simulere praktiske situasjoner. Resultatene fra casen viser oss at vi i praksis, og så lenge vi ikke innfører korrelasjon ved ukritisk oppdeling, selv ved svært høy korrelasjon får feil i standardavviket på under 30 %, mens i teorien og noen ganger kanskje også i praksis, kan feilen bli mange hundre prosent.

Antakelsen om at sluttresultatet av en kalkyle er normalfordelt er basert på sentralgrenseteoremet. Det man spør seg om er hvorvidt forutsetningene for sentralgrenseteoremet er til stede i analysen, og hvor store feil man gjør hvis dette ikke er tilfelle. For å belyse dette er det foretatt en rekke simuleringer av sum og produkt av elementkostnader med forskjellige fordelinger.

Hovedkonklusjonen er at vi i nesten alle praktiske sammenhenger trygt kan bruke normalfordelingen som substitutt for den virkelige sannsynlighetsfordelingen til totalresultatet fra kostnadskalkyler. Det finnes noen unntak knyttet til kalkyler med svært få poster, kalkyler med helt særegne sammenhenger mellom postene, og der hvor multiplikasjoner av usikre faktorer er et dominerende element i kalkylen. Med hensyn til ovennevnte unntak er det imidlertid viktig å merke seg at selv om den virkelige fordelingen ikke er normalfordelt så vil den beregnede forventningsverdien være riktig, den vil bare ikke ligge på P50.

Når det gjelder detaljering av analyseobjektet er konklusjonen den at det finnes ikke en standardinndeling som vil være god uansett prosjekt og fase. En god inndeling vil være ulik fra gang til gang. En god hovedregel er at i en analyse skal alt være med, og at det detaljeres etter behov. Begrensningene i hvor mye vi bør detaljere er gjerne knyttet til faren for å miste oversikt og at ting faller mellom stoler, faren for å skjule usikkerhet ved at den blir spredd utover,

og faren for å introdusere samvariasjon som ikke blir håndtert, og at vi dermed regner bort usikkerheten.

# Summary

*Kjell Austeng, Vibeke Binz and Frode Drevland*

## **Uncertainty analysis - Sources of error in method and calculation**

Concept Report no. 13

The report seeks to find out whether, and to what degree, three assumed sources of error in cost analyses really contribute to errors in the final result from an analysis. These possible sources of error fail to consider correlations, the assumption that the central limit theorem applies, and inappropriate partitioning.

If our basis is that the items in an analysis are stochastically independent, and this assumption is incorrect, then the uncertainty in the analysis will be underestimated. The expected value is not effected by possible correlation between the elements.

To shed light on the effect of possible correlation between items, the report includes a theoretical reflection on how large an error could be realistically. There exist no known empirical data that can support this reflection, and provide an indication as to where the 'true' area is located. Hence, there is no foundation upon which to draw a firm conclusion on this subject.

The other way to approach correlation problem has been to study a case. Here, we have made several different attempts to simulate practical situations. The results from the case show that in practice, and as long as we do not introduce correlation by uncritically partitioning, even with very high correlations, the errors in the standard deviation are under 30%, while in theory and maybe sometimes in real life, the error can be several hundred percent.

The assumption that the final result of an analysis is normal distributed is based on the central limit theorem. The question is whether or not the premises for the central limit theorem are present in the analysis and how large the errors are, if this is not the case. To shed light on this, a series of simulations have been made. Applied models consist of cost estimates of sum and product of cost elements with different distributions.

The main conclusion is that in almost all practical contexts we can safely use the normal distribution as a substitute for the real probability distribution of the total result from cost analysis. There are some exceptions with regard to analysis with very few items, analysis with peculiar connections between the items, and where multiplications of uncertain factors are a dominating element in the analysis. However, with regard to the mentioned exceptions, it is important to note that even if the real distribution is not normal distributed, the calculated expected value will be correct, it just will not be located at P50. This means that were we can potentially err by assuming normal distribution is when we are trying to determine quantile values.

When it comes to the detailing of an analysis object, the conclusion is that there does not exist one standard partitioning that would be suitable regardless of project and phase. Good partitioning will differ from analysis to analysis, and it is important that this is assessed based

on what is the most suitable for the project in relation to the goal of the analysis. A good rule of thumb is that in an analysis everything should be included, and detailed as needed.

The limits on how much we should detail are generally connected to:

- the danger of losing the big picture
- that things will fall between stools
- the danger of hiding uncertainty by spreading it out
- the danger of introducing correlations that are not handled, and that by doing so we calculate away the uncertainty.



# Innhold

Forord .....	3
Sammendrag .....	4
Summary .....	6
Innhold .....	8
Figuroversikt .....	9
Tabelloversikt .....	12
1. Innledning.....	13
1.1 Forkortelser .....	13
1.2 Noen begreper i statistikk.....	13
2. Gangen i en kvantitativ usikkerhetsanalyse .....	16
3. Uhåndtert korrelasjon som feilkilde i usikkerhetsanalyser .....	18
3.1 Hva er korrelasjon?.....	18
3.2 Hvor ligger egentlig forskjellen mellom MC og TK?.....	22
3.3 Virkning av korrelasjon.....	23
3.4 Korrelasjonsvurderinger i prosjekt.....	27
3.5 Systematiske feil i sammenligningen av forsøk med de to metodene .....	30
3.6 Hvor store er forskjellene mellom Monte Carlo simulering og Trinnvis kalkulasjon? .....	32
3.7 Følsomhet for korrelasjon .....	37
3.8 Introduksjon av $\kappa$ - faktor: hvordan øker $\sigma$ med korrelasjonen?.....	40
3.9 Effekten av en utvidet korrelasjonsmatrise .....	41
3.10 Oppsummering og konklusjoner om korrelasjon .....	43
4. Begrensningene i bruken av normalfordelingen.....	45
4.1 Sentralgrenseteoremet .....	46
4.2 Skewness og kurtosis.....	47
4.3 Typiske skjevhetsforhold og relative standardavvik .....	48
4.4 Metodiske forenklinger .....	51
4.5 Tilnærming til normalfordelingen .....	51
4.6 Virkning av korrelasjon.....	63
4.7 Produktkalkyler .....	64
4.8 Oppsummering og konklusjoner om normaltilnærming .....	69
5. Detaljeringsgrad i usikkerhetsanalyser .....	71
5.1 Detaljeringsgrad i presentasjon av resultatene .....	74
5.2 Finnes det et optimalt antall poster?.....	79
5.3 Oppsummering og konklusjoner om detaljering .....	80
Litteratur .....	81
Figurer i full størrelse .....	84

# Figuroversikt

Figur 1-1	Illustrasjon av en fordelingsfunksjon med mode, median og forventningsverdi.....	15
Figur 2-1	Generell prosess for usikkerhetsstyring.....	16
Figur 2-2	Eksempel på a) en s-kurve og b) et tornadodiagram .....	17
Figur 3-1	Eksempler på plott for to gammafordelte poster basert på ulike korrelasjonsfaktorer .....	19
Figur 3-2	Eksempel på plott for to gammafordelte poster, negativ korrelasjon $\rho = -0,9$ .....	19
Figur 3-3	Illustrasjon av ikke-lineær sammenheng og Pearsons korrelasjonskoeffisient $\rho$ .....	20
Figur 3-4	Et eksempel på korrelasjonsmatrise .....	20
Figur 3-5	Forskjeller mellom MC og TK. ....	22
Figur 3-6	Relativt standardavvik minker med økende n .....	24
Figur 3-7	Maksimal relativ feil i beregnet spredning som følge av ikke å ta hensyn til opptredende korrelasjon .....	25
Figur 3-8	Virkingen på usikkerhetsbildet av å dele et element i to like deler. ....	26
Figur 3-9	Maks-feil-betraktninger .....	26
Figur 3-10	De antatt mest åpenbare korrelasjoner mellom elementene i kalkylen .....	28
Figur 3-11	Et utsnitt fra korrelasjonsmatrisen som er vist i full størrelse i figur A-1 i vedlegget.....	29
Figur 3-12	Proessen for beregning i Anslag og MC -simulering i @-risk .....	30
Figur 3-13	Sammenligning mellom s-kurver for MC og TK. $\rho = 0$ .....	32
Figur 3-14	Sammenligning mellom MC med korrelasjon og TK uten. ....	33
Figur 3-15	Sammenligning av s-kurver for TK, beregnet med og uten korrelasjon .....	34
Figur 3-16	Sammenligning mellom s-kurver for MC og TK. Med korrelasjon. ....	36
Figur 3-17	Forholdet mellom $\sigma_{MC}$ og $\sigma_{TK}$ over alle kvantilene, for ulike $\rho$ -koeffisienter. ....	38
Figur 3-18	Endring i standardavvikets prosentpoeng ( $\sigma/E$ ) ved økende korrelasjon $\rho$ .....	38
Figur 3-19	Stigningen i $\sigma/E$ for økende $\rho$ . ....	39
Figur 3-20	Økning i det relative standardavviket med økning av utvidet korrelasjon. ....	42
Figur 4-1	Sentralgrenseteoremet: Prøvenes fordeling går mot normalfordeling når prøvestørrelsen n øker .....	46
Figur 4-2	Trippelanslag .....	48
Figur 4-3	Fordeling av skjevhetsforhold for anslag gjort av Statens vegvesen og konsulenter .....	49
Figur 4-4	Typiske relative standardavvik for kostnadsanslag .....	50
Figur 4-5	Gammafordeling med $\alpha = 1$ (eksponentialfordeling) .....	52

Figur 4-6	Gammafordeling med $\alpha = 2$ .....	52
Figur 4-7	Gammafordeling med $\alpha = 10$ .....	53
Figur 4-8	Eksponentialfordeling og normalfordeling.....	53
Figur 4-9	Gammafordeling med $\alpha = 1,78$ og normalfordeling.....	54
Figur 4-10	Gammafordeling med $\alpha = 4$ og normalfordeling.....	55
Figur 4-11	Gammafordeling med $\alpha = 16$ og normalfordeling.....	55
Figur 4-12	Gammafordeling med $\alpha = 64$ og normalfordeling.....	56
Figur 4-13	Antall poster som må summeres for at vi når akseptkriteriet nær-normal-nok, som funksjon av skewness ...	56
Figur 4-14	Samleoppstilling av tetthetsfunksjonene av fordelingene vist i figurer 4-8 - 4-12.....	57
Figur 4-15	Samleoppstilling av S-kurvene fra figurer 4-8 - 4-12.....	57
Figur 4-16	Sum av 5 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling.....	59
Figur 4-17	Differansen mellom sum av 5 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling for hver percentil .....	59
Figur 4-18	Sum av 7 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling.....	60
Figur 4-19	Differansen mellom sum av 7 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling for hver percentil .....	60
Figur 4-20	Sum av 10 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling.....	61
Figur 4-21	Differansen mellom sum av 10 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling for hver percentil .....	61
Figur 4-22	Sum av 30 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling.....	62
Figur 4-23	Differansen mellom sum av 30 gammafordelte poster med $\alpha = 10$ og normalfordeling for hver percentil .....	62
Figur 4-24	Sammenstilling av sum av poster som har gruppevise korrelasjoner og normalfordelingen.....	63
Figur 4-25	To like faktorer med mulige utfall, 1 eller 2, hver med sannsynlighet 0,5.....	64
Figur 4-26	Produktet av to faktorer som begge har en fordeling som vist i figur 25.....	65
Figur 4-27	Multiplikasjon av to normalfordelinger hver med trippelanslag 30-40-50 sammenliknet med normalfordeling...	65
Figur 4-28	Multiplikasjon av to gammafordelinger hver med trippelanslag 30-40-60 sammenliknet med normalfordeling...	66
Figur 4-29	To faktorer med mulige utfall henholdsvis. 0 eller 1 og 1 eller 2. ....	66
Figur 4-30	Produktet av to faktorer som har fordeling som vist i figur 4-29. ....	67
Figur 4-31	To faktorer med mulige utfall henholdsvis 1 eller 2 eller 3, og 1 eller 2. ....	67
Figur 4-32	Produktet av to faktorer som har fordeling som vist i figur 31.....	68
Figur 4-33	Multiplikasjon av to gammafordelinger hver med trippelanslag henholdsvis 30-40-60 og 1-1-1,5 er sammenliknet med normalfordeling.....	68

---

Figur 4-34	Multiplikasjon av normalfordeling og eksponentialfordeling sammenliknet med normalfordeling.....	69
Figur 5-1	Virkning av ukritisk detaljering.....	72
Figur 5-2	Illustrasjon av oppdelingsnivåene i kalkylen.....	74
Figur 5-3	Prioritetsdiagram for poster på nivå 3. ....	75
Figur 5-4	Prioritetsliste nivå 0.....	76
Figur 5-5	Prioritetsdiagram nivå 1.....	77
Figur 5-6	Prioritetsliste nivå 0 - med F-faktorer delt opp.....	78

# Tabelloversikt

Tabell 1.1	Noen statistiske begreper .....	14
Tabell 3.1	Oversikt over korrelasjonsfamilier .....	29
Tabell 3.2	Resultater fra MC og TK-beregning med null korrelasjon .....	32
Tabell 3.3	Resultater fra TK-beregning uten korrelasjon og MC med korrelasjon .....	33
Tabell 3.4	TK med og uten korrelasjon. Verdier for E, $\sigma$ og relativt standardavvik .....	34
Tabell 3.5	Sammenligning av TK med og uten korrelasjon, for utvalgte kvantiler. ....	35
Tabell 3.6	Resultater for MC og TK med hensyn til korrelasjon.....	35
Tabell 3.7	Oversikt over korrelasjonsfamiliene .....	37
Tabell 3.8	Oversikt over grupper for korrelasjoner. ....	41
Tabell 3.9	Resultater fra utvidet korrelasjonsmatrise. ....	42
Tabell 4.1	Kvantitativ fremstilling av skewness-betraktninger .....	58
Tabell 5.1	Detaljering av kostnadsposter - argumenter for og imot .....	73

# 1. Innledning

Den viktigste kilden til feil og unøyaktigheter i en kvantitativ usikkerhetsanalyse er manglende kvalitet i inngangsdataene. Mulighetene for feil her er behandlet flere steder i de andre rapportene i delprosjektet.

I tillegg finnes imidlertid også en rekke andre mulige metodemessige og regnemessige feilkilder. Som for eksempel:

- a) Valg av fordeling som brukes til å beskrive kostnadspostene
- b) Korrelasjon mellom elementene
- c) Beregningsmetodikk: Simulering eller stokastisk beregning
- d) Sluttsummen - kan man anta normalfordeling?
- e) Detaljeringsgrad

Når man skal diskutere feilkilder i usikkerhetsanalyser skal man ikke glemme at analysen kun er et forsøk på å forutse fremtiden. Den vil alltid være tilnærmet og unøyaktig. Mye av det etterfølgende vil bære preg av at vi har erkjent riktigheten i følgende sitat fra Raftery (1994):

*“It's better to be roughly accurate than precisely wrong”.*

Før vi går videre skal vi her innledningsvis ta for oss noen forkortelser og begreper fra statistikken som vil bli brukt senere i rapporten.

## 1.1 Forkortelser

\*DIV - korrelasjonsmatrisen som benyttes i oppgaven (se figur 3-4 og figur A-2 i vedlegg).

MC - Monte Carlo-simulering

TK - Trinnvis kalkulasjon

TK\* - Forbedret metode for TK

Når det i denne rapporten henvises til “metoden” TK og MC, så refereres det ikke bare til regneteknikken som inngår, men også metodeverket rundt.

## 1.2 Noen begreper i statistikk

Noen av de mest brukte begrepene for å måle beliggenheten av et datasett er “Mode”, “Median” og “Mean” (eng. for forventningsverdi) (Myers, Myers, Walpole, 1998). Disse og flere viktige begreper som er brukt senere i rapporten er beskrevet i tabell 1.1.

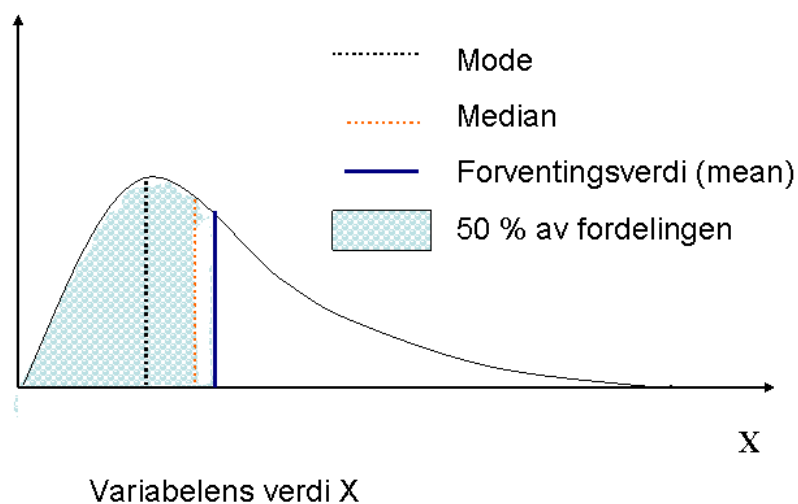
Tabell 1.1 Noen statistiske begreper

Betegnelse	Definisjon	Forklaring
Sannsynlighetsfordeling	$f(x)$	Fordelingen for ulike utfall av $x$ .
Kumulativ sannsynlighetsfordeling	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$	Sannsynligheten for at utfallet er mindre enn eller lik $x$ .
Forventningsverdi (Mean)	$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$	Forventningsverdien til fordelingen, $x$ -koordinaten til <i>tyngdepunktet</i>
Mode	$\frac{d}{dx}f(x) = 0$	Den mest sannsynlige verdi ( $m$ ), $x$ -koordinaten til toppunktet i grafen for fordelingsfunksjonen
Median (P50)	$\int_{-\infty}^{P50} f(x)dx = \int_{P50}^{\infty} f(x)dx$	Det midterste tallet i prøven, eller P50: 50% -kvantilen
Kvantiler	$F(P\gamma) = \gamma\%$	Det er $\gamma\%$ sannsynlighet for at et utfall er mindre enn eller lik $P\gamma$ .
Varians	$Var(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$	Et mål på spredningen i en fordeling.
Standardavvik $\sigma$	$\sigma = \sqrt{Var}$	Roten av variansen. Et mål på usikkerhet (spredning) i en fordeling. $\sigma$ og $\mu$ er dessuten parametrene som beskriver normalfordelingen.
Relativt standardavvik	$\frac{\sigma}{E(x)}$	Standardavvikets andel av forventningsverdien. Et mye brukt mål på usikkerheten..
Korrelasjon	Korrelasjon beskriver styrken på lineær sammenheng mellom to variable.	Uttrykkes ofte med Pearsons korrelasjonskoeffisient $\rho$ Korrelasjonen uttrykkes ved hjelp av kovariansen mellom to variable.

Tabell 1.1 Noen statistiske begreper

Betegnelse	Definisjon	Forklaring
Kovarians	$Cov(X, Y) = 2 \cdot Cor(X, Y) \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y$	Kovarians er tillegget på spredningen på grunn av korrelasjon. Kovariansen er et kvantitativt mål på i hvilken grad variasjon i en variabel er assosiert med variasjon i en annen variabel.
$\rho$ - Pearsons korrelasjonskoeffisient	$\rho(x, y) = \frac{COV(x, y)}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}}$ [ $-1 < \rho < 1$ ]	Benevningsfri koeffisient for å beskrive lineær sammenheng mellom to avhengige variabler.

I figur 1-1 er enkelte av begrepene fra tabell 1.1 illustrert.



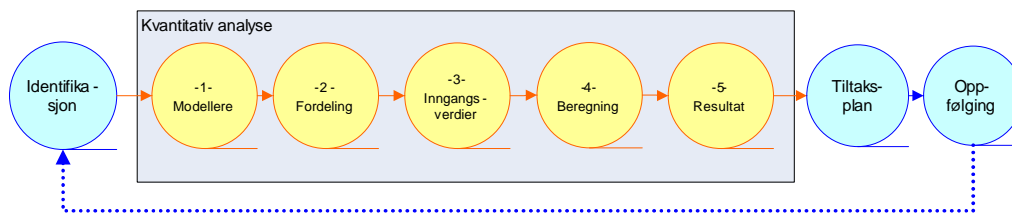
Figur 1-1 Illustrasjon av en fordelingsfunksjon med mode, median og forventningsverdi (fritt etter Vose 2000).



## 2. Gangen i en kvantitativ usikkerhetsanalyse

Det finnes mange prosesser og metoder for usikkerhetsanalyse. Dette er grundig beskrevet i Concept rapport nr. 12. De fleste har en del fellestrekk, og prosessene følger gjerne en generell overordnet struktur. Identifikasjon av usikkerhetselementer, estimering, tiltaksplan og oppfølging. Punktet *estimering* kan sies å utgjøre den kvantitative delen av usikkerhetsanalysen, og kan deles opp i underelementer på flere forskjellige måter. Figur 2-1 gir et eksempel på en vanlig oppdeling. Denne oppdelingen vil for enkelhets skyld brukes i resten av kapitlet.

Estimeringen gjennomføres vanligvis etter først å ha gjort en kvalitativ vurdering av prosjektets usikkerhetsbilde, eller *identifikasjon* av usikkerheter (Husby et. al, 1999). For å kunne estimere prosjektet, må man ha en modell som beskriver dets atferd. En må beskrive kalkyleelementene med en *sannsynlighetsfordeling* og anslå verdier for denne. Summen av kalkylen beregnes enten analytisk eller simuleres.



Figur 2-1 *Generell prosess for usikkerhetsstyring.*

Det er den kvantitative delen av analysen som er sentral, og trinnene beskrives kort her:

### Kalkyleinndeling/modellering

Prosjektet må modelleres på en hensiktsmessig måte. Det må tas hensyn til korrelasjon/sammenheng mellom elementer. Oppdelingen kan for eksempel være etter prosess, etter område, etter entrepriser.

### Valg av fordelingsfunksjon

Det antas en sannsynlighetsfordeling for å beskrive hvert av de usikre elementene.

### Anslag av inngangsverdier

Her bestemmes inngangsverdiene til analysen. Man tar for seg ett og ett kalkyleelement, og gjør et estimat. Det vanligste er å gjøre et såkalt "trepunktsestimat", som igjen kan gi en forventningsverdi  $\mu$  og et standardavvik  $\sigma$  for å beskrive fordelingen.

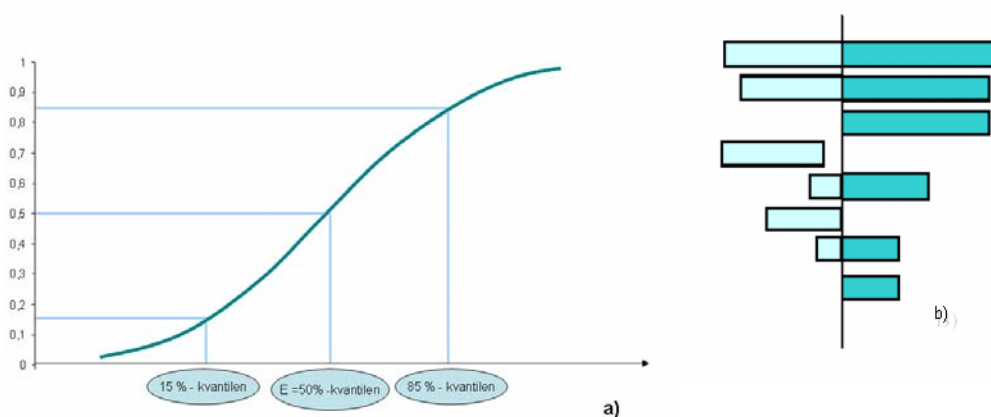
## Beregning/simulering

Elementene summeres opp til en total sum for overslaget. Beregningen kan foregå ved hjelp av simulert eller analytisk beregning. I det etterfølgende vil et eksempel på hver av de to metodene diskuteres.

## Resultat

Resultatet vil i de aller fleste tilfeller kunne beskrives som en tilnærmet normalfordeling. Denne presenteres gjerne i en s-kurve (se figur 2-2 a). En er oftest interessert i mer enn forventningsverdien, i og med at det bare er 50% sjanse for at summen vil ende opp med å ligge under denne verdien. Det kan være interessant å se på 85% eller 90% -kvantilen, eller å se på et konfidensintervall - for eksempel fra 15% til 85% (70% sikkert at summen vil ligge innenfor disse grensene).

I tillegg til s-kurven presenteres gjerne et diagram som likner på det i figur 2-2 b, hvor usikkerhetselementene rangeres etter varians, og slik kan en lett få en grafisk oversikt over de "viktigste" usikkerhetene.



Figur 2-2 Eksempel på a) en s-kurve og b) et tornadodiagram (fritt etter Magnussen, 2004)

## 3. Uåndtert korrelasjon som feilkilde i usikkerhetsanalyser

Det viktigste kriteriet for hvordan prosjektet skal modelleres for en usikkerhetsanalyse er at modellen må være slik at man får best mulig utnyttelse av tilgjengelig kunnskap. Temaet er omhandlet i Conceptrapportene nr. 10 og nr. 12. Når dette er tatt vare på, eller man forutsetter at nødvendig kunnskap er tilgjengelig uavhengig av modell, vil de neste viktige kriteriene være å sørge for at man har kontroll med virkningene av evt. korrelasjon, og at man legger opp til en hensiktsmessig detaljeringsgrad.

Dette delkapitlet vil ta for seg korrelasjon som fenomen, og hvordan den influerer på valg av modell.

### 3.1 Hva er korrelasjon?

Korrelasjon er et mål på styrken av den lineære sammenhengen mellom to variable (kalkyleelementer i denne sammenhengen). Aarnes (2003) peker på at korrelasjon ikke må forveksles med regresjon. Regresjon er avhengighet mellom en avhengig og en uavhengig variabel  $x$  som kan forandres/holdes fast og styres (for eksempel i forsøk med temperatur og trykk). Ved korrelasjon vil det si at verken  $X_i$  eller  $X_j$  er uavhengige variable.

#### Korrelasjonskoeffisienten $\rho$

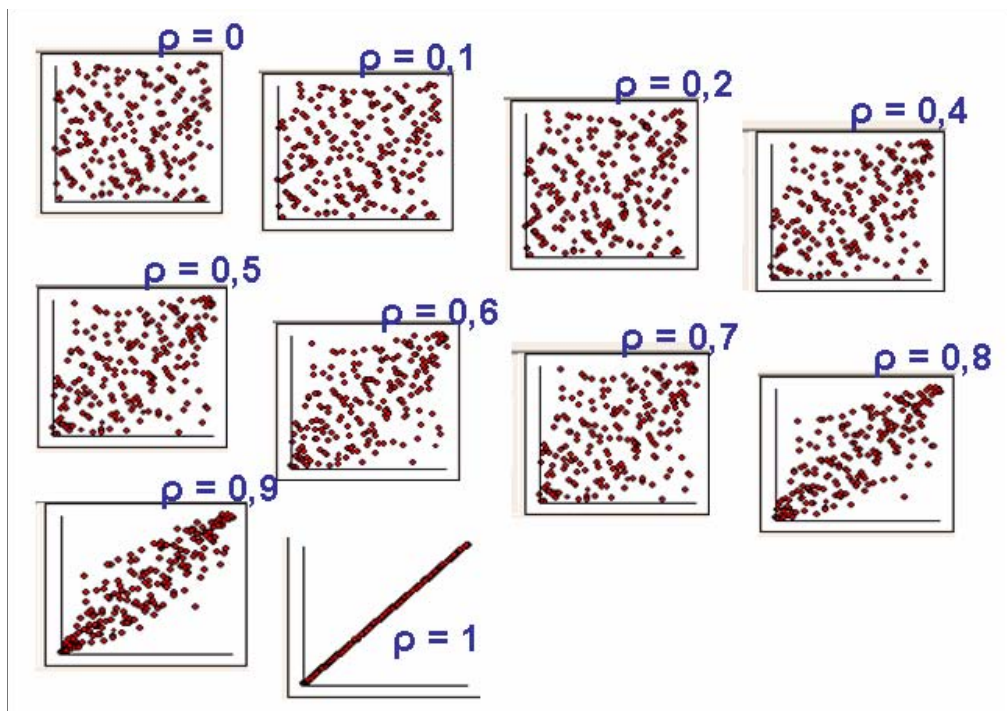
Korrelasjon beskrives ofte med Pearsons korrelasjonskoeffisient  $\rho$  (Aarnes, 2003), som defineres slik:

$$\rho(x, y) = \frac{COV(x, y)}{\sqrt{VAR(X) \cdot VAR(Y)}}, [-1 < \rho < 1]$$

Korrelasjonskoeffisienten er som kovariansen et mål på hvor mye to målingsvariable "varierer sammen". I motsetning til kovariansen skaleres korrelasjonskoeffisienten slik at verdien er uavhengig av enhetene de to målingsvariablene er uttrykt i (hvis for eksempel de to målingsvariablene er mengde og enhetskostnad, forblir korrelasjonskoeffisienten uendret hvis enhetskostnaden konverteres fra euro til kroner).

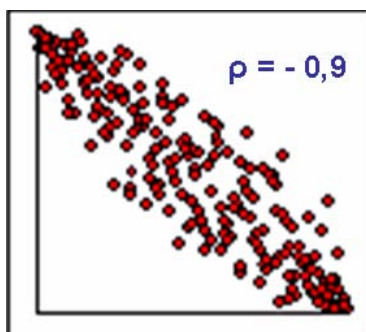
Verdien av korrelasjonskoeffisienten ligger mellom -1 og +1. Når  $\rho = 0$  finnes ingen lineær sammenheng, og for positiv koeffisient øker den ene dersom den andre øker, og for en negativ korrelasjon minker den ene når den andre øker.  $\rho = 1$  er en perfekt positiv lineær sammenheng, og  $\rho = -1$  er en perfekt negativ lineær sammenheng.

Figur 3-1 viser grafer hentet programmet @risk<sup>1</sup> som viser plott for ulike korrelasjoner, mellom to gammafordelte poster. Plottene er noe unøyaktige, og er kun ment for å gi leseren en grafisk illustrasjon av “styrken” til en korrelasjonskoeffisient.



Figur 3-1      *Eksempler på plott for to gammafordelte poster basert på ulike korrelasjonsfaktorer (@risk)*

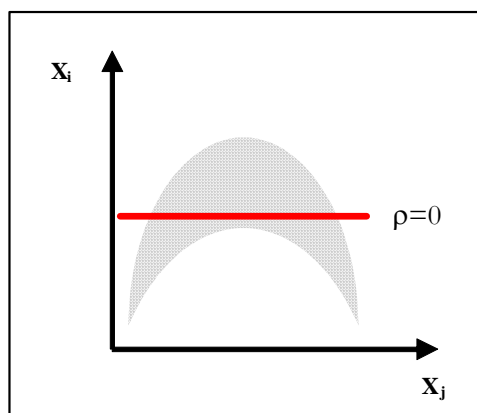
En regresjonslinje vil tendere til å bli brattere når korrelasjonen er høyere, og for en negativ korrelasjon vil linjen helle andre vei (se eksempel i figur 3-2).



Figur 3-2      *Eksempel på plott for to gammafordelte poster, negativ korrelasjon  $\rho = -0,9$  (@risk)*

1. Programvaren @risk er hentet fra [www.palisade.com](http://www.palisade.com)

Korrelasjonskoeffisienten er et mål på den lineære sammenhengen mellom elementer. Ikke-lineære sammenhenger mellom elementer reflekteres altså ikke av denne. Ved ikke-lineære sammenhenger vil  $\rho$  kunne være lik 0 til tross for at det er en klar sammenheng mellom elementene (se figur 3-3).



Figur 3-3 *Illustrasjon av ikke-lineær sammenheng og Pearsons korrelasjonskoeffisient  $\rho$  (Fritt etter Langaas, 2005)*

Pearsons korrelasjonskoeffisienten egner seg altså ikke til å beskrive alle typer sammenhenger.

### Korrelasjonsmatriser

En korrelasjonsmatrise er en matrise der en setter opp faktorer langs 2 akser, og angir en grad av korrelasjon (korrelasjonsfaktoren  $\rho$ ) mellom to og to faktorer (f.eks. 0,8 betyr at det er 80 % korrelasjon mellom elementene).

Matrisen blir da speilet om diagonalen (se figur 3-4).

	A111	A112	A114	A115	A116	A117	A12	A151	A152	A153	A154	A155
A111												
A112	0											
A114	0	0										
A115	0	0	0									
A116	0	0,8	0	0								
A117	0	0	0	0	0							
A12	0,8	0	0	0	0	0						
A151	0,8	0	0	0	0	0	0,8					
A152	0,8	0	0	0	0	0	0,8	0,8				
A153	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
A154	0	0,8	0	0	0,8	0	0	0	0	0		
A155	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	

(Matrisen er speilet om diagonalen)

Figur 3-4 *Et eksempel på korrelasjonsmatrise (utsnittet er hentet fra vedlegg A)*

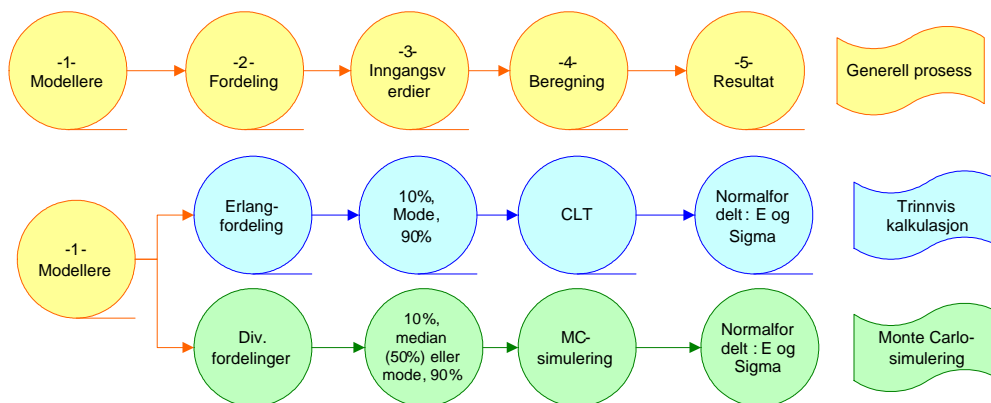
Vanligvis benyttes denne for å vise korrelasjon som er beregnet på grunnlag av erfaringsdata, empiri. Dette er tilfellet i store deler samfunnsvitenskapelig forskning, medisin, laboratorietesting osv. I tilfellet usikkerhetsanalyse av prosjekter har man sjelden samlet nok empirisk materiale, man forsøker derimot å forutsi fremtiden. Altså må disse korrelasjonskoeffisientene i stor grad bestemmes med kvalifisert gjetning, i likhet med andre inngangsverdier i en usikkerhetsanalyse.

Et spørsmål mange stiller seg er “Når post A er korrelert med både post B og C, er da B og C korrelert med hverandre?” Svaret er: ikke nødvendigvis, men dersom for eksempel  $\rho = 1$  må de nødvendigvis være det. Temaet vil ikke diskuteres videre her.

Ulike metoder for usikkerhetsanalyse har ulik fleksibilitet for modellering, TK har for eksempel større begrensninger for modellering enn MC. Disse to metodene, og forskjeller mellom dem, presenteres i neste delkapittel.

## 3.2 Hvor ligger egentlig forskjellen mellom MC og TK?

Figur 3-5 viser en forenklet fremstilling av prosessen for usikkerhetsanalyse for de to metodene. Teoretisk ligger forskjellen mellom stokastisk beregning og simulering i prosess 4; Beregning. I praksis skiller metodene seg allikevel fra hverandre på flere punkter.



Figur 3-5 Forskjeller mellom MC og TK. CLT= *Central Limit Theorem; sentralgrenseteorem.*

I figur 3-5 ser vi at Trinnvis kalkulasjon bruker en fast fordeling (Erlang), mens de fleste simuleringmodeller inneholder en rekke fordelinger det kan velges mellom for de enkelte kalkylelementer. Anslagene er ofte 10 %- og 90 %-kvantilene, samt moden, men det kan velges å bruke andre punkter på tetthetskurven. I Trinnvis kalkulasjon forutsetter man at sluttresultatet er normalfordelt. Tilnærmingen til normalfordelingen er oftest også god ved simuleringer, men her blir fordelingen på sluttsummen det som simuleringen gir.

### 3.3 Virkning av korrelasjon

Vi vil i dette delkapitlet ta for oss noen teoretiske betraktninger om hvordan korrelasjon virker på beregnet usikkerhet. Ytterpunktene i virkningen av korrelasjon er forsøkt klarlagt ved hjelp av eksempler.

For at ikke fremstillingen skal bli for tung starter vi med å definere noen symboler som blir brukt i det etterfølgende.

---

For enkelt post.	Forventningsverdi:	$E_n$
	Standardavvik:	$\varpi_n$
For sum av poster	Forventningsverdi:	$E_T$
	Standardavvik:	$\sigma_T$
Relativt standardavvik gis symbolet:		$R_\sigma = \frac{\sigma}{E}$
Relativ maksimal feil ved å ikke ta hensyn til korrelasjon:		$R_{mf}$
Forventet relativ maks-feil:		$E(mf)$
Relativt standardavvik for enkeltelementer:		$R_{\sigma n}$
Relativt standardavvik for total kostnad:		$R_{\sigma T}$

Absolutt standardavvik, dvs. målt i kroner,  $\sigma_T$ , øker med antall poster, mens  $R_\sigma$  holder seg konstant eller synker.



I hele eksemplet forutsetter vi at *alle postene er antatt stokastisk uavhengige, er like store, og har samme spredning*. Vi starter med 5 poster hvor  $E_n = 100$  og  $\sigma_n = 20$ . Dette gir  $R_{\sigma_n} = 0,2$ .

Vi benytter statistiske regneregler og får:

$$E_T = 100 \cdot 5 = 500$$

$$\sigma_T = \sqrt{(5 \cdot 20^2)} = 44,7$$

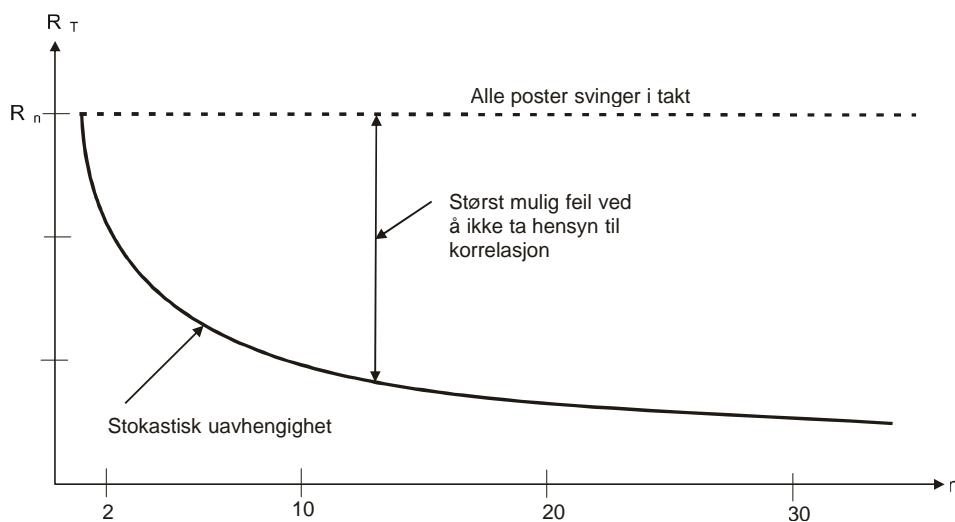
$$R_{\sigma_T} = \frac{44,7}{500} = 0,09$$

Generelt kan vi skrive:

$$R_{\sigma_T} = \sigma_n \cdot \frac{\sqrt{n}}{E_T} = \frac{R_{\sigma_n}}{\sqrt{n}}, \text{ hvor } n \text{ er antall uavhengige og like poster.}$$

Hvis alle postene skulle være avhengige slik at de svinger i takt, vil relativt standardavvik være det samme uansett antall. Dvs.  $R_{\sigma_T} = R_{\sigma_n}$ .

Figur 3-6 viser en prinsippkisse av hvordan relativt standardavvik for summen utvikler seg som funksjon av antall poster.



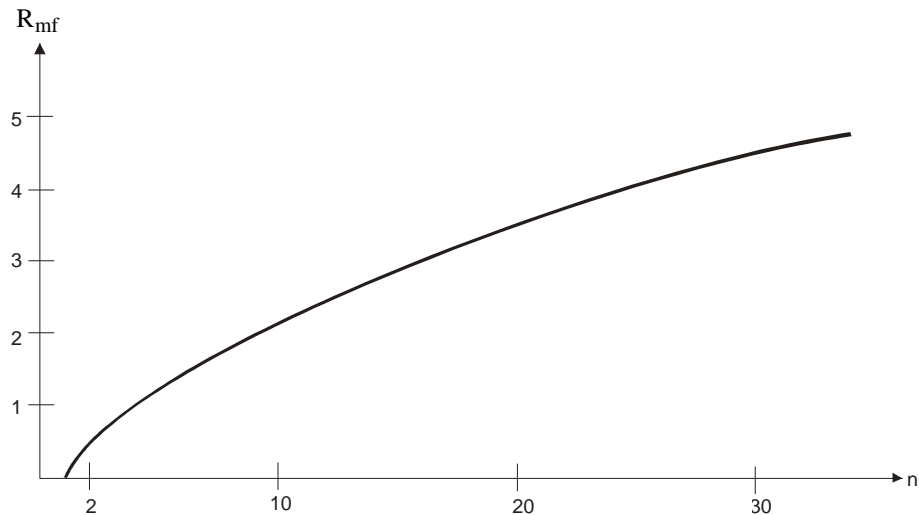
Figur 3-6 Relativt standardavvik minker med økende  $n$

Vi ser at mulig feil ved ikke å ta hensyn til korrelasjon i beregningene øker med antall poster.

Hvis vi ser på figur 3-6 og gjør om maks feil, ( $R_{\sigma_n} - R_{\sigma_T}$ ), til en relativ størrelse i forhold til standardavviket ved full stokastisk uavhengighet får vi:

$$R_{mf} = \frac{(R_{\sigma_n} - R_{\sigma_T})}{R_{\sigma_T}} = \sqrt{n} - 1 .$$

Grafisk er dette vist i figur 3-7.



**Figur 3-7** *Maksimal relativ feil i beregnet spredning som følge av ikke å ta hensyn til opptredende korrelasjon*

Det at alle, eller et flertall viktige poster i en kalkyle skal ha full korrelasjon med de andre er en ekstrem situasjon, som for det første vil opptre svært sjelden, og for det andre, hvis den skulle opptre, vil fremtre så tydelig i en analysesituasjon, at den nok vil bli oppdaget og håndtert av alle kompetente analytikere, som den spesielle situasjonen den er. Faren for at korrelasjonsvirkninger blir oversett, og at vi derved får en undervurdering av usikkerheten, er nok mye større i en kalkyle med mange poster og svakere korrelasjoner, eller i kalkyler med relativt få poster, og hvor et fåtall, men viktige poster har en sterk korrelasjon. Det siste er ikke så sjelden situasjonen i for eksempel kvalitetssikring av kostnadsoverslag.

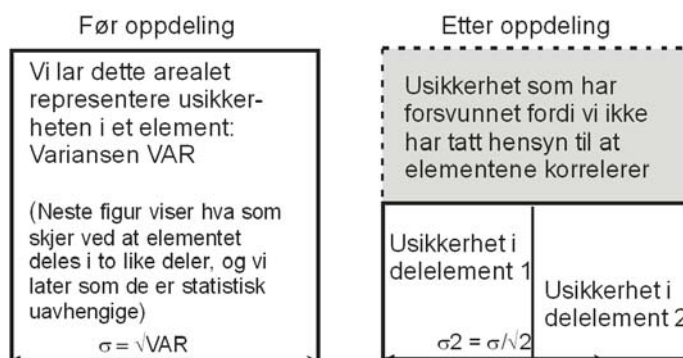
$R_{mf}$  kan betraktes som en potensielt verste konsekvens av at vi har høy korrelasjon mellom alle poster. Så kan man spørre seg om denne situasjonen har så stor sannsynlighet at den bør tas hensyn til. I det etterfølgende vil vi søke å svare på dette ved å gjøre noen sannsynlighet/konsekvens-betraktninger, og ut fra disse si noe om størrelsen på det vi vil kalle forventet "maks-feil",  $E_{mf}$ .

Hvis det ikke initieres korrelasjon som følge av økning i antall poster, er det åpenbart at sannsynligheten for relativ maks-feil vil minke med økende postantall. Imidlertid er det forhold som gir grunn til å anta at det faktisk initieres korrelasjon i kostnadsoverslaget etter hvert som antall poster øker.

Noe av årsaken til at sannsynlighet for korrelasjon øker med økende ( $n$ ) er at økningen i antall poster skyldes en oppsplitting av postene for å få mer oversiktlige og håndterbare elementer å kalkulere. Denne detaljeringen er vanskelig å utføre uten at det blir "hengende igjen" kostnadsårsaker som er felles.

Noen ganger ser vi at kostnadselementer blir delt opp bare fordi det er praktisk å foreta en fysisk eller rapportmessig avgrensning. Dette er særskilt uheldig fordi det her dreier seg om å lage flere mindre utgaver av et hovedelement, og hvor alle delementene inneholder de samme kostnadsårsakene som hovedelementet. Korrelasjonen mellom disse delementene

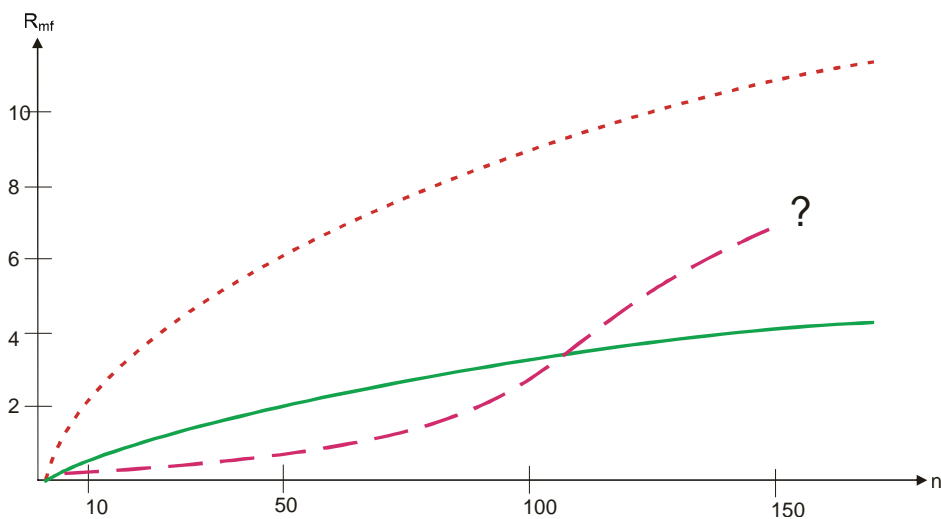
vil ofte være tilnærmet 100%. Figur 3-8 viser hvordan usikkerheten “forsvinner” ved å denne form for oppdeling.



Figur 3-8 Virkningen på usikkerhetsbildet av å dele et element i to like deler.

For å kompensere for slike feil som at vi regner bort usikkerhet uten at den endres i virkeligheten, kan vi multiplisere nytt beregnet standardavvik med  $\sqrt{m}$ , hvor  $m$  er antall tilnærmet like delposter som hovedelementet er delt i.

Den øverste stiplede kurven i figur 3-9 er en utvidelse fra figur 3-7, og viser relativ maks-feil på beregnet standardavvik hvis alle poster i stedet for å være uavhengige i virkeligheten er 100% korrelerte med hverandre. Vi har tidligere argumentert for at dette er urealistisk tanke.



Figur 3-9 Maks-feil-betraktninger

For å tilnærme oss en mer realistisk situasjon her vi tegnet inn feilkurven hvis halvparten av postene i virkeligheten skulle vise seg å være 70% korrelerte. (Den heltrukne linjen i figur 3-9). Dette er en situasjon som kan oppstå ved en ukritisk detaljering av kalkylen uten tanke på korrelasjon, eller ved at man tar tak i en detaljert grunnkalkyle og etterpå forsøker å få frem usikkerheten ved å legge spredning på enkeltpostene. Vi har sett flere eksempler på at denne fremgangsmåten selv på et relativt tidlig stadium i prosjektet har endt ut med kalkyler

med et beregnet totalt standardavvik på 2 - 3%. Figuren viser at ved en slik situasjon får man en feil på 100 % (altså at beregnet standardavvik er f.eks. 5%, mens det i virkeligheten er 10 %) allerede ved ca. 20 poster. Hvis vi ser på kurven for full korrelasjon mellom alle poster vil mulig feil ved 20 poster være på opp imot 400 %.

Den reelle maks-feil-kurven er antakelig lavere enn dette siste så lenge vi opererer med et antall poster som ikke er større enn at det er mulig å ha oversikt. På et eller annet nivå hvor antall poster er stort, og beregnet ikke-korrelert spredning er liten vil kurven imidlertid gå over fra å kunne sammenliknes med den moderate feilkurven til å nærme seg kurven for maks-feil ved høy uberegnet korrelasjon. Hvor dette krysningspunktet er, avhenger av prosjektet, oppdelingsfilosofien og bevisstheten i analysen.

Den nederste stiplede kurven i figur 3-9 er en vag antydning om hvordan forventet maks-feil kan tenkes å utvikle seg som funksjon av antall poster når vi tar ovenstående i betraktning. Det finnes ingen kjent empiri som gir noe pekepinn om dette, og kurven er derfor merket med et stort spørsmålstegn.

### 3.4 Korrelasjonsvurderinger i prosjekt

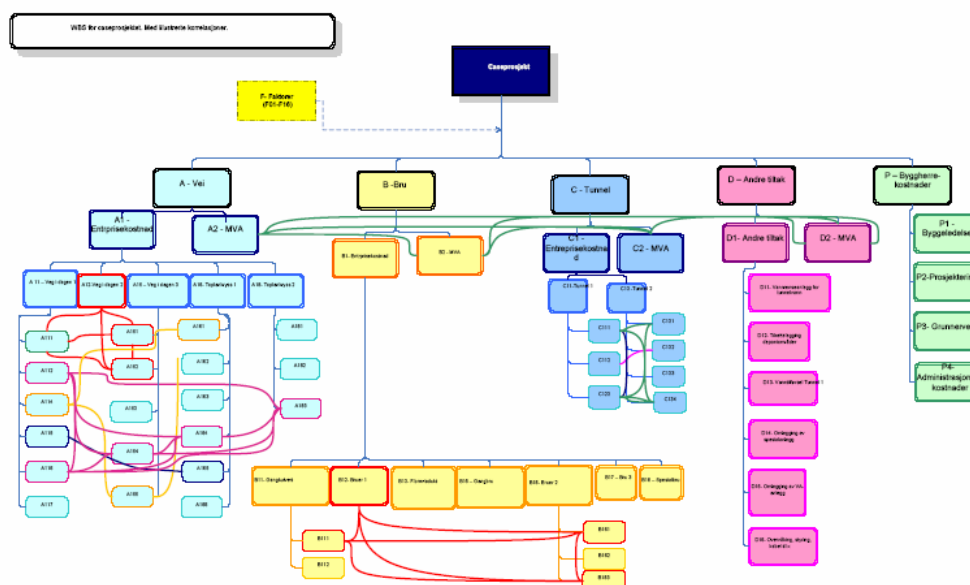
Her skal vi bort fra de teoretiske betraktningene og se på en case. Casen er hentet fra Statens vegvesen, og er valgt fordi den anses som ganske typisk, med veg i dagen, tunneler og bruer. Prosjektkostnadene vil også være påvirket av flere viktige faktorer av kontekstuell art. Prosjektet er forsøkt anonymisert, og vil heretter bli referert til som caseprosjektet eller casen.

I Vegvesenets opprinnelige analyse var ikke korrelasjon tatt i betraktning. Derfor finnes det heller ingen tall eller korrelasjonsfaktorer å støtte seg på for å bestemme korrelasjonen mellom elementene. Som forklart tidligere tas korrelasjon med i betraktning ved at man bestemmer en korrelasjonsfaktor mellom to og to elementer - null hvis det ikke er noen korrelasjon, og 1 hvis det er en perfekt lineær sammenheng.

Det er også ganske typisk at hver tunnel, hver bru, og hvert vegstykke er kalkulert for seg. Dette skaper, som vi tidligere har omtalt, problemer i forhold til usikkerhetsbildet, da elementer av samme type uten tvil har mange kostnadselementer felles, og derfor ganske stor korrelasjon.

Vi vil studere hvordan spredningen målt som standardavvik endrer seg i et praktisk prosjekt når vi innfører korrelasjon i regnestykket.

Avhengigheten mellom elementene er vist i figur 3-10. De ulike "fargene" tilhører ulike familier.



Figur 3-10 De antatt mest åpenbare korrelasjoner mellom elementene i kalkylen (se også figur A-1 i vedlegg).

I dette eksemplet er det antatt at alle elementer i en slik familie er korrelert med hverandre. For enkelhetens skyld er de alle, innad i en familie, gitt samme korrelasjonskoeffisient.

Tanken bak grupperingene er at de elementene som har mange felles kostnads- og usikkerhetsårsaker også har høy korrelasjon med hverandre. Det som bidrar til kostnadsendring for en tunnel bidrar også for en stor del til tilsvarende kostnadsendringer for de andre tunnelene. Den undervurderingen av usikkerheten som blir gjort ved at man deler elementer med samme kostnadsårsak er omtalt tidligere

Tabell 3.1 viser de familiene som er slått sammen, og deres antatte korrelasjonskoeffisient. Det er altså satt en  $\rho$ -faktor på 0,8 mellom to og to av alle rundkjøringene, og så videre. Et lite utsnitt av den fullstendige matrisen er vist i figur 3-11, hvor aksene i matrisen er poster i kalkylen.

	A111	A112	A114	A115	A116	A117	A12	A151	A152	A153	A154	A155
A111												
A112	0											
A114	0	0										
A115	0	0	0									
A116	0	0,8	0	0								
A117	0	0	0	0	0							
A12	0,8	0	0	0	0	0						
A151	0,8	0	0	0	0	0	0,8					
A152	0,8	0	0	0	0	0	0,8	0,8				
A153	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
A154	0	0,8	0	0	0,8	0	0	0	0	0		
A155	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	

(Matrisen er speilet om diagonalen)

Figur 3-11 Et utsnitt fra korrelasjonsmatrisen som er vist i full størrelse i figur A-1 i vedlegget.

For tunnelportaler er det satt en høy korrelasjon (0,8) mellom portaler til samme tunnel, og en litt svakere (0,6) til portaler ved annen tunnel.

Tabell 3.1 Oversikt over korrelasjonsfamilier. Dette er matrisen/korrelasjonene som er referert til som \*DIV i resten av kapitlet.

Korrelasjonsfamilier:	Gruppen består av:	$\rho$
Rundkjøringer	A112, A116, A154, A164, A183	0,8
4-feltsveg i dagen	A111, A12, A151, A152	0,7
Nye 2-feltsveger	A114, A155, A161	0,7
Gang- og sykkelveier	A115, A165	0,9
Bruer (noenlunde like)	B111, B12, B161, B163, B17	0,8
Spesialbru	B13, B18	0,4
Tunneler	C112, C113	0,8
Portaler tunnel 1	C111, C113	0,8
Portaler tunnel 2	C131, C134	0,8
Portaler fra ulike tunneler	(C111, C113) med (C131, C134)	0,6
MVA (A, B, C, D)	A2, B2, C2, D2	0,9

I denne casen er det ikke identifisert noen negativ korrelasjon mellom elementer, og svake korrelasjoner er det for enkelhetens skyld sett bort fra. Det er kun de mest åpenbare som her er identifisert og benyttes i regneeksempelet i denne rapporten.

Casen er regnet med og uten korrelasjon, og med to metoder: Simulering med dataprogrammet @-risk og matematisk/statistisk regning med dataprogrammet ANSLAG.

@-risk benytter Monte Carlo -simulering, som er forkortet MC. ANSLAG benytter formelverket etter trinnvis kalkulasjon, som er forkortet TK.

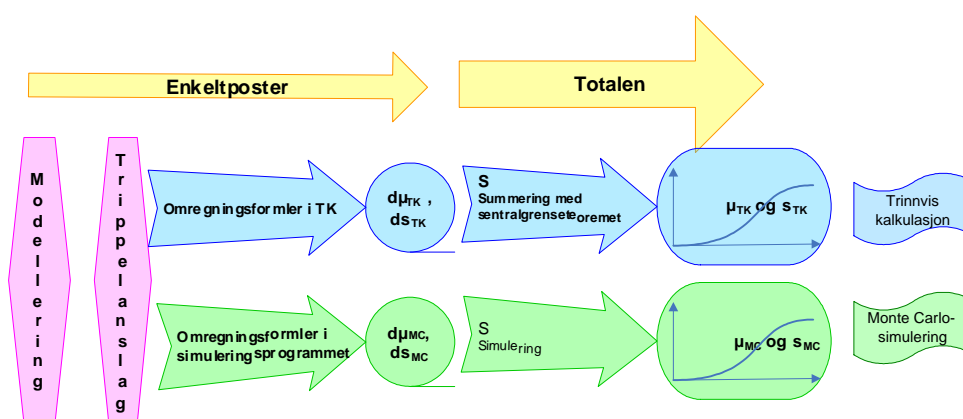
Før vi går videre med casen skal vi redegjøre litt for noen mulige kilder til små feil i en etterfølgende sammenlikning av forsøk med de to verktøyene.

### 3.5 Systematiske feil i sammenlikningen av forsøk med de to metodene

For å kunne sammenligne resultatene for de to metodene og se hvilken effekt bruk av korrelasjonsmatrise i TK har hatt, er det nødvendig å eliminere flest mulige forstyrrelser. For å kartlegge disse tas det her utgangspunkt i den generelle inndelingen av analysen som er forklart tidligere.

- Punkt 1: Modellering
- Punkt 2: Fordeling
- Punkt 3: Inngangsverdier
- Punkt 4: Beregning/simulering
- Punkt 5: Resultat

I figur 3-12 er prosessene for beregning i de to metodene sammenlignet.



Figur 3-12 *Prosessene for beregning i Anslag og MC -simulering i @-risk*

Det etterfølgende er en beskrivelse av mulige feilkilder for hvert trinn i analysen og figuren:

### **Modellering**

Korrelasjonens størrelse som skal modelleres inn er den samme for de to metodene, mens matrisene er litt forskjellige. Korrelasjonen settes i TK\* mellom totalposter, og i MC mellom faktorer (på et mer detaljert nivå).

Sannsynligvis vil dette resultere i at bidraget korrelasjonen gir til  $\sigma$  er noe større for TK\* enn for MC. Det kan diskuteres hva som gir det riktige bildet av virkeligheten.

### **Fordeling**

Det er brukt gammafordeling for begge metodene.

Formelverket i TK tar utgangspunkt i kun ett tilfelle av gammafordelingen: når  $\alpha = 10$ . Da kalles den Erlangfordelingen. Simuleringen bruker den korrekte verdi for  $\alpha$  ut fra de tallene som gis i trippelanslaget. Vi har imidlertid i en tidligere rapport (Concept rapport nr. 11) sett at formlene er svært robuste for variasjoner i  $\alpha$ , så forskjellen her blir svært liten.

### **Inngangsverdier**

Begge metodene bruker trippelanslag som input. Det mest vanlige er P10 som nedre grense, P90 som øvre grense, samt P50 eller moden. Trinnavis kalkulasjon bruker bestandig moden.

Det er brukt gammafordeling for begge metodene.

### **Beregning/simulering**

Det er her vi har den eneste metodiske forskjellen mellom stokastisk beregning og simulering. Hegre (2005) har i sin semesteroppgave vist at valg av beregningsmetode vil gi svært små utslag.

### **Resultat**

Begge metodene angir svaret på tilnærmet lik måte. TK angir det som en normalfordeling med parametrene  $\mu$  og  $\sigma$  som beskriver forventet verdi og spredning. mens resultat fra en simulering er resultatet fra hver iterasjon plottet i en fordelingskurve der  $\mu$  og  $\sigma$  angir forventet verdi og spredning. I de fleste tilfeller vil fordelingskurven fra en simulering ha samme form som normalfordelingen (som følge av sentralgrenseteoremet), men ikke nødvendigvis.



### 3.6 Hvor store er forskjellene mellom Monte Carlo simulering og Trinnvis kalkulasjon?

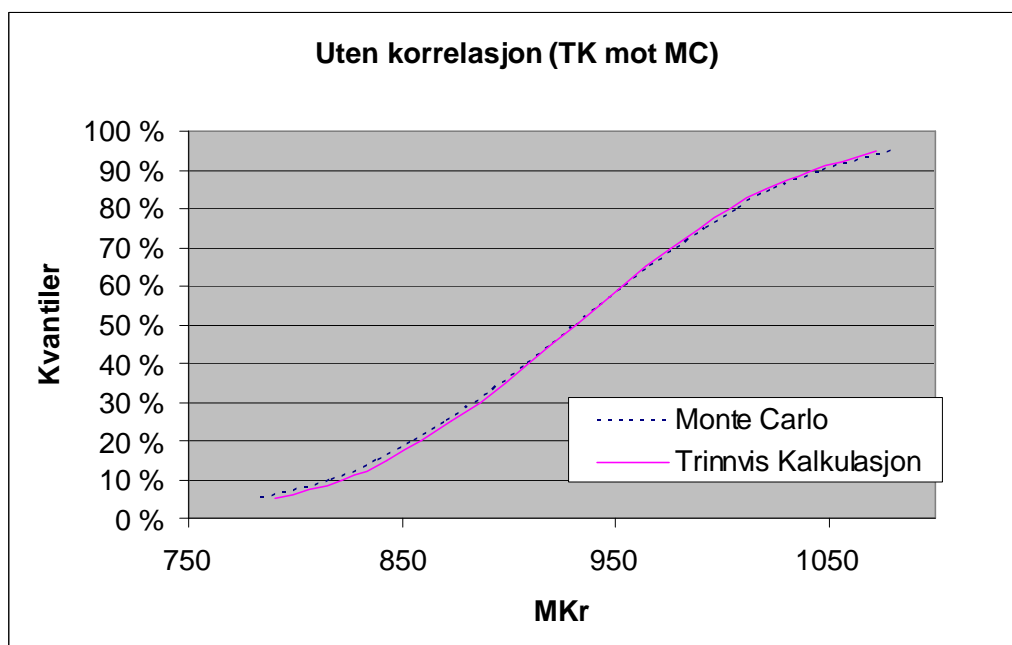
I dette kapittelet holdes resultater fra beregninger med de to metodene opp mot hverandre. Først sammenlignes de to uten korrelasjon, deretter med korrelasjonsvurderinger inkludert i MC-beregningen.

#### TK $\rho=0$ sammenlignet med MC $\rho=0$

Her er beregningene for de to metodene gjort for null korrelasjon. De to metodene gir i utgangspunktet noe ulike resultater. Tabell 3.2 viser at i dette tilfellet er  $\sigma_{TK}$  4,43% mindre enn  $\sigma_{MC}$ . Dette stemmer med teorien om at TK vil kunne gi opp til 6% feil på del-standardavvik ved små verdier av  $\alpha$ , dvs. med svært høyreskjeve fordelinger.

Tabell 3.2 Resultater fra MC og TK-beregning med null korrelasjon

		E	$\sigma$	$\sigma/E$
<b><math>\rho=0</math></b>	Monte Carlo	931 389 458	89 796 123	9,64 %
	Trinnvis Kalkulasjon	931 410 747	85 817 515	9,21 %
	differanse [Kr]	-21 289	3 978 608	
	differanse [%]	0,00 %	4,43 %	0,43 %



Figur 3-13 Sammenligning mellom s-kurver for MC og TK.  $\rho = 0$ .

Figur 3-13 viser en grafisk fremstilling av resultatene i en s-kurve. Der kan man se at til tross for en liten skjevhet, er forskjellene svært små når man har samme inngangsverdier og fordelingsfunksjoner, og man ser bort fra korrelasjon mellom elementene.

### TK $\rho=0$ sammenlignet med MC $\rho \neq 0$

Dersom en benytter seg av muligheter for å ta hensyn til korrelasjon i MC, vil forskjellen mellom de to metodene bli større. Her er resultatene fra de to sammenstilt; MC med korrelasjonsmatrisen \*DIV. Verdiene i resultatene er vist i tabell 3.3. Ved at man tar hensyn til korrelasjonen, økes standardavviket. Etter innføring av korrelasjon har  $\sigma_{MC}$  økt med 3,89%, noe som tilsvarer at  $\sigma/E_{MC}$  har økt med 0,46 prosentpoeng.

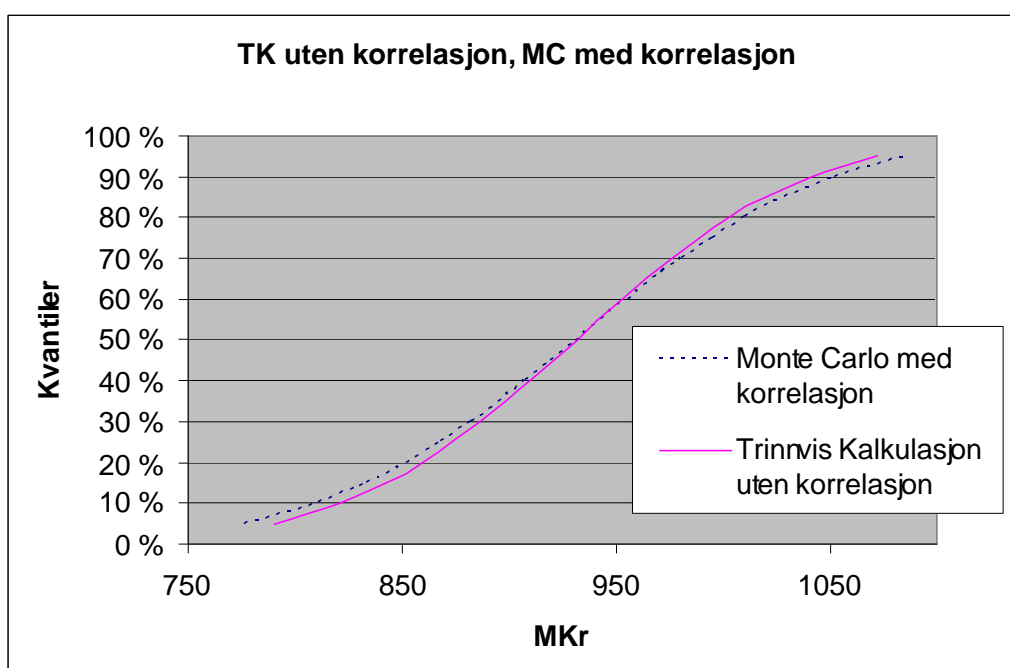
Tabell 3.3 Resultater fra TK-beregning uten korrelasjon og MC med korrelasjon

		E	$\sigma$	$\sigma/E$
$\rho = *DIV$	Monte Carlo	931 096 904	94 083 654	10,10 %
$\rho = 0$	Trinnvis Kalkulasjon	931 410 747	85 817 515	9,21 %
differanse [Kr]		-313 843	8 266 139	
differanse [%]		-0,0337 %	8,79 %	0,89 %

For MC og TK er differansen i prosentpoeng for relativt standardavvik 0,89.  $\sigma_{MC}$  er nå 8,79% større enn  $\sigma_{TK}$ , noe som i dette tilfellet tilsvarer 8,27 millioner kroner for et prosjekt med forventet kostnad på 931 mill.

Resultatene er vist grafisk i s-kurvene i figur .

Denne sammenlikningen er relevant i praksis fordi det er en del verktøy tilgjengelig på markedet hvor Trinnvis kalkulasjon ikke håndterer korrelasjon, men Monte Carlo-simuleringen gjør det. Ulempen med manglende korrelasjonshåndtering må da veies opp mot andre egenskaper som de forskjellige verktøyene har.



*Sammenligning mellom MC med korrelasjon og TK uten.*

## Beregninger i TK - med og uten korrelasjon

Casen her regnet gjennom med og uten korrelasjon. Resultatene er presentert henholdsvis som TK og TK\*. Kalkylen slik den er delt opp er såpass detaljert at kravet om uavhengighet mellom postene ikke er fullstendig bevart. Dette gir en relativt stor forskjell i resultatene mellom de to beregningene. Resultater fra simuleringer med tilsvarende inngangsverdier er brukt som referanseverdier.

### TK $\rho=0$ sammenlignet med TK $\rho \neq 0$

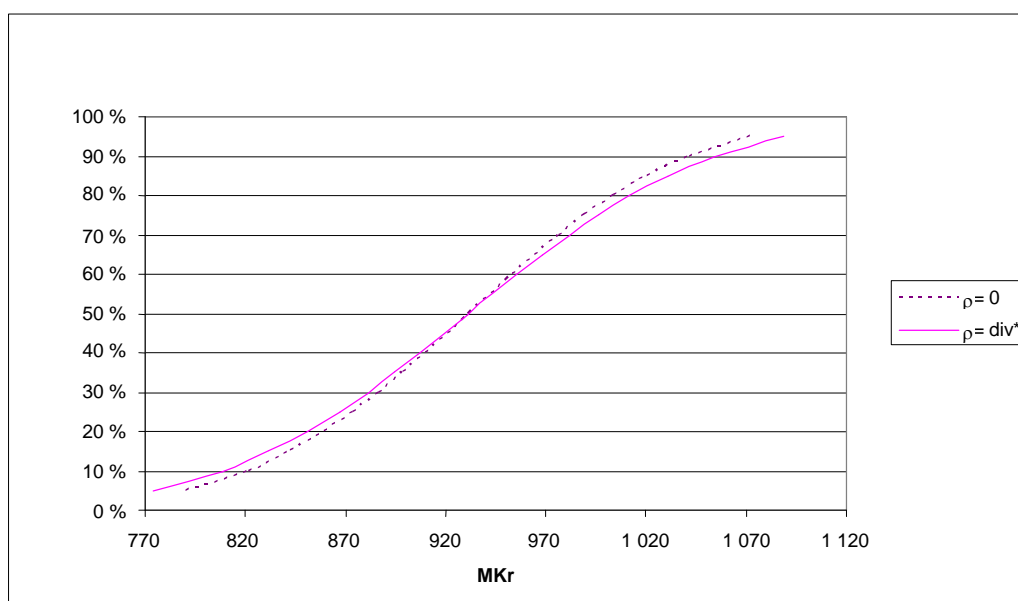
Hvordan er endringene i resultatene for TK etter at man har tatt hensyn til korrelasjon? Totalkostnaden for prosjektet har forventningsverdi og standardavvik som vist i tabell 3.4.

Tabell 3.4 TK med og uten korrelasjon. Verdier for E,  $\sigma$  og relativt standardavvik.

		E	$\sigma$	$\sigma/E$
Trinnvis Kalkulasjon	$\rho = 0$	931 410 747	85 817 515	9,21 %
	$\rho = \text{*DIV}$	931 410 747	95 748 991	10,28 %
	differanse [Kr]	0	9 931 477	
	differanse [%]	0 %	11,57 %	1,07 %

Av tabellen ser man at endringen i prosentpoeng for forholdet  $\sigma/E$  er 1,07%. Dette tilsvarer en differanse på 9,9 millioner kroner i standardavviket med korrelasjon i forhold til uten. Standardavviket øker altså med 11,57% etter påslaget for korrelasjon.

S-kurvene er vist i figur .



Sammenligning av s-kurver for TK, beregnet med og uten korrelasjon

Figuren viser hvor stor feilen blir på forskjellige kvantilverdier (horisontalforskjellen mellom kurvene) ved ikke å ta hensyn til korrelasjonen i en analytisk beregning av casen. Dette er vist med tallstørrelser i det etterfølgende.

### Effekten av differansen for utvalgte kvantiler

Å ta hensyn til korrelasjon vil gi en økning av usikkerheten, uttrykt ved spredning (standardavviket). For å se på hva slags effekt ulike standardavvik har i et typisk vegprosjekt, er det trukket ut verdier for enkelte kvantiler. De valgte er 25%, 45%, og 85%. Kvantilene er valgt på bakgrunn av praksis for offentlige prosjekter i Norge: P25 er etter manges mening et fornuftig styringsmål for en prosjektleder. P45 er det styringsmålet Vegvesenet i dag opererer med, og P85 gjenspeiler det som Finansdepartementet definert som en øvre ramme.

Tabell 3.5 Sammenligning av TK med og uten korrelasjon, for utvalgte kvantiler.

		25 %	45 %	85 %
Trinnvis Kalkulasjon	$\rho = 0$	873 527 713	920 626 803	1 020 354 885
	$\rho = *DIV$	866 829 034	919 378 800	1 030 648 199
	differanse [Kr]	-6 698 679	-1 248 003	10 293 314
	differanse [%]	-0,77 %	-0,14 %	1,01 %

Vi ser av tabellen at de feilene som gjøres i et praktisk eksempel som dette er relativt små. Øvre ramme (P85) vil bli ca. 1 % for liten når vi ikke tar hensyn til korrelasjonen.

### TK $\rho \neq 0$ sammenlignet med MC $\rho \neq 0$

Vi så at det naturlig nok er forskjell på MC med korrelasjon og TP uten. Hvordan vil nå resultatene fra de to metodene - beregnet med korrelasjon - skille seg fra hverandre?

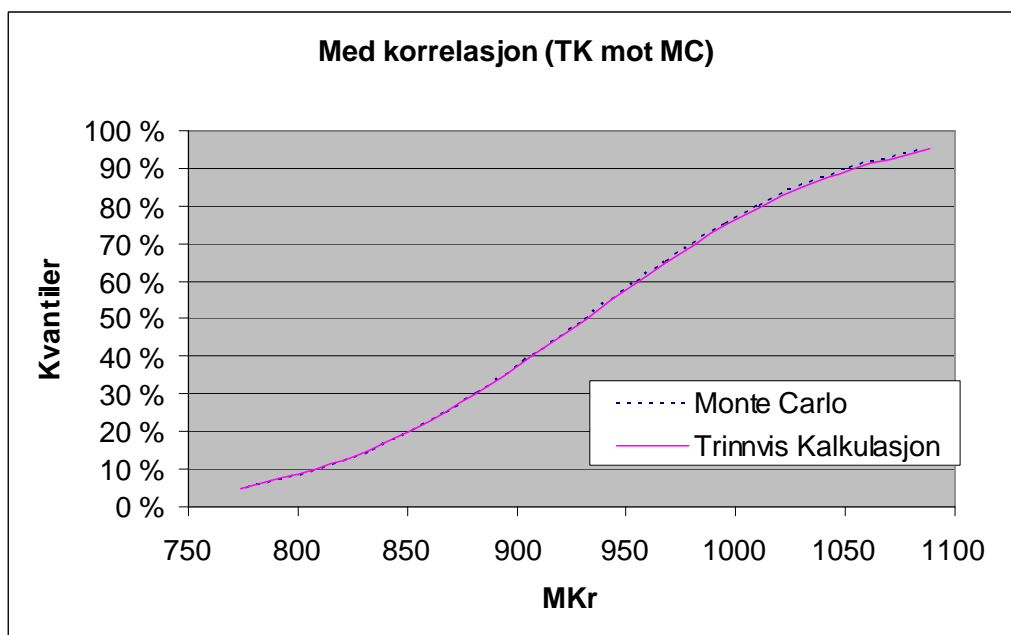
Resultatene er vist i tabell 3.6.

Tabell 3.6 Resultater for MC og TK med hensyn til korrelasjon

		E	$\sigma$	$\sigma/E$
$\rho = *DIV$	Monte Carlo	931 096 904	94 083 654	10,10 %
	Trinnvis Kalkulasjon	931 410 747	95 748 991	10,28 %
	differanse [Kr]	-313843	-1665338	
	differanse [%]	-0,03 %	-1,77 %	-0,18 %

$\sigma_{TK}$  er nå litt større enn  $\sigma_{MC}$ . Differansen er på -1,77 % i forhold til tidligere 8,79 % ved korrelasjon kun i MC. Resultatene til de to metodene avviker nå svært lite.

Figur 3-14 viser en sammenstilling av s-kurvene.



Figur 3-14 Sammenligning mellom s-kurver for MC og TK. Med korrelasjon.

Vi ser at det er svært liten forskjell. Kurvene er så godt som identiske.

Grunnen til at vi har tatt med denne sammenlikningen er å vise at det ikke bare i teorien, men også i en praktisk situasjon, er slik at analytiske metoder og simuleringer, på samme grunnlag og riktig utført, gir nesten samme resultat. Noen av de små forskjellene som fremkommer er diskutert i det etterfølgende delkapittel

### 3.7 Følsomhet for korrelasjon

For å studere virkningen av varierende korrelasjon har vi i det etterfølgende variert input i korrelasjonsmatrisen.

Det er tatt utgangspunkt i de samme korrelasjoner som vist i tabell 3.7, og gjort beregninger der alle sammenhengene er gitt samme gjennomsnittlige korrelasjonskoeffisient, og dette er gjort for alle  $\rho$  med trinn på 0,1.

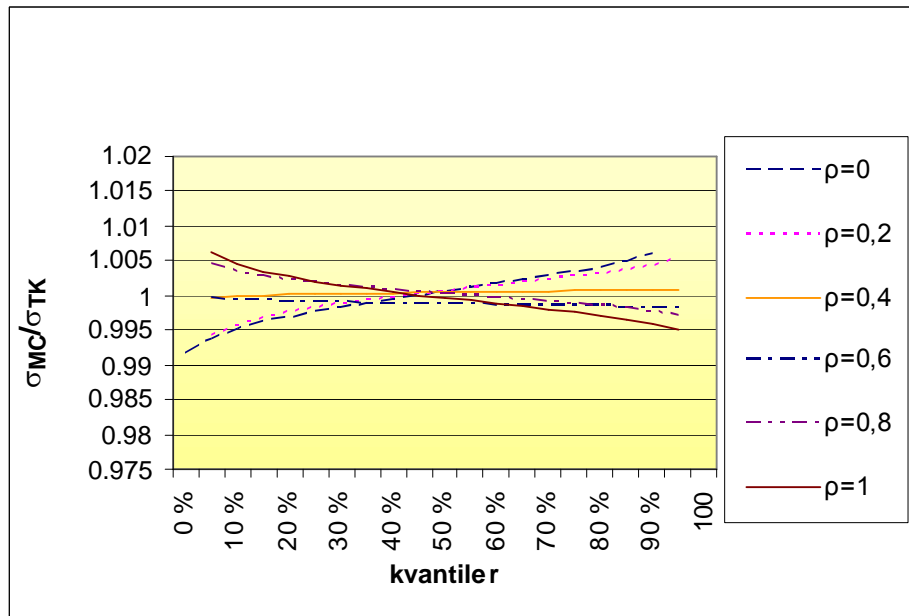
Tabell 3.7 *Oversikt over korrelasjonsfamiliene*

Korrelasjonsfamilier:	Gruppen består av:	$\rho$
Rundkjøringer	A112, A116, A154, A164, A183	X
4-feltsveg i dagen	A111, A12, A151, A152	X
Nye 2-feltsveger	A114, A155, A161	X
Gang- og sykkelveier	A115, A165	X
Bruer (noenlunde like)	B111, B12, B161, B163, B17	X
Spesialbru	B13, B18	X
Tunneler	C112, C113	X
Portaler tunnel 1	C111, C113	X
Portaler tunnel 2	C131, C134	X
Portaler fra ulike tunneler	(C111, C113) med (C131, C134)	X
MVA (A, B, C, D)	A2, B2, C2, D2	X

I tillegg er det gjort noen simuleringer med programmet @risk. For  $\rho=0$ ,  $\rho=0,5$  og  $\rho=1$  er det gjort 11 simuleringer, og resultatene som brukes er gjennomsnittet av disse. Slik er effekten av tilfeldige feil med simuleringen begrenset, og disse resultatene anses som mer nøyaktige i sammenligningen med TK.

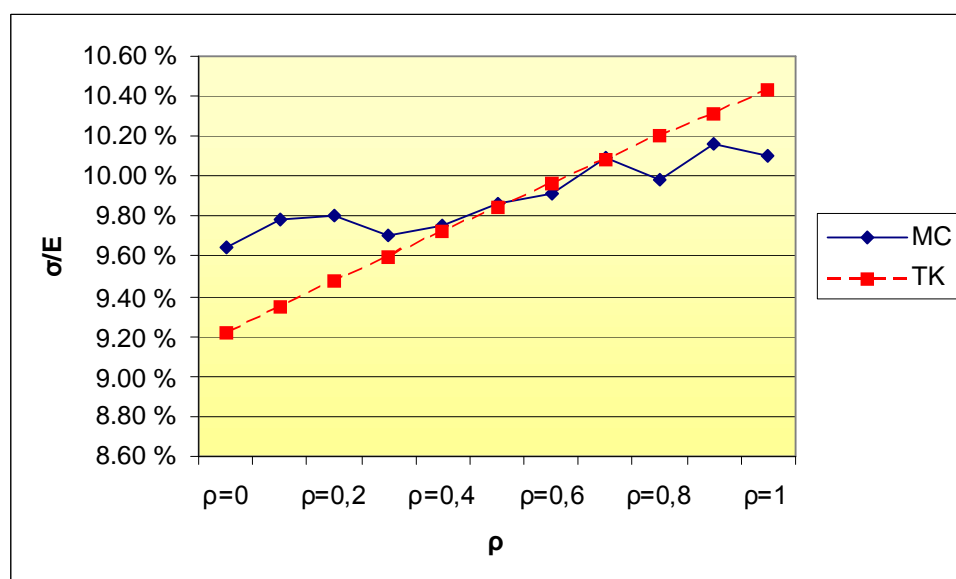
## MC og TK - hvor store forskjeller?

I figur 3-15 er forholdet mellom  $\sigma_{MC}$  og  $\sigma_{TK}$  plottet for ulike verdier av  $\rho$ . Plottene er tilnærmet lineære. For svært lave korrelasjoner og for svært høye korrelasjoner finnes de største forskjellene. Ved de ytterste kvantilene er de mest ekstreme forskjellene på omkring 1%. For mellomstore korrelasjoner gir de to metodene svært like standardavvik. For de midterste verdiene (rundt 0,5) er de to metodene så godt som sammenfallende.



Figur 3-15 Forholdet mellom  $\sigma_{MC}$  og  $\sigma_{TK}$  over alle kvantilene, for ulike  $\rho$ -koeffisienter.

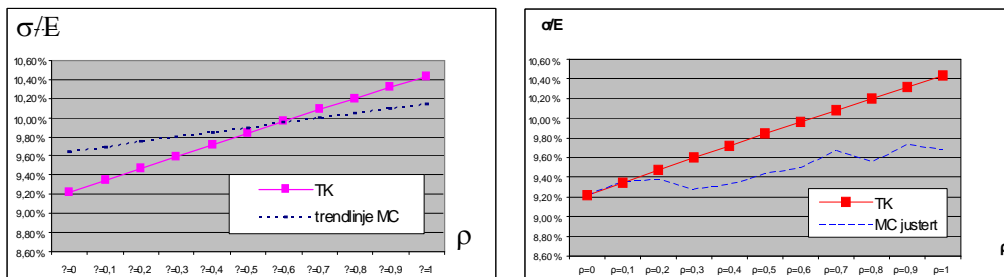
At forskjellene er størst ved  $\rho=0$  og minker med økende korrelasjon, stemmer med observasjoner gjort i det foregående delkapitlet. Her ser man altså at forskjellene blir større igjen når korrelasjonen nærmer seg 1. Figur viser effekten en økende korrelasjonsfaktor har på det relative standardavviket ( $\sigma/E$ ) for begge metodene. Dette tilsvarer med svært liten feil effekten på standardavviket i seg selv, da variasjonene i  $E$  er svært små.



Endring i standardavvikets prosentpoeng ( $\sigma/E$ ) ved økende korrelasjon  $\rho$

Grunnet de tilfeldige variasjonene i simuleringen er linjen for MC noe varierende, men en kan se at trenden er en jevnt stigende linje. MC starter med et større  $\sigma$  ved  $\rho=0$ , men stigningen er slakere enn for TK.

I Figur 3-16a) er det samme plottet gjort for TK og trendlinjen for MC, for å vise hvordan det kunne ha sett ut dersom simuleringen ga nøyaktige resultater. I 3-16b) er TK plottet sammen med MC med justert startpunkt for bedre å vise forskjellen i stigningen for de to metodene.



Figur 3-16 Stigningen i  $\sigma/E$  for økende  $\rho$ . a) TK og trendlinjen for MC. b) TK og MC med justert startpunkt.

TK gir altså i utgangspunktet en lavere  $\sigma$  enn MC, og med økende korrelasjon kompenseres det mer for usikkerheten enn i MC (kurven er brattere).

Forskjellen i stigningen til de to kurvene kan komme av at korrelasjonene i @risk settes mellom faktorene i delpostene (for eksempel kun meterpris for vei, ikke meter \* meterpris) mens i den utvidede TK setter korrelasjonsfaktoren mellom totalpostene.



### 3.8 Introduksjon av $\kappa$ - faktor: hvordan øker $\sigma$ med korrelasjonen?

Det vil komplisere modelleringsarbeidet å lage en korrelasjonsmatrise for alle kostnadsposter. En bra erstatning kunne derimot vært å bruke en fast faktor ( $\kappa$ ) som man kan justere  $\sigma$  med i tilfeller der man tror det er korrelasjon man ikke har fått med i analysen. En slik faktor vil variere fra en type prosjekt til et annet, avhengig av antall korrelerte og antall poster totalt. Her skal vi forsøke å finne en faktor som er noenlunde dekkende i dette eksempelet og tilsvarende vegprosjekter, og som muligens kan gi en pekepinn om størrelsen på en slik  $\kappa$  -faktor.

Som vi ser vil standardavviket øke tilnærmet lineært med økning av korrelasjonen. Faktoren  $\kappa$  defineres som *stigningstallet til den lineære linjen som viser sammenhengen mellom korrelasjon og standardavvik*.

$R\sigma_{\text{justert}}$  er relativt standardavviket som er justert for korrelasjon, og  $R\sigma_{\rho=0}$  er verdien som oppnås uten at korrelasjon er tatt med i beregningene.

Med bakgrunn i figur 3-16 settes korrelasjonskompensasjonsfaktorene  $\kappa$  for casen til:

$$\kappa_{MC}: 0,5 \quad \kappa_{TK}: 1,2$$

Bruk av faktoren  $\kappa$  illustreres med et eksempel:

Vi har beregnet et standardavvik  $\sigma_{\rho=0}$  uten å ta hensyn til korrelasjon, og ønsker å vite hvor mye denne feilen vil utgjøre. Prosjektet regnes for å være svært likt vår case i struktur og korrelasjoner.  $R\sigma = 9,2$ , og  $\kappa$  settes til 1,2.

Vi tar utgangspunkt i følgende struktur med korrelasjonsfamilier:

Familie	vektfaktor	$\rho$	bidrag til $\rho$
Veier	0,30	0,8	0,24
Tunneller	0,50	0,9	0,45
Rundkjøringer	0,05	0,6	0,03
Broer	0,15	0,4	0,06

$$\rho_{\text{vektet gjennomsnitt}} = 0,78$$

Vektet gjennomsnitt for de viktigste korrelasjonsfamiliene ( $\rho_v$ ) ligger på 0,78.

$$R\sigma_{\text{justert}} = \kappa_{TK} \cdot \rho_v + R\sigma_{\rho=0} = 1,2 \cdot 0,78 + 9,2 = 10,1\%$$

I praksis vil faktoren variere fra prosjekt til prosjekt, og kan være nyttig når det ikke stilles krav til stor nøyaktighet, og man ønsker å bruke tid og ressurser i analysen til andre ting.

$\kappa$  er et godt mål på modellens sensitivitet for korrelasjon.

### 3.9 Effekten av en utvidet korrelasjonsmatrise

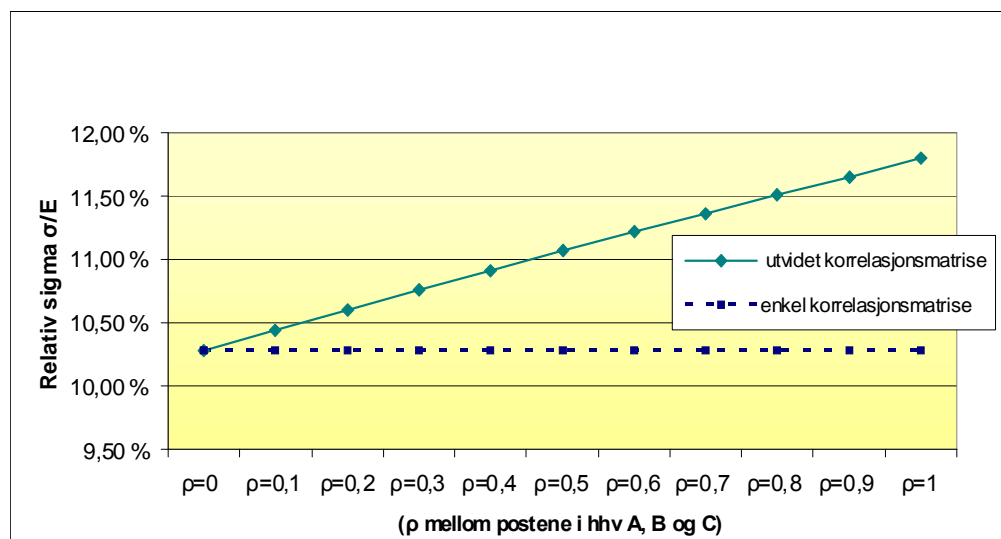
Til tross for at forskjellene i resultatene ved hensyn til korrelasjon er klare (se figur 3-19), utgjør det ikke svært mye relativt sett. Det kommer delvis av at det i casen er svært få - kun de mest åpenbare - poster som er korrelert for å holde beregningene enkle. Derfor er det her gjort en beregning med en utvidet korrelasjonsmatrise, for å se på effekten av at korrelasjonen er mer omfattende enn hensyntatt i eksemplet så langt.

Her er matrisen som er presentert forenklet i tabell 3.8 lagt til grunn. I tillegg er her samtlige elementer innen A- veg korrelert med hverandre og tilsvarende for B - bru og C - tunnel. Det er slett ikke usannsynlig at det eksisterer en svak korrelasjon mellom disse.

**Tabell 3.8** *Oversikt over grupper for korrelasjoner. Den fullstendige matrisen er presentert i vedlegg. Dette er matrisen/ korrelasjonene som er referert til som \*DIV.*

Korrelasjonsfamilier:	Gruppen består av:	$\rho$
Rundkjøringer	A112, A116, A154, A164, A183	0,8
4-feltsveg i dagen	A111, A12, A151, A152	0,7
Nye 2-feltsveger	A114, A155, A161	0,7
Gang- og sykkelveier	A115, A165	0,9
Bruer (noenlunde like)	B111, B12, B161, B163, B17	0,8
Spesialbru	B13, B18	0,4
Tunneler	C112, C113	0,8
Portaler tunnel 1	C111, C113	0,8
Portaler tunnel 2	C131, C134	0,8
Portaler fra ulike tunneler	(C111, C113) med (C131, C134)	0,6

Det er satt på gjennomsnittlige korrelasjoner fra 0 (det som vil tilsvare kun normal korrelert etter matrisen \*DIV fra tabell 3.8) og opp til 1. Figur 3-17 viser et plott av analyseresultatet med den utvidede korrelasjonsmatrisen. Plottet viser økning i forhold til den opprinnelige matrisen som ga et relativt standardavvik på 10,28%.



Figur 3-17 Økning i det relative standardavviket med økning av utvidet korrelasjon. Matrisen \*DIV ligger til grunn, og er plottet som en horisontal linje til sammenligning.

Ved høye korrelasjoner ser vi at effekten vil være stor, og resulterer i en økning på opp til 1,5 prosentpoeng på det relative standardavviket; en økning på nesten 15% i forhold til den enkle matrisen.

Tabell 3.9 viser resultatene av den utvidede korrelasjonsmatrisen, og differansen i det relative standardavviket i forhold til den enkle korrelasjonsmatrisen.

Tabell 3.9 Resultater fra utvidet korrelasjonsmatrise. Matrisen \*DIV ligger til grunn, deretter er alle elementene i A, alle i B og alle i C korrelert seg imellom med faktoren som vist i tabellen.

	E	σ	σ/E	σ/E i forhold til ρ=0	Δ σ [%]
ρ=0	931 410 747	85 817 515	9,21 %		
ρ=*DIV	931 410 747	95 748 991	10,28 %		
ρ=0 + (ρ=*DIV)	931 410 747	95 748 991	10,28 %	1,1 %	
ρ=0,1 + (ρ=*DIV)	931 410 747	97 257 066	10,44 %	1,2 %	1,6 %
ρ=0,2 + (ρ=*DIV)	931 410 747	98 744 884	10,60 %	1,4 %	1,5 %
ρ=0,3 + (ρ=*DIV)	931 410 747	100 208 719	10,76 %	1,5 %	1,5 %
ρ=0,4 + (ρ=*DIV)	931 410 747	101 649 789	10,91 %	1,7 %	1,4 %
ρ=0,5 + (ρ=*DIV)	931 410 747	103 069 198	11,07 %	1,9 %	1,4 %
ρ=0,6 + (ρ=*DIV)	931 410 747	104 467 954	11,22 %	2,0 %	1,4 %
ρ=0,7 + (ρ=*DIV)	931 410 747	105 846 979	11,36 %	2,2 %	1,3 %
ρ=0,8 + (ρ=*DIV)	931 410 747	107 207 127	11,51 %	2,3 %	1,3 %
ρ=0,9 + (ρ=*DIV)	931 410 747	108 549 185	11,65 %	2,4 %	1,3 %
ρ=1 + (ρ=*DIV)	931 410 747	109 873 885	11,80 %	2,6 %	1,2 %
average (Δ σ) = κ =				1,4 %	

Den utvidede matrisen er imidlertid tenkt for svake korrelasjoner mellom elementer i samme hovedinndeling (A, B eller C), og det antas dermed at de høye korrelasjonskoeffisientene ikke er så sannsynlige. Resultatene vil dermed være noe mer moderate. I casen kan et sannsynlig nivå for utvidet korrelasjon være for eksempel 0,3. Relativt standardavvik øker da til ca. 10,8%. Det vil, i forhold til TK uten korrelasjon gi en økning på 17%.

En  $\kappa$  for denne utvidede matrisen vil ligge på ca 1,4. Det vil si at mange lave korrelasjoner i dette tilfellet vil gi en større effekt på standardavviket enn få, høye korrelasjoner.

---

### Eksempel:

Vektet  $\rho$  etter \*DIV er 0,7 og  $\rho$  i utvidet del er 0,4 gir

$R\sigma_{\text{justert}} = 1,2 \cdot 0,7 + 1,4 \cdot 0,4 + 9,2 = 10,6\%$ ; en økning av relativt standardavvik på 15%

---

*Det viktigste man kan trekke ut av disse undersøkelsene, er at i en reell situasjon som denne er størst forskjell i standardavvik fra ca. 9,2% av forventningsverdien uten korrelasjon til ca. 11,8% med utvidet korrelasjonsmatrise og full korrelasjon; altså 2,6 prosentpoeng, eller 28 %. En kanskje mer realistisk situasjonen er at korrelasjonene i den utvidede matrisen er mindre enn 50 %. Hvis vi setter denne korrelasjonskoeffisienten til 0,5, vil spranget mellom "ukorrelert" standardavvik og realistisk standardavvik være fra 9,2 % til 11,1 (se figurene og 3-17); altså en økning på 1,9 prosentpoeng, eller 20 %. Det er viktig å merke seg at bruk av uttrykket realistisk standardavvik her betyr realistisk i forhold til den virkning eventuell utelatt korrelasjon kan ha på usikkerhetsbildet. At beregnet spredning kan være for liten fordi input ikke er god nok kan ofte gi utslag som er større enn utslagene på grunn av manglende håndtering av korrelasjon. Dette er behandlet i andre rapporter i serien.*

## 3.10 Oppsummering og konklusjoner om korrelasjon

Hvis utgangsforutsetningen for beregningene av spredning i kalkylen er at alle postene i en kalkyle er stokastisk uavhengige, og denne forutsetningen er feil, vil vi undervurdere usikkerheten i kalkylen. Våre vurderinger av forholdet med avhengighet har bestått av to hoveddeler. Den ene har vært en betraktning om hvor stor feil som kan være realistisk mulig. Den andre angrepsmåten har bestått i å studere en case.

Hvis antakelsen om uavhengighet er feil, og vi i virkeligheten har høy korrelasjon, vil feilen vi gjør øke med økende antall poster (se figurene 3-7 og 3-9). I en kalkyle bestående av 20 like poster hvorav halvparten er 70% korrelerte, vil vi få en feil i beregnet standardavvik på ca. 100%. Det finnes ingen kjent empiri som kan gi oss en pekepinn på hvor det "riktig" området ligger, men ut fra en forutsetning om at vi har hatt en noenlunde bevisst holdning til detaljering i kalkylen, vil maks-feil antakelig ligge lavere enn dette.

Faren ved høy detaljeringsgrad og samtidig beregning som om alle poster fortsatt er uavhengige, er at den beregnede usikkerheten går kraftig ned (se heltrukken linje i figur 3-6). Detal-

jering i seg selv påvirker den virkelige usikkerheten i liten grad, og den relative feilen kan i verste fall bli svært stor (se figur 3-7).

Den andre måten å nærme seg problemområdet på har vært å studere en case. Her er det gjort forskjellige forsøk med å simulere forskjellige tenkte praktiske situasjoner. Kalkylen er delt i grupper, og internt i gruppene er det innført korrelasjon mellom postene. Kostnadene for hver gruppe er imidlertid antatt uavhengig fra de andre gruppene.

Resultatene fra casen viser oss at vi i praksis, så lenge vi ikke innfører korrelasjon ved ukritisk oppdeling, og under forutsetning av at input er dekkende for situasjonen, vil feilen vi gjør ved ikke å ta hensyn til korrelasjon antakelig være godt under 30 % av beregnet standardavvik.

Vi vil til slutt minne om at de største feilene som gjøres nok fortsatt kommer fra at vi i utgangspunktet er for sikre på våre tall, og ikke er vide nok i anslagene.

## 4. Begrensningene i bruken av normalfordelingen

I mange kostnadsoverslag med tilhørende usikkerhetsanalyse gjøres det forutsetning om at sluttsammen er statistisk normalfordelt. Normalfordelingen er den mest kjente av alle sannsynlighetsfordelinger. Den er godt tabellert og enkel å bruke. Normalfordelingen er hyppig brukt som substitutt for fordelinger som ikke kan bestemmes på samme presise måte. Disse fordelingene er derfor vanskeligere å bruke. Vi skal i det etterfølgende se på tilnærminger til normalfordelingen, og hvor fort denne tilnærmingen skjer, slik at vi kan si at vi er nært nok til at vår fordeling kan anses for normalfordelt.

Normalfordelingen, eller klokkekurven som den også kalles, er symmetrisk om middelveien (se figur 4-1). Forventingsverdien  $\mu$  er derfor lik både moden og medianen. Halene på kurven nærmer seg asymptotisk til x-aksen.

Normalfordelingskurven beskrives av formelen:  $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

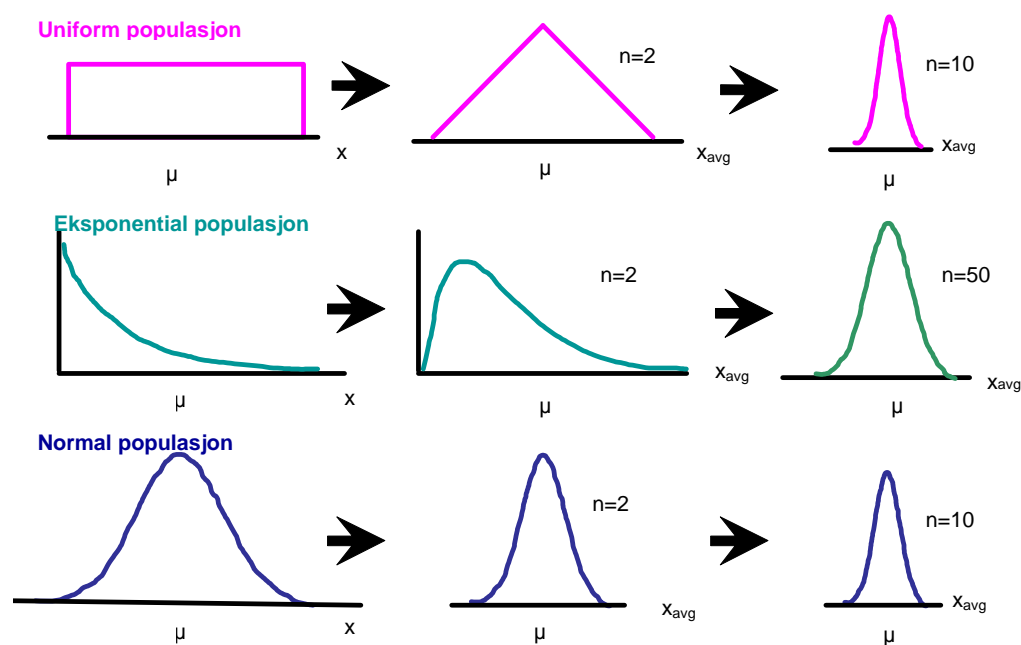
## 4.1 Sentralgrenseteoremet

Et kjent teorem innenfor statistisk teori er sentralgrenseteoremet som sier at summen eller middelveiden av et stort antall poster som hver for seg kan ha ulike sannsynlighetsfordelinger tenderer mot å bli normalfordelt.

For at teoremet skal virke fullt ut er det noen tilleggsbetingelser som også må oppfylles. Disse er at det ikke må være statistisk avhengighet mellom postene, og at ikke en eller et fåtall poster er dominerende med hensyn på størrelse eller absolutt spredning. Legg merke til at postene kan ha forskjellige sannsynlighetsfordelinger.

Et teorem er en påstand som lar seg bevise. Sentralgrenseteoremet er gammelt og anerkjent, og det er ingen tvil om at det gjelder. Spørsmålet man kan stille seg er derimot hvor fort denne tilnærmingen til normalfordelingen skjer, og når man kan si at det er nært nok til at vi kan anse størrelsen som normalfordelt.

Hvor stort antall poster må være før vi kan si det er nært nok er avhengig av postenes sannsynlighetsfordelinger, og kommer også i en viss grad an på hvor ekstreme verdiene til fordelingenens parametere er. Noen eksempler er vist i figur 4-1.



Figur 4-1 Sentralgrenseteoremet: Provenes fordeling går mot normalfordeling når prøvestørrelsen  $n$  øker (fritt etter Devore og Farnum, 1999).

Ut over i kapitlet skal vi se nærmere på bl.a. hvor mange poster som må summeres for at summen blir “nær-normal-nok”.

## 4.2 Skewness og kurtosis

I tillegg til beliggenhetsmål som forventningsverdi og kvantiler, eller spredningsmål som varians og standardavvik, brukes begreper som skjevhet (skewness) og kurtosis til å karakterisere en fordeling. (Ordet skjevhet er brukt i en annen sammenheng i dette kapitlet, og da med en annen betydning enn det vi vil presentere her. Derfor vil vi i denne sammenheng bruke ordet skewness som er et klart definert begrep i statistisk litteratur.)

Skewness er et mål på symmetri, eller rettere sagt, mangel på symmetri.

For datasettet  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ , er skewness definert som:

$$skewness = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^3}{(N-1)\sigma^3}$$

hvor  $\bar{Y}$  er middelveidien,  $\sigma$  er standardavviket, og  $N$  er antall observasjoner. Skewness for en normalfordeling er 0. Negative verdier for skewness indikerer at kurven er venstreskjev, og positive verdier for skewness indikerer en høyreskjev kurve.

Kurtosis er et mål på om en fordelingsfunksjon er toppet eller flat i forhold til en normalfordeling. Et datasett med høy kurtosis har en klar topp i nærheten av middelveidien, avtar raskt, og har en "feit" hale.

For datasettet  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ , er kurtosis definert som:

$$kurtosis = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^4}{(N-1)\sigma^4}$$

hvor  $\bar{Y}$  er middelveidien,  $\sigma$  er standardavviket, og  $N$  er antall observasjoner. Kurtosis for en normalfordeling er 3,0.

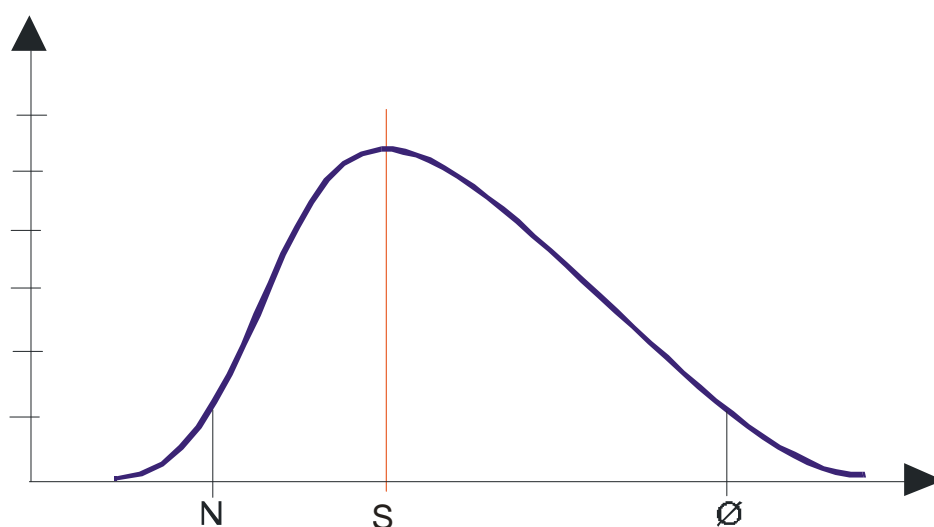


### 4.3 Typiske skjevhetsforhold og relative standardavvik

Hvor store avvik resultatene fra en kostnadsanalyse gir i forhold til teoretisk helt riktige normalfordeling avhenger i stor grad av to faktorer, hvor skjeve fordelingene til anslag for de enkelte postene er, og hvor store relative standardavvik de har. Det er derfor på sin plass at vi først ser på hva som er typiske verdier for disse skjevhetene slik at vi har en referanse å forholde oss til.

#### Skjevhetsforhold

Trippelanslag består i å fastlegge x-verdien til tre punkter på en tetthetskurve. Se figur 4-2.



Figur 4-2 *Trippelanslag*

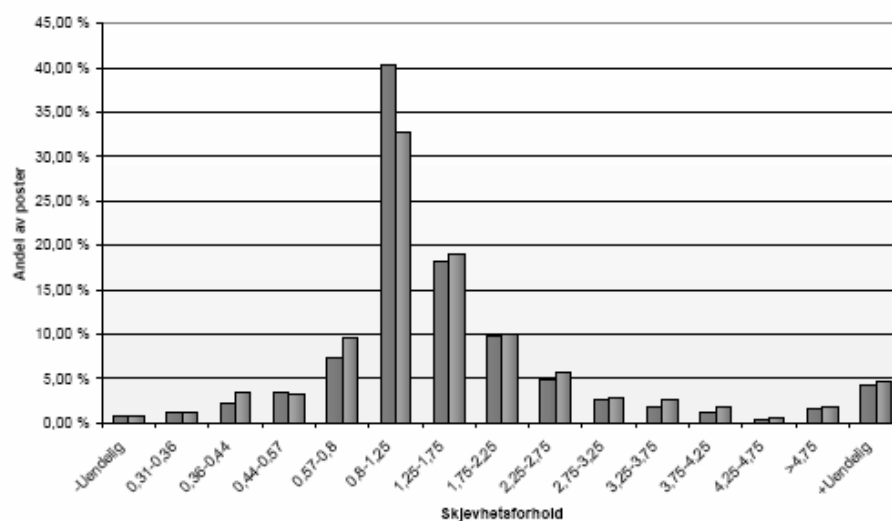
N og Ø er henholdsvis P10 og P90, og S er moden (mest sannsynlig verdi).

Vi definerer skjevhetsforholdet til å være differansen mellom øvre verdi og mest sannsynlige verdi delt på differansen av nedre og mest sannsynlige verdi:

$$Skf = \frac{\text{Ø} - S}{S - N}$$

For å kartlegge de typiske verdiene for skjevhetsforhold og relativt standardavvik hentet vi inn tre ulike usikkerhetsanalyser fra Statens vegvesen og et tilsvarende antall fra hver av konsulentfirmaene som driver med ekstern kvalitetssikring. Alle analyser er utført av forskjellige prosessledere og ressursgrupper.

Vi gikk inn i hver analyse og så på skjevhetsforholdet og relativt standardavvik for hvert enkelt trippelanslag og laget en statistikk på grunnlag av dette. Resultatet presenteres nedenfor i figur 4-3 og figur 4-4.



**Figur 4-3** *Fordeling av skjevhetsforhold for anslag gjort av Statens vegvesen (de lyse stolpene) og konsulenter (de mørke stolpene).*

Figur 4-3 viser resultatet fra undersøkelsen. Det er ikke foretatt noen vektning av postene, slik at en liten post har hatt samme betydning som en stor post i denne undersøkelsen. Skjevhetsforhold mindre enn 1,0 betyr at vi har et venstreskjevt anslag. Et venstreskjevt anslag med  $Skf = 0,5$  speiler et høyreskjevt anslag med  $Skf = 2,0$ .

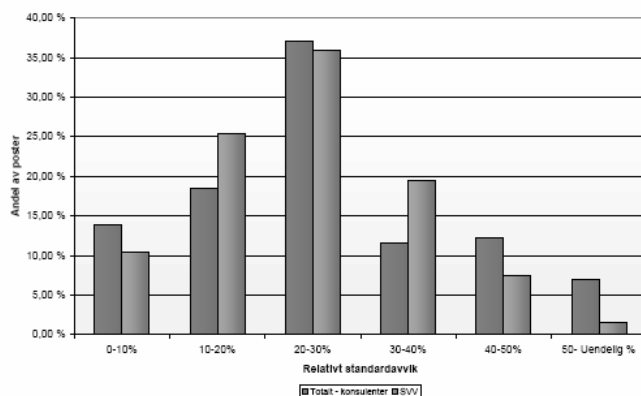
Hvis vi antar en gammafordeling med formparameter  $\alpha = 10$ , som er den faste fordelingen som benyttes i Vegvesenets ANSLAG, har den en skjevhet på ca. 1,9; altså helt i ytterkanten av et 60%-konfidensintervall basert på fordelingen i figur 4-3.

Vi ser at 65 - 70% av alle trippelanslag vil ha et skjevhetsforhold mellom 0,5 og 2,0. Bare et fåtall vil ha skjevhetsforhold større enn fem. Man skal likevel være oppmerksom på at dette fåtallet poster som har store skjevhetsforhold som regel er store poster i en analyse. Det er typisk der hvor man har nedre og mest sannsynlig verdi tilnærmet lik, at man ser store skjevhetsforhold. Dette forekommer først og fremst på postene for indre og ytre påvirkningsfaktorer og andre prosentpåslag som totalt sett utgjør en stor andel av usikkerheten for et kostnadsanslag.

## Relativt standardavvik

Relativt standardavvik er et mye brukt begrep. Det er definert som standardavviket delt forventningsverdien. Eller sagt med andre ord, hvor stor spredningen er i forhold til forventningsverdien.

Figur 4-4 viser hvor stort det relative standardavviket er på enkeltanslagene i det innsamlede materialet.



Figur 4-4 *Typiske relative standardavvik for kostnadsanslag*

Vi ser, med litt regning, at både typiske verdi (verdien med den høyeste stolpen) og gjennomsnittet for relative standardavviket for anslag på enkeltposter ligger på ca. 25%.

Relativt standardavvik på 25% på enkeltposter kan høres mye ut, men er lite i forhold til hva man vet om størrelsen på standardavviket for sluttsummen. Hvis sluttsummen består av 20 like store poster som hver har standardavvik på 25%, og vi forutsetter full uavhengighet, vil standardavviket på sluttsummen bli 5.6%.

Grunnen til at de fleste analysene gir en større spredning på sluttresultatet enn dette, er at mange usikkerhetslementer opptrer som multiplikasjonsfaktorer, enten i form av usikre mengder multiplisert med usikker enhetskostnad, eller som usikre påslag på en eller flere poster i kalkylen. Ved multiplikasjon av usikre kostnadsfaktorer vil ikke bare absolutt spredning, men også relativ spredning øke, og slik at relativt standardavvik på produktet er større enn relativt standardavvik på den faktoren med størst avvik. Som nevnt tidligere vil noen av påslagsfaktorene i tillegg ha en spredning som ligger godt over gjennomsnittet.

## 4.4 Metodiske forenklinger

Å finne den såkalte graden av normalitet i et stokastisk materiale er en komplisert affære hvis man skal tilfredsstillende alle krav som er beskrevet i statistisk litteratur. Her dreier det seg om å finne mål for tilnærming både når det gjelder kurveform og hvor godt de forskjellige deler av kurven er tilnærmet.

Vi har valgt en forenklet tilnærming til problemet som er tilpasset hva vi erfarer er situasjonen i praktiske bruk av forutsetningen om sentralgrenseteoremet. Praktisk bruk i denne sammenheng er usikkerhetsanalyser i forbindelse med kostnadsoverslag.

Forenklingene består først i å fastslå at sentralgrenseteoremet gjelder. Dette innebærer at vi forutsetter at formen på tetthetskurven, eller den kumulative kurven for vår kostnadsoverslag er svært lik kurvene for normalfordeling.

Den andre forenklingen er å bruke skjevheten i fordelingen (skewness) som mål for hvor nært normalfordelingen vi er. Tetthetskurven for normalfordelingen har skewness lik 0.

Den tredje forenklingen går ut på å bruke kurtosis som mål på hvor nært vi er normalfordelingskurven ute i "halene".

Den fjerde og siste forenklingen er å definere "nært nok". I det videre arbeid vil vi si at når kurvene for den aktuelle fordelingen og normalfordelingen har samme forventningsverdi, samme relative standardavvik, faller nesten sammen, og forskjellen mellom medianene (50%-kvanteren) er lik eller mindre enn 1% når det relative standardavviket er 10%, så er vi så nært normalfordelingen at vi selv med krav til stor nøyaktighet kan regne som om resultatet var normalfordelt. Dette kravet kan forenklet uttrykkes som at differansen på P50-nivå skal være maks 10% av standardavviket.

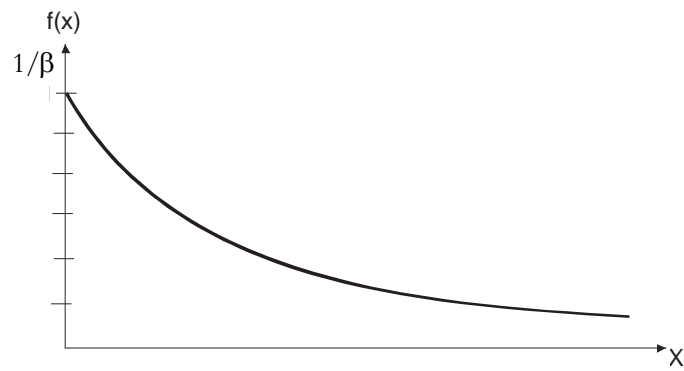
## 4.5 Tilnærming til normalfordelingen

Som tidligere nevnt er sentralgrenseteoremet godt bevist, og spørsmålet er bare hvor fort tilnærmingen skjer, og når kan vi si vi er nært nok?

For å få svar på disse spørsmålene forutsetter vi for enkelhets skyld at den enkelte post har en eller annen form for gammafordeling, og de følgende figurene viser forskjellen på normalfordelingen og gammafordelinger med varierende  $\alpha$ .

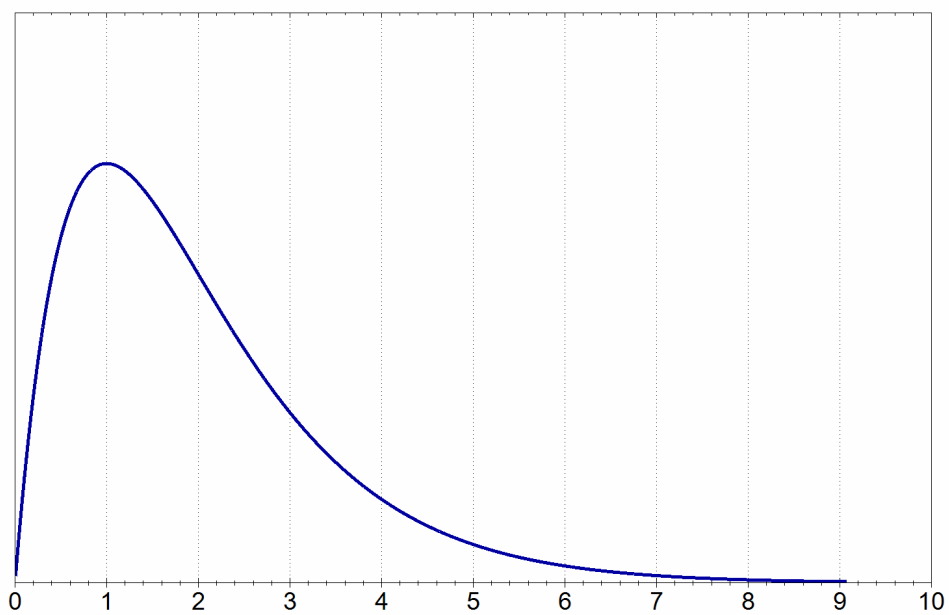
I gammafordelingen er  $\alpha$  formparameter og  $\beta$  er skalaparameter. Forventningen  $E(x) = \alpha\beta$  og varians  $Var = \alpha\beta^2$ .

$\alpha = 1$  gir en svært høyreskjev fordeling som også kalles eksponentialfordelingen. Denne antas å representere det mest ekstreme vi i praksis får av postanslag. Den vil for eksempel være resultatet av et trippelanslag hvor nedre og mest sannsynlig verdi faller sammen. Eksponentialfordelingen har skewness på 2,0 og kurtosis på 9,0. Se tabell 4.1.

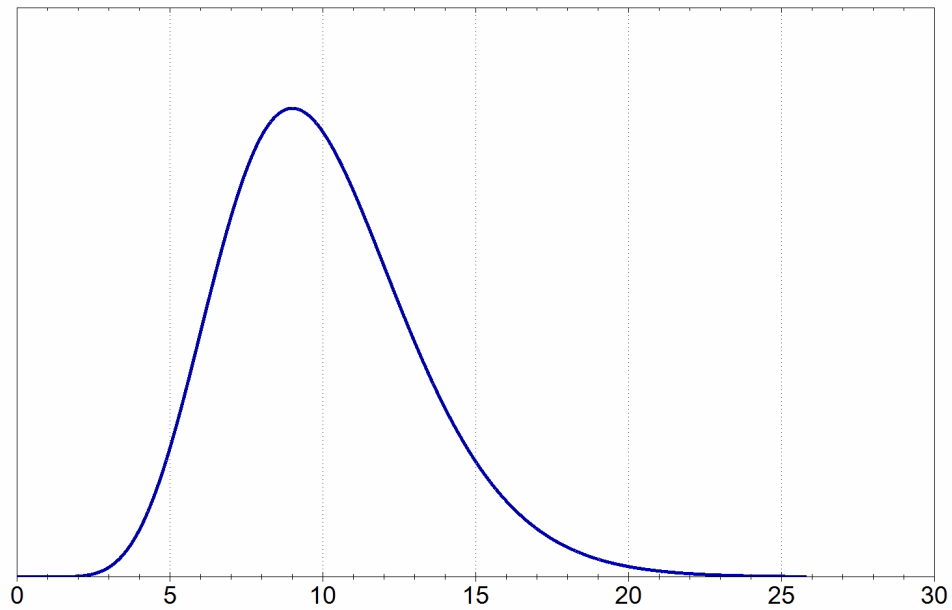


Figur 4-5 *Gammafordeling med  $\alpha = 1$  (eksponentialfordeling)*

For sammenlikningens skyld viser vi grafisk noen flere gammafordelinger



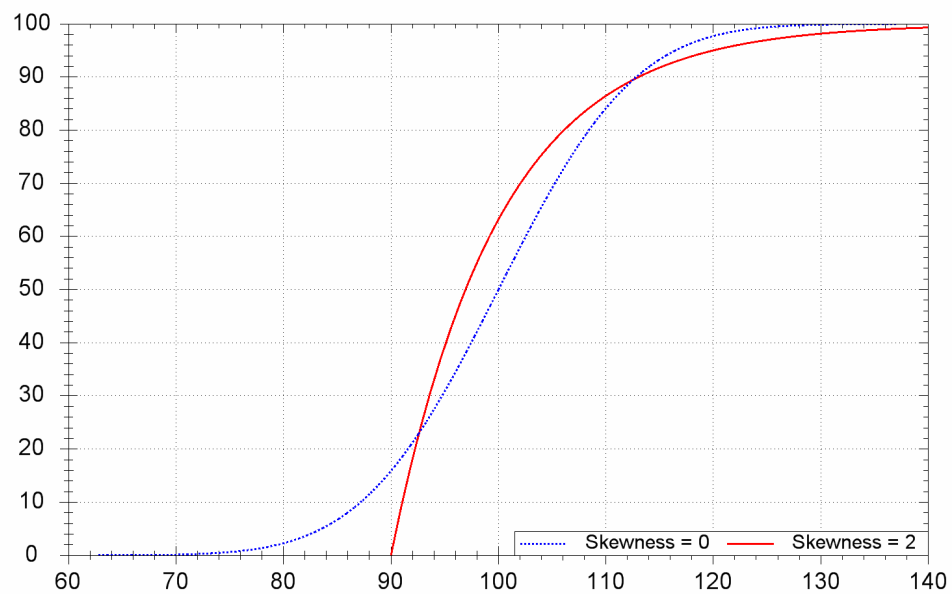
Figur 4-6 *Gammafordeling med  $\alpha = 2$*



Figur 4-7 *Gammafordeling med  $\alpha = 10$*

Fordelingen i figur 4-7 er den som formlene for Trinnvis kalkulasjon er optimalisert for.

I figurserien 4-8 til 4-12 er gammafordelinger med forskjellig  $\alpha$  og skewness vist sammen med normalfordelingen. Alle fordelingene har forventningsverdi 100 og standardavvik 10. Det kvantifiserte resultatet fra disse sammenlikningene er vist i tabell 4.1.



Figur 4-8 *Ekspontialfordeling og normalfordeling*

La oss anta at vår virkelige fordeling er eksponentiell som vist i figur 4-8. Hvilke feil får vi ved å si at den er normalfordelt?

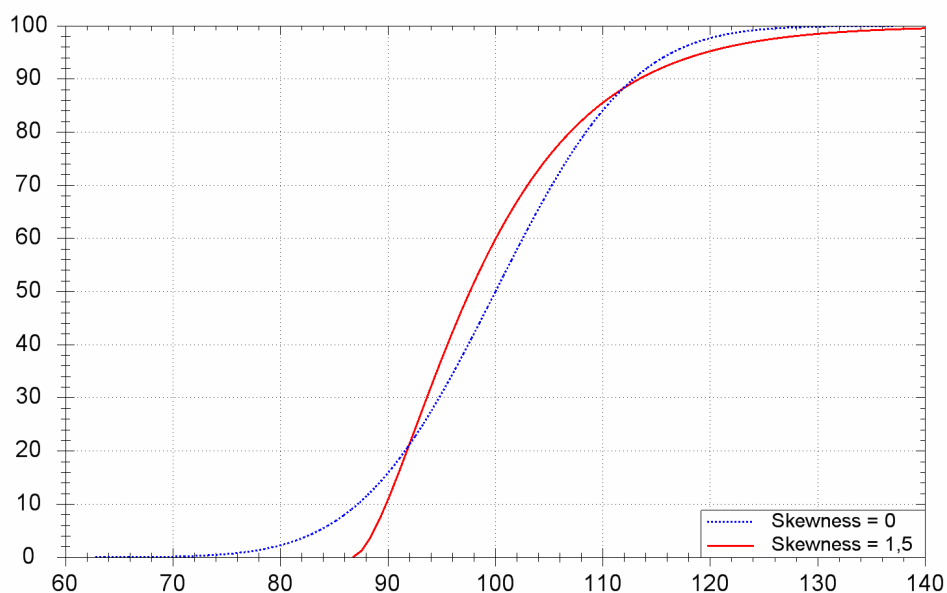
Vi ser at de største feilene får vi fra  $P0^+$  og oppover til ca. P10, hvor antakelsen om normalfordeling gir til dels betydelig lavere verdier enn de virkelige. Dette intervallet blir imidlertid lite brukt i praksis. Både i analysemessig og styringsmessig sammenheng er det området fra P50 til P90 som er mest i fokus.

P20 til P30 er et intervall som etter vår mening burde dekke noen styringsmål. Vi ser at i dette intervallet er forskjellen på kurvene relativt liten.

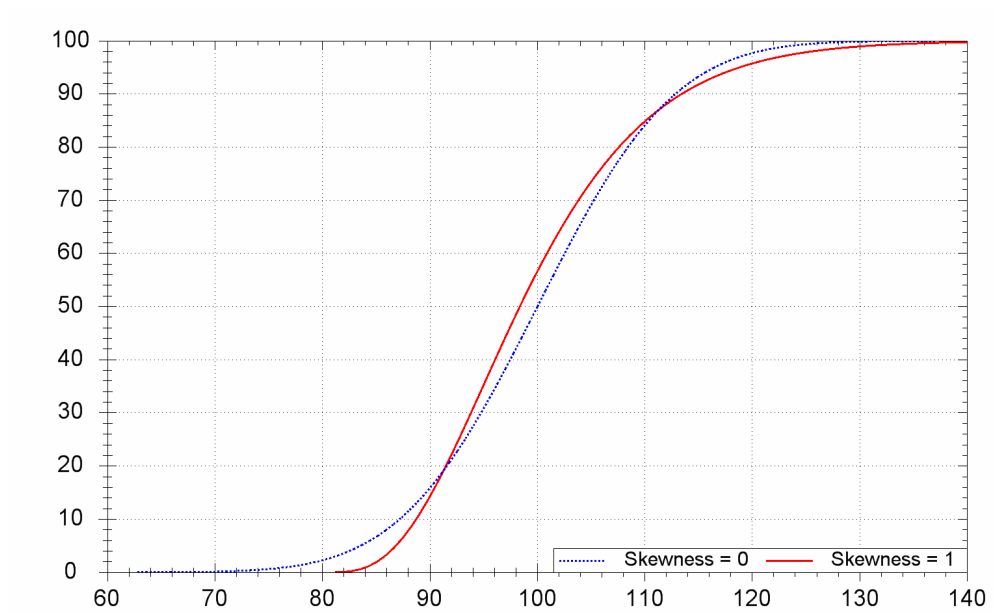
I området P30 til P85 er det reelle avviket fra normalfordelingen på 1 til 3%. Vi ser at ved å anta en normalfordeling har vi lagt oss på den "sikre siden", og det er et skjønnsspørsmål om avviket er akseptabelt eller ikke.

Fra P90 og oppover vil vi på nytt få store underestimeringer, dog er utslagene her mindre enn i andre enden av kurve.

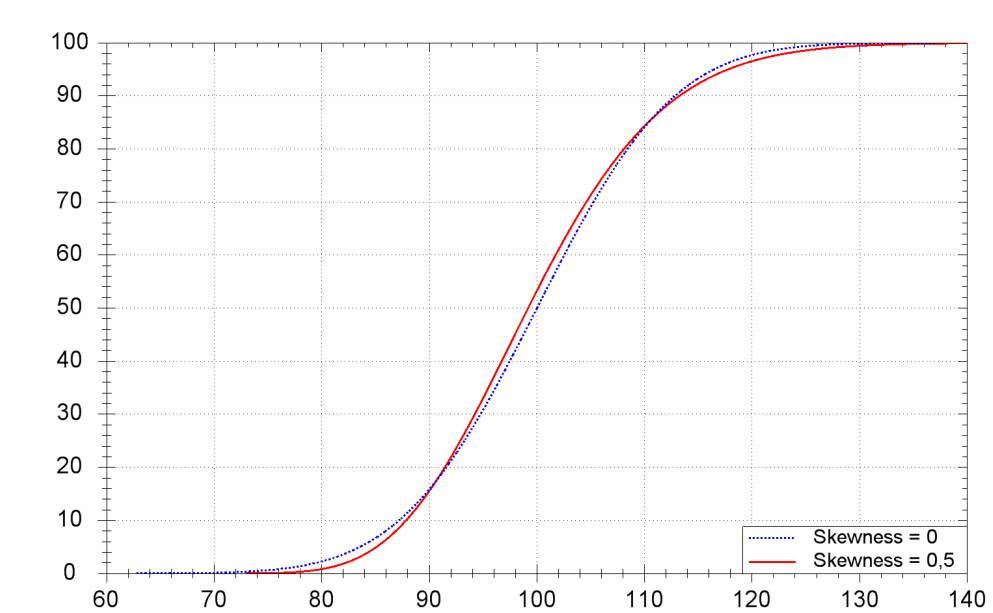
Det vi her har diskutert er ekstremavvik ved at kalkylen består av én svært høyreskjev post, noe som selvfølgelig aldri vil opptre. Resultatet av at vi lager en sum av økende antall slike poster er vist i de følgende figurene 4-9 til 4-12. Se også tabell 4.1.



Figur 4-9 *Gammafordeling med  $\alpha = 1,78$  og normalfordeling*

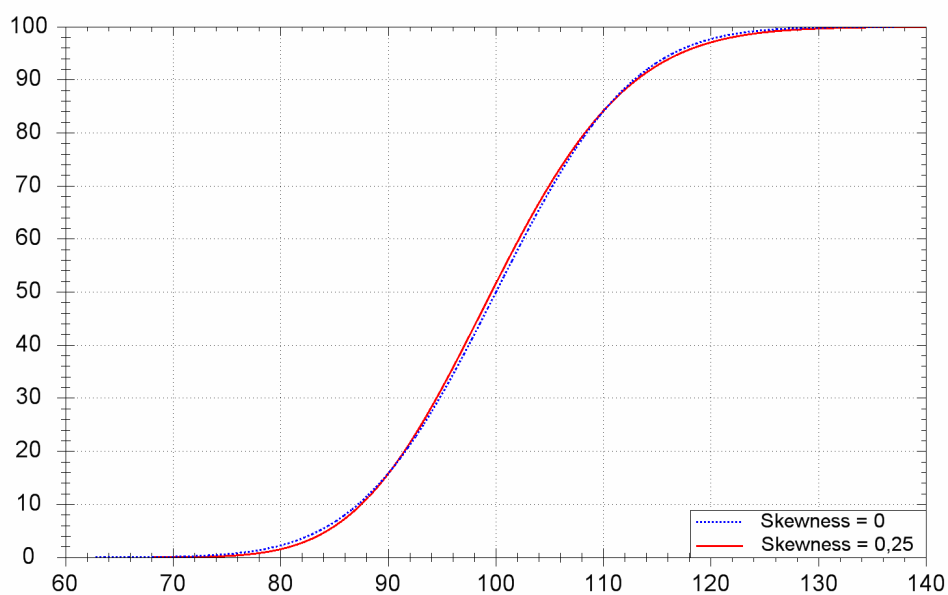


Figur 4-10 *Gammafordeling med  $\alpha = 4$  og normalfordeling*

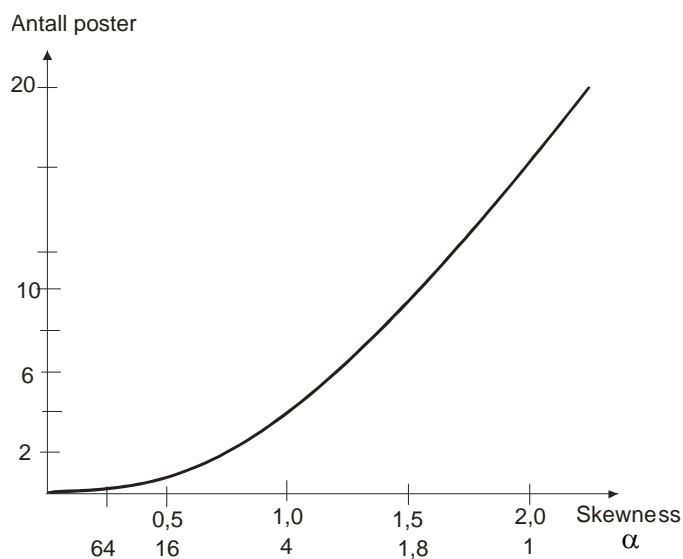


Figur 4-11 *Gammafordeling med  $\alpha = 16$  og normalfordeling*





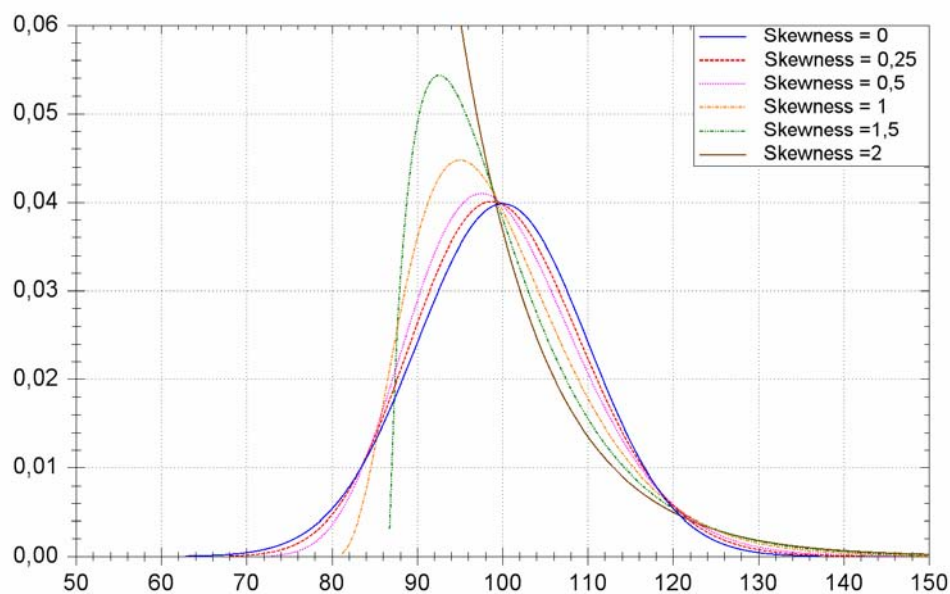
Figur 4-12 *Gammafordeling med  $\alpha = 64$  og normalfordeling*



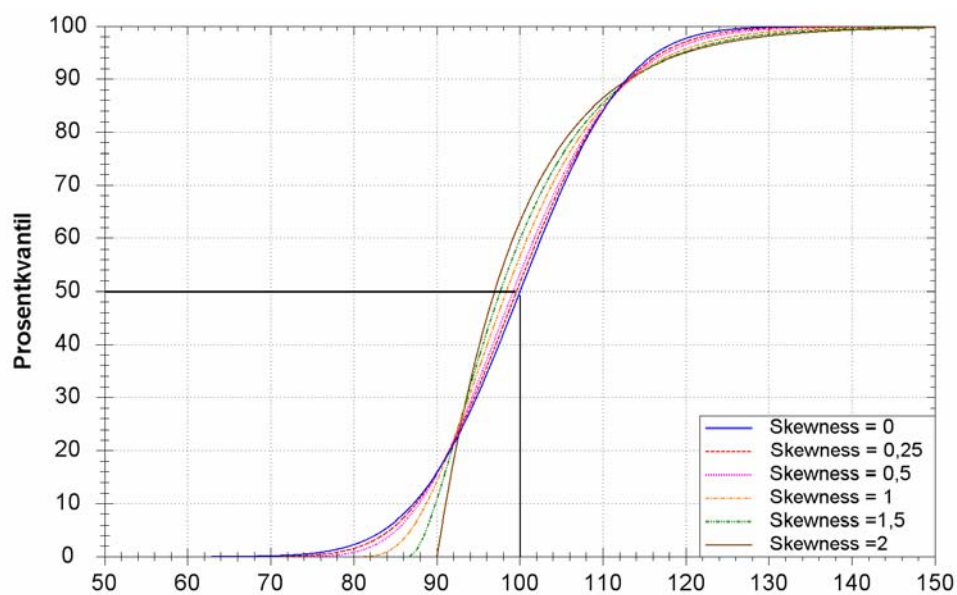
Figur 4-13 *Antall poster som må summeres for at vi når akseptkriteriet nær-normal-nok, som funksjon av skewness. (Se tabell 4.1)*

Figuren viser at selv med med en sum av ekstremt skjeve fordelinger (skewness = 2, se figur 4-8), er det nok med 20 poster for å få en tilstrekkelig god tilnærming til normalfordelingen.

Figurene 4-14 og 4-15 er en samlet fremstilling av de parvise sammenlikningene som er gjort i figurene 4-8 - 4-12. Husk at alle kurvene fremstiller fordelinger med samme forventningsverdi og samme standardavvik. Figur 4-15 viser da tydelig at det er bare i normalfordelingen at forventet og P50 faller sammen. I alle høyreskjeve klokkekurver vil forventningsverdien være høyere enn P50.



Figur 4-14 Samleoppstilling av tetthetsfunksjonene av fordelingene vist i figurer 4-8 - 4-12.



Figur 4-15 Samleoppstilling av S-kurvene fra figurer 4-8 - 4-12.

Tabell 4.1 har en kvantitativ sammenstilling av de sammenlikningene som er gjort i figurene 4-8 til 4-13. Vi ser at fordelingen som er vist i figur 4-11 hvor  $\alpha = 16$  faktisk allerede fyller akseptkravet med bare én post.

Tabell 4.1 *Kvantitativ fremstilling av skewness-betraktninger*

E(X)	Skewness	Kurtosis	$\alpha$	$\beta$	50%	Avvik med én post	Antall poster i sum for å oppnå akseptkravet
100	0,00	3,00	Uendelig	$\beta \rightarrow 0$	100,00	0,00%	normalfordelt
100	0,25	3,09	64	1,25	99,58	0,42%	1
100	0,50	3,38	16	2,5	99,17	0,83%	1
100	1,00	4,50	4	5	98,36	1,64%	4
100	1,50	6,38	1,78	7,5	97,60	2,40%	9
100	2,00	9,00	1	10	96,93	3,07%	16

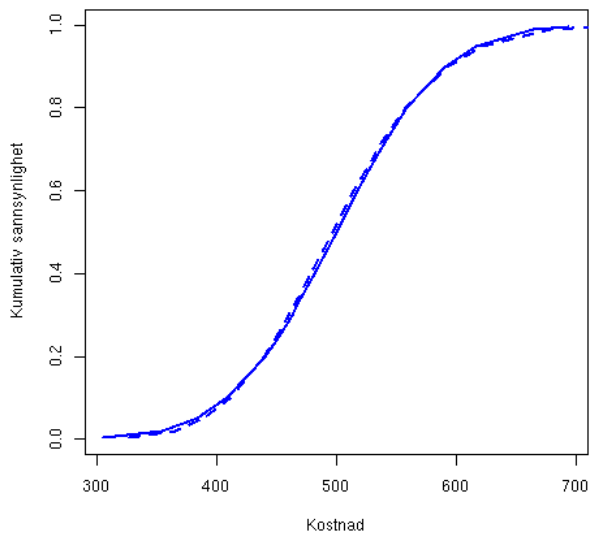
Konklusjonen så langt er at når det gjelder sum av like poster, og så lenge de er statistisk uavhengige, så oppnås tilstrekkelig grad av "normalitet" ved i størrelsesorden 10 poster. Dette gjelder selv om den enkelte post har betydelig skjevhet.

Hittil har vi gjort sammenlikninger mot summer av poster med svært skjeve sannsynlighetsfordelinger. Hva skjer hvis man gjør de samme betraktningene med poster med fordelinger mer i samsvar med de hyppigst forekommende fra undersøkelsen vist i figur 4-3?

Figuren viser at midlere skjevhetsforhold er ca. 1,3. Dette er et middel av alle poster uavhengig av hvor store de er. Vi vet imidlertid at noen få, men store poster har et skjevhetsforhold som er atskillig større enn dette, slik at et vektet middel av skjevhetsforholdet antakelig ville ligge opp mot 2,0. En gammafordeling med  $\alpha = 10$  har et skjevhetsforhold på ca. 1,9, og vi velger å la den representere de vanligste fordelingene fra praksis.

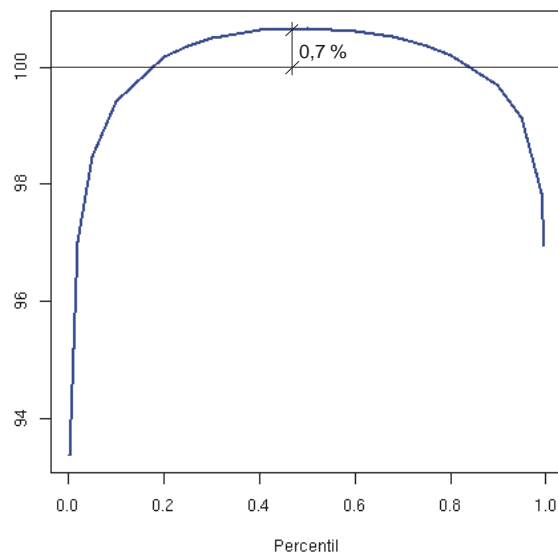
Det etterfølgende er hentet fra et arbeid utført av Håvard Hegre, 4.års student ved Institutt for matematiske fag, under veiledning førsteamanuensis Mette Langaas fra samme institutt.

Figurene 4-16 til 4-23 viser vekselvis parvis sammenlikning mellom sumkurvene for sum av poster som hver har en gammafordeling med  $\alpha = 10$  og normalfordelingen, og differansen mellom de samme fordelingene for hver percentil. Den heltrukne linjen i de kumulative fordelingene viser 100% sammenfall med normalfordelingen. I figurene 4-17, 4-19, 4-21 og 4-23 vises forholdet mellom normalfordelingen etter sentralgrenseteoremet og gammafordelingen (CLT/Gamma). Den rette linjen representerer 100% sammenfall med normalfordelingen. Sammenlikningene er gjort for et stigende antall poster.



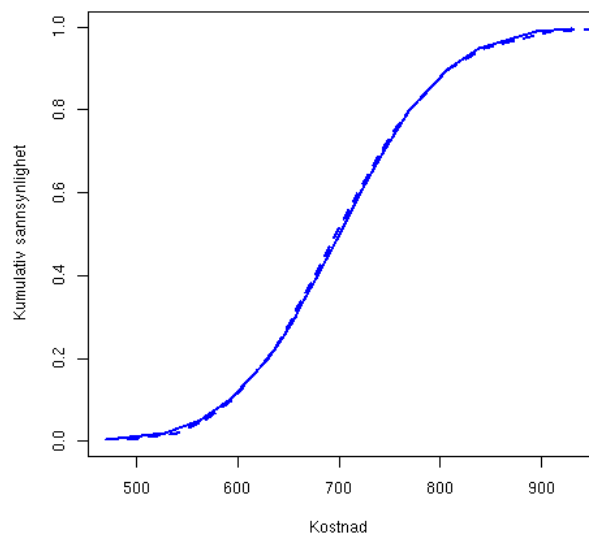
Figur 4-16 *Sum av 5 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling*

Figur 4-16 og 4-17 viser resultatet av en sum av 5 poster (den stiplede kurven) sammenliknet mot normalfordelingen (den heltrukne kurven). Vi ser at tilnærmingen er god, og at det allerede er en differanse for P50 på bare 0,7%, som er helt i nærheten av det akseptkriteriet vi definerte.

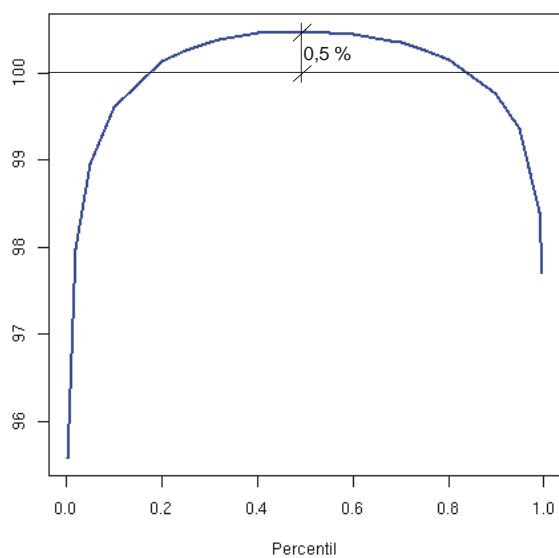


Figur 4-17 *Differansen mellom sum av 5 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling for hver percentil*

Figuren viser at tilnærmingen til normalfordelingen er stor i de midtre deler av tetthetskurven, men avstanden øker i begge ender.



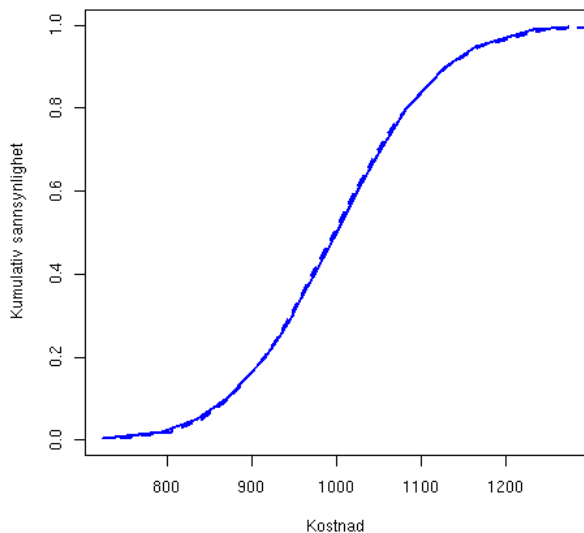
Figur 4-18 *Sum av 7 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling*



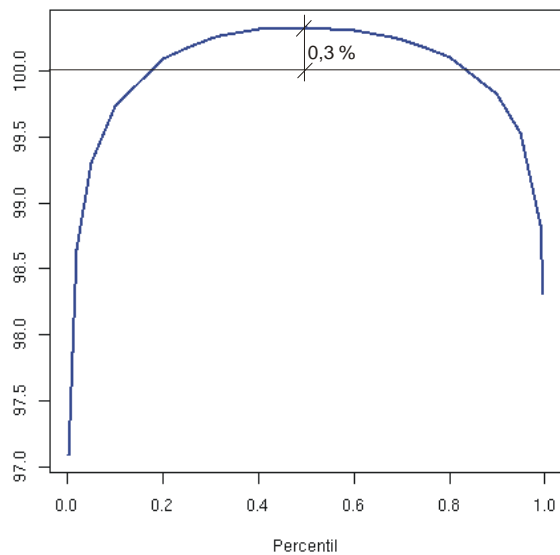
Figur 4-19 *Differansen mellom sum av 7 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling for hver percentil*

Figur 4-19 viser at en sum av 7 typiske poster gir en fordeling hvor forskjellen fra normalfordelingen på P50 er 0,5%, og at den tilsvarende forskjellen på P1 er ca. 5%. (Forskjellen

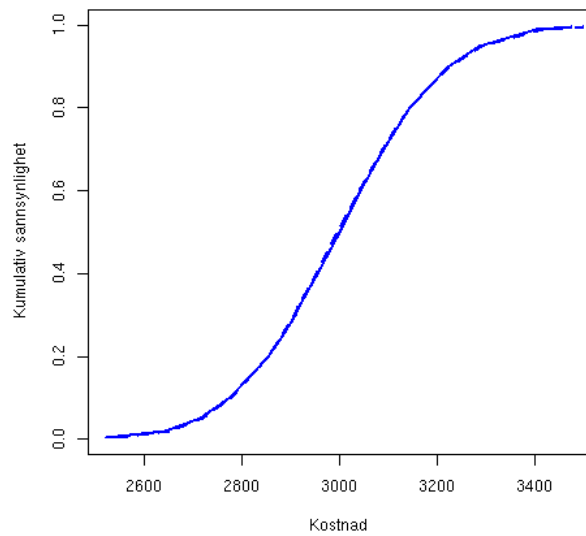
øker på mot uendelig når vi nærmer oss  $P_0$ , men denne delen av kurven er uinteressant i alle praktiske sammenhenger.)



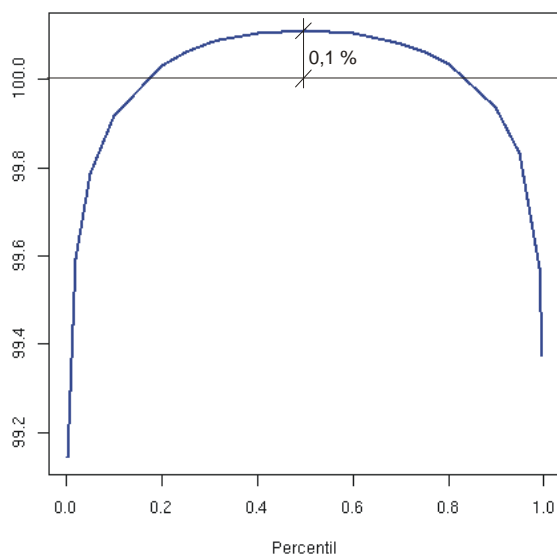
Figur 4-20 Sum av 10 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling



Figur 4-21 Differansen mellom sum av 10 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling for hver percentil



Figur 4-22 *Sum av 30 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling*



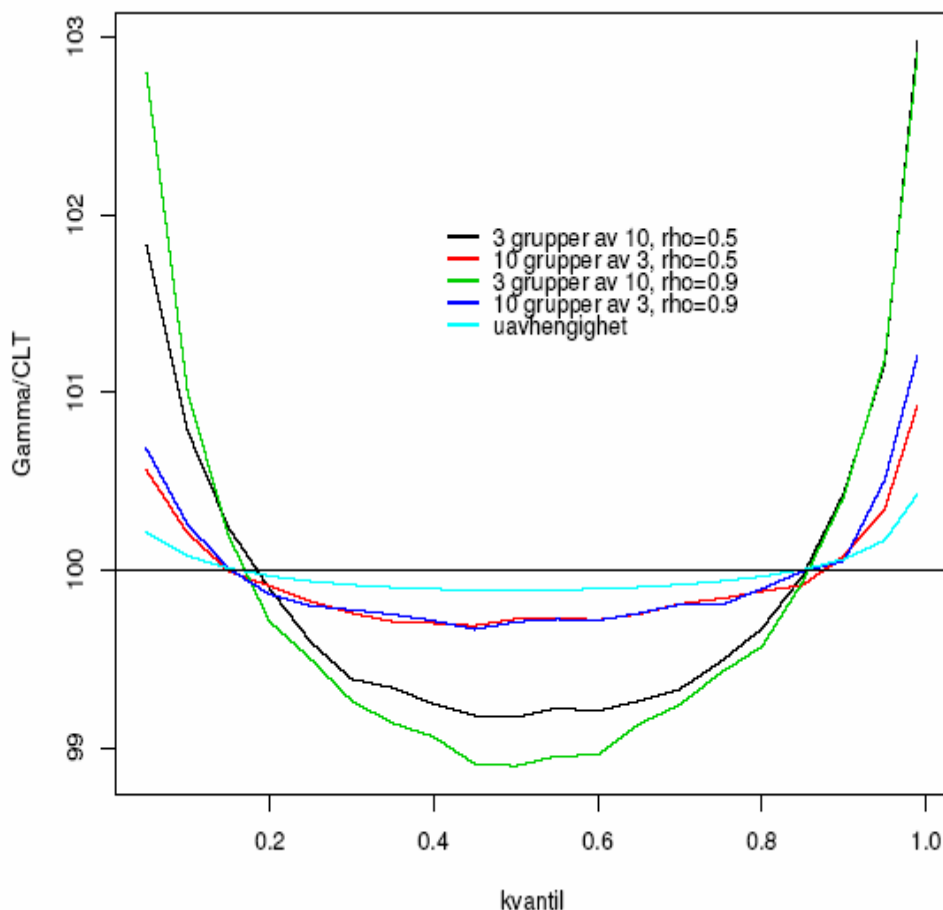
Figur 4-23 *Differansen mellom sum av 30 gammafordelte poster med  $\alpha = 10$  og normalfordeling for hver percentil*

Konklusjonen fra Hegres arbeid er at når det gjelder sum av like poster som hver for seg har en skjevhet noenlunde lik det det praksis viser, så oppnås tilstrekkelig nærhet til normalfordelingen allerede ved 5 poster.

## 4.6 Virkning av korrelasjon

Til slutt skal vi se på normaltilnærmingen og virkningen av korrelasjon.

Figur 4-24 viser sammenstillingen av parvise sammenlikninger mellom normalfordelingen og sum av poster som er gruppevis korrelerte, og i tillegg én sum av uavhengige poster. De enkelte postene er gammafordelt med  $\alpha = 10$ .



Figur 4-24 Sammenstilling av sum av poster som har gruppevis korrelasjoner og normalfordelingen

Denne undersøkelsen viser at når det gjelder normaltilnærming så betyr antall grupper mer enn grad av uavhengighet. Serien med uavhengige poster gir naturlig nok best normaltilnærming (nærmest 100 %-linjen). Nest best ut kommer de to seriene med 10 grupper à 3 poster. Vi ser at når antall grupper blir så høyt som 10, så betyr det lite om postene i gruppene har en korrelasjonskoeffisient på 0,5 eller 0,9. Minst normaltilnærming får vi når det er få grupper som summeres.



## 4.7 Produktkalkyler

Hittil har vi snakket om hvordan normaltilnærmingen arter seg med økende antall poster i en sum. I praksis ser vi at en del kostnadstall fremkommer etter produktkalkyler. Eksempelvis kan en post settes sammen av usikre mengder som multipliseres med en usikker enhetskostnad. Det kan også ofte være snakk om usikre påslagsfaktorer, enten som påslag på enkeltposter eller på en gruppe elementer, eller sågar på hele kalkylen. Eksempel på det siste er kontekstuelle påvirkninger som gjerne kvantifiseres som et prosentvis tillegg eller som en korreksjonsfaktor.

Korreksjoner bringes altså inn i kalkylen på en av to måter. Enten regnes korreksjonen ut for seg og etterpå summeres inn, eller så blir påslaget lagt til allerede i multiplikasjonen.

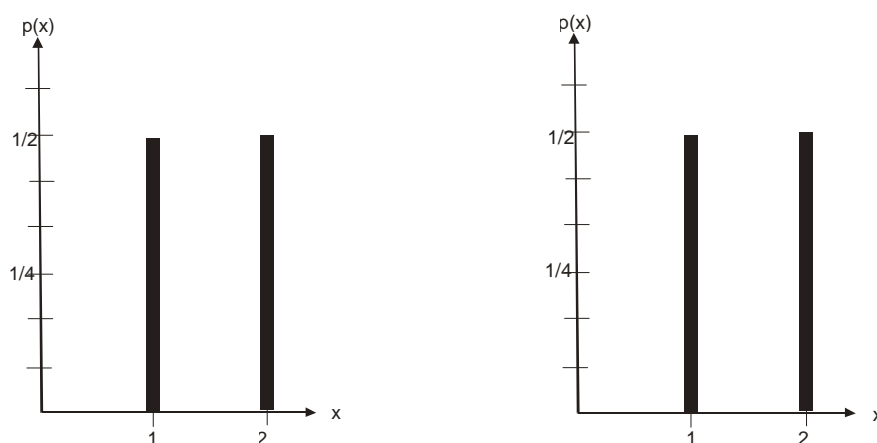
### Eksempel:

*5% påslag på en kalkulert sum på 1000 gir  $1000 \cdot 0,05 = 50$ , som legges til kalkylen, eller regnes direkte inn med en påslagsfaktor;  $1000 \cdot 1,05 = 1050$ .*

I det første alternativet vil påslaget fremstå lik en post som summeres inn sammen med mange andre. Dette har vi sett på tidligere, og konkludert med at selv om påslaget sannsynlighetsfordeling er svært skjev, og at det ligger i sakens natur at virkningen er sterkt korrelert med de postene det er påslag på, så vil et økende antall poster i sum bidra til at fordelingen kommer nærmere en normalfordeling.

Alternativet med påslagsfaktor skal vi se litt nærmere på. Å teoretisere rundt et forhold som har så mange varianter forekommer oss å være heller unyttig, så vi vil heller forsøke å vise hvordan multiplikasjon av hver for seg usikre faktorer virker på normaltilnærmingen ved å foreta noen enkle regneeksempler, og deretter vise resultatet fra en simulering med dataprogram.

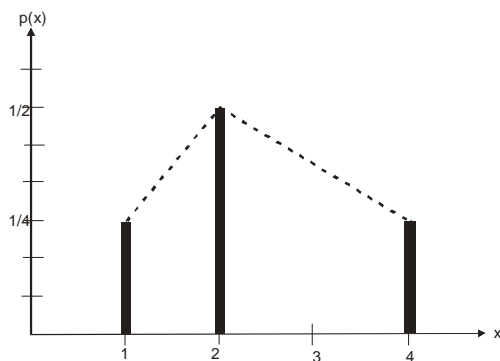
For enkelthets skyld vil regneeksemplene være basert på diskrete sannsynlighetsfordelinger, og starter med en multiplikasjon av to like fordelinger som vist i figur 4-25.



Figur 4-25 To like faktorer med mulige utfall, 1 eller 2, hver med sannsynlighet 0,5.

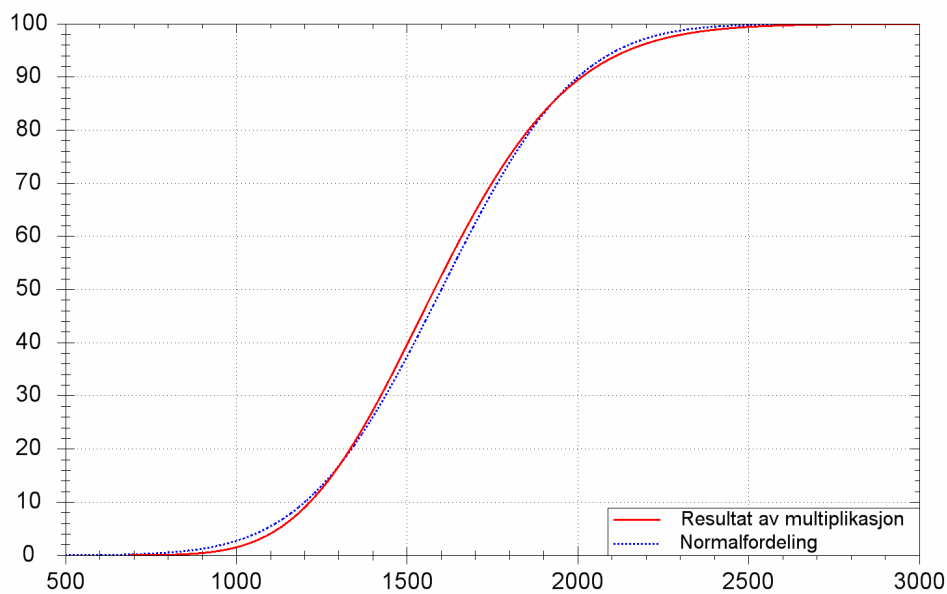
Fordelingene er som vi ser symmetriske om forventningsverdien 1,5, og har derfor en skewness lik 0.

Resultatet av multiplikasjonen er vist i figur 4-26. Skewness har nå økt til ca. 0,7



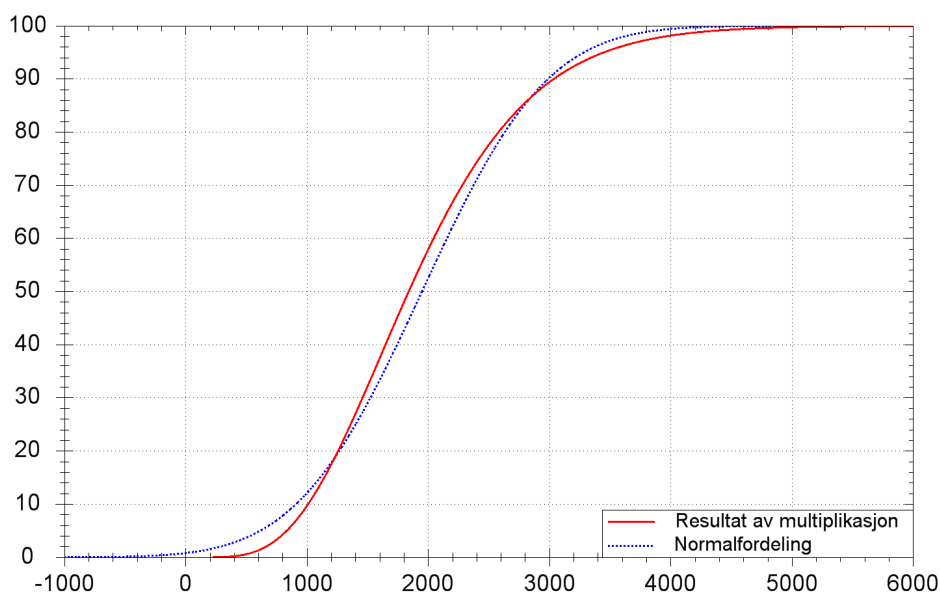
Figur 4-26 Produktet av to faktorer som begge har en fordeling som vist i figur 25.

Det som kanskje forundrer mange er at vi multipliserer sammen to symmetriske fordelinger og får et usymmetrisk produkt. I figur 4-27 har vi gjort en datasimulering av to normalfordelinger, og ser også her at produktet har en fordeling som er noe forskjellig fra normalfordelingen.



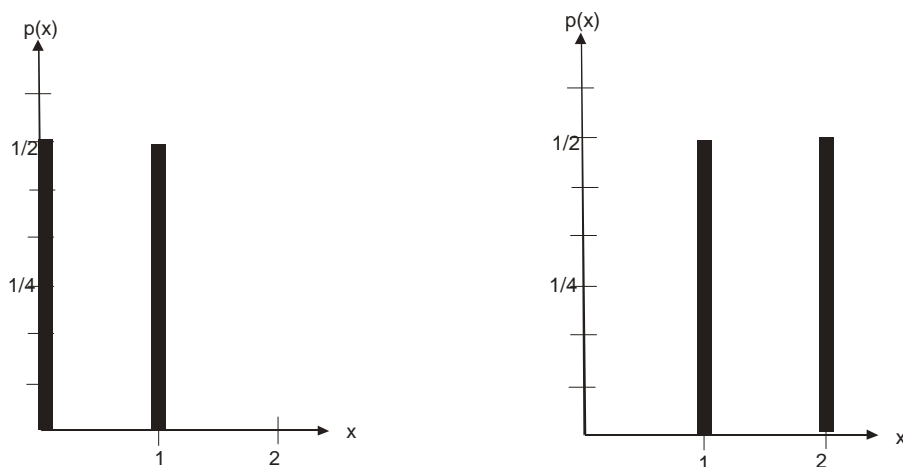
Figur 4-27 Multiplikasjon av to normalfordelinger hver med trippelanslag 30-40-50 sammenliknet med normalfordeling

Vi bytter ut de normalfordelte faktorene omtalt i figur 4-27 med to faktorer som er høyre-skjeve. Skjevhetsforholdet er 2,0, noe som er innefor rammen av hva vi vil betegne som vanlig skjevhet. Resultatet er vist i figur 4-28, hvor produktets fordeling er den heltrukne linjen, mens den stiplede linjen er normalfordeling med samme forventningsverdi og standardavvik.



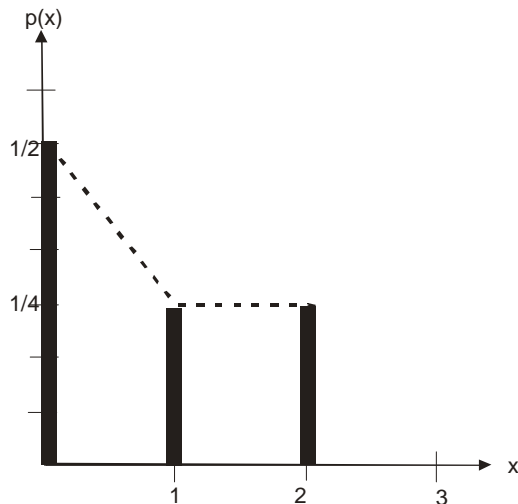
Figur 4-28 *Multiplikasjon av to gammafordelinger hver med trippelanslag 30-40-60 sammenliknet med normalfordeling*

Vi gjentar multiplikasjonen med to diskrete fordelinger som har samme form. Forskjellen fra figur 4-25 er at vi nå har flyttet en av fordelingene en enhet til venstre, slik at 0 er et av utfallene. Fortsatt er skewness lik 0 for begge fordelingene. Se figur 4-27.



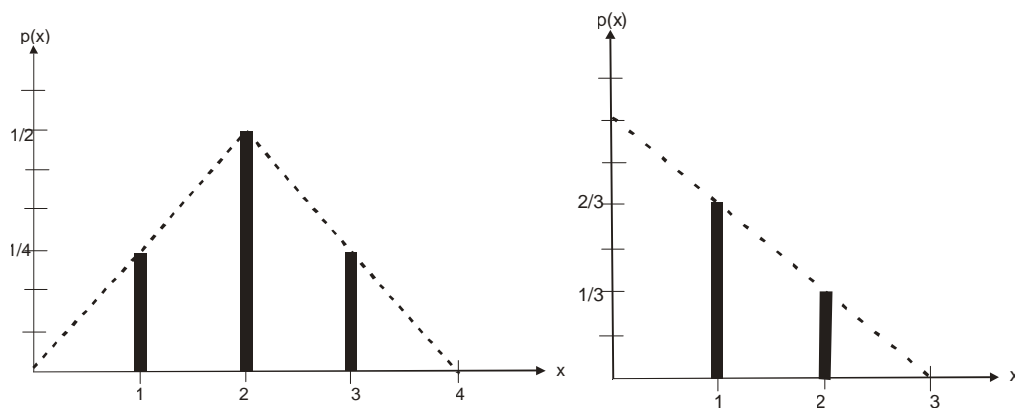
Figur 4-29 *To faktorer med mulige utfall henholdsvis. 0 eller 1 og 1 eller 2.*

Resultatet fra multiplikasjonen av fordelingene i figur 4-29 ga resultat som vist i figur 4-30. Skewness har her økt til ca. 0,5.



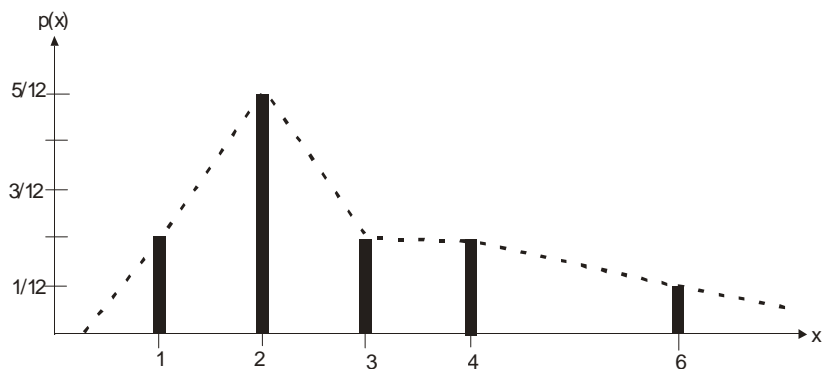
Figur 4-30 Produktet av to faktorer som har fordeling som vist i figur 4-29.

Det siste “håndregnede” eksemplet er to faktorer med diskret fordeling som vist i figur 4-31. Den ene, figur a, er symmetrisk om 2, og har derved en skewness lik 0. Figur b har en skewness på ca. 0,7. Disse to faktorene skal så multipliseres.



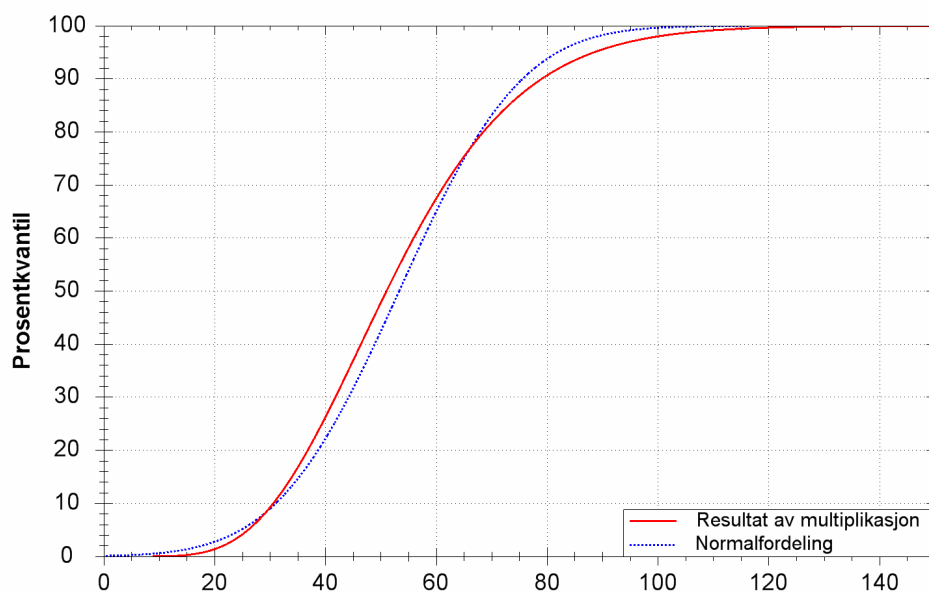
Figur 4-31 To faktorer med mulige utfall henholdsvis 1 eller 2 eller 3, og 1 eller 2.

Resultatet fra denne multiplikasjonen er vist i figur 32. Skewness er ca. 1,0. Forventningsverdien er ca. 2,7 og standardavviket er ca. 1,4; altså over 50%.



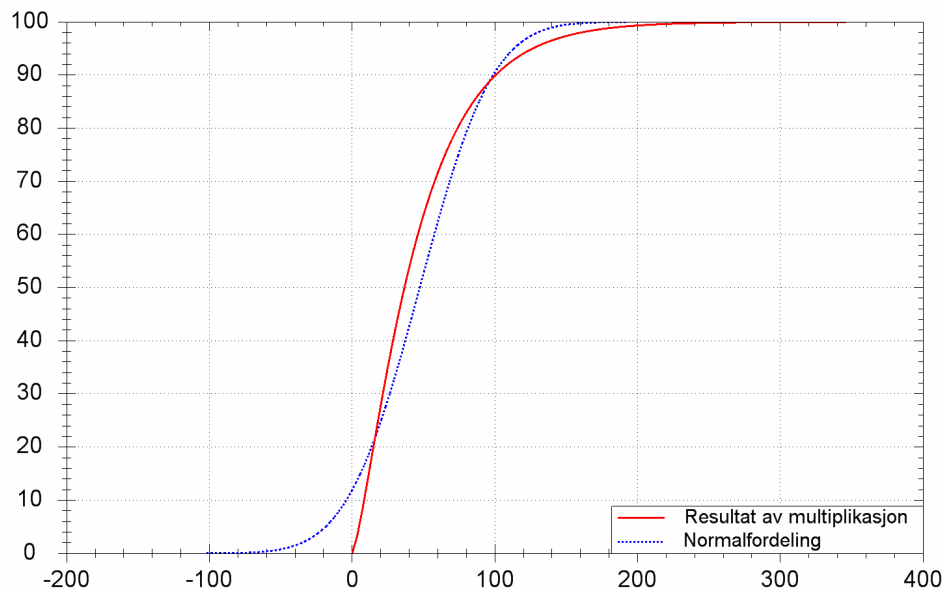
Figur 4-32 *Produktet av to faktorer som har fordeling som vist i figur 31.*

En noenlunde tilsvarende kombinasjon av kontinuerlige fordelinger, gammafordelinger med trippelanslag henholdsvis 30 - 40 - 60 og 1 - 1 - 1,5, er multiplisert i simuleringprogrammet. Resultatet er vist i figur 4-33.



Figur 4-33 *Multiplikasjon av to gammafordelinger hver med trippelanslag henholdsvis 30-40-60 og 1-1-1,5 er sammenliknet med normalfordeling*

Til slutt viser vi resultatet fra en simulering hvor en normalfordeling med trippelanslag 5 - 10 - 15 er multiplisert med en eksponentialfordeling med trippelanslag 1 - 1 - 10. Sannsynlighetsfordelingen til dette produktet er sammenliknet med normalfordelingen i figur 4-34.



Figur 4-34 *Multiplikasjon av normalfordeling og eksponentialfordeling sammenliknet med normalfordeling*

Differansen mellom kurvene på P50 er ca. 12 enheter, mens standardavviket er på drøyt 40; dvs. differansen er knapt 30% av standardavviket.

Som vi ser av disse eksemplene, både de håndregnede og de simulerte, er skjevhet i produktet fra en multiplikasjon med usikre størrelser større enn skjevheten i den faktor med høyest skjevhet; altså *multiplikasjon forsterker skjevheten*. Dette gjelder generelt for multiplikasjon av faktorer som begge hver for seg har en sannsynlighetsfordeling som enten er symmetrisk eller høyreskjev.

## 4.8 Oppsummering og konklusjoner om normaltilnærming

Ved ren summasjon av uavhengige poster får vi god tilnærming til normalfordelingen med 15 - 20 poster, selv om fordelingen til den enkelte post er nærmest ekstrem skjev, og selv om skjevheten virker samme veg for alle postene. Ved mer "normalt" skjeve poster har vi god tilnærming allerede med 5 - 6 poster.

Gruppevis korrelasjon gjør at normaltilnærmingen går saktere, men når antall grupper passerer 3 - 4, og sannsynlighetsfordelingen for den enkelte post ligger i det normale området, avtar virkningen av korrelasjonen raskt.

Der det kan være grunn til å være bevisst på bruken av normalfordelingen som et substitutt for den virkelige fordelingen, er der hvor det synes riktig å la resultatet fremkomme som produkt av multiplikasjon med påslagsfaktorer, og disse påslagsfaktorene virker på "alt". Hvis disse påslagsfaktorene er svært skjevfordelte, og i tillegg har høyt relativt standardavvik, kan de i enkelttilfeller gjøre sluttresultatet mer skjevfordelt enn det vi anser for akseptabelt for bruk av normalfordelingen.

Hovedkonklusjonen er at vi i nesten alle praktiske sammenhenger trygt kan bruke normalfordelingen som substitutt for den virkelige sannsynlighetsfordelingen til totalresultatet fra kostnads kalkyler. Det finnes noen unntak knyttet til kalkyler med svært få poster, kalkyler hvor det muligens finnes helt særegne sammenhenger mellom postene, og der hvor multiplikasjoner av usikre faktorer er et dominerende element i kalkylen.

Med hensyn til ovennevnte unntak er det imidlertid viktig å merke seg at selv om den virkelige fordelingen ikke er normalfordelt så vil den beregnede forventningsverdien være riktig, den vil bare ikke ligge på P50. Dette betyr at der vi kan gjøre feil ved å anta normalfordeling er når vi skal finne bestemte kvantilverdier.

Når kalkylen er satt sammen av høyreskjeve verdier, som er det mest vanlige, vil den virkelige sannsynlighetskurven for sluttresultatet krysse normalfordelingskurven to steder (se figur 4-28). Det ene krysningspunktet ligger rundt P20, og det andre i området P80 - P90. Mellom disse krysningspunktene vil vi overestimere noe ved å substituere med normalfordelingen, mest på midten, mens en verdi som for eksempel P85, som er mye brukt, vil være praktisk talt riktig nesten uansett virkelig fordeling. Verdier som P30 vil være svakt overestimert, mens P90 kan være fra nesten helt riktig til betydelig underestimert.

I det ovennevnte har vi forutsatt at resultatet fra beregningen gir den riktige fordelingsfunksjonen. Det som imidlertid er aller viktigst å ta med seg er at den riktige tilnærmingen er den som beskriver virkeligheten best. Hvis virkeligheten er normalfordelt vil et normalfordelt resultat være det beste, uansett differansen fra vår beregnede kurve. Det lar seg ikke vise, men det er slett ingen umulighet at vår antakelse om stor normalitet i sluttresultatet er et viktig og riktig grep for å korrigere for feil i analysemodellen, og således bidrar til å håndtere den konseptuelle usikkerheten i analysen.

## 5. Detaljeringsgrad i usikkerhetsanalyser

Et tema det har vært debatt omkring er hvilken detaljeringsgrad som er mest hensiktsmessig i en kalkyle med usikkerhetsanalyse. Det er både fordeler og ulemper med detaljering av kostnadspostene ved modellering for en usikkerhetsanalyse. Det viktigste er at en velger et detaljeringsnivå som gjenspeiler prosjektets modningsgrad. For et prosjekt i startfasen med svært stor usikkerhet i forutsetningene, og hvor behovet egentlig bare er pålitelig oversikt over noen hoveddata, vil det for eksempel være naturlig å foreta en grov analyse, med få detaljer.

I praksis viser det seg at detaljeringen i analysen er styrt av forhold som noen ganger har, og mange ganger ikke har, tilknytning til hva som er optimalt for å få en god analyse. Eksempler på begrunnelser for oppdeling kan være:

- *Tradisjoner.*  
Innenfor de fleste virksomheter finnes standardiserte oppdelinger av kostnadsbærere, som for eksempel bygningsdelstabellen eller Vegvesenets prosesskode, og det kan ha innarbeidet seg tradisjoner for å kalkulere på basis av disse på et gitt detaljnivå.
- *Hva som føles naturlig der og da.*  
Eksempler her er geografiske oppdelinger som for eksempel tunnel A, tunnel B, bru 1, bru 2, bru 3 osv.
- *Å få frem det man er interessert i.*  
Resultatet her blir også fort en geografisk eller stedsmessig oppdeling, parseller, delprosjekter, eller en oppdeling på prosesser som man senere ønsker å følge opp.
- *Tilpasset de elementene vi har erfaringer knyttet til.*  
Kan være helt nødvendig for å få frem pålitelige tall, mens relevansen i det man får frem kommer i annen rekke.
- *Tilpasset hvordan kostnadene skal følges opp.*
- *Hvordan resultatet ønskes presentert.*

Et av hovedprinsippene for oppdeling eller detaljering av en kalkyle med usikkerhet er at den skal være mest mulig hensiktsmessig i forhold til formålet med analysen. De viktigste spørsmålene er: Hva skal analyseresultatet brukes til? Har vi en oppdeling som gir grunnlag for å gi svar på det vi er bedt om? Har vi en oppdeling som passer til den kunnskapen ressurspersonene sitter inne med? Vil analysen på dette grunnlaget bidra til et relevant og pålitelig beslutningsgrunnlag?

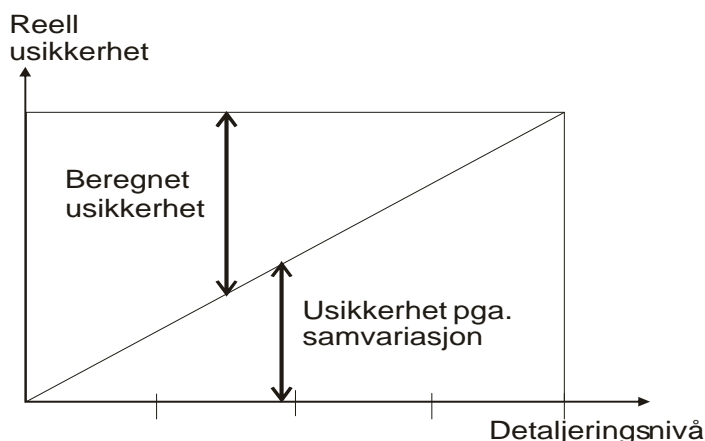
Et annet hovedprinsipp er at det ikke skal detaljeres mer enn nødvendig. Av og til kan man stå i fare for å detaljere så mye at man roter seg bort i detaljene og mister oversikten over det store bildet. Ofte brukes mye tid på å detaljere enkelte estimatsposter, mens man “glemmer”



å behandle godt nok de mest usikre faktorene som påvirker prosjektet; konjunkturer, miljøspørsmål, værforhold og ellers andre indre og ytre påvirkningsfaktorer. Hovedprinsippet innebærer at det er viktig å fokusere på de rette tingene.

En post som i utgangspunktet har stor usikkerhet vil kunne “skjules” i en prioritetsliste ved at den deles opp i flere elementer. De enkelte underpostenes usikkerhet vil være mindre i forhold til andre poster, og de havner lenger nede på listen. Å dele opp elementer i små biter kan altså bidra til å skjule usikkerheter for en beslutningstaker. Det er derfor viktig å være klar over disse effektene når man velger detaljeringsgrad for kalkylen, og når man senere presenterer resultatene.

Vi har tidligere diskutert forholdet mellom ukritisk detaljering og økt samvariasjon, men finner det riktig å minne om det også her. Figur 5-1 viser hva som ofte skjer. Økt detaljering minker beregnet usikkerhet, mens den reelle usikkerheten jo ikke er særlig påvirket av våre beregninger, og følgelig holder seg like høy. Det som skjer er at reduksjonen i beregnet usikkerhet blir erstattet av en økt skjult usikkerhet grunnet manglende korrelasjonshåndtering.



**Figur 5-1** *Virkning av ukritisk detaljering (beregnet usikkerhet minsker, mens usikkerhet pga. korrelasjon øker like mye).*

Med tanke på å kunne unngå eller redusere korrelasjon mellom postene har det etterhvert blitt stor forståelse for at elementer med samme kostnadsårsak, så langt som mulig, bør holdes sammen i analysen. Dette er viktig også for å hindre at nødvendige tiltak blir oversett fordi årsakene ikke blir tydelige nok når de er spredd utover.

min k ge

I tabell 5.1 er det anført noen argumenter for detaljering og for grov oppdeling.

**Tabell 5.1** *Detaljering av kostnadsposter - argumenter for og imot*

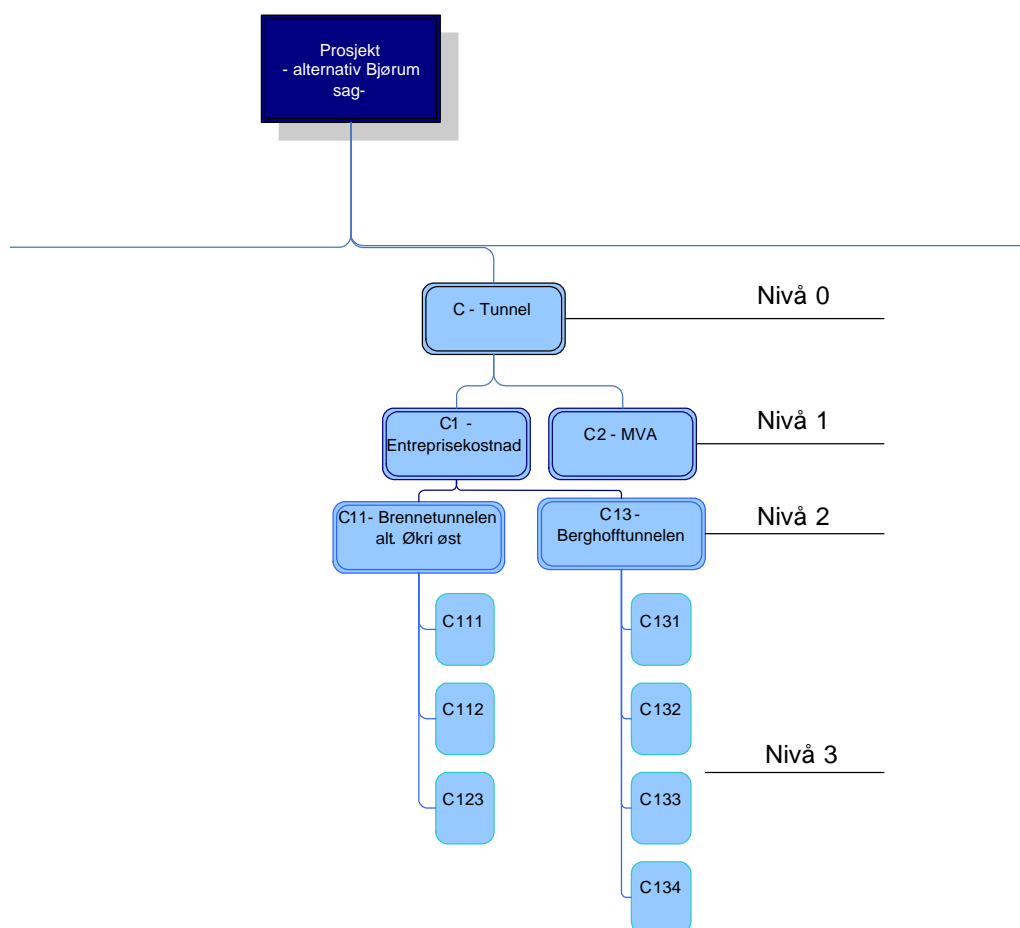
Argumenter for detaljert oppdeling	Argumenter for grov oppdeling
Behov for spesifikke resultater. Dette forutsetter at detaljkunnskapene er til stede.	Unngå å miste oversikten og glemme ut poster/faktorer
Ned på mengde og kostnads -nivå; Kan ofte være mer konkret og gjenkjennelig, og derfor lettere å estimere riktig, isolert sett.	Unngå å regne bort usikkerheten statistisk. Etter hvert som detaljeringen (og korrelasjonene som ikke blir håndtert) øker, forsvinner usikkerheten tilsynelatende som dugg for solen.
Fjerne tillegg for usikkerhet som er innbakt i grove erfaringstall, så det ikke blir tatt med to ganger. Dette er lettest å gjøre med en detaljering som gjør det mulig å skille ut de elementene usikkerheten er knyttet til eller virker på	Ingen hensikt i å gå ned i detaljene når det fortsatt gjenstår stor usikkerhet i andre forhold. For eksempel mange valg av løsninger i prosjektet fortsatt gjenstår
Unngå å usynliggjøre årsak til usikkerhet for beslutningstaker. Noen ganger kan oppdelingen være så grov at usikkerheten har sin basis i en rekke årsaker. Ofte kan det være viktig å få frem enkeltårsakene.	Unngå å usynliggjøre usikkerhet for beslutningstaker. Her snakker vi om den usikkerheten som burde vært fremhevet, men som forsvinner i detaljeringen.
	Arbeidsmengden. Analysene har gjerne en streng tidsramme som må utnyttes best mulig. Detaljering er tidkrevende.

## 5.1 Detaljeringsgrad i presentasjon av resultatene

En usikkerhetsanalyse kan ha flere hensikter. En av disse er å være underlag for beslutninger. Selv om vi har fått med oss korrelasjon, slik at usikkerheten rent matematisk er tatt vare på, kan den “skjules” i resultatene. For eksempel vil et element som er delt opp i mange små deler ikke flagges som en stor usikkerhet fra prioritetslisten.

I det etterfølgende skal vi, gjennom et eksempel, diskutere noen strategier for oppdeling i usikkerhetsanalysen.

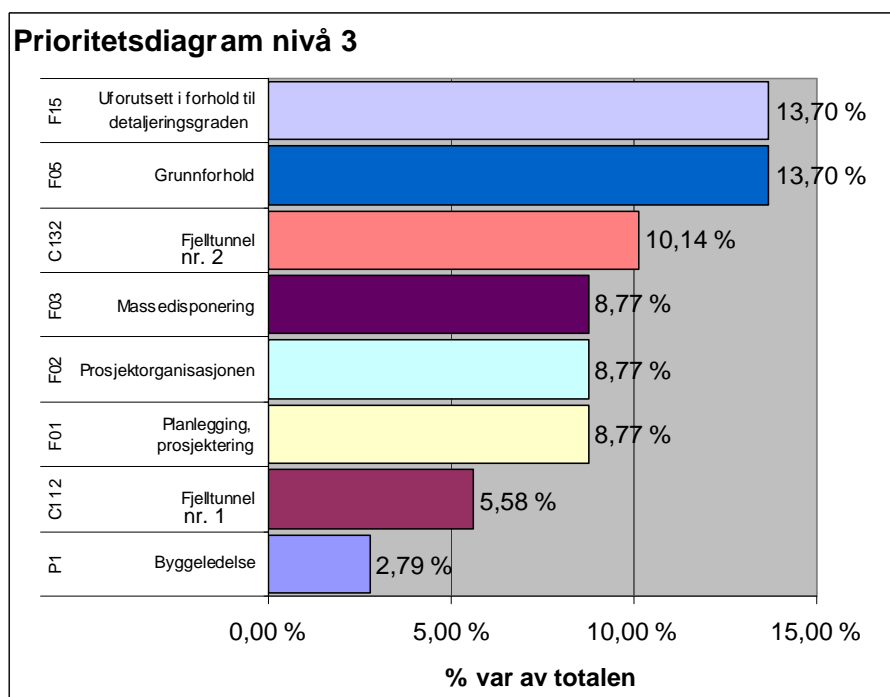
Kalkylen for prosjektet er i utgangspunktet delt opp fra et nivå 0 til et nivå 3 som vist i figur 5-2.



Figur 5-2 *Illustrasjon av oppdelingsnivåene i kalkylen.*

I dette kapittelet presenteres en del prioritetslister over usikkerheter i caseprosjektet. De usikre postene i kalkylen er rangert etter størrelsen på spredningen (variansen), og usikkerhetsposter som utgjør mindre enn 1% av totalvariansen er utelatt.

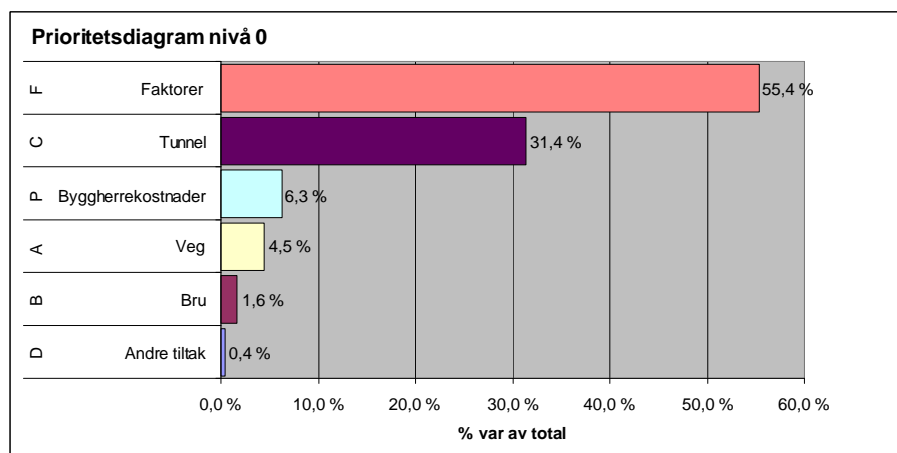
Dersom man lager en prioritetsliste over usikkerheter på det mest detaljerte nivået; nivå 3, kan den se ut som i figur 5-3.



**Figur 5-3** *Prioritetsdiagram for poster på nivå 3. Usikkerheten i posten C-tunneler blir lite synlig ved at den er stykket opp i underposter*

I dette diagrammet ser man at postene som bidrar med mest usikkerhet er korreksjonsposten F15 - Uforutsett i forhold til detaljeringsgrad (dette forholdet er senere omdøpt til uspesifisert i analysene hos Statens Vegvesen), F05 - Grunnforhold og Tunnel nr. 2 (C132). Lenger ned i listen, først på plass nummer 7, kommer Tunnel nr. 1 (C112). Tiltak mot usikkerheten som er forbundet med den ene tunnelen vil som oftest være de samme som for den andre, og det er dermed egentlig ulogisk å holde disse separert i et prioritetsdiagram. Samleposten "tunnel" ville i dette tilfellet bli den med størst usikkerhet (nesten 16%). Det er dessuten ikke alle grenene av kalkylen som detaljeres like langt ned, og dermed vil de grove postene (alle F og P) fremstå som mer usikre enn de andre. Dette vil kunne gi et uriktig bilde av virkeligheten.

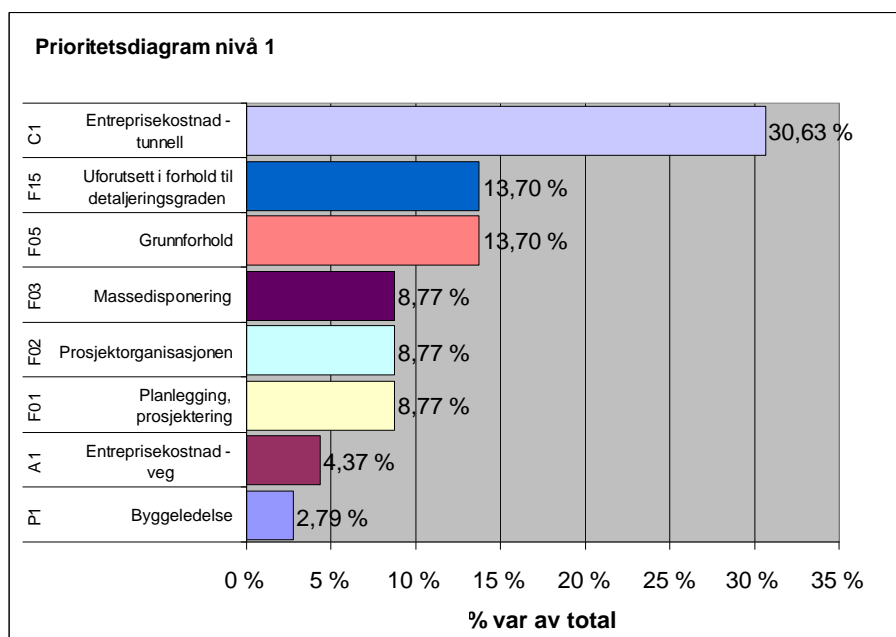
På samme måte vil det kunne bli galt om man velger en for grovt detaljert kalkyle, som vist i figur 5-4 som er det samme eksemplet på nivå 0. Dette er en litt for grov oppdeling som gjør at prioritetslisten også her blir lite informativ. Posten F-faktorer fremstår som den største, men den består egentlig av mange ulike usikkerhetsmomenter som har lite eller ingenting med hverandre å gjøre. Dette er et eksempel på en analyse som ikke er fullført etter kravet om å gi et godt beslutnings- og styringsgrunnlag



Figur 5-4 *Prioritetsliste nivå 0*

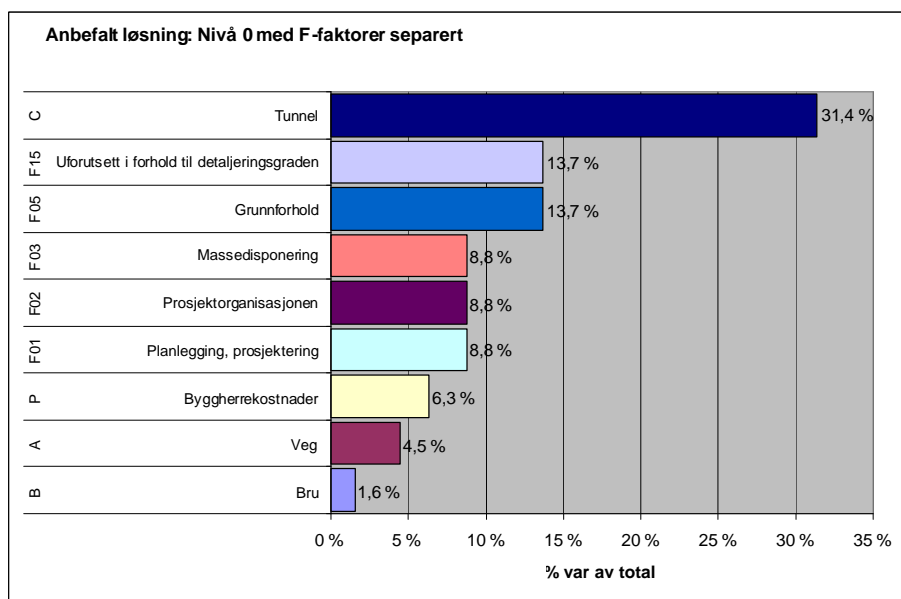
En presentasjon ved nivå 1 vil i dette tilfellet gi et noe riktigere bilde (figur 5-5). Her er C1-tunnelentreprise den mest usikre posten. I forhold til nivå 3 er nå fjelltunnelene, portalene, installasjonene etc. her slått sammen til en post. Ved nivå 0 ble den overskygget av alle faktorene i samlet post. En ser nå at postene som så størst ut i figur 5-3 er svært mye mindre i forhold til den samlede tunnelposten C1, og at det egentlig er her det er viktig å sette inn innsats.

Dersom en splitter opp for mye, vil elementene kunne fremstå som uviktige hver for seg i presentasjon av resultatene. Oppdeling som vist i figur 5-3 er et eksempel på dårlig modellering av analyseobjektet. Tunnelene, som er svært like, vil ha mange av de samme usikkerhetene. En oppsplitting vil både gjøre at vi regner bort usikkerheten ved å ikke ta hensyn til korrelasjonen, og gjøre at selv den usikkerheten vi får beregnet blir mindre synlig ved at den blir delt i to.



Figur 5-5 *Prioritetsdiagram nivå 1*

I dette tilfellet vil den beste inndelingen kunne være nivå 1 som i figur 5-5, eller en kombinasjonsløsning som vist i figur 5-6; i utgangspunktet på nivå 0, men med F-faktorene splittet. Her ser man tydelig at posten C- tunneler er den som bidrar med mest usikkerhet.



Figur 5-6 *Prioritetsliste nivå 0 - med F-faktorer delt opp*

Hvis vi tar utgangspunkt i at analysen er basert på en top - down-tilnærming, kan det være aktuelt å dele opp de mest usikre postene for å få mer "håndterbare" enheter som er bedre tilpasset ressurspersonenes kunnskapsområde. Når det gjelder detaljering av den posten som står øverst på prioritetslisten i figur 5-6, er svaret ikke å dele opp slik at en tar hver tunnel for seg, men derimot å dele opp på kostnadsbærere som er felles for tunnelene. Hvis kostnadsbærerne kan knyttes til elementer som skiller på fag, er sjansen også stor for at vi kan unngå samvariasjon mellom elementene. Hvis en elementoppdeling etter fag ikke er tjenlig, må vi legge vekt på å finne en inndeling som gir minst mulig statistisk avhengighet.

## 5.2 Finnes det et optimalt antall poster?

Spørsmålet om hva som er et optimalt antall poster er ikke mulig å besvare direkte. Antallet vil være avhengig av prosjektets art, hvilken fase prosjektet befinner seg i, og hvordan analysen legges opp.

Imidlertid kan vi se på noen forhold som kan gi en pekepinn om et fornuftig antall elementer i en analyse.

- *Balanse mellom poster basert på aktiviteter og indre og ytre påvirkningsfaktorer (i Anslag kalt F-faktorer).*  
 Steen Lichtenberg hevder at antall hovedposter og antall indre og ytre påvirkningsfaktorer bør være noenlunde like stort (Lichtenberg 2000). Grunnen til dette er tosidig. Den ene grunnen er at hvis postene blir delt opp for mye vil I/Y påvirkninger fort dominere usikkerhetsbildet, og derved overskygge all annen usikkerhet. Den andre grunnen til at det er ønskelig med ballanse er at I/Y skal være med å ta vare på de kostnadsårsakene som er felles for hele eller store deler av kalkylen, og som sådan representerer en systematisk usikkerhet innenfor prosjektet. Et godt eksempel her er mulige svingninger i arbeidslønnsnivået.
- *Total usikkerhet er alltid større enn spredningen på det mest usikre elementet.*  
 De fleste indre og ytre påvirkningsfaktorer er vanskelig å detaljere ned i underforhold. Når slike "udelelige" faktorer blir de som dominerer usikkerhetsbildet er det liten hensikt i å detaljere aktivitetspostene videre.
- *Det er viktig å holde antall grensesnitt nede.*  
 Den egentlige årsaken til at mange prosjekter blir uoversiktlige med økende antall elementer er at antall grensesnitt øker. I teorien kan vi i verste fall ha  $n!$  ( $n$  fakultet) grensesnitt hvis vi har  $n$  elementer. Fakultetsfunksjonen er en av de raskest voksende funksjoner vi vet om. I praksis er det heldigvis mange forhold som reduserer antall grensesnitt og det er heller ikke alle som krever noe for å håndteres, men vi ser at potensialet for å gå seg vill kan være stort. Det største problemet med et høyt antall grensesnitt er at ting faller mellom stoler, og derfor fører til at analysen vår ikke dekker "alt".
- *Arbeidsmengden i analysen.*  
 Som vi tidligere har vært inne på må usikkerhetsanalyser som oftest gjennomføres innenfor knappe tidsrammer. Mer detaljering øker antall elementer. Hvis vi tenker oss at detaljeringen skal skje innenfor en hierarkisk struktur, noe som ofte er tilfelle, og at alle elementer skal være på samme detaljnivå, er det ikke utenkelig med en 3 - 5 dobling av antall poster for hvert nivå vi går nedover i hierarkiet. Følgen av en slik detaljering er at antall elementer som krever en vurdering øker raskt, og vi bruker opp tiden vår på forhold som har liten betydning i den store sammenhengen. I en analyse som skal gjennomføres i løpet av to dager bør antall elementer som skal få en grundig vurdering og kvantifisering i regelen ikke overstige ca. 25-30.



## 5.3 Oppsummering og konklusjoner om detaljering

Ingen standardinndelinger vil være god i alle situasjoner, uavhengig av prosjekt og fase. En god inndeling vil være ulik fra gang til gang, og det er viktig at dette vurderes ut fra hva som er mest hensiktsmessig i det aktuelle prosjektet i forhold til formålet med analysen.

En god hovedregel er at *i en analyse skal alt være med, og at det detaljeres etter behov*. Begrensningene i hvor mye vi bør detaljere er gjerne knyttet til fire forhold. De tre viktigste er; faren for å miste oversikt og at ting faller mellom stoler, faren for å skjule usikkerhet ved at den blir spredd utover, og faren for å introdusere samvariasjon som ikke blir håndtert, og at vi dermed regner bort usikkerheten. Det er ofte også klare begrensninger for detaljmengden knyttet til de tidsrammene som selve analysearbeidet er underlagt.

Når vi skal utarbeide strukturen for en analyse er det greit å ha med seg at ingen analyse er sikrere enn spredningen på den mest usikre post, og at det derfor ikke skal detaljeres mer enn nødvendig.

Analyseresultatet skal være en del av beslutningsgrunnlaget. Derfor er det viktig at det blir presentert på en måte som gir den riktige informasjon til beslutningstakeren. I den sammenheng må vi ta hensyn til at analysen kan reknes detaljert, og fremstilles grovt, men ikke omvendt.

Til slutt er det viktig å minne om at en usikkerhetsanalyse av et prosjekt bør være en fleksibel prosess innenfor noen hovedretningslinjer. Dette stiller krav til analytikerne om at de må kunne håndtere prosessen slik at de styres mot et resultat som best mulig avspeiler virkeligheten. De må også kunne gjøre en helhetsvurdering av sluttresultatet, og foreta korreksjoner som er nødvendig på grunn av svakheter i analysekonseptet.

Altså; gjør som du finner riktigst, bare du er klar over hva du gjør!

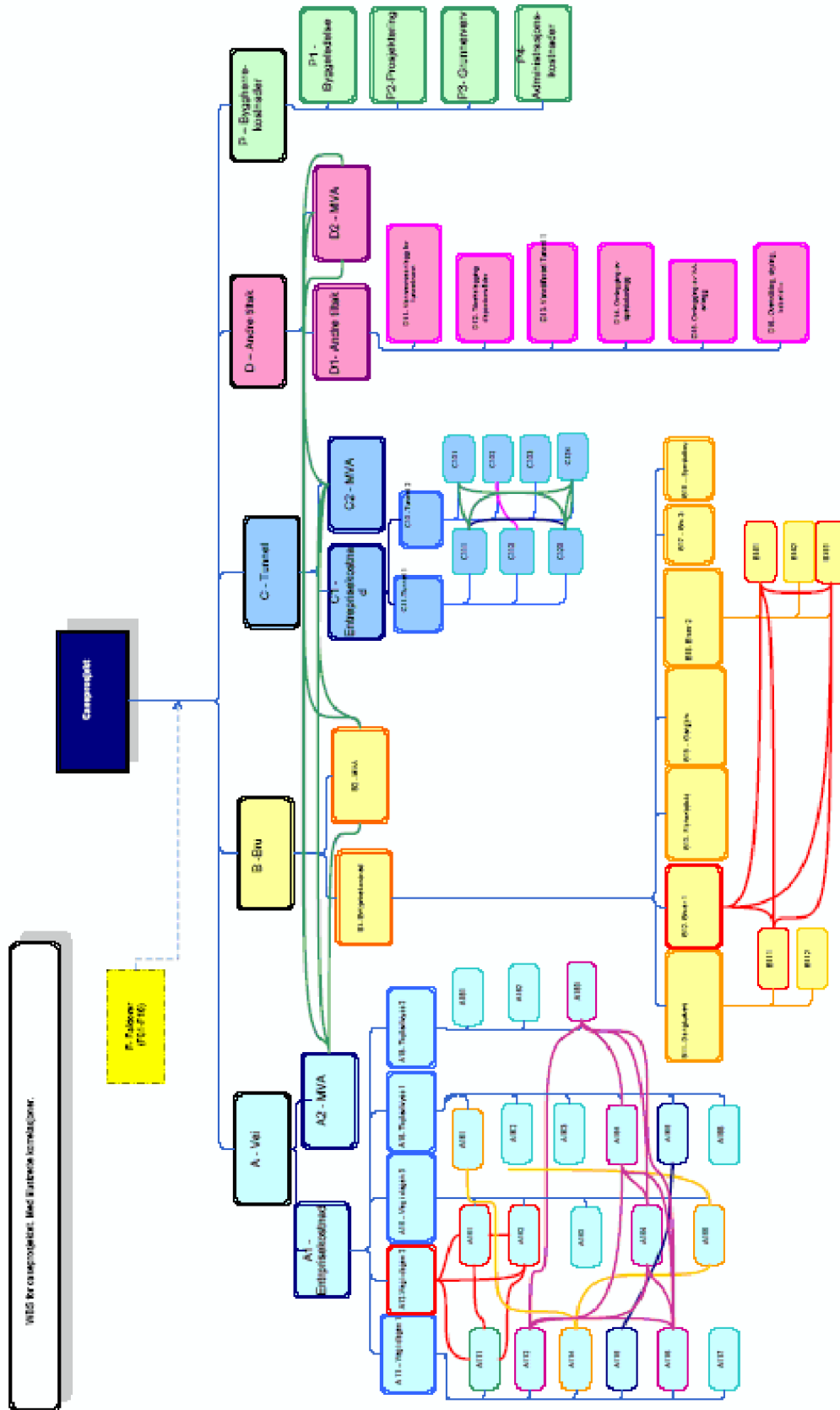
# Litteratur

- Austeng, Kjell og Torp, Olav 2001: *Usikkerhetsanalyse i prosjekt - mer enn tallbehandling og S-kurver*, artikkel i Prosjektledelse nr 2-2001, Norsk Forening for Prosjektledelse (NFP)
- Austeng, Kjell & Hugsted, Reidar 1995: *Trinnvis kalkulasjon*. Institutt for bygg- og anleggsteknikk, NTH.
- Bier, V. M., 2000: *On the "state of the art": risk communication to decision-makers*. Center for Human Performance and Risk Analysis, University of Wisconsin, artikkel i ELSEVIER - European Journal of Operational Research
- Binz, Vibeke, 2004: *Håndtering av usikkerhet i Fregattprosjektet*, prosjektoppgave ved NTNU
- DEMO2000, 2001, *Standardized method for multidisciplinary uncertainty analysis*, CTR no B5, rapport nr FBP/00AAAB9H, revisjon nr 3, DNV
- Devore, Jay L. og Farnum, Nicholas R., 1999, *Applied Statistics for Engineers and Scientists*, 0-534-35601-x
- Dougherty, Edward R. 1990: *Probability and Statistics for the Engineering, Computing and Physical Sciences*. Prentice Hall International Editions. ISBN 0-13-715913-7
- Dragøy, Siri, 2004, *Analyse av usikkerhet i kostnad for byggeprosjekter*, TMA4210 Matematisk Prosjekt, semesteroppgave ved NTNU
- Draper, N.R., Smith, H., 1996, *Applied Regression Analysis*, John Wiley & Sons Inc
- Drevland, Austeng, og Torp 2005: *Usikkerhetsanalyse - Modellering, estimering og beregning*. Concept programmet, Institutt for bygg anlegg og transport, NTNU.
- FIN- Finansdepartementet, *Anbudsinnydelse for rammeavtale om ekstern risikoanalyse*, Ref.nr. 99/6049 C, desember 1999.
- Gómez-Senent Martínez, Eliseo, 1997, *El Proyecto Diseño en Ingeniería*, Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-97.761
- Grundt, Nilsen, Palmstrøm, Pedersen, 2003, *Miljø og samfunnstjenlige tunneler*, Publikasjon nr 101 Vegdirektoratet
- Hjallen, Erling og Lichtenberg, Steen, 2001, *Prosjektledere kan nå sikre seg mot forsinkelser og overskridelser*, artikkel i Prosjektledelse nr 2-2001, Norsk Forening for Prosjektledelse (NFP)
- HM Treasury, 2004, (Det Britiske Finansdepartementet) - *Assurance, Control and Risk Team*, 2004, "The Orange Book"

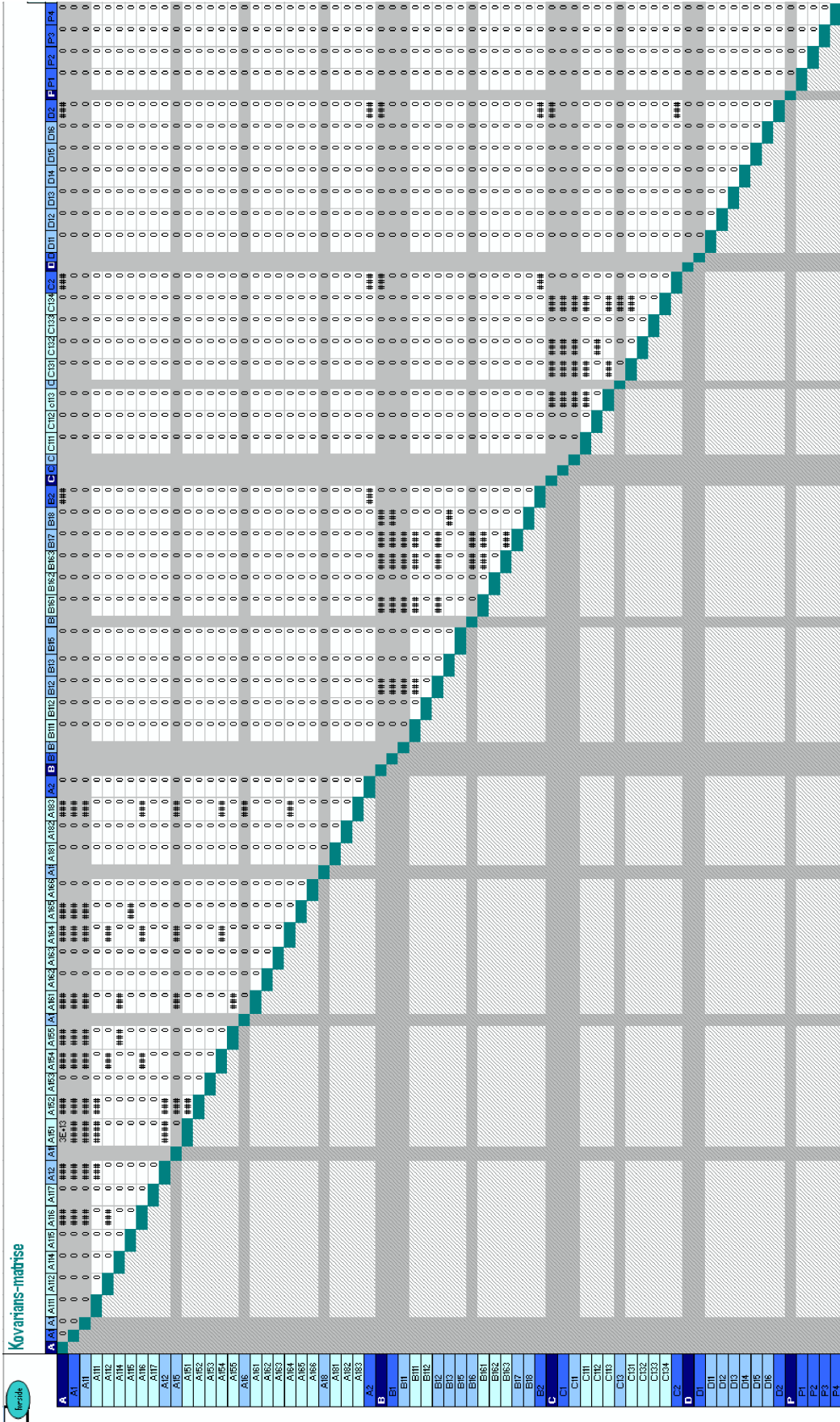
- Husby, Kilde, Klakegg, Torp, Berntsen og Samset 1999: *Usikkerhet som gevinst - Styring av usikkerhet i prosjekter*. Prosjektstyring år 2000, Trondheim.
- Høyland, Arnljot 1979: *Sannsynlighetsregning og statistiske metodelære*. Tapir
- Jessen, Svein Arne 2000: *Prosjektarbeid og konsekvensanalyser*. Universitetsforlaget, Norge.
- Jordanger, Ingemund, 2004, *Kvalitetssikring av analyser og resultat*, oppdrags nr. 1088002, rapport nr 2, rev. nr. 0, Concept og PTL.
- Jorion, Philippe, 2003, *Financial Risk Manager Handbook*, 2nd edition, ISBN: 0-471-43003
- Jørgensen, Trond og Wallace, Stein W., 2000, *Improving project cost estimation by taking into account Managerial Flexibility*, Elsevier - European Journal of Operational Research 127 (2000) 239±251, NTNU
- Klakegg, Ole Jonny. 1993: *Trinnvis-prosessen*. Institutt for bygg og anleggsteknikk.
- Kreyszig, Erwin 1999: *Advanced engineering mathematics*, 8th edition. John Wiley & Sons. ISBN 0-471-15496-2
- Law, Averill M. & Kelton, David W. 2000: *Simulation Modelling and Analysis, third edition*. McGraw-Hill Higher Education. ISBN 0-07-059292-6
- Lichtenberg, Steen. 1978: *PROJEKT PLANLEGGING - i en foranderlig verden*. Polyteknisk Forlag Lyngby.
- Lichtenberg, Steen 2000: *Proactive Management of Uncertainty using the Successive Principle*. Polyteknisk Press, Danmark.
- Lindgren, G., Leadbetter, M.R. and Rootzén H. 1983: *Extremes and related properties of stationary sequences and processes*. Springer, New York
- Magnussen, Ole Morten & Olsson Nils, 2004, *Comparative Analysis of Cost Estimates of Major Public Investment Projects*, Accepted for publication by International Journal of Project Management. (Muligens i august 2006)
- Metier Scandinavia AS, 1.2.2005, Foreløpig rapport til Samferdselsdepartementet, *Kvalitetssikring av kostnadsoverslag - Prosjekt E16 Wøyen-Bjorum*
- Myking, Eystein, (TerraMar AS) 2001, *MonteCarlo-Simulering vs Suksessiv kalkulasjon*, artikkel i Prosjektledelse nr 1-2001, Norsk Forening for Prosjektledelse (NFP)
- Odeck, James, 2004, *Cost overruns in road construction-what are their sizes and determinants*, Pergamon -Transport Policy 11 (2004) 43-53, NTNU
- Palisade Corporation. 2002: *A Concise Summary of @RISK Probability Distribution Functions*. Palisade Corporation.
- Raftery, John, 1994, *Risk Analysis in Project Management*, E & FN Spon, London, ISBN: 0-419-184420-1

- 
- Reibnitz, Ute von. 1988: *Scenario techniques*. McGraw Hill.
- Ringland, Gill. 2002: *Scenarios in Business*. John Wiley & Sons, Chichester, Storbritannia.
- Rolstadås, Asbjørn. 2001: *Praktisk Prosjektstyring*. Tapir Akademisk Forlag . ISBN 82-519-1652-6.
- Rolstadås, Asbjørn. 1997: *Praktisk Prosjektstyring*. Tapir, Trondheim.
- Rowntree, Derek, 2000, *Statistics without tears*, Penguin books, England
- Rubinstein, Reuven Y., 1981, *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-08917-6
- Samset, Knut, 2001, *Prosjektvurdering i tidligfasen*. Trondheim: Tapir Akademiske Forlag, ISBN: 82-519-1679-8
- Smith, G.N., 1986, *Probability and Statistics in civil engineering; an introduction*, ISBN 0-00-383154
- Spiegel, Murray R. & Stephens, Larry J. 1999: *Schaum's Outline of Theory and Problems of Statistics Third Edition*. McGraw-Hill. ISBN 0-07-060281-6
- Terramar og Arne Bang Huseby (UiO), 2003, rapport: *Kommentarer til FLO/I: Metode for kostnadsfastsetting av usikkerhet*
- Torp, Olav, 2002, Litteraturstudie, *Tidligfasevurderinger i prosjekter*, Concept-rapport, ISBN 82-91412-08-1
- Walpole, Ronald E, Myers, Raymond H. & Myers, Sharon L. 1998: *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Prentice Hall. ISBN 0-13-095246-X
- Williams, Terry, 2002, *Modeling Complex Projects*, John Wiley & Sons LTD, ISBN: 0-471-89945-3

# Vedlegg-A Figurer i full størrelse



Figur A-1 WBS for caseprosjektet med korrelasjoner



Figur A-2 Korrelasjonsmatrise for casen i full størrelse.

# Concept rapportserie

Papirtrykk: ISSN 0803-9763

Elektronisk utgave på internett: ISSN 0804-5585

Tilgjengelig på

[www.concept.ntnu.no/Publikasjoner/Rapportserie/concept\\_rapport.htm](http://www.concept.ntnu.no/Publikasjoner/Rapportserie/concept_rapport.htm)

Rapport	Tittel	Forfatter
Nr. 15	Kostnadsusikkerhet i store statlige investeringsprosjekter; Empiriske studier basert på KS2 Cost Uncertainty in large Public Investment Projects; Empirical studies based on QA2	Olav Torp (red.), Ole Morten Magnussen, Nils Olsson og Ole Jonny Klakegg
Nr. 14	Positiv usikkerhet og økt verdiskaping Positive uncertainty and increasing utility	Ingemund Jordanger
Nr. 13	Usikkerhetsanalyse – Feilkilder i metode og beregning Uncertainty analysis – sources of error in data and analysis	Kjell Austeng, Vibeke Binz og Frode Drevland
Nr. 12	Metoder for usikkerhetsanalyse Uncertainty analysis – Methodology	Kjell Austeng, Jon Terje Midtbø, Vidar Helland, Olav Torp og Ingemund Jordanger
Nr. 11	Usikkerhetsanalyse – Modellering, estimering og beregning Uncertainty analysis – modeling, estimation and calculation	Frode Drevland, Kjell Austeng og Olav Torp
Nr. 10	Usikkerhetsanalyse – Kontekst og grunnlag Uncertainty analysis – context and foundations	Kjell Austeng, Olav Torp, Jon Terje Midtbø, Ingemund Jordanger og Ole Morten Magnussen
Nr. 9	Bedre utforming av store offentlige investeringsprosjekter. Vurdering av behov, mål og effekt i tidligfasen Improved design of public investment projects. Making up-front appraisals of needs, objectives and effects	Petter Næss med bidrag fra Kjell Arne Brekke, Nils Olsson og Ole Jonny Klakegg
Nr. 8	Realopsjoner og fleksibilitet i store offentlige investeringsprosjekt Real options and flexibility in major public investment projects	Kjell Arne Brekke
Nr. 7	Hvordan trur vi at det blir? Effektvurderinger av store offentlige prosjekt An estimated guess. Up-front assessment of anticipated effects of major public investment projects	Nils Olsson
Nr. 6	Målformulering i store statlige investeringsprosjekt Formulation of objectives in major public investment projects	Ole Jonny Klakegg
Nr. 5	Bedre behovsanalyser. Erfaringer og anbefalinger om behovsanalyser i store offentlige investeringsprosjekt Needs analysis in major public investment projects. Lessons and recommendations	Petter Næss
Nr. 4	Konseptutvikling og evaluering i store statlige investeringsprosjekt Concept development and evaluation in major public investment projects	Hege Gry Solheim, Erik Dammen, Håvard O. Skaldebø, Eystein Myking, Elisabeth K. Svendsen og Paul Torgersen
Nr. 3	Beslutningsunderlag og beslutninger i store statlige investeringsprosjekt Decisions and basis for decisions in major public investment projects	Stein V. Larsen, Eilif Holte og Sverre Haanæs
Nr. 2	Statlig styring av prosjektledelse. Empiri og økonomiske prinsipper. Economic incentives in public project management	Dag Morten Dalen, Ola Lædre og Christian Riis
Nr. 1	Styring av prosjektporteføljer i staten. Usikkerhetsavsetning på porteføljenivå Public project portfolio management. Estimating provisions for uncertainty at portfolio level.	Stein Berntsen og Thorleif Sunde