Masteroppgave

Master i matematikkdidaktikk

Maren Berre

Divisjon utenfor heltallsområdet:

En kvalitativ kasusstudie av 6.trinnselevers strategier og utfordringer

Trondheim, mai 2014

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Maren Berre

Divisjon utenfor heltallsområdet:
En kvalitativ kasusstudie av 6.trinnselevers strategier og utfordringer

Division beyond the integer domain:
A qualitative case study of 6th graders strategies and challenges

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2014

Veileder:	Heidi Dahl

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

Å kunne regne er en av de grunnleggende ferdighetene i Kunnskapsløftet, en ferdighet som blant annet innebærer å bruke varierte framgangsmåter og strategier til problemløsning og utforskning som tar utgangspunkt både i praktiske, dagligdagse situasjoner og i matematiske problem (Utdanningsdirektoratet, 2013). Å kunne utvikle og bruke ulike framgangsmåter og strategier for å løse matematiske oppgaver skal altså være en del av elevenes regneferdigheter, og står dermed svært sentralt gjennom hele skolegangen. Denne ferdigheten innebærer også at elevene må ha kjennskap til og en forståelse av de fire regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, ettersom det er disse regneartene elevenes framgangsmåter og strategier blir bygget på. Som regel blir elevene introdusert for addisjon og subtraksjon før multiplikasjon og divisjon, på grunn av at de to første er ansett som enklere operasjoner. Det er også en naturlig kobling mellom addisjon og subtraksjon og mellom multiplikasjon og divisjon, da de er inverse operasjoner. I denne oppgaven er det operasjonen divisjon og divisjonsstrategier som settes i fokus, strategier som kan innebære eller bygge på en eller flere av de tre andre regneartene. Gjentatt addisjon og subtraksjon brukes ofte som framgangsmåter i undervisningen av divisjon, for å hjelpe elevene med å gi mening til operasjonen (Nunes & Bryant, 2000). Strategier som innebærer bruk av multiplikasjon for å løse divisjonsoppgaver anses gjerne som mer effektive strategier som kobler sammen de to inverse operasjonene, og er ofte strategier som utvikles etter gjentatt subtraksjon og addisjon. Ettersom divisjonsstrategier innebærer og som oftest bygger på de tre andre regneartene, er det viktig at elevene har utviklet en god forståelse av disse regneartene. Samtidig er det av betydning at elevene har utviklet tilstrekkelig med kunnskap om divisjon, slik at de kan velge passende strategier for å løse ulike divisjonsoppgaver.

I grunnskolen møter elever divisjon på 3. eller 4.trinn dersom man følger kompetansemålene etter 4.årstrinn i Kunnskapsløftet. Her kan vi også se at det knyttes et tett bånd mellom multiplikasjon og divisjon:

> Mål for opplæringa er at elevene skal kunne utvikle og bruke varierte metodar for multiplikasjon og divisjon, bruke dei i praktiske situasjonar og bruke den vesle multiplikasjonstabellen i hovudrekning og i oppgåveløysing (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Her ser vi at det vektlegges at elevene skal utvikle og bruke varierte metoder for divisjon, noe som tilsier at de må presenteres for ulike situasjoner og oppgaver som kan legge til rette for en slik utvikling. Men selv om Kunnskapsløftet vektlegger bruk av varierte løsningsmetoder, kan man ofte se at dette faller vekk når elevene lærer algoritmer for å løse matematiske problem. Av egen erfaring som tidligere elev, gjennom praksis i lærerutdanninga og gjennom arbeid som lærervikar i grunnskolen har jeg opplevd at standardalgoritmen for å løse divisjonsoppgaver står svært sterkt. Med standardalgoritmen mener jeg oppskriften som er mest brukt for å løse divisjonsoppgaver i skolen, hvor man skriver ned divisjonsstykket og begynner fra venstre side med å dividere de første sifrene i dividend på divisor, før man beveger seg videre mot høyre. Denne algoritmen er en enkel og komprimert løsningsmetode, men dersom elevene kun memorerer denne algoritmen uten forståelse for hva de gjør, kan dette skape problemer.

Tidligere klasseromsforskere har sett på elevers strategier og framgangsmåter i arbeid med divisjonsoppgaver (Anghileri, 2001a, 2001b, Downton, 2009, Mulligan & Mitchelmore, 1997), samt hvilke misoppfatninger elever kan ha om divisjon (Bell, Fischbein, & Greer, 1984, Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985, Graeber & Campbell, 1993, Graeber & Tirosh, 1990). De ulike studiene som undersøkte elevers divisjonsstrategier viste at elever innehar mange intuitive strategier for å løse divisjonsoppgaver, som bygger på både addisjon, subtraksjon og multiplikasjon. Men Anghileri (2001a, 2001b) sine studier viste i tillegg at mange elever støtter seg til standardalgoritmen for å løse divisjonsoppgaver etter at denne er blitt presentert for dem, uten å inneha en god forståelse av denne algoritmen. I de ulike studiene om misoppfatninger om divisjon blant elevene, kunne de se at typiske misoppfatninger som at divisjon alltid gjør mindre, at man ikke kan ha en divisor som er større enn dividend og at divisor må være heltall eksisterte hos mange elever. Dette er oppfatninger som vanligvis kommer fra elevenes arbeid med divisjon i heltallsområdet og som kan sette begrensninger for elevene når de skal løse divisjonsoppgaver utenfor heltallsområdet (Bell et al., 1984, Fischbein et al., 1985). Det er altså tydelig at dersom elevene over lengre tid kun møter divisjonsoppgaver hvor divisor er heltall mindre enn dividend og kvotient er mindre enn dividend, vil dette kunne påvirke elevenes forståelse av divisjon.

1.2 Forskningsspørsmål

Med tanke på hvor sentral regnearten divisjon er i grunnskolen, er det av stor betydning for meg som framtidig lærer å ha god kjennskap til elevers strategier innenfor dette emnet. Gjennom å lese tidligere forskningsartikler om elevers divisjonsstrategier og typiske misoppfatninger om divisjon, fattet jeg stor interesse for temaet, og valgte derfor å gjennomføre mitt masterprosjekt innenfor dette emnet. Ettersom mye tidligere forskning har sett på elevers strategier i divisjon med heltall, samt at flere har pekt på de typiske misoppfatningene om divisjon blant elever, ønsker jeg å se nærmere på hvilke strategier elevene tar i bruk i divisjonsoppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet og hvilke utfordringer dette kan gi elevene. I gjennomgangen av tidligere forskningslitteratur fant jeg svært få artikler som tok for seg akkurat denne problematikken, og ønsker derfor å kunne tilføye noe til forskningsområdet med dette masterprosjektet. Som grunnlag for studien min utarbeidet jeg følgende forskningsspørsmål:

- *Hvilke strategier bruker elever på 6.trinn for å løse divisjonsoppgaver med heltallsdivisor og desimaltallsdivisor?*
    - *Hvilke faktorer påvirker elevenes valg av strategi?*
- *Hvilke utfordringer møter elevene i arbeidet med divisjonsoppgaver utenfor heltallsområdet?*

Jeg valgte å gjennomføre undersøkelsene mine på 6.trinn på grunn av at elevene på dette årstrinnet har en del erfaring med heltallsdivisjon, og at de derfor kan ha utviklet ulike strategier for å løse divisjonsoppgaver. De har som regel blitt undervist i standardalgoritmen på dette årstrinnet, noe som kan ha innvirkning på deres valg av strategi. Men, basert på utsagn fra tidligere forskning og en gjennomgang av ulike matematikklæreverk, har svært få eller ingen av elevene på dette årstrinnet arbeidet med divisjonsoppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet. Dette ga meg et godt utgangspunkt for å kunne se på hvilke utfordringer divisjonsoppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet vil gi elever som kun har utviklet strategier for divisjon innenfor heltallsområdet.

Ettersom jeg har et sterkt fokus på strategier i min studie, er det nødvendig å definere hva jeg legger i dette begrepet. Jeg støtter meg i denne oppgaven på Siegler & Jenkins sin definisjon av strategier (som gjengitt i Ringheim, 2011, s. 14), hvor strategier blir definert som enhver framgangsmåte som er valgfri og målrettet. Det er aspektet om valgfrihet som skiller strategier fra andre framgangsmåter som blir presentert for elevene eller foreslått brukt i ulike situasjoner. Man kan altså si at i min studie definerer jeg strategier som målrettede framgangsmåter som er selvvalgt av elevene. Det vil si at det ikke er lagt noen føringer for hvordan elevene skal gå fram for å løse oppgavene, men at elevene selv finner ut av hvilke framgangsmåter de ønsker å ta i bruk for å finne løsningen. I denne oppgaven bruker jeg også begrepet intuitive strategier, som skiller seg litt ut fra begrepet strategier. Intuitive strategier er framgangsmåter som elevene tar i bruk uten å ha blitt undervist i strategiene tidligere, som for eksempel å bruke gjentatt subtraksjon eller gjentatt addisjon for å løse divisjonsoppgaver. Standardalgoritmen klassifiserer jeg altså ikke som en intuitiv strategi, men den er en strategi som elevene fritt kan velge å bruke for å løse oppgaver. I denne oppgaven brukes intuitive strategier og intuitive framgangsmåter om hverandre, de blir ilagt samme betydning av meg. Et tredje begrep som er viktig å avklare i denne oppgaven er intuitive modeller, som igjen skiller seg fra både strategier og intuitive strategier. Jeg baserer min definisjon av intuitive modeller på Fischbein et al. (1985) sin teori, hvor de forklarer at elevers intuitive modeller for divisjon bygger på ideene om delingsdivisjon og målingsdivisjon i heltallsområdet. En utdyping av teorien om intuitive modeller vil komme i *Kapittel 2. Teoretisk grunnlag*.

1.3 Teorigrunnlag

I masterprosjektet mitt har jeg plassert meg innenfor det konstruktivistiske paradigmet, noe som vil si at jeg vektlegger at elevene konstruerer sin egen kunnskap. Innenfor dette læringssynet er ikke kunnskap noe som kan overføres fra en person til en annen, men noe som må konstrueres hos den enkelte, gjennom en kognitiv utvikling. Denne utviklingen skjer gjennom at elever møter nye situasjoner som kan utfordre og utvikle den kunnskapen som han eller hun allerede har. I tillegg til dette hovedfokuset på kognitiv utvikling hos den enkelte, anerkjenner jeg betydningen av det sosiale fellesskapet rundt eleven, og at dette også påvirker elevens læring. Jeg støtter meg til Piagets tanker om assimilasjon og akkomodasjon og hans likevektsteori, som uttrykker menneskets konstante behov for en kognitiv balanse. I møtet med nye og utfordrende situasjoner vil en kognitiv konflikt oppstå hos eleven, og behovet for å gjenopprette den kognitive balansen vil føre til at eleven konstruerer ny kunnskap (Holgersen, 1998).

I dette prosjektet har tidligere forskningslitteratur en stor rolle, både som hjelp til å utvikle koder og kategorier i analyseprosessen, og til å gi mening til mine funn i drøftingsprosessen. Når det gjelder forskning på elevers divisjonsstrategier støtter jeg meg hovedsakelig på Anghileri (2001a, 2001b), Downton (2009) og Mulligan og Mitchelmore (1997). For å få innsikt i elevers utfordringer med divisjon og misoppfatninger om divisjon er studiene til Bell et al. (1984), Fischbein et al. (1985), Graeber og Baker (1992) og Tirosh og Graeber (1989) sentrale, i tillegg til de tidligere nevnte studiene til Anghileri. Studiene til Okazaki og Koyama (2005) og Graeber og Tirosh (1990) tar for seg elevers utfordringer i divisjon med desimaltall, og er derfor også sentrale i mitt prosjekt. Jeg vil utdype og forklare de ulike studiene nærmere i *Kapittel 2. Teoretisk grunnlag*, hvor jeg tar for meg det som er relevant med tanke på mitt eget prosjekt. I teorikapitlet vil jeg også presentere Vergnauds (1983, 1994) teori om det multiplikative begrepsmessige området og snakke om divisjon som operasjon.

1.4 Metode

Jeg valgte å gjennomføre prosjektet mitt som en kvalitativ kasusstudie, ettersom jeg hadde behov for å komme tett inn på noen elever for å få innsikt i deres strategier og hvilke utfordringer de møtte i arbeidet med divisjonsoppgavene. Det var nødvendig for meg å kunne samtale med elevene for å få denne innsikten, ettersom det kun er elevene som kan forklare hva de tenker. På bakgrunn av en hel klasses elevbesvarelser på noen skriftlige divisjonsoppgaver valgte jeg ut tre elever til et nærmere intervju, hvor elevene arbeidet med nye divisjonsoppgaver og vi hadde en dialog rundt deres strategier. Gjennom å samtale med elevene fikk de mulighet til å forklare og beskrive sine strategier, slik at jeg fikk innsikt i hvordan de fungerte og hva som var de største utfordringene for elevene. Som siste del i datainnsamlingsprosessen samarbeidet de tre elevene om nye divisjonsoppgaver, og min rolle ble da observatør. Alle intervjuene og gruppearbeidet ble filmet og senere transkribert. Mer utdypende om metodevalgene jeg gjorde kan du lese om i *Kapittel 3. Metodiske valg.*

1.5 Oppbygging av oppgaven

Etter innledninga består denne oppgaven av følgende fem kapittel: *2. Teoretisk grunnlag, 3. Metodiske valg, 4. Analyse, 5. Drøfting og 6. Didaktiske refleksjoner*. I teorikapitlet vil jeg, som sagt, presentere tidligere forskningslitteratur om divisjonsstrategier, utfordringer innenfor divisjon og misoppfatninger om divisjon, samt legge fram annen relevant litteratur som vil brukes som støtte og sammenligningsgrunnlag i analysekapitlet og drøftingskapitlet senere i oppgaven. I metodekapitlet går jeg nærmere inn på de metodiske valgene i min studie, både i innsamlingen av datamateriale og i analyseprosessen. Her vil jeg forklare hvorfor jeg tok de valgene jeg gjorde underveis. Jeg vil også ta for meg viktige etiske betraktninger i kvalitative studier i dette kapittelet, samt rette et kritisk blikk mot min egen metode og peke på hva jeg har gjort for å sikre reliabilitet og validitet i min studie. I analysekapitlet vil jeg gå grundig gjennom utarbeidingen av oppgavene jeg brukte i undersøkelsen, før funnene fra undersøkelsen blir lagt fram. Disse funnene vil bli drøftet og tolket i drøftingskapitlet som følger, med støtte i litteraturen og teoriene som ble presentert i teorikapitlet. Her vil jeg forsøke å gi mening til de funnene som ble presentert i analysekapitlet. Avslutningsvis, i kapitlet som inneholder didaktiske refleksjoner, vil jeg reflektere over og drøfte hvilke implikasjoner mine funn kan ha for matematikkfaget og for meg som framtidig lærer.

2. Teoretisk grunnlag

I dette masterprosjektet har tidligere forskning innenfor området divisjon en sentral rolle, da det utgjør det viktigste sammenligningsgrunnlaget for drøftingen av funnene i min studie. I dette kapitlet vil jeg presentere noe av tidligere forskning som er gjort på elevers divisjonsstrategier, misoppfatninger om divisjon og utfordringer innenfor divisjon med desimaltall. Denne forskningen vil jeg senere ta i bruk i drøftingskapitlet, som hjelpemidler til å gi mening til mine egne funn. Men før dette vil jeg gi en kort forklaring av hvilket læringssyn som ligger til grunn for min studie, og som påvirker mitt syn på matematikkunnskap. Jeg vil også presentere Vergnauds teori om det multiplikative begrepsmessige området, samt gi en kort forklaring av operasjonen divisjon og ulike typer divisjonsoppgaver.

2.1 Et konstruktivistisk syn på matematikkunnskap

I masterprosjektet mitt har jeg posisjonert meg innenfor et konstruktivistisk læringssyn, noe som medfører at jeg ser på kunnskap som noe mennesket aktivt konstruerer, og ikke noe som blir mottatt passivt. Dette innebærer at kunnskap ikke er noe som ”finnes der ute”, men noe som konstrueres hos den enkelte. Denne kunnskapskonstruksjonen er en kognitiv utvikling hos individet, men vil også bli påvirket av individets samhandling med andre (Von Glasersfeld, 1995). I tillegg til det grunnleggende synet om at mennesket konstruerer sin egen kunnskap, er et annet viktig punkt innenfor konstruktivismen at den kunnskapen man har er en akkumulasjon av alle erfaringer man har hatt så langt. Det vil si at hver nye erfaring enten vil bli lagt til tidligere erfaringer eller utfordre og utvikle tidligere erfaringer. Gjennom denne prosessen vil mennesket individuelt organisere sin egne erfarte verden (Jaworski, 1994). Dette medfører at vi ikke kan definere virkeligheten som én endelig virkelighet, men at hvert individ konstruerer sin oppfatning av denne virkeligheten. For matematikkfaget innebærer dette at elever konstruerer sine egne oppfatninger av matematikkunnskap gjennom de erfaringene de opplever, en prosess som også vil være påvirket av de sosiale rammene rundt eleven. Som en forklaring av det konstruktivistiske paradigmet skriver Postholm (2010):

> Innenfor det konstruktivistiske paradigmet blir mennesket betraktet som aktivt handlende og ansvarlig. Videre oppfattes kunnskap som en konstruksjon av forståelse og mening skapt i møte mellom mennesker i sosial samhandling. Kunnskap er dermed ikke noe som er gitt en gang for alle og som skal overføres eller forløses. Kunnskapen er derimot i stadig endring og fornyelse (Postholm, 2010, s. 21).

I denne studien støtter jeg meg mye til Piagets konstruktivistiske teori om læring, og henter flere begrep derfra. Hos Piaget er likevektsteorien (oversatt fra *Equilibration theory*) sentral, en teori om at mennesket alltid etterstreber kognitiv likevekt mellom seg selv og omverdenen. Denne streben etter likevekt er drivstoffet i kunnskaps-tilegnelsesprosessen, hvor assimilasjon og akkomodasjon er to komplementære delprosesser. Assimilasjon kan forstås som å behandle nye situasjoner som et tilfelle av noe kjent, noe som ikke vil medføre en endring i individets kognitive struktur, men som heller supplerer eksisterende kunnskap. Akkomodasjon innebærer en endring i den kognitive strukturen, gjennom at ny informasjon, som ikke passer inn i individets eksisterende kunnskap, fører til en utvikling av ny kunnskap (Holgersen, 1998). Sammen vil assimilasjon- og akkomodasjonsprosessen utvide eksisterende kunnskap og føre til konstruksjon av ny kunnskap hos individet. Sentralt i denne kunnskaps-konstruksjonen er også menneskets mentale skjema, som kan karakteriseres som byggesteiner i den kognitive utviklingen. Mentale skjema er organiserte tanke- eller handlingssystemer (også kalt kognitive strukturer) som består av menneskets egne erfaringer, kunnskap og tenkemåter (Lyngsnes & Rismark, 1999). Disse mentale skjemaene vil, i likhet med menneskets kunnskap, stadig utvides og utvikles gjennom assimilasjon og akkomodasjon.

2.2 Det multiplikative begrepsmessige området

Som et rammeverk for å forstå hvordan elever tilegner seg matematisk kunnskap, utviklet Gerard Vergnaud (1994) en teori om begrepsmessige områder. Disse områdene definerer han som et sett med begreper og et sett med situasjoner som er knyttet sammen. Han forklarer gjennom denne teorien at et begrep ikke får mening gjennom én situasjon, men gjennom flere varierte situasjoner, samtidig som en situasjon ikke kan bli analysert med kun ett begrep, men med hjelp av flere begreper som sammen utgjør et system (Vergnaud, 2009). For å utvikle sin forståelse av begrepsmessige områder, er det av betydning at elever møter kontrasterende situasjoner, slik at de får mulighet til å utvide sine mentale skjema gjennom en kognitiv utvikling. Vergnaud bruker her begrepet mentale skjema i tråd med Piagets definisjon, men presiserer at slike skjema også inneholder regler, triks og prosedyrer som er blitt formet ut ifra situasjoner som eleven allerede mestrer, samtidig som de er tilpasningsdyktige og kan utvikles i møtet med nye og ukjente situasjoner. Vergnaud forklarer at begrepsmessige områder er kompliserte og at de inneholder mange aspekter innenfor et ”matematikklandskap”, som blant annet situasjoner, skjema, begreper, teoremer og symbolske representasjonsverktøy. Vergnauds teori understreker at tilegnelsen av kunnskap blir formet av situasjonene og problemene man tidligere har lært, og at alle begrep dermed har et begrenset gyldighetsområde som varierer ut i fra elevers erfaringer og kognitive utvikling. Etter hvert som man behersker situasjoner og problemer, vil man kunne bruke det til å utvikle en forståelse av nye situasjoner og problemer, og slik vil denne prosessen fortsette i en stadig fornyende syklus. Vergnaud plasserer seg med denne teorien innenfor det konstruktivistiske læringssynet, med tydelige påvirkninger fra både Piaget og Vygotsky. Han vektlegger elevers kognitive utvikling og at det kun er eleven som kan gi mening til den kunnskapen han eller hun utvikler, samtidig som han peker på at lærere, foreldre og medelever gir eleven hjelp i denne kunnskapstilegnelsen. Han påpeker at det finnes flere begrepsmessige områder, som blant annet et additivt, et figur-geometrisk og et multiplikativt begrepsmessige området. I denne oppgaven vil jeg kun vektlegge det sistnevnte området, da det er dette området som er av interesse i mitt prosjekt. I det multiplikative begrepsmessige området finner vi situasjoner som krever multiplikasjon, divisjon, eller en kombinasjon av disse operasjonene. I tillegg inneholder dette området et sett med mentale skjema som eleven trenger for å kunne håndtere disse situasjonene, et sett med begreper og teoremer som gjør det mulig for eleven å tolke hvilke operasjoner som er nødvendige, samt et sett med formuleringer og symboler (Vergnaud, 1994). Alle disse aspektene er nødvendige i det multiplikative begrepsmessige området, og de bygger på hverandre. Situasjonene som elevene møter framkaller de nødvendige skjemaene hos elevene, som videre får fram essensielle begrep og teorem hos eleven. Eleven vil til slutt ta i bruk kjente og passende symboler for å formulere en utregning. Vergnaud skiller mellom begreper og teoremer i sin teori, og påpeker at teoremer er setninger eller påstander som kan være sanne eller usanne, mens begreper ikke er setninger, og at de derfor kun kan være relevante eller irrelevante. Han forklarer videre at teoremer også kan være teoremer-i-aksjon (oversatt fra *theorem-in-action*), som eleven mener er sanne setninger, men som egentlig er usanne (Vergnaud, 2009). Innenfor arbeidet med divisjon kan dette være typiske misoppfatninger som at divisjon alltid gjør mindre, at divisor skal være mindre enn dividend og at divisor skal være et heltall (Bell et al., 1984, Fischbein et al., 1985, Graeber & Baker, 1992, Okazaki & Koyama, 2005). Dette er teoremer-i-aksjon som kan sette begrensninger for elevenes forståelse av divisjon, og som vil bli utfordret dersom elevene møter nye situasjoner som bryter med dem. Jeg vil komme nærmere inn på disse typiske misoppfatningene i delkapittel *2.5 Typiske misoppfatninger om divisjon*. Det finnes flere andre usanne teoremer-i-aksjon som kan være hindringer i elevenes utvikling av en god forståelse av divisjon. Elevene kan blant annet være av den oppfatning at divisjon er kommutativ, noe som innebærer at $10 : 5$ og $5 : 10$ skulle bety det samme, eller de kan mene at divisjon er distributiv over addisjon og subtraksjon, slik at $48 : 12$ kan deles opp i $48 : 10 + 48 : 2$. Men elevene kan også besitte noen teoremer om divisjon som er sanne, som for eksempel at multiplikasjon er den inverse operasjonen til divisjon, noe som vil si at dersom man skal finne c i divisjonsstykket $a : b = c$, kan man finne ut hva c ville blitt i multiplikasjonsstykket $c \cdot b = a$. Elever kan også ha kjennskap til og bruke det proporsjonale forholdet mellom dividend og divisor og det omvendt proporsjonale forholdet mellom divisor og kvotient for å løse divisjonsoppgaver. Påstandene om at dividend og divisor alltid er proporsjonale størrelser og at divisor og kvotient alltid er omvendt proporsjonale størrelser er to teoremer som er sanne for alle divisjonsproblemer. Å ha kjennskap til disse forholdene er en av flere viktige faktorer for å utvikle en god forståelse av divisjon, og jeg vil komme nærmere inn på dette i neste delkapittel.

Utviklingen av elevers forståelse av det multiplikative begrepsmessige området følger en hierarkisk oppbygging, noe som vil si at elevene stadig vil møte nye og mer utfordrende situasjoner hvor de må bruke den kunnskapen de tidligere har tilegnet seg. Utviklingen av elevers forståelse forklarer Vergnaud på følgende måte:

> Students' conceptions and competencies develop over long periods of time, through experience with a large number of situations, both in and out of school. When faced with a new situation (new domain, new relationships, new numerical data), they use the knowledge which has been shaped by their experience with simpler and more familiar situations and try to adapt it to this new situation (Vergnaud, 1983, s. 141).

Her påpeker altså Vergnaud hvor viktig det er at elever møter nye situasjoner for å utvikle eksisterende kunnskap. Det er forskjellige aspekter som kan være nye for elevene i matematiske situasjoner, som for eksempel bruk av nye talltyper. I min studie vil divisjonsoppgaver med desimaltall i divisor og kvotient mest sannsynlig være nye situasjoner for elevene, og elevene vil dermed kunne bruke sin eksisterende kunnskap om divisjon for å takle disse nye situasjonene. Disse situasjonene kan være utfordrende for elevene på grunn av at de bryter med noen typiske misoppfatninger om divisjon.

Vergnauds teori om det multiplikative begrepsmessige området er en komplisert teori, og den er derfor svært vanskelig å gjengi og forklare på en kortfattet måte. I et forsøk på å oppsummere den kan man si at det er en konstruktivistisk teori som innebærer at elever konstruerer og organiserer sin egen kunnskap på bakgrunn av tidligere tilegnet kunnskap. Det multiplikative begrepsmessige området inneholder mange ulike komponenter, som for eksempel situasjoner, skjema, begreper, teoremer og symboler. Alle disse delene påvirker elevenes kognitive utvikling av området, og er med på å bygge opp elevenes kunnskap. I tillegg vil også elevenes sosiale samhandling med andre ha innvirkning på denne utviklingen. I møtet med nye situasjoner er det elevenes eksisterende kunnskap, som er bygd opp av blant annet disse komponentene, som tas i bruk for å takle de nye situasjonene. Teorien er ment som et rammeverk som kan hjelpe lærere og andre interesserte til å forstå hvordan elever utvikler sin matematiske kunnskap. Vergnaud oppfordrer i tillegg, gjennom denne teorien, til at lærere må gi elever utfordringer med stadig økende vanskelighetsgrad, slik at de hele tiden får mulighet til å utvikle sin kunnskap innenfor det multiplikative begrepsmessige området.

2.3 Operasjonen divisjon

I elevers skoleløp er som regel addisjon og subtraksjon de første regneartene som elevene blir presentert for. Multiplikasjon og divisjon blir introdusert litt senere, gjerne på 3. eller 4.trinn. Grunnen til at addisjon og subtraksjon blir innført før multiplikasjon og divisjon er at de oppfattes som enklere regnearter, i tillegg til at multiplikasjon og divisjon kan bygge på gjentatt addisjon eller subtraksjon. Men dette vil ikke si at multiplikasjon og divisjon kun er en mer komplisert form for addisjon og subtraksjon, det er mye mer som ligger til grunn for å forstå disse regneartene enn bare å regne ut summer. Operasjonen divisjon er mer kompleks enn addisjon og subtraksjon, og krever at elevene har kunnskap om multiplikasjonsfakta og en evne til å bruke addisjon og subtraksjon i løsningsmetodene sine (Anghileri, 2001b). Chapin og Johnson (2006) nevner også at elevene må inneha både begrepsmessig og prosessuell kunnskap for å forstå divisjon, noe som vil si at de må være i stand til å kjenne igjen en divisjonssituasjon i tillegg til å forstå hva de skal gjøre for å løse situasjonen/oppgaven (Chapin & Johnson, 2006). Dette innebærer at elevene må ha utviklet mentale skjema for divisjon, hvor de har organisert erfaringer, kunnskap og tenkemåter innenfor området. En forståelse av divisjon krever også at elevene har kjennskap til relasjonene mellom dividend, divisor og kvotient, samt hvilke roller hver av disse har i en divisjonsoppgave (Downton, 2009). Denne kjennskapen kan blant annet innebære en forståelse av det proporsjonale forholdet mellom dividend (y) og divisor (x), samt det omvendt proporsjonale forholdet mellom divisor og kvotient (k). Dette er, som tidligere nevnt, et sant teorem som elevene kan ha kunnskap om. I en divisjonsoppgave vil det alltid være et konstant proporsjonalt forhold mellom dividend og divisor, slik at en endring i den ene størrelsen vil kreve en forholdsmessig lik endring i den andre. Det vil si at dersom $y : x = k$, så vil også $(n \cdot y) : (n \cdot x) = k$ gjelde for alle tall n. Kvotienten (k) i divisjonsstykket, som i dette tilfellet også kan kalles proporsjonalitetsfaktoren, skal ikke endres. Når det gjelder det omvendt proporsjonale forholdet mellom divisor og kvotient, vil dette si at produktet av divisor og kvotient alltid skal være konstant, slik at for eksempel en dobling av divisor vil føre til en halvering av kvotient, og omvendt. Her vil dividenden utgjøre proporsjonalitetsfaktoren, som ikke skal endres, men er konstant. Det omvendt proporsjonale forholdet mellom divisor og kvotient kan også uttrykkes på en enkel måte: $x \cdot k = y$.

Divisjonsoppgaver kan klassifiseres etter semantisk struktur, som omhandler hvordan relasjonene mellom tallene i oppgaven blir uttrykt i ord (Chapin & Johnson, 2006). Den semantiske strukturen til multiplikasjon- og divisjonsoppgaver har to hovedkategorier: asymmetriske og symmetriske oppgaver. I asymmetriske multiplikasjonsoppgaver har de to gitte mengdene ulike roller, og man kan skille ut en klar multiplikator og multiplikand, mens det i symmetriske oppgaver ikke er noen klar forskjell på de to, slik at de kan byttes om uten at oppgaven endrer mening. Når det gjelder divisjonsoppgaver, er det litt vanskeligere å klassifisere disse oppgavene på en like enkel måte, ettersom de to gitte mengdene (dividend og divisor) i en divisjons-oppgave alltid vil ha ulike roller. Men dersom man ser på relasjonen mellom kvotient og divisor i divisjonsoppgaver, kan man skille mellom asymmetriske og symmetriske oppgaver. Underkategoriene av asymmetriske problem er 1) like grupper, 2) rate og 3) multiplikativ sammenligning, mens undergruppene av symmetriske problem er 1) rektangulært areal og 2) kartesisk produkt (Chapin & Johnson, 2006). En asymmetrisk divisjonsoppgave av typen rate kan for eksempel være: *Dersom 5 liter maling koster 225 kr, hva vil 1 liter maling koste?* I denne oppgaven er det en tydelig forskjell på divisor (5 liter) og kvotient (45 kroner), og de kan ikke endre plass uten at oppgaven endrer mening. Symmetriske divisjonsoppgaver er ikke like vanlige, og kan framstå som litt merkelige. For eksempel vil en symmetrisk kartesisk produkt-oppgave være: *Av alle buksene og genserne du har får du til sammen til 12 antrekk. Du har 3 bukser, hvor mange gensere har du da?* I denne oppgaven er ikke forskjellen på divisor (3) og kvotient (4) så betydningsfull, og man kan bytte om på mengdene uten at meningen i oppgaven vil endres noe særlig. De asymmetriske divisjonsoppgavene kan deles inn i to typer: delingsdivisjon- og målingsdivisjonsoppgaver. Det vanligste er å bruke like grupper-oppgaver når man snakker om delingsdivisjon og målingsdivisjon, ettersom både rate- og multiplikativ sammenligningsoppgaver kan være vanskelig å gi mening som målingsdivisjon. I delingsdivisjon er antallet undergrupper kjent og størrelsen på hver undergruppe er ukjent, mens det i målingsdivisjon er størrelsen på undergruppene som kjent og antallet undergrupper som er ukjent. En delingsdivisjonsoppgave av typen like grupper kan for eksempel være *Du har 12 drops som skal fordeles likt i 4 poser, hvor mange drops får du i hver pose?*, mens en tilsvarende målingsdivisjonsoppgave kan være *Du har 12 drops som skal fordeles i poser, med 4 drops i hver pose. Hvor mange poser blir det?* I mitt prosjekt har jeg brukt like grupper og rate som semantisk struktur på oppgavene jeg presenterte for elevene, et valg jeg vil begrunne i metodekapitlet.

2.4 Elevers divisjonsstrategier innenfor heltallsområdet

Flere tidligere forskningsartikler omhandler divisjonsstrategier innenfor heltalls-området, og ulike kategoriseringer av strategier har dermed også oppstått. I en studie av Anghileri (2001a) undersøkte hun hvilke framgangsmåter elever på 5.trinn brukte for å løse divisjonsoppgaver. Hun gjennomførte to tester med elevene, med ca. seks måneders mellomrom, og analyserte endringer i elevenes strategier. I testene inkluderte hun ti oppgaver, hvorav fem var tekstoppgaver og fem var rene talloppgaver. Målet med denne studien var å analysere elevenes strategier for å løse tekstoppgaver og rene talloppgaver i divisjon og å se på eventuelle forandringer i strategiene over en periode hvor elevene ble undervist i divisjon. Anghileri fant femten ulike elevstrategier, som hun videre samlet innunder åtte kategorier. Disse åtte kategoriene var:[1] 1) bruke tellestreker, utdeling eller direkte addisjon, 2) å "bryte ned" tallene i mindre deler på grunnlag av plassverdi, 3) lav-nivå gruppering, 4) høy-nivå gruppering, 5) standardalgoritmen, 6) mentale utregninger, 7) feil operasjon og 8) uklar strategi. I en studie av Mulligan og Mitchelmore (1997) undersøkte de elevers strategier for å løse multiplikasjon- og divisjonsoppgaver med heltall, og endte opp med en annen kategorisering av strategier enn det Anghileri (2001a) gjorde. I denne studien gjennomførte de intervju med elever i to påfølgende år, da elevene gikk på 2. og 3.trinn. I disse intervjuene inkluderte de seks divisjonsoppgaver av ulik semantisk struktur. De fant at elevene brukte tolv ulike strategier for å løse divisjonsoppgavene, som kunne grupperes i fire kategorier:[2] 1) direkte telling, hvor elevene støttet seg på telling av konkreter, 2) gjentatt subtraksjon, 3) gjentatt addisjon og 4) multiplikativ operasjon. Disse kategoriene kalte de intuitive modeller, på grunn av at elevene i studien ennå ikke hadde blitt undervist i divisjon. Jeg velger å kalle de kategorier i min oppgave, på grunn av at jeg benytter en annen definisjon av intuitive modeller, som jeg nevnte i innledninga. Denne definisjonen vil jeg komme tilbake til i neste delkapittel, hvor jeg presenterer Fischbein et al. (1985) sin teori om intuitive modeller.

Den mest brukte strategien i Anghileris (2001a) undersøkelse var standardalgoritmen, selv om det ikke var den mest suksessfylte. Elevene brukte gjerne standardalgoritmen i rene talloppgaver og spesielt i oppgaver hvor divisor var ensifra. Anghileri kunne også se at elevene gjorde det bedre i løsningen av tekstoppgaver enn talloppgaver. Dette mente hun var på grunn av at tekstoppgavene la opp til at elevene kunne bruke

[1] Oversatt fra engelsk av meg. De originale navnene er 1) tallying, sharing or direct addition, 2) partitioning into hundreds, tens and units, 3) low level chunking, 4) high level chunking, 5)
[2] Oversatt fra engelsk av meg. De originale navnene er 1) direct counting, 2) repeated subtraction, 3) repeated addition, 4) multiplicative operation.

uformelle strategier, mens talloppgavene la mer opp til bruk av standardalgoritmen. Uformelle strategier som Anghileri hadde plassert under kategorien lav-nivå gruppering, som gikk ut på å addere små delsummer i ganske lange prosedyrer, viste at elevene hadde en god forståelse av oppgaven, men de førte ofte til feil løsning på grunn av lange og dårlig organiserte utregninger. De uformelle strategiene som ble kategorisert under høy-nivå gruppering var de mest suksessfylte av alle strategiene i Anghileris studie, og var strategier hvor elevene brukte effektive delsummer og korte utregninger for å løse oppgavene (Anghileri, 2001a). I Mulligan og Mitchelmore sin studie så de at gjentatt addisjon var den mest brukte strategien, men at noen elever også tok i bruk multiplikative strategier, som for eksempel å lete etter et multiplum av divisor som var likt dividend eller å bruke multiplikasjon for å "sjekke svaret". De mener at det var en progresjon i elevenes strategibruk, fra den mest primitive kategorien direkte telling, via gjentatt subtraksjon og gjentatt addisjon opp til å bruke multiplikative operasjoner. Samtidig som denne strategiprogresjonen pågikk, kunne Mulligan og Mitchelmore også se at suksessraten blant elevenes løsninger ble høyere. I forskningsartikkelen sin antyder de i tillegg at gjentatt subtraksjon er en mer primitiv strategi enn gjentatt addisjon, på grunn av at gjentatt addisjon er nærmere knyttet til multiplikative strategier. Gjentatt addisjon kan brukes både for å løse multiplikasjonsoppgaver og divisjonsoppgaver, og kan dermed hjelpe elevene til å utvikle en forståelse av sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon.

I Anghileris (2001a, 2001b) studier kom det tydelig fram at selv om standardalgoritmen var mye brukt blant 5.trinnselever, førte den ofte til gale utregninger. Problemer oppstår gjerne når elever skal lære den mer formelle, tradisjonelle divisjonsalgoritmen, på grunn av at denne algoritmen ofte ikke passer sammen med elevenes intuitive strategier. I algoritmen er det et større fokus på tallenes siffer istedenfor tallene i sin helhet, og meningen bak stegene som blir tatt kan være vanskelige å forstå. Dette kan føre til at elevene memorerer stegene i algoritmen, uten å utvikle en forståelse av hva som blir gjort. Man kan si at elevene utvikler et mentalt skjema for denne algoritmen, men at de på grunn av manglende forståelse av algoritmen vil kunne bruke den galt i nye situasjoner, noe som vil føre til gale utregninger. Anghileri (2001b) sammenlignet også strategibruken hos 5.trinns-elever på ti engelske skoler med strategibruken hos 5.trinnselever på ti nederlandske skoler. Hun fant at de engelske elevene i større grad tok i bruk algoritmen i formaliseringen av divisjonsstrategier, noe som også førte til en mye større andel gale løsninger enn hos de nederlandske elevene, som støttet seg mest til effektiviserte uformelle metoder. Som tidligere nevnt, kunne jo også Anghileri se at bruken av uformelle, men effektive, strategier i kategorien høy-nivå gruppering var mer suksessfylt hos de engelske elevene enn bruk av standardalgoritmen. En grunn til at de engelske elevene støttet seg mye mer på standardalgoritmen enn det de nederlandske elevene gjorde mente Anghileri kunne være et ulikt fokus i divisjons-undervisningen i de to landene. I den engelske undervisningen blir standardalgoritmen presentert og vektlagt som en løsningsmetode, mens det i den nederlandske undervisningen blir lagt mer vekt på at elevene selv skal få utvikle og effektivisere sine uformelle strategier.

Når det gjelder hva som påvirker elevene i deres valg av strategi, har noen tidligere studier vist at tallene som blir brukt i divisjonsoppgaver kan ha større påvirkning enn det oppgavetypene eller deres semantiske struktur har. I en studie av Ann Downton (2009) undersøkte hun hvilke strategier 3.trinnselever brukte for å løse delingsdivisjon- og målingsdivisjonsoppgaver, for å se om de to ulike divisjonstypene hadde innvirkning på elevenes valg av strategier. Hun fant at elevene i stor grad brukte multiplikativ utregning og gjentatt addisjon for å løse begge typer oppgaver, hele tre fjerdedeler av elevgruppa brukte multiplikativ tenkning i sine løsnings-metoder. Downtons analyser av elevenes løsningsstrategier antydet at mange elever ikke brydde seg om oppgavene var delingsdivisjon eller målingsdivisjon, men heller fokuserte på tallene i oppgavene og løste dem gjennom å bruke den inverse operasjonen multiplikasjon. Det kunne altså se ut som at tallene i oppgavene påvirket elevenes valg av strategi i større grad enn om det var delingsdivisjon- eller målingsdivisjonsoppgaver (Downton, 2009). Mulligan og Mitchelmore (1997) fant i sin studie, hvor de hadde inkludert divisjonsoppgaver med ulik semantisk struktur, at elevene ikke brukte de samme strategiene for å løse ulike divisjonsoppgaver med lik semantisk struktur. De brukte forskjellige strategier selv om oppgavene var av samme semantiske struktur, noe som kan antyde at tallene eller ordvalgene i oppgavene hadde større innflytelse på elevenes valg av strategier enn den semantiske strukturen.

2.5 Typiske misoppfatninger om divisjon

Flere tidligere forskningsartikler har pekt på de typiske misoppfatningene blant elever (og voksne) om at divisjon alltid gjør mindre og at multiplikasjon alltid gjør større (Graeber & Campbell, 1993, Harel, Behr, Post, & Lesh, 1994, Okazaki & Koyama, 2005, Tirosh & Graeber, 1989). Disse oppfatningene har som oftest grobunn i elevers arbeid med divisjon på småtrinnet, hvor divisjon nesten alltid er et større heltall dividert på et mindre heltall, og hvor en eventuell rest blir skrevet ned eksplisitt istedenfor at divisjonen blir fortsatt som brøk eller med bruk av desimaltall (Bell et al., 1984). Denne oppfatningen om divisjon medfører riktighet i heltallsområdet, men vil ikke lengre gjelde når vi tar i bruk divisorer som er mindre enn 1. I tillegg til denne misoppfatningen er det mange elever som mener at man ikke kan dividere et mindre tall på et større, en oppfatning som også ofte oppstår på grunn av arbeid med divisjon på småtrinnet, hvor divisorer større enn dividend ikke blir inkludert (Graeber & Baker, 1992). I følge Graeber og Baker er dette en misoppfatning som ofte viser seg i elevenes symboliseringer av divisjonsoppgaver, selv om elevene kan oppfatte at denne operasjonen er mulig i praksis, gjennom for eksempel en kontekst hvor man skal dele 1 pizza på 4 personer.

Tidligere nevnte jeg at Anghileri (2001a, 2001b) fant at 5.trinnselever brukte divisjonsalgoritmen i stor grad for å løse divisjonsoppgaver, men at denne strategien ofte førte til feil svar, på grunn av manglende forståelse for selve prosessen man følger i algoritmen. Bell et al. (1984) mener at man istedenfor å vektlegge undervisning av divisjonsalgoritmen bør bruke mer kalkulator tidligere i skolegangen, slik at man heller kan gi mer oppmerksomhet til relasjonene mellom størrelsene i oppgavene og meningen bak operasjonene man utfører. Det er enkelt å gi mening til 24 : 6 som målingsdivisjon og delingsdivisjon, men vanskeligere å gi 6 : 24 mening som målingsdivisjon. Det er derimot greit å gi oppgaven mening som delingsdivisjon, med for eksempel: *Jørn har 6 liter saft som skal fordeles på 24 glass, hvor mye saft blir det i hvert glass?* Divisjonsproblemet 6 : 0,5 kan være krevende å oppfatte som delingsdivisjon, mens en målingsdivisjonsmodell for dette problemet er enklere (for eksempel 6 meter tau som skal deles inn i lengder på 0,5 meter) (Bell et al., 1984). Det er altså viktig som lærer å tenke over hvilke meninger som kan ilegges divisjonsproblemer av disse typene, slik at de typiske misoppfatningene om divisjon kan utfordres og endres.

Fischbein et al. (1985) mener at elever som oftest innehar to intuitive modeller for divisjon som kan sette begrensninger når de skal løse divisjonsoppgaver. Disse intuitive modellene er basert på delingsdivisjon og målingsdivisjon i heltallsområdet, og kan sette begrensninger for elevenes forståelse av divisjon. Begrensningene som delingsdivisjonsmodellen setter er at divisor må være et heltall mindre enn dividend, og dette fører da med seg at kvotient alltid må være mindre enn dividend. I målingsdivisjonsmodellen er kun begrensningen at divisor må være mindre enn dividend. Grunnene til at disse begrensningene dukker opp er at i delings-divisjonsoppgaver skal et objekt eller en samling objekter deles inn i et antall like deler eller undergrupper, og størrelsen på objektet eller samlingen objekter er representert i dividenden, antallet like deler eller undergrupper er representert i divisoren, mens størrelsen på hver del eller undergruppe er representert i kvotienten. Man skal altså dele ut en samling objekter til et gitt antall undergrupper for å finne ut hvor mange objekter som går i hver undergruppe. Det er dermed forståelig at elevene mener at dividenden må være større enn divisoren, at divisoren må være et helt tall og at kvotienten må være mindre enn dividenden. I målingsdivisjonsmodellen skal man finne ut hvor mange ganger en gitt mengde finnes i en større mengde. Her vil altså divisor og dividend ha samme benevning, og det blir logisk at den ene begrensningen som da settes er at divisor må være mindre enn dividend. I min studie støtter jeg meg på Fischbein et al. sin definisjon av intuitive modeller, og bruker dette begrepet i samsvar med deres definisjon. Det vil si at begrepet intuitive modeller ikke omhandler noen spesifikke strategier, men er en betegnelse på modeller som kan oppstå hos elevene gjennom arbeid med divisjon innenfor heltallsområdet, og som kan sette begrensninger for elevenes forståelse av divisjon. Fischbein et al. gjennomførte i 1985 en studie med til sammen 628 elever fra 5., 7. og 9.trinn i Pisa i Italia, hvor de fant flere eksempler på at elever presterte dårligere når noen av disse begrensningene ble overtrådt. I delingsdivisjonsoppgaver hvor ingen av begrensningene ble brutt, var det en svært høy suksessrate blant alle elevene. Da begrensningen om at divisor må være mindre enn dividend ble brutt, falt suksessraten drastisk, fra mellom 70-99% suksess til 14-41% suksess. Det var også en stor nedgang i suksessfylte løsninger i delingsdivisjonsoppgaver hvor divisoren var desimaltall, altså hvor begrensningen om at divisor må være et heltall ble brutt. De så at elevene gjorde det bedre i målingsdivisjonsoppgaver hvor divisor var desimaltall enn i delingsdivisjonsoppgaver med desimaltallsdivisor. Dette funnet støttet antakelsen om at den negative effekten av en desimaltallsdivisor minsker i målingsdivisjonsoppgaver (Fischbein et al., 1985). I en studie av Harel et al. (1994) undersøkte de i hvor stor grad lærerstudenter lyktes med å løse divisjonsoppgaver hvor ingen, én eller flere av begrensningene fra de intuitive modellene ble brutt. De fant, i likhet med Fischbein et al. (1985), at informantene gjorde det gjennomsnittlig bedre i løsningen av oppgaver hvor ingen av begrensningene ble brutt enn i oppgaver hvor en eller flere av disse begrensningene ble brutt.

2.6 Divisjon med desimaltall

I sine studier av elevers divisjonsstrategier inkluderte Downton (2009), Mulligan og Mitchelmore (1997) og Anghileri (2001a, 2001b) kun tall fra heltallsområdet, både i dividend og divisor. Graeber og Tirosh (1990) inkluderte desimaltallsdivisorer i sin studie, i tillegg til at de brukte andre divisjonsoppgaver som bevegde seg utenfor heltallsområdet. De undersøkte hvordan ulike oppfatninger blant 4. og 5.trinnselever om multiplikasjon og divisjon kunne være hjelpende eller ødeleggende i utviklingen av en forståelse for multiplikasjon og divisjon med desimaltall. I denne studien gav de blant annet elevene tekstoppgaver, hvor de inkluderte en målingsdivisjonsoppgave og en delingsdivisjonsoppgave hvor divisor var mindre enn dividend, samt en delingsdivisjonsoppgave hvor divisor var større enn dividend. I de to første oppgavene var elevenes suksessrate henholdsvis 80% og 90%, mens kun ti av seksti elever klarte oppgaven hvor divisor var større enn dividend. Det var altså tydelig at en divisor større enn dividend førte til store problemer blant elevene. Graeber og Tirosh kunne også se i sin studie at elevene støttet seg mer til delingsdivisjon da de skulle forsøke å definere divisjon og da de skulle lage tekstoppgaver ut i fra gitte talloppgaver, noe som kan være problematisk for utviklingen av en forståelse for divisjon med desimaltallsdivisor, som er enklere å forstå gjennom bruk av målingsdivisjon.

Okazaki og Koyama (2005) fokuserte også i sin studie på divisjon med desimaltall, og hadde som mål å avklare hvordan elevers vanskeligheter kan oppstå og muligens bli overvunnet i begynnende undervisning av divisjon med desimaltall, og hvordan elever kan utvikle sin tenkning i prosessen med å overvinne disse vanskelighetene. De antydet i sin studie at tallene som blir brukt i divisjonsoppgaver har innvirkning på elevenes prestasjoner. Dersom divisoren i en oppgave er et desimaltall, vil elevenes prestasjoner synke, og dersom den er mindre enn 1, vil prestasjonene synke enda mer. I oppgaver hvor divisor er desimaltall kan ikke elevene lengre se for seg at noe blir delt inn i like store deler, slik som med heltallsdivisorer, og dersom divisor er mindre enn 1, vil heller ikke oppfatningen om at divisjon alltid gjør mindre gi mening lengre. Okazaki og Koyama støttet seg på Fischbein et al. (1985) sin teori om intuitive modeller, som beskrevet i forrige delkapittel, og Piagets likevektsteori, som hevder at det er nødvendig med en kognitiv ubalanse mellom mennesket og omverdenen for at mennesket skal kunne utvikle ny kunnskap som gjenoppretter den kognitive balansen (Holgersen, 1998). I studien introduserte de divisjon med desimaltall til elever på 5.trinn, og undersøkte hvordan elevene kunne få hjelp til å overkomme misoppfatningene sine i løpet av seks undervisningsøkter. De la vekt på at elevene selv skulle få konstruere meningen med divisjon, og mente at det var utilstrekkelig at elevene kun lærte prosedyrer for å løse divisjonsoppgaver. I undervisningsøktene fikk elevene jobbe med tre divisjonsoppgaver hvor divisor var desimaltall større og mindre enn 1. Alle tre oppgavene var av den semantiske strukturen rate. De inkluderte ikke desimaltall i dividend, da tidligere studier hadde antydet at divisoren hadde større påvirkningsfaktor enn dividenden. Etter å ha gjennomført undervisningene, kunne Okazaki og Koyama (2005) se at elevene ga mening til divisjon med desimaltall gjennom å oppleve ubalanse og gjentatte ganger overvinne denne ubalansen, noe som var i tråd med Piagets likevektsteori. Et av hovedfunnene fra studien var at en forståelse av det motsvarende forholdet mellom divisjon og multiplikasjon var det som gjorde at elevene klarte å frigjøre seg fra restriksjonene i deres intuitive modeller.

3. Metodiske valg

I dette kapitlet vil jeg greie ut om og vurdere de metodiske valgene jeg har gjort i prosjektet mitt. Jeg vil forklare og begrunne mitt forskningsdesign, mitt valg av trinn og elever, datainnsamlingsprosessen, utarbeidingen av oppgavene til elevene og mine valg i analyseprosessen. Deretter vil jeg peke på etiske betraktninger i kvalitative studier, før jeg til slutt retter et kritisk blikk mot mine metodevalg og påpeker hvordan jeg har jobbet for å kvalitetssikre prosjektet.

3.1. Mitt forskningsdesign: en kvalitativ kasusstudie

I masterprosjektet mitt er det naturlig at valg av forskningsmetode faller på den kvalitative siden, da jeg ønsker å utforske og utvikle en forståelse av elevers divisjonsstrategier. Jeg ønsker å finne ut noe om elevenes tenkning i deres arbeid med divisjon, og må derfor ha et nært samarbeid og en god dialog med disse elevene. I følge Postholm (2010) innebærer kvalitativ forskning å utforske menneskelige prosesser eller problemer i en virkelig setting, hvor forskeren skal være åpen for det deltakerne sier og gjør. I kvalitativ forskning skal det være et nært samarbeidsforhold mellom forsker(e) og forskningsdeltaker(e), og målsettingen er å beskrive kompleksiteten av et fenomen knyttet til et bestemt fokus eller en problemstilling, hvor deltakernes perspektiv skal løftes fram (Postholm, 2010). I mitt prosjekt ønsker jeg å beskrive og analysere elevenes strategier og tenkning i deres arbeid med divisjonsoppgaver med både heltallsdivisorer og desimaltallsdivisorer. I tillegg ønsker jeg å finne ut av hvilke faktorer som ser ut til å påvirke elevenes valg av strategier og hvilke utfordringer elevene ser ut til å møte i arbeidet med divisjonsoppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet. Alt dette vil jeg gjøre med grunnlag i intervju og observasjon av elevene i deres skolevirkelighet. Merriam (2009) nevner også at kvalitative forskere er interesserte i å forstå hvordan mennesker tolker sine erfaringer, hvordan de konstruerer sin verden og hvilken mening de legger i sine erfaringer. Det er et dyptliggende ønske om å forstå som er grunnsteinen i den kvalitative forskningen, en forståelse basert på deltakernes perspektiver, ikke forskerens (Merriam, 2009). I min studie har jeg til hensikt å få kjennskap til elevers divisjonsstrategier, i tillegg til at jeg har et ønske om å forstå hva som kan ligge til grunn for elevenes valg av strategier og finne ut av hvilke utfordringer de møter i arbeidet med divisjon utenfor heltallsområdet. For å få denne kjennskapen og forståelsen må jeg få tilgang til elevenes perspektiver, noe som best muliggjøres gjennom å samtale med elevene og lytte til deres forklaringer og resonnement i arbeidet med divisjonsoppgaver.

Det er vanskelig å gi én konkret beskrivelse av kvalitative kasusstudier, og mange ulike definisjoner og forklaringer kan finnes hos ulike forfattere. I dette prosjektet har jeg basert meg på Merriams (2009) og Postholms (2010) definisjoner. I følge Merriam (2009) deler kvalitative kasusstudier sammen med andre typer kvalitativ forskning en streben etter mening og forståelse, en induktiv utforskende strategi med forskeren som hovedinstrument for datainnsamling og analyse og et sluttprodukt som er svært beskrivende. Det som skiller dette forskningsdesignet fra andre typer kvalitative studier er at det er en dyptgående beskrivelse og analyse av et bundet system (et kasus). Det viktige er å begrense kasuset i studien, det vil si å definere studiens analyseenhet. Det er denne analyseenheten, og ikke temaet i undersøkelsen, som karakteriserer en kasusstudie. For at det skal være en kasusstudie, må det være et bundet system, som for eksempel en person, en gruppe elever eller en skole, som er analyseenheten (Merriam, 2009). I min studie utgjør de tre elevene dette kasuset eller denne analyseenheten, og det er disse tre elevenes uttalelser og handlinger som utgjør grunnlaget for mine beskrivelser og analyser. I følge Postholm (2010) har ikke kasusstudier én spesifikk framgangsmåte, men forskere innenfor dette området har en eklektisk tilnærming til forskningen, hvor de bruker datainnsamlingsstrategier som er passende og praktiske. Hun trekker også fram at et essensielt trekk for en kasusstudie er at tilstrekkelige data blir samlet inn slik at forskeren gjøres i stand til å utforske viktige trekk og tolke det som blir studert (Postholm, 2010). Jeg valgte datainnsamlingsmetoder ut i fra hva jeg fant passende for min studie, og brukte både intervju og observasjon for å få inn nok datamateriale. Jeg samlet i tillegg inn skriftlig materiale fra elevene, der de hadde skrevet ned utregningene sine. Basert på Postholm (2010) vil jeg karakterisere studien min som en beskrivende og fortolkende kasusstudie, på det grunnlag at den har en beskrivende del, men at den også har til hensikt å støtte, utfordre og utvikle eksisterende teori. Jeg ønsker å beskrive og analysere elevenes divisjonsstrategier, men også å tolke og drøfte disse strategiene opp i mot tidligere forskning og annen relevant teori på området.

3.2 Valg av elever og datainnsamlingsmetoder

Jeg nevnte i innledninga at jeg valgte å gjennomføre dette prosjektet på 6.trinn på grunn av at elever på dette trinnet har jobbet en del med divisjon, men at de enda ikke har begynt med divisjon med desimaltall. Jeg kunne selvfølgelig ikke være sikker på at elevene ikke hadde jobbet noe med desimaltallsdivisjon på dette trinnet, men etter en gjennomgang av flere forskjellige læreverk så jeg at desimaltallsdivisjon som oftest ikke kom inn i læreverkene før på 7.trinn. Dette var viktig i forbindelse med prosjektet mitt fordi jeg ønsket å se på hvilke strategier elevene tok i bruk i divisjonsoppgaver med både heltallsdivisorer og desimaltallsdivisorer, samt hvilke utfordringer elevene møtte i arbeidet med divisjonsoppgaver som bevegde seg utenfor heltallsområdet. For at dette arbeidet faktisk skulle innebære nye situasjoner og være utfordrende for elevene, burde divisjon innenfor desimaltallsområdet være nytt for dem.

For å velge ut de tre elevene som skulle være mitt kasus, lagde jeg et oppgavesett med ulike divisjonsoppgaver som alle elevene på trinnet skulle løse. I dette oppgavesettet (vedlegg 1) skulle elevene notere ned framgangsmåten de brukte for å løse de ulike oppgavene. Jeg inkluderte oppgaver med både heltallsdivisor og desimaltallsdivisor, hvorav noen var tekstoppgaver og andre rene talloppgaver. Ettersom forsknings-spørsmålene mine omhandler elevers strategier og utfordringer i arbeid med divisjonsoppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet, var talltypene i divisor den viktigste faktoren i utarbeidingen av oppgavene, både til hele klassen, til intervjuene og til gruppearbeidet. I tillegg ønsket jeg å inkludere delingsdivisjon-, målingsdivisjon- og rene talloppgaver, for å se om de ulike oppgavetypene hadde noen innvirkning på elevenes valg av strategi. I det første oppgavesettet jeg lagde skulle elevene i tillegg si seg enige eller uenige i åtte ulike utsagn om divisjon, noe som kunne gi meg en pekepinn på om de hadde noen typiske misoppfatninger om divisjon, som for eksempel at divisjon alltid gjør mindre og at dividend alltid må være større enn divisor (Fischbein et al., 1985, Graeber & Campbell, 1993, Okazaki & Koyama, 2005). Med grunnlag i elevbesvarelsene på dette oppgavesettet, valgte jeg ut tre elever som brukte flere ulike divisjonsstrategier og som viste tegn til å ha noen misoppfatninger av divisjon til å være mitt kasus. To av elevene lyktes i å løse divisjonsoppgaver med desimaltallsdivisor i oppgavesettet, mens den tredje eleven ikke lyktes med noen oppgaver med desimaltallsdivisor. Jeg valgte disse elevene fordi de viste en bredde i bruk av divisjonsstrategier, og fordi de typiske misoppfatningene de gav uttrykk for å inneha kunne skape utfordringer i arbeidet med divisjons-oppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet.

Jeg gjennomførte deretter enkeltintervju med hver av disse elevene, hvor jeg brukte nye divisjonsoppgaver som grunnlag for dialog med elevene. Dette intervjuet kan karakteriseres som et halvstrukturert intervju, noe som vil si at jeg på forhånd hadde gjort meg opp noen tanker om spørsmål som kunne bli aktuelle å stille elevene, men at jeg underveis i intervjuet baserte spørsmålene mine på det elevene sa og gjorde i arbeidet med oppgavene de fikk. Merriam (2009) beskriver at i halvstrukturerte intervju blir den som intervjuer guidet av en liste med spørsmål eller emner som skal utforskes, uten at disse spørsmålene er skrevet ned ordrett eller i en gitt rekkefølge. Hun sier videre at dette formatet gir forskeren mulighet til å respondere på situasjoner som oppstår og på utsagn og ideer fra intervjuobjektet. Mine intervju med elevene var basert på divisjonsoppgaver som jeg hadde utarbeidet på forhånd (vedlegg 2), mens selve gjennomføringen av intervjuene ikke fulgte en gitt spørsmålsrekke, men utviklet seg mer som en dialog mellom meg og eleven. Jeg ønsket at elevene skulle forklare strategiene sine til meg, slik at jeg kunne få innsikt i hva de tenkte når de løste divisjonsoppgavene. Det var hele tiden dette med å få tak i elevenes tenkning som var i fokus under intervjuene. Derfor ville jeg heller ikke stoppe elevene i deres strategivalg selv om de førte til feil løsning på oppgavene, og oppfordret de hele veien til å forklare hva de tenkte og gjorde, uansett hva utfallet av denne tenkningen ble. Dette fokuset forklarte jeg til elevene før vi begynte, slik at de visste hva som var målet med intervjuet. Alle tre intervjuene ble filmet med videokamera, i tillegg til at jeg tok lydopptak for å sikre at jeg hadde en god lydfil til senere transkribering.

Etter gjennomføringen av enkeltintervjuene og en gjennomgang av videoopptakene, syntes jeg ikke at jeg hadde tilstrekkelig med datamateriale for å kunne belyse hvilke utfordringer elevene møtte i arbeidet med divisjonsoppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet. Derfor valgte jeg å utarbeide et nytt sett med divisjonsoppgaver (vedlegg 3), som de tre elevene skulle samarbeide om. Jeg valgte gruppearbeid til denne siste datainnsamlingen, både på grunn av at jeg syntes det var interessant å observere hvordan elevene argumenterte for og forklarte sine strategier for hverandre, samtidig som det ikke ville gjøre datamaterialemengden min uoverkommelig stor. I motsetning til intervjuene plasserte jeg meg selv som en ikke-deltakende observatør i denne delen av datainnsamlinga, og lot elevene snakke seg i mellom uten innblanding fra meg. Dette gjorde jeg fordi jeg ønsket å høre på elevenes forklaringer uten at de ble påvirket av spørsmål eller utsagn fra meg. I noen få tilfeller stilte jeg elevene korte spørsmål, men dette var kun for å få elevene til å forklare noen strategier litt mer grundig eller oppklare misforståelser dersom det var noe som var uklart. Dette gruppearbeidet ble også filmet og tatt lydopptak av, slik at jeg senere kunne transkribere det.

3.3 Om utarbeidingen av de ulike divisjonsoppgavene

Som sagt, utarbeidet jeg egne divisjonsoppgaver til hele trinnet, til enkeltintervjuene og til gruppearbeidet. Oppgavene var utviklet med grunnlag i forskningsspørsmålene mine, og inkluderte ulike divisorer og oppgavetyper, som jeg nevnte i forrige delkapittel. Størrelsen på tallene i oppgavene var nøye gjennomtenkt, og basert på funn fra tidligere forskning som omhandlet utfordringer og misoppfatninger innenfor divisjon. I studien til Okazaki og Koyama (2005) ble det også påpekt at desimaltall i divisor førte til større vanskeligheter hos elevene enn desimaltall i dividend. Jeg valgte derfor å innsnevre oppgavene mine til kun å ha desimaltall i divisor, og ikke i dividend. Oppgavene ble også utviklet med et formål om å kunne åpne opp for bruk av ulike divisjonsstrategier og for å oppdage sammenhenger mellom oppgavene, i tillegg til å kunne gi elevene utfordringer de ikke hadde møtt før. I det første oppgavesettet jeg lagde, inkluderte jeg fem talloppgaver og fem tekstoppgaver med ulike divisorer, tre divisjonsrekker som kunne hjelpe elevene med å se en sammenheng mellom økende/minkende divisor og det omvendte i kvotient, i tillegg til at jeg hadde med de åtte utsagnene som elevene skulle si seg enige eller uenige i. Dette oppgavesettet ble, som sagt, utarbeidet med det formål å gi meg et grunnlag til å velge ut tre elever til enkeltintervju. I intervjudelen av prosjektet ble det noe ulikt antall oppgaver på hver elev, på grunn av ulik tidsbruk blant elevene i løsningen av oppgavene. To elever arbeidet med elleve oppgaver, mens den tredje eleven kom gjennom femten oppgaver. Intervjuene varte i omtrent en time hver. Det ble også noen forskjeller på selve oppgavene som de ulike elevene jobbet med i intervjuene. Dette skjedde på grunn av elevenes ulike framgangsmåter og forklaringer, noe som resulterte i at jeg endret, la til, eller fjernet noen oppgaver underveis. Dette var hovedsakelig tallendringer, fordi jeg ønsket at strukturen på oppgavene skulle være lik i alle intervjuene. Det vil si at noen elever fikk forskjellige heltall og desimaltall i divisoren i oppgavene de skulle løse, men at alle fikk tekstoppgaver og talloppgaver med heltallsdivisor større eller mindre enn dividend og desimaltallsdivisor større eller mindre enn 1. Jeg mener derfor at dette ikke har noen negativ innvirkning på min datainnsamling, ettersom det var talltypene i oppgavene som var viktigst med tanke på mine forskningsspørsmål. Hensikten var at elevene skulle få både tekstoppgaver og rene talloppgaver hvor divisor varierte mellom å være heltall større eller mindre enn dividend og desimaltall større eller mindre enn 1. Gjennom disse varierte oppgavene la jeg godt til rette for at elevene kunne ta i bruk ulike strategier og i tillegg møte noen utfordringer. Derfor mener jeg at oppgavene som ble brukt i de forskjellige intervjuene er sammenlignbare selv om de ikke er prikk like. I analysekapitlet vil jeg forklare utarbeidingen av divisjonsoppgavene på et mer detaljert nivå.

3.4 Metodiske valg i analyseprosessen

Etter at jeg var ferdig med datainnsamlingsprosessen, begynte bearbeidinga av datamaterialet. Jeg transkriberte de fire videoopptakene jeg hadde, slik at jeg fikk skrevet ned alt som ble sagt under intervjuene og gruppearbeidet. Gjennom å transkribere gjorde jeg datamaterialet mitt mer oversiktlig og enklere å analysere. I analysekapitlet vil jeg presentere noen utdrag fra transkripsjonene mine, som eksemplifiserer elevenes divisjonsstrategier i ulike sammenhenger. I disse utdragene bruker jeg tall som forteller om hvilket intervju og hvor i dette intervjuet utdragene er hentet fra, samt bokstaver som forkortelser for hvem det er som sier hva. Intervjuene har nummer fra 1 til 3, og utsagnene er nummerert fra 1 og utover i hvert intervju. Jeg, som intervjuer, har bokstavforkortelsen I, mens eleven som blir intervjuet har bokstavforkortelsen E. Det vil si at dersom det står for eksempel 1.23 i utdraget, vil dette si at det er ytring 23 i første intervju. Ettersom jeg ikke kommer til å bruke noen utdrag fra gruppearbeidet i analysekapitlet, inkluderer jeg ikke kodene for denne transkripsjonen i oppgaven.

Samtidig som jeg transkriberte, begynte jeg også forsiktig å analysere det transkriberte materialet. Mens jeg skrev merket jeg meg interessante utsagn og gjentakende divisjonsstrategier, og jeg gjorde meg opp noen tanker rundt datamaterialet mitt. Denne begynnende analysen var med å hjelpe meg i oppstarten av selve analyseprosessen min. Merriam (2009) beskriver at en analyseprosess begynner med å identifisere hvilke deler av datamaterialet som kan gi svar på de forsknings-spørsmålene man har, noe som kan være så små deler som et ord eller så store deler som flere sider med feltnotater. Videre involverer denne prosessen å slå sammen, redusere og tolke det som er blitt sagt og det som forskeren har sett og lest. Man beveger seg mye fram og tilbake mellom konkrete deler av datamaterialet og abstrakte begrep og mellom beskrivelse og tolkning i dette arbeidet, og vil gjennom denne prosessen til slutt komme fram til funn som svarer på de forskningsspørsmålene man har (Merriam, 2009). I analysearbeidet mitt hadde jeg en induktiv tilnærmingsmåte, hvor jeg begynte analyseringen av datamaterialet gjennom åpen koding. Postholm (2010) beskriver åpen koding som den delen av analysen hvor forskeren setter navn på og kategoriserer fenomener gjennom intens og nøye gjennomgang av datamaterialet. I denne prosessen blir data delt inn i mindre deler og gitt et navn eller det man kan kalle en kode. I følge Vivi Nilssen (2012) er en induktiv analyse å oppdage mønstre, temaer og kategorier i datamaterialet, og hun skriver at forskere som arbeider etter en induktiv metode ikke har forhåndsdefinerte kategorier som de leter etter en bekreftelse av i datamaterialet, men utvikler merkelapper ut i fra sitt perspektiv, sin kunnskap og sin erfaring. Gjennom min induktive analyse utviklet jeg tolv koder for elevenes divisjonsstrategier. I utviklingen av disse kodene gikk jeg så åpent som jeg kunne inn i datamaterialet for å finne elevenes ulike divisjons-strategier. Grunnen til at jeg peker på at det var "så åpent som jeg kunne", er at jeg ikke kunne unngå å være påvirket av tidligere forskning jeg hadde lest og min egen forkunnskap på området. Jeg hadde tidligere lest blant annet Anghileris studie av divisjonsstrategier fra 2001, hvor hun kodet elevers strategier i heltallsdivisjon, så man kan si at mine koder var inspirert av Anghileris koder, men at de allikevel ble utviklet ut i fra det datamaterialet jeg hadde. Etter å ha kodet elevenes strategier, ble det neste steget for meg å kategorisere disse kodene. I kategoriseringsprosessen forklarer Postholm (2010) at man grupperer begreper som ser ut til å dekke de samme fenomenene, og dermed reduserer antall enheter man skal jobbe videre med. I kategoriseringsprosessen plasserte jeg de tolv kodene jeg hadde utviklet innunder tre kategorier. Disse kategoriene ga meg samlebetegnelser på hvilke operasjoner elevene tok i bruk i de ulike strategiene jeg hadde kodet. Gjennom denne koding- og kategoriseringsprosessen fant jeg altså svar på det første forskningsspørsmålet mitt: *Hvilke strategier bruker elever på 6.trinn for å løse divisjonsoppgaver med heltallsdivisor og desimaltallsdivisor?*

I det videre analysearbeidet tok jeg i bruk tabeller som analyseverktøy for å sette elevenes valg av strategier i sammenheng med de ulike oppgavetypene de hadde jobbet med. I dette arbeidet benyttet jeg begrepet oppgavetype i en svært vid forstand, hvor jeg inkluderte oppgaver som inneholdt ulike talltyper, delingsdivisjon-, målingsdivisjon- og rene talloppgaver. I denne komparative delen av analysen lette jeg etter sammenhenger mellom valg av strategi og oppgavetype, samt suksessrate og oppgavetype, for å se om dette kunne gi svar på de andre forskningsspørsmålene mine: *Hvilke faktorer påvirker elevenes valg av strategi?* Og *hvilke utfordringer møter elevene i arbeidet med divisjonsoppgaver utenfor heltallsområdet?* Jeg utviklet flere tabeller som ga meg en god oversikt over hvilke strategier som ble brukt i hvilke oppgaver. Her kunne jeg se på hyppigheten av hver strategi innenfor en gitt oppgavetype, antall ganger de ulike strategiene ble brukt i alt, suksessraten til de ulike strategiene, og hvilke kategorier som var dominerende i elevenes arbeid med de ulike divisjonsoppgavene. Gjennom mange slike sammenligninger kunne jeg finne svar på hvor det så ut til at de fleste utfordringene lå for elevene. Denne prosessen var tett knyttet til lesing av teori, for å se om mine funn kunne støtte eller utfordre funn fra tidligere forskning. I analysekapitlet vil jeg gå grundigere gjennom hele analyse-prosessen og forklare kodene, kategoriene, utfordringene og påvirkningsfaktorene jeg fant.

3.5 Etiske betraktninger

Som kvalitativ forsker i klasserommet er det mange etiske betraktninger som må overveies, både før, under og etter forskningsarbeidet. Helt i oppstarten av prosjektet mitt sendte jeg inn et meldepliktskjema til NSD (Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste), for å få det godkjent før jeg satte i gang. Dette meldeskjemaet må sendes inn dersom forskningsprosjektet man skal sette i gang med skal behandle personopplysninger ved hjelp av blant annet datamaskinbasert utstyr, noe som var tilfelle i min studie. Da jeg hadde fått godkjenningen fra NSD, var det neste skrittet å samle inn informert samtykke fra elevenes foreldre eller foresatte. I dette skrivet ble foreldrene informert om hva prosjektet mitt gikk ut på, hvilke datainnsamlings-metoder som kom til å bli tatt i bruk, samt at elevene kunne trekke seg fra studien på et hvilket som helst tidspunkt. Jeg var også nøye med å informere elevene om hva prosjektet gikk ut på fra starten av, slik at de visste hva de sa ja til å være med på. I oppstarten av intervjuene forklarte jeg elevene hvordan intervjuet kom til å utarte seg, at jeg tok video- og lydopptak av intervjuet som kun var til egen bruk i arbeidet med denne studien, samt at de ville bli anonymisert i oppgaven som jeg skulle skrive. Jeg ønsket også at elevene skulle føle minst mulig prestasjonspress, og understrekte at jeg var der for å lære av deres måter å jobbe med divisjonsoppgaver på. Prinsippet om at forskningen på ingen måte skal være skadelig for deltakerne var viktig for meg, og var noe som gjennomsyret både intervjuene og gruppearbeidet. Jeg ville at elevene skulle ha tillit til meg, slik at vi fikk en best mulig dialog som igjen kunne gi meg mest mulig informasjon. For å anonymisere elevene, vil jeg ikke nevne navn på noen av elevene i denne teksten. I tillegg vil alle videoer og lydopptak bli slettet når prosjektet er avsluttet, slik at ingen andre får tilgang på dette. Jeg vil heller ikke oppgi navnet på skolen jeg var på, for å sikre skolens og lærerens anonymitet.

3.6 Kvalitetssikring og metodekritikk

I masterprosjektet mitt er hovedvekten plassert på talltypen i divisor i oppgavene jeg utarbeidet, og ikke oppgavenes semantiske struktur. De semantiske strukturene jeg inkluderte var hovedsakelig like grupper-oppgaver, samt at jeg inkluderte en rate-oppgave i gruppearbeidet. Av oppgavetyper varierte jeg mellom rene talloppgaver og tekstoppgaver som enten var av typen målingsdivisjon eller delingsdivisjon. Flere tidligere forskere på området har brukt mange andre semantiske strukturer i sine studier av divisjonsstrategier, som for eksempel multiplikativ sammenligning, rektangulært areal og ganger så mange[3] (Downton, 2009, Mulligan & Mitchelmore, 1997). Men disse studiene har kun inkludert heltall, i motsetning til min studie. Et større utvalg av semantiske strukturer blant mine oppgaver kunne muligens ha påvirket elevenes valg av framgangsmåter i løsningen av oppgavene, men på grunn av viktigheten av talltypene i mine oppgaver, måtte jeg prioritere å utarbeide oppgaver som var lettfattelige for elevene, hvor de ulike talltypene ble inkludert. Jeg var i all hovedsak interessert i å finne ut av hvilke strategier elevene tok i bruk for å løse oppgaver med heltallsdivisor og desimaltallsdivisor og hvilke utfordringer de møtte i dette arbeidet, og erfarte at flere av de andre semantiske strukturene ville være vanskelige å bruke på en god måte dersom divisor skulle være desimaltall.

[3] Oversatt fra engelsk av meg. De originale navnene er multiplicative comparison*,* rectangular array og times as many.

Som kvalitativ forsker vet jeg at forskningen min aldri kan sies å være helt objektiv. Den vil alltid være farget av min forkunnskap og bakgrunn. Som sagt, plasserer jeg meg innenfor et konstruktivistisk paradigme, noe som har en innvirkning på mine valg og vurderinger underveis, på grunn av det grunnsynet som dette paradigmet fører med seg. Dermed kan jeg ikke med garanti stadfeste at andre forskere ville kommet fram til de funnene som jeg gjorde dersom de hadde gjennomført en identisk undersøkelse med de samme elevene. Men ved å være bevisst på min bakgrunn og mitt teoretiske ståsted, har jeg gått inn i forskerrollen så objektivt som mulig. Gjennom å reflektere kritisk over spørsmålene jeg har stilt til datamaterialet i analyseprosessen min, samt å være bevisst på ikke å ilegge datamaterialet meninger som ikke har grunnlag i noe konkret og observerbart, mener jeg at funnene mine ikke kan sies å være en feiltolkning av datamaterialet. Jeg vil underveis i denne oppgaven legge fram mine perspektiver og meninger, slik at det kommer tydelig fram for deg som leser hvordan jeg som forsker har påvirket forskningsarbeidet. Ettersom det viktigste forskningsinstrumentet i dette prosjektet er meg selv, er det viktig at disse refleksjonene kommer fram i lyset.

Reliabilitet og validitet står sentralt i all forskning, enten den er kvantitativ eller kvalitativ, og er noe alle forskere må bevare i sin studie. Merriam (2009) mener at dersom man skal sikre reliabilitet og validitet i kvalitativ forskning må forskningen være rigorøs og etisk forsvarlig. Man må tenke nøye gjennom hvordan man samler inn, analyserer og tolker data, samt hvordan man presenterer funnene i studien sin. Den interne validiteten i et forskningsprosjekt tar for seg samsvaret mellom funnene og virkeligheten, om funnene stemmer overens med det som virkelig er der (Merriam, 2009). Å vise refleksivitet, det vil si å forklare sine bias og forkunnskaper for leseren, er av stor betydning for å sikre den interne validiteten i studien. Gjennom å reflektere over og forklare dette kan det være enklere for leseren å forstå hvordan forskeren har kommet fram til den tolkningen han eller hun legger fram i presentasjonen av studien sin (Merriam, 2009). For å sikre intern validitet i prosjektet mitt har jeg fokusert på min refleksivitet, samtidig som jeg har hatt en rigorøs innsamling og analyse av datamateriale, og samlet inn tilstrekkelig materiale for å kunne svare på mine forskningsspørsmål.

Når det gjelder reliabilitet, handler dette om i hvor stor grad forskningsfunnene mine kan bli reprodusert, det vil si om andre forskere ville funnet de samme resultatene ved en gjentakelse av min studie (Merriam, 2009). Som jeg sa tidligere, er min forforståelse og bakgrunn med på å farge min tolkning av datamaterialet, og jeg kan derfor ikke stadfeste at andre forskere ville fått eksakt like funn som meg i en identisk studie. Merriam (2009) påpeker at selv om en gjentakelse av en kvalitativ studie ikke vil gi de eksakt samme resultatene, blir ikke resultatene av en kvalitativ studie mindre verdt for det. Det viktigste er ikke at man skal kunne få de samme resultatene i en replikastudie, men at resultatene man kommer fram til er i samsvar med det innsamlede datamaterialet (Merriam, 2009). Gjennom en grundig beskrivelse og begrunnelse av min datainnsamlingsprosess og analyseprosess som en forklaring på hvordan jeg kom fram til de resultatene jeg gjorde, mener jeg at reliabiliteten i min studie styrkes. Datainnsamlingsprosessen er blitt nøye beskrevet og begrunnet i dette kapitlet, mens analyseprosessen vil bli grundigere forklart i analysekapitlet.

Den eksterne validiteten, eller generaliserbarheten, til kvalitative studier er et omdiskutert emne. Merriam (2009) forklarer at forskeren gjennom kvalitative studier ønsker å forstå noe spesifikt i dybden, ikke å finne ut hva som er en generell sannhet. Men selv om kvalitativ forskning ikke er generaliserbart i statistisk forstand, betyr ikke dette at man ikke kan lære noe av kvalitative studier. Man kan si at kvalitative studier er generaliserbare i den forstand at de kan tilføye noe til tidligere forskning, i tillegg til at de kan tas i bruk av lesere som finner studien interessant og anvendelig i sin situasjon (Merriam, 2009). Det blir forskerens ansvar å sørge for at presentasjonen av studien inneholder nok detaljerte forklaringer til at leseren kan sammenligne studien med sin egen situasjon. For å sikre ekstern validitet i min studie har jeg hele veien vært nøye med å forklare og begrunne hva jeg har gjort, hvorfor jeg har gjort det og hvilke funn det har resultert i. Jeg har i tillegg gjort et variert utvalg av elever innenfor samme årstrinn, noe som kan gi andre klasseromsforskere eller lærere hjelpende teori i deres arbeid med divisjon på 6.trinn eller generelt på mellomtrinnet.

4. Analyse

Analyseprosessen i prosjektet mitt har vært en langvarig, omfangsrik og interessant prosess. Å analysere helt nytt datamateriale fra bunnen av er svært vanskelig og tidkrevende, men resulterer i spennende funn og oppdagelser. Som sagt, startet analyseringen min som en induktiv prosess, hvor jeg gikk så åpent som mulig inn i datamaterialet med forskningsspørsmålene mine som styrende instans. Jeg kodet og kategoriserte elevenes strategier, for å finne ut hva som var data i materialet mitt og hva som var "støy" (jf. Nilssen, 2012). Jeg gikk inn i en dialog med datamaterialet mitt, hvor jeg stilte spørsmål, sammenlignet, noterte og stilte nye spørsmål. Gjennom denne prosessen kunne jeg etter hvert finne noen svar på mine forskningsspørsmål, og jeg kunne med glede se at analysen av datamaterialet mitt gav meg noen funn. I dette kapitlet vil jeg beskrive hele analyseprosessen og funnene mine i detalj. Først vil jeg gi en grundig forklaring av hvordan jeg gikk fram for å utvikle divisjonsoppgavene som jeg gav til elevene. Videre vil jeg forklare kodings- og kategoriseringsprosessen, og presentere de ulike kodene jeg gav elevenes strategier og hvilke kategorier jeg plasserte disse kodene innenfor. Jeg vil videre gå mer nøye inn i hver kategori og de underliggende kodene, og peke på hvordan de ulike strategiene fungerte, hvor ofte de ble brukt, samt hvor suksessfylte de var. Denne delen av analysekapitlet vil altså ta for seg mitt første forskningsspørsmål: *Hvilke strategier bruker elever på 6.trinn for å løse divisjonsoppgaver med heltallsdivisor og desimaltallsdivisor?* Siste del av kapitlet er viet til mine andre forskningsspørsmål: *Hvilke faktorer påvirker elevenes valg av strategi?* Og *hvilke utfordringer møter elevene i arbeidet med divisjons-oppgaver utenfor heltallsområdet?* Her vil jeg belyse hvordan jeg gikk fram i analysen for å finne svar på dette spørsmålet, og videre presentere og gi fortløpende kommentarer til mine funn i forbindelse med dette forskningsspørsmålet. De viktigste funnene som blir presentert i løpet av analysekapitlet vil senere bli drøftet i mer detalj i drøftingskapitlet.

4.1 En gjennomgang av oppgaveutarbeidingen

I metodekapitlet forklarte jeg litt om hvordan jeg utarbeidet oppgavene som jeg gav elevene, og hvilke tanker som lå bak dette arbeidet. I dette delkapitlet ønsker jeg å gi en bredere og mer grundig beskrivelse av oppgavene jeg lagde, og forklare hva som lå til grunn for valgene jeg tok i denne utarbeidingsprosessen. Oppgavene som elevene skulle jobbe med, både i intervjuene og i gruppearbeidet, var grunnlaget for hele datainnsamlinga mi, og det var derfor av stor betydning at disse oppgavene var nøye gjennomtenkt fra min side. Utarbeidingen av oppgavene baserte jeg på forsknings-spørsmålene mine, som spør etter hvilke divisjonsstrategier elevene tar i bruk i arbeidet med divisjonsoppgaver hvor divisor er heltall eller desimaltall, hvilke faktorer som ser ut til å påvirke elevenes valg av strategier, samt hvilke utfordringer elevene møter i arbeidet med divisjon utenfor heltallsområdet. For å få et godt sammenligningsgrunnlag til analysen, formulerte jeg oppgaver ut i fra sju kriterier, som inkluderte:

1) Oppgaver hvor divisor er heltall større enn dividend
2) Oppgaver hvor divisor er heltall mindre enn dividend
3) Oppgaver hvor divisor er desimaltall større enn 1
4) Oppgaver hvor divisor er desimaltall mindre enn 1
5) Rene talloppgaver uten tekst (som jeg senere vil referere til som kun ”talloppgaver”)
6) Tekstoppgaver, målingsdivisjon
7) Tekstoppgaver, delingsdivisjon

Disse kriteriene brukte jeg som grunnlag for å lage oppgavene til hele klassen, enkeltintervjuene og gruppearbeidet. De fire første kriteriene ble kombinert med de tre siste, slik at de ulike talltypene ble representert i ulike oppgaveformat for elevene. Det var viktig for meg å få med alle disse variablene, ettersom alle kunne ha innvirkning på elevenes valg av strategier, og dermed innvirkning på mine funn. I utviklingen av tekstoppgavene var hensikten å lage lettleselige og enkle tekster, ettersom fokuset i oppgaven var elevenes valg av strategier, og ikke deres forståelse av tekstoppgaver. Jeg brukte hovedsakelig like grupper-oppgaver med målings-divisjon og delingsdivisjon, i tillegg til at jeg inkluderte en rate-oppgave som var delingsdivisjon. Jeg valgte å ikke inkludere flere semantiske strukturer i oppgavene jeg gav elevene, på grunn av at det kunne ført til at elevene hadde fått en alt for stor arbeidsmengde, at tekstoppgavene ble vanskeligere å forstå og at datamaterialet ble for omfattende å analysere. Derfor vil jeg mene at denne begrensningen av oppgaver var nødvendig i studien min. Som jeg også nevnte i metodekapitlet, brukte jeg kun desimaltall i divisor på grunnlag av funn fra tidligere forskning. I tillegg ble dette valget gjort for at oppgavemengden skulle være mulig å gjennomføre for elevene på ca. en time, samt at det ikke skulle bli en uoverkommelig mengde for meg å analysere i ettertid.

I oppgavene jeg utviklet ønsket jeg å bruke tall som kunne legge opp til ulike løsningsstrategier. Jeg hadde en oversikt over strategiene som elevene hadde brukt i Anghileris (2001a) studie, i tillegg til at jeg hadde lest annen litteratur som gav meg litt innsikt i elevers divisjonsstrategier, som for eksempel studiene til Mulligan og Mitchelmore (1997) og Downton (2009). Med denne litteraturen i bakhodet utviklet jeg oppgaver som kunne legge til rette for at elevene tok i bruk mange ulike strategier. I utviklingen av oppgavene hvor divisor var heltall mindre enn dividend, lagde jeg først noen "enkle" oppgaver hvor divisor var ensifra. Jeg så for meg at disse oppgavene la til rette for at elevene kunne ta i bruk blant annet standardalgoritmen og bruk av multiplikasjonsfakta som løsningsstrategier. Jeg brukte både talloppgaver, målingsdivisjons- og delingsdivisjonsoppgaver, slik at jeg kunne se om det var noen forskjeller i elevenes framgangsmåter for å løse de ulike oppgavetypene. To eksempler på slike "enkle" oppgaver med heltallsdivisor mindre enn dividend er talloppgaven *42 : 6* og tekstoppgaven *Einar hadde 27 meter med tau. Han skulle lage hoppetau på 3 meter. Hvor mange hoppetau fikk han lagd?* Andre oppgaver hadde større tall, som kunne være mer utfordrende for elevene, med tanke på at verken bruk av multiplikasjonstabellen eller standardalgoritmen var gode strategier for å løse disse oppgavene. En slik oppgave kunne være for eksempel tekstoppgaven *Janne skulle pakke alle bøkene sine i esker før hun flyttet. Hun hadde 128 bøker og 16 små esker som hun skulle pakke dem i. Hvor mange bøker fikk hun i hver eske, dersom hun fordelte bøkene likt?* For å løse disse oppgavene så jeg for meg at elevene kunne ta i bruk for eksempel gjentatt addisjon, gjentatt subtraksjon eller en dobling- eller halveringsstrategi. Til sammen inkluderte jeg femten oppgaver med heltallsdivisor mindre enn dividend i intervjuene og gruppearbeidet. Av disse oppgavene var det åtte talloppgaver, tre delingsdivisjonsoppgaver og fire målingsdivisjonsoppgaver. Besvarelsene på oppgavene fra det første oppgavesettet vil jeg ikke inkludere i analysen, og disse oppgavene vil heller ikke regnes med i det totale antall oppgaver jeg ga elevene. Grunnen til at disse besvarelsene ikke blir brakt inn i analysedelen av prosjektet er at de ikke gir noen forklaringer på hva elevene tenkte mens de arbeidet med oppgavene. De gir meg en viss innsikt i hvilke oppgaver elevene klarte eller ikke klarte å løse og noen pekepinner på hvilke strategier elevene brukte, men ingen forståelse for tenkningen som lå bak strategiene. Derfor er det kun oppgavene fra de tre enkeltintervjuene og fra gruppearbeidet og besvarelsene på disse oppgavene som inkluderes i analysen og som regnes med i totalantallet av oppgaver.

I oppgavene med heltallsdivisor større enn dividend varierte jeg også vanskelighetsgraden noe, og inkluderte noen oppgaver med et "enkelt forhold" mellom dividend og divisor og noen med et mer "vanskelig forhold". Oppgaver med slike "enkle forhold" kunne være for eksempel talloppgaven 12 : 24 eller tekstoppgaven *Dersom vi har 10 pizzaer som skal deles likt på 40 personer, hvor mye pizza blir det på hver?* Disse oppgavene ble definert som å ha et "enkelt forhold" fordi dividend var en lettfattelig brøkdel av divisor, som for eksempel ½ eller ¼. Oppgavene med mer "vanskelige forhold" var for eksempel talloppgaven 6 : 30 og tekstoppgaven *Det ble kjøpt inn 8 liter brus til en bursdag, og det kom 20 gjester som alle ville ha like mye brus. Hvor mye brus fikk hver gjest?* Disse oppgavene mente jeg hadde et mer "vanskelig forhold" på grunn av at dividend ikke var en like tydelig og enkel brøkdel av divisor. Jeg hadde ingen klare formeninger om hvilke strategier elevene kom til å ta i bruk for å løse disse oppgavene, ettersom ingen av de tidligere forskningsartiklene jeg hadde lest fokuserte på dette. I studiene til De Corte og Verschaffel (1996) og Harel et al. (1994) så de at elevene ofte reverserte tallene i oppgaver hvor divisor var større enn dividend, men belyste ingen andre strategier. Jeg brukte både talloppgaver og delingsdivisjonsoppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend, men inkluderte ingen målingsdivisjonsoppgaver. Grunnen til dette var at det er vanskelig å lage gode og lettfattelige tekstoppgaver med divisor større enn dividend basert på denne modellen. Forskningsspørsmålene mine vektlegger ikke elevers valg av strategi og deres utfordringer i arbeidet med målingsdivisjonsoppgaver og delingsdivisjonsoppgaver, så det viktigste for meg var å lage oppgaver som inneholdt ulike talltyper i divisor og som elevene enkelt kunne forstå. Samtidig ønsket jeg å bruke både målingsdivisjon og delingsdivisjon der det var gjennomførbart på en måte som ikke skapte ekstra utfordringer for elevene, ettersom disse to divisjonstypene kan være med på å påvirke elevenes strategivalg. Til sammen brukte jeg ti oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend, hvorav to oppgaver var rene talloppgaver og de resterende åtte var delingsdivisjonsoppgaver.

I utviklingen av oppgavene med desimaltallsdivisor brukte jeg desimaltall av ulik vanskelighetsgrad, og benyttet meg av talloppgaver, delingsdivisjons- og målings-divisjonsoppgaver. Jeg brukte ingen desimaltall større enn dividend i oppgavene jeg utarbeidet. Dette var på grunn av at jeg mente at slike oppgaver ville bli for vanskelige for elevene og svært utfordrende å lage gode kontekster til. I tillegg måtte jeg begrense oppgavetypene på grunn av tidspress og at min arbeidsmengde ikke skulle bli uoverkommelig. Oppgaver med enklere desimaltall kunne være for eksempel talloppgaven 35 : 3,5 og tekstoppgaven *Jan hadde 16 liter saft som han skulle fordele på 0,5-litersflasker. Hvor mange flasker med saft fikk han da?* Oppgavene med vanskeligere desimaltallsdivisorer kunne være blant annet talloppgaven 16 : 0,8 og tekstoppgaven *Prisen på 2,8 meter silkebånd er 56 kr. Hva blir da prisen på 1 meter silkebånd?* De to første eksemplene inneholder desimaltallsdivisorer som er enklere i den forstand at det er lettere å se at de vil gå opp i dividend, i tillegg til at de er halvparten av et heltall, og dermed enklere å bruke i gjentatt addisjon eller subtraksjon. Jeg regnet i tillegg desimaltallsdivisorer mindre enn 1 som vanskeligere enn de som var større enn 1, på grunnlag av funn fra tidligere forskning som viste en større andel feil blant elevers løsninger av disse oppgavene, mye på grunn av den vanlige misoppfatningen om at divisjon alltid gjør mindre (jf. Bell et al., 1984, Fischbein et al., 1985, Graeber & Tirosh, 1990, og Okazaki & Koyama, 2005). Jeg brukte kun desimaltall med ett siffer bak komma, fordi jeg mente at det ville gi nok utfordring til elever som ikke hadde jobbet med divisjon med desimaltallsdivisorer før. I utviklingen av oppgavene med desimaltallsdivisor mindre enn 1 brukte jeg ingen delingsdivisjonsoppgaver, ettersom det er svært vanskelig å gi mening til slike oppgaver (Graeber & Tirosh, 1990). Til sammen brukte jeg åtte oppgaver hvor divisor var desimaltall større enn 1 og tretten oppgaver hvor divisor var desimaltall mindre enn 1. Av de åtte oppgavene med desimaltallsdivisor større enn 1 var det én talloppgave, én delingsdivisjonsoppgave og seks målingsdivisjons-oppgaver. Av den siste typen oppgaver hadde jeg inkludert seks talloppgaver og sju målingsdivisjonsoppgaver. Her kunne jeg se i ettertid at det ble en veldig skjev fordeling av de ulike oppgavetypene, i og med at det kun ble brukt én talloppgave og én delingsdivisjonsoppgave i oppgavene med desimaltallsdivisor større enn 1. Grunnen til at dette skjedde var intervjuenes uforutsigbarhet, hvor noen oppgaver ble inkludert etter hvert, basert på hva elevene forklarte. Ideelt sett burde jeg hatt med flere av disse to oppgavetypene i intervjuene for å ha et best mulig sammenligningsgrunnlag for analysen, men ettersom begge oppgavetypene ble inkludert i gruppearbeidet, slik at alle tre elevene fikk mulighet til å vise hvilken strategi de ville ta i bruk i en slik oppgave, fikk jeg allikevel et godt sammenligningsgrunnlag til analysen. I tillegg var det, som jeg påpekte tidligere, talltypene i oppgavene som var det viktigste i min studie, og ikke om oppgavene var tall-, målingsdivisjon- eller delingsdivisjonsoppgaver.

4.2 Noen typiske misoppfatninger om divisjon

I det aller første oppgavesettet jeg gav elevene, ønsket jeg å få en innsikt i hvilke oppfatninger og eventuelle misoppfatninger de hadde om divisjon, og inkluderte derfor åtte utsagn om divisjon som elevene skulle si seg enige eller uenige i. I intervjuene samtalte jeg med elevene om disse utsagnene, slik at de fikk mulighet til å forklare meg hvorfor de hadde sagt seg enige eller uenige. De åtte utsagnene som var med i oppgavesettet var:

1) Divisjon er det motsatte av multiplikasjon
2) Når man dividerer vil svaret alltid bli mindre enn tallet man starter med
3) I divisjon skal man alltid dele et større tall på et mindre tall
4) Divisjon og multiplikasjon henger sammen
5) Det finnes flere måter å løse divisjonsoppgaver på
6) 24 : 0,8 er mindre enn 24
7) 24 : 0,8 er større enn 24
8) Det er ikke mulig å dele på et tall mindre enn 1

Det jeg ønsket å finne ut av gjennom disse utsagnene var om noen av elevene hadde oppfatninger om at divisjon alltid gjør mindre, at divisor ikke kan være større enn dividend, eller at man ikke kan ha divisorer mindre enn 1. Av elevene jeg valgte ut til intervju mente alle tre at svaret alltid ble mindre enn tallet man startet med i divisjon, to mente at man alltid skulle ha en divisor mindre enn dividend og to mente at 24 : 0,8 ville bli mindre enn 24. Det kunne altså se ut som om flere av elevene innehadde noen av de typiske misoppfatningene om divisjon. Men i intervjuet, hvor elevene fikk forklare sine oppfatninger til meg, kom det fram at disse misoppfatningene ikke var så entydige som de så ut til å være. En av elevene, som mente at divisjon alltid gjør mindre og at 24 : 0,8 ville bli mindre enn 24 hadde endret mening:

1.25 I: (…) er du enig i det? (*at divisjon alltid gjør mindre*) For du har krysset enig.

1.26 E: Nei, jeg tror jeg husker nå at det var noe med 2 delt på null komma noe som ble 4. Men jeg vet ikke om det er helt riktig…jo, det var 2 delt på 0,5, så 4 gange 0,5 var 2.

(…)

1.35 I: Du sa deg enig i at 24 : 0,8 er mindre enn 24, kan du forklare hva du tenkte når du så den?

1.36 E: Det er også feil. (…) man må jo gange opp 0,8 flere ganger enn 24 for å få 24. Så det må blir større…jeg tror det må bli større enn 24.

Han hadde tydeligvis endret oppfatning, og viste ikke lengre tegn til å inneha noen av de typiske misoppfatningene om divisjon. En av de andre elevene, som mente at divisjon alltid gjør mindre, at divisor skal være mindre enn dividend og at 24 : 0,8 ble mindre enn 24, viste kun en endring i misoppfatningen om at divisor skal være mindre enn dividend gjennom intervjuet:

2.54 I: (…) når du dividerer så vil alltid svaret bli mindre enn det tallet du starter med?

2.55 E: Ja, det er jeg enig i. Hvis du har for eksempel ei kake, og så er det…hvis det er 4 stykker som skal dele på ei kake da, så får de en kvart hver, men en kvart er jo mindre enn en hel. Det går ikke an at det bli mer, fordi hvis det bare er en som skal spise ei kake da, så blir det jo det samme. Bortsett i fra det, så blir det jo mindre enn…

(…)

2.62 I: Du tenker at begge deler går an? (*at divisor både kan være større og mindre enn dividend*) At du kan ha både det største tallet først og det største tallet sist på en måte?

2.63 E: Det spørs, hvis man deler inn ei kake, som er 1 på 8 stykker, da blir det jo det…ja…men det spørs om man tar med negative tall eller ikke.

(…)

2.70 I: (…) 24 delt på 0,8 har du sagt deg enig i at blir mindre enn 24 ja, hvorfor mener du det?

2.71 E: Hm… (…) hvis man deler noe på noe så blir jo tallet mindre enn det du begynner med. Det er nesten det samme som det der egentlig (*peker på utsagnet om at svaret alltid vil bli mindre enn det tallet man starter med når man dividerer*).

Her er det tydelig at misoppfatningen om at divisjon alltid gjør mindre står sterkt hos denne eleven, men at hun vet at det er mulig å ha en divisor som er større enn dividend, selv om hun da mener at vi må ta med negative tall for å inkludere denne meningen i divisjon. Den siste eleven, som mente at divisjon alltid gjør mindre og at divisor alltid skal være mindre enn dividend, innførte begrensninger for disse oppfatningene i intervjuet:

3.7	E:	(…) ja, det vil alltid bli mindre enn det man starter med (*kvotient vil alltid bli mindre enn dividend*), fordi hvis man har et høyt tall i starten og deler man det på noe så deler man det opp i flere grupper. (…) Istedenfor at det er alle på en gruppe så blir det liksom delt opp. (…)
3.8	I:	Ja, så du tenker da at når man deler så kan ikke svaret bli større enn det man starter med?
3.9	E:	Eh, nei. Hvis ikke man deler på sånn null komma… (…) det tror jeg går an. Men hvis man deler med hele tall så tror jeg det. (…)
3.12	I:	Du sa deg enig i at man skal dele et større tall på et mindre tall?
3.13	E:	(…) ja, hvis jeg har 3 delt på 3, så blir jo det 1. Men hvis jeg tar 3 delt på 4 så vil svaret bli komma noe. Sånn at det blir ikke et helt tall, og da blir det litt vanskelig å dele. (…) hvis svaret skal bli et helt tall så deler man på et mindre tall enn det man starter med.

Her kommer det altså fram at eleven mener at kvotient kan bli større enn dividend dersom divisor er ”sånn null komma”, altså at divisor er desimaltall mindre enn 1. Hun mener også at man kan ha divisor større enn dividend, men at svaret da vil bli et desimaltall, og at det blir en vanskelig divisjonsoppgave. I likhet med den første eleven viste hun altså at de typiske misoppfatningene hun gav uttrykk for å inneha gjennom det første oppgavesettet, ikke var så entydige som man kunne tro fra besvarelsen på oppgavesettet.

4.3 Koding av divisjonsstrategiene

Gjennom å kode datamaterialet fikk jeg satt navn på de ulike strategiene som elevene tok i bruk. Som tidligere nevnt, brukte jeg kun det transkriberte materialet fra intervjuene og gruppearbeidet i kodingsprosessen, og inkluderte ikke det skriftlige materialet fra det første oppgavesettet. Dette oppgavesettet ble, som sagt, lagd med det formål å gi meg et grunnlag til å velge ut tre elever til enkeltintervju, og gav meg ikke mulighet til å forstå elevenes valg av strategier. Forkunnskapen jeg hadde fra lesing av forskningsartikler og annen litteratur om divisjonsstrategier var med å påvirke kodingen fra begynnelsen av, men jeg oppdaget raskt at jeg hadde behov for andre koder enn det jeg hadde blitt presentert for tidligere. Selv om Anghileris (2001a) koding var en inspirasjon i min kodingsprosess, ble jeg nødt til å utvikle egne koder og kategorier som passet bedre til elevenes strategier i min studie. En av grunnene til at jeg hadde behov for nye koder kan være at Anghileris studie kun tok for seg heltallsdivisorer, mens jeg inkluderte og fokuserte mye på oppgaver med desimaltallsdivisor.

Utviklingen av kodene var en betydelig prosess i seg selv, hvor jeg sammenlignet elevenes strategier med hverandre og forsøkte å sette navn på de ulike strategiene. Etter å ha transkribert datamaterialet, kunne jeg se at jeg til sammen hadde gjennomført 46 divisjonsoppgaver med de tre elevene. I hver oppgave hadde elevene brukt en eller flere strategier for å finne en løsning. Jeg analyserte hver framgangsmåte, og endte til slutt opp med tolv koder som hver beskrev en egen strategi. Alle kodene vil bli eksemplifisert med bilder eller intervjuutdrag fra datamaterialet senere i kapitlet. Her vil jeg kun presentere de ulike strategiene med de forkortede kodene jeg kommer til å bruke senere i oppgaven i parentes:

1. Gjentatt addisjon av divisor, uten noen form for effektivisering (GJA)
2. Addisjon av små delsummer, en noe mer effektiv form for gjentatt addisjon (ASD)
3. Addisjon av effektive delsummer, den mest effektive formen for gjentatt addisjon (AED)
4. Bruk av standardalgoritmen (SAL)
5. Bruk av multiplikasjonsfakta for å finne løsningen på divisjonsoppgaven (BMF)
6. Bruk av forholdet mellom tallene i divisjonsoppgaven for å finne løsningen, enten det proporsjonale forholdet mellom dividend og kvotient eller dividend og divisor, eller det omvendt proporsjonale forholdet mellom divisor og kvotient (BFO)
7. Legge til/ta vekk nuller eller flytte på komma (NOK)
8. Halvere dividend eller divisor eller begge deler (HAL)

9. Gjøre om målenheten, slik at divisor ikke lengre er desimaltall (OAM)
10. Dele opp dividend i hundrere, tiere og enere (DDD)
11. Dele opp divisor i tiere, enere og desimaler (DDS)
12. Reversere divisjonsoppgaven, det vil si å bytte plass på dividend og divisor for å løse oppgaven (REV)

Av disse tolv strategiene er det to strategier, DDS og REV, som kan defineres som feilslåtte strategier som ikke vil fungere i verken divisjon med heltallsdivisor eller desimaltallsdivisor. Resten av strategiene gir mulighet for å finne løsninger på oppgavene. Ved å se gjennom denne oversikten over elevenes strategier kunne jeg tydelig se at operasjonene som elevene i all hovedsak benyttet seg av for å løse divisjonsoppgavene var addisjon og multiplikasjon. Ingen av elevene benyttet seg av subtraksjon for å løse noen av oppgavene, noe som overrasket meg litt etter å ha sett i tidligere forskningsartikler at dette var en mye brukt divisjonsstrategi (Anghileri, 2001a, 2001b, Chapin & Johnson, 2006, Downton, 2009).

4.4 Kategorisering av kodene

Etter å ha kodet elevenes divisjonsstrategier, var det neste steget å samle disse kodene innunder større kategorier. Jeg ønsket å samle kodene i kategorier for å få en bedre oversikt over dataene mine, og fordi det gav meg mulighet til å se på hvilke sammenhenger eller likheter jeg kunne finne mellom kodene jeg allerede hadde utviklet. Som sagt, kunne jeg se at elevene støttet seg hovedsakelig til addisjon og multiplikasjon for å løse divisjonsoppgavene, og jeg brukte derfor dette som et utgangspunkt for kategoriseringen. Jeg kunne raskt konstatere at kodene GJA, ASD og AED (nummer 1-3 på lista ovenfor) kunne samles under kategorien *additive strategier*, da disse strategiene var basert på en eller annen form for gjentatt addisjon. I en videre gjennomgang av kodene fant jeg at SAL, BMF, BFO og NOK (nummer 4-7 på lista ovenfor) kunne plasseres innunder kategorien *multiplikative strategier*, ettersom disse strategiene hadde operasjonen multiplikasjon som grunnlag for å finne en løsning på oppgavene. De fem gjenværende kodene HAL, OAM, DDD, DDS og REV ble til slutt plassert sammen under kategorien *forenklende strategier*, på grunn av at disse strategiene ble tatt i bruk for å forenkle oppgavene før en annen strategi ble brukt for å løse dem. De to siste av disse kodene var feilslåtte strategier som ikke gav noen mulighet for å komme fram til riktig løsning, men jeg valgte allikevel å samle de under denne kategorien. Dette gjorde jeg fordi at selv om de ikke gav riktig løsning, ble de brukt som forenklende strategier av elevene. I Tabell 4.1 finnes en oversikt over de kodede strategiene, hvor man kan se hvor mange ganger alle strategiene ble brukt, hvor suksessfylte de var, samt hvilke kategorier de ulike strategiene hører til under. I denne tabellen kan man se at det er et større antall strategier enn oppgaver, noe som kommer av at elevene til tider brukte flere strategier for å løse en oppgave. Det var tre grunner til at flere strategier ble tatt i bruk i samme oppgave: 1) elevene brukte en forenklende strategi før de tok i bruk en annen strategi, 2) den første strategien de tok i bruk førte til feil løsning av oppgaven slik at de måtte endre strategi, eller 3) elevene brukte ulike strategier for å løse samme oppgave i gruppearbeidet.

Strategi	**Brukt i antall oppgaver**	**Suksessrate**	**Kategori**
GJA	4 av 46	4/4	Additive strategier
ASD	11 av 46	9/11	
AED	3 av 46	3/3	
SAL	6 av 46	3/6	Multiplikative strategier
BMF	12 av 46	12/12	
BFO	16 av 46	15/16	
NOK	4 av 46	¾	
HAL	3 av 46	3/3	Forenklende strategier
OAM	4 av 46	4/4	
DDD	2 av 46	2/2	
DDS	3 av 46	0/3	
REV	1 av 46	0/1	

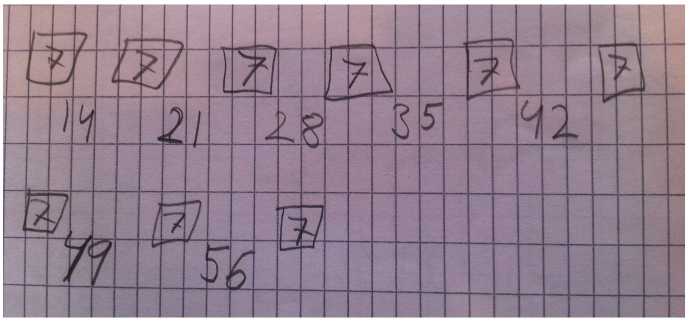
Tabell 4.1 *En oversikt over elevenes strategibruk gjennom hele studien*

Tabell 4.1 gir oss altså en oversikt over hvor mange ganger de ulike strategiene ble tatt i bruk gjennom hele studien, og vi kan se at suksessraten til elevenes strategier var generelt høy. Til sammen brukte elevene de ulike strategiene sekstini ganger, hvorav femtiåtte tilfeller førte til riktig løsning. I tabellen ser man tydelig at de multiplikative strategiene BMF og BFO var de mest brukte strategiene, og at disse strategiene også var svært suksessfylte. Gjennom koding- og kategoriseringsprosessen kunne jeg også se at disse to strategiene var, i tillegg til SAL, de eneste strategiene som ble brukt av alle elevene i løpet av intervjuene eller gruppearbeidet. De andre strategiene ble brukt av kun én eller to av elevene. Men man kan også se at bruken av SAL har en mye lavere suksessrate, da den førte til riktig løsning i kun halvparten av oppgavene den ble brukt i. Ut i fra denne tabelloversikten kan man også lese at de feilslåtte strategiene DDS og REV ikke gav suksess i noen oppgaver, men også at REV kun ble tatt i bruk én gang. De tre andre forenklende strategiene var suksessfylte i alle tilfellene de ble brukt. I forbindelse med disse forenklende strategiene er det litt vanskeligere å snakke om suksessrate, ettersom de ble etterfulgt av andre strategier. I min studie ble all bruk av HAL, OAM og DDD etterfulgt av andre strategier som var suksessfylte, slik at man kan si at både de forenklende strategiene og de etterfølgende strategiene var suksessfylte i disse tilfellene. Dersom de forenklende strategiene hadde endret noe vesentlig ved oppgaven i forenklingsprosessen, slik som ved bruken av DDS, ville både den forenklende strategien og den etterfølgende strategien ført til feil løsning. Men dersom den forenklende strategien hadde fungert, mens den etterfølgende strategien hadde ført til feil, ville den forenklende strategien allikevel vært en suksessfylt strategi. Da ville den etterfølgende strategien vært den strategien som førte til feil løsning, og som dermed ikke var suksessfylt.

Senere i dette kapitlet vil jeg presentere nye tabeller hvor jeg gir en oversikt over hvilke strategier som ble tatt i bruk i ulike typer oppgaver og hvordan suksessraten til løsningsstrategiene var i disse oppgavetypene. Her vil jeg påpeke at jeg også benytter meg av begrepet oppgavetype i en nokså vid forstand, og klassifiserer i disse tabellene ulike oppgavetyper etter talltyper i divisor, om det er talloppgaver, målingsdivisjon- eller delingsdivisjonsoppgaver, samt etter antall siffer og talltyper i dividend og divisor. Jeg kommer tilbake til en nærmere forklaring av dette i delkapittel *4.8 Utfordringer i arbeidet med divisjon utenfor heltallsområdet*. Før jeg kommer til det, vil jeg i de tre neste delkapitlene beskrive og forklare de kodede strategiene i mer detalj innenfor hver sin kategori, og vise til utdrag fra elevenes utregninger som eksemplifiserer de ulike strategiene.

4.5 Additive strategier

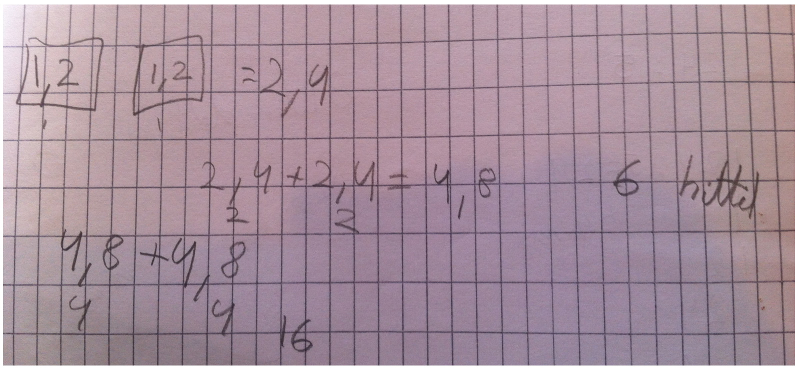
De additive strategiene GJA, ASD og AED har til felles at de er basert på en form for gjentatt addisjon, men på ulikt nivå. GJA er den enkleste formen, hvor eleven adderer divisor med seg selv for å løse oppgaven, uten å effektivisere denne addisjonen noe. Et eksempel på bruk av denne strategien er en elev sin framgangsmåte i oppgaven *Eli har lagd 58 karameller som hun skal fordele på 7 poser, hvor mange karameller får* *hun i hver pose?* I Figur 4.1 ser man hvordan eleven adderer 7 med seg selv åtte ganger for å komme så nært 58 som mulig.



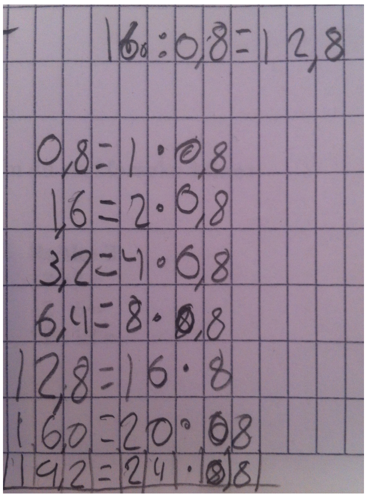
Figur 4.1 *Gjentatt addisjon av 7 for å løse 58 : 7*

I tilfeller hvor elevene viste en liten grad av effektivisering av strategien, fikk disse framgangsmåtene koden ASD. Elevene som tok i bruk denne strategien effektiviserte den gjentatte addisjonen ved for eksempel å addere det dobbelte av divisoren eller større grupperinger av divisoren for å komme fram til en løsning. Men denne strategien manglet i flere tilfeller god struktur og oversiktlighet, noe som i tre tilfeller førte til at elevene mistet oversikt over hva de gjorde. I ett av tilfellene ble antall ganger divisor var addert for å komme til en delsum lagt sammen med antall ganger divisor var addert for å komme til neste delsum, noe som til slutt resulterte i feil løsning. Dette var tilfelle i en elevs løsning av tekstoppgaven *Du har 24 kg sukker som skal fordeles i poser på 1,2 kg, hvor mange poser får du til?* I Figur 4.2 ser man hvordan eleven effektiviserer den gjentatte addisjonen noe, men også at antall ganger divisor er addert med seg selv blir lagt sammen for mange ganger. Eleven har skrevet "6 hittil" i utregningen, noe som representerer hvor mange ganger hun mener at 1,2 er addert med seg selv for å få 4,8. Allerede her ser man altså tydelig at eleven legger sammen antall addisjoner av divisor for mange ganger.

I de to andre tilfellene var det rot i oversikten over tallene som førte til feil, fordi elevene blandet dividend og kvotient. Underveis i prosessen med å legge sammen små delsummer, glemte elevene hva de skulle fram til, og trodde at antall ganger de hadde addert divisor (noe som vil bli kvotienten i oppgaven) var det samme som dividenden. Et eksempel på dette vises i Figur 4.3, hvor en av elevene var kommet til $12{,}8 = 16 \cdot 0{,}8$ i addisjonsrekka og trodde at dette var svaret på $16 : 0{,}8$.



Figur 4.2 *Feil i opptelling av antall addisjoner av divisor*



Figur 4.3 *Eleven blander dividend og kvotient*

I oppgaver hvor elevene viste høy grad av effektivisering av den gjentatte addisjonen, ble strategiene kodet med AED. I disse tilfellene ble divisor addert i effektive delsummer for å komme fram til en løsning. Det var kun én elev som brukte denne strategien, etter gjentatte ganger å ha brukt ASD. I hennes bruk av ASD fokuserte hun på å finne ut hvor mye divisor addert med seg selv ti eller fem ganger ble, og vurderte deretter hvor mange flere ganger hun måtte addere divisor med seg selv for å komme opp til dividend. I disse tilfellene brukte hun gjentatt addisjon for å regne ut hva divisoren gjentatt fem eller ti ganger ble, og brukte så denne delsummen til videre addisjon. I oppgaven *18 : 0,6* effektiviserte hun denne strategien til å kunne defineres som AED, på grunn av at hun ikke lengre brukte gjentatt addisjon for å finne ut hva divisoren addert med seg selv ti ganger var. Hun brukte nå multiplikasjon for å komme til denne delsummen, og gjorde en gjentatt dobling av delsummen for å komme opp til dividenden.

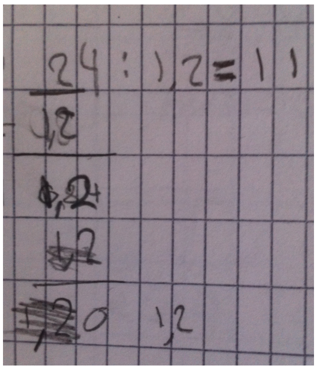
3.165 I: Enn hvis vi skal prøve 18 delt på 0,6 da, hvordan vil du gå fram for å finne ut av det?

3.166 E: Eh…først sjekke hvor mange ganger jeg kan ta det…0,6…jeg gjør den lette metoden jeg. Hvis jeg tar det ti ganger, så har jeg 6 i alle fall. Da kan det bli 30…fordi når jeg har ti ganger så har jeg opp til 6, tjue ganger så har jeg opp til 12, og tretti ganger så har jeg opp til 18.

Til sammen ble de additive strategiene tatt i bruk atten ganger, hvorav seksten gav riktig svar på oppgavene. Det var altså en høy suksessrate i bruken av de additive strategiene. Men det var liten grad av effektivisering blant elevene, da bare én av elevene brukte AED som strategi.

4.6 Multiplikative strategier

Tidligere i kapitlet presenterte jeg de fire ulike strategiene SAL, BMF, BFO og NOK, og plasserte dem innenfor kategorien multiplikative strategier. Dette var strategier basert på operasjonen multiplikasjon, men brukt med en ulik grad av forståelse fra elevenes side. Bruken av SAL kom tydelig fram i elevenes framgangsmåter, på grunn av notasjonsmåten og språkbruken blant elevene. Elevene noterte utregningene på den standardiserte måten og brukte uttrykk som for eksempel ”går opp i” og ”trekker ned”. Som jeg viste tidligere, ble SAL brukt i seks tilfeller, men var bare suksessfylt i tre av dem. I to av tilfellene hvor SAL ikke var suksessfylt ble strategien forsøkt brukt på desimaltallsdivisor, og i det tredje tilfellet på en tosifra divisor større enn dividend. I de tre tilfellene hvor SAL fungerte ble den brukt på divisorer som var ensifra. Der strategien ble brukt uten suksess var det tydelig at elevene fulgte en oppskrift på hvordan de skulle regne, uten å tenke over hvilke typer tall som var med i oppgaven. Et eksempel på en slik ”feil” bruk av SAL kan man se i en av elevenes forsøk på å løse $24 : 1{,}2$ med denne strategien (se Figur 4.4).



Figur 4.4 *Feilslått bruk av standardalgoritmen*

Strategien BMF ble mye brukt, i tolv tilfeller i løpet av studien, og var en strategi som alle elevene benyttet seg av. Den var også veldig suksessfylt, og førte til riktige løsninger i alle oppgavene den ble benyttet i. Denne strategien var basert på multiplikasjonsfakta som elevene kjente til fra før, og ble derfor mye brukt når divisor og dividend var forholdsvis små tall, hovedsakelig når tallene befant seg innenfor den lille multiplikasjonstabellen. BMF var en mental strategi, hvor elevene kom fram til løsningen uten noen form for notasjon. Den andre multiplikative strategien som ble mye brukt var BFO. Denne strategien ble også brukt av alle elevene, i tillegg til at den ble benyttet flest ganger. Hele seksten ganger ble BFO tatt i bruk i løpet av intervjuene og gruppearbeidet. Den var også svært suksessfylt, og gav riktig løsning i femten av seksten tilfeller. Som tidligere nevnt, brukte elevene proporsjonaliteten mellom dividend og kvotient eller dividend og divisor, eller den omvendte proporsjonaliteten mellom divisor og kvotient i denne strategien. Det var altså forholdet mellom to av tallene i oppgavene som hjalp elevene med å finne løsningen. I det ene tilfellet hvor denne strategien ikke førte til riktig løsning, feilberegnet eleven hvilket siffer som befant seg midt mellom 5 og 10. Oppgaven gikk ut på å fordele 8 liter brus på 20 personer, og eleven fant ut at $10 : 20 = 0{,}5$ og $5 : 20 = 0{,}5$, og mente at $8 : 20$ måtte bli midt mellom disse to. Her forsøkte altså eleven å bruke det proporsjonale forholdet mellom dividend og kvotient, men havnet til slutt på $7{,}5 : 20$ istedenfor $8 : 20$. I alle de andre tilfellene hvor BFO ble brukt førte strategien til riktig løsning av oppgaven. Heller ikke denne strategien hadde noen spesiell notasjon slik at man kunne se den skriftlig, men jeg kunne oppdage den gjennom elevenes muntlige forklaringer. En av elevene brukte BFO for å løse samme type oppgave med andre tall, hvor 12 liter brus skulle fordeles på 24 personer. Her brukte eleven det proporsjonale forholdet mellom dividend og divisor for å forklare hvordan hun løste oppgaven.

2.96	I:	Hvordan tenkte du deg fram til at det ble en halv liter på hver da?
2.97	E:	Fordi…det er det dobbelte av det (*peker på divisor som er 24 og dividend som er 12*). Hvis jeg tar 2 liter, og så…delt på 4 personer, så får man også en halv hver.

Her peker altså eleven på at dersom dividend er halvparten av divisor, vil kvotient alltid bli 0,5. Dersom vi kaller divisor for x, kan vi uttrykke dette konstante forholdet på følgende måte: $\frac{x}{2} : x = 0{,}5$. Den siste multiplikative strategien, NOK, hadde jeg vanskeligheter med å plassere innenfor en kategori, på grunn av elevenes forklaringer av strategien. Flere av elevene flyttet komma og la til eller fjernet nuller uten å kunne forklare meg hvorfor dette var mulig, og viste dermed ingen forståelse av hva som faktisk skjer når man gjør disse handlingene. Jeg valgte allikevel å plassere denne strategien innenfor kategorien multiplikative strategier ettersom det er en strategi basert på multiplikasjon, selv om elevene ikke alltid var klar over dette. En annen mulighet hadde vært å plassere denne strategien under kategorien forenklende strategier, på grunn av at den også ble brukt som en forenklende strategi av elevene. Gjennom bruken av NOK forenklet elevene oppgavene før de i flere tilfeller brukte en annen strategi for å løse dem. Grunnen til at valget falt på å plassere denne strategien under multiplikative strategier var at jeg så på det multiplikative aspektet ved denne strategien som viktigere enn det forenklende aspektet. Selv om ikke alle elevene viste forståelse for hva de gjorde når de brukte NOK, var det noen av elevene som visste hva som lå bak å flytte komma og å fjerne eller sette på nuller. Denne strategien ble brukt i fire tilfeller, og var suksessfylt i tre av dem. I tilfellet hvor strategien førte til feil utregning ble den brukt for å løse talloppgaven $490 : 70$. I dette tilfellet tok eleven vekk nullene slik at oppgaven ble $49 : 7$, noe hun visste at løsningen på var 7. For å bruke dette for å finne løsningen på $490 : 70$ mente hun da at hun måtte legge på en null på dette svaret, noe som ga henne løsningen 70 på denne oppgaven. I de tre andre tilfellene strategien ble brukt førte den til riktig svar, men elevene som brukte NOK viste i flere tilfeller at de ikke hadde forståelse for hvorfor de kunne benytte seg av denne strategien. Et eksempel på dette er da en av elevene brukte denne strategien i oppgaven $16 : 0{,}8$, hvor han endret oppgaven til $160 : 80$:

1.156 E: (…) Så tar jeg vekk den nullen der og legger på en null der på en måte. 160 delt på 80, ja, det blir egentlig er lik 2. Og så setter jeg tilbake liksom nullene da. Ja, og da kunne det liksom ikke blitt 0,8…ehm nei, 2 gange 0,8…ja, for at 2 gange 0,8 er 1,6, og 1,6 er nesten 16 på en måte…vi bare flytter kommaet.

1.157 I: (…) Hva har du gjort med 16 for å komme til 160?

1.158 E: Jeg la på en null.

1.159 I: Hva betyr det når du legger på en null da?

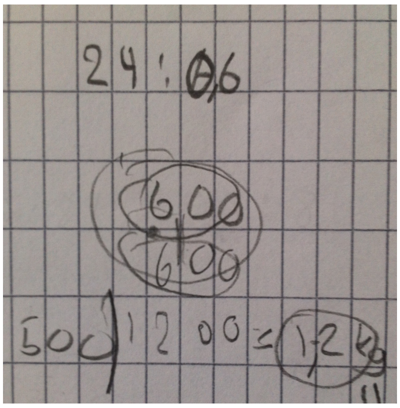
1.160 E: Eh…der så lånte jeg, jeg lånte tror jeg.

Multiplikative strategier var de aller mest brukte strategiene i løsningen av oppgavene, og ble brukt i til sammen trettiåtte tilfeller. Denne framtredende bruken av multiplikative strategier tyder på at elevene støttet seg aller mest til multiplikasjon i løsningen av divisjonsoppgaver. BMF og BFO var de aller mest brukte strategiene, de ble brukt av alle elevene og hadde en høy suksessrate.

4.7 Forenklende strategier

De forenklende strategiene ble, som sagt, tatt i bruk av elevene for å forenkle oppgavene før de tok i bruk en annen strategi for å løse dem. De tre første forenklende strategiene, HAL, OAM og DDD, var suksessfylte strategier, mens de to siste, DDS og REV, var feilslåtte forenklende strategier. HAL ble brukt i tre tilfeller, på tre ulike måter. I ett tilfelle halverte elevene dividend, i et annet divisor og i det tredje tilfellet både dividend og divisor. I alle de tre tilfellene ble utfallet av den forenklende og den påfølgende strategien suksessfylt. Bruken av OAM forekom kun i tekstoppgaver, ettersom den gikk ut på å endre målenhet, og ble brukt av en elev i fire tilfeller. Ved å bruke denne strategien endret eleven oppgavene fra å ha desimaltallsdivisor til å ha heltallsdivisor. Blant annet tok hun i bruk denne strategien for å finne løsningen på hvor mange poser mel man fikk til når man skulle fordele 24 kg mel i poser på 0,6 kg, som vist i Figur 4.5. Her endret hun divisor til 600 g, og brukte videre ASD for å løse oppgaven.

Den siste suksessfylte forenklende strategien var DDD, som kun ble brukt to ganger. Denne strategien gikk ut på å dele opp dividend i deler som man lettere kunne finne ut hvor mange ganger divisor gikk opp i. I begge tilfellene ble strategien etterfulgt av en multiplikativ strategi, som førte til riktig løsning av oppgaven. Den samme strategien ble forsøkt brukt på divisor (DDS) i tre tilfeller, uten suksess. Dette er en strategi som ikke vil føre til riktig løsning i divisjonsoppgaver på grunn av at divisjon ikke er distributiv over addisjon og subtraksjon, slik multiplikasjon er. Det vil si at $a : (b + c) \neq a : b + a : c$. Det samme gjelder dersom man bytter ut addisjon med subtraksjon. En av elevene forsøkte å bruke denne strategien for å finne løsningen på $8 : 20$, hvor hun la sammen $8 : 16$ og $8 : 4$, noe som gav feil løsning. Den siste feilslåtte forenklende strategien, REV, ble kun brukt i én oppgave av én elev. Ved bruk av denne strategien reverserte eleven divisjonsstykket. Denne strategien ble tatt i bruk for å regne ut $8 : 20$, noe som gav resultatet $20 : 8 = 2{,}5$.



Figur 4.5 *Eleven endrer målenheten fra kg til g*

4.8 Utfordringer i arbeidet med divisjon utenfor heltallsområdet

Etter å ha kodet og kategorisert elevenes strategier, hadde jeg god oversikt over hvilke strategier elevene tok i bruk i divisjonsoppgaver med heltallsdivisor og desimaltallsdivisor. For å kunne se nærmere på hvilke utfordringer elevene møtte i arbeidet med disse divisjonsoppgavene og hvilke faktorer som så ut til å påvirke deres valg av strategi, måtte jeg analysere datamaterialet mitt fra en annen vinkel. Jeg sammenlignet da elevenes bruk av divisjonsstrategier og deres suksessrate i noen oppgavetyper med andre oppgavetyper for å se om jeg kunne finne svar på hvor de største utfordringene lå for elevene. I tillegg så jeg på hvilke strategier som ble benyttet i de ulike oppgavetypene, for å se om noen hadde mer påvirkning på elevenes valg av strategi enn andre. I denne delen av analysen grupperte jeg oppgavene etter ulike kriterier, og analyserte elevenes valg av strategi og strategienes suksessrate innenfor de forskjellige oppgavegruppene. Jeg brukte tre ulike grupperinger av oppgavene, der den ene grupperingen var basert på om tallene i oppgavene var heltall eller desimaltall, den andre grupperingen delte inn oppgavene i talloppgaver, målingsdivisjonsoppgaver og delingsdivisjonsoppgaver, mens den siste inndelingen tok hensyn til både antall siffer i oppgavene og om tallene var heltall eller desimaltall. Grunnen til at jeg ønsket å analysere elevenes strategier fra flere ulike vinkler var at jeg ville forsøke å finne ut av hva som hadde mest innvirkning på elevenes valg av strategier og hva som gav elevene de største utfordringene.

Jeg valgte først å analysere elevenes strategivalg i oppgaver med ulike talltyper, og delte oppgavene inn i fire grupper: større heltall dividert på mindre heltall ($H : h$), mindre heltall dividert på større heltall ($h : H$), heltall dividert på desimaltall større enn 1 ($H : D$) og heltall dividert på desimaltall mindre enn 1 ($H : d$). Denne grupperingen av oppgavene hadde en klar sammenheng med det første forskningsspørsmålet mitt, som fokuserte på heltallsdivisorer og desimaltallsdivisorer. For å få en tydelig oversikt over de ulike strategiene som ble brukt i de ulike oppgavetypene utviklet jeg tabeller som et analyseverktøy. Tabell 4.2 viser en oversikt over hvor mange ganger hver strategi ble brukt i de ulike oppgavetypene (bak skråstreken) og hvor suksessfylt strategiene var (foran skråstreken). For eksempel kan vi se at SAL ble benyttet to ganger i oppgaver med heltall dividert på desimaltall større enn 1 ($H : D$), men at bruken av denne strategien ikke var suksessfylt i noen tilfeller i disse oppgavene, derav 0/2. De oransje feltene markerer tilfeller hvor strategiene av og til førte til feil løsning, mens de hvite feltene kun inneholder suksessfylte strategier. I parentesen under oppgavetypen ser man hvor mange av hver oppgavetype som var med i hele studien, og i bakerste kolonne har jeg summert antall suksessfylte løsningsstrategier innenfor hver oppgavetype.

	Suksessrate og hyppighet av strategier											
Oppg.	GJA	ASD	AED	SAL	BMF	BFO	NOK	HAL	OAM	DDD	DDS	REV	Til sammen
H : h (15)	3/3	1/1		3/3	8/8	1/1	1/2	1/1					18/19
h : H (10)				0/1	1/1	7/8	1/1		1/1	1/1	0/2	0/1	11/16
H : D (8)		4/5		0/2	2/2	2/2		1/1	1/1		0/1		10/14
H : d (13)	1/1	4/5	3/3		1/1	5/5	2/2	1/1	2/2	1/1			20/21

Tabell 4.2 *Strategibruk og suksessrater i oppgaver med heltall og desimaltall*

Her ser man at additive strategier ble brukt i alle oppgavetyper bortsett fra når det var mindre heltall dividert på større heltall. Dette er logisk, ettersom det ikke er mulig å addere et større heltall med seg selv for å komme opp til et mindre heltall. BFO var den hyppigst brukte strategien i oppgaver med mindre heltall dividert på større heltall, og man kan se at det var en meget suksessfylt strategi. Det er tydelig at elevene støttet seg mest på å bruke forholdet mellom tallene for å løse disse oppgavene, da åtte av seksten opptalte strategier brukt i oppgavetypen $h : H$ var BFO. Det kommer også tydelig fram at BMF var en mye brukt strategi når et større heltall skulle divideres på et mindre heltall, noe som kan tyde på at elevene støttet seg til å bruke multiplikasjonsfakta når divisjonsoppgaven befant seg innenfor den lille multiplikasjonstabellen. I oppgavene med heltallsdivisor større og mindre enn dividend er det tydelig at multiplikative strategier er de mest brukte, mens additive strategier blir mer framtredende når divisor er desimaltall, og spesielt når divisor er desimaltall mindre enn 1. Man kan også se ut av denne tabellen at oppgavene med mindre heltall dividert på større heltall hadde flest antall feil løsninger av alle oppgavetypene. De ulike strategiene elevene tok i bruk førte til fem gale utav seksten løsninger. I denne sammenligningen kan man dermed si at de største utfordringene så ut til å ligge i divisjon hvor divisor var heltall større enn dividend. I oppgavene med desimaltallsdivisor større enn 1 brukte elevene strategier som førte til fire gale løsninger utav fjorten, så det var tydelig at disse oppgavetypene også var en utfordring for elevene. I oppgavetypene med heltallsdivisor mindre enn dividend og desimaltallsdivisor mindre enn 1 var det kun én gal løsning utav nitten og tjueen løsninger. Dette var ganske overraskende, ettersom flere tidligere forskningsartikler har pekt på at divisjon med desimaltallsdivisor mindre enn 1 er vanskeligere for elever enn divisjon med desimaltallsdivisor større enn 1 (Bell et al., 1984, Okazaki & Koyama, 2005). Som jeg nevnte tidligere i kapitlet, førte strategien SAL til feil løsning i tre av seks oppgaver, og man kan se ut av denne tabellen at de tre oppgavene hvor denne strategien var suksessfylt inneholdt heltallsdivisor mindre enn dividend. Da elevene brukte strategien for å løse oppgaver med heltallsdivisor større enn dividend og desimaltallsdivisor større enn 1, førte den til feil løsning. Gjennom å ha observert og fått forklart hvordan elevene brukte algoritmen, mener jeg at det kan se ut til at elevene har overgeneralisert denne regelen til å fungere for alle typer divisorer. En slik overgeneralisering av divisjonsregler fra heltallsområdet er vanlig, ettersom det er innenfor dette området elevene først konstruerer sin forståelse av divisjon (Anghileri, 2001b, Bell et al., 1984).

Neste steg i denne delen av analysen var å se på strategiene som elevene tok i bruk i tall-, målingsdivisjon- og delingsdivisjonsoppgaver, for å finne ut om det var noen spesielle utfordringer innenfor noen av disse oppgavetypene, og for å se på i hvor stor grad disse oppgavetypene påvirket elevenes valg av strategi. I Tabell 4.3 har jeg lagd en oversikt over hvor ofte strategiene ble brukt i disse oppgavetypene, og i hvilke tilfeller strategiene førte til gale løsninger. I denne oversikten kan man se at strategiene BMF og BFO ble hyppig brukt i alle oppgavetypene, med høy suksessrate. Man kan se en hovedvekt av bruk av multiplikative strategier i alle tre grupperingene, men også en jevn bruk av additive strategier. SAL ble mest brukt i talloppgavene, og det var også der denne strategien var suksessfylt. I tillegg kan man se at det er tilnærmet ingen bruk av forenklende strategier i løsningen av talloppgavene, noe som kan ha flere forklaringer. Ettersom talltypene i oppgavene ikke er med i denne sammenligningen, kan det være selve tallene i oppgavene som har hatt innvirkning på dette. I tillegg er den forenklende strategien OAM en strategi knyttet til tekstoppgaver med målenheter, og vil derfor ikke tas i bruk når det kun er rene talloppgaver.

	Suksessrate og hyppighet av strategier												
Oppg.	GJA	ASD	AED	SAL	BMF	BFO	NOK	HAL	OAM	DDD	DDS	REV	Til sammen
Tall (17)		3/3	2/2	3/4	6/6	5/5	1/2	1/1					21/23
Måling (17)	2/2	5/7	1/1	0/2	4/4	4/4	2/2	1/1	2/2	1/1	0/1		22/27
Deling (12)	2/2	1/1			2/2	6/7		1/1	2/2	1/1	0/2	0/1	15/19

Tabell 4.3 *Strategibruk og suksessrater i tall-, måling- og delingsdivisjonsoppgaver*

Antall feil løsninger innenfor de ulike oppgavetypene var størst i målingsdivisjon- og delingsdivisjonsoppgavene, hvor elevenes strategier førte til gale løsninger i henholdsvis fem av tjuesju og fire av nitten løsninger. I talloppgavene var det kun to gale løsninger av tjuetre, noe som kan tyde på at de største utfordringene for elevene lå i tekstoppgavene, og ikke i talloppgavene. Men igjen kan jeg nevne at talltypene ikke er med i beregningen i denne delen av analysen, og at det derfor kan være tallene i oppgavene som er med å bestemme vanskelighetsgraden. Å analysere elevenes strategibruk innenfor disse oppgavetypene er ikke like klart knyttet til mine forskningsspørsmål, ettersom denne delen av analysen ikke fokuserer på talltypene i oppgavene. Jeg ønsket allikevel å gjennomføre en analyse innenfor denne grupperingen, på grunn av at jeg ville undersøke om disse tre forskjellige oppgavetypene hadde noen stor innvirkning på elevenes valg av strategier. Etter å ha gjennomført denne analysen ser jeg at de ikke hadde noen sterk innvirkning på elevenes valg av strategier, sett bort i fra den lave bruken av forenklende strategier når oppgavene var rene talloppgaver.

Det kunne altså se ut til at talltypene i oppgavene i min studie hadde større innvirkning på elevenes strategier enn om oppgavene var tall-, målingsdivisjon- eller delingsdivisjonsoppgaver, og jeg valgte derfor å analysere elevenes strategibruk fra et tredje ståsted, hvor jeg vektla både antall siffer og talltypene i oppgavene. Tabell 4.4 viser en oversikt over hvor mange ganger de ulike strategiene ble brukt innenfor hver av disse oppgavetype og i hvor stor grad strategiene var suksessfylte. På grunn av liten plass i tabellen, har jeg lagd noen forkortelser som trenger forklaring. ENS, TOS, TRS og FIS er forkortelser for antall siffer som er i dividend og divisor. ENS betyr ensifra, TOS betyr tosifra, osv. Her må jeg også påpeke at ettersom jeg kun brukte desimaltallsdivisorer med ett siffer bak komma, vil jeg definere alle desimaltall i min studie som tosifra tall, uansett om de er større eller mindre enn 1. I tabellen har jeg også inkludert antall oppgaver av hver type som var med i studien i parentes bak oppgavetypen. Gjennom å analysere elevenes valg av strategier med grunnlag i denne grupperingen av oppgaver, så jeg at noen av oppdagelsene jeg hadde gjort i den første analysen, hvor jeg kun inkluderte talltypene i oppgavene, ble forsterket. I den første analysen så jeg at elevene brukte strategien BMF mye når oppgavene inneholdt heltallsdivisor mindre enn dividend, og mente at dette kunne være tilfelle på grunn av at elevene kunne bruke multiplikasjonsfakta de hadde kjennskap til fra multiplikasjonstabellen. En gjennomgang av den nye tabellen, hvor antall siffer i dividend og divisor var inkludert, viste meg at dette var svært sannsynlig, ettersom elevene brukte strategien BMF fem av ni ganger for å løse oppgaver hvor dividend var tosifra heltall og divisor ensifra heltall. Denne analysen viser også, som den første analysen, at elevene lyktes med strategien SAL når divisor var heltall mindre enn dividend. Men det analysen her føyer til denne observasjonen er at elevene kun brukte SAL i oppgaver hvor divisor var heltall mindre enn dividend dersom divisor var ensifra. I oppgavene hvor divisor var et tosifra heltall mindre enn dividend, ble ikke SAL tatt i bruk. I tabellen kommer det også fram at additive strategier ble mest brukt når divisor var desimaltall større og mindre enn 1. De additive strategiene ble, som sagt, ikke tatt i bruk når divisor var heltall større enn dividend, og man kan se at de heller ikke ble benyttet mye i de ulike oppgavene hvor divisor var heltall mindre enn dividend. Når det gjelder suksessraten til de ulike strategiene i denne grupperingen av oppgavetyper, ser man, i likhet med Tabell 4.2, at strategiene som elevene tok i bruk for å løse oppgaver med heltallsdivisor større enn dividend førte til flest feil. Tabell 4.4 viser også at de fleste av disse feilene oppstod når dividend var ensifra og divisor tosifra. Til sammen førte elevenes strategivalg til fem gale løsninger av femten i arbeidet med oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend, og fire av disse oppstod når dividend var ensifra og divisor tosifra.

	Suksessrate og hyppighet av strategier												
Oppgave	GJA	ASD	AED	SAL	BMF	BFO	NOK	HAL	OAM	DDD	DDS	REV	Til sammen
TOS : ENS H : h (7)	1/1			1/1	5/5	1/1		1/1					9/9
TOS : TOS H: h (2)	1/1				1/1								2/2
TOS : TOS H : D (8)		4/5		0/2	2/2	2/2		1/1	1/1		0/1		10/14
TOS : TOS h : H (7)					1/1	6/6			1/1	1/1	0/1		9/10
TOS : TOS H : d (11)	1/1	3/4	2/2		1/1	5/5	1/1		2/2	1/1			16/17
TRS : TOS H : h (4)	1/1	1/1			2/2		1/2						5/6
TRS : TOS H : d (1)							1/1	1/1					2/2
ENS : TOS h : H (3)				0/1		1/2					0/1	0/1	1/5
FIS : ENS H : h (1)				1/1									1/1
TRS : ENS H : h (1)				1/1									1/1
ENS : TOS H : d (1)		1/1	1/1										2/2

Tabell 4.4 *Strategibruk og suksessrater i oppgaver med ulikt antall siffer og talltyper*

4.9 Oppsummering av funn

Gjennom analysen av datamaterialet mitt kom jeg fram til flere funn som kunne svare på forskningsspørsmålene mine. I dette delkapitlet vil jeg forsøke å oppsummere de viktigste funnene mine, som i neste kapittel vil bli drøftet opp mot tidligere forskning på området og annen relevant litteratur presentert i teorikapitlet. Når det gjelder elevenes typiske misoppfatninger om divisjon, kom det fram, gjennom intervjuene, at to av elevene som så ut til å inneha noen av de typiske misoppfatningene om divisjon i oppgavesettet endret mening eller begrenset disse oppfatningenes gyldighetsområde i intervjuet. Den tredje eleven holdt på misoppfatningen om at divisjon alltid gjør mindre. Men det viste seg altså at de typiske misoppfatningene om divisjon også var gjeldende blant elevene i min undersøkelse.

I kodings- og kategoriseringsprosessen fant jeg svar på hvordan elevene gikk fram når de skulle løse divisjonsoppgaver med heltallsdivisor og desimaltallsdivisor, og jeg så at elevene i stor grad støttet seg til multiplikasjon og addisjon for å løse oppgavene. De aller mest brukte strategiene var de multiplikative strategiene BMF og BFO, som også hadde høy suksessrate. Elevene støttet seg hovedsakelig til BMF i oppgaver hvor divisor var heltall mindre enn dividend, og spesielt når divisor var ensifra, mens de brukte BFO mest i oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend. Den multiplikative strategien SAL ble brukt i seks oppgaver, hvorav den førte til riktig løsning kun tre ganger. Denne dårlige suksessraten ved bruk av SAL kan tyde på at elevene har overgeneralisert algoritmen fra heltallsområdet til å gjelde for alle typer divisorer. Det kom også fram, gjennom en analyse av elevenes valg av strategier for å løse divisjonsoppgaver av mange forskjellige typer, at tallene i oppgavene så ut til å ha mer innvirkning på elevenes strategivalg enn om det var talloppgaver eller tekstoppgaver. En analyse av elevenes valg av strategier i tall-, delingsdivisjon- og målingsdivisjonsoppgaver viste meg at elevene i stor grad brukte de samme strategiene alle disse oppgavetypene, noe som vil si at disse oppgavetypene ikke hadde noen særlig påvirkning på elevenes valg av strategi.

Den største utfordringen for elevene viste seg å være oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend, noe som kom fram gjennom at det var flest antall gale løsninger på disse oppgavene. I arbeidet med disse oppgavene brukte ikke elevene additive strategier, men støttet seg kun til multiplikative strategier og forenklende strategier. Det var også innenfor disse oppgavene at elevene tok i bruk flest feilslåtte forenklende strategier. Den mest brukte strategien for å løse disse oppgavene var allikevel den multiplikative strategien BFO, som også var svært suksessfylt. Den andre store utfordringen for elevene lå i oppgaver med desimaltallsdivisor større enn 1, noe som også kom fram gjennom antallet gale løsninger på disse oppgavene.

Halvparten av de gale løsningene på disse oppgavene kom av at elevene forsøkte å bruke SAL for å finne svaret, noe som ikke fungerte. I oppgavene hvor divisor var desimaltall mindre enn 1 var det kun én gal løsning blant elevene. Dette var overraskende, på grunn av at tidligere forskningsartikler jeg hadde lest uttrykte at dette var de mest utfordrende oppgavene for elevene. Det er vanskelig å fastslå hvorfor dette ikke var den største utfordringen blant elevene i min studie, men jeg vil forsøke å drøfte og tolke dette funnet i kapitlet som følger.

5. Drøfting

I dette kapitlet vil jeg drøfte mine funn opp mot tidligere forskning om divisjon og tolke og gi mening til dem gjennom teorien jeg presenterte i teorikapitlet. I tillegg til forskningslitteraturen og teoriene jeg presenterte i teorikapitlet, har jeg i forkant av drøftinga også gått gjennom elevenes læreverk *Abakus*, for å se på hvilke divisjonsstrategier som presenteres i disse bøkene og for å finne ut av hvilke talltyper som er inkludert i divisjonsoppgavene der. I starten av dette kapitlet vil jeg diskutere de mest brukte strategiene blant elevene i min studie, før jeg går inn i en drøfting av hva som ligger til grunn for en god forståelse av divisjon. Videre vil jeg ta for meg elevenes typiske misoppfatninger om divisjon, hvilke utfordringer mine oppgaver gav elevene og deres intuitive modeller, før jeg til slutt diskuterer hvilke faktorer som så ut til å ha størst innvirkning på elevenes valg av strategier.

5.1 Fra additive strategier til multiplikative strategier

Gjennom mine analyser kom jeg fram til at elevene i min undersøkelse i stor grad støttet seg til multiplikasjon og addisjon for å løse oppgavene jeg gav dem, og at de multiplikative strategiene BMF (bruk av multiplikasjonsfakta) og BFO (bruk av forholdet mellom tallene i oppgaven) ble brukt aller mest, med høy suksessrate. I Mulligan og Mitchelmore (1997) sin studie fant de at gjentatt addisjon var den mest brukte strategien på 2. og 3.trinn, mens noen av elevene hadde utviklet multiplikative strategier for å løse oppgavene. Anghileri (2001a, 2001b) så i sine studier at engelske elever på 5.trinn i stor grad støttet seg til standardalgoritmen, men at de også brukte en del grupperinger av divisor for å løse divisjonsoppgaver. I hennes studie kom det tydelig fram at elevenes bruk av standardalgoritmen var svært lite suksessfylt, og at grupperingsstrategiene hvor de brukte effektive delsummer av divisor var de mest suksessfylte. I en studie av Downton (2009) fant hun at 3.trinnselever støttet seg hovedsakelig til multiplikative strategier og gjentatt addisjon for å løse divisjons-oppgaver, både målingsdivisjon- og delingsdivisjonsoppgaver. Det kan altså se ut til at additive og multiplikative strategier er de mest brukte og mest suksessfylte strategiene for å løse divisjonsoppgaver på små- og mellomtrinnet, og at multiplikative strategier gjerne utvikles etter additive strategier, som en mer effektiv strategi.

I følge Anghileri (2001b) krever operasjonen divisjon at elevene har kunnskap om multiplikasjonsfakta og en evne til å bruke addisjon og subtraksjon i løsnings-metoden. Alle elevene i min studie støttet seg til både addisjon og multiplikasjon for å løse de ulike divisjonsoppgavene, men ingen brukte subtraksjon. Dette var litt overraskende, ettersom flere av de tidligere forskningsartiklene jeg hadde lest pekte på gjentatt subtraksjon som en av de vanlige divisjonsstrategiene. I læreverket *Abakus* (Pedersen, Andersson, & Johansson, 2010a, 2010b, Pedersen, Pedersen, & Skoogh, 2008a, 2008b), som var matematikkbøkene elevene i min studie brukte, kunne jeg se at gjentatt subtraksjon var en av løsningsmetodene som ble presentert for elevene. Jeg vil dermed tro at elevene hadde kjennskap til denne metoden, men at de valgte å ikke bruke den. Det kan være flere grunner til dette, for eksempel at ingen av elevene foretrakk denne metoden eller at tallene jeg brukte i oppgavene ikke la opp til å bruke denne strategien. Mulligan og Mitchelmore (1997) antydet i sin studie at gjentatt subtraksjon var en enklere divisjonsstrategi enn gjentatt addisjon, på grunn av at gjentatt addisjon er nærmere knyttet til multiplikative strategier. Gjentatt addisjon kan brukes både for å løse multiplikasjon- og divisjonsproblemer, og er derfor et godt utgangspunkt for å utvikle en forståelse av sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon og for å utvikle multiplikative strategier. Så en annen forklaring av hvorfor ingen av elevene i min studie brukte gjentatt subtraksjon kan være at de hadde bevegd seg videre fra denne divisjonsstrategien og over til en større bruk av additive og multiplikative strategier. I sin studie, hvor informantene var en del yngre enn i min studie, så Mulligan og Mitchelmore at elevene gikk gjennom en utvikling fra å bruke direkte telling, gjentatt subtraksjon og gjentatt addisjon til å bruke multiplikative operasjoner for å løse divisjonsoppgaver. Samtidig som elevene viste en progresjon i bruk av strategier, kunne de også se at det var en progresjon i hvor suksessfylte strategiene var. I min studie viste det seg også at de multiplikative strategiene var de mest suksessfylte strategiene, sett bort fra bruken av SAL (standardalgoritmen) og NOK (legge til/ta vekk nuller og flytte komma). De additive strategiene førte til flere feil på grunn av lange og rotete utregninger. Dette var også i tråd med Anghileris funn, hvor hun kunne se at elevene som brukte lange utregninger med gjentatt addisjon av små delsummer for å finne løsningen på oppgavene ofte gjorde en feil underveis, som førte til feil løsning på oppgaven (Anghileri, 2001a). Anghileris funn og mine funn støtter opp under tanken om at additive strategier er på et mer primitivt stadium enn multiplikative strategier når de brukes som løsningsstrategier i divisjonsoppgaver, ettersom de fører til en større andel feil og er mer tidkrevende å bruke. En god forståelse av multiplikasjon og av relasjonen mellom multiplikasjon og divisjon kan altså være til stor hjelp for elevene når de skal løse divisjonsoppgaver, noe som også Downton (2009) og Okazaki og Koyama (2005) kom fram til i sine studier. Downton så at elevenes forståelse av multiplikasjon hjalp dem i løsningen av divisjonsoppgaver, ettersom mange av elevene suksessfylt brukte multiplikative strategier for å løse divisjonsoppgavene hun gav dem. Okazaki og Koyama kunne i sin studie se at en forståelse av det inverse forholdet mellom multiplikasjon og divisjon var det som gjorde at elevene klarte å løsrive seg fra begrensningene som var satt av deres intuitive modeller.

Som sagt, var ikke elevenes bruk av den multiplikative strategien SAL særlig suksessfylt i min studie. I gjennomgangen av *Abakus*-bøkene så jeg at denne løsningsmetoden ble forklart og brukt i flere bøker, etter at gjentatt subtraksjon var blitt introdusert som løsningsmetode. Dette kan være en av grunnene til at denne strategien ble brukt av alle elevene. De tok i bruk SAL i seks oppgaver, hvorav tre oppgaver hadde heltallsdivisor mindre enn dividend, en oppgave hadde heltallsdivisor større enn dividend og to oppgaver hadde desimaltallsdivisor større enn 1. Strategien var kun suksessfylt i oppgavene hvor divisor var heltall mindre enn dividend, og hadde dermed en suksessrate på kun 50%. I Anghileris studier (2001a, 2001b) så hun at bruken av standardalgoritmen for å løse divisjonsoppgaver på 5.trinn var svært utbredt, i hennes undersøkelser var det den aller mest brukte strategien. Men også i studiene til Anghileri viste standardalgoritmen seg å være en svært lite suksessfylt strategi som førte til riktig løsning i kun halvparten av tilfellene, slik som i min undersøkelse. I min studie var nok grunnen til at strategien ikke var suksessfylt i oppgavene hvor divisor var heltall større enn dividend eller desimaltall større enn 1 en manglende forståelse av stegene i algoritmen. Det var tydelig at elevene hadde overgeneralisert algoritmen fra heltallsområdet, slik at de trodde at den også ville fungere med divisorer som ikke var heltall mindre enn dividend. Man kan si at elevene hadde utviklet et mentalt skjema for denne algoritmen, men at dette skjemaet var basert på memorering istedenfor forståelse, noe som førte til feil når elevene tok i bruk algoritmen i en situasjon med nye talltyper. Eksemplet jeg viste i analysekapitlet (se Figur 4.4) er et godt eksempel på hva som kan skje når elever bruker algoritmen uten forståelse, slik at de ikke tar hensyn til relasjonen mellom tallene i oppgaven.

5.2 En god forståelse av divisjon

Bruk av multiplikasjonsfakta (BMF) og proporsjonale eller omvendt proporsjonale forhold (BFO) var, som sagt, utbredt blant elevene i min studie for å løse de ulike divisjonsoppgavene, noe som viste meg at de hadde en god forståelse av det inverse forholdet mellom multiplikasjon og divisjon, og av relasjonene mellom dividend, divisor og kvotient. Å inneha en god forståelse av disse relasjonene er nødvendig for å mestre operasjonen divisjon, det holder ikke å kun se divisjon som det å dele ut noe likt (Downton, 2009). I divisjonsoppgaver hvor divisor alltid er heltall mindre enn dividend, trenger ikke elevene å utvikle et behov for å forstå disse relasjonene, og tanken om at divisjon er å dele ut likt kan bli gjenværende. Det vil si at elevenes intuitive modeller som bygger på målingsdivisjon og delingsdivisjon innenfor heltallsområdet (som forklart av Fischbein et al., 1985) ikke vil møte noen motstand. I *Abakus* ble det ikke brukt noen oppgaver som utfordret begrensningene om at divisor måtte være mindre enn dividend, at divisor måtte være et helt tall, eller at kvotient måtte være mindre enn dividend. Det vil si at elevene i min undersøkelse ikke hadde møtt noen utfordringer til sine intuitive modeller i sitt læreverk. Dersom elevene blir presentert for divisjonsoppgaver hvor divisor er heltall større enn dividend eller et desimaltall, vil behovet for å forstå relasjonene mellom dividend, divisor og kvotient kunne bli sterkere, ettersom det er vanskeligere å gi mening til tanken om å dele ut likt i oppgaver med disse talltypene. I møtet med slike nye situasjoner vil det som strider imot og utfordrer elevenes tidligere kunnskap skape en kognitiv ubalanse hos eleven, og dermed vil det oppstå et behov for å utjevne denne ubalansen. Gjennom en assimilasjon- og akkomodasjonsprosess vil eleven kunne utvide sine eksisterende mentale skjema eller konstruere ny kunnskap og nye mentale skjema for å gi mening til de nye situasjonene. Her kan vi se at Piagets likevektsteori er av betydning, på grunn av at menneskets streben etter å gjenopprette en kognitiv balanse mellom seg selv og omverdenen er nødvendig for å utvikle ny kunnskap (Holgersen, 1998). Dette er også i tråd med Vergnauds (1983, 1994) teori om utvikling av kunnskap innenfor det multiplikative begrepsmessige området, hvor han påstår at elever må møte nye situasjoner som utfordrer deres eksisterende kunnskap for å videreutvikle sin kunnskap innenfor dette området. I min studie så jeg at selv om elevene ikke hadde møtt noen utfordringer til sine intuitive modeller i læreverket, var det tydelig at i alle fall en av elevene hadde møtt noen nye divisjonssituasjoner mellom besvarelsen av oppgavesettet og intervjuet (se utsagn 25 fra intervju 1 i analysekapitlet). Han hadde opplevd en situasjon hvor 2 : 0,5 ble 4, noe som videre hadde ført til at denne eleven konstruerte ny kunnskap om divisjon, hvor tanken om at divisjon kan gjøre større ble gitt mening. Flere av divisjonsoppgavene som jeg brukte i min studie var også nye situasjoner for elevene, og kunne dermed føre til en kognitiv ubalanse hos elevene, og et behov for å gjenopprette denne balansen. I elevenes arbeid med divisjonsoppgaver utenfor heltallsområdet var det tydelig at de til tider forsøkte å innpasse, eller assimilere, de nye situasjonene inn i eksisterende kunnskap og mentale skjema, noe som av og til fungerte og av og til ikke fungerte. Dette gjaldt blant annet bruken av SAL i oppgaver med desimaltallsdivisor og bruken av andre og mer primitive strategier for å takle oppgaver med desimaltallsdivisor. Jeg vil komme tilbake til disse observasjonene senere i dette kapitlet. Men det er i alle fall tydelig at det å presentere elevene for nye situasjoner som utfordrer deres eksisterende kunnskap og mentale skjema er av stor betydning for at elevene skal kunne utvide sine skjema og utvikle ny kunnskap.

Som jeg beskrev i teorikapitlet, må elever inneha både begrepsmessig og prosessuell kunnskap om divisjon for å kunne forstå divisjon og løse divisjonsoppgaver (Chapin & Johnson, 2006). Det vil si at i tillegg til å kjenne igjen og ha kunnskap om hva en divisjonssituasjon innebærer, må elevene forstå hva de kan gjøre for å finne løsningen på situasjonen. Dette innebærer at elevene må ha utviklet mentale skjema for divisjon som inneholder erfaringer, kunnskap og tenkemåter innenfor divisjon (Lyngsnes & Rismark, 1999), samt at de må ha utviklet en forståelse for flere aspekter innenfor det multiplikative begrepsmessige området (Vergnaud, 1994, 2009). I intervjuene og gruppearbeidet i min studie klarte elevene å forklare og begrunne de aller fleste strategiene de tok i bruk, og viste dermed at det lå en egenkonstruert forståelse bak strategiene. Gjennom en kognitiv prosess, på egen hånd eller i samspill med andre, hadde elevene konstruert denne matematikkunnskapen og gjort den til sin egen. Blant annet kunne elevene forklare og begrunne de additive strategiene de tok i bruk for å løse divisjonsoppgavene, samt bruken av multiplikasjonsfakta og av relasjonene mellom tallene i oppgaven. En av grunnene til at elevene ikke hadde noen problemer med å forklare disse strategiene kan være at de var basert på elevenes egne intuitive strategier, som gjerne fokuserer på relasjonene mellom tallene i oppgaven. Man kan si at elevene hadde utviklet en god forståelse av disse strategiene innenfor det multiplikative begrepsmessige området, basert på erfaringer fra tidligere situasjoner (jf. Vergnaud, 1983, 1994). Men to av de multiplikative strategiene som ble tatt i bruk, NOK og SAL, hadde elevene problemer med å forklare. Ved bruk av strategien NOK flyttet elevene rundt på nuller og komma, uten å kunne forklare hvorfor dette ga riktig løsning på oppgaven. Ved bruk av denne løsningsstrategien kan man si at elevene baserte seg på et sant matematisk teorem, nemlig at det er et konstant proporsjonalt forhold mellom dividend og divisor, og at en endring i den ene størrelsen krever en forholdsmessig lik endring i den andre. Dette teoremet kan uttrykkes med symboler på følgende måte: $a{:}b = (a \cdot m){:}(b \cdot m)$ eller $a{:}b = (a{:}m){:}(b{:}m)$. Men det kunne se ut til at elevene selv ikke hadde utviklet en forståelse av hva dette teoremet innebærer, slik at de ikke forsto hva som faktisk ligger bak en flytting av komma eller fjerning/påsetting av nuller. I likhet med bruken av NOK, viste elevenes bruk av SAL (standardalgoritmen) i oppgaver hvor divisor var desimaltall at de kun hadde memorert disse strategiene, uten å utvikle en forståelse av hvordan og hvorfor de fungerer. Divisjonsalgoritmen baserer seg på en oppdeling av dividend, hvor man starter med å dividere dividend på divisor siffervis fra venstre side. På symbolform kan algoritmen uttrykkes på følgende måte: $(a+m){:}b = a : b + m : b$. I Figur 4.4, hvor eleven bruker SAL for å løse $24 : 1{,}2$ ser man at eleven følger stegene i algoritmen, men at utregningen blir feil på grunn av manglende forståelse av hva som ligger bak de ulike stegene. I sin løsning av oppgaven finner eleven at $24 : 1{,}2 = 11$, og det kommer klart fram fra elevens notasjon at det ikke ligger noen forståelse bak de ulike stegene som blir tatt.

I Anghileris studier (2001a, 2001b) fant hun at elevene i stor grad tok i bruk standardalgoritmen i løsningen av divisjonsoppgaver, men at kun halvparten av disse utregningene gav riktig løsning. Som sagt, kan grunnen til at problemer oppstår når elever tar i bruk algoritmen være at den ikke passer sammen med deres intuitive strategier. Algoritmen fokuserer på sifrene i oppgaven, og ikke tallene i sin helhet, slik at meningen bak utregningene i algoritmen kan være vanskelig å forstå. Uten en god forståelse av algoritmen vil ikke elever være i stand til å bruke den riktig i møtet med oppgaver som inneholder andre talltyper enn de som ble brukt i innlæringa av algoritmen. Dette kom klart fram i min studie, hvor elevene forsøkte å bruke algoritmen blant annet i oppgaver med desimaltallsdivisor. Bruken av standard-algoritmen i disse oppgavetypene kan tyde på at elevene forsøkte å assimilere de nye divisorene inn i eksisterende mentale skjema, som egentlig var begrenset til å inneholde heltallsdivisorer mindre enn dividend. En manglende forståelse av stegene i algoritmen førte til at en assimilasjon ikke var mulig, ettersom elevenes skjema ikke inneholdt kunnskap om bruk av algoritmen utenfor heltallsområdet. For å bruke algoritmen med forståelse og for å kunne utvide denne til å fungere med desimaltallsdivisorer og heltallsdivisorer større enn dividend, er det klart at en akkomodasjonsprosess og en utvikling av ny kunnskap og nye mentale skjema er nødvendig. For at elevene skal kunne utvikle ny kunnskap, er det avgjørende at de møter nye og utfordrende situasjoner som skaper en kognitiv ubalanse hos dem, slik at de vil føle et behov for å gjenopprette balansen gjennom å konstruere ny kunnskap hvor disse nye situasjonene blir gitt mening (jf. Holgersen, 1998). Elevene må altså presenteres for nye situasjoner som skaper et behov for å utvikle en forståelse av divisjonsalgoritmen og for å utvide algoritmen til å inkludere nye talltyper.

5.3 Typiske misoppfatninger blant elevene

Gjennom analysen kom det fram at en av elevene i min studie innehadde flere av de typiske misoppfatningene når det gjaldt divisjon. Denne eleven uttrykte at hun mente at svaret alltid ville bli mindre enn tallet man startet med i divisjon, altså at divisjon alltid gjør mindre. Hun mente også at 24 : 0,8 ville bli mindre enn 24, ettersom hun var av oppfatningen at svaret alltid skulle bli mindre enn tallet man startet med i divisjon. Etter er gjennomgang av elevenes læreverk *Abakus,* kunne jeg se at ingen av disse bøkene på 4., 5. eller 6.trinn inneholdt noen divisjonsoppgaver hvor divisor var desimaltall mindre enn 1 (Pedersen et al., 2010a, 2010b, Pedersen et al., 2008a, 2008b). Dette kan ha vært med på å bygge opp under elevens oppfatning om at divisjon alltid gjør mindre. En annen av elevene i studien hadde krysset av at hun var enig i at divisjon alltid gjør mindre og at man må dele et større tall på et mindre tall, men presiserte i intervjuet at det gikk an at divisor var desimaltall mindre enn 1 og heltall større enn dividend, men at dette ville gjøre oppgavene svært vanskelige, og at man måtte bevege seg utenfor heltallsområdet for å løse disse oppgavene. Hun avgrenset altså sine oppfatninger til å gjelde divisjon innenfor heltallsområdet, som var det hun kjente til fra før. Her kan også læreverket hatt innvirkning på elevens oppfatning av divisjon, ettersom *Abakus*-bøkene heller ikke inneholdt noen oppgaver hvor divisor var større enn dividend. Men hun mente at 24 : 0,8 ville bli større enn 24, med den begrunnelsen at man trengte flere enn tjuefire 0,8-litersflasker for å få 24 liter. Den tredje eleven i undersøkelsen hadde tydeligvis lært noe nytt før intervjuet, og endret på de to misoppfatningene som han hadde vist gjennom svarene i oppgavesettet. Han hadde krysset av at han var enig i at divisjon alltid gjør mindre og at 24 : 0,8 ville bli mindre enn 24, men kunne i intervjuet fortelle at begge disse oppfatningene var gale, og at han hadde skiftet mening. Selv om læreverket som elevene brukte ikke inneholdt noen oppgaver eller eksempler som kunne ha utfordret denne elevens oppfatninger om at divisjon alltid gjør mindre, er det tydelig at han må ha møtt noen nye situasjoner mellom besvarelsen på oppgavesettet og intervjuet som utfordret hans eksisterende kunnskap. Disse situasjonene har tydeligvis skapt en kognitiv konflikt hos eleven, og et behov for å gjenopprette en kognitiv balanse gjennom å konstruere ny og forbedret kunnskap. Ser man på dette i lys av Vergnauds (1983, 1994) teori om det multiplikative begrepsmessige området, kan man si at utviklingen av denne nye kunnskapen har utvidet elevens forståelse innenfor området, på grunn av at eleven har inkludert nye situasjoner i sin forståelse av divisjon. Her har altså nye erfaringer som eleven har gjort seg ført til at hans mentale skjema er blitt utviklet og endret, slik at to nye aspekter er blitt lagt til i hans kunnskap om divisjon: 1) divisjon kan både gjøre mindre og større og 2) en divisor mindre enn 1 vil gjøre kvotient større enn dividend.

Flere av de typiske misoppfatningene om divisjon som tidligere forskere hadde funnet hos sine informanter fantes altså også hos mine elever. Graeber og Baker (1992) fant i sin undersøkelse at elevene ofte klarte å gi mening til problemer hvor divisor er større enn dividend, men at de ikke klarte å symbolisere problemene. Dette så jeg også hos en av elevene i min undersøkelse, som gav mening til at man kan dividere et mindre tall på et større gjennom en kontekst hun kjente til, men som ikke klarte å symbolisere dette da hun brukte standardalgoritmen for å løse talloppgaven 124 : 5. I denne løsningen uttrykte hun at ”4 delt på 5 går ikke, så da blir det 4 i rest”. I noen tilfeller vil jo dette stemme, men ettersom dette var en talloppgave, kunne eleven i utgangspunktet benyttet seg av en hvilken som helst kontekst for å gi mening til 4 : 5. Men gjennom hennes forklaring av de ulike stegene hun utførte når hun brukte standardalgoritmen, var det tydelig at hun mente at 4 : 5 ikke var mulig. I intervjuet sa hun: ”hvis det er 4 stykker som skal dele på ei kake da, så får de en kvart hver”, noe som viste at hun hadde en forståelse av at divisjon kan gjennomføres selv om divisor er større enn dividend. Hun klarte altså å gi mening til et problem med disse talltypene, men hadde vanskeligheter med å gjennomføre dette med symboler. En grunn til at hun ikke fikk til å symbolisere dette kan være at hun alltid har brukt rest når hun har løst oppgaver med standardalgoritmen, slik at hun aldri har hatt noe behov for å regne videre i brøk eller med desimaltall. En annen grunn kan være påvirkningen fra elevens intuitive modeller av divisjon, som setter som begrensning at divisor skal være mindre enn dividend. En tredje grunn kan være at $1 : 4$, som var eksempelet hun viste forståelse for i intervjuet, er enklere å regne ut enn $4 : 5$. Det kan altså være mange grunner til at hun ikke klarte å løse dette problemet med symboler. Det viktigste å ta med seg fra denne observasjonen er at selv om elever uttrykker en forståelse for at divisor kan være større enn dividend, er det ikke sikkert de har en strategi for å kunne løse slike problemer ved bruk av symboler.

I en studie av Tirosh og Graeber (1989) kunne de se at det ikke alltid var overensstemmelse mellom lærerstudentenes uttrykte oppfatning av divisjon og deres handlinger. Av deres informanter klarte 87% å løse oppgaven $5 : 0{,}75$, selv om 52% av informantene hadde uttrykt at kvotient skulle være mindre enn dividend i divisjonsoppgaver (Tirosh & Graeber, 1989). Dette kom også fram hos en av elevene i min undersøkelse, som uttrykte at divisjon alltid gjør mindre, men som allikevel klarte å løse oppgaver hvor divisor var desimaltall mindre enn 1. En annen av elevene i undersøkelsen, som avgrenset denne oppfatningen til å gjelde heltallsområdet og som mente at det ville være veldig vanskelig å dividere på desimaltall mindre enn 1, mestret oppgaver av denne typen i intervjuene og gruppearbeidet. Det kan altså se ut til at elevenes uttrykte oppfatning av divisjon ikke alltid henger sammen med hvordan de håndterer divisjonssituasjoner. En grunn til dette kan være at elevenes intuitive modeller for divisjon (som definert av Fischbein et al. (1985)), påvirker elevenes definisjon av divisjon. Disse intuitive modellene kan føre med seg at elevene uttrykker en oppfatning om at divisjon alltid gjør mindre, selv om de er i stand til å løse oppgaver som går imot denne oppfatningen. Her kan man si at det er en uoverensstemmelse mellom elevenes uttrykte kunnskap og deres mentale skjema innenfor divisjon, skjema som viser seg å inneholde den nødvendige kunnskapen og tenkemåtene for å løse oppgavene. Det er vanskelig å si hvorfor elevene er i stand til å løse oppgaver som strider mot deres uttrykte oppfatning, men dette kan for eksempel være på grunn av at tallene i oppgavene er enkle å håndtere, eller at konteksten til oppgavene er meningsfylt for elevene. Men, selv om elevene klarer å løse oppgaver som strider mot disse misoppfatningene, mener jeg allikevel at deres uttrykte misoppfatninger om divisjon ofte kan være et hinder i utviklingen av en god forståelse av divisjon. Disse misoppfatningene kan gjøre det vanskelig for elevene å utvikle og konstruere en helhetlig forståelse av divisjon.

5.4 Utfordringer med nye talltyper i divisor

Flere av divisjonsoppgavene jeg ga elevene var nye situasjoner for dem, hvor de måtte bruke kunnskap de hadde fra tidligere situasjoner for å gi mening til og løse disse nye situasjonene. I følge Piagets teori om assimilasjon og akkomodasjon og Vergnauds teori om det multiplikative begrepsmessige området, er det møtet med nye og utfordrende situasjoner og den kognitive konflikten dette skaper hos elevene som fører til at deres eksisterende kunnskap utvides og videreutvikles til ny og bedre kunnskap (Holgersen, 1998, Vergnaud, 1983, 1994). Gjennom analysen av elevenes strategier kunne jeg se at elevene tok i bruk additive strategier i større grad i oppgaver hvor divisor var desimaltall enn i oppgaver hvor divisor var heltall. I oppgavene hvor divisor var heltall var det mer bruk av multiplikative strategier, som er en mer effektiv strategi. Additive strategier er, i følge Mulligan og Mitchelmore (1997) mer primitive enn multiplikative strategier, på grunn av at de er mindre effektive og at de ikke fokuserer like mye på sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon. Noen av elevene valgte altså å gå tilbake til en mer primitiv divisjonsstrategi for å takle den nye desimaltallsdivisoren, noe som kan tyde på at de forsøkte å innpasse, eller assimilere, den nye divisoren inn i allerede eksisterende mentale skjema. I oppgavene hvor divisor var heltall større enn dividend forsøkte ikke elevene å innpasse denne divisortypen i de additive strategiene, ettersom gjentatt addisjon ikke er en mulighet når divisor er større enn dividend. I disse oppgavene ble det brukt aller flest multiplikative strategier, men også en god del forenklende strategier. Det var i oppgaver hvor divisor var større enn dividend at den største forekomsten av forenklende strategier lå, og spesielt bruken av feilslåtte forenklende strategier. Det kan i dette tilfellet se ut til at elevene forsøkte å gi mening til disse nye situasjonene gjennom flere ulike strategier, med varierende suksess. Ettersom det var i disse oppgavene at elevene gjorde flest feil, kan det tyde på at oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend var svært vanskelig å innpasse i elevenes eksisterende mentale skjema. En av grunnene til dette kan være de tidligere nevnte intuitive modellene av divisjon som flere elever kan inneha, som setter begrensninger for deres forståelse av divisjon. Det kan se ut som at begrensningen om at divisor ikke kan være større enn dividend var en begrensning som elevene i min studie hadde bygd sine eksisterende strategier på, og at det derfor var vanskelig å finne gode strategier for å takle de nye situasjonene som brøt med denne begrensningen. Det at elevene ikke hadde mulighet til å bevege seg tilbake til de mer primitive additive strategiene for å løse disse oppgavene og for å gi mening til divisorer som var heltall større enn dividend kan og være en av faktorene som utgjorde at disse oppgavene var så utfordrende for elevene.

5.5 Utfordringer til elevenes intuitive modeller

I følge Fischbein et al. (1985) innehar mange elever (og ofte voksne) primitive intuitive modeller for divisjon som kan sette begrensninger for arbeid med divisjon utenfor heltallsområdet. I min studie inkluderte jeg mange oppgaver som brøt med disse begrensningene, både oppgaver hvor divisor var et tall større enn dividend eller et desimaltall (som bryter med tanken om å dele likt) og oppgaver hvor divisor var desimaltall mindre enn 1 (som bryter med tanken om at divisjon alltid gjør mindre). I likhet med Fischbein et al. fant jeg at elevene hadde større vanskeligheter med disse oppgavene enn med oppgaver som ikke brøt med de ulike begrensningene. I oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend eller desimaltall større enn 1, sank elevenes prestasjoner betraktelig. En nedgang i prestasjoner hos elevene på disse to punktene var i overensstemmelse med Fischbein et al. og Harel et al. (1994) sine funn. I oppgaver hvor ingen av begrensningene ble brutt var elevenes strategier suksessfylte i atten av nitten tilfeller, mens suksessraten sank i oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend og i oppgaver hvor divisor var desimaltall større enn 1. I oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend var elevenes strategier suksessfylte i elleve av seksten tilfeller, mens de i oppgaver med desimaltallsdivisorer større enn 1 var suksessfylte i ti av fjorten tilfeller. Dette funnet var også i tråd med funn fra Graeber og Tirosh (1990) sin studie, hvor kun ti av seksti 4. og 5.trinnselever klarte å løse en delingsdivisjonsoppgave hvor divisor var større enn dividend, mens 80-90% av elevene klarte en delingsdivisjonsoppgave og en målingsdivisjonsoppgave hvor divisor var heltall mindre enn dividend.

I motsetning til Fischbein et al. (1985), Harel et al. (1994) og Okazaki og Koyama (2005), som pekte på at elevenes prestasjoner sank svært mye i oppgaver hvor divisor var desimaltall mindre enn 1, var det i min studie ingen nedgang i elevenes prestasjoner fra oppgaver som ikke brøt med noen av begrensningene fra de intuitive modellene til oppgaver hvor divisor var desimaltall mindre enn 1. Det er vanskelig å peke på akkurat hvorfor dette ble tilfelle i min studie, men valg av tall i divisor kan være en av grunnene. I flere av oppgavene hvor divisor var desimaltall mindre enn 1, var divisor halvparten, en fjerdedel eller en tiendedel av divisor fra en tidligere oppgave, noe som kunne hjelpe elevene til å oppdage sammenhengen mellom tallene i oppgavene, og dermed ta i bruk BFO (bruk av forholdet mellom tallene i oppgaven) for å finne løsningen på den nye oppgaven. I noen av oppgavene var også divisor 0,5, som kan være en enklere divisor enn for eksempel 1,2 eller 4,8, på grunn av at den er halvparten av et heltall. I analysen kunne jeg se at BFO ble brukt i større grad i oppgavene hvor divisor var desimaltall mindre enn 1 enn i oppgavene hvor divisor var desimaltall større enn 1, noe som gjerne vil føre med seg en høyere suksessrate på grunn av at dette var en effektiv og suksessfylt strategi. Elevene brukte verken SAL (standardalgoritmen) eller DDS (å dele opp divisor) for å løse oppgavene med desimaltallsdivisor mindre enn 1, to strategier som bare førte til feil når de ble brukt i oppgavene med desimaltallsdivisor større enn 1.

Selv om jeg i utgangspunktet ikke mener at oppgaver hvor divisor er desimaltall mindre enn 1 er enklere enn oppgaver hvor de er større enn 1, kan det i min studie se ut til at elevene valgte mer suksessfylte og effektive strategier for å løse disse oppgavene, og at suksessraten derfor ble høyere. Det er også mulig at utvalget av elever i min studie kan ha hatt innvirkning på dette funnet, ettersom jeg gjennomførte en kvalitativ undersøkelse med kun tre elever. Det er for få elever og for lite datamateriale til å kunne trekke noen klare konklusjoner om dette funnet. Det er derfor nødvendig med flere undersøkelser som vektlegger talltypen i divisor for å undersøke om dette er tilfelle hos flere elever på mellomtrinnet, undersøkelser som inkluderer flere elever og som ikke legger opp til å bruke tidligere oppgaver som hjelpemidler i løsningen av oppgaver med desimaltallsdivisor mindre enn 1.

Flere tidligere forskere, som for eksempel De Corte og Verschaffel (1996) og Harel et al. (1994), fant i sine studier at elever hadde større problemer med oppgaver hvor divisor var desimaltall enn i oppgaver hvor divisor var heltall større enn dividend. I oppgaver hvor dividend og divisor var heltall og divisor var større enn dividend, så de at flere elever reverserte tallene i oppgaven, og at dette førte til flere feil enn i oppgaver hvor dividend var desimaltall. De fant også at elevenes suksessrate økte dersom dividend var desimaltall og divisor var heltall større enn dividend, på grunn av at elevene ikke reverserte tallene i like stor grad i disse oppgavene, noe som ville ført til at divisor ble et desimaltall. Jeg inkluderte ikke desimaltallsdividender i mine oppgaver, og kan derfor ikke sammenligne mellom oppgaver med heltallsdividend og desimaltallsdividend. Men deres funn om at desimaltallsdivisorer var mer problematisk enn heltallsdivisorer større enn dividend er motstridende til mine funn, hvor elevenes suksessrate var lavere i løsningen av oppgaver med heltallsdivisor større enn dividend enn i oppgaver med desimaltallsdivisorer. På grunnlag av funnene i sine studier antydet De Corte og Verschaffel og Harel et al. at begrensningen fra elevenes intuitive modeller om at divisor må være mindre enn dividend er mindre robust enn de andre begrensningene. Funnene i min studie kan peke i en annen retning, nemlig at begrensningen om at divisor må være mindre enn dividend er minst like sterk som de andre begrensningene fra elevenes intuitive modeller. De Corte og Verschaffel nevner også i sin forskningsartikkel at begrensningen om at divisor må være mindre enn dividend ikke nødvendigvis trenger å være en begrensning fra delingsdivisjonsmodellen, slik det ble definert av Fischbein et al. (1985), da det er enkelt å gi mening til delingsdivisjonsoppgaver hvor divisor er større enn dividend. Blant annet kan ett eple deles på flere barn og fem liter saft fordeles på flere enn fem glass. De antyder altså at denne begrensningen hovedsakelig kommer fra målingsdivisjonsmodellen, og at den derfor ikke vil påvirke elevene i noen stor grad dersom de støtter seg til delingsdivisjonsmodellen i arbeidet med oppgaver hvor divisor er større enn dividend. I min studie hadde jeg dette i bakhodet under utarbeidingen av oppgavene til elevene, og gav derfor elevene kun talloppgaver og delingsdivisjonsoppgaver hvor divisor var større enn dividend. Allikevel var det i arbeidet med disse oppgavene at elevenes strategier førte til flest feil. Det er vanskelig å si hvorfor elevene i min studie hadde større vanskeligheter med disse oppgavene enn med oppgaver hvor divisor var desimaltall, og jeg har verken datamateriale eller kapasitet til å kunne diskutere dette nærmere i denne masteroppgaven. Det er et interessant funn, og flere undersøkelser bør gjennomføres for å forsøke å finne ut hvilke faktorer det er som gjør at denne begrensningen i noen tilfeller ser ut til å være svakere, mens den i andre tilfeller er minst like sterk som begrensningene om at divisor må være et heltall og at kvotient må være mindre enn dividend.

5.6 Faktorer som kan virke inn på elevenes valg av strategier

I min studie inkluderte jeg hovedsakelig like grupper-oppgaver, i tillegg til en rate-oppgave i gruppearbeidet. Som jeg nevnte i metodekapitlet, kunne en inkludering av andre semantiske strukturer (som definert av Chapin og Johnson (2006)), hatt innvirkning på elevenes valg av strategier, men et større utvalg av semantiske strukturer i min studie ble valgt bort på grunn av forskningsspørsmålenes fokus, mine tidsrammer og min og elevenes kapasitet. Derfor vil ikke oppgavenes semantiske struktur ha noen stor rolle i denne drøftinga. Et av funnene fra min studie var at talltypene i oppgavene så ut til å ha større innflytelse på elevenes valg av strategier enn det oppgavetypene (talloppgaver, målingsdivisjon og delingsdivisjon) hadde. I analysen av elevenes strategier kunne jeg se at elevene tok i bruk både additive, multiplikative og forenklende strategier for å løse alle disse tre oppgavetypene, selv om forenklende strategier ble brukt i mindre grad i talloppgavene. Mulligan og Mitchelmore (1997) og Downton (2009) fant også i sine undersøkelser at tallene så ut til å spille en større rolle i elevenes valg av strategier enn det oppgavetypene gjorde. Mulligan og Mitchelmore så at elevene brukte forskjellige strategier i oppgaver som hadde lik semantisk struktur, noe som tydet på at tallene hadde større innvirkning på elevenes valg av strategier enn det den semantiske strukturen hadde. Downton fant i sine analyser av elevenes løsningsstrategier at mange elever ikke brydde seg om oppgavene var delingsdivisjon eller målingsdivisjon, men heller fokuserte på tallene i oppgavene i sine løsningsstrategier. I min studie så jeg at i løsningen av oppgaver med heltallsdivisorer større enn dividend økte bruken av strategien BFO blant elevene, mens bruken av additive strategier forsvant. Det kom altså fram at elevene helst brukte forholdet mellom tallene i disse oppgavene for å finne løsningen. I oppgaver hvor divisor var heltall mindre enn dividend var det tydelig at elevene foretrakk å bruke strategiene BMF og SAL. Her kunne det se ut til at elevene støttet seg mye til multiplikasjonsfakta, ettersom flere av disse oppgavene kunne plasseres innenfor den lille multiplikasjonstabellen. Når det gjaldt bruken av SAL, ble den mest brukt i oppgavene hvor divisor var ensifra heltall mindre enn dividend. Dette var et strategivalg som også Anghileri (2001a) fant i sin studie, hvor elevene heller tok i bruk strategier som innebar addisjon og dobling når divisor ble tosifra. I min studie var det også tydelig at elevene støttet seg mer til additive strategier når divisor var tosifra heltall mindre enn dividend, i tillegg til at de benyttet seg av BMF. I oppgaver med desimaltallsdivisor var ASD (addisjon av små delsummer) en hyppig brukt strategi, noe som kan tyde på at elevene støttet seg mer til addisjon når divisoren var et desimaltall. Som jeg også nevnte tidligere, ble BFO svært mye brukt for å løse oppgaver med desimaltallsdivisor mindre enn 1, noe jeg diskuterte grunnene til tidligere i dette kapitlet. Det var altså tydelig at tallene i oppgavene jeg gav elevene hadde større innflytelse på deres valg av strategier enn det oppgavetypene hadde.

Når det gjaldt de ulike strategienes suksessrate, kunne jeg se at den var ganske jevn i løsningene av delingsdivisjon- og målingsdivisjonsoppgavene, mens den var noe høyere i talloppgavene. At elevene hadde større suksess med talloppgavene enn med tekstoppgavene kan ha flere grunner. Blant annet kan tallene i talloppgavene ha vært enklere for noen av elevene, eller så kan noen av tekstoppgavene hatt en vanskelig kontekst for noen. Denne observasjonen er motstridende med funnene i Anghileri (2001a, 2001b) sine studier, hvor hun fant at suksessraten var høyere i løsningene av tekstoppgavene enn av talloppgavene. Både i min studie og i Anghileris studier ble det brukt enkle tekstoppgaver, hvor to tall (dividend og divisor) er oppgitt, og elevene skal finne kvotient. Slike tekstoppgaver trenger ikke alltid å være så meningsfylte for elevene, og flere elever vil heller ikke finne det nødvendig å bruke konteksten for å løse disse oppgavene. Dette kan være en av grunnene til de motstridende funnene i våre undersøkelser. Konteksten var kanskje ikke nødvendig for elevene i deres løsning av flere av oppgavene i våre undersøkelser, slik at det var en tilfeldighet at elevene hadde høyere suksessrate i løsningen av talloppgaver i min studie og av tekstoppgaver i Anghileris studier. Denne observasjonen faller utenfor mitt forskningsområde, og vil derfor ikke drøftes noe videre av meg i denne oppgaven. Men dette er nok et område som det kunne vært interessant å studere nærmere, for kunne si noe om i hvor stor grad elevene bruker konteksten for å løse divisjonsoppgaver.

6. Didaktiske refleksjoner

Ettersom jeg gjennomførte dette masterprosjektet som en kvalitativ studie med kun tre elever, er det ikke mulig å trekke generelle konklusjoner ut i fra mine funn. Men de gir allikevel en pekepinn på hvordan elever arbeider med divisjon, både innenfor og utenfor heltallsområdet, og antyder hvilke utfordringer elevene kan møte i dette arbeidet. Funnene fra denne undersøkelsen kan jeg ta med meg videre som lærer og bruke som hjelpemidler i min undervisning av multiplikasjon og divisjon. Et av hovedfunnene fra denne undersøkelsen kan sies å være elevenes bruk av additive og multiplikative strategier i løsningen av divisjonsoppgaver, både innenfor og utenfor heltallsområdet. Additive strategier kan utvikles og effektiviseres gjennom arbeid med nye og utfordrende situasjoner, slik at elevene etter hvert vil utvikle og støtte seg til multiplikative strategier for å løse divisjonsoppgaver. En utvikling av slike multiplikative strategier er nødvendig for at elevene skal kunne utvikle en forståelse av relasjonen mellom multiplikasjon og divisjon, som er en av grunnsteinene for å forstå disse regneartene. Det er viktig at man som lærer tenker over og får fram denne relasjonen i undervisninga, slik at ikke divisjon alltid blir løst med addisjon, subtraksjon eller algoritme. Gjennom å fokusere på sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon legger man til rette for at elevene kan utvikle en bedre forståelse av divisjon, samtidig som de får mulighet til å utvikle nye strategier for å løse divisjonsoppgaver.

Når det gjelder standardalgoritmen som brukes for å løse divisjonsoppgaver, har jeg sett gjennom min studie og flere tidligere forskningsartikler at denne algoritmen ofte blir innlært hos elevene uten forståelse. Som oftest lærer elevene algoritmen før de blir introdusert for desimaltallsdivisorer eller andre divisjonsoppgaver som beveger seg utenfor heltallsområdet, noe som kan føre til at elevene overgeneraliserer algoritmen til å gjelde i situasjoner hvor den vil føre til feil utregning. På grunn av at elevene ikke konstruerer en forståelse for de ulike stegene i algoritmen, vil de heller ikke kunne bruke denne løsningsmetoden på en god måte. Dette stiller kritiske spørsmål til introduksjonen av algoritmen i skolen: bør vi utsette undervisning av divisjonsalgoritmen, eller kan den likeså godt fjernes fra ”pensum”? Med dagens tilgang på kalkulatorer er kanskje ikke algoritmen like nødvendig? Den er en komprimert og effektiv strategi som kan hjelpe elever med å løse divisjonsoppgaver nokså hurtig på papir, men dersom det ikke ligger noen forståelse bak denne utregningen er det ganske begrenset hvor mye hjelp algoritmen vil gi elevene i ulike divisjonssituasjoner. Det viktigste er at elevene utvikler en god begrepsmessig og prosessuell forståelse av divisjon, slik at de forstår hva divisjon er og hvordan man kan bruke det. Derfor kan man stille seg litt kritisk til dagens bruk av divisjonsalgoritmen i skolen.

Gjennom denne studien kom det også tydelig fram at divisjonsoppgaver som bryter med elevenes intuitive modeller av divisjon fører til dårligere prestasjoner blant elevene. Dette er i samsvar med flere tidligere undersøkelser, og det antyder at elever ofte ikke blir presentert for divisjonsoppgaver som utfordrer deres intuitive modeller før de har jobbet med divisjon over lengre tid. For at elevene skal få mulighet til å utvikle en helhetlig forståelse av divisjon, hvor blant annet både heltall og desimaltall er inkludert, må de møte divisjonsoppgaver som utfordrer deres eksisterende forståelse av divisjon. Gjennom de kognitive konfliktene som oppstår i møtet med situasjoner som bryter med elevens eksisterende kunnskap, vil elevene få mulighet til å utvikle ny kunnskap og gjenopprette en kognitiv balanse. Det er altså av stor betydning at man som lærer tenker over hvilke oppgaver man presenterer for elevene, slik at elevene i størst mulig grad kan utvikle denne helhetlige forståelsen av divisjon. I tillegg til å inkludere ulike talltyper i oppgavene, er det også viktig at man inkluderer både deling- og målingsdivisjon, samt oppgaver av ulik semantisk struktur. Gjennom å møte et mangfold av divisjonssituasjoner vil eleven få best mulig grunnlag til å utvikle en god forståelse av divisjon. Et slikt mangfold vil også bryte med de ulike begrensningene fra elevenes intuitive modeller av divisjon, og dermed hjelpe elevene med å bli kvitt sine misoppfatninger.

Innledningsvis henviste jeg til kompetansemål i Kunnskapsløftet som omhandlet utvikling av varierte metoder for multiplikasjon og divisjon, og har gjennom min egen og andres forskning sett at elever har mange ulike strategier for å løse divisjonsoppgaver, som regel basert på en eller flere av de tre regneartene subtraksjon, addisjon eller multiplikasjon. I utviklingen av disse strategiene kan det se ut til at elevene går gjennom en stadig progresjon, hvor subtraksjon og addisjon gjerne brukes som mer primitive strategier før elevene etter hvert utvikler multiplikative strategier. For å legge best mulig til rette for at elevene utvikler varierte metoder for å løse divisjonsoppgaver, er det også av betydning at læreren bruker et mangfold av oppgaver for å presentere elevene for ulike oppgavetyper, forskjellige semantiske strukturer og en mengde talltyper. I tillegg til å hjelpe elevene med å overkomme sine misoppfatninger om divisjon og å utvikle en god forståelse av divisjon, vil lærerens bruk av mange forskjellige oppgaver kunne legge til rette for at elevene utvikler varierte divisjonsstrategier. På grunnlag av min studie og annen tidligere forskning kan det se ut til at et mangfold av talltyper i divisjonsoppgavene er spesielt viktig, ettersom mye tyder på at talltypene i oppgavene har større innvirkning på elevenes valg av strategier enn det oppgavetypene har.

Litteraturliste

Anghileri, J. (2001a). Development of division strategies for Year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal, 27*(1), 85-103.

Anghileri, J. (2001b). A study of progression in written calculation strategies for division. *Support for learning, 16*(1), 17-22.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effects of Number Size, Problem Structure and Context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129-147. doi: 10.2307/3482245

Chapin, S. H., & Johnson, A. (2006). *Math Matters: Understanding the Math You Teach, Grades K-8 (2nd Edition)*. Sausalito, USA: Math Solutions Publications.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6*(3), 219-242. doi: http://dx.doi.org/10.1016/0959-4752(96)00004-7

Downton, A. (2009). It seems to matter not whether it is partitive or quotitive division when solving one step division problems. I R. Hunter, B. Bicknell og T. Burgess (Red.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, s. 161-168). Palmerston North, NZ: MERGA.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17. doi: 10.2307/748969

Graeber, A. O., & Baker, K. M. (1992). LITTLE INTO BIG IS THE WAY IT ALWAYS IS. *The Arithmetic Teacher, 39*(8), 18-21. doi: 10.2307/41195169

Graeber, A. O., & Campbell, P. F. (1993). Misconceptions about Multiplication and Division. *The Arithmetic Teacher, 40*(7), 408-411. doi: 10.2307/41195817

Graeber, A. O., & Tirosh, D. (1990). Insights Fourth and Fifth Graders Bring to Multiplication and Division with Decimals. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 565-588. doi: 10.2307/3482392

Harel, G., Behr, M., Post, T. R., & Lesh, R. (1994). The Impact of the Number Type on the Solution of Multiplication and Division Problems: Further

Considerations. I G. Harel og J. Confrey (Red.), *Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (s. 363-386). Ithaca, NY, USA: State University of New York Press.

Holgersen, S.-E. (1998). Barnets kognitive udvikling. I T. Hansen, S.-E. Holgersen og T. Klausen (Red.), *Kognitionspsykologi - en introduktion* (s. 81-114). København: Unge pædagoger.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. London: The Falmer Press.

Lyngsnes, K., & Rismark, M. (1999). *Didaktisk arbeid*. Oslo: Universitetsforlaget AS.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation*. San Francisco, USA: John Wiley & Sons.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330. doi: 10.2307/749783

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Nunes, T., & Bryant, P. (2000). *Children Doing Mathematics*. Oxford, UK: Blackwell Publishers.

Okazaki, M., & Koyama, M. (2005). Characteristics of 5th Graders' Logical Development through Learning Division with Decimals. *Educational Studies in Mathematics, 60*(2), 217-251. doi: 10.2307/25047190

Pedersen, B. B., Andersson, K., & Johansson, E. (2010a). *ABAKUS Grunnbok 4A*: Aschehoug.

Pedersen, B. B., Andersson, K., & Johansson, E. (2010b). *ABAKUS Grunnbok 4B*: Aschehoug.

Pedersen, B. B., Pedersen, P. I., & Skoogh, L. (2008a). *ABAKUS Grunnbok 5B*: Aschehoug.

Pedersen, B. B., Pedersen, P. I., & Skoogh, L. (2008b). *ABAKUS Grunnbok 6A*: Aschehoug.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Ringheim, T. (2011). *Intuitive løysingsstrategiar for divisjon.* (Mastergradsoppgave), Høgskolen i Sør-Trøndelag, Trondheim.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice Elementary Teachers' Explicit Beliefs about Multiplication and Division. *Educational Studies in Mathematics, 20*(1), 79-96. doi: 10.2307/3482563

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag. Hentet 22.04.2014 fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. I R. Lesh og M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why? I G. Harel og J. Confrey (Red.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 41-61). Albany: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development, 52*(2), 83-94.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning. Studies in Mathematics Education Series: 6*: RoutledgeFalmer.

Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavesettet til hele klassen

Divisjonsoppgaver, 24.10.13

Navn:___________________________________

Del 1: Enig eller uenig?

Her skal du krysse av om du er enig eller uenig med setningene som står skrevet nedenfor. Tenk godt gjennom setningen før du krysser.

Divisjon er det motsatte av multiplikasjon	Enig		Uenig	
Når man dividerer vil svaret alltid bli mindre enn tallet man starter med	Enig		Uenig	
I divisjon skal man alltid dele et større tall på et mindre tall	Enig		Uenig	
Divisjon og multiplikasjon henger sammen	Enig		Uenig	
Det finnes flere måter å løse en divisjonsoppgave på	Enig		Uenig	
24 : 0,8 er mindre enn 24	Enig		Uenig	
24 : 0,8 er større enn 24	Enig		Uenig	
Det er ikke mulig å dele på et tall mindre enn 1	Enig		Uenig	

Del 2: Kan du finne flere løsningsmetoder på disse oppgavene?

Her skal du forsøke å løse noen oppgaver på så mange måter du kan. Det er veldig viktig at du forklarer de ulike løsningsmetodene dine godt, slik at jeg kan forstå hva du har tenkt. Skriv forklaringen om hva du gjør samtidig som du løser oppgaven, slik blir det lettere for deg også. Bruk gjerne tegning om du ønsker det.

1) 240 : 40
2) 1257 : 6
3) 12 : 48
4) 20 : 2,5
5) 8 : 0,2

Del 3: Divisjonsrekker
Her kommer det tre rekker med divisjonsoppgaver som du skal forsøke å finne løsningen på.

Rekke 1:	Rekke 2:	Rekke 3:
24 : 4 =	12 : 2 =	12 : 3 =
24 : 2 =	6 : 2 =	12 : 6 =
24 : 1=	3 : 2 =	12 : 12 =
24 : 0,5 =	1,5 : 2 =	12 : 24 =

Del 4: Tekstoppgaver
I denne delen skal du løse noen tekstoppgaver ved å bruke den løsningsmetoden du synes er enklest og best. Husk å forklar hvordan du tenker underveis! Det er veldig viktig for meg er at du forklarer hva du gjør for å finne en løsning på oppgaven.

Oppgave 1
På en fest var det 240 personer som skulle spise pizza. De ble servert til sammen 60 pizzaer. Hvor mye pizza ble det på hver?

Oppgave 2
a) Lone har et tau på 78 meter som hun skal dele i biter på 6 meter. Hvor mange biter vil hun få?
b) Ellen har et tau på 18 meter som hun skal dele i biter på 0,6 meter. Hvor mange biter vil hun få?

Oppgave 3
a) Anne bruker 75 gram kaffepulver når hun skal lage 5 liter kaffe. Hvor mye kaffepulver må hun bruke på 1 liter kaffe dersom hun vil ha den like sterk?
b) Henrik bruker 54 gram kaffepulver når han skal lage 3,6 liter kaffe. Hvor mye kaffepulver må han bruke på 1 liter kaffe dersom han vil ha den like sterk?

Vedlegg 2: Intervjuguide med oppgaver

Intervjuguide og oppgavene til intervjuene

Hva er målet med intervjuet?

- Få kjennskap til og innblikk i strategiene som elevene bruker når de løser divisjonsoppgaver med kun heltall
- Se om de typiske misoppfatningene elevene har av divisjon gjør at de får problemer når de skal løse divisjonsoppgaver hvor divisor er desimaltall eller et heltall større enn dividend
- Få kjennskap til og innblikk i strategiene som elevene bruker når de løser divisjonsoppgaver hvor divisor er desimaltall eller heltall større enn dividend
- Se på hvilke strategier som fungerer best i oppgaver hvor divisor er desimaltall eller et heltall større enn dividend

Informasjon til eleven før intervjuet:

- Jeg bruker video- og lydopptak for at jeg senere kan se gjennom på egen hånd, slik at jeg ikke glemmer alt vi har snakket om. Når jeg er ferdig med oppgaven min, vil jeg slette disse opptakene, og det vil ikke vises i oppgaven hvem jeg har intervjuet. Jeg kommer til å endre navnet på eleven og ikke gi noen tegn som kan gjøre at eleven gjenkjennes av andre når man leser oppgaven.
- Jeg ønsker å lære noe om hvilke hvordan eleven løser divisjonsoppgaver, også ved å bruke noen oppgaver som er utenfor det eleven allerede har lært.
- Det viktigste for meg er å få innblikk i hva eleven tenker og gjør når han/hun arbeider med divisjonsoppgaver, så jeg kommer til å dreie mye av samtalen rundt det.
- Dette er ikke et intervju hvor jeg stiller spørsmål som eleven skal svare på, men heller en samtale oss i mellom, hvor eleven forklarer meg hvordan han tenker, og jeg stiller spørsmål om det er noe jeg ikke forstår, noe jeg ønsker å høre mer om eller om jeg ser andre ting underveis som jeg lurer på.

Tanker om spørsmål jeg kan stille:

- Hvordan vil du løse denne oppgaven?
- Er det mulig å gjøre dette på noen annen måte?
- Hvorfor blir det vanskelig når det man deler på er et desimaltall? Ser du noen måter du kan løse dette på?
- Er det noen muligheter for å gjøre denne strategien mer effektiv/raskere?
- Utforske: hvordan, hvorfor, kan du gi et/noen eksempler på, enn hvis…

Gangen i intervjuet:

- Begynne med en eller to oppvarmingsoppgaver, for å få eleven til å bli mer avslappet.
- Samtale om hvorfor elevene er enige/uenige i utsagnene.

- Legge fram noen nye oppgaver, for å se og høre forklaringer av strategiene som elevene velger. Disse oppgavene blir både rene talloppgaver og tekstoppgaver, noen med kun heltall, andre med desimaltall i divisor. Her kan vi samtale om hvilke problemer som eventuelt oppstår når eleven skal løse divisjonsoppgaver med desimaltall.

Oppgaver til intervjuet:

- Oppvarming:
    - 42 : 6
    - 490 : 70
- Nye oppgaver med heltallsdivisorer og desimaltallsdivisorer, tekstoppgaver:
    - Eli hadde lagd 58 karameller, som hun skulle fordele på 7 poser. Hvor mange karameller fikk hun i hver pose?
    - Til Annas bursdag ble det kjøpt inn 12 liter brus. Det kom 24 personer til bursdagen som alle ville ha like mye brus. Hvor mye brus fikk hver? Enn om de hadde kjøpt inn 8 liter brus og skulle fordele dette på 20 personer? (Ev. går det an å bruke pizza fordelt på personer som kontekst i disse oppgavene).
    - Baker Hansen hadde 24 kg mel som han skulle fordele i poser på 12 kg, hvor mange poser fikk han til? Enn hvis posene var på 0,5 kg, 1,2 kg, 2,4 kg? (Her kan jeg se om elevene ser sammenhengen mellom oppgavene).
    - Einar skulle lage lange hoppetau på 3 meter, og hadde til sammen 27 meter med tau. Hvor mange hoppetau fikk han laget? Enn hvis han skulle laget hoppetau på 1,5 meter?
    - Jan hadde 16 liter saft som han skulle fordele på halvlitersflasker. Hvor mange flasker med saft fikk han da? Enn hvis flaskene han skulle fylle opp rommet 0,8 liter, hvor mange flasker ville han fått til da? (Går også an å utvide til 144 liter som skal fordeles på 0,5 og 0,8liters flasker, hvor mange da? Se om det oppstår noen problemer når dividenden blir større, med tanke på gjentatt addisjon som strategi for eksempel)
- Nye oppgaver med heltallsdivisorer og desimaltallsdivisorer, rene talloppgaver:
    - 18 : 6, 18 : 0,6, 18 : 60
    - 32 : 4, 32 : 0,4
    - 20 : 8, 20 : 80, 20 : 0,8

Vedlegg 3: Oppgavene til gruppearbeidet

Oppgaver til gruppearbeid 04.12.13

1) Janne skulle pakke alle bøkene sine i esker før hun flyttet. Hun hadde 128 bøker og 16 små esker som hun skulle pakke dem i. Hvor mange bøker fikk hun i hver eske, dersom hun fordelte bøkene likt?
2) Erling hadde kjøpt inn 10 liter brus til bursdagsselskapet sitt, og denne brusen skulle fordeles likt på alle de 25 personene som var i selskapet. Omtrent hvor mye brus ble det på hver?
3) Johanne hadde lagd 128 karameller som hun skulle gi bort i gaveposer med 16 karameller i hver pose. Hvor mange gaveposer fikk hun lagd?
4) Prisen på 2,8 meter silkebånd er 56 kr. Hva blir da prisen på 1 meter silkebånd?
5) Arne hadde kjøpt 6 kg appelsiner. Hver appelsin veide omtrent 0,3 kg. Omtrent hvor mange appelsiner hadde Arne kjøpt?
6) 6 : 30
7) 65 : 3,5
8) 11 : 0,5
9) 1421 : 7
10) 28 : 0,7